Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Físicas
Unidad de Posgrado

Propiedades geométricas y dinámicas del espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom-De Sitter interactuante con una quintaesencia mínimamente acoplada

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Física con mención en Física Nuclear

AUTOR

Franco Augusto VILLATA RIBBECK

ASESOR

Dr. Teófilo VARGAS AUCCALLA

Lima, Perú

2024



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Villalta, F. (2024). *Propiedades geométricas y dinámicas del espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom-De Sitter interactuante con una quintaesencia mínimamente acoplada*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Franco Augusto Villata Ribbeck
Tipo de documento de identidad	D.N.I
Número de documento de identidad	42315568
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-5109-8082
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Teófilo Vargas Auccalla
Tipo de documento de identidad	D.N.I
Número de documento de identidad	
URL de ORCID	
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Fulgencio Villegas Silva
Tipo de documento	D.N.I
Número de documento de identidad	
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Rafael Edgardo Carlos Reyes
Tipo de documento	D.N.I
Número de documento de identidad	
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Jorge Abel Espichán Carrillo
Tipo de documento	D.N.I
Número de documento de identidad	
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.2.6.2. Cosmología y Gravitación
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	UNMSM-Puerta 1, Ciudad Universitaria, FCF-UPG País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: San Miguel 15081 Av. República de Venezuela 1641 Latitud: -12.05642315 Longitud: -77.0843326901621
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2020-2023
URL de disciplinas OCDE	Astronomía https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.03.08

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD PRESENCIAL PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN FÍSICA CON MENCIÓN EN FÍSICA NUCLEAR

Siendo las 3:00 am del 21 de marzo de 2024, en el salón 109 de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, se reunieron los siguientes miembros del Jurado Examinador:

Dr. Fulgencio Villegas Silva	(Presidente)
Dr. Rafael Carlos Reyes	(Miembro interno)
Dr. Jorge Abel Espichan Carrillo	(Miembro externo)
Dr. Teófilo Vargas Auccalla	(Asesor)

Para la sustentación oral y pública de la tesis para optar el Grado Académico de Magíster en Física con mención en física Nuclear, del **Bach. Franco Augusto Villata Ribbeck**, con código de matrícula N° 19137008.

Después de darse lectura al expediente de Grado, en el que consta haberse cumplido con todas las disposiciones reglamentarias, los señores miembros del Jurado Examinador atendieron a la exposición de la tesis titulada:

"Propiedades geométricas y dinámicas del espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom-De Sitter interactuante con una quintaesencia mínimamente acoplada"

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado Examinador, los asistentes y el tesista se retiraron del salón 109, para que el presidente y los miembros del Jurado Examinador puedan deliberar y calificar.

Al término de la deliberación, el Dr. Fulgencio Villegas Silva invitó al tesista y a los asistentes a pasar al salón 109 para dar lectura a la evaluación de la sustentación. Obteniendo como resultado la calificación de:

18	Dieciocho	Muy Bueno
(NÚMERO)	(LETRAS)	(ESCALA)

A continuación, el presidente del Jurado Examinador entrega el Acta de Sustentación de Tesis a la Unidad de Posgrado, para continuar el trámite correspondiente para obtener el Grado Académico de Magíster en Física con mención en Geofísica, del Bach. Juan Pablo Alberto Avalos Carrión.

Siendo las 17 : 00 pm, se levantó la sesión.

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS
UNIDAD DE POSGRADO

Los miembros del Jurado Examinador suscriben el Acta de sustentación de tesis en la Ciudad de Lima, el 21 de marzo de 2024.

Acta de Sustentación de Tesis del Bach. **Franco Augusto Villata Ribbeck**.

Dr. Fulgencio Villegas Silva
Presidente

Dr. Rafael Carlos Reyes
Miembro interno

Dr. Jorge Abel Espichan Carrillo
Miembro externo

Dr. Teofilo Vargas Aucealla
Asesor

CALIFICACIÓN OBTENIDA: DIECIOCHO (18) MUY BUENO

Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Físicas

UNIDAD DE POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Teófilo Vargas Auccalla en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen Nº 000092-2021-UPG-VDIP-FCF/UNMSM de la tesis de investigación, cuyo título es "Propiedades geométricas y dinámicas del espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom-De Sitter interactuante con una quintaesencia mínimamente acoplada", presentado por el Bach. Franco Augusto Villata Ribbeck para optar el grado académico de Magister en Física con mención en Física Nuclear.

CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 4% de similitud, nivel PERMITIDO para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado correspondiente.

Lima, 24 de septiembre de 2023



Firma del asesor

D.N.I. N° : 06532544

Nombres y apellidos del asesor : Teófilo Vargas Auccalla

DEDICATORIA

Este aporte se lo dedico a mi familia, por su inquebrantable apoyo y comprensión; a Tay, aquel astro que descubrí cuya luz y extraña belleza puedo ver y describir sin necesidad de ecuaciones y a todos los que por accidente lleguen a leer esta tesis, espero que les sirva de guía y les motive a seguir investigando sobre los agujeros negros y el espacio-tiempo, con el espíritu de romper las reglas impuestas por la soberbia del ‘’yo sé todo’’

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por su apoyo y comprensión, a mi Asesor de Tesis el Dr. Teófilo Vargas Auccalla por su paciencia y consejos y al espíritu de los grandes teóricos e innovadores de la ciencia.

ÍNDICE

HOJA DE REFERENCIA DEL JURADO I
FICHA CATALOGRÁFICA IV
ÍNDICE V
RESUMEN VII
INTRODUCCIÓN 1
CAPÍTULO 1 PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN 3
1.1 Determinación del problema 3
1.2 Formulación del problema 4
1.3 Objetivos de la investigación 4
1.4 Justificación 5
1.5 Importancia 6
CAPÍTULO 2 MARCO TEÓRICO 7
2.1 Antecedentes: Internacional y nacional 7
2.2 Generalidades 10
2.3 Conceptual 17
2.4 Definiciones de términos básicos 17
2.5 Formalismo de la teoría de la relatividad general 24
2.5.1 Tensores de Riemann, Ricci y Einstein 24
2.5.2 Ecuación de la geodésica 26
2.5.3 Ecuación de campo gravitacional de Einstein 27
2.5.4 Principales soluciones exactas a la ecuación de campo gravitacional de Einstein 30
2.5.5 El tensor de energía-momentum 32
2.5.6 Electrodinámica relativista 33
2.5.7 Campo débil 36
2.5.8 La constante cosmológica 37
2.5.9 Estructura causal del agujero negro de Schwarzschild 41
2.5.10 Estructura causal del agujero negro de Reissner-Nordstrom 45
2.5.11 Métrica de De Sitter 49
2.5.12 Métrica de Schwarzschild-De Sitter 52

2.5.13 Acoplamiento de un campo escalar real al espacio-tiempo plano 52
2.5.14 Acoplamiento de un campo escalar real al espacio-tiempo curvo 54
2.6 La Quintaesencia 58
CAPÍTULO 3 LA SOLUCIÓN DE REISSNER-NORDSTROM-DE SITTER 64
CAPÍTULO 4 ESTRUCTURA CAUSAL DEL AGUJERO NEGRO DE RNdS 91
4.1 Introducción 91
4.2 Estructura causal en coordenadas esféricas 93
4.3 Coordenadas de Eddington-Finkelstein 95
4.4 Agujero negro de RNdS en las coordenadas de Kruskal 97
4.5 Estructura causal del agujero negro de RNdS en las coordenadas de Kruskal 109
CAPÍTULO 5 QUINTAESENCIA EN EL ESPACIO-TIEMPO DE RNdS 123
5.1 Quintaesencia en el modelo de fluido perfecto inhomogéneo de Kiselev 123
5.2 Quintaesencia en el modelo del gas de Chaplygin 132
5.2.1 Gas de Chaplygin 135
5.2.2 Gas de Chaplygin generalizado 138
5.2.3 Quintaesencia no acoplada en el modelo del gas de Chaplygin generalizado 140
5.2.4 Quintaesencia mínimamente acoplada en el modelo del gas de Chaplygin generalizado 155
CAPÍTULO 6 MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA DE PRUEBA Y POTENCIAL GRAVITACIONAL EN EL ESPACIO-TIEMPO DE RNdS 169
CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES 183
CAPÍTULO 8 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 194
ANEXOS 200
A) GRÁFICOS 201
B) LISTA DE ECUACIONES FINALES 217
C) MATRIZ DE CONSISTENCIA 234

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación se obtiene una solución exacta a las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein que incluyen una constante cosmológica positiva, para el caso de un objeto cargado con simetría esférica, carente de momento angular e inmerso en un espacio-tiempo vacío, estático, homogéneo e isotrópico. Esta es la muy conocida solución de Reissner-Nordstrom-De Sitter (RNdS). Para lograr esto se emplea de manera fundamental la aproximación del campo gravitatorio débil, lo que permite linealizar la ecuación tensorial de campo, y las propiedades del tensor de energía momento para el campo electromagnético expresado en términos del tensor de campo electromagnético o tensor de Maxwell.

Logrado esto, se procede a estudiar las propiedades de la estructura causal impuestas por la geometría de esta nueva métrica para las trayectorias geodésicas de partículas y señales luminosas que se propagan en el espacio-tiempo de RNdS, para lo cual se efectúa la correspondiente transformación de la métrica obtenida en coordenadas esféricas a las coordenadas de Kruskal. Donde su carácter más general permite evitar las singularidades matemáticas que suelen obtenerse en el sistema polar esférico, ya que las coordenadas de Kruskal, al poder abarcar todo el espacio-tiempo posible de forma regular y convergente, nos permiten un análisis más preciso y completo de las propiedades de este tipo de espacio-tiempo desde un punto de vista estrictamente geométrico.

Posteriormente, se procede a estudiar las propiedades dinámicas dentro del espacio de RNdS mediante la obtención de las ecuaciones geodésicas (y en particular la radial) que nos permiten describir el movimiento de una partícula de prueba clásica (sin spin) no cargada y junto con ello se logra obtener la forma exacta del potencial gravitacional en el exterior del agujero negro de RNdS.

Finalmente, se trata de acoplar el campo escalar de Quintaesencia al campo gravitacional del agujero negro de RNdS en la vecindad o cercanías a su horizonte de sucesos, donde la deformación de la geometría del espacio-tiempo alrededor de su horizonte cobra una importancia relevante, por lo que se emplea un modelo de campo escalar no homogéneo, pero aún isotrópico, de modo tal que dicho campo se comporta como un fluido perfecto inhomogéneo cuyas propiedades dependen únicamente de la distancia.

Debido a que, a diferencia de la mayoría de los trabajos dedicados a este punto, dicho modelo no se enfoca al estudio de las propiedades de la energía oscura a escalas cósmicas de distancia, donde gracias al Principio Cosmológico sabemos que se impone de manera aproximada la homogeneidad e isotropía del espacio. En tal sentido y conforme con esto, los cálculos respectivos se efectúan y desarrollan tomando como base el aporte del modelo de Kiselev, donde la presión de este campo escalar es proporcional a la densidad de energía oscura, manteniéndose negativa para un parámetro de estado constante y siempre negativo.

Por último, los resultados que se obtienen para la presión, densidad de energía y potencial escalar de acuerdo a este modelo se comparan con los que se obtienen en el modelo del gas de Chaplygin adecuado al caso físico referido y señalado.

Palabras clave: Relatividad general, agujero negro de RNdS, estructura causal, potencial gravitacional, campo escalar, Quintaesencia, acoplamiento mínimo, modelo de Kiselev, gas de Chaplygin.

ABSTRACT

In the present research work, an exact solution to Einstein's gravitational field equations, including a positive cosmological constant, will be obtained for the case of a charged object with spherical symmetry, lacking angular momentum, and immersed in an empty, static, homogeneous, and isotropic space-time. That is the well-known Reissner-Nordstrom-De Sitter (RNdS) solution. To achieve this, the weak gravitational field approximation will be used in a fundamental way, which will allow linearizing the field tensor equation and the properties of the momentum energy tensor for the electromagnetic field expressed in terms of the electromagnetic field tensor, or Maxwell's tensor.

Having achieved this, we will proceed to study the properties of the causal structure imposed by the geometry of this new metric for the geodesic trajectories of particles and light signals propagating in the space-time of RNdS, for which the corresponding transformation of the metric obtained in spherical coordinates to Kruskal coordinates will be carried out. Whereas its more general character will allow to avoid the mathematical singularities that are usually obtained in the spherical polar system, the Kruskal coordinates, being able to cover all possible space-time in a regular and convergent way, will allow a more precise and complete analysis of the properties of this type of space-time from a strictly geometrical point of view.

Subsequently, we will proceed to study the dynamic properties within the RNdS space by obtaining the geodesic equations (and in particular the radial one) that will allow us to describe the motion of an uncharged test particle, and together with them, we will obtain the form of the gravitational potential in the RNdS space-time.

Finally, we will try to couple the Quintessence scalar field to the gravitational field of the RNdS black hole in the vicinity of its event horizon, where the deformation of the space-time geometry around its horizon is of relevant importance, so we will use a non-homogeneous scalar field model, but still isotropic, so that the field will behave as an inhomogeneous perfect fluid whose properties will depend only on the distance.

Because unlike most of the works dedicated to this point, this model will not focus on the study of the properties of dark energy at cosmic distance scales, where, thanks to the Cosmological Principle, we know that the homogeneity and isotropy of space are imposed in an approximate way. In this sense and in accordance with this, the respective calculations will be carried out taking as a basis the contribution of the Kiselev model, where the pressure of this scalar field is proportional to the dark energy density, remaining negative for a constant and always negative state parameter.

Finally, the results obtained for pressure, energy density, and scalar potential according to this model will be compared with those obtained in the Chaplygin gas model suitable to the physical case referred to and indicated.

Keywords: General relativity, RNdS black hole, causal structure, gravitational potential, scalar field, Quintessence, minimal coupling, Kiselev model, Chaplygin gas.

INTRODUCCIÓN

La constante cosmológica retornó al ámbito de los estudios teóricos de la física tras el hallazgo de la expansión acelerada del universo al estudiarse el comportamiento de las supernovas tipo IA [2, 6]. Luego de haber sido eliminada de las ecuaciones de campo de la relatividad general por el propio Einstein, tras el descubrimiento de la expansión cósmica por Edwin Hubble en los años veinte, hoy en día, sin embargo, es uno de los temas más importantes en la cosmología y uno de los más grandes temas abiertos en la física teórica actual.

Sabemos de ella por sus efectos: como el hecho de ser un auténtico generador de aceleración entre las galaxias, obligándolas a alejarse entre sí de manera acelerada, contrarrestando con ello la atracción gravitatoria propia entre ellas (gracias a la forma peculiar de corrimiento al rojo presentado en numerosas supernovas al estudiar el correspondiente comportamiento de su brillo); así como las propias huellas dejadas por la radiación del fondo de microondas. Como sabemos, dicha aceleración sólo puede ser debida a un agente físico real que ejerza una presión negativa y ese agente vendría a ser la densidad de energía oscura o densidad de energía del vacío.

En este sentido, se han planteado numerosos modelos teóricos que tratan de explicarla (que abarcan desde las teorías cuánticas de campos hasta los modelos de "Quinta esencia"), siendo esta última la hipótesis mejor aceptada hasta el momento, que asocia directamente la existencia de un campo escalar que define una cierta densidad de energía constante y positiva en las entrañas mismas del espacio vacío, que generaría una presión negativa; siendo esta presión la causa más plausible de la etapa de expansión acelerada (o de crecimiento exponencial) que experimenta actualmente nuestro universo, donde, a esta energía "fantasma" se le ha dado el nombre de "energía oscura" (Dark energy) [6, 16, 21, 22].

Sin embargo, el objeto central de este trabajo de investigación será estudiar cómo la presencia de una constante cosmológica no nula y positiva en las ecuaciones de campo puede afectar las propiedades geométricas del espacio-tiempo. Esto es el potencial gravitacional, para el caso específico de un agujero negro cargado, esféricamente simétrico y no rotante, y por ende, ver cómo el parámetro cosmológico mencionado podría modificar la métrica de Reissner-Nordstrom [26, 27].

