Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Método del punto proximal para funciones cuasiconvexas usando el subdiferencial de Clarke - Rockafellar en espacios de Banach

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Michell Dixon VITE OCAÑA

ASESOR

Dr. Erik Alex PAPA QUIROZ

Lima, Perú

2025



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Vite, M. (2025). *Método del punto proximal para funciones cuasiconvexas usando el subdiferencial de Clarke - Rockafellar en espacios de Banach*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemáticas]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Michell Dixon Vite Ocaña
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	74850611
URL de ORCID	**https://orcid.org/0000-0003-2930-3059**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Erik Alex Papa Quiroz
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10451642
URL de ORCID	**https://orcid.org/0000-0002-8678-6918**
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Edison Raul Montoro Alegre
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09627181
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Alex Armando Cruz Huallpara
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	40949706
Datos de investigación	
Línea de investigación	Optimización Matemática

Grupo de investigación	Optimización Matemática y Computacional (OPTIMACO)
Agencia de financiamiento	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Vicerrectorado de Investigación de Promoción de Tesis de Pregrado.PCONFIGI-B23141311-PTPGRADO.
Ubicación geográfica de la investigación	Sede de la UNMSM
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2 años
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 11:11 *horas del viernes 14 de febrero del 2025, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Edinson Raul Montoro Alegre (PRESIDENTE), Dr. Alex Armando Cruz Huallpara (MIEMBRO) y el Dr. Erik Alex Papa Quiroz (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada:* ***"MÉTODO DEL PUNTO PROXIMAL PARA FUNCIONES CUASICONVEXAS USANDO EL SUBDIFERENCIAL DE CLARKE - ROCKAFELLAR EN ESPACIOS DE BANACH"*** *presentado por el señor Bachiller* ***Michell Dixon Vite Ocaña****, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación Sobresaliente con mención *con un calificativo promedio de* Diecinueve (19).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Edinson Raul Montoro Alegre, manifestó que el señor Bachiller ***Michell Dixon Vite Ocaña****, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Siendo las 12:00 *horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.*

Dr. Edinson Raul Montoro Alegre
PRESIDENTE

Dr. Alex Armando Cruz Huallpara
MIEMBRO

Dr. Erik Alex Papa Quiroz
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Erik Alex Papa Quiroz en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°000153-202-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es **"MÉTODO DEL PUNTO PROXIMAL PARA FUNCIONES CUASICONVEXAS USANDO EL SUBDIFERENCIAL DE CLARKE - ROCKAFELLAR EN ESPACIOS DE BANACH"**, presentado por el bachiller **Michell Dixon Vite Ocaña**, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 10% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor

DNI: 10451642

Resumen

Presentamos un algoritmo de punto proximal para funciones cuasiconvexas semi-continuas inferiores (sci) utilizando el subdiferencial de Clarke-Rockafellar. Este algoritmo es motivado por los métodos proximal introducido por algunos investigadores recientemente [[23] y [1]]. Pero a diferencia nosotros usamos funciones más generales que las localmente lipschitz, es decir consideramos funciones solo sci y usamos el subdiferencial de Clarke-Rockafellar; para llegar a que la sucesión provista por el algoritmo converge debílmente a un punto crítico general en un espacio de Banach.

Palabras clave: Método del punto proximal, Subdiferencial de Clarke-Rockafellar, Funciones Cuasiconvexas, Funciones semicontinua inferior.

Abstract

We present a proximal point algorithm for quasi-convex semi-continuous functions inferiors (sci) using the Clarke-Rockafellar subdifferential. This algorithm is motivated by the proximal methods introduced by some researchers recently [[23] and [1]]. But unlike us we use more general functions than the locally lipschitz ones, that is say we consider only sci functions and use the Clarke-Rockafellar subdifferential; for arrive at the sequence provided by the algorithm weakly converges to a general critic point in a Banach space.

Keywords: Proximal point method, Clarke-Rockafellar subdifferential, Quasiconvex functions, Inferior semicontinuous functions.

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado principalmente a mis padres por su apoyo y su confianza.

Agradecimientos

Primero agradecer a mi fuente de inspiración y apoyo que son mi padres, gracias por guiarme en los primeros pasos y hacerme la persona que soy hoy en día; sin lugar a dudas este merito se los debo a ustedes, ya que no hubiera sido posible sin su amor, sacrificio y los valores que me inculcaron.

También me gustaría expresar mi agradecimiento al Dr. Erik Alex Papa Quiroz por guiarme en el camino de la investigación, un camino difícil pero gratificante; sobre todo por su gran experiencia y paciencia acompañándome a perseverar y desarrollar esta tesis.

De igual manera agradecer a profesores, hermana, enamorada y amistades que contribuyeron también a la realización de esta tesis.

Y por último agradecer a mí casa de estudios, mi alma mater, a la UNMSM que desde el inicio genero un gran reto para mí el cual no hizo más que sacar todo mi potencial y formarme como un buen profesional.

Tabla de contenidos

Resumen I

Abstract II

Dedicatoria III

Agradecimientos IV

Tabla de contenidos V

Introducción 1

I. Marco teórico 5
1.1. Definiciones Básicas 5
1.2. Subdiferencial y Derivada Generalizada de Clarke-Rockafellar 7
1.3. Operadores Cuasimonótonos 9
1.4. Convergencia Cuasi-Fejér 10
1.5. Convergencia Fuerte y Débil 11
1.6. Subdiferencial y Derivada Generalizada de Clarke 11

II. El Problema 13
2.1. Ejemplos 13

III. El Algoritmo 30
3.1. Algoritmo 30
3.2. Ejemplos 31

IV. Análisis de Convergencia 35
4.1. Primeros Resultados 35
4.2. Existencia 36
4.3. Convergencia 37

V. Conclusiones **43**
5.1. Discuciones 43
5.2. Conclusiones 44
5.3. Trabajos posteriores 44

INTRODUCCIÓN

En el campo de la matemática aplicada existen diversas áreas que dan solución a problemas vinculados a las ciencias e ingenierías, una de ellas es la Optimización que estudia encontrar la manera de resolver un problema dado dentro de las posibilidades. Dentro de estas maneras existe un método muy importante que es el Algoritmo de Punto Proximal(PPA), un método para encontrar ceros de operadores no monótonos máximos [ver [16], [25]]y en particular para resolver problemas de optimización convexa[ver [29], [20]]; sobre este último Rockafellar mostró cómo el algoritmo del punto proximal se puede aplicar a problemas de programación convexa de tres maneras diferentes: el algoritmo de minimización proximal primal, el método dual de multiplicadores y el método proximal primal-dual de multiplicadores.

Comentamos también que el Algoritmo de Punto Proximal (PPA) no es el único método; algunos de estos son por ejemplo: el método del Gradiente Conjugado [ver [3]], el método del Gradiente [ver [14]], el método de Newton [ver [19]], etc.

Dando un poco de contexto el Método del Punto Proximal (PPA) fue introducido por Martinet [5] (1970), el cuál es un método iterativo, que se caracteriza por resolver en cada iteración un problema más simple de optimización, de tal forma que paso a paso las iteraciones se aproximan a la solución buscada. El Método del Punto Proximal posteriormente fue extendido hacia las desigualdades variacionales monótonas y no monótonas[ver [25], [28]], y en particular hacia los problemas no convexos de minimización, lo cual no solo se debe a la simple extensión de la teoría de convergencia del método, sino también a las múltiples aplicaciones en diversas áreas de las ciencias e ingenierías[ver [6], [7]], aplicaciones que han permitieron que dichos algoritmos también sean extendidos hacia los problemas de minimización cuasiconvexos [ver [17], [4]].

Existen trabajos anteriores que sirvieron como motivación y que usan el Método del punto proximal, a continuación daremos algunos ejemplos:

* El método del punto proximal, introducido por Burachik y Scheimberg [25] para resolver un problema de desigualdad variacional en el cual se puede reducir a un problema de optimización con restricciones no suaves, es decir:

$$\min_{x\in\Omega} f(x),$$

donde $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia sci convexa que genera una sucesión

$\{x^k\}$ dada por $x^0 \in (\Omega \cap D(\partial f))$, y

$$0 \in (\partial^1 f(\cdot) + N_\Omega + \lambda^k \bigtriangledown g)(x^{k+1}) - \lambda^k \bigtriangledown g(x^k), \tag{0.1}$$

donde λ^k es un parámetro positivo, ∂^1 es la subdiferencial de Fenchel definida sobre un conjunto convexo, N_Ω es el operador de normalidad asociado a Ω y g una función de Bregman, el cual se obtuvo que la sucesión converge débilmente a una solución, es decir, existe un punto de acumulación débil único.

* El método del punto proximal, introducido por Ferreira y Oliveira [21] para resolver problemas de minimización con funciones objetivo convexas en variedades de Hadamard, es decir:

$$\min_{x \in M} f(x),$$

donde $f : M \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es una función propia convexa y M es una variedad de Hadamard (recordando que una variedad de Hadamard es una variedad de Riemann de dimensión finita simplemente conectada con curvatura de sección no positiva) que genera una sucesión $\{x^k\}$ dada por $x^0 \in M$, y

$$x^{k+1} = argmin_{y \in M}\{f(y) + \frac{\lambda^k}{2} d^2(y, x^k)\}, \tag{0.2}$$

donde λ^k es un parámetro positivo, d es una distancia riemanniana en M, el cual se obtuvo que la sucesión converge a una solución, siempre y cuando el conjunto de soluciones del problema no es vacío.

* El método del punto proximal, introducido por Papa Quiroz y Oliveira [24] para resolver problemas de minimización con funciones objetivo cuasiconvexas localmente de Lipschitz en variedades de Hadamard, es decir:

$$\min_{x \in M} f(x),$$

donde $f : M \to I\!R \cup \{+\infty\}$ es una función Lipschitz localmente cuasiconvexa sci propia y M es una variedad de Hadamard que genera una sucesión $\{x^k\}$ dada por $x^0 \in M$, y

$$0 \in \partial^C \left(f(\cdot) + \frac{\lambda^k}{2} d^2\left(\cdot, x^{k-1}\right)\right)\left(x^k\right), \tag{0.3}$$

donde λ^k es un parámetro positivo, ∂^C es el subdiferencial de Clarke, d es una distancia riemanniana en M, en el cual se probó que la sucesión converge globalmente a un punto crítico de la función.

* El método del punto proximal, introducido por Papa Quiroz y Oliveira [22] para resolver problemas de minimización con funciones objetivo cuasiconvexas en variedades de

Hadamard, es decir:

$$\min_{x\in M} f(x),$$

donde $f : M \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propis cuasiconvexa y M es una variedad de Hadamard que genera una sucesión $\{x^k\}$ dada por $x^0 \in M$, y

$$0 \in \partial^F \left(f(\cdot) + \frac{\lambda^k}{2} d^2\left(\cdot, x^{k-1}\right)\right)\left(x^k\right), \tag{0.4}$$

donde λ^k es un parámetro positivo, ∂^F es el subdiferencial de Fréchet, d es una distancia riemanniana en M, en el cual se probó que la sucesión bajo los supuestos de que la secuencia de parámetros proximales está acotada y la función es continua, obtenemos la convergencia a un punto crítico generalizado de la función.

* Cano Lengua [1] introduce el siguiente método del punto proximal para resolver el problema de minimización $\min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ que genera una sucesión $\{x^k\}$ dada por $x^0 \in \mathbb{R}^n$ y

$$0 \in \partial^C \left(f(\cdot) + \frac{\lambda^k}{2} ||\cdot - x^{k-1}||^2\right)\left(x^k\right) \tag{0.5}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función localmente lipschitziana, cuasiconvexa y no diferenciable, λ^k es un parámetro positivo y ∂^C es el subdiferencial Clarke; el cual se probó que converge a un punto crítico generalizado de la función ,y si el conjunto de soluciones del problema no es vacío y si la función es pseudoconvexa la sucesión converge a la solución óptima del problema.

Pero visto a rasgos generales encontramos que es posible mejorar o generalizar el espacio de partida, ya no solo $\mathbb{R}^n$ sino algo más general como X un espacio de Banach y la subdiferencial tomada en [1], por eso en este trabajo basado en lo descrito anteriormente consideramos el método del punto proximal en un espacio más general, es decir X un espacio de Banach y $S \subset X$. Consideremos el problema de minimización cuasiconvexa $\min\{f(x) : x \in S\}$ donde $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es s.c.i., cuasiconvexa y utilizando la subdiferencial de Clark-Rockefeller; se probará más adelante que la siguiente sucesión: $x^0 \in X$, y

$$0 \in \partial\left(f(\cdot) + \frac{\lambda^k}{2} ||\cdot - x^{k-1}||^2\right)\left(x^k\right) \tag{0.6}$$

va a converger debílmente algún punto de X.

