Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Buen planteamiento local de un problema de Cauchy asociado a una ecuación no lineal de Schrödinger cubica en espacios de modulación

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Fidel CUBA BALVIN

ASESOR

Dra. Yolanda Silvia SANTIAGO AYALA

Lima, Perú

2025



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Cuba, F. (2025). *Buen planteamiento local de un problema de Cauchy asociado a una ecuación no lineal de Schrödinger cubica en espacios de modulación*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Fidel Cuba Balvin
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	73150952
URL de ORCID	**https://orcid.org/0009-0005-8924-4347**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Yolanda Silvia Santiago Ayala
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445705
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-2516-0871
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Teófanes Quispe Méndez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06969492
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y **Análisis Funcional**

Grupo de investigación	Grupo de Ecuaciones Diferenciales, Análisis y Aplicaciones - GEDAAp
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: -12.063897 Altitud: -77.064461
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2024-2025
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:10 *horas del miércoles 16 de julio del 2025, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Mg. Teófanes Quispe Méndez (MIEMBRO) y la Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «* **BUEN PLANTEAMIENTO LOCAL DE UN PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA ECUACIÓN NO LINEAL DE SCHRÖDINGER CÚBICA EN ESPACIOS DE MODULACIÓN**» *presentado por el señor Bachiller* ***FIDEL CUBA BALVIN****, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ... Sobresaliente ... *con un calificativo promedio de* ... dieciocho ... (18).

A continuación, el presidente del Jurado, Dr. Carlos Alberto Peña Miranda, manifestó que el señor Bachiller ***FIDEL CUBA BALVIN****, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Siendo las 17:10 *horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.*

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
Presidente

Mg. Teófanes Quispe Méndez
Miembro

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Miembro Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala en mi condición de asesor acreditado con Resolución Decanal N° 000378-2025-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es **"Buen planteamiento local de un problema de Cauchy asociado a una ecuación no lineal de Schrödinger cúbica en espacios de modulación"**, presentado por el bachiller **Fidel Cuba Balvin** para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 12% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Lima, 19 de Julio de 2025



Firma del Asesor

Asesor: Yolanda Silvia Santiago Ayala

DNI: 06445705

BUEN PLANTEAMIENTO LOCAL DE UN PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA ECUACIÓN NO LINEAL DE SCHRÖDINGER CÚBICA EN ESPACIOS DE MODULACIÓN

Fidel Cuba Balvin

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
Presidente

Mg. Teófanes Quispe Méndez
Miembro

Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala
Miembro Asesor

Lima - Perú

Mayo - 10/05/2025

Dedico este trabajo a mi mamá Rosa y mi papá Fidel.

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por acogerme durantos los años de estudiante de pre-graduación en Matemática.

Del mismo modo, le agradezco a la profesora Dra. Yolanda Silvia Santiago Ayala, mi asesora, que dictó en el octavo ciclo de pre-graduación en Matemática, el curso de Ecuaciones Diferenciales Parciales, que fué fundamental para seguir la linea de investigación en Análisis y EDP, y también por ayudarme a concluir mi trabajo de tesis.

Por ultimo, agradecer a todos mis amigos(as) peruanos que de una u otra forma contribuyeron con sus ideas a la realización de este trabajo.

RESUMEN

BUEN PLANTEAMIENTO LOCAL DE UN PROBLEMA DE CAUCHY ASOCIADO A UNA ECUACIÓN NO LINEAL DE SCHRÖDINGER CÚBICA EN ESPACIOS DE MODULACIÓN

FIDEL CUBA BALVIN

Asesor: Dra. Yolanda Santiago Ayala

Título obtenido: Licenciado en Matemática

Consideramos el problema de valor inicial (PVI) asociado a una ecuación no lineal de Schrödinger cúbica con coeficientes constantes (c-NLS-cc)

$$\begin{cases} i\partial_t u + \alpha\partial_x^2 u + \beta|u|^2 u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

aplicando la teoria de Oh, T. & Wang, Y. [12] encontramos estimativas lineales, bilineales y trilineales, luego las usamos en el argumento de contracción. Así probamos el buen planteamiento local (BPL) del PVI (1) para datos iniciales en los espacios de modulación $M_s^{2,p}(\mathbb{R})$ con $s \geq \frac{1}{4}$, $2 \leq p < \infty$ y α, β son constantes reales.

PALABRAS CLAVES: Ecuación de Schrödinger cúbica, Espacios de Modulación, Buen planteamiento local.

ABSTRACT

LOCAL WELL-POSEDNESS OF A CAUCHY PROBLEM ASSOCIATED WITH A NONLINEAR CUBIC SCHRÖDINGER EQUATION IN MODULATION SPACES

FIDEL CUBA BALVIN

Advisor: Dra. Yolanda Santiago Ayala

Obtained title: Graduate in Mathematics

We consider the initial value problem (IVP) associated to a nonlinear cubic Schrödinger equation with constant coefficients (c-NLS-cc)

$$\begin{cases} i\partial_t u + \alpha\partial_x^2 u + \beta|u|^2 u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

using the theory of Oh, T. & Wang, Y. [12] we found linear, bilinear and trilinear estimates, and then we used them in the contraction argument, so we prove local well-posedness (LWP) to the IVP (2) for given data in the modulation spaces $M_s^{2,p}(\mathbb{R})$, with $s \geq \frac{1}{4}$, $2 \leq p < \infty$ and α, β are real constants.

KEYWORDS: Cubic Schrödinger equation, Modulation spaces, Local well-posedness.

Introducción

En los años actuales, el estudio del problema de valor incial (PVI) asociado a la ecuacion no lineal de Schrödinger cúbica con coeficientes constantes (c-NSL-cc) es abordado en diferentes espacios funcionales que los conocidos espacios de Sobolev H^s de tipo L^2. Estos son los espacios de Fourier-Lebesgue con su norma:

$$\|u\|_{\mathcal{FL}^{s,p}} = \|\langle\xi\rangle^s \widehat{u}(\xi)\|_{L^p},$$

y los espacios de modulación con su norma:

$$\|u\|_{M_s^{r,p}} = \|\langle n\rangle^s \|\psi_n(D)u\|_{L^2_x}\|_{\ell^p_n}.$$

Diremos que el problema de Cauchy (1) está localmente bien puesto (LBP) en un espacio de Banach X, si dado $u_0 \in X$, existe $T = T(\|u_0\|_X) > 0$ y una única $u \in C([-T,T],X)$ que resuelve (1). Además, requerimos que el mapa de solución que envía los datos iniciales u_0 a la solución $u(.)$ sea continuo de X hasta $C([-T,T],X)$. Diremos que (1) está globalmente bien planteado (GBP) en X, si el tiempo de existencia en el (LBP) puede hacerse arbitrariamente grande.

Así, para tener un panorama más claro, damos algunos resultado de buen pleanteamiento local (BPL) y buen planteamiento global (BPG) de ecuaciones de tipo dispersivas que son muy estudiadas a lo largo de la historia en los espacios de Sóbolev y en los espacios de modulación:

La ecuación no lineal de Schrödinger cúbica (c-NLS)

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u \pm 2|u|^2 u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3}$$

donde $u_0 \in M^{2,p}(\mathbb{R})$ o $M^{2,p}(\mathbb{T})$. La ecuación c-NLS (3) surge en varias situaciones físicas para la descripción de la propagación de ondas en óptica no lineal, fluidos y plasmas. También se sabe que es una de las ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) más simples con completa integrabilidad. Según los autores Oh, T. & Wang Y. [11], el principal objetivo de su investigación es explotar la estructura integrable completa de la ecuación y probar el buen planteamiento global de (3) en los espacios de modulación.

La ecuación de Korteweg-de Vries (KdV)

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + 6uu_x = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{4}$$

donde $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ o $H^s(\mathbb{T})$. La ecuación KdV (4) es un sistema completamente integrable que surgió como un modelo para ondas de gravedad solitarias en un canal

poco profundo. Métodos geométricos, analíticos y numéricos han jugado un papel importante en el estudio de existencia, unicidad y estabilidad de soluciones para el problema de Cauchy (4) tanto en entornos periódicos, como no periódicos.
Nuestro principal interés aquí son los resultados de buen planteamiento obtenido mediante métodos analíticos, para más detalles podemos leer [10], [13].
La ecuación de Korteweg-de Vries modificada (mKdV)

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + 6u^2 u_x = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{5}$$

donde $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ o $H^s(\mathbb{T})$. Para establecer la teoría de buena colocación local del PVI (5) asociado a la ecuación Korteweg-de Vries modificada (mKdV), podemos usar la técnica de Linares F. & Ponce G. [8], la idea de la prueba es usar estimativas lineales más un argumento de mapeo de contracción, allí empleamos la forma de ecuación integral de (5), ya que no se requiere diferenciabilidad de la solución. En la misma línea, también podemos leer a Tao T. [14] para observar sus estimativas más sutiles.
Por motivos de claridad para el PVI (1), solo consideramos el caso cuando $0 < \alpha \leq 1$, es decir,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \alpha \partial_x^2 u + \beta |u|^2 u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{6}$$

En consecuencia, establecemos nuestro teorema de buen planteamiento local (BPL) de la ecuación dispersiva (c-NLS-cc):

Teorema 0.1. *El PVI (6) está localmente bien puesto en los espacios de modulación* $M_s^{2,p}(\mathbb{R})$*, para cada* $s \geq \frac{1}{4}$ *y* $2 \leq p < \infty$.

A continuación, damos una estructura general de los capítulos que serán abordados en este trabajo de tesis.

En el capítulo número uno, damos las defincciones y propiedades de los espacios de Sobolev H^s, los espacios de Bourgain $X_\alpha^{s,b}, \alpha \in \mathbb{R}$ y los espacios de modulación $M_s^{r,p}$, aquí hacemos un énfasis en las propiedades de los espacios de modulación, pues allí es donde se trabajan los datos iniciales del PVI (6) y también es donde serán trabajadas nuestras estimativas lineales, bilineales y trilineales.

A seguir, en el capítulo número dos, debido al principio de Duhamel estudiamos las ecuaciones integrales asociadas al PVI (6), entonces usamos la definición de los espacios de Bourgain de tipo modulación, para encontrar las estimativas lineales homogeneas y no homogeneas. Una vez establecidas las estimativas lineales, procedemos a enunciar y demostrar las estimativas bilineales.

Luego, en el capítulo número tres, enunciamos las estimativas trilineares de la parte no lineal asociada a la ecuación integral del PVI (6), la técnica principal que usamos para su demostración es un argumento de dualidad, propiedades de la tranformada de Fourier, luego lo dividimos en casos, caso 1: casos triviales, caso 2: caso no resonantes, caso 3: caso semi resonante y caso 4: caso resonante.

Para concluir, en el capítulo número cuatro, damos un panorama general de la demostración de teorema principal, es decir usamos el teorema de punto fijo para la ecuación c-NLS-cc, y demostrar el buen planteamiento local del PVI (6).

Índice general

1. Preliminares **1**
1.1. Espacios de Sóbolev 1
1.2. Espacios de Bourgain 4
1.3. Espacios de Modulación 6

2. Estimativas lineales y bilineales **12**
2.1. Estimativa lineal homogenea 12
2.2. Estimativa lineal no homogenea 13
2.3. Estimativas bilineales 15

3. Estimativas trilineales **17**
3.1. Estimativa trilineal para la ecuación no lineal 17

4. Teorema del punto fijo para la ecuación c-NLS-cc **39**
4.1. Teorema fundamental 39
Bibliografía 42

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios de Sóbolev

Dado $s \in \mathbb{R}$. Los espacios de Sóbolev (de tipo L^2) en $\mathbb{R}^n$ son los siguientes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$:

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\, \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}. \tag{1.1}$$

Los espacios $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, es Hilbert cuando es equipado con el producto interno

$$\langle f, g\rangle_s := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi. \tag{1.2}$$

La norma inducida de este producto interno es

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

En particular, $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$. Para el caso $s \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\|f\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)} \sim \sum_{j=0}^{s} \|\partial_x^j f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ahora enunciamos las propiedades de los espacios previamente definidos:

Proposición 1.1. *(i) Si se cumple que $s \leq s'$, entonces $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) $H^s(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ definido como (1.2).
Así, podemos ver, que vía transformada de Fourier, el espacio $H^s(\mathbb{R}^n)$ es igual a $L^2(\mathbb{R}^n; (1+|\xi|^2)^s\, d\xi)$.

(iii) *Para cualquier $s \in \mathbb{R}$, el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en el espacio de Sóbolev $H^s(\mathbb{R}^n)$,*

(iv) *Si $s_1 \leq s \leq s_2$, con $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$, $0 \leq \theta \leq 1$, entonces*

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|^{\theta}_{H^{s_1}(\mathbb{R}^n)} \|f\|^{1-\theta}_{H^{s_2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración. Ver [8], pág.46. □

De la Proposición 1.1 item (i), si consideramos el caso $0 \leq s$, entonces se observa que

$$\begin{aligned} H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^0(\mathbb{R}^n) &= \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) / \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \\ &= \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) / f \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \\ &= L^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Luego, si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ entonces tenemos que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, siempre que $s \geq 0$. En general, la inclusión no se cumple para todo $s \in \mathbb{R}$.
Ejemplo: Tomamos $s < 0$, así es facil verificar que la distribución delta de dirac $\delta \in H^s(\mathbb{R}^n)$, para $-s > \frac{n}{2}$. Pero $\delta \notin L^2(\mathbb{R}^n)$.
A continuación enunciaremos un teorema que nos dara la equivalencia entre la definición de espacios de Sobolev (de tipo L^2) Definición 1.1 y la defínción convencional de los espacios de Sobolev, es decir:

Teorema 1.2. *Si $m \in \mathbb{N}$, entonces $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ si y solamente sí $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para cada multi índice α tal que $|\alpha| \leq m$, donde las derivadas son tomadas en el sentido de las distribuciones.*

Demostración. $(\rightarrow)$ Aplicando propiedades de la transformada de Fourier en el espacio de las distribuciones para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = (i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi). \tag{1.3}$$

Además, de la siguiente desigualdad

$$|\xi^\alpha| \leq (1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha_1}{2}} (1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha_2}{2}} ... (1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha_n}{2}} = (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}. \tag{1.4}$$

Luego, si $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ con $|\alpha| \leq m$ y usamos (1.3) junto con (1.4), tenemos que

$$\begin{aligned} \|(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi)|^2 \, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{|\alpha|} |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^m |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi = \|f\|^2_{H^m} < \infty. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Por lo tanto, $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
($\leftarrow$) Aplicar los argumentos similares de [7], pág. 307. $\square$

Teorema 1.3 (Inmersión de Sóbolev). *Si $s > n/2 + k$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ es continuamente inmerso en $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones con k derivadas continuas que tienden a cero en el infinito. En otras palabras, si $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s > n/2 + k$, entonces $f \in C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ y existe $c_s > 0$ tal que*

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} \leq c_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración. Ver [8], pág.47-48. $\square$

1.2. Espacios de Bourgain

Sean $s, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Los espacios de Bourgain en $\mathbb{R}^2$ son los siguientes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$:

$$X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) : (1+|\xi|)^s(1+|\tau+\alpha\xi^2|)^b \ \widehat{f}(\xi,\tau) \in L^2(\mathbb{R}^2)\}. \tag{1.6}$$

El espacio $X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ es un espacio de Banach cuando es equipado con la norma

$$\|f\|^2_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} := \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|)^{2s}(1+|\tau+\alpha\xi^2|)^{2b}\,|\widehat{f}(\xi,\tau)|^2\,d\xi d\tau. \tag{1.7}$$