De acuerdo con esto, se solucionó la ecuación de campo gravitacional de la relatividad general, incluyendo en ella la constante cosmológica, dándole al tensor métrico las propiedades propias de simetría esférica (diagonalidad) y de ser estacionario consistentes con el espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom y sobre la base de esto, se efectuará la ecuación asumiendo que dicho espacio obedece a las propiedades de la aproximación del campo gravitatorio débil [17, 18, 19, 20] para luego desacoplarla según las componentes no nulas del tensor de energía-momentum del campo electromagnético.

Cabe recalcar que aquí asumiremos una constante cosmológica positiva, por lo que dicha solución a la ecuación de campo corresponderá a una métrica de Reissner-Nordstrom tipo De Sitter.

El presente trabajo constará de las siguientes partes:

i) Obtención de la métrica de Reissner-Nordstrom-De Sitter en el sistema de las coordenadas esféricas.

ii) Su respectiva transformación a las coordenadas de Kruskal.

iii) Estudio de la estructura causal.

iv) Dinámica del espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom-De Sitter, esto es, obtener el respectivo potencial gravitacional asociado con dicha métrica y posteriormente la ecuación geodésica radial, lo que nos permitirá analizar los parámetros básicos del movimiento de una partícula de prueba no cargada en su vecindad, tales como su periodo y frecuencia angular.

v) Acoplamiento de un campo escalar de energía oscura al campo gravitacional de Reissner-Nordstrom-De Sitter.

Finalmente, la presente investigación es un estudio teórico -en el marco de la teoría clásica de campos- que empleará únicamente los métodos analíticos de los que dispone la física teórica mediante la aplicación de las herramientas matemáticas comprendidas en el estudio de la teoría de la relatividad general.

CAPÍTULO 1
PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Determinación del problema

Al analizar el significado físico de los diferentes tipos de soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein, se observa que la forma de la geometría del espacio-tiempo producida depende directamente del valor y propiedades de las densidades de masa y energía involucradas.

En este sentido, la solución de Schwarzschild muestra que una distribución de masa en reposo y esféricamente simétrica es capaz de deformar el espacio-tiempo a su alrededor, otorgándole similares propiedades geométricas de simetría esférica.

Similarmente, la solución de Reissner-Nordstrom demuestra que la carga eléctrica asociada a una distribución de materia influye también en la descripción de la geometría del espacio-tiempo.

En las últimas décadas, se han hecho importantes avances teóricos acerca de la descripción, ampliación y generalización de la métrica de Schwarzschild al incluir en ella a la constante cosmológica; no obstante, a pesar de que en los últimos años se ha venido estudiado la influencia que podría tener el parámetro cosmológico en la estructura causal del espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom, éste constituye aún un tema abierto dentro de la física teórica, en cuanto a una mayor profundización en la descripción de sus propiedades y posibles implicaciones.

Los estudios más recientes acerca de la métrica de Reissner-Nordstrom se han enfocado, sobre todo, en el estudio del comportamiento de agujeros negros cargados originados por singularidades y al estudio del movimiento de partículas de prueba cargadas en las cercanías de espacios de Reissner-Nordstrom extremos (agujeros negros de Reissner-Nordstrom o singularidades), pero, sin considerar la constante cosmológica en los resultados de las nuevas métricas así obtenidas.

Sin embargo, como ya se señaló anteriormente, las ecuaciones de campo de la relatividad general muestran que las densidades de masa-energía son las que modifican la geometría del espacio-tiempo deformándolo. Por otro lado, todas las observaciones astrofísicas actuales son compatibles y consistentes con la hipótesis, cada vez más aceptada, que sugiere la presencia de la constante cosmológica debido a la existencia de un flujo homogéneo de energía -hasta hoy en día de naturaleza desconocida- de densidad constante (al menos a escala macroscópica) a la que se le ha dado el nombre

de “energía oscura” o simplemente “energía del vacío”, también denominada de acuerdo a los modelos de campos clásicos escalares Quintaesencia, lo cual acrecienta las sospechas acerca de la propiedad que podría poseer dicho flujo de energía (mediante la constante cosmológica) de deformar el espacio-tiempo, similarmente a cómo lo hace la materia y la energía “ordinaria” en el universo.

En consecuencia, es necesario demostrar si la introducción de una constante cosmológica positiva dentro de las ecuaciones de campo gravitacional puede causar algún tipo de modificación en la geometría del espacio-tiempo descrita por la métrica de Reissner-Nordstrom y, asimismo, intentar describir los posibles efectos que podría producir la incorporación o el acoplamiento de la quintaesencia referida a la propia geometría o métrica del espacio-tiempo de RNdS.

1.2 Formulación del problema

Por todo lo expuesto hasta aquí, se plantearán e intentarán resolver las siguientes interrogantes:

1. ¿Puede una constante cosmológica positiva ser capaz de modificar la geometría del espacio-tiempo descrita en la métrica de Reissner-Nordstrom?
2. En el caso de ser esto así, ¿cuáles podrían ser las implicaciones más fundamentales de este hecho?
3. ¿La incorporación o acoplamiento del campo escalar de la Quintaesencia al espacio-tiempo de RNdS podría ser capaz de modificar las propiedades geométricas de este tipo de espacio y con ello modificar de manera tanto cualitativa como cuantitativa el comportamiento de su potencial gravitacional?
4. ¿Y recíprocamente, este acoplamiento podría a su vez influir en el propio comportamiento de la Quintaesencia así acoplada?

1.3 Objetivos de la investigación

Objetivo general

Obtener una solución exacta a la ecuación de campo gravitacional de la relatividad general, incluyendo en ella una constante cosmológica positiva, que sea una forma modificada de la métrica de Reissner-Nordstrom, esta es una solución tipo Reissner-Nordstrom-De Sitter (RNdS) y estudiar las propiedades físicas y estructurales de este tipo de espacio más fundamentales.

Adicionalmente, se analizará el acoplamiento de la Quintaesencia al espacio-tiempo curvo que define el campo gravitacional del agujero negro de RNdS.

Objetivos específicos

1. Determinar si la presencia de la constante cosmológica dentro de esta solución puede influir o no en el comportamiento de la geometría del espacio-tiempo de RN.
2. Estudiar las propiedades de la estructura causal de esta clase de configuración, transformando para esto la solución que se obtendrá en coordenadas esféricas al sistema de las coordenadas de Kruskal.
3. Analizar las propiedades cinemáticas de este espacio, mediante el estudio del movimiento de una partícula de prueba no cargada cerca al horizonte y obtener de este modo las ecuaciones geodésicas que permitan especificar los parámetros de su movimiento.
4. Estudiar el acoplamiento mínimo del campo escalar de la energía oscura al campo gravitacional determinado por el espacio-tiempo curvo de la métrica de RNdS.
5. Mediante el empleo de métodos analíticos convencionales para resolver la ecuación de campo de Einstein se tratará de comparar la solución obtenida en este trabajo con soluciones similares o que pudieran poseer la misma forma básica en otros trabajos de investigación, en donde también se trate de solucionar la ecuación de campo incluyendo la constante cosmológica para el caso de una distribución cargada esféricamente simétrica y en reposo.

1.4 Justificación

La justificación para realizar el presente estudio radica en el hecho de que a pesar que en los últimos años se han efectuado interesantes aportes en la generalización de la solución de Reissner-Nordstrom, para diferentes contextos físicos y empleando los diferentes métodos analíticos de los que dispone la teoría de la relatividad general, todavía no se han profundizado, ni ampliado lo suficiente los estudios concernientes a relacionar dicha solución exacta con la constante cosmológica.

Explicar esta carencia es sencillo, puesto que los esfuerzos de estudiar la constante cosmológica están actualmente dirigidos a los estudios cosmológicos relacionados con la evolución y el destino del universo a gran escala y se pierde de vista la riqueza física que entraña este parámetro de magnitud casi infinitesimal. Por otro lado, como sabemos, los esfuerzos por continuar ampliando los estudios y las generalizaciones entorno a la solución de Reissner-Nordstrom se han enfocado, sobre todo, hacia el estudio de espacios de este tipo en las cercanías de agujeros negros generados por singularidades dentro de la métrica referida y, así

como también, enfocados en la obtención de ecuaciones geodésicas que describan el movimiento de partículas cargadas dentro de estos mismos espacios; hechos todos estos estudios sobre la base de las ecuaciones de campo de Einstein en su forma original, o sea, sin contener la constante cosmológica.

Es por este motivo que aún no abundan dentro de la literatura trabajos que traten, por ejemplo, lo concerniente al agujero negro de RNdS, lo cual significa que la relación que pueda guardar la constante cosmológica con un agujero de RN aún sigue siendo un tema abierto en la física teórica y sobre todo con una gran riqueza de métodos matemáticos y de distintos enfoques físicos por ensayarse.

De tal manera que modelar un espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom, incluyendo en él la posible influencia de dicha constante, abrirá nuevas rutas de investigación acerca de las propiedades en la geometría del espacio-tiempo físico en relación con la constante cosmológica que ya de por sí, hoy por hoy, es la responsable de la aceleración cósmica.

1.5 Importancia

La importancia del presente trabajo de investigación radica en que es un aporte más hecho en el campo de la obtención de las formas modificadas a la solución de Reissner-Nordstrom, incluyendo la constante cosmológica. A pesar de que ya se han venido realizando en los últimos años investigaciones de este tipo [1, 13, 33, 35], la mayoría de los trabajos realizados en las últimas décadas se encuentran enfocados hacia el estudio de los agujeros negros de Schwarzschild y Reissner-Nordstrom [2, 26, 27, 28] empleando la gran variedad de métodos analíticos de los que dispone la teoría de la relatividad general para solucionar la ecuación de campo de Einstein (desde los métodos tensoriales convencionales, el desarrollo de la métrica en su forma estándar, pasando por la introducción de funciones de prueba y el uso de métodos perturbativos). [11, 25, 31].

Este trabajo de tesis fomentará el desarrollo de una línea de investigación que tendrá como objetivo la obtención de soluciones que modifiquen y generalicen las soluciones exactas ya conocidas, en donde se desee estudiar de una manera más profunda la influencia de la constante cosmológica dentro de las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein en los futuros y posteriores trabajos teóricos de investigación que se quieran seguir realizando en esta área.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes: Internacional y nacional

La presente investigación se encuentra fundamentada en los siguientes antecedentes concernientes a los esfuerzos teóricos efectuados en los últimos años por generalizar las soluciones de Schwarzschild y de Reissner-Nordstrom:

a) Empleando integrales de acción, mediante la introducción de la acción de Einstein-Hilbert, y aplicando el desarrollo de la métrica en su forma estándar, Adler y Ramazanoglu obtienen una solución generalizada de Schwarzschild incluyendo en ella la constante cosmológica.(Referencia: Adler, S.L and Ramazanoglu, F.M.; "Spherically symmetric vacuum solutions arising from trace dynamics modifications to gravitation", 2015. [1]).

b) Bohmer, similarmente, obtiene la misma forma de métrica de Schwarzschild generalizada, incluyendo la constante cosmológica, al utilizar la métrica en su forma estándar expresando esta en términos de funciones exponenciales de dependencia radial.(Referencia: Bohmer, C.G; "General relativistic static fluid solutions with cosmological constant", 2006. [10]).

c) Se han venido realizando en los últimos años aportes en esta dirección que muestran soluciones para espacios de Schwarzschild- de Sitter incluyendo la constante cosmológica, además la obtención de ecuaciones geodésicas cuyas soluciones considerase el parámetro cosmológico y, a su vez, la determinación de un potencial gravitatorio que incluye una constante cosmológica no nula. (Referencia: Abbassi, A.H.; Gharanfoli, S. and Abbassi, A.M.; "General spherically symmetric solutions of Einstein vacuum field equations with cosmological constant", 2002. [13]).

d) Son interesantes los trabajos en donde se han aplicado potenciales lineales dentro de la solución a las ecuaciones de campo de Einstein para estudiar de un modo más amplio las propiedades de la métrica de Reissner-Nordstrom.(Referencia: Atala, M.E.; "Perturbación escalar en Reissner-Nordstrom: formulación covariante"; Universidad Nacional de Córdoba, 2010. [25]).

e) Se han incrementado los estudios de las propiedades de la métrica de Reissner-Nordstrom que describen la estructura del espacio-tiempo en las cercanías de agujeros negros producidos por las singularidades asociadas a distribuciones de masa y carga tipo Reissner-Nordstrom; esto se ha desarrollado ampliamente en las últimas décadas con el objetivo de hallar singularidades en la solución de Reissner-Nordstrom. (Referencias: [26]).

f) Se han realizado muchas generalizaciones sobre la solución exacta de Reissner-Nordstrom con el objetivo de estudiar el movimiento de partículas de prueba cargadas en las cercanías de agujeros negros, generados por singularidades tipo Reissner-Nordstrom.(Referencias: [28]).

g) Se han obtenido algunos resultados que expresan funciones métricas en las cuales aparece la constante cosmológica, con la finalidad de estudiar el movimiento de partículas cargadas en las inmediaciones de agujeros negros de Reissner-Nordstrom.(Referencia: Olivares Rubilar, M.A.; "Movimiento de partículas de prueba cargadas y fotones en agujeros negros de Einstein", 2011. [27]).

h) Soluciones similares a la ecuación de campo de Einstein que muestran la influencia de la constante cosmológica junto con la masa y la carga de la fuente de campo gravitacional, se han bosquejado en los intentos por seguir generalizando las soluciones de Schwarzschild y Kerr en los últimos años.(Referencia: Heinicke, C. and Hehl, F.W. ;"Schwarzschild and Kerr solutions of Einstein´s field equation an introduction", 2015. [11]).

i) Asimismo, se han desarrollado los estudios que muestran claramente la obtención de la ecuación de campo gravitacional de Einstein en el vacío, incluyendo la constante cosmológica.

Esta forma de reescribir la ecuación de campo en el vacío, pero incluyendo ahora al parámetro cosmológico, posee una gran importancia porque a partir de allí se pueden simplificar ampliamente los problemas a la hora de obtener soluciones exactas que incluyan dicha constante cosmológica.(Referencia: Dharwadker, A. ; "The cosmological constant", 2011. [3]).

j) Por otro lado, la condición de campo débil que se empleará a lo largo de toda esta investigación es ampliamente utilizada para linealizar la ecuación de campo de la relatividad general en la obtención de ecuaciones de ondas gravitacionales. Es así que, considerando la perturbación de la métrica de Minkowski en el primer orden, se han podido obtener soluciones exactas que describen las propiedades y el comportamiento de las ondas gravitacionales predichas por la teoría de la relatividad general.(Referencias: [17, 18, 19, 20]).

k) En los últimos años, Ozdemir abordó el problema de solucionar la ecuación de campo, incluyendo en ella la constante cosmológica para el caso de una distribución continua de carga esféricamente simétrica y estática, logrando obtener una solución exacta a la ecuación de campo de la relatividad general, pero a diferencia del presente trabajo de investigación, utilizó el tensor de energía-momentum del fluido perfecto para analizar el campo en el interior de dicha distribución.(Referencia: Ozdemir, N. ; Spherical symmetric charged solution with cosmological constant; arXiv:0711.4732, 2007. [35]).

l) En las últimas décadas, trabajos como los de Laue, Lake y Borchers abordan el problema de la estructura causal en la métrica de RNdS, utilizando para ello diferentes enfoques y formalismos matemáticos distintos al empleo de la transformación de la métrica a las coordenadas de Kruskal [36, 37, 38].

m) Por otra parte, en torno al problema del acoplamiento de campos escalares reales a espacios-tiempos curvos, abundan en la literatura los intentos por lograr una cuantización en campos gravitacionales. No obstante, dicha literatura se encuentra enfocada a cuantizar los campos escalares reales al espacio-tiempo de Friedmann, LeMaitre, Robertson y Walker (FLRW), siendo realmente pocos los intentos por lograr una cuantización por acoplamiento mínimo del

campo escalar a espacios curvos que entrañen la constante cosmológica, tales como la métrica de RNdS. Cabe señalar que tales estudios se desarrollan sobre la base de la teoría del acoplamiento mínimo, así como del acoplamiento conforme [39, 40, 41, 42].

n) Asimismo, continuando los intentos por articular la teoría cuántica de campos con la relatividad general -basándose en el trabajo de Bañados, Teitelboim y Zanelli-, los trabajos más actuales buscan describir el acoplamiento de campos escalares reales al campo gravitacional del agujero negro BTZ, esto es, a la gravedad de un agujero negro en tres dimensiones con constante cosmológica negativa [43, 44].

o) En las últimas décadas, en lo que respecta a las teorías clásicas de campos y cosmología, se ha logrado describir a la densidad de energía oscura presente en el vacío y causante de la actual etapa de expansión acelerada del universo mediante el empleo de las teorías de campo escalar. De modo tal que el modelo de Quintaesencia surge como el campo escalar que define y describe las propiedades fundamentales de la energía oscura a escalas cosmológicas [59-63].

p) En los últimos años, se ha logrado introducir o acoplar el campo escalar de la Quintaesencia al espacio-tiempo curvo de la relatividad general, generado por una distribución de masa-energía estática y esféricamente simétrica. Resultando de esto la modificación de las soluciones exactas básicas a las ecuaciones de campo de Einstein tales como las de Schwarzschild y RN, obteniéndose con ello las soluciones para los agujeros negros de Schwarzschild-Quintaesencia, RNdS-Quintaesencia y de RNAdS-Quintaesencia, destacándose los aportes de Kiselev (2002) y de Ghaffarnejad (2018) [56, 57, 58].