Nuestro artículo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2 presentamos conceptos básicos necesarios para el desarrollo de la investigación, en la sección 3 presentamos el problema de minimización a tratar con ejemplos, en la sección 4 presentamos nuestro algoritmo

del punto proximal con desarrollo en ejemplos, en la sección 5 presentamos el análisis de convergencia (existencia y convergencia) y en las secciones 6 y 7 presentamos las discusiones y conclusiones(trabajos futuros).

Capítulo I

Marco teórico

Sea X, Y, Z espacios de Banach con norma $\|\cdot\|$, X^* su dual y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el emparejamiento del dual. También, $[a,b] = \{a+t\,(b-a)\ ,t \in [0,1]\}$ y $[a,b[$ es el conjunto $[a,b]$-$\{b\}$. La bola abierta centrada en x con radio r se denota por $B_r(x)$. Además denotaremos el siguiente conjunto: $domf = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$.

1.1. Definiciones Básicas

Definición 1.1.1 *([15], pág. 27) Sea un X espacio de Banach. Si $x^* \in X^*$, entonces:*

$$||x^*||_* = \sup\{\langle x^*, v\rangle : v \in X, ||v|| \leq 1\}.$$

Definición 1.1.2 *([2], pág. 34, Definición 3.3) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función. f es llamada sci (semicontinua inferior) en $x^0 \in X$ si y solo si*

$$f(x^0) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x^n),\ \forall\ x^n \to x^0.$$

Diremos que f es sci en $U \subset X$ si f es sci en x, $\forall x \in U$

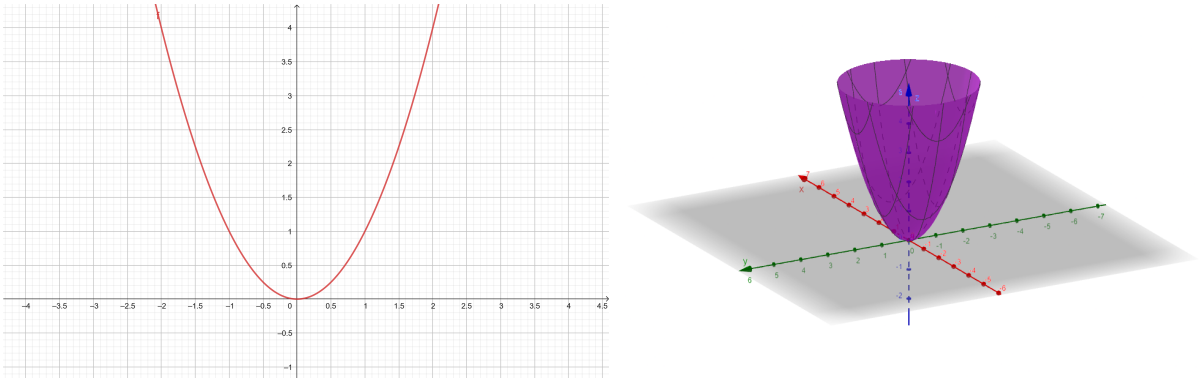
Definición 1.1.3 *([10], pág. 396) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función. f es una función cuasi-convexa en X si $\forall\, x, y \in X$ y para cualquier $\lambda \in [0,1]$, se cumple lo siguiente:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq max\{f(x), f(y)\}$$

Ejemplo 1.1.1 *Sea la función $f : X \to \mathbb{R}$:*

$$f(x) = ||x||^2$$

- *f es cuasiconvexa en X.*



(a) Si $X = \mathbb{R}$ (b) Si $X = \mathbb{R}^2$

Figura 1.1: Gráfica de la función del ejemplo 1.1.1

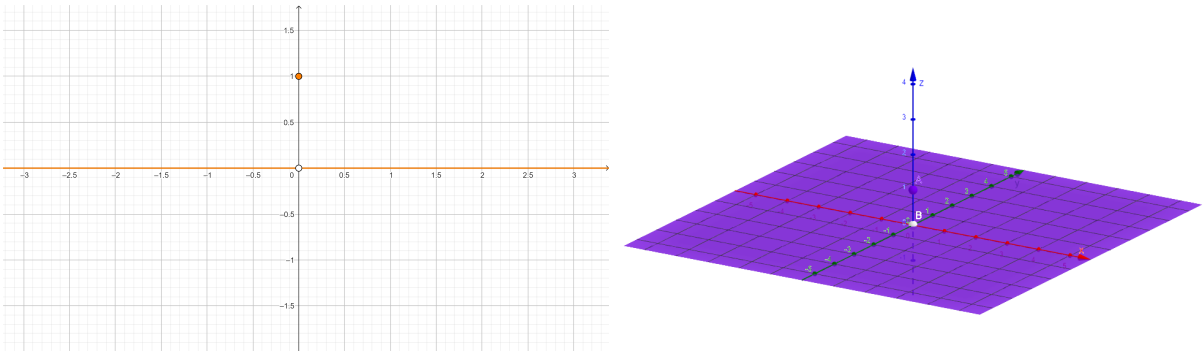
Definición 1.1.4 *([11], pág. 81, Definition 3.1) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función. f es una función semiestricta cuasiconvexa en X si $\forall\, x, y \in X$ y para cualquier $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$, se cumple la siguiente implicación:*

$$f(x) < f(y) \Longrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(y).$$

Ejemplo 1.1.2 *Sea la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ;si\ x \neq \theta \\ 1 & ;si\ x = \theta \end{cases}$$

- *f es semiestricta cuasiconvexa pero no es cuasiconvexa en $\mathbb{R}^n$.*



(a) Si $n = 1$ (b) Si $n = 2$

Figura 1.2: Gráfica de la función del ejemplo 1.1.2

Teorema 1.1.1 *([11], pág. 57, Proposición 3.2) Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función, y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Si f es una función cuasiconvexa en X y F es una función estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, entonces $F \circ f$ es cuasiconvexa en X.*

Teorema 1.1.2 *([11], pág. 82, Proposición 3.30) Sea $f : X \to Y$ una función. Si f es una función sci y semiestricta cuasiconvexa en X, entonces f es cuasiconvexa.*

1.2. Subdiferencial y Derivada Generalizada de Clarke-Rockafellar

Definición 1.2.1 *([27], pág. 264) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, $x \in dom f$ y $v \in X$. La derivada superior de x con respecto a v está definida por:*

$$f^{\nearrow}(x,v) = \sup_{\varepsilon>0} \limsup_{(y,\alpha)\to_f x, t\downarrow 0} \inf_{u\in B_\varepsilon(v)} \frac{f(y+tu)-\alpha}{t}; \tag{1.1}$$

donde $(y,\alpha) \to_f x$ significa que $y \to x$, $\alpha \to f(x)$, $\alpha \geq f(y)$.

Nótese que si f es sci podemos reducir la derivada superior aún más.

Definición 1.2.2 *([26], pág. 334) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia sci y $x \in domf$. La derivada generalizada de Clarke-Rockafellar de x en la dirección v está definido por:*

$$f^{\nearrow}(x,v) = \sup_{\varepsilon>0} \limsup_{y \to_f x, t \downarrow 0} \inf_{u \in B_\varepsilon(v)} \frac{f(y+tu) - f(y)}{t}; \tag{1.2}$$

donde $y \to_f x$ significa que $y \to x$ y $f(y) \to f(x)$. Y el subdiferencial de Clarke-Rockafellar de f en x se define como:

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, v \rangle \leq f^{\nearrow}(x,v), \forall v \in X\}. \tag{1.3}$$

Ejemplo 1.2.1 *Sea la función $f : X \to \mathbb{R}$:*

Lema 1.2.1 *([10], pág. 396, Lema 3.1) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función sci definida en un espacio de Banach X y $a, b \in X$; $f(a) < f(b) \Rightarrow$ existe una sucesión $\{x_n\} \subset X$ convergente a algún $x_0 \in [a,b[$ y existe una sucesión $\{x_n^*\} \subset X^*$ con $x_n^* \in \partial f(x_n)$ tal que para cualquier $c = a + t(b-a)$ con $t \geq 1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, tenemos $\langle x_n^*, c - x_n \rangle > 0$.*

Teorema 1.2.1 *([9], pág. 1414, Teorema 2.2) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función y $x \in domf$. Si $f^{\nearrow}(x,0) = -\infty$, entonces $\partial f(x) = \varnothing$, de lo contrario:*

$$f^{\nearrow}(x,v) = \sup\{\langle x^*, v \rangle; x^* \in \partial f(x)\}, \forall v \in X. \tag{1.4}$$

Teorema 1.2.2 *([9], pág. 1414, Teorema 2.2) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función y $x \in domf$. Si f alcanza en x un mínimo local, entonces:*

$$\{f^{\nearrow}(x,v) \geq 0, \forall v \in X\} \wedge \{0 \in \partial f(x)\}. \tag{1.5}$$

Teorema 1.2.3 *([9], pág. 1414, Teorema 2.2) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función y $x \in domf$.*

Si f es localmente lipschitziana, entonces:

$$\partial(\lambda f)(x) = \lambda \partial f(x), \forall \lambda \in X \tag{1.6}$$

Teorema 1.2.4 *([9], pág. 1414, Teorema 2.2) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función y $x \in domf$. Sea $g : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty)$ una función lipschitziana en una vecindad de x, entonces:*

$$\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x) \tag{1.7}$$

y

$$(f+g)^{\nearrow}(x,v) \leq f^{\nearrow}(x,v) + g^{\nearrow}(x,v), \forall v \in X. \tag{1.8}$$

Teorema 1.2.5 *([9], pág. 1414, Teorema 2.2) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función y $x \in domf$. Si f es convexo y localmente lipzchitziana, entonces:*

$$f^{\nearrow}(x,v) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = f'(x,v), \forall v \in X. \tag{1.9}$$

1.3. Operadores Cuasimonótonos

Definición 1.3.1 *([18], pág. 242) Sea $\Gamma : X \rightrightarrows X^*$ una multifunción. Γ es llamada cuasimonótono si y solo si $\forall x, y \in X$ se cumple la siguiente implicación:*

$$\exists x^* \in \Gamma(x) : \langle x^*, y - x \rangle > 0 \Rightarrow \forall y^* \in \Gamma(y) : \langle y^*, y - x \rangle \geq 0. \tag{1.10}$$

Ejemplo 1.3.1 *Sea la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; si\ x \leq 0 \\ 0 & ; si\ x > 0 \end{cases}$$

- f *es cuasimonótono en* $\mathbb{R}$ *pero no es monótono.*

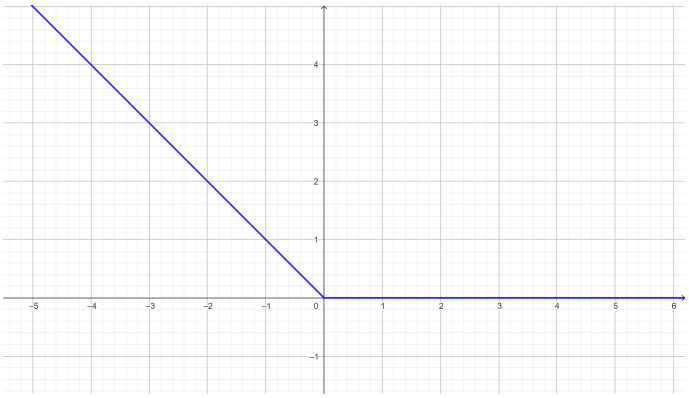


Figura 1.3: Gráfica de la función del ejemplo 1.3.1

Teorema 1.3.1 *([10], pág. 398, Teorema 3.2) Sea* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función sci.* f *es cuasiconvexa si y solo si* ∂f *es cuasimonótono.*

1.4. Convergencia Cuasi-Fejér

Definición 1.4.1 *([13], Definición 2.1) Sea X un espacio de Banach. Una sucesión* $\{x^k\} \in X$ *es Cuasi-Fejér convergente en* $U \subset X$ *si* $\forall x^* \in U$*, existe una sucesión sumable no negativa* $\{\rho^k\}$*:*

$$||x^k - x^*|| \leq ||x^{k-1} - x^*|| + \rho^k, \forall x^* \in U, \forall k \geq 0.$$