Simplificando la notación, es decir usando la norma de los espacios $L^2_\xi(\mathbb{R})$ y $L^2_\tau(\mathbb{R})$, observamos que, la igualdad presentada acontinuación, es válida

$$\|f\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} = \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau+\alpha\xi^2\rangle^b\widehat{f}(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})L^2_\tau(\mathbb{R})},$$

en la definición de arriba hemos usado la siguiente notación:

$$\langle\xi\rangle := 1+|\xi|.$$

Además, podemos colocar la norma de f en el espacio de Bourgain $X_\alpha^{s,b}$, en función del grupo unitario asociado a la ecuacion no lineal de Schrodinger cúbica, es decir:

$$\|f\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \equiv \|U_\alpha(-t)f\|_{H^{s,b}}, \tag{1.8}$$

aquí estamos usando que $\{U_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ es el grupo unitario asociado a la parte lineal del PVI (1) y es definido como

$$\widehat{U_\alpha(t)f}(\xi) = e^{-i\alpha\xi^2 t}\widehat{f}(\xi).$$

En efecto, usando el cambio de varible $\tau' = \tau+\alpha\xi^2$, la definición de la transformada de Fourier en la variable temporal $\mathcal{F}_t$ y en la variable espacial $\mathcal{F}_x$, podemos conseguir:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)} &= \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau+\alpha\xi^2\rangle^b\widehat{f}(\xi,\tau)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})L^2_\tau(\mathbb{R})}\\
&= \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau'\rangle^b\widehat{f}(\xi,\tau'-\alpha\xi^2)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})L^2_{\tau'}(\mathbb{R})}\\
&= \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau'\rangle^b\mathcal{F}_t\{\mathcal{F}_x[f(x,t)](\xi)\}(\tau'-\alpha\xi^2)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})L^2_{\tau'}(\mathbb{R})}\\
&= \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau'\rangle^b\mathcal{F}_t\{e^{i\alpha\xi^2 t}\mathcal{F}_x[f(x,t)](\xi)\}(\tau')\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})L^2_{\tau'}(\mathbb{R})}\\
&= \|\langle\xi\rangle^s\langle\tau'\rangle^b\mathcal{F}_t\{\mathcal{F}_x[U_\alpha(-t)f(x,t)](\xi)\}(\tau')\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})L^2_{\tau'}(\mathbb{R})}\\
&= \|U_\alpha(-t)f\|_{H^{s,b}}.
\end{aligned}$$

Así, deducimos que en nuestras estimativas es válido usar cualquiera de las definiciones de las normas enunciadas, ya sea la definición (1.7) o la definición (1.8).
A seguir, damos las propiedades de los espacios de Bourgain, así como algunos teoremas de inmersión:

Proposición 1.4. *Sean $s, s', b, b' \in \mathbb{R}$. Si $s' \leq s$ y $b' \leq b$, entonces*

$$X^{s',b'}(\mathbb{R}^2) \subset X^{s,b}(\mathbb{R}^2),$$

y la relación de dualidad

$$\left(X^{s,b}(\mathbb{R}^2)\right)^* = X^{-s,-b}(\mathbb{R}^2),$$

es verificada.

Demostración. Ver [14], p.99-100. □

Proposición 1.5. *Sean $s, b \in \mathbb{R}$ y $b > 1/2$,*

$$X^{s,b}(\mathbb{R}^2) \subset C(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R})).$$

Demostración. Ver [8], p.156. □

Lema 1.6. *Para cualquier $b > 1/2$ y $s \in \mathbb{R}$,*

$$\|\eta_T(t)S(t)v_0\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \leq c\,T^{(1-2b)/2}\|v_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \tag{1.9}$$

Demostración. Ver [8], p.156. □

Lema 1.7. *Sean $\eta(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $u \in X^{s,b}(\mathbb{R}^2)$ y $s, b \in \mathbb{R}$. Se comprueba que*

$$\|\eta(t)u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)}.$$

Más aún, si $-\frac{1}{2} < b' \leq b < \frac{1}{2}$, entonces para cualquier $0 < T < 1$ tenemos

$$\|\eta(t/T)u\|_{X^{s,b'}(\mathbb{R}^2)} \lesssim T^{b-b'}\|u\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)}.$$

Demostración. Ver [14], p.101-102. □

Lema 1.8. *Sea $-\frac{1}{2} < b' \leq 0 \leq b \leq b+1$ y $0 < T \leq 1$. Entonces, son verdaderas las siguientes estimativas*

$$\|\Psi_T(t)\int_0^t f(t')\,dt'\|_{H^b_t(\mathbb{R})} \leq C\,T^{1-b+b'}\|f\|_{H^{b'}_t(\mathbb{R})}, \tag{1.10}$$

$$\|\Psi_T(t)\int_0^t S(t-t')f(t')\,dt'\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \leq C\,T^{1-b+b'}\|f\|_{X^{s,b'}(\mathbb{R}^2)}, \tag{1.11}$$

con la misma constante C en (1.10) y (1.11).

Demostración. Ver [4], p.394. □

Lema 1.9. *Para cualquier $b \geq 0$, $q \geq 2$ con $bq > 1$, se cumplen las siguientes estimativas*

$$\|\Psi_T(t)f\|_{H^b_t(\mathbb{R})} \leq C\{1 + (bq-1)^{-1/q}\,T^{-b+1/q}\}\,\|f\|_{H^b_t(\mathbb{R})}, \tag{1.12}$$

$$\|\Psi_T(t)f\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)} \leq C\{1 + (bq-1)^{-1/q}\,T^{-b+1/q}\}\,\|f\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)}. \tag{1.13}$$

Demostración. Ver [4], p.398. □

1.3. Espacios de Modulación

Definición 1.10. *Sea* $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$supp(\psi) \subset [-1,1] \quad y \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(\xi - k) = 1.$$

Entonces, dados $1 \leq r,p \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ *el espacio de modulación* $M^{r,p}_s(\mathbb{R})$ *es definido como la colección de todas las distribuciones temperadas* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *tal que* $\|f\|_{M^{r,p}_s(\mathbb{R})} < \infty$, *donde la norma* $M^{r,p}_s(\mathbb{R})$ *es definida por*

$$\|f\|_{M^{r,p}_s(\mathbb{R})} := \|\langle n\rangle^s \|\psi_n(D)f\|_{L^r_x(\mathbb{R})}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})}, \tag{1.14}$$

y $\psi_n(D)$ *es el operador multiplicador de Fourier, con multiplicador*

$$\psi_n(\xi) := \psi(\xi - n).$$

Los espacios de modulación se introdujeron por primera vez en el año 1983 por el matemático austriaco Hans Georg Feichtinger [3].

Lema 1.11. *Para cada* $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p,q < \infty$, *se cumplen los siguientes afirmaciones*
a) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset M^{r,s}_p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
b) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *es denso en* $M^{r,p}_s(\mathbb{R})$.
c) Para $s \geq 0$, $M^{r,p}_s(\mathbb{R})$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Ver [3], pág. 33-34. □

Definición 1.12. *Dado* $N \geq 1$ *diádico, definimos* P_N *como el proyector de Littlewood-Paley en las frecuencias (espacial)* $\{|\xi| \sim N\}$ *tal que*

$$\widehat{P_N f}(\xi) := \varphi_N(\xi)\widehat{f}(\xi), \tag{1.15}$$

donde $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\varphi_N(\xi) := \varphi(\frac{\xi}{N})$, $supp\,\varphi \subseteq \{1 \leq |\xi| \leq 4\}$ *y* $\varphi = 1$ *en* $\{2 \leq |\xi| \leq 3\}$. *También, para cada* $n \in \mathbb{Z}$ *definimos*

$$\widehat{\Pi_n f}(\xi) := \psi_n(\xi)\widehat{f}(\xi). \tag{1.16}$$

Lema 1.13. *(Bernstein) Para cada* $1 \leq q \leq p \leq \infty$, *obtenemos las siguientes estimativas*

$$\|P_N f\|_{L^p_x} \lesssim N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^q_x}, \tag{1.17}$$

$$\|\Pi_n f\|_{L^p_x} \lesssim \|f\|_{L^q_x}. \tag{1.18}$$

Demostración. Dado un $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ por la Definición 1.12 se cumple que $\widehat{P_N f}(\xi) = \varphi(\frac{\xi}{N})\widehat{f}(\xi)$. Lo que implica que

$$\begin{aligned} P_N f &= [\varphi(\frac{\cdot}{N})\widehat{f}(\cdot)]^\vee \\ &\sim [\varphi(\frac{\cdot}{N})]^\vee * f \\ &= N\varphi^\vee(N\cdot) * f. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Usando la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ y la desigualdad de Young, con $1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$

$$\begin{aligned} \|P_N f\|_{L^p_x} &\sim \|N\varphi^\vee(N\cdot) * f\|_{L^p_x} \\ &\leq N\|\varphi^\vee(N\cdot)\|_{L^r_x}\|f\|_{L^q_x} \\ &= N\frac{1}{N^{\frac{1}{r}}}\|\varphi^\vee\|_{L^r_x}\|f\|_{L^q_x} \\ &\lesssim N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^q_x}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Por lo tanto, obtenemos la estimativa (1.17).
Por otra parte, dado $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ por hipótesis se cumple que $\widehat{\Pi_n f}(\xi) = \psi(\xi - n)\widehat{f}(\xi)$. Entonces

$$\Pi_n f = [\psi(\cdot - n)]^\vee * f \sim \psi^\vee(\cdot)\, e^{2\pi i(\cdot)n} * f.$$

Usando la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ y la desigualdad de Young con $1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$

$$\begin{aligned} \|\Pi_n f\|_{L^p_x} &\sim \|\psi^\vee(\cdot)\, e^{2\pi i(\cdot)n} * f\|_{L^p_x} \\ &\leq \|\psi^\vee\|_{L^r_x}\|f\|_{L^q_x}. \end{aligned}$$

En consecuencia, obtenemos la estimativa (1.18). □

Lema 1.14. *Para $s \in \mathbb{R}$ y $p \geq 2$*

$$M^{2,p}_s(\mathbb{R}) \supset \mathcal{F}L^{s,p}(\mathbb{R}). \tag{1.21}$$

Demostración. Tomamos un $f \in \mathcal{F}L^{s,p}(\mathbb{R})$, por la definición de la norma $\|\cdot\|_{M^{2,p}_s}$ y usando la inclusión $L^p(X) \subset L^2(X)$ donde $|X| \sim 1$, con $p \geq 2$

$$\begin{aligned} \|f\|_{M^{2,p}_s(\mathbb{R})} &= \|\langle n\rangle^s \|\psi(\xi - n)\widehat{f}(\xi)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\ &\sim \|\langle n\rangle^s \|\widehat{f}(\xi)\|_{L^2_\xi([n,n+1])}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\ &\sim \|\|\langle \xi\rangle^s \widehat{f}(\xi)\|_{L^2_\xi([n,n+1])}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\ &\leq \|\|\langle \xi\rangle^s \widehat{f}(\xi)\|_{L^p_\xi([n,n+1])}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\ &= \|\langle \xi\rangle^s \widehat{f}(\xi)\|_{L^p_\xi(\mathbb{R})} \\ &= \|f\|_{\mathcal{FL}^{s,p}(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Implica que, $f \in M^{2,p}_s(\mathbb{R})$ y por tanto se cumple $M^{2,p}_s(\mathbb{R}) \supset \mathcal{F}L^{s,p}(\mathbb{R})$.

□

Definición 1.15. *Los espacios de tipo Bourgain $X^{s,b}_{p,\alpha}$ adaptado a los espacios de modulación $M^{2,p}_s(\mathbb{R})$, con la norma dada por*

$$\|f\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}} := \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{sp} \|\langle \tau-\alpha\xi^3\rangle^b \widehat{f}(\xi,\tau)\|^p_{L^2_{\tau,\xi}(\mathbb{R}\times[n,n+1])}\right)^{\frac{1}{p}} \sim \|\|\Pi_n f\|_{X^{s,b}_\alpha}\|_{\ell^p_n}. \quad (1.23)$$

Cuando $p=2$, el espacio $X^{s,b}_{p,\alpha}$ es simplemente reducido para el usual espacio de Bourgain $X^{s,b}_\alpha$.

Lema 1.16. *Sean $s\in\mathbb{R}$, $b>\frac{1}{2}$ y $p\geq 1$, entonces*

$$X^{s,b}_p \subset C(\mathbb{R}; M^{2,p}_s(\mathbb{R})). \quad (1.24)$$

Demostración. Dado $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, aplicamos la norma $\|\cdot\|_{M^{2,p}_s}$

$$\begin{aligned}
\|f(x,t)\|_{M^{2,p}_s(\mathbb{R})} &= \|\langle n\rangle^s \|\psi_n(D)f(x,t)\|_{L^2_x(\mathbb{R})}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\
&= \|\langle n\rangle^s \|\psi_n(\xi)\widehat{f}(\xi,t)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\
&\sim \|\langle n\rangle^s \|\widehat{f}(\xi,t)\|_{L^2_\xi([n,n+1])}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\
&= \|\langle n\rangle^s \left(\int_{[n,n+1]} |e^{-it\xi^3}\widehat{f}(\xi,t)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})}.
\end{aligned} \quad (1.25)$$

Usando inmersión de Sobolev para $b>\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\|f(x,t)\|_{M^{2,p}_s(\mathbb{R})} &\lesssim \|\langle n\rangle^s \left(\int_{[n,n+1]} \|e^{-it\xi^3}\widehat{f}(\xi,t)\|^2_{H^b_t(\mathbb{R})}\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\
&= \|\langle n\rangle^s \left(\int_{[n,n+1]} \|\langle\tau\rangle^b \widehat{f}(\xi,\tau+\xi^3)\|^2_{L^2_\tau(\mathbb{R})}\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\
&= \|\langle n\rangle^s \|\|\langle\tau-\xi^3\rangle^b \widehat{f}(\xi,\tau)\|_{L^2_\tau(\mathbb{R})}\, d\xi\|_{L^2_\xi([n,n+1])}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\
&= \|f\|_{X^{s,b}_p}.
\end{aligned} \quad (1.26)$$

Luego, tomamos el supremo de todas las normas en los reales $\mathbb{R}$, es decir,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(x,t)\|_{M^{2,p}_s(\mathbb{R})} \lesssim \|f(x,t)\|_{X^{s,b}_p}. \quad (1.27)$$

Por lo tanto, obtenemos la inmersión (1.24). □

Lema 1.17. *Para $p\geq q\geq 1$, se cumple:*

$$\|u\|_{X^{s,b}_p} \leq \|u\|_{X^{s,b}_q}. \quad (1.28)$$

Demostración. Usar la inclusión $\ell^q(\mathbb{Z})\subset\ell^p(\mathbb{Z})$ para $1\leq q\leq p$. □

Lema 1.18. *Para $p \geq q \geq 1$, se cumple:*

$$\|P_N u\|_{X_q^{s,b}} \lesssim N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|P_N u\|_{X_p^{s,b}}. \tag{1.29}$$

Demostración. Devido a la defínción de la norma $\|\cdot\|_{X_q^{s,b}}$ y la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$

$$\begin{aligned} \|P_N u\|_{X_q^{s,b}} &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{sq} \|\langle \tau - \xi^3\rangle^b \widehat{P_N u}\|^q_{L^2_{\tau,\xi}(\mathbb{R},[n,n+1])} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \{ \sum_{c_1 N \leq n \leq c_2 N} (c_n, 1)^q \}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \{ \sum_{c_1 N \leq n \leq c_2 N} {c_n}^p \}^{\frac{1}{p}} \{ \sum_{c_1 N \leq n \leq c_2 N} 1^r \}^{\frac{1}{r}} \\ &\sim N^{\frac{1}{r}} \|P_N u\|_{X_p^{s,b}} \\ &= N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \|P_N u\|_{X_p^{s,b}}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

donde $c_n = \langle n\rangle^{sq} \|\langle \tau - \xi^3\rangle^b \widehat{P_N u}\|^q_{L^2_{\tau,\xi}(\mathbb{R},[n,n+1])}$.