2.2 Generalidades

La teoría de la relatividad general es la teoría de la gravitación. Esta logra generalizar el primer postulado de la relatividad especial (que establece que las ecuaciones que describen todas las leyes físicas de la naturaleza poseen la misma forma en todos los sistemas inerciales) a los sistemas acelerados. De esta forma, todas las leyes físicas sin excepción tendrán el mismo comportamiento y obedecerán a ecuaciones que conservarán la misma forma matemática en todos los sistemas de referencia del universo, tanto inerciales, como no inerciales [8]. Esto, como sabemos, lo planteó Einstein a través de dos principios fundamentales, que son los cimientos de la relatividad general.

El principio de equivalencia sostiene que los campos gravitacionales son equivalentes a los sistemas de referencia acelerados. Con esto, es imposible distinguir si nos encontramos dentro de un campo gravitatorio uniforme o en un sistema de referencia no inercial; de esto se deduce la equivalencia entre la masa gravitatoria y la masa inercial. La implicancia más significativa de este razonamiento físico tan profundo fue la que llevó a Einstein a determinar que esto se cumpliría si y solamente si la geometría del espacio-tiempo fuera curva y no plana, como se creía indiscutiblemente hasta exactamente cien años atrás [3, 15].

A partir de entonces, el comportamiento de los potenciales gravitatorios se tuvo que expresar de forma tensorial, lo cual quedó asegurado por el Principio de covarianza generalizada, que nos dice que las ecuaciones de las leyes de la física deben expresarse ahora mediante tensores y derivadas covariantes, debido a que estos funcionan matemáticamente de manera idónea en espacios de geometría curva o arbitraria (como los espacios de Riemann), más allá del espacio plano o euclideano [8, 9, 15].

Los tensores son entes matemáticos que obedecen a leyes de transformación, muy útiles para expresar cantidades físicas, debido a que esto asegura la invarianza de las mismas; es decir, independientemente de los sistemas coordenados de referencia empleados para expresarlas, son las herramientas que mejor funcionan y se adaptan a los espacios de geometría curva o arbitraria [9, 32].

La geometría del espacio de la relatividad general es la descrita por los espacios de Riemann, que generaliza al espacio plano de Euclides o al espacio-tiempo pseudo-euclideano de Minkowski en un espacio n-dimensional de geometría arbitraria.

La forma de esta geometría arbitraria queda descrita por la métrica $g_{\mu\nu}$.

La métrica $g_{\mu\nu}$ es la solución de la ecuación de campo gravitacional de la relatividad general, la cual, en virtud de ser una ecuación tensorial, es construida mediante el empleo de los tensores de

Riemann $R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa}$, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, la curvatura escalar R, el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ y el tensor de energía-momentum $T_{\mu\nu}$ (que describe el flujo de energía y de momento lineal y angular de toda distribución continua de masa-energía o campo) [8, 9, 31].

Esto permite obtener la ecuación de campo gravitacional de Einstein, una expresión tensorial que describe a la interacción gravitatoria como el resultado de la deformación del espacio-tiempo producido por la presencia de densidades de masa-energía. De tal manera, que la masa deforma el espacio y recíprocamente, el espacio condiciona la manera en cómo la materia debe moverse en él [31].

La ecuación de campo de Einstein constituye en esencia un sistema de 10 ecuaciones diferenciales, por lo general, parciales, de segundo orden y no lineales [8, 14].

Sabemos que en el límite no relativista o Newtoniano (para velocidades mucho menores que la rapidez de la luz en el vacío y para aproximaciones de campos débiles y estacionarios) la ecuación diferencial mencionada se reduce a la ecuación de Poisson para la gravitación, donde se observa el comportamiento del potencial gravitacional $\phi(r)$ en función de la densidad de masa $\rho(r)$ y se obtiene el potencial Newtoniano de la gravedad $-\frac{GM}{r}$ [8, 14, 31].

Existen numerosos métodos para resolver analíticamente la ecuación de campo de la relatividad general:

- Usando equivalencias en el límite Newtoniano y, en consecuencia, introduciendo el potencial no relativista $-\frac{GM}{r}$ dentro de las soluciones obtenidas a partir de las componentes no nulas del tensor de Ricci [8].

- Empleando la métrica en su forma estándar en coordenadas isotrópicas (t, r, θ, ϕ) para un campo estacionario y una distribución de masa con simetría esférica [8, 15, 31].
- Empleando la métrica en su forma estándar, desarrollándola en términos de funciones exponenciales de dependencia exclusivamente radial [10, 31].
- Empleando funciones de prueba [10, 31].
- Empleando métodos de perturbación de primer orden (perturbaciones lineales) a la métrica [17, 25].
- Empleando métodos matemáticos convencionales de resolución de ecuaciones diferenciales, siempre y cuando las ecuaciones obtenidas sean ordinarias [30].

En este sentido, el presente trabajo optó por esta última opción (dado que la ecuación obtenida fue una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden). Es decir, escribiendo la solución incógnita en una solución general y una particular. Las soluciones exactas obtenidas por medio de métodos analíticos, más importantes a la ecuación de campo gravitatorio de Einstein, son:

- Solución de Schwarzschild: Describe el espacio-tiempo entorno a una distribución continua de masa estática (no posee traslación, ni momento angular alguno) y esféricamente simétrica. Esta fue la primera solución exacta en ser obtenida a la ecuación de campo, data de 1916 [8].
- Solución de Reissner-Nordstrom: Describe el espacio-tiempo entorno a un objeto o partícula de masa M y carga eléctrica Q, en reposo y con simetría esférica. Data de 1918 [8, 31].
- Solución de Kerr: Describe el espacio-tiempo entorno a la misma distribución de masa M y de carga Q, pero agregándole además rotación (momento angular) [31].
- Solución de Robertson-Walker: Es la métrica que describe el modelo cosmológico del universo de Friedmann-Robertson-Walker (modelo FRW). Describe un universo dinámico.

Esta solución muestra que el universo se está expandiendo, cuyo tamaño depende explícitamente del tiempo, medido por la función de factor de escala $a(t)$ y según la geometría que adopte, donde el parámetro cosmológico de curvatura k puede tener 3 valores: +1, -1, 0 [4, 5, 6].

El universo es cerrado (su geometría es esférica), k=+1

El universo es abierto (geometría tipo "silla de montar"), k=-1

El universo es plano (geometría plana), k=0

Implicando estas posibilidades que:

Si k=+1, el universo terminará contrayéndose (Big Crunch).

Si k=-1, el universo se expandirá por siempre a ritmo uniforme.

Si k=0, expansión exponencial [6, 16].

De acuerdo con esto, según las observaciones más recientes, nuestro universo está destinado a expandirse por siempre, correspondiendo a una geometría plana (k=0) [16].

Cuando se introduce la solución de Robertson-Walker en la ecuación de campo de Einstein empleando además el tensor de energía-momento para el fluido perfecto, se obtienen las ecuaciones cosmológicas de Friedmann-LeMaitre, que básicamente describen la teoría del Big-Bang, es decir, estas ecuaciones predicen un universo evolutivo y dinámico en expansión [4, 6, 16].

Ante esto, Einstein tuvo que modificar su ecuación de campo gravitacional original e incluir en ella la constante cosmológica Λ y con esto aseguró (aunque no por mucho tiempo) un universo estático (Steady State). Posteriormente Hubble descubrió, a través de observaciones astronómicas muy precisas, que las galaxias se expandían, Einstein eliminó Λ de su ecuación considerándola como "el

mayor error de su carrera" y con esto dándoles la razón a Hubble y LeMaitre por la constatación del modelo del Big-Bang [2, 6, 16].

A partir de entonces, se ha planteado numerosos modelos evolutivos del universo con geometrías cerradas, abiertas o planas más o menos consistentes.

Cuando se soluciona la ecuación de campo incluyendo en ella Λ y se introducen la métrica de Robertson-Walker y el tensor de energía-momento del fluido perfecto $T^{\mu\nu}$ se vuelven a obtener las ecuaciones de Friedmann-LeMaitre pero esta vez incluyendo en ellas el término adicional $\frac{\Lambda c^2}{3}$ [4, 5, 6].

Resolviendo estas ecuaciones para una densidad no constante y derivable respecto al tiempo $\dot{\rho}$ y teniendo en cuenta la constante H_0 de la Ley de Hubble (que establece que la rapidez de alejamiento de las galaxias es directamente proporcional a la distancia que las separa), despejando finalmente el factor de escala $a(t)$ (el tamaño del universo respecto al tiempo) se obtiene que es directamente proporcional a la exponencial e^{Ht} ; donde H es una constante [6, 16, 21].

Este resultado muestra que el universo crece de manera exponencial y por lo tanto, la expansión se efectúa a ritmo acelerado.

Esta predicción teórica fue constatada en el año de 1998 al observar, con gran precisión, el comportamiento de supernovas muy distantes tipo IA [2]; con lo cual, la expansión acelerada del universo ha sido a partir de allí ampliamente confirmada y reconfirmada por numerosas observaciones astronómicas, hechas por telescopios, radiotelescopios y observatorios espaciales en los últimos años [5, 6, 16, 21].

Demostrada la expansión acelerada del universo, cabe ahora entender cuál es el proceso físico que se encuentra detrás de esto.

Dada la influencia decisiva de Λ en las ecuaciones cosmológicas dinámicas actuales, estamos cada vez más seguros de que dicho comportamiento está directamente relacionado a ella. Con esto, la constante cosmológica Λ ha resurgido en los últimos veinte años y todavía no conocemos aún con precisión cuál es su verdadera naturaleza física, aunque sí su valor [7, 24].

En este sentido, las teorías clásicas de campos la asocian con la presencia de una densidad de energía intrínseca en el vacío, denominada "energía oscura" [21].

Se han planteado varios modelos físicos que intentan darle una naturaleza a esta densidad de energía. Estos esfuerzos comprenden las teorías cuánticas de campos, que plantean una explicación asumiendo como base las fluctuaciones cuánticas del vacío de partículas virtuales; sin embargo, estas predicen una densidad de energía de aproximadamente 10^{120} veces mayor que la obtenida por las observaciones astronómicas ($\rho_{\Lambda(\text{cuantica})} \sim 10^{112}\ \frac{erg}{cm^3}$; $\rho_{\Lambda(observaciones)} \sim 10^{-8}\ erg/cm^3$) [22, 23].

Ante estas limitaciones, las teorías clásicas de campos (basadas en los cálculos del tensor de energía-momento de la relatividad general) llevan una gran ventaja frente a las teorías cuánticas de campos en tratar de describir la naturaleza y el comportamiento de la "energía oscura". Estas teorías proponen que esta densidad de energía no es otra cosa que una densidad de energía relativista $\rho_\Lambda < 0$ y, dado que la presión relativista $P \propto \rho_\Lambda$ entonces, esta presión así obtenida también será negativa. La

presión negativa que se necesita para mantener el crecimiento exponencial, y, en consecuencia, acelerado del cosmos [4, 5, 6, 16, 21].

2.3 Conceptual

La teoría de la relatividad general, es la base sobre la cual gira la finalidad de esta investigación. Al tratarse la relatividad, en esencia, una teoría clásica, los fundamentos de estudio se encuentran dentro de los límites de la teoría clásica de campos.

2.4 Definiciones de términos básicos

A continuación, presentaremos algunas definiciones que nos ayudarán a fundamentar la presente investigación:

Campo débil: Es aquel campo gravitatorio que define un espacio-tiempo de geometría casi minkowskiana, es decir, aproximadamente plano. De tal manera que se puede considerar como una perturbación al espacio-tiempo de Minkowski. Es originado por distribuciones continuas de masa cuya densidad de masa-energía es muy pequeña o cuando tomamos una región del espacio-tiempo entorno al objeto a una distancia lo suficientemente grande de este, como para que su geometría sea aproximadamente igual a la de Minkowski [17, 19].

La aproximación del campo débil se usa para linealizar la ecuación de campo de la relatividad general, considerando al término $h_{\mu\nu}$ en primer orden de magnitud y despreciando términos de orden superior, es decir $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Esto permite analizar las ecuaciones de campo y las geodésicas dentro del límite Newtoniano (no relativista) y asimismo convertir la ecuación de campo de Einstein en ecuaciones de onda que describan el comportamiento de las ondas gravitacionales, entre otros fines.

Tensor de energía-momentum del campo electromagnético: El tensor de energía-momentum del campo electromagnético $T_{\mu\nu}$ describe el flujo de energía electromagnética y momento asociados a una distribución continua de masa que porta carga eléctrica. Esta cantidad tensorial depende del tipo de tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ que describa al campo generado y este, a su vez, se encuentra expresado bajo la dependencia de los cuadripotenciales A^{μ} y los potenciales vectorial $\vec{A}$ y escalar φ.

Cuando se estudian las propiedades del campo externo a la distribución con carga, su traza T es nula [8].

Ecuación de campo gravitacional de Einstein: Igualdad en la que se expresa la equivalencia entre la forma de la geometría que puede adoptar el espacio-tiempo y las densidades de masa-energía presentes en él capaces de modificarla, deformarla o distorsionarla. De tal manera que la masa dicta las propiedades que puede poseer la geometría de una cierta región del espacio y la forma que puede adoptar. Este espacio regula la manera (la ecuación de movimiento) en cómo la materia se mueve dentro de él [3, 15].

Ecuación geodésica: Es la expresión que describe el movimiento de cualquier partícula en el espacio cuadridimensional de la relatividad general y, por esta razón, es una ecuación de movimiento general capaz de describir dicho movimiento en cualquier tipo de espacio-tiempo de cualquier clase y de geometría arbitraria. La información acerca de la forma de la geometría del espacio en el cual se mueven las partículas está contenida en los símbolos de Christoffel o Conexión afín $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ que a su vez contiene a la métrica $g_{\mu\nu}$ que describe dicho espacio. La cinemática de la partícula es aportada por su cuadrivelocidad μ^{ν} dentro de la ecuación. Con esto, es posible describir con una precisión que no posee la teoría de la gravitación newtoniana el movimiento de partículas en las cercanías de espacios como los de Schwarzschild, Reissner-Nordstrom y el comportamiento de agujeros negros.

La ecuación de campo de Einstein junto con la ecuación de la geodésica lograron describir y explicar con enorme precisión, por ejemplo, la anomalía en el perihelio de Mercurio y hacer predicciones ampliamente verificadas como la desviación de los rayos luminosos al pasar en las cercanías de campos gravitatorios intensos, estudiar las propiedades de las lentes gravitacionales, entre otros fenómenos de trascendente importancia que no hubiesen podido ser descritos adecuadamente por la teoría newtoniana de la gravedad [8, 31].