En particular si $\rho^k = 0$ *la sucesión se llamará Fejér convergente.*

Teorema 1.4.1 *([13], Proposición 2.1) Sea una sucesión* $\{x^k\} \in X$ *es Fejér converegnte sobre un conjunto* $U \neq \varnothing$*, entonces la sucesión* $\{x^k\} \in X$ *está acotada.*

1.5. Convergencia Fuerte y Débil

Definición 1.5.1 *([12], pág. 256, Definición 4.8-1) Sea $\{x^k\}$ una sucesión en X. Se dice que $\{x^k\}$ converge fuertemente si $\exists\, x \in X$:*

$$\lim_{k\to+\infty} ||x^k - x|| = 0.$$

Definición 1.5.2 *([12], pág. 257, Definición 4.8-2) Sea $\{x^k\}$ una sucesión en X. Se dice que $\{x^k\}$ converge débilmente si $\exists\, x \in X$, $\forall x^* \in X^*$:*

$$\lim_{k\to+\infty} \langle x^*, x^k\rangle = \langle x^*, x\rangle.$$

Teorema 1.5.1 *([8], pág. 130, Corolario 5.5.7) Sea $\{x^k\}$ una sucesión en X y $dimX = +\infty$. Si $\{x^k\}$ está acotado, entonces $\exists\, x \in X$: la sucesión tiene alguna subsucesión $\{x^{k^n}\}$ que converge débilmente a x.*

1.6. Subdiferencial y Derivada Generalizada de Clarke

Definición 1.6.1 *([27], pág. 266) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia sci localmente lipschitz y $x \in domf$. La derivada generalizada de Clarke de x en la dirección v está definido por:*

$$f^\circ(x,v) = \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t};$$

Y el subdiferencial de Clarke de f en x se define como:

$$\partial^C f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \le f^\circ(x,v), \forall v \in X\}.$$

Definición 1.6.2 *([15], pág. 30) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función y sea $x \in X$. Diremos que f es estrictamente diferenciable en x, un elemento de X^* denotado $D_s f(x)$, siempre que para cada v en X se cumpla lo siguiente:*

$$\langle D_s f(x), v\rangle = \lim_{y\to x, t\to 0} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$$

Corolario 1.6.1 *([15], pág. 32) Sea $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función de clase C^1, entonces f es localmente lipschitz y estrictamente diferenciable.*

Corolario 1.6.2 *([27], pág. 268, Corolario 1) Sea $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función localmente lipschitz en x, entonces:*

$$f^{\nearrow}(x,v) = f^{\circ}(x,v);$$

y en consecuencia:

$$\partial^C f(x) = \partial f(x)$$

Proposición 1.6.1 *([15], pág. 33, Proposición 2.2.4) Sea $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función estrictamente diferenciable en x, entonces:*

$$\partial^C f(x) = \{D_s f(x)\}$$

Teorema 1.6.1 *([1], pág 35, Teorema 2.2.6) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ una función de clase C^1, entonces:*

$$\partial^C f(x) = \{\bigtriangledown f(x)\}$$

Capítulo II

El Problema

Considere el problema de optimización:

$$\text{mín}\{f(x) : x \in X\} \tag{2.1}$$

donde X es un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es una función propia que satisface las siguientes supuestos:

$(\mathbf{H_1})$ f es sci y acotada inferiormente

$(\mathbf{H_2})$ f cuasiconvexa

Observe que la hipotesis $(\mathbf{H_1})$ es usada en [23] mientras que $(\mathbf{H_2})$ se tomó de [1].

2.1. Ejemplos

A seguir daremos ejemplos de funciones no convexas que satisfacen $(\mathbf{H_1})$ y $(\mathbf{H_2})$.

Ejemplo 2.1.1 *Sea la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-x^2} & ; si\ x \neq 0 \\ -2 & ; si\ x = 0 \end{cases}$$

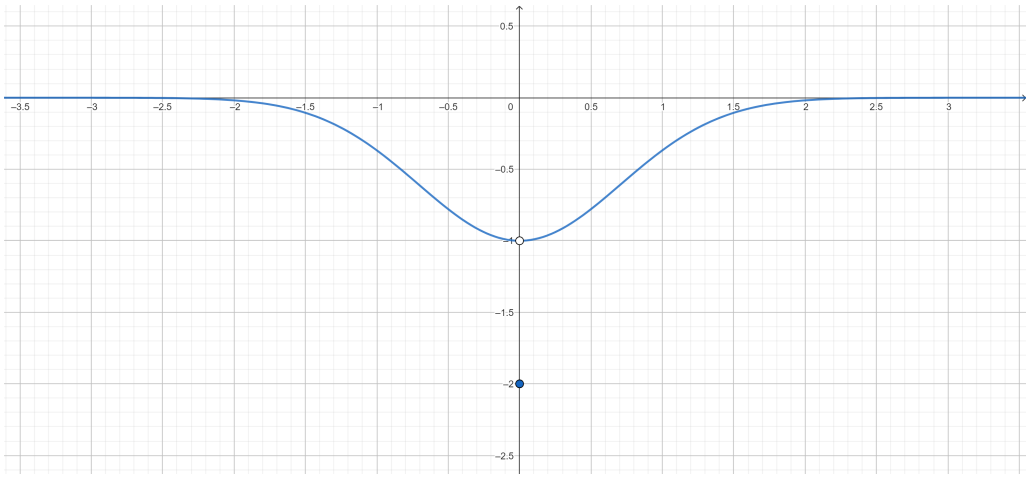


Figura 2.1: Gráfica de la función del ejemplo 2.1.1

- *f es sci en $\mathbb{R}$, en efecto, sea $\{x^n\}$ una sucesión tal que $x^n \to y$:*

  Sea $y \neq 0$, entonces $f(x^n) = -e^{-(x^n)^2} \to f(y)$, entonces f es sci en y.

  Sea $y = 0$; si $x^n = 0$, entonces f es sci en 0, si $x^n \neq 0$ para n suficientemente grande, entonces $f(x^n) \to -1$ y $f(0) = -2$, entonces $-2 = f(0) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x^n) = -1$, entonces f es sci.

  Entonces f es sci en $\mathbb{R}$ pero no es continua y por ende no es localmente lipschitz.

- *f es acotada inferiormente, en efecto:*

  Sea $0 \neq x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 < +\infty$, entonces $f(x) = -e^{-x^2} > -1$

  Sea $0 = x \in \mathbb{R}$, entonces $f(0) = -2$.

  Entonces f está acotada inferiormente.

- *f es estricta cuasiconvexa, en efecto sea* $x, y \in \mathbb{R}$ *y* $t \in \langle 0,1 \rangle$*:*

1° *Caso:* *Sea* $x = 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow f(0) = -2 < -e^{-y^2} = f(y)$

$$0 < t < 1$$

$$(1-t)^2 y^2 < y^2$$

$$-e^{-(t0+(1-t)y)^2} < -e^{-y^2}$$

Entonces f es estricta cuasiconvexa.

2° *Caso:* *Sea* $x \neq 0 \wedge y = 0 \Rightarrow f(0) = -2 < -e^{-x^2} = f(x)$

$$0 < t < 1$$

$$(t)^2 x^2 < x^2$$

$$-e^{-(tx+(1-t)0)^2} < -e^{-x^2}$$

Entonces f es estricta cuasiconvexa.

3° *Caso:* *Sea* $x \neq 0 \wedge y \neq 0$

Sin pérdida de generalidad supondremos que $f(x) < f(y)$*:*

$$-e^{-x^2} < -e^{-y^2}$$

$$x^2 < y^2$$

$$|x| < |y|$$

Por otro lado se tiene que:

$$|tx + (1-t)y| \leq t|x| + (1-t)|y|$$

$$|tx + (1-t)y| < |y|, \textit{ pues } |x| < |y|$$

$$|tx + (1-t)y|^2 < |y|^2$$

$$-e^{-(|tx+(1-t)y|^2)} < -e^{-|y|^2}$$

Entonces f es estricta cuasiconvexa.

- *f es cuasiconvexa, en efecto por el Teorema 1.1.2.*

Ahora sea $0 \neq x \in \mathbb{R}$, *entonces* $\partial f(x) = \{2e^{-x^2}x\}$, *en efecto:*

$$\partial f(x) = \{x^* \in (\mathbb{R})^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\nearrow}(x,v), \forall v \in \mathbb{R}\}.$$

Sea $v \in \mathbb{R}$; *f es de clase* C^1, *entonces por el Corolario 1.6.1 f es localmente lipschitz, entonces por el Teorema 1.6.1 y Corolario 1.6.2:*

$$\partial f(x) = \partial^C f(x) = \{\bigtriangledown f(x)\}$$

entonces $\bigtriangledown f(x) = 2e^{-x^2}x$, *de lo cual se tiene lo que se quería probar*
Ahora sea $0 = x \in \mathbb{R}$, *entonces* $\partial f(x) = \mathbb{R}$, *en efecto:*

$$\partial f(0) = \{x^* \in (\mathbb{R})^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\nearrow}(0,v), \forall v \in \mathbb{R}\}.$$

Sea $v \in \mathbb{R}$; *primero analizaremos lo siguiente:*

$$y \to_f 0, \text{ entonces } y \to 0 \text{ y } f(y) \to f(0) = -2.$$

Supongamos $0 \neq y^k \to 0$, *entonces* $f(y^k) = -e^{-(y^k)^2} \to -1 \neq -2$, *lo cual es absurdo; por lo tanto* $y^k = 0$, *asi:*

$$\langle x^*, v\rangle \leq f^{\nearrow}(0,v) = \sup_{\varepsilon>0} \lim\sup_{t\downarrow 0} \inf_{u\in B_\varepsilon(v)} \frac{-e^{-t^2u^2}+2}{t}$$
$$\langle x^*, v\rangle \leq \sup_{\varepsilon>0} \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} \inf_{u\in B_\varepsilon(v)} \frac{-e^{-(t^k)^2u^2}+2}{t^k};$$

donde $t^k \downarrow 0$ $(t^k \to 0 \text{ y } t^k \geq 0)$.
Sea $0 \in B_\varepsilon(v)$, *probaremos que:*

$$\inf_{u\in B_\varepsilon(v)}\{\frac{2-e^{-(t^k)^2u^2}}{t^k}\} = \frac{1}{t^k};$$

en efecto:

- *Primero probaremos que* $\frac{1}{t^k}$ *es una cota inferior; sea* $u \in B_\varepsilon(v)$:

$$0 \leq (t^k)^2 u^2$$

$$-1 \leq -e^{-(t^k)^2 u^2}$$

$$\frac{1}{t^k} \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2 u^2}}{t^k}$$

- *Segundo probaremos que* $\frac{1}{t^k}$ *es la mayor de las cotas inferiores:*
  Sea α *otra cota inferior, entonces* $\alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2 u^2}}{t^k}$, $\forall\ u \in B_\varepsilon(v)$, *en particular para* $0 \in B_\varepsilon(v)$, *entonces* $\alpha \leq \frac{1}{t^k}$.