Por lo tanto, obtenemos la estimativa (1.29). □

Lema 1.19. *Para $2 \leq p < \infty$ y cualquier $\epsilon > 0$. Se cumple, la siguiente estimativa*

$$\sum_{\substack{N\geq 1 \\ dyadic}} N^{-\epsilon} \|P_N u\|_{X_p^{s,b}} \lesssim \|u\|_{X_p^{s,b}}. \tag{1.31}$$

Demostración. Usar la definición de la norma $\|\cdot\|_{X_p^{s,b}}$ y sumar sobre todos los diádicos $N \geq 1$. □

Lema 1.20. *Asumimos que f, f_1, f_2 y f_3 son funciones que pertenecen al espacio de Schwartz en $\mathbb{R}^2$. Entonces, se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}^6} \overline{\widehat{f}(\xi,\tau)} \widehat{f}_1(\xi_1,\tau_1) \widehat{f}_2(\xi_2,\tau_2) \widehat{f}_3(\xi_3,\tau_3) d\xi_1 d\tau_1 d\xi_2 d\tau_2 d\xi d\tau = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{f} f_1 f_2 f_3 (x,t) dx dt,$$

donde $\xi_3 = \xi - \xi_1 - \xi_2$ y $\tau_3 = \tau - \tau_1 - \tau_2$, es decir, $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \xi$ y $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau$.

Demostración. Ver [1], pág. 453. □

Definición 1.21. *Decimos que $f = g + O(1)$ si y solo si $|f - g| \lesssim 1$.*

Proposición 1.22. *Sea $|x| \gg 1$, y $x = n + O(1)$, entonces*

$$|x| \sim |n| \gg 1.$$

Demostración. Ver [2]. □

Proposición 1.23. *Sean $a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0$, si*

$$|a-b| \leq |a+b|, \tag{1.32}$$

entonces $ab > 0$ y $|a+b| = |a| + |b|$.

Demostración. Ver [2]. □

Lema 1.24. *Sea $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, entonces para cada $\epsilon > 0$, la siguiente estimativa es válida*

$$\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}} \frac{a_m b_n}{|m-n|\langle n\rangle^{\epsilon}} \leq c_{\epsilon} \|a_m\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \|b_n\|_{\ell^{p'}(\mathbb{Z})}. \tag{1.33}$$

Demostración. Usando desigualdad de Hölder para $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, desigualdad de Young para $\frac{1}{p'}+1 = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ con $r_1 = 1+\epsilon > 1$, $r_2 > 1$ y nuevamente desigualdad de Hölder para $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{r_3}$ con $r_3 = \frac{1+\epsilon}{\epsilon}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}} \frac{a_m b_n}{|m-n|\langle n\rangle^{\epsilon}} &\leq \|a_m\|_{\ell^p_m(\mathbb{Z})} \Big\| \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}} \frac{b_n}{|m-n|\langle n\rangle^{\epsilon}} \Big\|_{\ell^{p'}_m(\mathbb{Z})} \\
&\leq \|a_m\|_{\ell^p_m(\mathbb{Z})} \left\| \frac{1}{|k|} \right\|_{\ell^{r_1}_k(\mathbb{Z})} \left\| \frac{b_n}{\langle n\rangle^{\epsilon}} \right\|_{\ell^{r_2}_n(\mathbb{Z})} \\
&\leq c \|a_m\|_{\ell^p_m(\mathbb{Z})} \|b_n\|_{\ell^{p'}_n(\mathbb{Z})} \left\| \frac{1}{\langle n\rangle^{\epsilon}} \right\|_{\ell^{r_3}_n(\mathbb{Z})} \\
&\leq c_{\epsilon} \|a_m\|_{\ell^p_m(\mathbb{Z})} \|b_n\|_{\ell^{p'}_n(\mathbb{Z})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos la estimativa (1.33). □

Proposición 1.25. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\text{máx}\{|a-b|, |a+b|\} = |a| + |b|, \tag{1.34}$$

y

$$\text{máx}\{|a|, |b|\} = \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2}. \tag{1.35}$$

Demostración. Ver [2]. □

Proposición 1.26. *Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, y $c_1 + c_2 > 1$, entonces tenemos*

$$S(a,b) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq a,b}} \frac{1}{|n-a|^{c_1}|n-b|^{c_2}} < C < \infty,$$

donde C es una constante independiente de a y b.

Demostración. Ver [2]. □

Definición 1.27. *Dado un intervalo de tiempo I, definimos los espacios locales en el tiempo $X_p^{s,b}(I) := X_p^{s,b}(\mathbb{R}\times I)$ del espacio $X_p^{s,b}$ como la colección de todas las funciones u tal que*

$$\|u\|_{X_p^{s,b}(\mathbb{R}\times I)} := \text{ínf}\left\{\|v\|_{X_p^{s,b}} : v|_{\mathbb{R}\times I} = u\right\} \tag{1.36}$$

es finito.

Lema 1.28. *Sea $(s-\frac{1}{4})p > 1$ con $s > \frac{1}{4}$, entonces*

$$M_s^{2,\infty}(\mathbb{R}) \subset M_{\frac{1}{4}}^{2,p}(\mathbb{R}). \tag{1.37}$$

Demostración. Tomamos $f \in M_s^{2,\infty}(\mathbb{R})$ y aplicamos la definición de la norma $M_{\frac{1}{4}}^{2,p}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{M_{\frac{1}{4}}^{2,p}(\mathbb{R})} &= \|\langle n\rangle^{\frac{1}{4}}\|\psi_n(\xi)\widehat{f}(\xi)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\
&= \left\| \frac{\langle n\rangle^s}{\langle n\rangle^{s-\frac{1}{4}}}\|\psi_n(\xi)\widehat{f}\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})} \right\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\
&\leq \left\|\langle n\rangle^s\|\psi_n(\xi)\widehat{f}\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\right\|_{\ell^\infty_n(\mathbb{Z})} \left\| \frac{1}{\langle n\rangle^{s-\frac{1}{4}}} \right\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})} \\
&= c\|f\|_{M_s^{2,\infty}(\mathbb{R})} < \infty.
\end{aligned}$$

Así, $f \in M_{\frac{1}{4}}^{2,p}(\mathbb{R})$. Por lo tanto, obtenemos la inclusión (1.37). □

Nota 1.14. Observe que en el Lema 1.28 si consideramos $s \to \frac{1}{4}$ entonces $p \gg 1$.

Capítulo 2

Estimativas lineales y bilineales

Para enunciar las estimativas lineales y bilineales debemos presentar la ecuación integral asociada al PVI (1). Es decir, aplicando el método de Duhamel, tenemos que

$$u(x,t) = U_\alpha(t)u_0(x) + \int_0^t U_\alpha(t-t')F(u(t'))\,dt', \tag{2.1}$$

es solucion del PVI (1).
Ahora, supongamos que la solución existe para un intervalos de tiempo finito $[-T,T]$, entonces podermos substituir la ecuación (2.1) por la siguiente ecuacion integral

$$u(x,t) = \eta(t)U_\alpha(t)u_0(x) + \eta_\delta(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')F(u(t'))\,dt', \tag{2.2}$$

siempre que $T \leq \delta$, $0 < \delta \leq 1$ y $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ es una función de corte.

Una vez dado la forma explicita de la ecuación integral (2.2), procedemos a enunciar sus estimativas lineal homogenea y lineal no homogenea.

2.1. Estimativa lineal homogenea

Lema 2.1. *Dado $g \in M_s^{2,p}(\mathbb{R})$, $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ es una función de corte, $\{U_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo unitario asociado al PVI (1) y $\widehat{U_\alpha(t)g}(\xi) = e^{-i\alpha\xi^2 t}\widehat{g}(\xi)$. Entonces, para cada $s,b \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $0 < T \leq 1$, se cumple la siguiente estimativa:*

$$\|\eta(t)U_\alpha(t)g\|_{X_{p,\alpha}^{s,b}([0,T])} \lesssim \|g\|_{M_s^{2,p}(\mathbb{R})}. \tag{2.3}$$

Demostración. Usando transformada de Fourier en la variable espacial (x) y en la variable temporal (t) de la parte lineal del PVI (1), obtenemos:

$$\mathcal{F}_{x,t}\{\eta(t)U_\alpha(t)g(x)\}(\xi,\tau) = \widehat{\eta}(\tau+\alpha\xi^2)\,\widehat{g}(\xi). \tag{2.4}$$

Inmediatamente, de la parte lineal del PVI (1), aplicamos la definición de la norma $\|\cdot\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}}$, junto con la igualdad (2.4), implica que:

$$\begin{aligned}
\|\eta(t)U_\alpha(t)g\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}} &= \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{sp}\|\langle\tau+\alpha\xi^2\rangle^b\mathcal{F}_{x,t}\{\eta(t)U_\alpha(t)g(x)\}\|^p_{L^2_\tau(\mathbb{R})L^2_\xi([n,n+1])}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \|\langle n\rangle^s\|\langle\tau+\alpha\xi^2\rangle^b\widehat{\eta}(\tau+\alpha\xi^2)\widehat{g}(\xi)\|_{L^2_\tau(\mathbb{R})L^2_\xi([n,n+1])}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})}\\
&= \|\eta\|_{H^b(\mathbb{R})}\|\langle n\rangle^s\|\widehat{g}(\xi)\|_{L^2_\xi([n,n+1])}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})}\\
&\sim \|\eta\|_{H^b(\mathbb{R})}\|\langle n\rangle^s\|\psi(\xi-n)\widehat{g}(\xi)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})}\\
&= \|\eta\|_{H^b(\mathbb{R})}\|\langle n\rangle^s\|\widehat{\psi_n(D)g}(\xi)\|_{L^2_\xi(\mathbb{R})}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})}\\
&= \|\eta\|_{H^b(\mathbb{R})}\|\langle n\rangle^s\|\psi_n(D)g\|_{L^2_x(\mathbb{R})}\|_{\ell^p_n(\mathbb{Z})}\\
&= \|\eta\|_{H^b(\mathbb{R})}\|g\|_{M^{2,p}_s(\mathbb{R})}\\
&\lesssim \|g\|_{M^{2,p}_s(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Por tanto, de (2.5) conseguimos demostrar la estimativa (2.3). □

2.2. Estimativa lineal no homogenea

Lema 2.2. *Dado $F\in X^{s,b'}_{p,\alpha}(I)$, $\eta_T\in C^\infty_c(\mathbb{R})$ una función de corte y $\{U_\alpha(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ el grupo unitario asociado al PVI (1). Entonces, para cada $s,b,b'\in\mathbb{R}$ tal que $-1/2<b'\le 0\le b\le b'+1$, $1\le p<\infty$, $\alpha\in\mathbb{R}$ y $I=[0,T]$ con $0<T\le 1$, se cumple la siguiente estimativa:*

$$\left\|\eta_T(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')F(t')dt'\right\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}(I)}\lesssim T^{1-b+b'}\|F\|_{X^{s,b'}_{p,\alpha}(I)}. \tag{2.6}$$

Demostración. Aplicando la definición de la norma $\|\cdot\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}}$ al operador lineal $\eta_T(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')F(t')dt'$, podemos observar que:

$$N:=\|\eta_T(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')F(t')dt'\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}}$$

$$
\begin{aligned}
N &\sim \|\|\Pi_n(\eta_T(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')F(t')dt')\|_{X_\alpha^{s,b}}\|_{\ell_n^p(\mathbb{Z})} \\
&= \|\|U_\alpha(-t)\Pi_n(\eta_T(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')F(t')dt')\|_{H^{s,b}}\|_{\ell_n^p(\mathbb{Z})} \\
&\sim \|\langle n\rangle^s\|\mathcal{F}_x\{U_\alpha(-t)\psi_n(D)\{\eta_T(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')F(t')dt'\}\}(\xi)\|_{L_\xi^2 H_t^b}\|_{\ell_n^p(\mathbb{Z})} \\
&= \|\langle n\rangle^s\|U_\alpha(-t)\psi_n(D)\{\eta_T(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')F(t')dt'\}\|_{L_x^2 H_t^b}\|_{\ell_n^p(\mathbb{Z})} \\
&= \|\langle n\rangle^s\|\eta_T(t)\int_0^t \psi_n(D)U_\alpha(-t')F(t')dt'\|_{L_x^2 H_t^b}\|_{\ell_n^p(\mathbb{Z})}.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Entonces, aplicando el Lema de 1.8, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\text{LIN de (2,7)} &\lesssim T^{1+b'-b}\|\langle n\rangle^s\|\psi_n(D)U_\alpha(-t)F(t)\|_{L_x^2 H_t^{b'}}\|_{\ell_n^p(\mathbb{Z})} \\
&= T^{1+b'-b}\|\|\Pi_n(F)\|_{X^{s,b'}}\|_{\ell_n^p(\mathbb{Z})} \\
&\sim T^{1+b'-b}\|F\|_{X_p^{s,b'}}.
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Por lo tanto de (2.8), obtenemos la estimativa (2.6).
Para mas detalles sobre la prueba de la estimativa (2.6), podemos leer [4]. □

A continuación, vamos a enunciar las estimativas bilineales pues son necesarias en la demostración de las fundamentales estimativas trilineales.

2.3. Estimativas bilineales

Definición 2.3. *Dado $\theta > 0$, sea $I^\theta := (-\partial_x^2)^{\frac{\theta}{2}}$ el operador potencial de Riesz de orden $-\theta$ e I_-^θ es definido por*

$$\mathcal{F}_x(I_-^\theta(f,g))(\xi) := \int_{\xi=\xi_1+\xi_2} |\xi_1-\xi_2|^\theta \widehat{f}(\xi_1)\widehat{g}(\xi_2)\, d\xi_1. \tag{2.9}$$

Lema 2.4. *Sean $I^{\frac{1}{2}}$ y $I_-^{\frac{1}{2}}$ los operadores definidos anteriormente (con $\theta = \frac{1}{2}$) y $\alpha > 0$. Entonces, se cumple la siguiente estimativa:*

$$\|I^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}}(u_1,u_2)\|_{L^2_{x,t}} \lesssim \|u_1\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}} \|u_2\|_{X^{0,\frac{1}{2}+\alpha}}. \tag{2.10}$$

Demostración. Ver [5], pag. 8-9. □

Corolario 2.5. *Sean $N_1, N_2 \geq 1$ enteros diádicos tales que $N_1 \gg N_2$. Entonces, podemos afirmar que:*

$$\|P_{N_1} v P_{N_2} u\|_{L^2_{x,t}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \frac{1}{N_1} \|P_{N_1} v\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}} \|P_{N_2} u\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}. \tag{2.11}$$

Demostración. Devido al Lema 2.4 cuando $u_1 = P_{N_1} v$ y $u_2 = P_{N_2} u$, implica que

$$\|I^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}}(P_{N_1} v, P_{N_2} u)\|_{L^2_{x,t}} \lesssim \|P_{N_1} v\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}} \|P_{N_2} u\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}. \tag{2.12}$$

Más aún, las frecuencias de P_{N_1} y P_{N_2} son $|\xi_1| \sim N_1$ y $|\xi - \xi_1| \sim N_2$ respectivamente, así existen $c_1, c_2, C_1, C_2 > 0$ tales que $c_2 N_1 \leq |\xi_1| \leq C_2 N_1$ y $c_1 N_2 \leq |\xi - \xi_1| \leq C_1 N_2 \leq \frac{c_2 N_1}{2} \leq \frac{|\xi_1|}{2}$. Lo que implica que $-|\xi| \geq -\frac{3|\xi_1|}{2}$ y $|2\xi_1 - \xi| \geq \frac{|\xi_1|}{2}$. También podemos observar que $|\xi| \geq |\xi_1| - |\xi - \xi_1| \sim N_1 - N_2 \sim N_1$. En consecuencia, obtenemos

$$|2\xi_1 - \xi|^{\frac{1}{2}} \geq \frac{c_2^{\frac{1}{2}} N_1^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \ \text{ y } \ |\xi|^{\frac{1}{2}} \gtrsim N_1^{\frac{1}{2}}. \tag{2.13}$$