Solución de Reissner-Nordstrom: Describe la geometría del espacio-tiempo entorno a una distribución continua o partícula que contenga masa y carga eléctrica, que se encuentre en reposo y que posea simetría esférica. En este tipo de métrica se muestra la influencia que tienen la carga y la energía del campo electrostático en la forma en la que pueden curvar el espacio-tiempo [15, 31].

Simetría esférica: Es una condición geométrica que se impone bajo situaciones específicas de simetría en ciertos problemas físicos, tales como el caso de partículas o de distribuciones continuas de forma esférica que generen campos (como el campo eléctrico o el campo gravitatorio). Con el objeto de simplificar el estudio de sus ecuaciones y solución a una sola variable o coordenada. De tal modo, que la solución que se pretende hallar –que al inicio dependía de las tres coordenadas espaciales (r, θ, ϕ ó x, y, z)- queda ahora definida únicamente en términos de su dependencia con la coordenada radial r [8, 29].

Tensor: Los tensores son objetos o entes matemáticos que permiten expresar una gran gama de cantidades físicas de gran importancia, debido a que se adaptan y funcionan muy bien en situaciones que plantean espacios no necesariamente de geometría euclidiana, sino más bien de geometría de forma arbitraria (como, por ejemplo, en los espacios de Riemann).Esto se debe a la propiedad fundamental que poseen todos los tensores de poder ser invariantes frente a las transformaciones de coordenadas (sin importar el sistema de referencia que se adopte para expresarlos), debido a que satisfacen leyes de transformación de coordenadas específicas (jacobianos de transformación) que aseguran su invarianza.

Los tensores poseen una gran aplicación en la física moderna, permitiendo expresar una gran variedad de cantidades físicas que no podrían ser expresadas ni analizadas en espacios de geometría y métrica curvada usando solamente las propiedades del simple álgebra vectorial, usados en áreas tales como: mecánica de fluidos (tensores de tensión superficial, esfuerzos y torsión), electromagnetismo (conductividad eléctrica y permeabilidad magnética de diferentes medios distribuida en materiales de estructura tridimensional arbitraria), en relatividad general y cosmología (expresa la ecuación de campo, así como la métrica $g_{\mu\nu}$ que la soluciona mediante los tensores de Riemann $R^{\sigma}_{\mu\nu\kappa}$, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, el tensor de energía-momentum $T_{\mu\nu}$, sus derivadas covariantes y el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$).Cabe agregar que los tensores usados en la ecuación de campo de Einstein son tensores de orden 2, definidos como matrices [9, 32].

Derivada covariante: En general, la derivada parcial de una función escalar $f(X^{\mu})$ produce otra función escalar $\psi(X^{\mu})$. Sin embargo, en general, la derivada parcial de un tensor no es otro tensor.

Con el objeto de mantener la homogeneidad matemática de las ecuaciones tensoriales de la relatividad general, se reemplaza la derivada parcial ∂_μ por la derivada covariante ∇_μ.

Siendo la derivada covariante la derivada más general que se pueda emplear [9].

Métrica: La métrica $g_{\mu\nu}$ define el elemento de línea de universo ds^2 que describe la geometría y las propiedades generales del espacio-tiempo [8,9].

Teoría de la relatividad especial: Todas las leyes de la física poseen la misma forma en todos los sistemas inerciales del universo (incluyendo la invarianza de la rapidez de la luz en el vacío). Para que esto ocurra, el espacio necesita ser relativo (transformaciones Galileanas) y también el tiempo (transformaciones de Lorentz). Por lo tanto, todas las ecuaciones de mecánica newtoniana llevarán el factor de Lorent´z $\gamma = \gamma(v)$ -con v constante- para mantener su forma básica. En consecuencia, el espacio se une con el tiempo generando el espacio-tiempo que continuará siendo plano (mediante la métrica de Minkowski) y aparece el tiempo propio $d\tau$ en reemplazo del tiempo universal o absoluto dt [8].En consecuencia, la teoría especial de la relatividad resulta ser una generalización de la mecánica newtoniana, donde todos los principios y ecuaciones de esta se cumplen en el caso límite de velocidades mucho menores que la rapidez de la luz en el vacío c [29].

Teoría de la relatividad general: Todas las leyes físicas son invariantes tanto en los sistemas inerciales, como también en los sistemas no inerciales o acelerados. Para que esto ocurra, se modifica el entendimiento y la expresión del campo gravitacional, entendiéndose, ahora, como el efecto producido por la curvatura del espacio-tiempo a causa de la presencia de la masa en él. Con esto, el espacio-tiempo pseudoeuclideano o plano se sustituye por el espacio más general de Riemann, dado que aquí la conexión afín $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ deja de ser nula y, en consecuencia, la derivada parcial ∂_μ se reemplaza por la derivada covariante ∇_μ en las nuevas ecuaciones físicas del campo gravitacional [8,31].

Constante cosmológica: La constante cosmológica Λ es el parámetro constante agregado a las ecuaciones de campo de Einstein con el objeto de mantener y justificar el modelo cosmológico del universo estacionario (Stady State).Su valor (según las observaciones astronómicas más recientes) es extremadamente pequeño $\Lambda = 2.036\, x\, 10^{-35}\, s^{-2}$ ó $también\ \Lambda{\sim}10^{-52} m^{-2}$.

Sin embargo, en la actualidad, se la asocia directamente con la causa física que origina la etapa de expansión acelerada en la que se encuentra nuestro universo. Según las teorías clásicas de campos más eficaces, se encuentra en el misterio físico de la "energía oscura" que impulsa dicha aceleración a escala cósmica –que, según los cálculos más actuales, constituye cerca del 70% del universo- identificándose esta con la presencia de una densidad de energía ρ_Λ negativa que generaría, a su vez, una presión P_Λ igualmente negativa [5, 6, 16, 21].

Coordenadas de Eddington-Finkelstein: Este sistema de coordenadas se emplea en la descripción de geometrías de espacios-tiempos de gran simetría esférica, tales como la métrica de Schwarzschild, Reissner-Nordstrom, Schwarzschild De Sitter o RNdS. Con ellas es posible obtener las geodésicas radiales nulas, es decir, las trayectorias que describen las partículas sin masa en reposo tales como los fotones respecto a la masa central esférica que crea el campo gravitacional, tanto cuando se acercan como cuando se alejan de ella. Con esto es posible trazar los conos de luz en las intersecciones y con ello comenzar a estudiar la estructura causal de este tipo de espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático.

Coordenadas de Kruskal: Las coordenadas de Kruskal-Szekeres, a diferencia de las coordenadas esféricas en las cuales se expresa originalmente la métrica, y también de las de Eddington-Finkelstein, permiten describir la métrica en todo el espacio-tiempo, aún inclusive en el punto exacto del horizonte de sucesos, mediante una coordenada *como de espacio* X y otra coordenada *como de tiempo* T; así la métrica original se puede expresar ahora en una parte espacial y otra temporal bien definidas, y posee la ventaja de poder resolver el inconveniente de ''levantar'' las singularidades coordenadas.

Estructura causal: Sabemos que el espacio-tiempo es una variedad Lorentziana, de tal modo que el describir la estructura causal significa hallar la relación causal entre los distintos puntos del espacio-tiempo. Esto se logra mediante el análisis geométrico de los conos de luz. Para el espacio de Minkowski esto es relativamente sencillo, puesto que las relaciones causales se establecen mediante geodésicas radiales nulas rectas; en cambio, en el espacio-tiempo de geometría arbitraria (curvo), dichas relaciones de causa-efecto quedan establecidas mediante líneas geodésicas curvas como hipérbolas.

Horizonte de sucesos: Es la superficie que envuelve a una singularidad física o agujero negro cuyo radio es llamado radio del horizonte de eventos; esta radio corresponde a la radio gravitacional del cuerpo que es capaz de deformar la geometría del espacio y por debajo de la cual se convierte en agujero negro. Sabemos que no existe una relación causal definida entre lo que ocurra dentro del horizonte y el exterior de todo agujero negro, de modo tal que la física actual (tanto la relatividad general, como la teoría cuántica de campos) pierde por completo toda capacidad de predictibilidad sobre cualquier evento que ocurra dentro del horizonte, al menos hasta que se encuentre una teoría cuántica de la gravitación.

Agujero negro: Es la región finita del espacio-tiempo que contiene una densidad de masa-energía tal que ninguna partícula conocida en la naturaleza, ni siquiera la propia luz, puede escapar ni salir de él. Esto debido, como sabemos, a la deformación extrema que presenta el ‘’tejido’’ del espacio-tiempo dentro de dicha región. Predicho teóricamente por primera vez por John Michell en el siglo XVIII, basándose en el concepto newtoniano de velocidad de escape, fue capaz de predecir su propiedad fundamental, de modo tal que podemos definir a un agujero negro como todo objeto existente en el universo capaz de contraerse hasta alcanzar su radio gravitacional propio denominado radio de Schwarzschild, el cual dependerá únicamente de la cantidad de masa que posea, lo que de acuerdo con mecánica newtoniana implica que todo agujero negro impondrá como velocidad de escape la velocidad de la luz en el vacío. Posteriormente, en la década de los 70, los trabajos de Bekenstein y Hawking demostraron que los agujeros negros tienen entropía y que esta es proporcional al área de su horizonte de sucesos y que, en consecuencia, ellos pueden radiar radiación electromagnética de naturaleza térmica hacia el exterior desde su disco de acreción. Como sabemos, dicha radiación posee una temperatura finita denominada la temperatura de Hawking y la forma de esta entropía es consistente y válida con el Principio Holográfico enunciado por vez primera por ‘t Hooft en 1993 y posteriormente desarrollado por L. Susskind [45, 46, 47, 48, 49].

Solución de RNdS: Modificación a la solución de Reissner-Nordstrom (RN) original al incluir dentro de las ecuaciones de campo de la relatividad general una constante cosmológica positiva.

Acción covariante: Describe el acoplamiento de un campo escalar φ al campo gravitacional determinado por un cierto espacio-tiempo curvo o de geometría arbitraria definido mediante el tensor métrico $g^{\mu\nu}$.Para lograr obtener la cuantización del campo escalar en dicho espacio curvo es necesario expresar la acción de forma covariante, de modo que sea consistente y compatible con el principio de covarianza generalizada de la relatividad general [39, 40].

Acoplamiento mínimo y acoplamiento conforme: El acoplamiento mínimo se logra sencillamente transformando la densidad lagrangiana del espacio-tiempo de Minkowski, para el caso de la ecuación de Klein-Gordon, a la forma covariante. En cambio, en el acoplamiento conforme se agregan términos adicionales a la densidad lagrangiana proporcionales a φ^2, por lo general, términos que incluyen la curvatura escalar de Ricci R con una cierta constante adimensional de ajuste [41,42].

Energía oscura: El universo actual se encuentra sometido a una expansión acelerada en donde las galaxias constituidas por materia ordinaria (y muy probablemente también de materia oscura) se alejan unas de otras a un ritmo acelerado, lo cual manifiesta la existencia de una densidad de energía de naturaleza hasta hoy en día desconocida, a la que se le ha dado el nombre de Energía Oscura (Dark Energy), la cual tiene la propiedad de ejercer una presión negativa sobre la materia ordinaria (galaxias) encontrándose contenida en el espacio vacío. Actualmente sabemos que la energía oscura constituye aproximadamente las tres cuartas partes, es decir, el 75% de toda la materia y energía que existe en el universo, intentando inicialmente ser descrita por la constante cosmológica Λ de las ecuaciones de campo de Einstein, posteriormente por las teorías cuánticas de campos (llegándose al más célebre error en la historia de la física teórica) y finalmente, actualmente descrita por las teorías Quintaesencia, que es el modelo más exitoso hasta hoy en día propuesto por la teoría clásica de campos.

Quintaesencia: El primer candidato ‘’natural’’ que surgió para describir a la energía oscura fue la propia constante cosmológica Λ presente en las ecuaciones de campo de Einstein. Posteriormente, se tomaron como camino las teorías de campos escalares en el marco de la teoría clásica de campos. En estas últimas, llamadas Teorías Quintaesencia, la Quintaesencia se define como el campo escalar que describe a la energía oscura en el universo.

La formulación del campo escalar de Quintaesencia permitió abordar el problema de la energía oscura de un modo mucho más general y preciso, debido a que en esta teoría el parámetro que define

la ecuación de estado w_q deja de ser constante y se vuelve dependiente del tiempo, teniendo con esto dicho parámetro una evolución temporal, de tal manera que ahora podemos describir la densidad de energía oscura ρ_q presente en el universo, según sean las diferentes propiedades que adopte en distintas etapas del cosmos. Donde, a escalas cosmológicas -esto es, a grandes escalas de distancia espacial- la quintaesencia será homogénea, en virtud a la presunción de valides del Principio Cosmológico. Este hecho implica que sus propiedades físicas tales como su densidad o presión isotrópica poseerán únicamente una dependencia temporal, siendo con esto independientes de la distancia r, así como de las demás coordenadas de posición. Esto le ha permitido a la astrofísica en las últimas décadas desarrollar numerosos modelos de evolución del universo, mucho más precisos, que describan el comportamiento de las densidades tanto de energía oscura, así como de materia oscura, basados en las teorías quintaesencia. Esto se logra *ajustando* un potencial escalar $V(\phi)$ para cada fase evolutiva del universo, donde el parámetro de estado de quintaesencia $w_q(t)$ posea distintos valores correspondientes a cada etapa cronológica del cosmos; explicándose con esto de manera bastante exitosa y precisa el comportamiento de la quintaesencia tanto en las etapas tempranas del universo así como en la actual fase de aceleración cósmica moderada, en las cuales el parámetro de estado mencionado $w_q(t)$ vale 0 y -1, respectivamente, de acuerdo con los modelos de Chaplygin y ΛCDM derivados de las teorías quintaesencia [59, 60, 61, 62, 63, 73].

2.5 Formalismo de la teoría de la relatividad general

2.5.1 Tensores de Riemann, Ricci y Einstein

Tensor de Riemann

Viene dado por:

$$R^{\sigma}_{\mu\nu k} = \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma}_{\mu k}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{k\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu k}\Gamma^{\sigma}_{\nu\alpha} \tag{2.1}$$

En el espacio cuadridimensional de la relatividad general, el tensor de Riemann posee 20 componentes [8, 9].

Tensor de Ricci

El tensor de Ricci no es otra cosa que la contracción del tensor de Riemann, así este queda definido como:

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} = \mathrm{R}^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} \tag{2.2}$$

Curvatura escalar

Es una cantidad escalar definida como:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

Tensor de Einstein

Se define como:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2.4}$$

Identidades de Bianchi

La forma covariante del tensor de curvatura de Riemann es:

$$R_{\sigma\mu\nu k} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{\sigma\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\sigma} - \frac{\partial^2 g_{\sigma k}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}\right] + g_{\alpha\beta}\left[\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\mu k} - \Gamma^{\alpha}_{k\sigma}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\right] \tag{2.5}$$

Sacando la derivada covariante de esto:

$$R_{\lambda\mu\nu k;\eta} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\eta}\left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^k \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^k \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda k}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu k}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}\right) \tag{2.6}$$

Luego, a partir de este resultado se obtienen las siguientes expresiones:

$$R_{\sigma\mu\nu k;\alpha} + R_{\sigma\mu\alpha\nu;k} + R_{\sigma\mu k\alpha;\nu} = 0 \tag{2.7}$$

$$R_{\mu k;\alpha} - R_{\mu\alpha;k} + R^{\nu}_{\mu k\alpha;\nu} = 0 \tag{2.8}$$

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)_{;\mu} = 0 \tag{2.9}$$

Que son las denominadas **identidades de Bianchi** [8, 9].