Sea $0 \notin B_\varepsilon(v)$,*entonces* $|v| > \varepsilon$; *probaremos que:*

$$\text{ínf}_{u \in B_\varepsilon(v)} \{ \frac{-e^{-(t^k)^2 u^2}}{t^k} \} = \frac{-e^{-(t^k)^2 (|v|-\varepsilon)^2}}{t^k};$$

en efecto:

- *Primero probaremos que* $\frac{-e^{-(t^k)^2 (|v|-\varepsilon)^2}}{t^k}$ *es una cota inferior; sea* $u \in B_\varepsilon(v)$:

$$|v| - |u| < |u - v| < \varepsilon$$

$$|v| - \varepsilon < |u|$$

$$(t^k)^2 (|v| - \varepsilon)^2 < (t^k)^2 u^2$$

$$-e^{-(t^k)^2 (|v|-\varepsilon)^2} < -e^{-(t^k)^2 u^2}$$

$$\frac{2-e^{-(t^k)^2 (|v|-\varepsilon)^2}}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2 u^2}}{t^k}$$

- *Segundo probaremos que* $\frac{-e^{-(t^k)^2 (|v|-\varepsilon)^2}}{t^k}$ *es la mayor de las cotas inferiores:*
  Sea α *otra cota inferior, si suponemos* $\alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2 (|v|-\varepsilon)^2}}{t^k}$, *entonces no habría nada que probar; por eso supondremos que* $\frac{2-e^{-(t^k)^2 (|v|-\varepsilon)^2}}{t^k} < \alpha$, *entonces* $\alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2 u^2}}{t^k}$, $\forall\, u \in B_\varepsilon(v)$, *en particular para* $v \in B_\varepsilon(v)$:

$$\alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2 v^2}}{t^k}$$

$$\frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k |v|} \leq 1 \ldots (\star);\ \textit{está bien definida pues,}\ \frac{1}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2 (|v|-\varepsilon)^2}}{t^k} < \alpha$$

Por otro lado:

$$\frac{2-e^{-(t^k)^2(|v|-\varepsilon)^2}}{t^k} < \alpha$$
$$|v| - \varepsilon < \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k}$$
$$|v| - \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k} < \varepsilon \dots (\star\star)$$

Ahora tomando:

$$|\frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k|v|}v - v| = (1 - \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k|v|})|v|, \text{ por } \dots (\star)$$
$$= |v| - \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k} < \varepsilon, \text{ por } \dots (\star\star);$$

entonces $w = \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k|v|}v \in B_\varepsilon(v)$*:*

$$\frac{2-e^{-(t^k)^2w^2}}{t^k} = \alpha$$

Por otro lado tomaremos un punto $(1-t)((1-\frac{\varepsilon}{|v|})v) + tw$*, donde* $t \in \langle 0,1\rangle$*; además la función* $\frac{2-e^{-(t^k)^2(\cdot)^2}}{t^k}$ *es semiestricta cuasiconvexa (pues* $-e^{-(t^k)^2(\cdot)^2}$ *es semiestricta cuasiconvexa) y* $(1-t)((1-\frac{\varepsilon}{|v|})v) + tw \in B_\varepsilon(v)$*(pues* $\langle(1-\frac{\varepsilon}{|v|})v, w\rangle \subset B_\varepsilon(v)$*):*

$$\frac{2-e^{-(t^k)^2((1-t)((1-\frac{\varepsilon}{|v|})v)+tw)^2}}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2(w)^2}}{t^k}, \text{ pues } \frac{2-e^{-(t^k)^2((1-\frac{\varepsilon}{|v|})v)^2}}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2(w)^2}}{t^k} = \alpha$$
$$\frac{2-e^{-(t^k)^2((1-t)((1-\frac{\varepsilon}{|v|})v)+tw)^2}}{t^k} < \alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2((1-t)((1-\frac{\varepsilon}{|v|})v)+tw)^2}}{t^k}, \text{ pero esto es absurdo.}$$

Entonces:

$$\langle x^*, v\rangle \leq \sup_{\varepsilon>0} \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} \begin{cases} \frac{1}{t^k} & 0 \in B_\varepsilon(v) \\ \frac{-e^{-(t^k)^2(|v|-\varepsilon)^2}}{t^k} & 0 \notin B_\varepsilon(v) \end{cases}$$

En cualquiera de los 2 casos cuando $t^k \to 0$ *y* $t^k \geq 0$*, la expresión tiende a* $+\infty$*, entonces:*

$$\langle x^*, v\rangle \leq \sup_{\varepsilon>0} \inf_{n\geq 0}\{+\infty\} = +\infty, \ \forall\ v \in \mathbb{R};$$

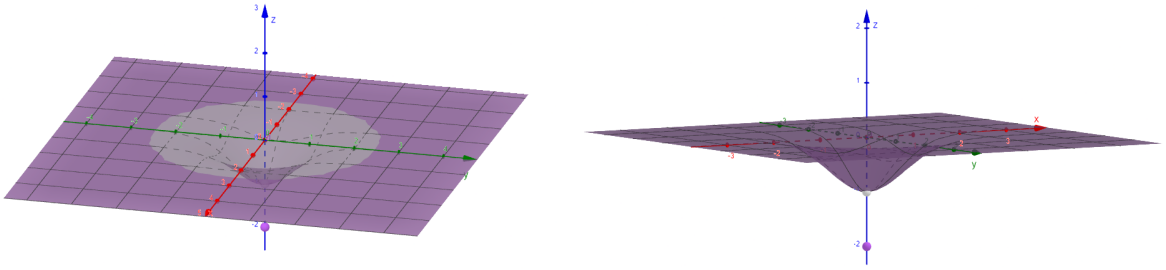
entonces x^* toma cualquier valor de $\mathbb{R}$.

Entonces:

$$\partial f(x) = \begin{cases} 2e^{-x^2}x & x \neq 0 \\ \mathbb{R} & x = 0 \end{cases}$$

Ejemplo 2.1.2 *Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} -e^{-x^2-y^2} & x \neq (0,0) \\ -2 & x = (0,0) \end{cases}$$



(a) Vista 1 (b) Vista 2

Figura 2.2: Gráfica de la función del ejemplo 2.1.2

- *f es sci en $\mathbb{R}^2$, en efecto, sea $\{x^n\}$ una sucesión talque $x^n \to y$:*

  Sea $y \neq (0,0)$, entonces $f(x^n) = -e^{-(x_1^n)^2-(x_2^n)^2} \to f(y)$, entonces f es sci en y.

  Sea $y = (0,0)$; si $x^n = (0,0)$, entonces f es sci en $(0,0)$, si $x^n \neq (0,0)$ para n suficientemente grande, entonces $f(x^n) \to -1$ y $f(0,0) = -2$, entonces $-2 = f(0,0) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x^n) = -1$, entonces f es sci.

  Entonces f es sci en $\mathbb{R}^2$ pero no es continua y por ende no es localmente lipschitz.

- *f es acotada inferiormente, en efecto:*

  Sea $(0,0) \neq x \in \mathbb{R}^2$, entonces $(x_1)^2 + (x_2)^2 < +\infty$, entonces $f(x) = -e^{-(x_1)^2-(x_2)^2} > -1$

Sea $(0,0) = x \in \mathbb{R}^2$*, entonces* $f(0,0) = -2$.

Entonces f está acotada inferiormente.

- *f es estricta cuasiconvexa, en efecto sea* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *y* $t \in \langle 0,1 \rangle$*:*

1° *Caso: Sea* $x = (0,0) \wedge y \neq (0,0) \Rightarrow f(0,0) = -2 < -e^{-(y_1)^2-(y_2)^2} = f(y_1, y_2)$

$$0 < t < 1$$

$$(1-t)^2((y_1)^2 + (y_2)^2) < ((y_1)^2 + (y_2)^2)$$

$$-e^{-(||t(0,0)+(1-t)(y_1,y_2)||^2)} < -e^{-(||(y_1,y_2)||^2)}$$

Entonces f es estricta cuasiconvexa.

2° *Caso: Sea* $x \neq (0,0) \wedge y = (0,0) \Rightarrow f(0,0) = -2 < -e^{-(x_1)^2-(x_2)^2} = f(x)$

$$0 < t < 1$$

$$(t)^2((x_1)^2 + (x_2)^2) < ((x_1)^2 + (x_2)^2)$$

$$-e^{-(||t(x_1,x_2)+(1-t)(0,0)||^2)} < -e^{-(||(x_1,x_2)||^2)}$$

Entonces f es estricta cuasiconvexa.

3° *Caso: Sea* $x \neq (0,0) \wedge y \neq (0,0)$

Sin pérdida de generalidad supondremos que $f(x) < f(y)$*:*

$$-e^{-(x_1)^2-(x_2)^2} < -e^{-(y_1)^2-(y_2)^2}$$

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 < (y_1)^2 + (y_2)^2$$

$$||(x_1,x_2)|| < ||(y_1,y_2)||$$

Por otro lado se tiene que:

$$||t(x_1,x_2) + (1-t)(y_1,y_2)|| \leq t||(x_1,x_2)|| + (1-t)||(y_1,y_2)||$$

$||t(x_1,x_2) + (1-t)(y_1,y_2)|| < ||(y_1,y_2)||$*, pues* $||(x_1,x_2)|| < ||(y_1,y_2)||$

$$||t(x_1,x_2)+(1-t)(y_1,y_2)||^2 < ||(y_1,y_2)||^2$$
$$-e^{-(||t(x_1,x_2)+(1-t)(y_1,y_2)||^2)} < -e^{-(||(y_1,y_2)||^2)}$$

Entonces f es estricta cuasiconvexa.

- *f es cuasiconvexa, en efecto por el Teorema 1.1.2.*

Ahora sea $(0,0) \neq x \in \mathbb{R}$, *entonces* $\partial f(x) = \{2e^{-x^2}x\}$, *en efecto:*

$$\partial f(x) = \{x^* \in (\mathbb{R}^2)^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\nearrow}(x,v), \forall v \in \mathbb{R}^2\}.$$

Sea $v \in \mathbb{R}^2$; *f es de clase* C^1, *entonces por el Corolario 1.6.1 f es localmente lipschitz, entonces por el Teorema 1.6.1 y Corolario 1.6.2:*

$$\partial f(x) = \partial^C f(x) = \{\bigtriangledown f(x)\}$$

entonces $\bigtriangledown f(x) = 2e^{-(x_1)^2-(x_2)^2}x$, *de lo cual se tiene lo que se quería probar*
Ahora sea $(0,0) = x \in \mathbb{R}^2$, *entonces* $\partial f(x) = \mathbb{R}^2$, *en efecto:*

$$\partial f(0,0) = \{x^* \in (\mathbb{R}^2)^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\nearrow}((0,0),v), \forall v \in \mathbb{R}^2\}.$$

Sea $v \in \mathbb{R}^2$; *primero analizaremos lo siguiente:*

$$y \to_f (0,0), \textit{ entonces } y \to (0,0) \textit{ y } f(y) \to f(0,0) = -2.$$

Supongamos $(0,0) \neq y^k \to 0$, *entonces* $f(y^k) = -e^{-(y_1^k)^2-(y_2^k)^2} \to -1 \neq -2$, *lo cual es absurdo; por lo tanto* $y^k = (0,0)$, *así:*

$$\langle x^*, v\rangle \leq f^{\nearrow}((0,0),v) = \sup_{\varepsilon>0} \lim\sup_{t\downarrow 0} \inf_{u\in B_\varepsilon(v)} \frac{-e^{-t^2((u_1)^2+(u_2)^2)}+2}{t}$$
$$\langle x^*, v\rangle \leq \sup_{\varepsilon>0} \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} \inf_{u\in B_\varepsilon(v)} \frac{-e^{-(t^k)^2((u_1)^2+(u_2)^2)}+2}{t^k};$$

donde $t^k \downarrow 0$ $(t^k \to 0 \textit{ y } t^k \geq 0)$.
Sea $(0,0) \in B_\varepsilon(v)$, *probaremos que:*

$$\text{ínf}_{u\in B_\varepsilon(v)}\{\frac{-e^{-(t^k)^2((u_1)^2+(u_2)^2)}}{t^k}\}=\frac{1}{t^k};$$

en efecto:

- *Primero probaremos que* $\frac{1}{t^k}$ *es una cota inferior; sea* $u\in B_\varepsilon(v)$*:*

$$0\leq(t^k)^2((u_1)^2+(u_2)^2)$$
$$-1\leq -e^{-(t^k)^2((u_1)^2+(u_2)^2)}$$
$$\frac{1}{t^k}\leq\frac{2-e^{-(t^k)^2((u_1)^2+(u_2)^2)}}{t^k}$$

- *Segundo probaremos que* $\frac{1}{t^k}$ *es la mayor de las cotas inferiores:*
  Sea α *otra cota inferior, entonces* $\alpha\leq\frac{2-e^{-(t^k)^2((u_1)^2+(u_2)^2)}}{t^k}$, $\forall\ u\in B_\varepsilon(v)$*, en particular para* $(0,0)\in B_\varepsilon(v)$*, entonces* $\alpha\leq\frac{1}{t^k}$.