Usando la definición de los operadores $I^{\frac{1}{2}}$, $I_-^{\frac{1}{2}}$ y (2.13)

$$\begin{aligned}
\|I^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}}(P_{N_1} v P_{N_2} u)\|_{L^2_{x,t}} &= \left\| |\xi|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} |2\xi_1 - \xi|^{\frac{1}{2}} \widehat{P_{N_1} v}(\xi_1) \widehat{P_{N_2} u}(\xi - \xi_1) d\xi_1 \right\|_{L^2_{\xi,t}} \\
&\gtrsim N_1 \left\| \int_{\mathbf{R}} \widehat{P_{N_1} v}(\xi_1) \widehat{P_{N_2} u}(\xi - \xi_1)\, d\xi_1 \right\|_{L^2_{\xi,t}} \\
&= N_1 \|\widehat{P_{N_1} v} * \widehat{P_{N_2} u}(\xi)\|_{L^2_{\xi,t}} \\
&\sim N_1 \|\mathcal{F}_x(P_{N_1} v P_{N_2} u)(\xi)\|_{L^2_{\xi,t}} \\
&= N_1 \|P_{N_1} v P_{N_2} u\|_{L^2_{x,t}}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Por lo tanto, de (2.12) y (2.14) obtenemos la estimativa (2.11). □

Corolario 2.6. *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $|m+n|, |m-n| > 2$. Entonces, tenemos que:*

$$\|\Pi_m v \Pi_n u\|_{L^2_{x,t}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \frac{1}{\sqrt{|m+n||m-n|}} \|\Pi_m v\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}} \|\Pi_n u\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}. \tag{2.15}$$

Demostración. Devido al Lema 2.4 cuando $u_1 = v_m = \Pi_m v$ y $u_2 = u_n = \Pi_n u$, obtenemos

$$\|I^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}}(v_m, u_n)\|_{L^2_{x,t}} \lesssim \|v_m\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}} \|u_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}. \tag{2.16}$$

El soporte de $\widehat{v_m}$ y $\widehat{u_n}$ son $|\xi_1 - m| \leq 1$ y $|\xi - \xi_1 - n| \leq 1$ respectivamente. Lo que implica que

$$\begin{aligned} |\xi| &= |\xi - \xi_1 - n + \xi_1 + n - m + m| \\ &\geq |m+n| - |\xi_1 - m| - |\xi - \xi_1 - n| \\ &\geq |m+n| - 2 \\ &\geq \frac{|m+n|}{3} \end{aligned} \tag{2.17}$$

y

$$\begin{aligned} |2\xi_1 - \xi| &= |\xi_1 - \xi + \xi_1| \\ &= |\xi_1 - m - \xi + \xi_1 + n + m - n| \\ &\geq |m-n| - |\xi - \xi_1 - n| - |\xi_1 - m| \\ &\geq |m-n| - 1 - 1 \\ &= |m-n| - 2 \\ &\geq \frac{|m-n|}{3}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Usando la definición de los operadores de Riesz $I^{\frac{1}{2}}$, $I_-^{\frac{1}{2}}$, (2.17) y (2.18)

$$\begin{aligned} \|I^{\frac{1}{2}} I_-^{\frac{1}{2}}(v_m u_n)\|_{L^2_{x,t}} &= \left\| |\xi|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} |2\xi_1 - \xi|^{\frac{1}{2}} \widehat{v_m}(\xi_1) \widehat{u_n}(\xi - \xi_1)\, d\xi_1 \right\|_{L^2_{\xi,t}} \\ &\geq \frac{|m-n|^{\frac{1}{2}} |m+n|^{\frac{1}{2}}}{3} \left\| \int_{\mathbf{R}} \widehat{v_m}(\xi_1) \widehat{u_n}(\xi - \xi_1)\, d\xi_1 \right\|_{L^2_{\xi,t}} \\ &\gtrsim |m-n|^{\frac{1}{2}} |m+n|^{\frac{1}{2}} \|\widehat{v_m} * \widehat{u_n}(\xi)\|_{L^2_{\xi,t}} \\ &= |m-n|^{\frac{1}{2}} |m+n|^{\frac{1}{2}} \|\widehat{v_m u_n}(\xi)\|_{L^2_{\xi,t}} \\ &= |m-n|^{\frac{1}{2}} |m+n|^{\frac{1}{2}} \|v_m u_n\|_{L^2_{x,t}}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Por lo tanto, de (2.16) y (2.19) obtenemos la estimativa (2.15). □

Capítulo 3

Estimativas trilineales

3.1. Estimativa trilineal para la ecuación no lineal

Proposición 3.1. *Considere las siguientes funciones $u_1, u_2, u_3 \in X^{s,b}_{p,\alpha}([0,T])$. Entonces, se verifica la siguiente estimativa trilineal*

$$\|u_1\overline{u_2}u_3\|_{X^{s,b'}_{p,\alpha}([0,T])} \lesssim \|u_1\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}([0,T])}\|u_2\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}([0,T])}\|u_3\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}([0,T])}, \tag{3.1}$$

para cada $s \geq \frac{1}{4}$, $2 \leq p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $0 < T \leq 1$ y para algún $b > \frac{1}{2}$, $b' > -\frac{1}{2}$.

Demostración. En efecto: Para cada $0 < \epsilon \ll 1$. Sea $b' = -\frac{1}{2} + 2\epsilon$ y $b = \frac{1}{2} + \epsilon$, entonces de (3.1), vamos a probar que la estimativa

$$\|u_1\overline{u_2}u_3\|_{X^{s,-\frac{1}{2}+2\epsilon}_{p,\alpha}} \lesssim \|u_1\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}}\|u_2\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}}\|u_3\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}}, \tag{3.2}$$

es verdadera.
Además, para $s \geq \frac{1}{4}$ y $\xi + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ tenemos $\langle\xi\rangle^s \lesssim \langle\xi_1\rangle^s\langle\xi_2\rangle^s\langle\xi_3\rangle^s$. Entonces, es suficiente probar la estimativa trilineal (3.2) para $s = \frac{1}{4}$.
Así, usando un argumente de dualidad

$$\|u_1u_2u_3\|_{X^{s,-\frac{1}{2}+2\epsilon}_{p,\alpha}} = \sup_{\substack{\widetilde{z}\in X^{-s,\frac{1}{2}-2\epsilon}_{p',\alpha} \\ \|\widetilde{z}\|\leq 1}} \left|\int_{\mathbb{R}^2} u_1u_2u_3\widetilde{z}\,dxdt\right|, \tag{3.3}$$

cuando $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\|\widetilde{z}\| = \|\widetilde{z}\|_{X^{-s,\frac{1}{2}-2s}_{p'}}$.
Entonces, probar la estimativa trilineal (3.2) es equivalente a probar

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} u_1u_2u_3\langle\partial_x\rangle^s z\,dxdt\right| \lesssim \|u_1\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}}\|u_2\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}}\|u_3\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}}\|z\|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_{p',\alpha}}, \tag{3.4}$$

donde $\widehat{\widetilde{z}} = \langle\xi\rangle^s \widehat{z}$.
Usando propiedades de la transformada de Fourier, probar (3.4) es equivalente a probar

$$\begin{aligned}\left|\int_{\substack{\xi+\xi_1+\xi_2+\xi_3=0\\ \tau+\tau_1+\tau_2+\xi_3=0}} \langle\xi\rangle^s \widehat{u_3}(\xi_3,\tau_3)\widehat{u_1}(\xi_1,\tau_1)\widehat{u_2}(\xi_2,\tau_2)\widehat{z}(\xi,\tau)\, d\xi_1 d\tau_1 d\xi_2 d\tau_2 d\xi d\tau\right| \\ \lesssim \|u_3\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \|u_1\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \|u_2\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \|z\|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_{p',\alpha}}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ahora, usamos $\xi_{max}, \xi_{med}, \xi_{min}$ para denotar el reordenamiento de ξ_1, ξ_2, ξ_3 tal que $|\xi_{max}| \geq |\xi_{med}| \geq |\xi_{min}|$.
Debido a la siguiente igualdad $\xi + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$ tenemos que $|\xi| = |\xi_1 + \xi_2 + \xi_3| \lesssim |\xi_{max}|$.
En lo siguiente, aplicamos descomposición diádica $|\xi_j| \sim N_j$ y $|\xi| \sim N$ para $N_j, N \geq 1$ diádico. En este caso, usamos la notación: $N_{max} \sim |\xi_{max}|$, $N_{med} \sim |\xi_{med}|$ y $N_{min} \sim |\xi_{min}|$.
Usamos σ, σ_j para denotar

$$\sigma := \tau - \xi^3, \ \text{ y } \ \sigma_j := \tau_j - \xi_j^3, \ j = 1, 2, 3,$$

y

$$\sigma_{max} := \text{máx}\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\}.$$

Finalmente, usamos la notación

$$u_N := P_N u \ \text{ y } \ u_n := \Pi_n u, \tag{3.6}$$

donde P_N es el proyector de Littlewood-Paley y Π_n es definido en (1.16).
Con esas notaciones, usando la identidad de Parseval y la transformada inversa de Fourier, probar (3.5) es equivalente a probar

$$\begin{aligned}I := \sum_{\substack{N_1,N_2,N_3,N\geq 1\\ \text{diádico}}} N^s \left|\int_{\mathbf{R}^2} (u_1)_{N_1}(u_2)_{N_2}(u_3)_{N_3} z_N\, dxdt\right| \lesssim \|u_1\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_{p,\alpha}} \|u_2\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_{p,\alpha}} \|u_3\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_{p,\alpha}} \\ \times \|z\|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_{p',\alpha}}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Probamos la estimativa (3.7), considerando separadamente los siguientes cuatro casos:
1. Casos triviales: $|\xi_{max}| \lesssim 1$ o $\langle\sigma_{max}\rangle \gg N_{max}^{10}$,
2. Caso no resonante: $N_{max} \gg N_{med} \geq N_{min}$,
3. Caso semi resonante: $N_{max} \sim N_{med} \gg N_{min}$,

4. Caso resonante: $N_{max} \sim N_{med} \sim N_{min}$.

Caso 1. Casos triviales: En este primer caso consideramos dos subcasos $|\xi_{max}| \lesssim 1$ o $\langle \sigma_{max} \rangle \gg \langle \xi_{max} \rangle^{10}$.

Subcaso 1.1. $|\xi_{max}| \lesssim 1$: En este caso $|\xi| = |\xi_1 + \xi_2 + \xi_3| \leq 3|\xi_{max}| \lesssim 1$ y $N \lesssim N_{max}$. Así, usando la desigualdad $s + 1 = \frac{5}{4} > 0$, la desigualdad de Hölder, seguido del supremo esencial y desigualdad de Bernstein

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{N_{max}, N \lesssim 1} N^s \left| \int_{\mathbf{R}^2} (u_1)_{N_1} (u_2)_{N_2} (u_3)_{N_3} z_N dx dt \right| \\
&\leq \sum_{N_{max}, N \lesssim 1} N^{s+1} \left| \int_{\mathbf{R}^2} (u_1)_{N_1} (u_2)_{N_2} (u_3)_{N_3} z_N dx dt \right| \\
&\lesssim \sum_{N_{max}, N \lesssim 1} N_{max}^{s+1} \left| \int_{\mathbf{R}^2} (u_1)_{N_1} (u_2)_{N_2} (u_3)_{N_3} z_N dx dt \right| \\
&\lesssim \sum_{N_{max}, N \lesssim 1} N_{max}^{s+1} \| (u_1)_{N_1} (u_2)_{N_2} \|_{L^2_{x,t}} \| (u_3)_{N_3} z_N \|_{L^2_{x,t}} \\
&\lesssim \sum_{N_{max}, N \lesssim 1} N_{max}^{s+1} \| (u_1)_{N_1} \|_{L^2_{x,t}} \| (u_2)_{N_2} \|_{L^\infty_{x,t}} \| (u_3)_{N_3} \|_{L^\infty_{x,t}} \| z_N \|_{L^2_{x,t}} \\
&\lesssim \sum_{N_{max}, N \lesssim 1} N_{max}^{s+1} \| (u_1)_{N_1} \|_{L^2_{x,t}} N_2^{\frac{1}{2}} \| (u_2)_{N_2} \|_{L^\infty_t L^2_x} N_3^{\frac{1}{2}} \| (u_3)_{N_3} \|_{L^\infty_t L^2_x} \| z_N \|_{L^2_{x,t}} \\
&\lesssim \sum_{N_{max}, N \lesssim 1} N_{max}^{s+2} \| (u_1)_{N_1} \|_{L^2_{x,t}} \| (u_2)_{N_2} \|_{L^\infty_t L^2_x} \| (u_3)_{N_3} \|_{L^\infty_t L^2_x} \| z_N \|_{L^2_{x,t}}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

A continuación, usamos la inmersión de Sobolev, la definición de las normas $\| \cdot \|_{X^{s,b}_\alpha}$, $\| \cdot \|_{X^{s,b}}$ y las propiedades de los espacios $X^{s,b}_\alpha(\mathbb{R}^2), X^{s,b}(\mathbb{R}^2)$

$$
\begin{aligned}
I &\lesssim \sum_{N_{max}, N \lesssim 1} N_{max}^{s+2} \| (u_1)_{N_1} \|_{X^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}_\alpha} \| (u_2)_{N_2} \|_{X^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}_\alpha} \| (u_3)_{N_3} \|_{X^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}_\alpha} \| z_N \|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_\alpha} \\
&\sim \sum_{N_{max}, N \lesssim 1} N_{max}^{s+2} N_1^{-s} \| (u_1)_{N_1} \|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_\alpha} N_2^{-s} \| (u_2)_{N_2} \|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_\alpha} N_3^{-s} \| (u_3)_{N_3} \|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_\alpha} \\
&\quad \times \| z_N \|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_\alpha} \\
&\lesssim \sum_{N_{max}, N \lesssim 1} N_{max}^{s+2} \| (u_1)_{N_1} \|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_\alpha} \| (u_2)_{N_2} \|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_\alpha} \| (u_3)_{N_3} \|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_\alpha} \| z_N \|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_\alpha}.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Luego, usamos el Lema 1.18 con $p \geq q = 2 \geq 1$ y el Lema 1.17 con $p' = q \leq 2$,

obtenemos

$$
\begin{aligned}
I &\lesssim \sum_{N_{max},N\lesssim 1} N_{max}^{s+2} N_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\quad \times \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\lesssim \sum_{N_{max},N\lesssim 1} N_{max}^{s+2} N_{max}^{3(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\quad \times \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&= \sum_{N_{max},N\lesssim 1} N_{max}^{s+2+3(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\sim \sum_{N_{max},N\lesssim 1} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\sim \sum_{N_{max},N\lesssim 1} N_1^{-\epsilon} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{-\epsilon} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_3^{-\epsilon} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\quad \times N^{-\epsilon} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Finalmente, sumando sobre los bloques diádicos $1 \leq N_1, N_2, N_3, N \lesssim 1$ la estimativa (3.10) produce la estimativa deseada (3.7).