2.5.2 Ecuación de la geodésica

Todo parte del principio variacional o de mínima acción, el cual nos dice que:

$$\delta \int L ds = 0 \tag{2.10}$$

Donde el lagrangiano en relatividad general se expresa en general como:

$$L = \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

Al reemplazar esta función, obtenemos:

$$\delta \int L ds = \int \left(\frac{\partial L}{\partial X^{\mu}} \delta X^{\mu} + \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dX^{\mu}}{ds}\right)} \delta \left(\frac{dX^{\mu}}{ds}\right) \right) ds = 0$$

Desarrollando este resultado, obtenemos finalmente:

$$\frac{d^2X^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\frac{dX^\sigma}{ds}\frac{dX^\rho}{ds} = 0 \tag{2.12}$$

Esta expresión es la ecuación de la geodésica, siendo para el caso de un espacio-tiempo curvo el término $\Gamma^\mu_{\sigma\rho}$ no nulo [8].

Los términos:

$\frac{dX^\sigma}{ds}, \frac{dX^\rho}{ds}$ son la cuadrivelocidad, $\Gamma^\mu_{\sigma\rho}$ los símbolos de Christoffel o conexión afín, y $\frac{d^2X^\mu}{ds^2}$ la cuadriaceleración de la partícula [8].

2.5.3 Ecuación de campo gravitacional de Einstein

Formulada por primera vez en 1915 por el físico judío-alemán Albert Einstein, esta ecuación describe la interacción gravitacional como el resultado de la curvatura del espacio-tiempo a causa de la presencia en él de materia y energía. De tal manera que se concluye que cualquier campo gravitatorio será directamente proporcional al ‘’tamaño’’ de la curvatura del espacio cuadridimensional en el que existe el universo, y esta misma curvatura será directamente proporcional a la cantidad de masa y/o energía presentes en una región local del espacio-tiempo, expresada por el tensor de energía momentum [8, 15].

La ecuación de campo gravitacional de Einstein forma en esencia un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales, de segundo orden y no lineales. En el límite clásico o newtoniano no relativista, es decir, para velocidades pequeñas en comparación con la rapidez de la luz y considerando campos gravitacionales lo suficientemente débiles, las ecuaciones de campo colapsan y se reducen a la ecuación de Poisson para la gravedad [8, 15], es decir, la ecuación de campo se convierte en:

$$\nabla^2 \emptyset_g \ = 4\pi G\rho \tag{2.13}$$

Donde: $\emptyset_g$ es el potencial gravitacional y ρ es la densidad de masa.

Ecuación de campo gravitacional sin constante cosmológica

Esta es la forma original de la ecuación de campo de Einstein y en ella no se considera la denominada constante cosmológica [8], que viene dada como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.14}$$

Ecuación de campo gravitacional con constante cosmológica

Aquí aparece el término $\Lambda g_{\mu\nu}$que tiene como objetivo equilibrar las fuerzas gravitacionales atractivas para obtener un universo homogéneo que tenga en promedio el mismo aspecto en cualquier región del universo y sea aproximadamente igual bajo cualquier dirección por la que se mire (Principio cosmológico) a través del tiempo y por siempre (universo estático), dado que pocos años después de la publicación de su primera ecuación de campo sin constante cosmológica el propio Einstein reconoció que su ecuación describía a un universo inestable en el que cualquier fluctuación de la configuración gravitacional podría provocar el colapso progresivo del cosmos a gran escala, de tal manera que esto quebraría la posibilidad de un universo estático (que era el concepto plenamente aceptado en aquella época) y sería en esencia un universo dinámico [2, 6].Por esta razón, para preservar la existencia de un universo estático e impedir la posibilidad de uno dinámico, la segunda ecuación de campo incluye la constante cosmológica [3, 15, 31]. Esta ecuación suele expresarse de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.15}$$

Donde, según observaciones astronómicas recientes [7, 24].

$$\Lambda \leq 10^{-46}\ Km^{-2}$$

O también:

$$\Lambda \sim 10^{-35} s^{-2}$$

La ecuación de campo en el vacío

De la ecuación de campo original [8] tenemos:

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu v} \tag{2.14}$$

Multiplicando por la izquierda por el tensor métrico $g^{\mu v}$.

$$g^{\mu v} R_{\mu v} - \frac{1}{2} g^{\mu v} g_{\mu v} R = \frac{8\pi G}{c^4} g^{\mu v} T_{\mu v}$$

Por definición de curvatura escalar, tenemos que:

$$R = g^{\mu v} R_{\mu v} \tag{2.3}$$

Al considerar métrica diagonal, se cumple que:

$$g^{\mu v} g_{\mu v} = 4 \tag{2.16}$$

Reemplazando:

$$R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4} T$$

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4} T \tag{2.17}$$

Al reemplazar este resultado en la ecuación (2.14), obtenemos:

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} \left(-\frac{8\pi G}{c^4} T \right) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu v}$$

$$R_{\mu v} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu v} - \frac{4\pi G}{c^4} T g_{\mu v} \tag{2.18}$$

En el espacio vacío no existe distribución de masa-energía alguna, entonces:

$$T_{\mu v} = 0 \tag{2.19}$$

No olvidar que la traza de este tensor se define como:

$$T = g^{\mu v} T_{\mu v} \tag{2.20}$$

Donde, en general $\forall\ g^{\mu v} \neq 0$, entonces:

$$T = 0 \tag{2.21}$$

Reemplazando estos resultados, finalmente se obtiene que:

$$R_{\mu v} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu v} - \frac{4\pi G}{c^4} T g_{\mu v} = 0$$

Por lo tanto:

$$R_{\mu v} = 0 \tag{2.22}$$

2.5.4 Principales soluciones exactas a la ecuación de campo gravitacional de Einstein

Solución de Schwarzschild: Esta fue la primera solución obtenida de las ecuaciones de campo y data del año 1916. Esta expresión describe el espacio-tiempo que se deforma o curva alrededor de un objeto sólido y compacto (o también partícula), estático (es decir, en reposo y sin traslación ni momentum angular alguno) y de simetría esférica [8]. Su forma es:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\emptyset^2$$

(2.23)

Esta solución produce auténticas singularidades en el espacio-tiempo en los casos:

$$r = 0$$

$$r = \frac{2GM}{c^2}$$

Donde a la última expresión se le denomina el Radio de Schwarzschild r_S.

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \tag{2.24}$$

Solución de Reissner-Nordstrom: Es una generalización de la métrica de Schwarzschild al agregar al mismo objeto o partícula una carga eléctrica neta no nula. Con esto, la métrica de Reissner-Nordstrom describe el espacio-tiempo alrededor de un objeto o partícula de masa M y carga eléctrica neta no nula Q, de simetría esférica y siempre en reposo (no se considera rotación) [8]. Fue planteada en 1918 y se expresa como:

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{GQ^2}{c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\emptyset^2 \tag{2.25}$$

Solución de FRW: La métrica de Friedmann-Robertson-Walker se define como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\emptyset^2\right) \tag{2.26}$$

Esta solución es válida si consideramos que se cumple el principio cosmológico, es decir, si suponemos que el universo es homogéneo e isotrópico a gran escala [2, 5, 6]. Esto es, que presente

aproximadamente el mismo aspecto físico en cualquier rincón del espacio y en cualquier dirección a escala macroscópica.

La función R(t) es el ‘’factor cosmológico de escala’’. Es una función del tiempo t relacionada con el tamaño del universo respecto al tiempo y tiene dimensiones de longitud. Por otro lado, k es el llamado ‘’parámetro de curvatura’’ que sólo puede tomar tres valores $k = +1, -1, \acute{o}\ 0$, correspondiendo a una geometría cerrada, abierta o plana, respectivamente [4, 5, 6].

2.5.5 El tensor de energía-momentum

Es una cantidad tensorial que representa el comportamiento del flujo de energía y momento (momento angular y lineal) de una distribución continua de materia y/o energía ubicada localmente en el espacio-tiempo. Por esta razón, es de decisiva importancia dentro de las ecuaciones de campo gravitacional de la teoría de la relatividad general [8].

Las formas más conocidas de esta cantidad tensorial usadas en relatividad general y cosmología son:

Tensor de energía-momentum del campo electromagnético

Se expresa como:

$$T^{\mu v} = \frac{1}{\mu_0}\left[F_{\sigma}^{\mu} F^{v\sigma} - \frac{1}{4} g^{\mu v} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}\right] \tag{2.27}$$

Fluido perfecto

Para objetos macroscópicos y fluidos perfectos, el tensor de energía-momentum adopta la siguiente forma:

$$T^{\mu v} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\mu^{\mu}\mu^{v} - P g^{\mu v} \tag{2.28}$$

Donde ρ es la densidad de masa-energía neta o total de la distribución continua, P la presión isotrópica asociada, $g^{\mu v}$ la métrica utilizada y μ^{μ}, μ^{v} son la cuadrivelocidad del fluido (o del cuerpo macroscópico) medida en el espacio-tiempo [8, 15, 31].

Ecuación de continuidad

La conservación de la energía y del momento lineal y angular se mantienen en relatividad general mediante las expresiones fundamentales siguientes [8, 31]:

En derivadas parciales, la ecuación de continuidad del tensor de energía-momentum nos arroja:

$$\partial_{\mu} T^{\mu v} = 0 \tag{2.29}$$

Donde:

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \tag{2.30}$$

En la derivada covariante, este tensor se sigue conservando mediante la expresión:

$$T^{\mu v}_{;\mu} = 0 \tag{2.31}$$

También esto se expresa como:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu v} = 0 \tag{2.32}$$

2.5.6 Electrodinámica relativista

Nos referimos a la necesidad de expresar las ecuaciones de Maxwell, que sintetizan todo el electromagnetismo, en forma covariante (tensorial) para lograr ser compatible con la formulación relativista [8]. Recordando que las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial [29] se expresan como:

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{(Ley de Gauss de la electricidad)} \tag{2.33}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\mathrm{x}\mathbf{B} - \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j} \quad \text{(Ley de Ampere generalizada)} \tag{2.34}$$

$$\boldsymbol{\nabla}.\mathbf{B} = 0 \quad \text{(Ley de Gauss del magnetismo)} \tag{2.35}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\mathrm{x}\mathbf{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{(Ley de Faraday)} \tag{2.36}$$

Gauge de Lorentz

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{A} = 0 \tag{2.37}$$

Gauge de Coulomb

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{A} = 0 \tag{2.38}$$

Cuadrivector corriente

Sea ρ_0 una densidad de carga propia.

$$j^\mu = \rho_0 v^\mu = \rho_0(\gamma c, \gamma \boldsymbol{v}) = \rho_0 \gamma (c, \boldsymbol{v}) = \rho(c, \boldsymbol{v}) = (c\rho, \rho \boldsymbol{v}) = (c\rho, \boldsymbol{j})$$

$$j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j}) \tag{2.39}$$

Ecuación de continuidad

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{2.40}$$

En otras palabras:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{j} = 0 \tag{2.41}$$

Cuadrivector potencial (Cuadripotencial)

$$A^{\mu} = (\varphi, \boldsymbol{A})$$

$$A_{\mu} = (\varphi, -\boldsymbol{A}) \text{ con signatura (+,-,-,-)}$$

$$A_{\mu} = (-\varphi, \boldsymbol{A}) \text{ con signatura } (-,+,+,+) \tag{2.42}$$

Con esto, el gauge de Lorentz se reescribe como:

$$\partial_{\mu} A^{\mu} = 0 \tag{2.43}$$

Por otro lado:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{2.44}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} x \boldsymbol{A} \tag{2.45}$$

Fuerza de Lorentz

Una partícula cargada moviéndose con velocidad $\boldsymbol{v}$ en un campo electromagnético, definido por $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ [29] experimenta una fuerza $\boldsymbol{F}$ dada por:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} x \boldsymbol{A} \tag{2.46}$$

La fuerza de Lorentz en su forma covariante [8] se expresa como:

$$F^{\mu} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_{\nu} \tag{2.47}$$

Definimos al tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu}$$

(2.48)

Con esto:

La forma covariante de las ecuaciones de Maxwell [8, 9] se expresa como:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{2.49}$$

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0 \tag{2.50}$$

La generalización de estas ecuaciones para el caso de un espacio-tiempo curvo, de geometría totalmente arbitraria [8,31], se lleva a cabo a través de las siguientes expresiones:

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} \tag{2.51}$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{2.52}$$

Luego:

Para el caso del espacio vacío, conocemos la siguiente condición [8]:

$$\frac{\partial F^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(g^{00} g^{11} F_{01}\sqrt{-g}\right) = 0 \tag{2.53}$$

Finalmente, el tensor de energía-momentum del campo electromagnético $T^{\mu\nu}$ está dado por:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right) \tag{2.54}$$

2.5.7 Campo débil

El campo gravitatorio débil es aquel correspondiente a un espacio-tiempo plano que es perturbado muy ligeramente por una distribución de masa-energía no muy masiva o que en una región lo

suficientemente alejada de la misma la geometría del espacio métrico resulta siendo casi plana, es decir, la geometría del espacio-tiempo así obtenido se define como casi plana o minkowskiana [17, 18]. Esta expresión, en general, se expresa como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + O\left({h_{\mu\nu}}^2\right) \tag{2.55}$$

Despreciando los términos de orden superior, obtenemos la aproximación del campo débil de primer orden, con la cual se consigue linealizar la ecuación de campo gravitacional de Einstein [14, 19, 20]. El campo débil en el primer orden de aproximación se define entonces como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.56}$$

Donde:

$g_{\mu\nu}$ Es el tensor métrico y $\eta_{\mu\nu}$ el tensor de la métrica de Minkowski que describe un espacio-tiempo plano. La función métrica perturbativa $h_{\mu\nu}$ obedece la siguiente condición:

$$\forall \ \left|h_{\mu\nu}\right| \ll 1 \tag{2.57}$$

Tal que:

$$\partial_\rho h_{\mu\nu} \ll 1 \tag{2.58}$$

Y con esto:

$$\left(\partial_\rho h_{\alpha\beta}\right)\left(\partial_\sigma h_{\mu\nu}\right) \approx 0 \tag{2.59}$$

2.5.8 La constante cosmológica

Modelos del universo: Ecuaciones de Friedmann

Al introducir en la ecuación de campo de la relatividad general la constante cosmológica (ec. 2.15) la métrica de Robertson-Walker (ec. 2.26) y el tensor de energía-momentum del fluido perfecto (ec. 2.28), se obtienen las ecuaciones cosmológicas de Friedmann-LeMaitre, que dictan la evolución del universo a gran escala, tanto en el espacio como en el tiempo y que nos describen un universo en continua expansión en contraste con el modelo del Estado Estacionario propuesto por Freddy Hoyle [4, 5].

Estas ecuaciones, incluyendo a la constante cosmológica Λ en ellas, suelen expresarse como:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \tag{2.60}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3}\left(\rho + {}^{3P}/_{c^2}\right) \tag{2.61}$$

Nótese aquí que una presión positiva desacelera la expansión, igual que la densidad.

La métrica de Robertson-Walker, así como las ecuaciones de Friedmann-LeMaitre, describen lo que se conoce como el Modelo Friedmann-Robertson-Walker (FRW), que es el modelo del universo de la cosmología estándar aceptado actualmente, en vista a las numerosas pruebas observacionales que nos da continuamente la astronomía moderna hasta el día de hoy [4, 5, 6, 16].

Luego:

A partir de estas dos ecuaciones se deduce una tercera ecuación diferencial.

$$\dot{\rho} = -3H\left(\rho + {}^{P}/_{c^2}\right) \tag{2.62}$$

Resolviendo esto, se llega a obtener finalmente:

$$a(t) \propto e^{Ht}$$

(2.63)

Con:

$$H = constante$$

(2.64)

Así era el universo durante la inflación y así parece ser que empieza a serlo también ahora: un universo dominado por la constante cosmológica [4, 5, 6, 16].

El factor de escala $a(t)$ varía, por tanto, con el tiempo, a no ser que se ajusten los parámetros, como hizo Einstein en un principio, para forzar un universo estático: existe una solución a las ecuaciones cosmológicas de Friedmann-LeMaitre con ρ, P y Λ positivos correspondientes a un universo con a finito y constante, con curvatura positiva (cerrado y, por tanto sin bordes) y densidad constante, fijadas ambas por las constantes universales G y Λ. Einstein desechó este modelo de universo ante la evidencia observacional de la expansión de Hubble en los años 1920, eliminando la constante cosmológica ($\Lambda = 0$) que ya no era necesaria [4, 6]. Sin embargo, este parámetro puede no ser nulo (aunque sí sumamente pequeño) y de hecho parece no serlo a decir de las observaciones recientes realizadas en el año de 1998 de supernovas muy distantes de tipo Ia [2, 7, 24].