Sea $0\notin B_\varepsilon(v)$*,entonces* $((v_1)^2+(v_2)^2)>\varepsilon$*; probaremos que:*

$$\text{ínf}_{u\in B_\varepsilon(v)}\{\frac{-e^{-(t^k)^2((u_1)^2+(u_2)^2)}}{t^k}\}=\frac{-e^{-(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2}}{t^k};$$

en efecto:

- *Primero probaremos que* $\frac{-e^{-(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2}}{t^k}$ *es una cota inferior; sea* $u\in B_\varepsilon(v)$*:*

$$\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\sqrt{(u_1)^2+(u_2)^2}<||(u_1,u_2)-(v_1,v_2)||<\varepsilon$$
$$|\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}|-\varepsilon<\sqrt{(u_1)^2+(u_2)^2}$$
$$(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2<(t^k)^2((u_1)^2+(u_2)^2)$$
$$-e^{-(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2}<-e^{-(t^k)^2(((u_1)^2+(u_2)^2))}$$
$$\frac{2-e^{-(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2}}{t^k}<\frac{2-e^{-(t^k)^2((u_1)^2+(u_2)^2)}}{t^k}$$

$*$ *Segundo probaremos que* $\frac{-e^{-(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2}}{t^k}$ *es la mayor de las cotas inferiores:*

Sea α *otra cota inferior, si suponemos* $\alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2}}{t^k}$*, entonces no habría nada que probar; por eso supondremos que* $\frac{2-e^{-(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2}}{t^k} < \alpha$*, entonces* $\alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2((u_1)^2+(u_2)^2)}}{t^k}$*,* $\forall\, u \in B_\varepsilon(v)$*, en particular para* $v \in B_\varepsilon(v)$*:*

$$\alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2((v_1)^2+(v_2)^2)}}{t^k}$$

$\frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}} \leq 1$ *...* $(\star)$*; está bien definida pues,* $\frac{1}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2}}{t^k} < \alpha$

Por otro lado:

$$\frac{2-e^{-(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2}}{t^k} < \alpha$$

$$\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2} - \varepsilon < \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k}$$

$$\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2} - \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k} < \varepsilon \text{ ... } (\star\star)$$

Ahora tomando:

$$\left|\frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}}(v_1,v_2) - (v_1,v_2)\right| = \left(1 - \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}}\right)\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}\text{, por ... } (\star)$$

$$= \sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2} - \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k} < \varepsilon\text{, por ... } (\star\star);$$

entonces $(w_1,w_2) = \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}}(v_1,v_2) \in B_\varepsilon(v)$*:*

$$\frac{2-e^{-(t^k)^2((w_1)^2+(w_2)^2)}}{t^k} = \alpha$$

Por otro lado tomaremos un punto $x = (1-t)\left(\left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}}\right)(v_1,v_2)\right) + t(w_1,w_2)$*, donde* $t \in \langle 0,1\rangle$*; además la función* $\frac{2-e^{-(t^k)^2((\cdot)^2+(\cdot)^2)}}{t^k}$ *semiestricta cuasiconvexa (pues* $-e^{-(t^k)^2((\cdot)^2+(\cdot)^2)}$ *es semiestricta cuasiconvexa) y* $(1-t)\left(\left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}}\right)(v_1,v_2)\right) + t(w_1,w_2) \in B_\varepsilon(v)$*(pues* $\left\langle\left(1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}}\right)(v_1,v_2),(w_1,w_2)\right\rangle \subset B_\varepsilon(v)$*):*

$\frac{2-e^{-(t^k)^2(||x||)^2}}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2((w_1)^2+(w_2)^2)}}{t^k}$, *pues* $\frac{2-e^{-(t^k)^2(\sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2}-\varepsilon)^2}}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2((w_1)^2+(w_2)^2)}}{t^k}$

$\frac{2-e^{-(t^k)^2(||x||)^2}}{t^k} < \alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2(||x||)^2}}{t^k}$, *pero esto es absurdo.*

Entonces:

$$\langle x^*, v\rangle \leq \sup_{\varepsilon>0} \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} \begin{cases} \frac{1}{t^k} & (0,0) \in B_\varepsilon(v) \\ \frac{-e^{-(t^k)^2((v_1)^2+(v_2)^2-\varepsilon)^2}}{t^k} & (0,0) \notin B_\varepsilon(v) \end{cases}$$

En cualquiera de los 2 casos cuando $t^k \to 0$ *y* $t^k \geq 0$*, la expresión tiende a* $+\infty$*, entonces:*

$$\langle x^*, v\rangle \leq \sup_{\varepsilon>0} \inf_{n\geq 0}\{+\infty\} = +\infty,\ \forall\ v \in \mathbb{R}^2;$$

entonces x^* *toma cualquier valor de* $\mathbb{R}^2$.

Entonces:

$$\partial f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x^2-y^2}(x,y) & x \neq (0,0) \\ \mathbb{R}^2 & x = (0,0) \end{cases}$$

Ejemplo 2.1.3 *Sea la función* $f : l_2 \to \mathbb{R}$, $\theta = (0,0,...,0,...) \in l_2$*:*

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-||x||^2} & x \neq \theta \\ -2 & x = \theta \end{cases}$$

- *f es sci en* l_2*, en efecto, sea* $\{x^n\}$ *una sucesión talque* $x^n \to y$*:*

  Sea $y \neq \theta$*, entonces* $f(x^n) = -e^{-||x^n||^2} \to f(y)$*, entonces f es sci en y.*

  Sea $y = \theta$*; si* $x^n = \theta$*, entonces f es sci en* θ*, si* $x^n \neq \theta$ *para n suficientemente grande, entonces* $f(x^n) \to -1$ *y* $f(\theta) = -2$*, entonces* $-2 = f(\theta) \leq \liminf_{n\to+\infty} f(x^n) = -1$*, entonces f es sci.*

  Entonces f es sci en l_2 *pero no es continua y por ende no es localmente lipschitz.*

- *f es acotada inferiormente, en efecto:*

  Sea $\theta \neq x \in l_2$*, entonces* $||x||^2 < +\infty$*, entonces* $f(x) = -e^{-||x||^2} > -1$

Sea $\theta = x \in l_2$, *entonces* $f(\theta) = -2$.

Entonces f está acotada inferiormente.

- *f es estricta cuasiconvexa, en efecto sea* $x, y \in l_2$ *y* $t \in \langle 0,1 \rangle$*:*

1° *Caso: Sea* $x = \theta \wedge y \neq \theta \Rightarrow f(\theta) = -2 < -e^{-||y||^2} = f(y)$

$$0 < t < 1$$

$$(1-t)^2||y||^2 < ||y||^2$$

$$-e^{-(||t\theta+(1-t)y||^2)} < -e^{-||y||^2}$$

Entonces f es estricta cuasiconvexa.

2° *Caso: Sea* $x \neq \theta \wedge y = \theta \Rightarrow f(0) = -2 < -e^{-||x||^2} = f(x)$

$$0 < t < 1$$

$$(t)^2||x||^2 < ||x||^2$$

$$-e^{-(||tx+(1-t)\theta||^2)} < -e^{-||x||^2}$$

Entonces f es estricta cuasiconvexa.

3° *Caso: Sea* $x \neq \theta \wedge y \neq \theta$

Sin pérdida de generalidad supondremos que $f(x) < f(y)$*:*

$$-e^{-||x||^2} < -e^{-||y||^2}$$

$$||x||^2 < ||y||^2$$

$$||x|| < ||y||$$

Por otro lado se tiene que:

$$||tx+(1-t)y|| \leq t||x|| + (1-t)||y||$$

$||tx+(1-t)y|| < ||y||$, *pues* $||x|| < ||y||$

$$||tx+(1-t)y||^2 < ||y||^2$$
$$-e^{-(||tx+(1-t)y||^2)} < -e^{-||y||^2}$$

Entonces f es estricta cuasiconvexa.

- *f es cuasiconvexa, en efecto por el Teorema 1.1.2.*

Ahora sea $\theta \neq x \in l_2$*, entonces* $\partial f(x) = \{2e^{-||x||^2}x\}$*, en efecto:*

$$\partial f(x) = \{x^* \in (l_2)^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\nearrow}(x,v), \forall v \in l_2\}.$$

Sea $v \in l_2$*; f es de clase* C^1*, entonces por el Corolario 1.6.1 f es localmente lipschitz y estrictamente diferenciable, entonces por el Corolario 1.6.2 y la Proposición 1.6.1:*

$$\partial f(x) = \partial^C f(x) = \{D_s f(x)\}$$

Por otro lado como f es estrictamente diferenciable:

$$\langle D_s f(x), v\rangle = \lim_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{-e^{-||y+tv||^2}+e^{-||y||^2}}{t}, \ \forall\, v \in l_2;$$
$$\langle D_s f(x), v\rangle = \lim_{y\to x, t\downarrow 0} (e^{-||y||^2})(\frac{-e^{-t^2||v||^2-2t\langle y,v\rangle}+1}{t}), \ \forall\, v \in l_2;$$
$$\langle D_s f(x), v\rangle = \lim_{y\to x, t\downarrow 0} (e^{-||y||^2})(-e^{-t^2||v||^2-2t\langle y,v\rangle})(-2t||v||^2-2\langle y,v\rangle), \ \forall\, v \in l_2;$$
$$\langle D_s f(x), v\rangle = (2e^{-||x||^2})\langle x,v\rangle = \langle 2e^{-||x||^2}x, v\rangle, \ \forall\, v \in l_2;$$

entonces $D_s f(x) \cong 2e^{-||x||^2}x$*, de lo cual se tiene lo que se quería probar*
Ahora sea $\theta = x \in l_2$*, entonces* $\partial f(x) = l_2$*, en efecto:*

$$\partial f(\theta) = \{x^* \in (l_2)^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\nearrow}(\theta,v), \forall v \in l_2\}.$$

Sea $v \in l_2$*; primero analizaremos lo siguiente:*

$$y \to_f \theta, \text{ entonces } y \to \theta \text{ y } f(y) \to f(\theta) = -2.$$

Supongamos $\theta \neq y^k \to \theta$ *, entonces* $f(y^k) = -e^{-||y^k||^2} \to -1 \neq -2$*, lo cual es absurdo; por lo tanto* $y^k = \theta$*, asi:*

$$\langle x^*, v\rangle \leq f^{\nearrow}(0,v) = \sup_{\varepsilon>0} \lim\sup_{t\downarrow 0} \inf_{u\in B_\varepsilon(v)} \frac{-e^{-t^2||u||^2}+2}{t}$$
$$\langle x^*, v\rangle \leq \sup_{\varepsilon>0} \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} \inf_{u\in B_\varepsilon(v)} \frac{-e^{-(t^k)^2||u||^2}+2}{t^k};$$

donde $t^k \downarrow 0$ $(t^k \to 0$ *y* $t^k \geq 0)$.

Sea $\theta \in B_\varepsilon(v)$, *probaremos que:*

$$\inf_{u\in B_\varepsilon(v)}\{\frac{-e^{-(t^k)^2||u||^2}}{t^k}\} = \frac{1}{t^k};$$

en efecto:

- *Primero probaremos que* $\frac{1}{t^k}$ *es una cota inferior; sea* $u \in B_\varepsilon(v)$*:*

$$0 \leq (t^k)^2||u||^2$$
$$-1 \leq -e^{-(t^k)^2||u||^2}$$
$$\frac{1}{t^k} \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2||u||^2}}{t^k}$$

- *Segundo probaremos que* $\frac{1}{t^k}$ *es la mayor de las cotas inferiores:*
  Sea α *otra cota inferior, entonces* $\alpha < \frac{2-e^{-(t^k)^2||u||^2}}{t^k}$, $\forall\ u \in B_\varepsilon(v)$, *en particular para* $\theta \in B_\varepsilon(v)$, *entonces* $\alpha < \frac{1}{t^k}$.