Subcaso 1.2. $\langle \sigma_{max} \rangle \gg \langle \xi_{max} \rangle$[10]: Primero consideramos el caso $\langle \sigma_{max} \rangle = \langle \sigma_2 \rangle$. Como en el caso anterior, usamos desigualdad de Hölder y desigualdad de Bernstein, eso implica que

$$
\begin{aligned}
I &\leq \sum_{N_1,N_2,N_3,N\geq 1} N^{s+1} \left| \int_{\mathbf{R}^2} (u_1)_{N_1} (u_2)_{N_2} (u_3)_{N_3} z_N \, dxdt \right| \\
&\leq \sum_{N_1,N_2,N_3,N\geq 1} N_{max}^{s+1} \|(u_1)_{N_1}(u_2)_{N_2}\|_{L^2_{x,t}} \|(u_3)_{N_3} z_N\|_{L^2_{x,t}} \\
&\lesssim \sum_{N_1,N_2,N_3,N\geq 1} N_{max}^{s+2} \|(u_1)_{N_1}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|(u_2)_{N_2}\|_{L^2_{x,t}} \|(u_3)_{N_3}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|z_N\|_{L^2_{x,t}}.
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

En lo que sigue, usamos la definición de las normas $\|\cdot\|_{X_\alpha^{s,b}(\mathbb{R}^2)}$, $\|\cdot\|_{X^{s,b}(\mathbb{R}^2)}$ y sus

propiedades, tenemos

$$
\begin{aligned}
I \lesssim & \sum_{N_1,N_2,N_3,N\geq 1} N_{max}^{s+2} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|\langle\sigma_2\rangle^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
& \times \|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
\sim & \sum_{N_1,N_2,N_3,N\geq 1} N_{max}^{s+2} N_1^{-s} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{-s} \|\langle\sigma_2\rangle^{-\frac{1}{2}-\epsilon}(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
& \times N_3^{-s} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
\lesssim & \sum_{N_1,N_2,N_3,N\geq 1} N_{max}^{s+2} \frac{1}{N_{max}^{5+10\epsilon}} N_1^{-s} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{-s} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
& \times N_3^{-s} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Usamos el Lema 1.18 con $p \geq q = 2 \geq 1$ y Lema 1.17 con $p' = q \leq 2$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
I \lesssim & \sum_{N_1,N_2,N_3,N\geq 1} N_{max}^{s-3-10\epsilon} N_1^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
& \times N_3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
\lesssim & \sum_{N_1,N_2,N_3,N\geq 1} N_{max}^{s-3-10\epsilon} N_1^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
& \times N_3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
\lesssim & \sum_{N_1,N_2,N_3,N\geq 1} N_{max}^{-2-10\epsilon} N_1^{-\frac{1}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
& \times N_3^{-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Por tanto, para $-2-10\epsilon < 0$ que es verdad, desde que $s = \frac{1}{4}$ y $p \geq 2$. Escogemos $-\epsilon_1 = -2-10\epsilon$, y de (3.13) vamos a obtener

$$
\begin{aligned}
I \lesssim & \sum_{N_1,N_2,N_3,N\geq 1} N_1^{-\frac{1}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_3^{-\frac{1}{p}} \|(u_3))_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
& \times N^{-\epsilon_1} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Finalmente, sumando sobre los bloques diádicos $N_1, N_2, N_3, N \geq 1$ la estimativa (3.14) produce la estimativa requerida (3.7).

Los casos complementarios $\langle\sigma_{max}\rangle = \langle\sigma_1\rangle$ o $\langle\sigma_{max}\rangle = \langle\sigma_3\rangle$ procedemos en una forma

análoga.
En lo siguiente, consideramos el caso cuando

$$|\xi_{max}| \gg 1 \quad \text{y} \quad \langle \sigma_{max} \rangle \lesssim \langle \xi_{max} \rangle^{10}. \tag{3.15}$$

Dividimos esto en tres diferentes casos, nombrados, caso no resonante $N_{max} \gg N_{med} \geq N_{min}$, caso semi resonante $N_{max} \sim N_{med} \gg N_{min}$ y caso resonante $N_{max} \sim N_{med} \sim N_{min}$.

Caso 2. Caso no resonante: $N_{max} \gg N_{med} \geq N_{min}$**.**
Usando la simetría de la no linearidad, podemos asumir $N_1 \gg N_2 \geq N_3$. También podemos observar $N \lesssim 3N_{max} = 3N_1$ y $N_1 \leq N + \frac{N_1}{2}$. Entonces $N \sim N_1$. Usando desigualdad de Hölder, Corolario 2.5 y (3.15), podemos obtener

$$\begin{aligned}
I &\lesssim \sum_{N_1 \sim N \gg N_2 \geq N_3} N^{s+1} \left| \int_{\mathbf{R}} (u_1)_{N_1} (u_2)_{N_2} (u_3)_{N_3} z_N \, dxdt \right| \\
&\lesssim \sum_{N_1 \sim N \gg N_2 \geq 3} N^{s+1} \|(u_1)_{N_1} (u_2)_{N_2}\|_{L^2_{x,t}} \|(u_3)_{N_3} z_N\|_{L^2_{x,t}} \\
&\lesssim \sum_{N_1 \sim N \gg N_2 \geq N_3} N^{s+1} \frac{1}{N_1} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{N} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
&\lesssim \sum_{N_1 \sim N \gg N_2 \geq N_3} N^{s-1} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} N^{30\epsilon} \|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\sim \sum_{N_1 \sim N \gg N_2 \geq N_3} N^{s-1+30\epsilon-s} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{-s} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_3^{-s} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
&\quad \times \|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Usando el Lema 1.18 con $p \geq q = 2 \geq 1$ y Lema 1.17 con $p' = q \leq 2$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
I \lesssim & \sum_{N_1 \sim N \gg N_2 \geq N_3} N^{-1+30\epsilon} N_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} N_2^{-s} N_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \\
& \times N_3^{-s} N_3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \|z_N\|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_{p',\alpha}} \\
\sim & \sum_{N_1 \sim N \gg N_2 \geq N_3} N^{-\frac{1}{2}+30\epsilon-\frac{1}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} N_2^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \\
& \times N_3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \|z_N\|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_{p',\alpha}} \\
\lesssim & \sum_{N_1 \sim N \gg N_2 \geq N_3} N^{30\epsilon-\frac{1}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} N_2^{-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} N_3^{-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \\
& \times \|z_N\|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_{p',\alpha}} \\
\lesssim & \sum_{N_1 \sim N \gg N_2 \geq N_3} N^{\frac{30\epsilon-\frac{1}{p}}{2}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} N_2^{-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} N_3^{-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \\
& \times N^{\frac{30\epsilon-\frac{1}{p}}{2}} \|z_N\|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_{p',\alpha}}.
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Aplicando el Lema 1.19 en la estimativa (3.17), se obtiene

$$
I \lesssim \|u_1\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \|u_2\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \|u_3\|_{X^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}_{p,\alpha}} \|z\|_{X^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}_{p',\alpha}}, \tag{3.18}
$$

donde $30\epsilon - \frac{1}{p} < 0 \Leftrightarrow 0 < \epsilon < \frac{1}{30p}$, siempre que $p < \infty$.

Caso 3. Caso semi resonante: $N_{max} \sim N_{med} \gg N_{min}$**.** Sin perdida de generalidad, podemos asumir que $N_{max} = N_1$ y $N_{med} = N_2$. Lo dividimos en dos subcasos, dependiendo de la relación entre N_{max} y N.

Subcaso 3.1. $N \ll N_{max}$**:** En este subcaso, uno tiene $N \ll N_2$ y $N_3 \ll N_1$. Por

tanto, usando desigualdad de Hölder y el Corolario 2.5, logramos obtener

$$
\begin{aligned}
I &\lesssim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N^{s+1}\left|\int_{\mathbf{R}^2}(u_1)_{N_1}(u_2)_{N_2}(u_3)_{N_3}z_N\,dxdt\right| \\
&\lesssim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N^{s+1}\|(u_1)_{N_1}(u_3)_{N_3}\|_{L^2_{x,t}}\|(u_2)_{N_2}z_N\|_{L^2_{x,t}} \\
&\lesssim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N_{max}^{s+1}\frac{1}{N_1}\|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}}\|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}}\frac{1}{N_2}\|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}} \\
&\quad\times\|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}} \\
&\sim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N_{max}^{s+1}N_{max}^{-2}\|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}}\|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}}\|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}} \\
&\quad\times\|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}} \\
&\lesssim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N_{max}^{s+1+30\epsilon}N_{max}^{-2}\|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}}\|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}}\|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+\epsilon}} \\
&\quad\times\|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac12-2\epsilon}} \\
&\sim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N_{max}^{s-1+30\epsilon}N_1^{-s}\|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}}N_3^{-s}\|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}}N_2^{-s}\|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \\
&\quad\times\|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac12-2\epsilon}} \\
&\sim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N_{max}^{-s-1+30\epsilon}\|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}}N_3^{-s}\|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}}\|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \\
&\quad\times\|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac12-2\epsilon}}.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Usando el Lema 1.18 con $p\geq q=2\geq 1$ y el Lema 1.17 con $p'=q\leq 2$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
I &\lesssim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N_{max}^{-s-1+30\epsilon}N_1^{\frac12-\frac1p}\|(w_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{0,\frac12+\epsilon}}N_3^{\frac12-\frac1p}N_3^{-s}\|v_{N_3}\|_{X_p^{0,\frac12+\epsilon}} \\
&\quad\times N_2^{\frac12-\frac1p}\|(w_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{0,\frac12+\epsilon}}\|z_N\|_{X_{p'}^{0,\frac12-2\epsilon}} \\
&\lesssim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N_{max}^{-s-1+30\epsilon}N_{max}^{\frac12-\frac1p}\|(w_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{0,\frac12+\epsilon}}N_{max}^{\frac14}N_3^{-\frac1p}\|v_{N_3}\|_{X_p^{0,\frac12+\epsilon}} \\
&\quad\times N_{max}^{\frac12-\frac1p}\|(w_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{0,\frac12+\epsilon}}\|z_N\|_{X_{p'}^{0,\frac12-2\epsilon}}.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
I &\lesssim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N_{max}^{30\epsilon-\frac{2}{p}} \|(w_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_3^{-\frac{1}{p}} \|v_{N_3}\|_{X^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(w_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_{p',}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\lesssim \sum_{N_1\sim N_2\gg N_3,N} N_{max}^{\frac{30\epsilon-\frac{2}{p}}{3}} \|(w_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_3^{-\frac{1}{p}} \|v_{N_3}\|_{X^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{\frac{30\epsilon-\frac{2}{p}}{3}} \|(w_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
&\quad \times N^{\frac{30\epsilon-\frac{2}{p}}{3}} \|z_N\|_{X_{p',}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Aplicando el Lema 1.19 en la estimativa (3.20), encontramos

$$
I \lesssim \|u_1\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|u_2\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|u_3\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}, \tag{3.22}
$$

donde $30\epsilon - \frac{2}{p} < 0 \Leftrightarrow 0 < \epsilon < \frac{1}{15p}$, siempre que $p < \infty$.

Subcaso 3.2. $N \sim N_{max}$**:** En este caso, la condición $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi = 0$, implica que $|\xi_1 + \xi_2 + \xi| = |\xi_3| \sim N_3 \ll N \sim N_{max}$. Entonces, ξ_1, ξ_2, ξ no pueden ser todos positivos o todos negativos. Por tanto, nosotros debemos tener que $\xi_1\xi_2 < 0$ o $\xi_1\xi < 0$ o $\xi_2\xi < 0$.
Consideramos el caso $\xi_1\xi_2 < 0$, entonces $\xi_1(-\xi_2) > 0$, los otros casos se abordan de manera similar.
Primero notamos que:

- $|\xi - \xi_3||\xi + \xi_3| \sim N_{max}N_{max} = N_{max}^2$.
- $|\xi_1 - \xi_2||\xi_1 + \xi_2| = (|\xi_1| + |-\xi_2|)\,|\xi + \xi_3| \sim 2N_{max}N_{max} \sim N_{max}^2$.

Ahora, usando desigualdad de Hölder, Lema 2.4 y el Corolario 2.5

$$
\begin{aligned}
I &= \sum_{N_1\sim N_2\sim N\gg N_3} N^s \left| \int_{\mathbf{R}^2} (u_1)_{N_1}(u_2)_{N_2}(u_3)_{N_3} z_N \, dxdt \right| \\
&\leq \sum_{N_1\sim N_2\sim N\gg N_3} N^{s+1} \|(u_1)_{N_1}(u_2)_{N_2}\|_{L^2_{x,t}} \|z_N(u_3)_{N_3}\|_{L^2_{x,t}} \\
&\lesssim \sum_{N_1\sim N_2\sim N\gg N_3} N_{max}^{s+1} \frac{1}{N_{max}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \frac{1}{N} \|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
&\qquad \times \|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
&\lesssim \sum_{N_1\sim N_2\sim N\gg N_3} N^{s-1+30\epsilon} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}.
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

A continuación, agregando y quitando $N_1^{-s}, N_2^{-s}, N_3^{-s}$

$$\begin{aligned} I \sim & \sum_{N_1\sim N_2\sim N\gg N_3} N^{s-1+30\epsilon} N_1^{-s} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{-s} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_3^{-s} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\ & \times \|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\ \sim & \sum_{N_1\sim N_2\sim N\gg N_3} N^{-s-1+30\epsilon} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_3^{-s} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\ & \times \|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Usando el Lema 1.18 con $p \geq q = 2 \geq 1$ y el Lema 1.17 con $p' = q \leq 2$, podemos obtener

$$\begin{aligned} I \sim & \sum_{N_1\sim N_2\sim N\gg N_3} N^{-s-1+30\epsilon} N_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\ & \times N_3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\ \sim & \sum_{N_1\sim N_2\sim N\gg N_3} N^{-s-1+30\epsilon} N_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\ & \times N_3^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\ \lesssim & \sum_{N_1\sim N_2\sim N\gg N_3} N^{30\epsilon-\frac{2}{p}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_3^{-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\ \lesssim & \sum_{N_1\sim N_2\sim N\gg N_3} N^{\frac{30\epsilon-\frac{2}{p}}{3}} \|(u_1)_{N_1}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_2^{\frac{30\epsilon-\frac{2}{p}}{3}} \|(u_2)_{N_2}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} N_3^{-\frac{1}{p}} \|(u_3)_{N_3}\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \\ & \times N^{\frac{30\epsilon-\frac{2}{p}}{3}} \|z_N\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Aplicando el Lema 1.19 en la estimativa (3.25), obtenemos

$$I \lesssim \|u_1\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|u_2\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|u_3\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}, \tag{3.26}$$

donde $30\epsilon - \frac{2}{p} < 0 \Leftrightarrow 0 < \epsilon < \frac{1}{15p}$, siempre que $p < \infty$.

Case 4. Caso resonante: $N_{max} \sim N_{med} \sim N_{min}$ **:**
Desde que $N \sim |\xi| = |\xi_1 + \xi_2 + \xi_3| \leq |\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3| \lesssim N_1$, en este caso podemos asumir que $N \sim N_1$, porque para $N \ll N_1$ la prueba sigue de manera análoga como en el caso semi resonante. Así que de ahora en adelante, vamos a considerar

$$N \sim N_1 \sim N_2 \sim N_3. \tag{3.27}$$

Como mencionamos anteriormente, usaremos la descomposición del cubo unitario $u = \sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \Pi_n u$ y en aras de la claridad usamos la notación $I_n := [n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Además, dividimos este caso en varios subcasos.

Sub-caso 4.1. $|\xi_i - \xi_j| \geq |\xi_i + \xi_j|$ **para algún par** (i, j)**:** Sin perdidad de generalidad, podemos asumir $(i, j) = (1, 2)$ y proceder considerando cinco casos diferentes.

Sub-sub caso 4.1.1. $|\xi_1 + \xi_2| \lesssim 1$ **y** $\kappa = \min(|\xi_1 - \xi_3|, |\xi_1 + \xi_3|) \lesssim 1$ **:** Nosotros solo consideraremos $\kappa = |\xi_1 + \xi_3| \lesssim 1$, el otro caso se procede de forma similar.

Supongamos que $\xi_1 \in I_n = [n, n+1)$. Entonces $\xi_1 = n + O(1)$ y también $\xi_2 = -n + j$, $\xi_3 = -n + k$, con $j, k = O(1)$ y

$$|\xi - n| = |-\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 - n| \leq |\xi_2 + n| + |\xi_1 - n| + |\xi_3 + n| \lesssim 1.$$

Así, $\xi = n + l$, donde $O(1) = l$.

Por motivos de claridad, podemos asumir $\xi_2 \in I_{-n}$, $\xi_3 \in I_{-n}$ y $\xi \in I_n$.