Expansión acelerada del universo y papel de la constante cosmológica dentro de las teorías clásicas del vacío energético

En relatividad general, la constante cosmológica es una constante propuesta por Einstein como una modificación de su ecuación original del campo gravitatorio para conseguir una solución que diera un universo estático. Einstein, luego, rechazó esta idea una vez que el corrimiento al rojo observado por Edwin Hubble demostró que el universo no era estático [4, 6]. Sin embargo, el descubrimiento de la aceleración cósmica a fines de la década de 1990 ha renovado el interés en la constante cosmológica [2, 16].

La constante cosmológica Λ aparece en las ecuaciones de campo de la relatividad general como:

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} g_{\mu v} R + \Lambda g_{\mu v} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu v} \tag{2.15}$$

Cuando Λ es cero, estas se reducen a la ecuación tradicional de la relatividad general de 1915. Las observaciones astronómicas muestran que su valor satisface.

$$\Lambda \leq 10^{-46}\ Km^{-2}$$

O también:

$$\Lambda \sim 10^{-35} s^{-2}$$

$$\Lambda \sim 10^{-52} m^{-2}$$

Aunque el propio Einstein introdujo la constante cosmológica como un término independiente en las ecuaciones de campo gravitatorio, de hecho, este puede ser interpretado como una energía o presión negativa del vacío [21].

Se supone que el vacío viene representado por un tensor de energía-momentum dado por:

$$T_{\mu v}^{(VAC)} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu v} \tag{2.65}$$

La constante cosmológica es, entonces, equivalente a una densidad de energía negativa intrínseca del vacío [3,21]. Esto se puede bosquejar en la siguiente expresión:

$$\rho_{vac} = -\frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} \tag{2.66}$$

Donde aquí la presión relativista asociada es negativa.

$$P = \rho_{vac} c^2 \tag{2.67}$$

Con esto se obtiene y se asegura que:

$$P < 0 \tag{2.68}$$

Una constante cosmológica positiva resulta en una densidad de energía negativa y en una presión también negativa. La expansión acelerada del universo podría ser atribuida a la presencia de esta **energía del vacío**, denominada por muchos especialistas como **energía oscura** cuyo valor estimado es diferente de cero [16,21].

2.5.9 Estructura causal del agujero negro de Schwarzschild

En unidades naturales con $c = G = 1$:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.69}$$

Con:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2 \tag{2.70}$$

La forma de las geodésicas radiales nulas, esta es la trayectoria de los rayos de luz en el espacio-tiempo, se obtienen tomando $ds^2 = 0$ y $d\Omega^2 = 0$. Con esto, en coordenadas esféricas, estas son:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \tag{2.71}$$

Cuando, $r \to 2M$, $\frac{dt}{dr} \to \pm\infty$ lo cual significa que los conos de luz se estrechan cada vez más a medida que nos acercamos al horizonte. Para evitar este tipo de inconsistencias, se transforma la métrica a las coordenadas de Eddington-Finkelstein (E-F) [50]:

$$v = t + f(r) \quad \text{(coordenadas de E-F entrantes)}$$

$$u = t - f(r) \quad \text{(coordenadas de E-F salientes)}$$

Así tenemos que, en las coordenadas de E-F, entrantes:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \tag{2.72}$$

Para las trayectorias tipo luz o tipo tiempo tenemos que:

$$ds^2 \leq 0$$

Entonces:

$$2dvdr \leq 0$$

En las coordenadas de E-F salientes:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2 \tag{2.73}$$

Para las trayectorias tipo luz o tipo tiempo ($ds^2 \leq 0$) se tiene en cambio:

$$2dudr \geq 0$$

Expresando ahora la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de E-F globales.

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dvdu + r^2 d\Omega^2 \tag{2.74}$$

Donde:

$$f(r) = r + 2M \ln\left|\frac{2M - r}{2M}\right| \tag{2.75}$$

Con:

$$f(r) = \frac{1}{2}(v - u) \tag{2.76}$$

Con esto, obtenemos las coordenadas de Kruskal.

$$V = e^{v/4M} \tag{2.77}$$

$$U = -e^{-u/4M} \tag{2.78}$$

De este modo, el elemento de línea ds^2 para la métrica de Schwarzschild en las coordenadas de Kruskal es:

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dV dU + r^2 \mathrm{d}\Omega^2 \tag{2.79}$$

Donde además se define implícitamente que:

$$UV = -\left(\frac{r - 2M}{2M}\right) e^{r/2M} \tag{2.80}$$

Por otro lado, es más sencillo describir el comportamiento de la estructura causal en términos de un sistema (T, X, θ, ϕ) donde T y X se hacen llamar coordenadas ‘’como de tiempo’’ y ‘’como de espacio’’, respectivamente:

$$T = \frac{1}{2}(V - U) \tag{2.81}$$

$$X = \frac{1}{2}(V + U) \tag{2.82}$$

De esta forma, el elemento de línea para Schwarzschild se expresa ahora como:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M}(-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2 \tag{2.83}$$

Reemplazando esto en la definición implícita de UV obtenemos:

$$X^2 - T^2 = \left(\frac{r - 2M}{2M}\right) e^{r/2M} \tag{2.84}$$

De dónde podemos observar los siguientes casos:

i) Si $r = 2M$:

$$T = \pm X \tag{2.85}$$

Las geodésicas radiales nulas corresponden a líneas rectas cuya inclinación es de 45^0 en el diagrama de Kruskal (T, X). Los diagramas de Kruskal (V, U) ó (T, X) contienen 4 regiones bien definidas:

Una región I que viene a ser el exterior del agujero negro, o sea aquella que se encuentra fuera de su horizonte de sucesos y, por lo tanto, donde $r > 2M$.

La región II, que es el interior del agujero negro, dado que aquí $r < 2M$. Sabemos que la región II y I se encuentran causalmente completamente desconectadas entre sí. Esto significa que absolutamente nada, ninguna clase de partícula (con o sin masa en reposo), ni siquiera las señales luminosas puede viajar de la región II y llegar a la región I y, en consecuencia, tampoco la información.

Una región III que no es otra cosa que el inverso temporal de la región II y que es denominada ‘’Agujero Blanco’’, debido a que esta región sí se encuentra conectada causalmente con la región I y en consecuencia tanto materia como información pueden fluir de esta región III a la región I.

Y, por último, la región IV que viene a ser el inverso temporal de la región I y, por lo tanto, ambas regiones I y IV se encuentran causalmente desconectadas [50, 51].

ii) Si $r = CTE \neq 2M$:

$$X^2 - T^2 = CTE \tag{2.86}$$

En este caso, las geodésicas que establecen y que determinan la conexión causal entre los distintos puntos del espacio-tiempo son hipérbolas [51].

iii) Mientras que sí, $t = CTE$, entonces, las superficies corresponden a líneas rectas.

$$\frac{X}{T} = tangh\left(\frac{t}{4M}\right) \tag{2.87}$$

2.5.10 Estructura causal del agujero negro de Reissner-Nordstrom

En unidades gaussianas y naturales [53]:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.88}$$

En Reissner-Nordstrom se presentan 3 casos diferentes:

i) Si $M < |Q|$ no existen soluciones reales de r, esto significa que r_+ y r_- no son reales. Esto implica que no existirá horizonte de sucesos que envuelva o ''proteja'' causalmente a la singularidad, por lo que esta será una singularidad desnuda, de modo tal que cualquier partícula o señal que contenga información podrá abandonar la singularidad e influir causalmente en el exterior del agujero negro de RN, pudiéndose con ello establecer una conexión causal entre las regiones II y I. Esto, como sabemos, se encuentra prohibido por el principio de censura cósmica y, por lo tanto, este caso es considerado físicamente imposible. Este caso es llamado CASO SOBREEXTREMAL y queda descartado [51].

ii) Si $M = |Q|$ existirán 2 soluciones reales, iguales o degeneradas de r. Con esto $r_+ = r_-$ y con ello existirá tan sólo un único horizonte de sucesos ''protegiendo'' o mejor dicho,

aislando causalmente a la singularidad de RN. Tal caso se denomina CASO EXTREMAL [51].

iii) Si $M > |Q|$ existirán 2 soluciones reales distintas de r. Con esto, el agujero negro de RN presentará 2 horizontes de sucesos de radios r_+ y r_- que lo protegerán y aislarán causalmente del resto del universo. El horizonte de eventos de radio r_- se llama horizonte de Cauchy y viene a ser el horizonte interno del agujero negro de RN, mientras que el horizonte de radio r_+ es el horizonte externo del agujero negro de RN. Cabe mencionar que, debido a la alta simetría esférica que presenta la métrica de Reissner-Nordstrom (RN), ambos horizontes vienen a ser dos superficies esféricas concéntricas de radios r_- y r_+, respectivamente, en cuyo centro se encuentra el agujero negro o singularidad de RN. Ambos tipos de horizonte conforman el CASO SUBEXTREMAL [51].

En este último caso, tenemos que:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \tag{2.89}$$

Con esto, el elemento de línea de RN puede expresarse como:

$$ds^2 = -\frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.90}$$

Las geodésicas radiales nulas son de la forma:

$$t = \pm \left(r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \right) \ln|r - r_+| - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln|r - r_-| + CTE \tag{2.91}$$

Con $\pm$ para las geodésicas salientes y entrantes, respectivamente.

Luego, se obtiene que:

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{(r - r_+)(r - r_-)}}{r} \Delta t$$

(2.92)

$\Delta\tau$ es el periodo de una señal luminosa enviada por un observador que se encuentra justo en el horizonte externo del agujero negro de RN (cuando $r = r_+$) medido por él mismo y Δt es el periodo de la misma señal medido por otro observador ubicado muy lejos de dicho horizonte (cuando $r \to \infty$), siendo $\Delta\tau$ siempre finito.

Si la señal es enviada desde $r = r_+$ el periodo Δt medido por el observador que se encuentra lejos del horizonte, en el infinito, será $\Delta t = \infty$. Este resultado significa que dicho observador no recibirá la señal (y en consecuencia la información) en un tiempo finito y, por lo tanto, jamás recibirá la señal (información) enviada por el observador que se encuentra ubicado en el horizonte externo [51].

Ahora, empleando las coordenadas de Eddington-Finkelstein [50]:

$$v = t + f(r)$$

$$u = t - f(r)$$

Donde aquí:

$$f(r) = r + \frac{1}{2k_+}\ln\left(\frac{|r - r_+|}{r_+}\right) + \frac{1}{2k_-}\ln\left(\frac{|r - r_-|}{r_-}\right) + CTE \tag{2.93}$$

$$k_\pm = \frac{r_\pm - r_\mp}{2r_\pm^2} \tag{2.94}$$

$f(r)$ es la coordenada de Regge-Wheeler cuyo rango es $-\infty < f(r) < \infty$

Se obtiene [50]:

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2}dvdu + r^2 d\Omega^2 \tag{2.95}$$

Con:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + Q^2$$

Luego, mediante la relación:

$$f(r) = \frac{1}{2}(v - u) \tag{2.96}$$

Obtenemos las coordenadas de Kruskal-Szekeres [50]:

$$V^{\pm} = e^{k_{\pm} v} \tag{2.97}$$

$$U^{\pm} = -e^{-k_{\pm} u} \tag{2.98}$$

Así para (V^+, U^+, θ, ϕ) tenemos [50]:

$$dV^+ = k_+ V^+ dv$$

$$dU^+ = -k_+ U^+ du$$

Y mediante:

$$V^+ U^+ = -e^{k_+ (v-u)} \tag{2.99}$$

ó empleando:

$$V^+ U^+ = -e^{2k_+ r} \left(\frac{r - r_+}{r_+}\right) \left(\frac{r - r_-}{r_-}\right)^{k_+/k_-} \tag{2.100}$$

Con esto, el elemento de línea resulta:

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{k_+^2} \frac{e^{2k_+ r}}{r^2} \left(\frac{r_-}{r - r_-}\right)^{\frac{k_+}{k_-} - 1} dV^+ dU^+ + r^2 d\Omega^2$$

(2.101)

Similarmente para (V^-, U^-, θ, ϕ) obtenemos [50]:

$$V^- U^- = -e^{-2k_- r}\left(\frac{r_- - r}{r_-}\right)\left(\frac{r_+ - r}{r_+}\right)^{k_-/k_+} \tag{2.102}$$

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{k_-^2}\frac{e^{-2k_- r}}{r^2}\left(\frac{r_+}{r_+ - r}\right)^{\frac{k_-}{k_+}-1} dV^- dU^- + r^2 d\Omega^2 \tag{2.103}$$

2.5.11 Métrica de De Sitter

La métrica de De Sitter es la solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el espacio vacío, incluyendo en ellas una constante cosmológica positiva. Aquí la geometría del espacio-tiempo es causada por una densidad de energía constante y positiva (dado que $\Lambda > 0$), proporcional a dicha constante cosmológica, contenida dentro del mismo espacio vacío [54]:

$$\rho = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \tag{2.104}$$

Donde:

$$\forall\, \rho = cte$$

$$\rho > 0$$

$$\forall\, \Lambda > 0$$

Con ecuación de estado que define a la presión P del fluido de energía del vacío, denominada también ‘’energía oscura’’, como [54]:

$$P = -\rho \tag{2.105}$$

Entonces:

$$P < 0 \tag{2.106}$$

Esto significa que el propio espacio vacío ejerce una presión negativa sobre la materia ordinaria (que es la constituyente de galaxias), mediante esta densidad de energía ρ que llamamos densidad de energía del vacío o densidad de energía oscura, contrarrestando la fuerza de atracción gravitatoria y obligando al cosmos a expandirse de forma acelerada, dado que dicha presión negativa P ejercida producirá una aceleración [51, 54].

Por otro lado, el tensor de energía-momento asociado con esta densidad de energía del vacío será [54]:

$$T_{\mu\nu} = \rho g_{\mu\nu} \tag{2.107}$$

Satisfaciendo la ley de conservación:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \tag{2.108}$$

Para el espacio vacío en la ecuación de campo tenemos:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.109}$$

Se considera aquí:

$$T_{\mu\nu} = 0 \tag{2.110}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \tag{2.111}$$

$$g^{\mu\lambda} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\lambda} g_{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\lambda} g_{\mu\nu} = 0$$

(2.112)

$$R_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{2} R \delta_{\nu}^{\lambda} + \Lambda \delta_{\nu}^{\lambda} = 0 \tag{2.113}$$

Haciendo $\lambda = \nu$:

$$R_{\nu}^{\nu} - \frac{1}{2} R \delta_{\nu}^{\nu} + \Lambda \delta_{\nu}^{\nu} = 0 \tag{2.114}$$

Con esto, la curvatura escalar de Ricci resulta:

$$R = 4\Lambda \tag{2.115}$$

Y reemplazando este resultado en (2.111) se obtiene:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \tag{2.116}$$

La última expresión es la ecuación de campo de Einstein en el vacío, incluyendo en ella la constante cosmológica [51].