Sea $\theta \notin B_\varepsilon(v)$,*entonces* $||v|| > \varepsilon$*; probaremos que:*

$$\inf_{u\in B_\varepsilon(v)}\{\frac{-e^{-(t^k)^2||u||^2}}{t^k}\} = \frac{-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2}}{t^k};$$

en efecto:

- *Primero probaremos que* $\frac{-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2}}{t^k}$ *es una cota inferior; sea* $u \in B_\varepsilon(v)$*:*

$$||v|| - ||u|| < ||u-v|| < \varepsilon$$
$$||v|| - \varepsilon < ||u||$$
$$(t^k)^2(||v|| - \varepsilon)^2 < (t^k)^2||u||^2$$

$$-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2} < -e^{-(t^k)^2||u||^2}$$

$$\frac{2-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2}}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2||u||^2}}{t^k}$$

$*$ *Segundo probaremos que* $\frac{-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2}}{t^k}$ *es la mayor de las cotas inferiores:*

Sea α *otra cota inferior, si suponemos* $\alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2}}{t^k}$*, entonces no habría nada que probar; por eso supondremos que* $\frac{2-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2}}{t^k} < \alpha$*, entonces* $\alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2||u||^2}}{t^k}$*,* $\forall\ u \in B_\varepsilon(v)$*, en particular para* $v \in B_\varepsilon(v)$*:*

$$\alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2||v||^2}}{t^k}$$

$$\frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k||v||} \leq 1 \ldots (\star)\text{; está bien definida pues, } \frac{1}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2}}{t^k} < \alpha$$

Por otro lado:

$$\frac{2-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2}}{t^k} < \alpha$$

$$||v|| - \varepsilon < \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k}$$

$$||v|| - \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k} < \varepsilon \ldots (\star\star)$$

Ahora tomando:

$$||\frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k||v||}v - v|| = (1 - \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k||v||})||v||\text{, por} \ldots (\star)$$

$$= ||v|| - \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k} < \varepsilon\text{, por} \ldots (\star\star);$$

entonces $w = \frac{\sqrt{-ln(2-\alpha t^k)}}{t^k||v||}v \in B_\varepsilon v$*:*

$$\frac{2-e^{-(t^k)^2||w||^2}}{t^k} = \alpha$$

Por otro lado tomaremos un punto $(1-t)((1-\frac{\varepsilon}{||v||})v) + tw$*, donde* $t \in \langle 0,1\rangle$*; además la función* $\frac{2-e^{-(t^k)^2||\cdot||^2}}{t^k}$ *es semiestricta cuasiconvexa (pues* $-e^{-(t^k)^2||\cdot||^2}$ *es semiestricta cuasiconvexa) y* $(1-t)((1-\frac{\varepsilon}{||v||})v) + tw \in B_\varepsilon(v)$*(pues* $\langle(1-\frac{\varepsilon}{||v||})v, w\rangle \subset B_\varepsilon(v)$*):*

$\frac{2-e^{-(t^k)^2||(1-t)((1-\frac{\varepsilon}{||v||})v)+tw||^2}}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2||w||^2}}{t^k}$, *pues* $\frac{2-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2}}{t^k} < \frac{2-e^{-(t^k)^2||w||^2}}{t^k} = \alpha$

$\frac{2-e^{-(t^k)^2||(1-t)((1-\frac{\varepsilon}{||v||})v)+tw||^2}}{t^k} < \alpha \leq \frac{2-e^{-(t^k)^2||(1-t)((1-\frac{\varepsilon}{||v||})v)+tw||^2}}{t^k}$, *pero esto es absurdo.*

Entonces:

$$\langle x^*, v\rangle \leq \sup_{\varepsilon>0} \inf^{n\geq 0} \sup_{k\geq n} \begin{cases} \frac{1}{t^k} & \theta \in B_\varepsilon(v) \\ \frac{-e^{-(t^k)^2(||v||-\varepsilon)^2}}{t^k} & \theta \notin B_\varepsilon(v) \end{cases}$$

En cualquiera de los 2 casos cuando $t^k \to 0$ *y* $t^k \geq 0$*, la expresión tiende a* $+\infty$*, entonces:*

$$\langle x^*, v\rangle \leq \sup_{\varepsilon>0} \inf_{n\geq 0}\{+\infty\} = +\infty,\ \forall\ v \in l_2;$$

entonces x^* *toma cualquier valor de* l_2*.*

Entonces:

$$\partial f(x) = \begin{cases} 2e^{-||x||^2}x & x \neq \theta \\ \text{ł}_2 & x = \theta \end{cases}$$

Capítulo III

El Algoritmo

3.1. Algoritmo

Inicialización: Elija una sucesión real positiva $\{\lambda^k\}$ tal que $0 < \lambda^k < \overline{\lambda} < +\infty$ para algún $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ y un punto inicial:

$$x^0 \in X \tag{3.1}$$

Paso Principal: Para valores $k = 1, 2, 3, ...$, dado $x^{k-1} \in X$, encontrar $x^k \in X$ tal que:

$$0 \in \partial \left(f(\cdot) + \frac{\lambda^k}{2} || \cdot - x^{k-1} ||^2 \right) (x^k) \tag{3.2}$$

donde $\partial(f(\cdot) + \frac{\lambda^k}{2} || \cdot - x^{k-1} ||^2)(x^k)$ es el subdiferencial de Clarke-Rockafellar de $f(\cdot) + \frac{\lambda^k}{2} || \cdot - x^{k-1} ||^2$ en x^k

Criterio de parada: Si para $k = 1, 2, 3, ...$, $0 \in \partial f(x^{k-1})$, entonces el método se detiene. De lo contrario, haga $k \to k+1$ y regrese al paso principal.

Entonces notemos que para que la convergencia asintótica se tiene que $0 \notin \partial f(x^k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ y esto implica que $x^k \neq x^{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

3.2. Ejemplos

Ejemplo 3.2.1 *Sea la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} -e^{-x^2-y^2} & x \neq (0,0) \\ -2 & x = (0,0) \end{cases}$$

Sea $\lambda^k = 1$ *y* $x^0 = (2,0)$*, la sucesión está acotada por* $\overline{\lambda} = 2 < +\infty$ *y* $x^0 \in \mathbb{R}^2$*.*

- *Con* $x^0 = (2,0)$*, entonces* $(0,0) \notin \partial f(2,0) = \{2e^{-(2)^2}(2,0)\}$.

  Ahora encontrar x^1*, entonces:*

$$(0,0) \in \partial(f(\cdot) + \tfrac{||\cdot-(2,0)||^2}{2})(x^1 = (a_1,b_1))$$

$$(0,0) \in \{2e^{-{a_1}^2-{b_1}^2}(a_1,b_1) + (a_1,b_1) - (2,0)\}$$

$$\begin{cases} 2e^{-{a_1}^2-{b_1}^2}a_1 + a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = -1.895 \\ 2e^{-{a_1}^2-{b_1}^2}b_1 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 0 \end{cases}$$

- *Con* $x^1 = (-1.895,0)$*, entonces* $(0,0) \notin \partial f(-1.895,0) = \{2e^{(-1.895)^2}(-1.895,0)\}$.

  Ahora encontrar x^2*, entonces:*

$$(0,0) \in \partial(f(\cdot) + \tfrac{||\cdot-(-1.895,0)||^2}{2})(x^2 = (a_2,b_2)) =$$
$$\{2e^{-{a_2}^2-{b_2}^2}(a_2,b_2) + (a_2,b_2) - (-1.895,0)\}$$

$$(0,0) \in \{2e^{-{a_2}^2-{b_2}^2}(a_2,b_2) + (a_2,b_2) - (-1.895,0)\}$$

$$\begin{cases} 2e^{-{a_2}^2-{b_2}^2}a_2 + a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = -1.712 \\ 2e^{-{a_2}^2-{b_2}^2}b_2 + b_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 0 \end{cases}$$

- *Con* $x^2 = (-1.712, 0)$*, entonces* $(0,0) \notin \partial f(-1.712,0) = \{2e^{(-1.712)^2}(-1.712,0)\}$.

  Ahora encontrar x^3*, entonces:*

$$(0,0) \in \partial(f(\cdot) + \tfrac{||\cdot-(-1.712,0)||^2}{2})(x^3 = (a_3, b_3))$$

$$(0,0) \in \{2e^{-{a_3}^2-{b_3}^2}(a_3,b_3) + (a_3,b_3) - (-1.712,0)\}$$

$$\begin{cases} 2e^{-{a_3}^2-{b_3}^2}a_3 + a_3 = -1.712 \Rightarrow a_2 = -0.9268 \\ 2e^{-{a_3}^2-{b_3}^2}b_3 + b_3 = 0 \Rightarrow b_3 = 0 \end{cases}$$

  Siguiendo así sucesivamente, se tiene que:

- $x^4 = (-0.332, 0)$
- $x^5 = (-0.1115, 0)$
- $x^6 = (-0.0372, 0)$
- $x^7 = (-0.0124, 0)$

Finalmente se puede observar que la sucesión provista por el algoritmo con punto inicial $x^0 = (2,0)$ *y* $\lambda^k = 1$ *tiene una tendencia a* $(0,0)$.

Ejemplo 3.2.2 *Sea la función* $f : l_2 \to \mathbb{R}$, $\theta = (0,0,...,0,...)$*:*

$$f(x) = \begin{cases} -e^{-||x||^2} & x \neq \theta \\ -2 & x = \theta \end{cases}$$

Sea $\lambda^k = 1$ *y* $x^0 = (2,0,...,0,...)$*, la sucesión está acotada por* $\overline{\lambda} = 2 < +\infty$ *y* $x^0 \in l_2$*, pues* $\sum_{+\infty}^{0} |x_k^0|^2 = 4 < +\infty$.

- *Con* $x^0 = (2,0,...,0,...)$*, entonces* $\theta \notin \partial f(2,0,...,0,...) = \{2e^{-(2)^2}(2,0,...,0,...)\}$.

  Ahora encontrar x^1*, entonces:*

$$\theta \in \partial(f(\cdot) + \frac{||\cdot-(2,0,...,0,...)||^2}{2})(x^1 = (a_1^1, a_2^1, ..., a_k^1, ...)) =$$

$$\{2e^{(-a_1^{1^2}-a_2^{1^2}-...-a_k^{1^2}-...)}(a_1^1, a_2^1, ..., a_k^1, ...) + (a_1^1, a_2^1, ..., a_k^1, ...) - (2,0,...,0,...)\}$$

$$\begin{cases} 2e^{(-a_1^{1^2}-a_2^{1^2}-...-a_k^{1^2}-...)}a_1^1 + a_1^1 = 2 \Rightarrow a_1^1 = -1.895 \\ 2e^{(-a_1^{1^2}-a_2^{1^2}-...-a_k^{1^2}-...)}a_2^1 + a_2^1 = 0 \Rightarrow a_2^1 = 0 \\ ... \\ 2e^{(-a_1^{1^2}-a_2^{1^2}-...-a_k^{1^2}-...)}a_k^1 + a_k^1 = 0 \Rightarrow a_k^1 = 0 \\ ... \end{cases}$$

- *Con* $x^1 = (-1.895, 0, ..., 0, ...)$*, entonces* $\theta \notin \partial f(-1.895, 0, ..., 0, ...)$

  $= \{2e^{-(-1.895)^2}(-1.895, 0, ..., 0, ...)\}$.

  Ahora encontrar x^2*, entonces:*

$$\theta \in \partial(f(\cdot) + \frac{||\cdot-(-1.895,0,...,0,...)||^2}{2})(x^1 = (a_1^2, a_2^2, ..., a_k^2, ...)) =$$

$$\{2e^{(-a_1^{2^2}-a_2^{2^2}-...-a_k^{2^2}-...)}(a_1^2, a_2^2, ..., a_k^2, ...) + (a_1^2, a_2^2, ..., a_k^2, ...) - (-1.895, 0, ..., 0, ...)\}$$

$$\begin{cases} 2e^{(-a_1^{2^2}-a_2^{2^2}-...-a_k^{2^2}-...)}a_1^2 + a_1^2 = 2 \Rightarrow a_1^2 = -1.712 \\ 2e^{(-a_1^{2^2}-a_2^{2^2}-...-a_k^{2^2}-...)}a_2^2 + a_2^2 = 0 \Rightarrow a_2^2 = 0 \\ ... \\ 2e^{(-a_1^{2^2}-a_2^{2^2}-...-a_k^{2^2}-...)}a_k^2 + a_k^2 = 0 \Rightarrow a_k^2 = 0 \\ ... \end{cases}$$

  Siguiendo así sucesivamente, se tiene que:

- $x^3 = (-0.9268, 0, ..., 0, ...)$
- $x^4 = (-0.332, 0, ..., 0, ...)$
- $x^5 = (-0.1115, 0, ..., 0, ...)$
- $x^6 = (-0.0372, 0, ..., 0, ...)$

- $x^7 = (-0.0124, 0, ..., 0, ...)$

Finalmente se puede observar que la sucesión provista por el algoritmo con punto inicial $x^0 = (2, 0, ..., 0, ...)$ *y* $\lambda^k = 1$ *tiene una tendencia a* θ. *Además hay que tener en cuenta que al desarrollar este último ejemplo de manera manual se debe de entender que al quedarnos un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas soluciones; estos pasos se realizaron de manera un poco intuitiva; sin embargo la elección del punto inicial nos garantiza que el sistema se vuelve más fácil de intuir y no caer en un error. Cabe mencionar que el hecho de encontrar un sistema de infinitas ecuaciones con infinitas soluciones no hay un teoría concisa como para reducirlo de mejor manera.*

Capítulo IV

Análisis de Convergencia

4.1. Primeros Resultados

Este primer resultado es un aporte adicional propio que damos en el artículo, que nos ayudará para resultados posteriores.