Entonces, usando desigualdad de Holder's, (3.15) junto con la Proposición 1.22, y la Proposición 3 de [1] para $s = \frac{1}{4}$ y $0 < \alpha < 1$, obtenemos

$$\begin{aligned}
J &:= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^s \left| \int_{\mathbb{R}^2} (u_1)_n (u_2)_{-n} (u_3)_{-n} z_n \, dxdt \right| \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^s \left| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_{x,t}\{(u_1)_n (u_2)_{-n} (u_3)_{-n}\}(\xi,\tau) \mathcal{F}_{x,t}\{z_n\}(\xi,\tau) \, d\xi d\tau \right| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{s+1} \|(u_1)_n (u_2)_{-n} (u_3)_{-n}\|_{X_\alpha^{0,-\frac{1}{2}+2\epsilon}} \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \qquad (3.28) \\
&\sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\partial_x((u_1)_n (u_2)_{-n} (u_3)_{-n})\|_{X_\alpha^{s,-\frac{1}{2}+2\epsilon}} \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_3)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}.
\end{aligned}$$

En seguida, usando desigualdad de Holder dos veces para $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y $\frac{1}{3p} + \frac{1}{3p} + \frac{1}{3p} = \frac{1}{p}$, podemos obtener

$$\begin{aligned}
J &\lesssim \left\| \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_2)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|(u_3)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \right\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \left\| \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \right\|_{\ell^{p'}(\mathbb{Z})} \\
&\leq \left\| \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \right\|_{\ell^{3p}(\mathbb{Z})} \left\| \|(u_2)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \right\|_{\ell^{3p}(\mathbb{Z})} \left\| \|(u_3)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \right\|_{\ell^{3p}(\mathbb{Z})} \\
&\quad \times \left\| \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \right\|_{\ell^{p'}(\mathbb{Z})} \qquad (3.29) \\
&\sim \|u_1\|_{X_{3p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|u_2\|_{X_{3p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|u_3\|_{X_{3p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\leq \|u_1\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|u_2\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|u_3\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+\epsilon}} \|z\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-2\epsilon}}.
\end{aligned}$$

Sub-sub caso 4.1.2. $|\xi_1+\xi_2|\lesssim 1$ **y** $|\xi_1\pm\xi_3|\gg 1$ **:**
En este sub caso podemos asumir que $\xi_1\in I_n$ y $\xi_3\in I_m$, entonces $|\xi+m| = |-\xi_1-\xi_2-\xi_3+m|\leq |\xi_1+\xi_2|+|\xi_3-m|\lesssim 1$, por tanto $\xi=-m+k$ y $\xi_2=-n+j$, con $j,k=O(1)$.
Nuevamente, por simplicidad, solo realizamos la estimativa cuando $\xi_2\in I_{-n}$ y $\xi\in I_{-m}$.
Notamos que por la Proposición 1.22 tenemos que $|\xi_1\pm\xi_3|\sim|n\pm m|\gg 1$. También, recordamos (3.15) y (3.27) que en este caso $|m|\sim|n|\gg 1$.
Sin perdidad de generalidad, podemos asumir $|\xi_1+\xi_3|\geq|\xi_1-\xi_3|$. Entonces usando desigualdad de Holder, el Corolario 2.6 solo dos veces, (3.15) y la Proposición 1.23, obtenemos

$$\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}}|m|^s\left|\int_{\mathbb{R}^2}(u_1)_n(u_2)_{-n}(u_3)_m z_{-m}\,dxdt\right|$$

$$\leq \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}}|m|^{s+1}\|(u_1)_n(u_3)_m\|_{L^2_{x,t}}\|(u_2)_{-n}z_{-m}\|_{L^2_{x,t}}$$

$$\lesssim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}}\frac{|n|^{s+1}}{|m+n||m-n|}\|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{0,\frac12+}}\|(u_3)_m\|_{X_\alpha^{0,\frac12+}}\|(u_2)_{-n}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+}}\|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}$$

$$\lesssim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}}\frac{|n|^{-2s+1+\epsilon}}{|m-n|(|m|+|n|)}\|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_3)_m\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_2)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}$$

$$\sim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}}\frac{1}{|m-n||n|^{2s-\epsilon}}\|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_3)_m\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_2)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}$$

$$\sim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}}\frac{1}{|m-n|\langle n\rangle^{2s-\epsilon}}\|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_3)_m\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_2)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}$$

$$= \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}}\frac{1}{|m-n|\langle n\rangle^{\frac12-\epsilon}}\|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_3)_m\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_2)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}. \tag{3.30}$$

Aplicando el Lema 1.24 para $\frac{p}{2},\frac{p}{p-2}\geq 1$, $0<\epsilon<\frac12$, desigualdad de Hölder para $\frac1p+\frac{1}{p'}=1$ y la Definición 1.15, podemos obtener

$$\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}}|m|^s\left|\int_{\mathbb{R}^2}(u_1)_n(u_2)_{-n}(u_3)_m z_{-m}\,dxdt\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim \Big\| \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}} \|(u_2)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}} \Big\|_{\ell_n^{\frac{p}{2}}(\mathbb{Z})} \Big\| \|(u_3)_m\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}} \|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}} \Big\|_{\ell_m^{\frac{p}{p-2}}(\mathbb{Z})} \\
&\lesssim \Big\| \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}} \Big\|_{\ell_n^{p}(\mathbb{Z})} \Big\| \|(u_2)_{-n}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}} \Big\|_{\ell_n^{p}(\mathbb{Z})} \Big\| \|(u_3)_m\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}} \|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}} \Big\|_{\ell^{1}(\mathbb{Z})} \\
&\lesssim \|u_1\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+}} \|u_2\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+}} \Big\| \|(u_3)_m\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}} \Big\|_{\ell^{p}(\mathbb{Z})} \Big\| \|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}} \Big\|_{\ell^{p'}(\mathbb{Z})} \\
&\sim \|u_1\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+}} \|u_2\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+}} \|u_3\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+}} \|z\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac12-}} \\
&= \|u_1\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+\epsilon}} \|u_2\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+\epsilon}} \|u_3\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+\epsilon}} \|z\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac12-2\epsilon}}.
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

Sub-subcaso 4.1.3. $|\xi_1+\xi_2| \gg 1$ **y** $|\xi_i - \xi_j| \lesssim 1$ **para algún** $(i,j) \neq (1,2)$ **:** Sin perdidad de generalidad, podemos suponer $(i,j) = (1,3)$.

4.1.3.1. Si $|\xi - \xi_3| \lesssim 1$ **:** Sea $\xi_1 \in I_n$ entonces $\xi_1 = n + O(1)$, y así $\xi_3 = n + O(1)$. En consecuencia $|\xi - n| = |\xi - \xi_3 + \xi_3 - n| = |\xi - \xi_3| + |\xi_3 - n| \lesssim 1$. Por lo tanto, $\xi = n + O(1)$ y como consecuencia $\xi_2 = -\xi_1 - \xi_3 - \xi = -3n + O(1)$.

Una vez más, en aras de la claridad, podemos asumir $\xi \in I_n$, $\xi_2 \in I_{-3n}$ y $\xi_3 \in I_n$. Entonces, usando desigualdad de Hölder's, (3.15) junto con la Proposición 1.22, y la Proposición 3 de [1] para $s = \frac14$ y $0 < \alpha < 1$, encontramos

$$
\begin{aligned}
J &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^s \left| \int_{\mathbb{R}^2} (u_1)_n (u_2)_{-3n} (u_3)_n z_n \, dxdt \right| \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^s \left| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}_{x,t}\{(u_1)_n (u_2)_{-3n} (u_3)_n\}(\xi,\tau) \mathcal{F}_{x,t}\{z_n\}(\xi,\tau) \, d\xi d\tau \right| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{s+1} \|(u_1)_n (u_2)_{-3n} (u_3)_n\|_{X_\alpha^{0,-\frac12+2\epsilon}} \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac12-2\epsilon}} \\
&\sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\partial_x((u_1)_n (u_2)_{-3n} (u_3)_n)\|_{X_\alpha^{s,-\frac12+2\epsilon}} \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac12-2\epsilon}} \\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \|(u_2)_{-3n}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \|(u_3)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac12-2\epsilon}}.
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

En seguida, usando la desigualdad de Hölder dos veces, cuando $\frac1p + \frac{1}{p'} = 1$ y $\frac{1}{3p} +$

$\frac{1}{3p}+\frac{1}{3p}=\frac{1}{p}$, logramos conseguir

$$\begin{aligned}
J &\lesssim \Big\| \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \|(u_2)_{-3n}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \|(u_3)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \Big\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \Big\| \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac12-2\epsilon}} \Big\|_{\ell^{p'}(\mathbb{Z})} \\
&\le \Big\| \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \Big\|_{\ell^{3p}(\mathbb{Z})} \Big\| \|(u_2)_{-3n}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \Big\|_{\ell^{3p}(\mathbb{Z})} \Big\| \|(u_3)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \Big\|_{\ell^{3p}(\mathbb{Z})} \\
&\quad \times \Big\| \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac12-2\epsilon}} \Big\|_{\ell^{p'}(\mathbb{Z})} \\
&\lesssim \Big\| \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \Big\|_{\ell^{3p}(\mathbb{Z})} \Big\| \|(u_2)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \Big\|_{\ell^{3p}(\mathbb{Z})} \Big\| \|(u_3)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+\epsilon}} \Big\|_{\ell^{3p}(\mathbb{Z})} \\
&\quad \times \Big\| \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac12-2\epsilon}} \Big\|_{\ell^{p'}(\mathbb{Z})} \\
&\sim \|u_1\|_{X_{3p,\alpha}^{s,\frac12+\epsilon}} \|u_2\|_{X_{3p,\alpha}^{s,\frac12+\epsilon}} \|u_3\|_{X_{3p,\alpha}^{s,\frac12+\epsilon}} \|z\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac12-2\epsilon}} \\
&\le \|u_1\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+\epsilon}} \|u_2\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+\epsilon}} \|u_3\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac12+\epsilon}} \|z\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac12-2\epsilon}}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

4.1.3.2. Si $|\xi-\xi_3|\gg 1$: Sean $\xi_1\in I_n$ y $\xi\in I_m$ entonces $\xi_1=n+O(1)$, $\xi=m+O(1)$, en seguida $|\xi_3-n|=|\xi_3-\xi_1+\xi_1-n|\le|\xi_3-\xi_1|+|\xi_1-n|\lesssim 1$. Implica que $\xi_3=n+O(1)$ y $\xi_2=-\xi_1-\xi_3-\xi=-2n-m+O(1)$.
Podemos suponer que $|\xi-\xi_3|\ge|\xi+\xi_3|$, el caso $|\xi+\xi_3|\ge|\xi-\xi_3|$ sigue de manera similar. Desde que $\xi-\xi_3=m-n+O(1)$, usando la Proposición 1.22 y la Proposición 1.25, podemos obtener que

$$|m-n|\sim|\xi-\xi_3|=\max\{|\xi\pm\xi_3|\}=|\xi|+|\xi_3|\sim|m|\sim|n|. \tag{3.34}$$

Similarmente, desde que $\xi_1-\xi_2=3n+m+O(1)$, uno tiene que

$$|3n+m|\sim|\xi_1-\xi_2|=\max\{\xi_1\pm\xi_2\}=|\xi_1|+|\xi_2|\sim|m|\sim|n|. \tag{3.35}$$

Como $\xi_1+\xi_2=-m-n+O(1)$, nuevamente por la Proposición (1.22), entendemos que $|m+n|\sim|\xi_1+\xi_2|\gg 1$.
Como en el caso anterior solo consideramos la contribución cuando $\xi_3\in I_n$ y $\xi_2\in I_{-2n-m}$. Usando la desigualdad de Hölder, el Corolario 2.6 dos veces, (3.15), (3.34), podemos obtener que

$$I_{1,3,2}:=\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}}|m|^s\left|\int_{\mathbb{R}^2}(u_1)_n(u_2)_{-2n-m}(u_3)_n z_m\,dxdt\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n,|m+n|\gg 1\\ |m+3n|,|m-n|\gtrsim|m|}} |m|^{s+1}\|(u_1)_n(u_2)_{-2n-m}\|_{L^2_{x,t}}\|(u_3)_n z_m\|_{L^2_{x,t}}\\
&\lesssim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n,|m+n|\gg 1\\ |m+3n|,|m-n|\gtrsim|m|}} \frac{|m|^{s+1}}{|m+n|\sqrt{|m-n||m+3n|}}\|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{0,\frac12+}}\|(u_2)_{-2n-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12+}}\\
&\qquad\qquad \times\|(u_3)_n\|_{X_\alpha^{0,\frac12+}}\|z_m\|_{X_\alpha^{0,\frac12+}} \qquad (3.36)\\
&\lesssim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n,|m+n|\gg 1\\ |m+3n|,|m-n|\gtrsim|m|}} \frac{|m|^{-2s+1+}}{|m+n|\sqrt{|m-n||m+3n|}}\|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_2)_{-2n-m}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\\
&\qquad\qquad \times\|(u_3)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|z_m\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}.
\end{aligned}
$$

Luego, conseguimos

$$
\begin{aligned}
I_{1,3,2} &\lesssim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}} \frac{|m|^{-2s+1+}}{|m+n||m|}\|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_2)_{-2n-m}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_3)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|z_m\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}\\
&\lesssim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}} \frac{1}{|m+n|\langle m\rangle^{2s-}}\|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_2)_{-2n-m}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|(u_3)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|z_m\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}\\
&\lesssim \|u_1\|_{X^{s,\frac12+}_{\infty,\alpha}}\|u_3\|_{X^{s,\frac12+}_{\infty,\alpha}}\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}} \frac{1}{|m+n|\langle m\rangle^{2s-}}\|(u_2)_{-2n-m}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|z_m\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}\\
&\lesssim \|u_1\|_{X^{s,\frac12+}_{p,\alpha}}\|u_3\|_{X^{s,\frac12+}_{p,\alpha}}\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}} \frac{1}{|-m+n|\langle m\rangle^{2s-}}\|(u_2)_{-2n+m}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}\\
&= \|u_1\|_{X^{s,\frac12+}_{p,\alpha}}\|u_3\|_{X^{s,\frac12+}_{p,\alpha}}\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m\neq n}} \frac{1}{|-m+n|\langle m\rangle^{\frac12-\epsilon}}\|(u_2)_{-2n+m}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}.
\end{aligned}
\qquad (3.37)
$$

Entonces, si observamos que $2|-m+n| = |2m-2n| = |(-2n+m)-(-m)|$, realizando un cambio de variables y de inmediato aplicamos el Lema 1.24, deducimos la estimativa requerida

$$
\begin{aligned}
I_{1,3,2} &\lesssim \|u_1\|_{X^{s,\frac12+}_{p,\alpha}}\|u_3\|_{X^{s,\frac12+}_{p,\alpha}}\Big\|\|(u_2)_{-2n+m}\|_{X_\alpha^{s,\frac12+}}\Big\|_{\ell^p_{-2n+m}(\mathbb{Z})}\Big\|\|z_{-m}\|_{X_\alpha^{0,\frac12-}}\Big\|_{\ell^{p'}_{-m}(\mathbb{Z})}\\
&\sim \|u_1\|_{X^{s,\frac12+}_{p,\alpha}}\|u_3\|_{X^{s,\frac12+}_{p,\alpha}}\|u_2\|_{X^{s,\frac12+}_{p,\alpha}}\|z\|_{X^{0,\frac12-}_{p',\alpha}}.
\end{aligned}
\qquad (3.38)
$$

Sub-subcaso 4.1.4. $|\xi_1+\xi_2| \gg 1$ **y** $|\xi_i+\xi_j| \lesssim 1$ **para algún** $(i,j) \neq (1,2)$ **:** En este caso seguimos los mismos argumentos utilizados en **Sub-subcaso 4.1.3.**