Finalmente, la métrica de De Sitter es [54]:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.117}$$

Donde:

$$\forall\ \Lambda = CTE$$

$$\Lambda > 0$$

2.5.12 Métrica de Schwarzschild-De Sitter

Para el caso específico de un vacío esféricamente simétrico, esto es, donde las componentes no nulas del tensor de energía-momento obedezcan la condición [51, 52, 54]:

$$T_t^t = T_r^r \tag{2.118}$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi \tag{2.119}$$

La métrica de Schwarzschild-De Sitter viene definida como [54]:

$$ds^2 = -c^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.120}$$

Donde:

$$\forall\ \Lambda = CTE$$

$$\Lambda > 0$$

2.5.13 Acoplamiento de un campo escalar real al espacio-tiempo plano

La forma más sencilla y elemental de densidad lagrangiana L que es capaz de describir a un campo escalar real libre ϕ en el espacio-tiempo plano de Minkowski posee la forma [39]:

$$L = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{2.121}$$

El tratarse de un campo escalar real implica que describirá a partículas sin carga eléctrica, es decir, a partículas neutras de masa m [39, 40]. A tal densidad se le puede adicionar un potencial $V(\phi)$ de modo tal que dicho potencial represente la contribución de otros campos escalares a la interacción.

$$L = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) \tag{2.122}$$

Con esto, la acción S que nos describirá el acoplamiento de este campo escalar ϕ en el espacio-tiempo plano de Minkowski vendrá dada por:

$$S(\phi, \partial_\mu\phi) = \int d^4x L(\phi, \partial_\mu\phi) \tag{2.123}$$

$$S(\phi, \partial_\mu\phi) = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right] \tag{2.124}$$

Por el principio de mínima acción:

$$\delta S = 0 \tag{2.125}$$

Obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange en su forma covariante:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0 \tag{2.126}$$

Al reemplazar la densidad lagrangiana elemental en estas ecuaciones, se obtiene la ecuación de campo de Klein-Gordon (KG), que nos describe el comportamiento de campos escalares reales libres, para partículas libres de masa m y sin spin, en el espacio-tiempo plano [39, 40, 55]:

$$\partial^\mu\partial_\mu\phi + m^2\phi = 0$$

$$(\blacksquare + m^2)\phi = 0 \tag{2.127}$$

Con ■ el opreador D' Alambertiano.

Si reemplazamos la segunda forma de la densidad lagrangiana, se obtiene:

$$(\blacksquare + m^2)\phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi} \tag{2.128}$$

2.5.14 Acoplamiento de un campo escalar real al espacio-tiempo curvo

Ahora, si buscamos estudiar cómo se puede acoplar un campo escalar real ϕ a un espacio curvo, puesto que la gravedad no es otra cosa más que la manifestación de la curvatura o deformación del espacio-tiempo, para poder acoplar un campo escalar a la gravedad tendremos que reescribir la densidad lagrangiana L y la acción S en una forma covariante. Sabemos que en el espacio-tiempo plano de Minkowski la acción es una invariante de Poincaré; para poder hacer que la acción S sea compatible con la relatividad general, esta tendrá que ser covariante general. Es decir, tendrá que satisfacer el Principio de Covarianza Generalizada de la relatividad general para con ello ser invariante ante cualquier tipo de transformación de coordenadas arbitraria que en general se le efectúe. Para lograr esto, se sustituye la métrica de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$ por la métrica general $g^{\mu\nu}$ y a las derivadas ordinarias ∂_μ por la derivada covariante ∇_μ [39, 40, 41]. Con esto, la acción S en su forma covariante resulta:

$$S(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2\right] \tag{2.129}$$

Notar aquí que adicionalmente se debe sustituir el elemento de volumen cuadridimensional del espacio-tiempo plano d^4x por $d^4x\sqrt{-g}$ el elemento de volumen covariante del espacio-tiempo curvo, con $g = \det(g_{\mu\nu})$. Por otro lado, sabemos que las derivadas covariantes de primer orden sobre funciones escalares equivalen a sus derivadas ordinarias [40, 41].

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi \tag{2.130}$$

Con estos cambios, la acción covariante S resulta:

$$S(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \tag{2.131}$$

Esta acción escrita en su forma covariante es llamada acción de acoplamiento mínimo, dado que nos va a describir la mínima interacción posible entre un campo escalar real ϕ y un campo gravitacional definido por la forma general de la métrica contenida en el tensor métrico $g^{\mu\nu}$ como [41]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.132}$$

Con esto, la densidad lagrangiana resulta:

$$L(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \tag{2.133}$$

A esta densidad podemos agregarle términos adicionales proporcionales a $R\phi^2$, de tal modo, que entre en juego la curvatura escalar de Ricci, así tenemos que:

$$L(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \xi R \phi^2 \tag{2.134}$$

Con esto se logra el acoplamiento conforme que, si bien viola el principio de equivalencia fuerte, que establece que todos los efectos gravitacionales desaparecen en un sistema de referencia inercial local, sin embargo, en esa localidad aún puede existir una verdadera curvatura efectiva del espacio-tiempo determinada por el escalar de curvatura de Ricci R [40, 41, 42]. En el acoplamiento conforme, la acción covariante S, por tanto, adopta la forma:

$$S(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \xi R \phi^2 \right] \tag{2.135}$$

Donde ξ es un parámetro constante y adimensional que viene definido en función de la dimensión del espacio D como:

$$\xi = \frac{D-2}{4(D-1)} \tag{2.136}$$

Así, para el espacio-tiempo $D = 4$, entonces:

$$\xi = \frac{1}{6}$$

Esta última acción S nos describe la forma más sencilla de acoplamiento conforme. Tal acoplamiento implicará que tanto la ecuación de movimiento de la que de ella se derive, así como el propio campo escalar ϕ serán invariantes ante una transformación conforme [40,41], es decir, ante una transformación de la métrica $g^{\mu\nu}$ tal que ésta satisfaga que:

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = \Omega^2(x^\mu) g_{\mu\nu} \tag{2.137}$$

Donde $\Omega^2(x^\mu)$ es el llamado Factor Conforme.

Sometiendo ahora la densidad lagrangiana L de acoplamiento conforme obtenida a las ecuaciones de Euler-Lagrange en su forma covariante, obtenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -\sqrt{-g} m^2 \phi - \sqrt{-g} \xi R \phi$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$$

$$\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi\right]$$

Con esto:

$$-\sqrt{-g} m^2 \phi - \sqrt{-g} \xi R \phi - \partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi\right] = 0$$

Pero:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right] = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi \tag{2.138}$$

$$\partial_\mu\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right] = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi$$

Reemplazando:

$$\sqrt{-g}m^2\phi + \sqrt{-g}\xi R\phi + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = 0$$

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + m^2\phi + \xi R\phi = 0$$

$$\left[g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu + (m^2 + \xi R)\right]\phi = 0 \tag{2.139}$$

Donde:

$g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu = \blacksquare_c$ es el operador D' Alambertiano en el espacio-tiempo curvo, es decir, escrito en su forma covariante. Con esto, la ecuación de campo final que se obtiene es una forma generalizada de la ecuación de Klein-Gordon para el espacio-tiempo curvo [41,42]:

$$(\blacksquare_c + m^2 + \xi R)\phi = 0 \tag{2.140}$$

En conclusión, el proceso físico descrito hasta aquí consiste en tomar un campo escalar real libre ϕ (es decir, aquel que describe partículas con masa m pero sin carga eléctrica) y cuantizarlo dentro de un campo gravitacional (esto es, cuantizarlo en un espacio-tiempo curvo). Posteriormente, según sea el tipo de métrica de espacio curvo que se esté considerando, se procede a la cuantización de dicho campo escalar ϕ en interacción con el campo gravitatorio mencionado mediante la resolución de la ecuación diferencial obtenida [39, 40].

Para lograr tal cuantización se pueden emplear muchos métodos dentro de la teoría cuántica de campos (QFT), siendo los más potentes y mayormente utilizados la Cuantización Canónica y el

método de las integrales de camino de Feymann [41,42]. Dado que no es objetivo del presente trabajo lograr la cuantización referida en términos de una auténtica teoría cuántica de campos, no se tratarán en detalle ni se abordarán aquí ninguno de los dos métodos.

2.6 La Quintaesencia

En la actualidad, el universo se encuentra sometido a una expansión acelerada, debido a la presencia en las entrañas mismas del espacio *vacío* de una densidad de energía de evidente efecto repulsivo o ‘’antigravitacional’’, debido esto a que dicha entidad –hasta el momento desconocida- ejerce sobre la materia ordinaria una presión negativa. El primer modelo natural que se *ideó* para abordar su descripción precisa fue asociarla directamente con la constante cosmológica Λ, dando como resultado que la densidad de energía mencionada es constante y positiva para $\Lambda > 0$, siendo esto consistente con la homogeneidad que impone el espacio a escalas cósmicas, obteniéndose además en este régimen en donde domina dicha constante cosmológica, que el parámetro de estado w siempre debía ser constante e igual a -1. Sin embargo, observaciones recientes de mediciones precisas de la luminosidad de supernovas muy lejanas y fluctuaciones halladas en la radiación de fondo de microondas sugieren que, si bien en tal entidad, a la que se le ha dado el nombre de energía oscura, posee una densidad constante a escalas cósmicas (siendo esto consistente, como se dijo, con el Principio Cosmológico que impone la homogeneidad e isotropía en el universo), no obstante, debe de variar muy lentamente con el tiempo. Ante este tipo de descubrimientos, relativamente recientes, surgieron los modelos de campos escalares para explicarla; dentro de los cuales la manifestación y existencia de tal energía oscura como una constante cosmológica Λ de densidad ρ_Λ constante y positiva, pero cuya presión P_Λ, a pesar de ser igualmente constante, resulta en cambio negativa –explicando con ello la fase de aceleración cósmica moderada actual- viene a ser tan sólo un caso especial dentro del universo de distintas posibilidades que ofrecen las teorías de campos escalares. En los modelos de campos escalares, la energía oscura se encuentra definida por la existencia de un campo escalar φ del cual emanan todas sus propiedades. A tal campo escalar se le ha dado el nombre de Quintaesencia [59]. La quintaesencia obedece la homogeneidad del espacio a escalas cosmológicas de distancia, siendo, en virtud a esto, función explícita únicamente del tiempo [59, 61, 62], así tenemos que:

A escalas cosmológicas de distancia:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(t)$$

El campo escalar de Quintaesencia puede ser escrito por la siguiente densidad lagrangiana:

$$L_q = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \tag{2.141}$$

Donde L_q satisface el principio de mínima acción:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}R + L_q\right)$$

Obteniéndose de la definición del tensor de energía-momento canónico θ_ν^μ [63]:

$$\theta_\nu^\mu = \frac{\partial L_q}{\partial(\partial_\mu\varphi)}(\partial_\nu\varphi) - \delta_\nu^\mu L_q \tag{2.142}$$

$$T_{\mu\nu}^{(q)} = (\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - g_{\mu\nu}L_q$$

$$T_{\mu\nu}^{(q)} = (\partial_\mu\varphi)(\partial_\nu\varphi) - g_{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\varphi\partial_\rho\varphi - V(\varphi)\right] \tag{2.143}$$

En la teoría clásica de campos se asume que el campo escalar de quintaesencia φ posee la forma de un fluido perfecto [60]. Con esto, comparando la definición anteriormente dada con la del tensor de energía-momento del fluido perfecto, tenemos que:

$$T_{\mu\nu}^{(fluido)} = (\rho_q + P_q)\mu_\mu\mu_\nu + P_q g_{\mu\nu} \tag{2.144}$$

De la igualdad de ambos tensores se obtiene que:

$$\rho_q = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi + V(\varphi) \tag{2.145}$$

$$P_q = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - V(\varphi) \tag{2.146}$$

Dado que el campo escalar de quintaesencia cosmológico (a grandes escalas espaciales) es homogéneo, esto implica, como se indicó, que no dependerá explícitamente de las coordenadas de posición (r, θ, ϕ) [59,60].

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi(t)$$

Con esto, la densidad de energía de quintaesencia ρ_q y la presión isotrópica asociada con dicho campo escalar de quintaesencia P_q son homogéneas y adoptan la forma:

$$\rho_q = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \tag{2.147}$$

$$P_q = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \tag{2.148}$$

Donde se cumple la ecuación de estado [59,60]:

$$P_q = w_q \rho_q \tag{2.149}$$

De esto se deduce que el parámetro de estado de quintaesencia w_q, a escalas cósmicas de distancia, presenta una evolución temporal lenta [59, 60, 61, 62].

$$w_q(t) = \frac{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)}{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)} \tag{2.150}$$

De la analogía con el fluido perfecto, podemos obtener la ecuación de continuidad del campo escalar de quintaesencia; de este modo, con la conservación del tensor de energía-momento, obtendremos la siguiente ecuación de continuidad [59,60]:

$$T^{\mu\nu}_{(q);\nu} = 0 \tag{2.151}$$

$$\dot{\rho_q} + 3H\left(\rho_q + P_q\right) = 0 \tag{2.152}$$

Y finalmente, del mismo modo se obtiene la ecuación de campo para la quintaesencia [59, 60]:

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} = 0 \tag{2.153}$$

De la expresión (2.150) podemos despejar el potencial escalar $V(\varphi)$ de esta quintaesencia isotrópica y homogénea, en términos de un parámetro de estado con evolución temporal $w_q(t)$ [59] como:

$$V(\varphi) = \frac{\left(1 - w_q(t)\right)}{2\left(1 + w_q(t)\right)}\dot{\varphi}^2 \tag{2.154}$$

Asimismo, se han planteado diferentes formas para definir al potencial escalar de la quintaesencia $V(\varphi)$, según sea la fase cosmológica en la que se encuentre el universo, así tenemos que:

Para la fase del universo temprano, en donde dominaba la inflación cósmica, los especialistas sugieren plantear un potencial escalar de forma exponencial [61, 62] dado por:

$$V(\varphi) = V_0 e^{-\lambda\varphi} \tag{2.155}$$

Con V_0 constante y λ es una constante positiva.

En cambio, para el régimen cosmológico actual, en donde domina la constante cosmológica Λ, se suele definir y emplear un potencial escalar constante [61,62]:

$$V(\varphi) = V_0 \tag{2.156}$$

Con V_0 constante.

Por otro lado, es posible modificar los espacios-tiempos curvos estacionarios y con alta simetría esférica que sean generados por distribuciones igualmente esféricamente simétricas y en reposo, que se encuentren descritos por las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, que sean de la forma general estándar:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2$$

Pudiéndose de este modo modificar, o más bien generalizar, las soluciones para los agujeros negros de Schwarzschild, RNdS y de RNAdS, incluyendo dentro de éstas a la quintaesencia. A este respecto, destacan los resultados referentes a dichas soluciones modificadas, los trabajos de Kiselev, Ghaffarnejad y Wei Yi-Huan [56, 57, 58]:

Así, el espacio-tiempo de Schwarzschild queda modificado por la presencia de la quintaesencia [56] como:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2M}{r} - \sum_n \left(\frac{r_n}{r}\right)^{3w_n+1}\right] dt^2 - \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2M}{r} - \sum_n \left(\frac{r_n}{r}\right)^{3w_n+1}\right]} - r^2 d\theta^2 - r^2 sen^2\theta d\phi^2 \tag{2.157}$$

De manera similar, el acoplamiento de la quintaesencia al espacio-tiempo curvo en el exterior de los agujeros negros de RNdS y de RNAdS nos dará:

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \left(\frac{r_q}{r}\right)^{3w_q+1}\right] dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \left(\frac{r_q}{r}\right)^{3w_q+1}\right]} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2 \tag{2.158}$$

Que corresponde al elemento de línea del agujero negro de RNdS-Quintaesencia.

$$ds^2 = -\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{a}{r^{3w_q+1}}\right]dt^2 + \frac{dr^2}{\left[1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{a}{r^{3w_q+1}}\right]} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2 \tag{2.159}$$

Que corresponde al elemento de línea del agujero negro de RNAdS-Quintaesencia.

Donde:

a y r_q son constantes de normalización con dimensiones de longitud. En el contexto de estas soluciones se considera que el campo escalar de quintaesencia es inhomogéneo y, por lo tanto, variable respecto a la distancia radial r. Esto implica que el parámetro de estado w_q sea *constante*, quedando bien definido para:

$$-1 < w_q < -\frac{1}{3}$$

Estas soluciones son obtenidas al considerar un vacío esféricamente simétrico, esto implica que las componentes del tensor de energía-momento correspondiente a la quintaesencia obedecen la simetría [54]:

$$T_t^t = T_r^r$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi$$

Siendo entonces las componentes diagonales no nulas del tensor proporcionales a la densidad de energía del campo escalar de quintaesencia ρ_q [54, 56, 57]:

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q \tag{2.160}$$

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{1}{2}\rho_q\left(3w_q + 1\right) \tag{2.161}$$

Donde la densidad de energía de quintaesencia ρ_q queda definida mediante:

$$\rho_q(r) = -\frac{a}{2}\frac{3w_q}{r^{3(1+w_q)}} \tag{2.162}$$

Donde w_q es el parámetro de estado y a es una constante de normalización con dimensiones de longitud, relativa a la densidad de quintaesencia ρ_q.