Proposición 4.1.1 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia, sci y semiestricta cuasiconvexa, y sea $a, b \in X$. Si $f(a) < f(b)$, entonces:*

$$\langle y^*, b-a \rangle \geq 0, \forall y^* \in \partial f(b).$$

Proof. Como f es sci, entonces por el Lema 1.2.1 se tiene que:

$$\{\exists \{c^n\} \subset X \colon c^n \to c^0 \in [a,b[\} \wedge \{\exists \{c^{n*}\} \subset X^*; c^{n*} \in \partial f(c^n)\}:$$
$$\langle c^{n*}, c-c^n \rangle > 0, \forall\, c = (1-t)a + tb,\, t \geq 1,\, \forall n \in \mathbb{N};$$

entonces tomando $t = 1$: $c = b$, de aquí se tiene que:

$$\{\exists \{c^n\} \subset X : c^n \to c^0 \in [a,b[\} \wedge \{\exists \{c^{n*}\} \subset X^*; c^{n*} \in \partial f(c^n)\} : \langle c^{n*}, b-c^n \rangle > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Por otro lado como f es semiestricta cuasiconvexa y sci, y usando el Teorema 1.1.2, entonces f es cuasiconvexo; y usando el Teorema 1.3.1, entonces ∂f es cuasimonótono; de aquí como ∂f es cuasimonótono y en particular para b, $c^n \in X$, se tiene la siguiente implicación:

$$\text{Si } \exists\, x^* \in \partial f(c^n) : \langle x^*, b - c^n \rangle > 0 \Rightarrow \forall\, y^* \in \partial f(b) : \langle y^*, b - c^n \rangle \geq 0$$

Pero por (4.1), entonces $\forall\, y^* \in \partial f(b)$: $\langle y^*, b - c^n \rangle \geq 0$, entonces ahora haciendo $n \to +\infty$:

$$\langle y^*, b - c^0 \rangle \geq 0; \forall\, y^* \in \partial f(b);$$

pero como $c^o \in [a, b[$, entonces $\langle y^*, b - a \rangle \geq 0; \forall\, y^* \in \partial f(b)$.
Lo cual concluye con la demostración. ∎

4.2. Existencia

Teorema 4.2.1 *(Existencia) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ función propia que satisface $(\mathbf{H_1})$, entonces la secuencia $\{x^k\}$ definida en (3.1) y (3.2) existe.*

Proof. Haremos la demostración por inducción, sea $k = 0$, luego $x^0 \in X$. Supongamos que es cierto para $k-1$: x^{k-1} *exists*. Ahora bien, dado que f es sci y está acotado por debajo, y dado que $\frac{\lambda_k}{2}||\cdot - x^{k-1}||^2$ es coercitivo entonces $f(\cdot) + \frac{\lambda_k}{2}||\cdot - x^{k-1}||^2$ es SCI y coercitivo, entonces hay x mínimo global de $f(\cdot) + \frac{\lambda_k}{2}||\cdot - x^{k-1}||^2$ en X, haciendo $x = x^k \Rightarrow 0 \in \partial(f(\cdot) + \frac{\lambda_k}{2}||\cdot - x^{k-1}||^2)(x^k)$.
lo cual concluye la demostración. ∎

Observación 4.2.1 *De (3.2), del Teorema 1.2.3 y del Teorema 1.2.4 se tiene que:*

$$0 \in \partial f(x^k) + \tfrac{\lambda_k}{2}\partial(||\cdot - x^{k-1}||^2)(x^k);$$

entonces $\exists\, y^{k*} \in \partial(||\cdot - x^{k-1}||^2)(x^k)$ tal que $-\frac{\lambda_k}{2} y^{k*} \in \partial f(x^k)$

4.3. Convergencia

Teorema 4.3.1 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y satisface $(\mathbf{H_1})$ y $(\mathbf{H_2})$, entonces $\{f(x^k)\}$ es no creciente y convergente.*

Demostración. Vamos a suponer lo contrario, es decir, $\exists\ m \in \mathbb{N}$: $f(x^{m-1}) < f(x^m)$, entonces por el Proposición 4.1.1: $\langle y^*, x^{m-1} - x^m \rangle \leq 0$, $\forall\ y^* \in \partial f(x^m)$, entonces por el Observación 4.2.1 se tiene que:

$$\langle y^{m*}, x^m - x^{m-1} \rangle \leq 0 \tag{4.2}$$

Por otro lado tenemos por la Observación 4.2.1, el Teorema 1.2.5 y en particular para $v = x^{m-1} - x^m$ se tiene que:

$$\langle y^{k*}, x^{m-1} - x^m \rangle \leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{||x^m + t(x^{m-1} - x^m) - x^{m-1}||^2 - ||x^m - x^{m-1}||^2}{t} = \lim_{t \downarrow 0} (t-2)||x^m - x^{m-1}||^2$$

$$\langle y^{m*}, x^{m-1} - x^m \rangle \leq -2||x^m - x^{m-1}||^2. \tag{4.3}$$

De igual manera si $v = x^m - x^{m-1}$ se tiene que:

$$\langle y^{m*}, x^m - x^{m-1} \rangle \leq 2||x^m - x^{m-1}||^2. \tag{4.4}$$

Por lo tanto de (4.3) y (4.4) se tiene que:

$$\langle y^{m*}, x^m - x^{m-1} \rangle = 2||x^m - x^{m-1}||^2. \tag{4.5}$$

Entonces de (4.2) y (4.5) se tiene que: $||x^m - x^{m-1}||^2 \leq 0 \Rightarrow x^m = x^{m-1}$, pero esto es absurdo, entonces la sucesión $\{f(x^k)\}$ es no creciente y además está acotada inferiormente por $(\mathbf{H_1})$, entonces la sucesión $\{f(x^k)\}$ converge.

Lo cual concluye con la demostración ∎

Observación 4.3.1 *Ahora propondremos el siguiente supuesto:*

$(\mathbf{H_3})$ *f semiestricto cuasiconvexa*

Observación 4.3.2 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y satisface $(\mathbf{H_1})$ y $(\mathbf{H_3})$ y ahora definiremos el siguiente conjunto:*

$$U_k = \{x \in domf : f(x) < f(x^k)\}.$$

Tengamos en cuenta que este conjunto depende del punto inicial x^0 y de la secuencia $\{\lambda^k\}$ y además notemos que:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{U_k} = \{x \in domf : f(x) \leq \text{ínf}_k f(x^k)\}.$$

En efecto:

- *Sea $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{U_k}$:*

$$x \in \overline{U_k}, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\exists \{x_n\} \subset U_k : [x^n \to x], \forall k \in \mathbb{N}$$

Ahora como f es sci:

$$f(x) \leq \text{lím inf}_{n \to +\infty} f(x^n) \leq \text{ínf}_k f(x^k)$$

$$x \in \{x \in domf : f(x) \leq \text{ínf}_k f(x^k)\}$$

- *Sea $x \in \{x \in domf : f(x) \leq \text{ínf}_k f(x^k)\} \wedge x \notin \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{U_k}$:*

$$f(x) \leq \text{ínf}_k f(x^k) \wedge [\exists k^0 \in \mathbb{N} : x \notin \overline{U_{k^0}}]$$

$$f(x) \leq \text{ínf}_k f(x^k) \wedge [\exists k^0 \in \mathbb{N} : x \in \overline{U_{k^0}}^C \subset int(U_{k^0}{}^C)]$$

$$f(x) \leq \text{ínf}_k f(x^k) \wedge [\exists k^0 \in \mathbb{N} : [\exists r^0 > 0 : B(x, r^0) \subset \{x \in dom(f) : f(x^{k^0}) \leq f(x)\}]]$$

$$f(x) \leq \text{ínf}_k f(x^k) \wedge [f(x^{k^0}) \leq f(y), \forall y \in B(x, r^0)]$$

$$f(x^{k^0}) = \text{ínf}_k f(x^k) = f(x) \leq f(y), \forall y \in B(x, r^0)$$

Po otro lado como el algoritmo no finaliza, entonces x^{k^0} no es punto crítico y utilizando la contrarrecíproca del Teorema 1.2.2; se tiene que:

$$\exists z \in X : f(z) < f(x^{k^0}) = f(x)$$

como f es cuasiconvexo estricto: $f(x+\frac{1}{n}(z-x)) < f(x), \frac{1}{n} \in \langle 0,1\rangle$

Luego haciendo n suficientemente grande; $x+\frac{1}{n}(z-x) \in B(x,r^0)$ *y como* $f(x) \leq f(y), \forall y \in B(x,r^0)$*:*

$$f(x+\tfrac{1}{n}(z-x)) < f(x) \leq f(x+\tfrac{1}{n}(z-x)),\ \textit{lo cual es absurdo.}$$

A partir de ahora en adelante denotaremos lo siguiente:

$$\overline{U} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \overline{U_k}$$

Observación 4.3.3 *Supongamos que el espacio de Banach tiene la norma, relacionado con un producto interno de la siguiente manera; sea a, b, c* $\in X$*, entonces:*

$$||a+b-c||^2 - ||a-c||^2 = ||b||^2 + \langle a-c, b\rangle + \langle b, a-c\rangle.$$

Teorema 4.3.2 *Sea* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *una función propia y que satisface* $(\mathbf{H_1})$ *y* $(\mathbf{H_3})$*, entonces la sucesión* $\{x^k\}$ *definida en (3.1) y (3.2) es Fejér convergente en* $\overline{U}$

Demostración. Primero probaremos $||x-x^k|| \leq ||x-x^{k-1}||$ cuando $x \in U_k$, en efecto, sea $x \in U_k$, entonces $f(x) < f(x^k)$ y por la Proposición 5.1, entonces $\langle y^*, x^k - x\rangle \geq 0$, $\forall\, y^* \in \partial f(x^k)$. Ahora por la Observación 4.2.1 se tiene que $\exists\ y^{k^*} \in \partial(||\cdot - x^{k-1}||^2)(x^k)$ tal que $-\frac{\lambda_k}{2} y^{k^*} \in \partial f(x^k)$, entonces:

$$\langle y^{k^*}, x - x^k\rangle \geq 0$$

Ahora por el Teorema 1.2.5 y como $y^{k^*} \in \partial(||\cdot - x^{k-1}||^2)(x^k)$:

$$0 \leq \langle y^{k^*}, x - x^k \rangle \leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{||x^k + t(x - x^k) - x^{k-1}||^2 - ||x^k - x^{k-1}||^2}{t};$$

entonces por la Observación 4.3.3:

$$0 \leq \langle y^{k^*}, x - x^k \rangle \leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{t^2||x - x^k||^2 + t\langle x^k - x^{k-1}, x - x^k \rangle + t\langle x - x^k, x^k - x^{k-1} \rangle}{t}$$

$$0 \leq \langle y^{k^*}, x - x^k \rangle \leq \langle x^k - x^{k-1}, x - x^k \rangle + \langle x - x^k, x^k - x^{k-1} \rangle.$$

Además de la Observación 4.3.3:

$$0 \leq \langle x^k - x^{k-1}, x - x^k \rangle + \langle x - x^k, x^k - x^{k-1} \rangle = ||x - x^{k-1}||^2 - ||x - x^k||^2 - ||x^k - x^{k-1}||^2$$
$$0 \leq ||x^k - x^{k-1}||^2 \leq ||x - x^{k-1}||^2 - ||x - x^k||^2$$
$$||x - x^k|| \leq ||x - x^{k-1}||, \forall\, x \in U_k.$$

Ahora probaremos $||\bar{x} - x^k|| \leq ||\bar{x} - x^{k-1}||$ cuando $\bar{x} \in \overline{U_k}$, en efecto, sea $\bar{x} \in \overline{U_k}$, entonces $\exists \{x^n\} \subset U_k$: $x^n \to \bar{x}$, como $x^n \in U_k$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ entonces se tiene que:

$$||x^n - x^k|| \leq ||x^n - x^{k-1}||, \forall\, n \in \mathbb{N};$$
$$\text{entonces haciendo } n \to \infty\text{: } ||\bar{x} - x^k|| \leq ||\bar{x} - x^{k-1}||, \forall\, x \in \overline{U_k}.$$