Sub-subcaso 4.1.5. $|\xi_1+\xi_2| \gg 1$ **y** $|\xi_i+\xi_j| \gg 1$ **para algún** $(i,j) \neq (1,2)$ **:** En el **Sub-subcaso 4.1** consideramos $|\xi_1-\xi_2| \geq |\xi_1+\xi_2| \gg 1$, y consecuentemente $|\xi_i \pm \xi_j| \gg 1$ para todo (i,j). Además, $|\xi+\xi_j| = |-\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_j| = \left|\sum_{i\in\{1,2,3\}\setminus\{j\}} \xi_i\right| \gg 1, j=1,2,3.$
Para $\tau+\tau_1+\tau_2+\tau_3=0$ y $\xi+\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$, tenemos

$$\sigma+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = 3(\xi_1+\xi_2)(\xi_2+\xi_3)(\xi_1+\xi_3). \tag{3.39}$$

Sin perdidad de generalidad, podemos asumir que $\langle\sigma_1\rangle = \langle\sigma_{max}\rangle$. Sean $\xi_j \in I_{n_j}$, $j=1,2,3$ y $\xi \in I_n$.
Utilizando la Proposición 1.22 uno puede obtener

$$\langle\sigma_1\rangle \gtrsim |\xi_1+\xi_2||\xi_2+\xi_3||\xi_1+\xi_3| \sim |n_1+n_2||n_2+n_3||n_1+n_3| \gg 1.$$

Observamos que

$$n_1+n_2+n_3+n \leq 0 = \xi+\xi_1+\xi_2+\xi_3 \leq n_1+n_2+n_3+4, \tag{3.40}$$

y también $\|(u_2)_{n_2}\|_{L^\infty_t L^2_x} \lesssim \|(u_2)_{n_2}\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha}$,

$$\|(u_1)_{n_1}\|_{L^2_{x,t}} \lesssim \frac{1}{\sqrt{|n_1+n_2||n_2+n_3||n_1+n_3|}}\|(u_1)_{n_1}\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha}. \tag{3.41}$$

De (3.40) y (3.41), aplicando la desigualdad de Bernstein, desigualdad de Hölder y el Corolario 2.6, podemos obtener

$$\begin{aligned} I_{1,5} &:= \sum_{n_1+n_2+n_3+n=O(1)} |n|^s \left|\int_{\mathbb{R}^2} (u_1)_{n_1}(u_2)_{n_2}(u_3)_{n_3} z_n \, dxdt\right| \\ &\leq \sum_{n_1+n_2+n_3+n=O(1)} |n|^{s+1} \|(u_1)_{n_1}(u_2)_{n_2}\|_{L^2_{x,t}} \|(u_3)_{n_3} z_n\|_{L^2_{x,t}} \\ &\lesssim \sum_{n_1+n_2+n_3+n=O(1)} |n|^{s+1} \|(u_1)_{n_1}\|_{L^2_{x,t}} \|(u_2)_{n_2}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|(u_3)_{n_3} z_n\|_{L^2_{x,t}}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} I_{1,5} \lesssim \sum_{n_1+n_2+n_3+n=O(1)} |n|^{s+1+} &\frac{1}{\sqrt{|n_1+n_2||n_2+n_3||n_1+n_3|}} \frac{1}{\sqrt{|n_3+n||n_3-n|}} \\ &\|(u_1)_{n_1}\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_2)_{n_2}\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_3)_{n_3}\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|z_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha}. \end{aligned}$$

Usando la Proposición 1.25 y la Proposición 1.23, obtenemos

a) $|n_1 - n_2| \sim |\xi_1 - \xi_2| = \max\{|\xi_1 \pm \xi_2|\} = |\xi_1| + |\xi_2| \sim |n|$,

b) $n_{03} = \max\{|n \pm n_3|\} = |n| + |n_3| \sim |n|$,

c) $n_{13} = \max\{|n_1 + n_3|, |n_2 + n_3|\} = \frac{|n_1+2n_3+n_2|}{2} + \frac{|n_1-n_2|}{2} \gtrsim |n|$.

Sin perdida de generalidad, podemos asumir que $n_{03} = |n_3 - n| \gtrsim |n|$ y $n_{13} = |n_1 + n_3| \gtrsim |n|$. Consecuentemente, de a), b), c) anteriormente mencionados, (3.30) y realizando el cambio de variable $n_1 = O(1) - n_2 - n_3 - n = -n_2 + \zeta$, $\zeta \in \mathbb{Z}$, tenemos que

$$\begin{aligned} I_{1,5} &\lesssim \sum_{n_1+n_2+n_3+n=O(1)} \frac{|n|^{-2s+\epsilon}}{\sqrt{|n_1+n_2||n_2+n_3|}\sqrt{|n_3+n|}\langle n\rangle^{\frac{\epsilon}{2}}} \\ &\quad \|(u_1)_{n_1}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|(u_2)_{n_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|(u_3)_{n_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-}} \\ &\lesssim \sum_{n_2,n_3,n\in\mathbb{Z}} \frac{|n_2|^{-2s+\epsilon}}{\sqrt{|[O(1)-n_2-n_3-n]+n_2||n_2+n_3|}\sqrt{|n_3+n|}\langle n\rangle^{\frac{\epsilon}{2}}} \\ &\quad \|(u_1)_{-n_2+\zeta}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|(u_2)_{n_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|(u_3)_{n_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-}} \\ &\lesssim \sum_{n_3,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{|n_3+n||O(1)-n_3-n|}\langle n\rangle^{\frac{\epsilon}{2}}} \|(u_3)_{n_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-}} \\ &\quad \times \sum_{n_2\in\mathbb{Z}} \frac{|n_2|^{-2s+\epsilon}}{\sqrt{|n_2+n_3|}} \|(u_1)_{-n_2+\zeta}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|(u_2)_{n_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Usando la desigualdad de Hölder en n_2, la estimativa $|n_3 + n| \gg 1$, Lema 1.24 y $1 < p < \infty$, podemos obtener que

$$\begin{aligned} I_{1,5} &\lesssim \sum_{n_3,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|n_3+n|\langle n\rangle^{\frac{\epsilon}{2}}} \|(u_3)_{n_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-}} \\ &\quad \times \left\| \frac{|n_2|^{-2s+\epsilon}}{\sqrt{|n_2+n_3|}} \|(u_2)_{n_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \right\|_{\ell^{p'}_{n_2}} \| \|(u_1)_{-n_2+\zeta}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|_{\ell^p_{n_2}}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Ahora, empleando $\ell^1(\mathbb{Z}) \subset \ell^{p'}(\mathbb{Z})$ con $1 < p' < \infty$ y la desigualdad de Hölder nuevamente

$$\begin{aligned} \left\| \frac{|n_2|^{-2s+\epsilon}}{\sqrt{|n_2+n_3|}} \|(u_2)_{n_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \right\|_{\ell^{p'}_{n_2}} &\leq \left\| \frac{|n_2|^{-2s+\epsilon}}{\sqrt{|n_2+n_3|}} \|(u_2)_{n_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \right\|_{\ell^1_{n_2}} \\ &\lesssim \left\| \frac{|n_2|^{-2s+\epsilon}}{\sqrt{|n_2+n_3|}} \right\|_{\ell^{p'}_{n_2}} \| \|(u_2)_{n_2}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|_{\ell^p_{n_2}} \\ &\lesssim \|u_2\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

donde, en la última desigualdad la Proposición 1.26 es usada con $(2s-\epsilon)p'+\frac{1}{2}p'>1$, desde que $p'>1$ y $2s-\epsilon+\frac{1}{2}>1$ que es verdad para $s>\frac{1}{4}$ y $0<\epsilon<2s-\frac{1}{2}$. Finalmente, aplicando el Lema 1.24, de (3.43) y (3.44), logramos encontrar

$$I_{1,5}\lesssim \|u_3\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}}\|z\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-}}\|u_2\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}}\|u_1\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}},$$

según lo requerido.

Subcaso 4.2. $|\xi_i-\xi_j|\leq|\xi_i+\xi_j|$ **para todo par** (i,j) **:** En este caso, por la Proposición 1.23 para todo $j=1,2,3$, ξ_j tienen el mismo signo y $|\xi_i+\xi_j|=|\xi_i|+|\xi_j|$. Además, como $\xi+\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$, obtenemos

$$|\xi+\xi_j|=\left|\sum_{i\in\{1,2,3\}\setminus\{j\}}\xi_i\right|\sim|\xi_{max}|,\ \ |\xi-\xi_j|=|\xi|+|\xi_j|\sim|\xi_{max}|.$$

De (3.27) y (3.39) también podemos obtener

$$\langle\sigma_{max}\rangle\gtrsim|\xi_{max}|^3. \tag{3.45}$$

Sub-subcaso 4.2.1. $\sigma_j=\sigma_{\text{máx}}$ **para algún** $j=1,2,3$**:** En este caso usamos la descomposición diádica. Asumimos que $\sigma_1=\sigma_{\text{máx}}$. Podemos proceder de manera similar en los otros casos.

Usando la desigualdad de Bernstein y (3.45), tenemos que

$$\begin{aligned}
I_{2,1}&:=\sum_{N_{min}\sim N_{med}\sim N}N^s\left|\int_{\mathbb{R}^2}(u_1)_{N_1}(u_2)_{N_2}(u_3)_{N_3}z_N\,dxdt\right|\\
&\leq\sum_{N_{min}\sim N_{med}\sim N}N^{s+1}\|(u_1)_{N_1}\|_{L^2_{x,t}}\|(u_2)_{N_2}\|_{L^\infty_{x,t}}\|(u_3)_{N_3}z_N\|_{L^2_{x,t}}\\
&\lesssim\sum_{N_{min}\sim N_{med}\sim N}N^{s+\frac{3}{2}}\|(u_1)_{N_1}\|_{L^2_{x,t}}\|(u_2)_{N_2}\|_{L^2_xL^\infty_t}\|(u_3)_{N_3}z_N\|_{L^2_{x,t}}\\
&\lesssim\sum_{N_{min}\sim N_{med}\sim N}N^{s+\frac{3}{2}}N_1^{-3(\frac{1}{2}+\epsilon)}\|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\|(u_3)_{N_3}z_N\|_{L^2_{x,t}}\\
&\sim\sum_{N_{min}\sim N_{med}\sim N}N^{s-3\epsilon}\|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\|(u_3)_{N_3}z_N\|_{L^2_{x,t}}
\end{aligned}\tag{3.46}$$

Adicionalmente, empleando el Lema 2.4 ($|\xi+\xi_3|^{\frac{1}{2}}|\xi-\xi_3|^{\frac{1}{2}}\gtrsim N$) junto con la desigualdad (3.15) $\left(\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}+}\lesssim\langle\sigma\rangle^{\frac{1}{2}-}N^{0+}\right)$, podemos obtener

$$\begin{aligned}
I_{2,1}&\lesssim\sum_{N_{min}\sim N_{med}\sim N}N^{s-3\epsilon}\|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\frac{1}{N}\|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\\
&\lesssim\sum_{N_{min}\sim N_{med}\sim N}N^{s-1-3\epsilon+\epsilon_1}\|(u_1)_{N_1}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\|(u_2)_{N_2}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\|(u_3)_{N_3}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}}\|z_N\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-}}.
\end{aligned}\tag{3.47}$$

Así, podemos inferir la estimativa requerida de manera similar como en el caso no resonante.

Sub-subcaso 4.2.2. $\sigma = \sigma_{\text{máx}}$**:** En este caso usaremos la descomposición unitaria del cubo. Posteriormente, procedemos a dividir esto en dos casos:
• **Sub-subcaso 4.2.2.1.** $\sigma = \sigma_{\text{máx}}$ **y** $|\xi_i - \xi_j| \lesssim 1$ **para algún** $i \neq j$ **:** Sin perdida de generalidad, podemos asumir que $|\xi_1 - \xi_2| \lesssim 1$.
• Si $|\xi_1 - \xi_3| \lesssim 1$. Sea $\xi_1 \in I_n$, entonces $\xi_2 = n + O(1)$, $\xi_3 = n + O(1)$ y $\xi = -3n + O(1)$. Considerando solo el caso diagonal. Usando la desigualdad de Hölder y desigualdad de Bernstein, (3.45), obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^s \left| \int_{\mathbb{R}^2} (u_1)_n (u_2)_n (u_3)_n z_{-3n}\, dxdt \right| &\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{s+1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} (u_1)_n (u_2)_n (u_3)_n z_{-3n}\, dxdt \right| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{s+1} \|(u_1)_n (u_2)_n\|_{L^2_{x,t}} \|(u_3)_n z_{-3n}\|_{L^2_{x,t}} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{s+1} \|(u_1)_n\|_{L^\infty_{x,t}} \|(u_2)_n\|_{L^2_{x,t}} \|(u_3)_n\|_{L^\infty_{x,t}} \|z_{-3n}\|_{L^2_{x,t}} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{s+1} \|(u_1)_n\|_{L^\infty_t L^2_x} \|(u_2)_n\|_{L^2_{x,t}} \|(u_3)_n\|_{L^\infty_t L^2_x} \|z_{-3n}\|_{L^2_{x,t}} \\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{s+1} \|(u_1)_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_2)_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_3)_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} |n|^{-\frac{3}{2}+3\epsilon} \|z_{-3n}\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha} \qquad (3.48) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{s-\frac{1}{2}+3\epsilon} \|(u_1)_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_2)_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_3)_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|z_{-3n}\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha} \\
&\sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{-2s-\frac{1}{2}+3\epsilon} \|(u_1)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_2)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_3)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|z_{-3n}\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha} \\
&\lesssim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|(u_1)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_2)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_3)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|z_{-3n}\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha}.
\end{aligned}$$

Ahora, usamos desigualdad de Hölder en n con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\begin{aligned}
\text{LHS de (3,48)} &\lesssim \left\| \|(u_1)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_2)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_3)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \right\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} \left\| \|z_{-3n}\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha} \right\|_{\ell^{p'}(\mathbb{Z})} \\
&\lesssim \left\| \|(u_1)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \right\|_{\ell^{\frac{3p}{2}}(\mathbb{Z})} \left\| \|(u_2)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \right\|_{\ell^{\frac{3p}{2}}(\mathbb{Z})} \left\| \|(u_3)_n\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \right\|_{\ell^{\frac{3p}{2}}(\mathbb{Z})} \\
&\quad \times \left\| \|z_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha} \right\|_{\ell^{p'}(\mathbb{Z})} \\
&\sim \|u_1\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_{\frac{3p}{2},\alpha}} \|u_2\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_{\frac{3p}{2},\alpha}} \|u_3\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_{\frac{3p}{2},\alpha}} \|z\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_{p',\alpha}} \\
&\leq \|u_1\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_{p,\alpha}} \|u_2\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_{p,\alpha}} \|u_3\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_{p,\alpha}} \|z\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_{p',\alpha}}.
\end{aligned} \qquad (3.49)$$

• Si $|\xi_1 - \xi_3| \gg 1$. Sean $\xi_1 \in I_n$, $\xi_3 \in I_m$, entonces $\xi_2 \in I_{-2n-m+k}$, $j, k = O(1)$. Usando la Proposición 1.22 tenemos que $|\xi_1 - \xi_3| \sim |n - m| \gg 1$ y $|n + m| \sim |\xi_1 + \xi_3| = |\xi_1| + |\xi_3| \sim |n|$. Considerando solo el caso diagonal $j = k = 0$. Luego, aplicamos desigualdad de Bernstein (1.18), el Corolario 2.6 y (3.45)

$$\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ |m|\sim|n|}} |n|^s \left| \int_{\mathbb{R}^2} (u_1)_n (u_2)_n (u_3)_m z_{-2n-m}\, dxdt \right|$$

$$\lesssim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ |m|\sim|n|}} |n|^{s+1} \|(u_1)_n (u_3)_m\|_{L^2_{x,t}} \|(u_2)_n z_{-2n-m}\|_{L^2_{x,t}}$$

$$\lesssim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ |m|\neq|n|}} \frac{|n|^{s-\frac{1}{2}+}}{\sqrt{|m-n||m+n|}} \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}} \|(u_3)_m\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}} \|(u_2)_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}+}} \|z_{-m-2n}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-}}$$

$$\lesssim \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ |m|\neq|n|}} \frac{|n|^{-2s-\frac{1}{2}+}}{\sqrt{|m-n||m+n|}} \|(u_1)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|(u_3)_m\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|(u_2)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|z_{-m-2n}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-}}$$

$$\lesssim \|u_1\|_{X_{\infty,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}} \|u_3\|_{X_{\infty,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m+n\neq 0}} \frac{1}{|m+n|\langle n\rangle^{2s-\epsilon}} \|(u_2)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|z_{-m-2n}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-}}$$

$$\leq \|u_1\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}} \|u_3\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z}\\ m+n\neq 0}} \frac{1}{|n+(-m-2n)|\langle n\rangle^{2s-\epsilon}} \|(u_2)_n\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \|z_{-m-2n}\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-}}. \tag{3.50}$$

Desde que $2s > \epsilon > 0$, nosotros podemos concluir la demostración, usando el Lema 1.24.