Y por último probaremos que es Fejér convergente en $\overline{U}$, en efecto, sea $\bar{x} \in \overline{U}$, entonces $\bar{x} \in \overline{U_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que:

$$||\bar{x} - x^k|| \leq ||\bar{x} - x^{k-1}||, \forall\, \bar{x} \in \overline{U}, \forall\, k \in \mathbb{N};$$

Lo cual concluye con la demostración ∎

Teorema 4.3.3 *(Convergencia) Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y que satisface* $(\mathbf{H_1})$ *y* $(\mathbf{H_3}) \Rightarrow$ *la sucesión $\{x^k\}$ definida en (3.1) y (3.2) converge débilmente a un punto de $\overline{U}$*

Demostración. Por el Teorema 5.3 la sucesión $\{x^k\}$ definida en (3.1) y (3.2) es Fejér convergente en $\overline{U}$, además por el Teorema 1.4.1 es acotada. Como la sucesión es acotada, por el Teorema 1.5.1, entonces tiene una subsucesión $\{x^{k_j}\}$ que converge debílmente a algún $\bar{x} \in \overline{U}$, y como f es sci se tiene que:

$$f(\bar{x}) \leq \lim\inf_{k\to+\infty} f(x^{k_j}).$$

Pero por el Teorema 4.3.1: $\{f(x^k)\}$ es decreciente y acotado, entonces:

$$f(\bar{x}) \leq \lim_{k\to+\infty} f(x^{k_j}) = \lim_{k\to+\infty} f(x^k) = \inf_{k\to+\infty} f(x^k);$$

entonces $\bar{x} \in \overline{U}$, se tiene que $\{x^k\}$ converge debílmente a $\bar{x} \in \overline{U}$.
Lo cual concluye con la demostración. ∎

Teorema 4.3.4 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia que satisface $(\mathbf{H_1})$ y $(\mathbf{H_3})$, entonces se cumple lo siguiente:*

a. La suseción $\{||x - x^k||\}$ es convergente, $\forall\, x \in \overline{U}$.

b. $\lim_{k\to+\infty} ||x^k - x^{k-1}|| = 0$.

Demostración.

a. Por el Teorema 4.3.2 la sucesión $\{x^k\}$ es Fejér convergente en $\overline{U}$, entonces la suseción $\{||x - x^k||\}$ es decreciente y positiva, entonces la suseción $\{||x - x^k||\}$ es convergente.

b. Sea $x \in \overline{U}$, entonces $\exists\, \{x^n\} \subset \overline{U_k}$, $x^n \to x$, $\forall k \in \mathbb{N}$ y por un resultado obtenido del Teorema 4.3.2 se tiene que:

$$0 \leq ||x^k - x^{k-1}||^2 \leq ||x^n - x^{k-1}||^2 - ||x^n - x^k||^2;$$

entonces haciendo $n \to +\infty$, se tiene que:

$$0 \leq ||x^k - x^{k-1}||^2 \leq ||x - x^{k-1}||^2 - ||x - x^k||^2.$$

Ahora por el resultado a. y haciendo $k \to +\infty$ se tiene que:

$$\lim_{k\to+\infty} ||x^k - x^{k-1}|| = 0.$$

Lo cual concluye con la demostración. ∎

Teorema 4.3.5 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una función propia y que satisface* $(\mathbf{H_1})$ *y* $(\mathbf{H_3})$. *Si $0 < \lambda_k < \overline{\lambda}$, donde $\overline{\lambda} \in \langle 0, +\infty \rangle$, entonces la sucesión $\{x^k\}$ converge débilmente a un punto de $\overline{U}$ y*

$$\lim_{k\to+\infty} g^k = 0$$

para algún $g^k \in \partial f(x^k)$.

Demostración. La convergencia se prueba del Teorema 4.3.3 De la Observación 4.2.1 tomamos $g^k = -\frac{\lambda^k}{2} y^{k^*} \in \partial f(x^k)$, entonces tomando $||\cdot||_*$ a la ecuación anterior y usando la condición sobre el parámetro λ_k tenemos que:

$$||g^k||_* \leq \frac{\overline{\lambda}}{2} ||y^{k^*}||_*$$

Por otro lado de la Definición 1.1.1 :

$$||g^k||_* \leq \tfrac{\overline{\lambda}}{2} \sup\{\langle y^{k^*}, v\rangle : v \in X, ||v|| \leq 1\} \leq \tfrac{\overline{\lambda}}{2} \sup\{||v|| ||x^k - x^{k-1}|| : v \in X, ||v|| \leq 1\}.$$

Usando el Teorema 4.3.4, item b, tenemos:

$$\lim_{k\to+\infty} g^k = 0$$

.

Lo cual concluye con la demostración. ∎

Capítulo V

Conclusiones

5.1. Discuciones

1. El problema de minimización semiestricta cuasiconvexa a pesar de tener condiciones generales con resultados de convergencia obtenidos son importantes pero aún débiles (convergencia no fuerte sino débil a algún punto y no necesariamente solución del problema) para el objetivo de encontrar los puntos solución del problema de minimización cuasiconvexo (2.1).

2. Comentamos también que de quitarle la condición (H_2) a (2.1) hay un camino incierto hacia la convergencia del algoritmo ya que esa condición que se remarca más en la Proposición 4.1.1 es de mucha importancia para los resultados de convergencia.

3. Existen variantes del método del punto proximal en espacios de dimensión infinita que garantizan la convergencia global, en este sentido se puede investigar más para realizar un análisis equivalente a estos artículos para el caso cuasiconvexo.

5.2. Conclusiones

En este trabajo presentamos un método del punto proximal para obtener que la sucesión converge débilmente a un punto crítico del problemas de minimización cuasiconvexo. A continuación damos algunos de los puntos más importantes del presente artículo:

1. Hemos recopilado resultados básicos del subdiferencial y derivada generalizada de Clarke-Rockafellar, operadores cuasimonótonos y convergencia Cuasi-Fejér y la convergencia del método del punto proximal para adaptarlos a nuestros objetivos.

2. Se emplea una recopilación mucho más general que la dada en [1] (ya no se pide que sea Lipschitz continua y abarcamos a un campo más general, X espacio de Banach), además de tomar el subdiferencial de Clarke-Rockafellar extendiendo la teoría conocida.

3. Hemos introducido nuevos ejemplos de funciones estrictas cuasiconvexas en dimesión finita e infinita.

4. Hemos conseguido la convergencia débil para un espacio general de Banach pero que satisface ciertas condiciones.

5. Los resultados obtenidos pueden ser aplicados para modelos que aparecen en Ingeniería o en Economía.

5.3. Trabajos posteriores

1. Con el fin de generalizar los resultados previos se tomó el sudbiferencial de Clarke-Rockafellar con la condición de que la función sea sci, sin embargo la Defínción 1.2.1 ya no requiere que la función sea sci, sino solamente propia; la cual da indicios de todavía poderse generalizar más para un posible trabajo futuro.

2. Profundizar las aplicaciones en EDP para poder aplicar el algoritmo.

3. Generalizar el trabajo en espacio métricos.

4. Buscar las condiciones para generar la convergencia fuerte del algoritmo en espacios de Banach.

Bibliografía

[1] Cano Lengua M. A. «Método del punto proximal para minimizar funciones cuasiconvexas usando el subdiferencial de Clarke». En: *Tesis de Licenciatura en Matemática, Universidad Nacional del Callao* (2011). Cibertesis.

[2] Papa Quiroz E. A. «Optimización matemática y computacional». En: *Perú* ().

[3] Schmit Jr L. A. «Structural optimization based on preconditioned conjugate gradient analysis methods». En: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (1994), págs. 943-964.

[4] Takayama A. «A hybrid inexact logarithmic-quadratic proximal method for nonlinear complementarity problems». En: *The Journal of Mathematical Analysis* 322 (1995), págs. 276-287.

[5] Martinet B. «Régularization d'inequation Variationelles par Approximations Successives». En: *R.A.I.R.O., Rech. Oper.* 4.R3 (1970), págs. 154-158.

[6] Attouch H. y Bolte J. «On the convergence of the proximal algorithm for nonsmooth functions involving analytic features». En: *Mathematical Programming Series B* 116 (2009), págs. 5-16.

[7] Attouch H. y Bolte J. y Svaiter B. «Convergence of descent methods for semialgebraic and tame problems: proximal algorithms, forward-backward splitting, and regu-

larized gauss-seidel methods». En: *Mathematical Programming Series A* 137 (2013), págs. 91-129.

[8] Cabello Piar J. C. «Análisis Funcional. Licenciatura de Matemáticas». En: *Universidad de Granada* (2008).

[9] Zagrodny D. «Approximate mean value theorem for upper subderivatives». En: *Nonlin. Anal.* 12 (1988), págs. 1413-1428.

[10] Luc D.T. «Characterizations of quasi-convex functions». En: *Bull. Austral. Math. Soc.* 48 (1993), págs. 393-400.

[11] Avriel M. y Diewert W. E. y Schaible S. *Generalized Concavity*. 1988.

[12] Kreyszig E. «Introductory functional analysis with applications». En: *1a ed. Canada: Jhon Wiley y Sons* (1978).

[13] Svaiter B. F. «A class of Fejér convergent algorithms, approximate resolvents and the hybrid proximal-extragradient method». En: *Journal of Optimization Theory and Applications* 162 (2014), págs. 133-153.

[14] Urahama K. y Furukawa Y. «Gradient descent learning of nearest neighbor classifiers with outlier rejection». En: *Pattern Recofnition* 28.5 (1995), págs. 761-768.

[15] Clarke F. H. «Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley, New York». En: *European Journal of Operational Research* (1983).

[16] Burachik R. S. y Iusem A. N. «A generalized Proximal Point Algorithm for the variational inequality problem in a Hilbert space». En: *SIAM Journal of Optimization* 8.1 (1998), págs. 197-21.

[17] Gromicho J. «Quasiconvex optimization and location theory». En: *Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers* (1998).

[18] Hassouni A. y Jaddar A. «On quasiconvex functions and applications to optimality conditions in nonlinear programming». En: *Appl. Math. Lett.* 14 (2001), págs. 241-244.

[19] Fickus M. y Mixon D. G. «Optimal frames and newton's method». En: *Numerical Functional Analysis and Optimizationl* 33.7–9 (2012), págs. 971-988.

[20] Guler O. «On the Convergence of the Proximal Point Algorithm for Convex Minimization». En: *SIAM J Control and Optimization* 29 (1991), págs. 403-419.

[21] Ferreira O. P. y Oliveira P. R. «Proximal point algorithm on Riemannian manifolds». En: *Optimization* 51 (2002), págs. 257-270.

[22] Papa Quiroz E. A. y Oliveira P.R. «Full convergence of the proximal point method for quasiconvex functions on hadamard manifolds». En: *Control, Optimisation and Calculus of Variations* 18 (2012), págs. 483-500.

[23] Papa Quiroz E. A. y Oliveira P.R. «Proximal point method for minimizing quasiconvex locally Lipschitz functions on Hadamard manifolds». En: *Nonlinear Analysis* 75 (2012), págs. 5924-5932.

[24] Papa Quiroz E. A. y Oliveira P.R. «Proximal point method for minimizing quasiconvex locally Lipschitz functions on Hadamard manifolds». En: *Nonlinear Analysis* 75 (2012), págs. 5924-5932.

[25] Burachik R. S. y Scheimberg S. «A Proximal Point Method for the variational inequality problem in Banach spaces». En: *SIAM, Journal on Control and Optimization* 39.5 (1998), págs. 1633-1649.

[26] Rockafellar R. T. «Directionally Lipschitzian functions and subdifferential calculus». En: *Proc. London Math. Soc.* 39 (1979), págs. 331-355.

[27] Rockafellar R. T. «Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions». En: *Can. J. Math.* 32 (1980), págs. 257-280.

[28] Rockafellar R. T. «Monotone operators and the proximal point algorithm». En: *SIAM Journal Control Optim.* 14 (1976), págs. 877-898.

[29] Auslender A. y Teboulle M. «Interior gradient and proximal methods for convex and conic optimization». En: *SIAM Journal of Optimization* 16.3 (2006), págs. 697-725.