• **Sub-subcaso 4.2.2.2.** $\sigma = \sigma_{\text{máx}}$ **y** $|\xi_i - \xi_j| \gg 1$ **para todo** $i \neq j$. Sean $\xi_j \in I_{n_j}$, $j = 1, 2, 3$ y $\xi \in I_n$.

Por la Proposición 1.22, tenemos que $|n_i - n_j| \sim |\xi_i - \xi_j| \gg 1$ y tambien $|n_i + n_j| \sim |\xi_i + \xi_j| \sim |\xi_i| + |\xi_j| \sim |n_i| + |n_j| \sim |\xi_{\text{máx}}| \gg 1$.

Usando la desigualdad de Bernstein (1.18), Corolario 2.6 y (3.45), obtenemos

$$\begin{aligned}
I_{2,2,2} &:= \sum_{n_1+n_2+n_3+n=O(1)} |n|^s \left| \int_{\mathbb{R}^2} (u_1)_{n_1}(u_2)_{n_2}(u_3)_{n_3} z_n \, dxdt \right| \\
&\leq \sum_{n_1+n_2+n_3+n=O(1)} |n|^{s+1} \|(u_1)_{n_1}(u_2)_{n_2}\|_{L^2_{x,t}} \|(u_3)_{n_3} z_n\|_{L^2_{x,t}} \\
&\lesssim \sum_{n_1+n_2+n_3+n=O(1)} |n|^{s+1} \|(u_1)_{n_1}(u_2)_{n_2}\|_{L^2_{x,t}} \|(u_3)_{n_3}\|_{L^\infty_t L^2_x} \|z_n\|_{L^2_{x,t}} \\
&\lesssim \sum_{n_1+n_2+n_3+n=O(1)} |n|^{s+1} \frac{|n|^{-\frac{3}{2}+3\epsilon}}{\sqrt{|n_1+n_2||n_1-n_2|}} \|(u_1)_{n_1}\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_2)_{n_2}\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \\
&\quad \times \|(u_3)_{n_3}\|_{X^{0,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|z_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Observamos las siguientes equivalencias y desigualdad $|n_1+n_2| \sim |\xi_1+\xi_2| \sim |\xi_3+\xi| \sim |n_3+n| \lesssim |n|$. Así

$$\frac{|n|^{-2s-\frac{1}{2}+}}{\sqrt{|n_1+n_2|}} \sim \frac{|n|^{-2s+}}{|n|^{\frac{1}{2}}\sqrt{|n_3+n|}} \lesssim \frac{|n|^{-2s+}}{|n_3+n|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} \sim \frac{\langle n_1\rangle^{-2s+}\langle n\rangle^{0-}}{|n_3+n|}. \tag{3.52}$$

De la Proposición 1.22 uno tiene que $|n_1-n_2| \sim |\xi_1-\xi_2| = |\xi_1+\xi_1+\xi_3+\xi| = |2\xi_1+\xi_3+\xi| = |2n_1+n_3+n+O(1)| \sim |2n_1+n_3+n| \gg 1$. Ahora, realizando el siguiente cambio de variable $n_2 = O(1)-n_1-n_3-n = -n_1+\eta$, $\eta \in \mathbb{Z}$, podemos obtener

$$\begin{aligned}
I_{2,2,2} &\lesssim \sum_{n_1,n_3,n\in\mathbb{Z}} \frac{\langle n_1\rangle^{-2s+}\langle n\rangle^{0-}}{|n_3+n|\sqrt{|n_1-n_2|}} \|(u_1)_{n_1}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_2)_{n_2}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_3)_{n_3}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \\
&\quad \times \|z_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha} \\
&\lesssim \sup_{n_3,n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{\langle n_1\rangle^{-2s+} \|(u_1)_{n_1}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_2)_{-n_1+\eta}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha}}{\sqrt{|2n_1+n_3+n|}} \right) \\
&\quad \times \sum_{n_3,n\in\mathbb{Z}} \frac{\|(u_3)_{n_3}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|z_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha}}{|n_3+n|\langle n\rangle^{0+}} \\
&\sim \sup_{n_3,n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{n_1\in\mathbb{Z}} \frac{|n_1|^{-2s+} \|(u_1)_{n_1}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|(u_2)_{-n_1+\eta}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha}}{\sqrt{|n_1-n_2|}} \right) \\
&\quad \times \sum_{n_3,n\in\mathbb{Z}} \frac{\|(u_3)_{n_3}\|_{X^{s,\frac{1}{2}+}_\alpha} \|z_n\|_{X^{0,\frac{1}{2}-}_\alpha}}{|n_3+n|\langle n\rangle^{0+}}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Luego, usando desigualdad de Hölder en n_1, y el Lema 1.24 con $|n_3+n| \gg 1$, obtenemos

$$I_{2,2,2} \lesssim \sup_{n_3,n\in\mathbb{Z}} \left(\left\| \frac{|n_1|^{-2s+}}{\sqrt{|n_1-n_2|}} \|(u_1)_{n_1}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \right\|_{\ell^{p'}_{n_1}(\mathbb{Z})} \left\| \|(u_2)_{-n_1+\eta}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \right\|_{\ell^{p}_{n_1}(\mathbb{Z})} \right) \times \left\| \|(u_3)_{n_3}\|_{X_\alpha^{s,\frac{1}{2}+}} \right\|_{\ell^{p}(\mathbb{Z})} \left\| \|z_n\|_{X_\alpha^{0,\frac{1}{2}-}} \right\|_{\ell^{p'}(\mathbb{Z})}. \tag{3.54}$$

Finalmente, aplicamos el mismo argumento utilizado en (3.44), aquí notar que $(2s-\epsilon)p' + \frac{1}{2}p' > 1$, desde que $p' > 1$ y $\frac{1}{2} + 2s - \epsilon > 1$ que es verdad para $s > \frac{1}{4}$ y $0 < \epsilon < \frac{4s-1}{2}$, obtenemos

$$I_{2,2,2} \lesssim \|u_3\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}} \|z\|_{X_{p',\alpha}^{0,\frac{1}{2}-}} \|u_2\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}} \|u_1\|_{X_{p,\alpha}^{s,\frac{1}{2}+}},$$

como lo requerido.

Nota 4.3. Observamos que en el Sub-subcaso 4,1,5 y 4,2,2,2 el valor $s = \frac{1}{4}$ es permitido. En efecto, en ambos casos necesitamos la condición

$$(2s-\epsilon)p' + \frac{1}{2}p' > 1. \tag{3.55}$$

Considerando $s = \frac{1}{4}$, la condición (3.55) implica que $(1-\epsilon)p' > 1$, que es verdad siempre y cuando $0 < \epsilon < \frac{p'-1}{p'}$.

En consecuencia, hemos conseguido probar los cuatro casos en su totalidad. Así, concluimos que la estimativa trilineal (3.1) es verdadera.

□

Capítulo 4

Teorema del punto fijo para la ecuación c-NLS-cc

4.1. Teorema fundamental

Teorema 4.1. *Sea* $0 < \alpha \leq 1$, $s \geq \frac{1}{4}$ *y* $2 \leq p < \infty$, *entonces para cada* $u_0 \in M_s^{2,p}(\mathbb{R})$, *existe* $T = T(\|u_0\|_{M_s^{2,p}}) > 0$ *y una única solución* $u \in X_{p,\alpha}^{s,b}(I)$ *para el PVI (1) en el intervalo de tiempo* $I = [0,T]$. *Más aún, la solución* u *satisface la estimativa*

$$\|u\|_{X_{p,\alpha}^{s,b}(I)} \lesssim \|u_0\|_{M_s^{2,p}},$$

donde la norma $\|\cdot\|_{X_{p,\alpha}^{s,b}(I)}$ *es definida en* (1,36).

Demostración. Consideramos el valor inicial $u_0 \in M_s^{2,p}(\mathbb{R})$ con $s \geq \frac{1}{4}$ y $2 \leq p < \infty$. Definimos la siguiente aplicación

$$\Phi(u)(t) := \eta_1(t)U_\alpha(t)u_0 + \eta_\rho(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')\partial_x(|u|^2u)(t')dt'. \tag{4.1}$$

Probaremos que Φ define una contracción en

$$\Omega_a := \{u \in X_{p,\alpha}^{s,b} : \|u\|_{X_{p,\alpha}^{s,b}} \leq a\}. \tag{4.2}$$

Podemos observar que $(\Omega_a, \|.\|_{X_{p,\alpha}^{s,b}})$ es un espacio normado completo y cerrado.
Primero comenzamos probando que $\Phi : \Omega_a \to \Omega_a$ está bien definido.
En efecto, si $u \in \Omega_a$, entonces $\|u\|_{X_{p,\alpha}^{s,b}} \leq a$.

Usamos la definición (4.1), Lema 2.1, Lema 2.2, Proposición 3.1 y la definición (4.2)

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}} &\leq \|\eta_1(t)U_\alpha(t)u_0\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}} + \|\eta_\rho(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')\partial_x(|u|^2u)dt'\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}}\\ &\leq c_0\|u_0\|_{M^{2,p}_s} + c_1\rho^{1+b'-b}\|\partial_x(|u|^2u)\|_{X^{s,b'}_{p,\alpha}}\\ &\leq c_0\|u_0\|_{M^{2,p}_s} + c_1\rho^{1+b'-b}c_2\|u\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}}\|u\|^2_{X^{s,b}_{p,\alpha}}\\ &\leq c\|u_0\|_{M^{2,p}_s} + c\rho^{1+b'-b}\|u\|^3_{X^{s,b}_{p,\alpha}}\\ &\leq c\|u_0\|_{M^{2,p}_s} + c\rho^{1+b'-b}a^3.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Luego, de (4.3), obtenemos

$$\|\Phi(u)\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}} \leq c\|u_0\|_{M^{2,p}_s} + c\rho^{1+b'-b}a^3.$$

Escogemos $a = 2c\|u_0\|_{M^{2,p}_s}$ y $\rho > 0$ tales que $c\rho^{1+b'-b}a^2 < \frac{1}{2}$, en consecuencia

$$\|\Phi(u)\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}} \leq \frac{a}{2} + \frac{a}{2}. \tag{4.4}$$

Por lo tanto, $\Phi(u) \in \Omega_a$.
Segundo, queremos probar que Φ es una contracción.
En efecto, dados $u, \tilde{u} \in \Omega_a$

$$\begin{aligned}\|\Phi(u) - \Phi(\tilde{u})\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}} &\leq c\rho^{1+b'-b}\left(\|u\|^2_{X^{s,b}_{p,\alpha}} + \|\tilde{u}\|^2_{X^{s,b}_{p,\alpha}}\right)\\ &\quad\times \|u-\tilde{u}\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}}\\ &\leq c\rho^{1+b'-b}(a^2+a^2)\times\|u-\tilde{u}\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}}\\ &= 2c\rho^{1+b'-b}a^2\|u-\tilde{u}\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}}.\end{aligned} \tag{4.5}$$

Luego, Φ es una contracción de Ω_a en Ω_a, entonces existe u único punto fijo, solución de la ecuación integral (4.1) para $t \in [0,T]$, donde $T < \rho$, es decir,

$$u(t) = \eta(t)U_\alpha(t)w_0 + \eta_\rho(t)\int_0^t U_\alpha(t-t')\partial_x(|u|^2u)(t')dt'. \tag{4.6}$$

Finalmente, queremos probar que u depende continuamente del dato inicial u_0.
En efecto, usando un argumento similar como lo anterior, deducimos que para $T_1 \in (0,T)$

$$\begin{aligned}\|u-\tilde{u}\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}} &= \|\Phi(u)-\Phi(\tilde{u})\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}}\\ &\leq c_1\|u_0-\tilde{u_0}\|_{M^{2,p}_s}\\ &+ 2c_2T_1^{1+b'-b}a^2\|u-\tilde{u}\|_{X^{s,b}_{p,\alpha}},\end{aligned} \tag{4.7}$$

en la ultima igualdad usamos (4.5). Finalmente, denuevo escogemos a y T_1 como en (4.4), es decir,

$$2c_2 T_1^{1+b'-b} a^2 < \frac{1}{2}. \tag{4.8}$$

Así, obtenemos que

$$\|u - \tilde{u}\|_{X_{p,\alpha}^{s,b}} \leq 2c_1 \|u_0 - \tilde{u_0}\|_{M_s^{2,p}}. \tag{4.9}$$

Lo anterior, prueba que para $T_1 \in (0, T)$ el mapeo $u_0 \mapsto \tilde{u}$ en una vecindad $V(u_0)$ de u_0 dependiendo de T_1, para Ω_a es Lipschitz.
Por lo tanto, se prueba que el PVI (1) el localmente bien puesto cuando el dato inicial $u_0 \in M_s^{2,p}(\mathbb{R})$, para cada $s \geq \frac{1}{4}$ y $2 \leq p < \infty$. □

Bibliografía

[1] Carvajal, X. (2020). A remark on the local well-posedness for a coupled system of mKdV type equations in Hs × Hk. Differential Equations and Applications, 12(4), 443–456.

[2] Carvajal, X., & Panthee, M. (2022). Nonlinear Schrödinger equations with the third order dispersion on modulation spaces. Partial Differential Equations and Applications, 3(5), 1-21.

[3] Feichtinger, H. G. (1983). Modulation Spaces on Locally Compact Abelian Groups. Technical Report, University Vienna, January, 1-52.

[4] Ginibre, J., Tsutsumi, Y., & Velo, G. (1997). On the Cauchy Problem for the Zakharov System. Journal of Functional Analysis, 151, 384–436.

[5] Grünrock, A. (2004). An improved local well-posedness results for the modified KdV equation. International Mathematics Research Notices, 61, 3287–3308.

[6] Grünrock, A., & Vega, L. (2004). Local well-posedness result for the modified KdV equation in almost critical $\widehat{H}^r_s$-spaces. Transactions of the American Mathematical Society, 361(11), 5681–5694.

[7] Iório, R., & Iório, V. (2013). Equações diferenciais parciais: uma introdução. 3.ed. Rio de Janeiro, IMPA, 304-315.

[8] Linares, F., & Ponce, G. (2015). Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. Springer-Verlag, 139–172.

[9] Oh, T. (2009). Diophantine conditions in well-posedness theory of coupled KdV-type systems: local theory. International Mathematics Research Notices, 18, 3516-3556.

[10] Oh, T. (2007). Well-posedness theory of a one-parameter family of coupled KdV-type system and their invariant Gibbs measures. PhD thesis. University of Massachusetts, 55-85.

[11] Oh, T. (2020). Global well-posedness of the one-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equation in almost critical spaces. Journal of Differential Equations, 269(1), 612-640.

[12] Oh, T., & Wang, Y. (2021). On global well-posedness of the modified KdV equation in modulation spaces. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 41(6), 2971-2992.

[13] Panthee M. (2011). Nonlinear Dispersive Models: Well-posedness and Unique Continuation Property. VDM Verlag Dr. Müller, 16-41.

[14] Tao, T. (2005). Nonlinear Dispersive Equations Local and Global Analysis. Conference Board of the Mathematical Sciences, 106, 394-414.