Sin embargo, los últimos trabajos propuestos por Visser (y una cantidad creciente de investigadores) [64, 65] nos muestran que las soluciones halladas por Kiselev [56] no representan agujeros negros quintaesencia. Según estos autores [64, 65], el agujero negro hallado por Kiselev es un modelo de características físicas muy interesantes, pero que no puede corresponder a la descripción de

un espacio-tiempo curvo modificado por la quintaesencia, debido a que el campo escalar del que proviene dicha solución, por definición, no puede tratarse de la quintaesencia.

En primer lugar, la solución hallada por Kiselev proviene de considerar un vacío esféricamente simétrico ocupado por un cierto fluido, caracterizado por una cierta densidad no homogénea $\rho_q(r)$ y un parámetro de estado w_q (el cual considera constante) que definen las componentes no nulas de la diagonal de un tensor de energía-momento que, como se puede notar claramente [56,57], no corresponden –según estos autores- a un fluido perfecto.

De modo tal que, en el modelo de Kiselev, el campo escalar considerado es descrito por un fluido anisotrópico, lo cual queda claramente establecido en que las componentes de dicho tensor son todas proporcionales a una densidad de dependencia radial $\rho_q(r)$, y en consecuencia, inhomogénea y no isotrópica. En contraste con esto, la cosmología ‘’standart’’ nos define al campo escalar de quintaesencia de manera equivalente o análoga a un fluido perfecto, el cual se asume como isotrópico y homogéneo, de modo tal que las componentes de dicho tensor de energía-momento sólo posean dependencia temporal y no dependencia de la distancia r.

Por otro lado, desde el punto de vista cosmológico ortodoxo, el campo de quintaesencia debe ser siempre homogéneo. Esto implica que no podrá poseer ninguna dependencia explícita con coordenada de posición alguna (r, θ, ϕ), sino únicamente poseer evolución temporal, tal que $\varphi = \varphi(t)$ y $w_q = w_q(t)$; de tal forma que respete la homogeneidad e isotropía del Principio cosmológico a grandes distancias. En cambio, la quintaesencia del agujero negro de Kiselev deja de ser en principio homogénea, al poseer una dependencia única y exclusivamente radial y, por lo tanto, corresponde desde este punto de vista a un campo escalar anisotrópico e inhomogéneo, contradiciendo con ello las propiedades fundamentales que debería poseer todo campo de quintaesencia según la cosmología actual generalmente aceptada.

Así lo detallan tanto cualitativa, como matemáticamente, Visser, Boomserm y Ngampitipan [64,65], encontrándose, además, que en casi todos los casos la solución hallada por Kiselev viola la condición de energía nula (NEC).

De esto se puede concluir que los agujeros negros de Kiselev incorporan una quintaesencia φ (campo escalar) en los espacios-tiempos curvos generados por distribuciones estáticas y esféricamente simétricas, tales como los de Schwarzschild, RN, RNdS y de RNAdS, modificándolas, pero dichas soluciones no podrían corresponder a verdaderas soluciones tipo quintaesencia debido a que dicho campo no sería propiamente la quintaesencia, puesto que no sería consistente –de acuerdo a lo propuesto por estos autores- con las propiedades de isotropía y homogeneidad que debería tener todo fluido perfecto que satisfaga el Principio cosmológico, que fuera capaz de describirla y representarla. Puesto que el fluido quintaesencia propuesto por Kiselev, más que un fluido perfecto, sería un tipo de fluido en esencia anisótropo e inhomogéneo [56, 57, 58].

CAPÍTULO 3
LA SOLUCIÓN DE REISSNER-NORDSTROM-DE SITTER

Se tiene una distribución continua de materia cargada esféricamente simétrica, cuya masa total es M de carga eléctrica total Q, la cual se encuentra ubicada en el vacío y permanecerá en reposo. Dicha esfera irradiará un campo eléctrico $\vec{E}$, el cual –debido a las propiedades de simetría esférica señaladas- será de carácter central, esto es, tan sólo será de dirección y de dependencia radial, por lo que será típicamente Coulombiano.

Asimismo, dicha distribución generará un campo gravitacional estacionario y débil. Este campo gravitatorio débil quedará definido en el primer orden de perturbación como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

Donde:

$g_{\mu\nu}$ componente del tensor métrico general.

$\eta_{\mu\nu}$ componente del tensor métrico de Minkowski.

$h_{\mu\nu}$ Perturbación tensorial.

Se considerará aquí que:

$\forall \ |h_{\mu\nu}| \ll 1$

Mientras que:

$|\eta_{\mu\nu}| \sim 1$

Por tratarse de un campo gravitacional estacionario implicará que todas las derivadas temporales de cualquier componente del tensor métrico se anularán. Es decir:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \tag{3.2}$$

Dado que dicha configuración posee simetría esférica, y puesto que además tal esfera permanecerá en reposo, esto implicará que la métrica que plantearemos aquí será una métrica diagonal. Con esto, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ se definirá aquí como una matriz diagonal 4x4.

Dado que dicha esfera permanecerá en reposo, esto significa que tanto su momento lineal como su momento angular serán nulos. Por lo tanto, no existirán densidades de corriente alguna, en consecuencia, el campo magnético $\vec{B}$ será nulo.

En todo el presente tratamiento se empleará la convención de signatura $(-,+,+,+)$.

Por último, se asumirá aquí una constante cosmológica Λ en las ecuaciones de campo de Einstein no nula y positiva, tal que:

$\forall\ \Lambda \neq 0, \Lambda = CTE, \Lambda > 0$

Puesto que se considerará el caso específico y parcial de una constante cosmológica $\Lambda > 0$, esto corresponderá en todo momento al caso especial de una métrica tipo De-Sitter.

Comenzaremos hallando la traza del tensor de energía-momento del campo electromagnético T.

El tensor de energía-momento del campo electromagnético $T^{\mu\nu}$ se define como:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.3}$$

Esto se puede reescribir como:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\beta\alpha} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.4}$$

$$g_{\lambda\nu}T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(g_{\lambda\nu}F^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}F_{\beta\alpha} - \frac{1}{4}g_{\lambda\nu}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

$$T^{\mu}_{\lambda} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}\delta^{\beta}_{\lambda}F_{\beta\alpha} - \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\lambda}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

$\beta = \lambda$:

$$T^{\mu}_{\lambda} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F_{\lambda\alpha} - \frac{1}{4}\delta^{\mu}_{\lambda}F_{\alpha\lambda}F^{\alpha\lambda}\right)$$

$\mu = \lambda$:

$$T^{\lambda}_{\lambda} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha} - \frac{1}{4}\delta^{\lambda}_{\lambda}F_{\alpha\lambda}F^{\alpha\lambda}\right)$$

$$T^{\lambda}_{\lambda} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha} - \frac{1}{4}F_{\alpha\lambda}F^{\alpha\lambda}\right)$$

Puesto que λ es un subíndice ‘’mudo’’ entonces, no perderemos generalidad si hacemos ahora $\lambda = \beta$ sólo en el segundo término de esta expresión. Así obtendremos que:

$$T_{\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.5}$$

Por otro lado, el tensor de campo electromagnético o tensor de Maxwell viene definido por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\nu}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\nu} \tag{3.6}$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\nu}A^{\mu} - \partial^{\mu}A^{\nu} \tag{3.7}$$

Donde, el tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ es anti-simétrico. Es decir:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

$$\partial_{\mu} = (\partial_0, \partial_i) = \left(\partial_0, \vec{\nabla}\right) = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \tag{3.8}$$

$$\partial^{\mu} = \left(\partial^0, \partial^i\right)$$

Con signatura $(-,+,+,+)$ tenemos:

$$\partial^0 = -\partial_0$$

$$\partial^i = \partial_i$$

$$\partial^{\mu} = (-\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \tag{3.9}$$

$$A^{\mu} = \left(A^0, A^i\right) = \left(\varphi, \vec{A}\right) = (\varphi, A_1, A_2, A_3) \tag{3.10}$$

$$A_\mu = (A_0, A_i)$$

$$A_0 = -A^0$$

$$A_i = A^i$$

$$A_\mu = (A_0, A_i) = \left(-A^0, A^i\right) = \left(-\varphi, \vec{A}\right) = (-\varphi, A_1, A_2, A_3) \tag{3.11}$$

Empleando la ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} x \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \tag{3.12}$$

Donde:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} x \vec{A} \tag{3.13}$$

Reemplazando (3.13) en (3.12):

$$\vec{\nabla} x \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} x \vec{A}\right) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} x \vec{E} + \vec{\nabla} x \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

$$\vec{\nabla} x \left(-\vec{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \tag{3.14}$$

Empleando la propiedad vectorial:

$$\vec{\nabla} x \vec{\nabla} \varphi = \vec{0} \tag{3.15}$$

Comparando (3.15) con (3.14):

$$\vec{\nabla} \varphi = -\vec{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{3.16}$$

Debido a que la distribución cargada permanece en reposo, esto implica que no existen densidades de corriente y, por lo tanto, el campo magnético $\vec{B}$ será nulo.

$$\vec{B} = \vec{0} \tag{3.17}$$

Reemplazando (3.17) en (3.13):

$$\vec{0} = \vec{\nabla} x \vec{A}$$

Entonces, necesariamente:

$$\vec{A} = \vec{0} \tag{3.18}$$

Con esto:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

En coordenadas esféricas, esto es:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{rsen\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\hat{\phi}\right)$$

Dado que este sistema posee grandes propiedades de simetría esférica, entonces es fácil notar que:

$$\varphi = \varphi(r)$$

Con esto:

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr}\hat{r}$$

$$E^2 = \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \tag{3.19}$$

Recordando la propiedad fundamental:

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 2(B^2 - E^2) \tag{3.20}$$

De la ecuación (3.17) sabemos que aquí $\vec{B} = \vec{0}$, entonces $B^2 = 0$. Con esto obtenemos:

$$F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -2E^2 \tag{3.21}$$

Luego:

Para $\lambda = 0$ en (3.5):

$$T_0^0 = \frac{1}{4\pi}\left(F^{0\alpha}F_{0\alpha} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

$$T_0^0 = \frac{1}{4\pi}\left(F^{00}F_{00} + F^{01}F_{01} + F^{02}F_{02} + F^{03}F_{03} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.22}$$

$$F^{00} = F_{00} = 0$$

$$F^{01} = -F_{01} = \frac{d\varphi}{dr}$$

$$F^{02} = F_{02} = 0$$

$$F^{03} = F_{03} = 0$$

Reemplazando valores en (3.22) obtenemos:

$$T_0^0 = -\frac{E^2}{8\pi} \tag{3.23}$$

Para $\lambda = 1$ en (3.5):

$$T_1^1 = \frac{1}{4\pi}\left(F^{1\alpha}F_{1\alpha} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

$$T_1^1 = \frac{1}{4\pi}\left(F^{10}F_{10} + F^{11}F_{11} + F^{12}F_{12} + F^{13}F_{13} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.24}$$

$$F^{10} = -F^{01} = -\frac{d\varphi}{dr}$$

$$F_{10} = -F^{10} = \frac{d\varphi}{dr}$$

$$F^{11} = F_{11} = 0$$

$$F^{12} = F_{12} = 0$$

$$F^{13} = F_{13} = 0$$

Reemplazando valores en (3.24), obtenemos:

$$T_1^1 = -\frac{E^2}{8\pi} \tag{3.25}$$

Para $\lambda = 2$ en (3.5):

$$T_2^2 = \frac{1}{4\pi}\left(F^{2\alpha}F_{2\alpha} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

$$T_2^2 = \frac{1}{4\pi}\left(F^{20}F_{20} + F^{21}F_{21} + F^{22}F_{22} + F^{23}F_{23} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.26}$$

$$F^{20} = F_{20} = 0$$

$$F^{21} = F_{21} = 0$$

$$F^{22} = F_{22} = 0$$

$$F^{23} = F_{23} = 0$$

$$T_2^2 = \frac{E^2}{8\pi} \tag{3.27}$$

Para $\lambda = 3$ en (3.5):

$$T_3^3 = \frac{1}{4\pi}\left(F^{3\alpha}F_{3\alpha} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)$$

$$T_3^3 = \frac{1}{4\pi}\left(F^{30}F_{30} + F^{31}F_{31} + F^{32}F_{32} + F^{33}F_{33} - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.28}$$

$$F^{30} = F_{30} = 0$$

$$F^{31} = F_{31} = 0$$

$$F^{32} = F_{32} = 0$$

$$F^{33} = F_{33} = 0$$

Reemplazando valores en (3.28):

$$T_3^3 = \frac{E^2}{8\pi} \tag{3.29}$$

Con esto, hallando ahora la traza de $T^{\mu\nu}$:

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T_\mu^\mu = T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3$$

$$T = T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 \tag{3.30}$$

Sustituyendo (3.23), (3.25), (3.27) y (3.29) en (3.30) se obtiene:

$$T = 0 \tag{3.31}$$

De la ecuación de campo de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{3.32}$$

$$g^{\lambda\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\lambda\nu}g_{\mu\nu} + \Lambda g^{\lambda\nu}g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}g^{\lambda\nu}T_{\mu\nu}$$

$$R_\mu^\lambda - \tfrac{1}{2}R\delta_\mu^\lambda + \Lambda\delta_\mu^\lambda = \tfrac{8\pi G}{c^4}T_\mu^\lambda$$

$\lambda = \mu$:

$$R_\mu^\mu - \tfrac{1}{2}R\delta_\mu^\mu + \Lambda\delta_\mu^\mu = \tfrac{8\pi G}{c^4}T_\mu^\mu$$

$$R_\mu^\mu - \frac{1}{2}R(\delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3) + \Lambda(\delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3) = \frac{8\pi G}{c^4}T_\mu^\mu$$

$$R_\mu^\mu - 2R + 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_\mu^\mu$$

$$R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 - 2R + 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}(T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3) \tag{3.33}$$

Por definición, la curvatura escalar (escalar de curvatura) R viene dada por:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R_\mu^\mu = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3$$

$$R = R_0^0 + R_1^1 + R_2^2 + R_3^3 \tag{3.34}$$

Reemplazando (3.30) y (3.34) en la expresión (3.33):

$$R = 4\Lambda - \frac{8\pi G}{c^4}T \tag{3.35}$$

Pero, sustituyendo el resultado (3.31), obtenemos que:

$$R = 4\Lambda \tag{3.36}$$

Con esto, reemplazando ahora (3.36) en (3.32):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(4\Lambda)g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \tag{3.37}$$

Diagonalizando (3.37):

$$g^{\lambda\nu}R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}g^{\lambda\nu}T_{\mu\nu} + \Lambda g^{\lambda\nu}g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu}^{\lambda} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu}^{\lambda} + \Lambda\delta_{\mu}^{\lambda}$$

Haciendo ahora $\lambda = \mu$:

$$R_{\mu}^{\mu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu}^{\mu} + \Lambda\delta_{\mu}^{\mu} \tag{3.38}$$

Luego, evaluamos esto para $\mu = 0$:

$$R_0^0 = \frac{8\pi G}{c^4}T_0^0 + \Lambda \tag{3.39}$$

En general, las componentes del tensor de Ricci se definen como:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - \partial_\lambda\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda} \tag{3.40}$$

Es posible demostrar que en el límite del campo gravitatorio débil se cumple lo siguiente:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\eta\alpha}\left(\partial_\lambda g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\lambda} - \partial_\alpha g_{\mu\lambda}\right)\frac{1}{2}g^{\lambda\beta}\left(\partial_\eta g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\eta} - \partial_\beta g_{\nu\eta}\right)$$

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} = \frac{1}{4}\left(g^{\eta\alpha}\partial_\lambda g_{\alpha\mu} + g^{\eta\alpha}\partial_\mu g_{\alpha\lambda} - g^{\eta\alpha}\partial_\alpha g_{\mu\lambda}\right)\left(g^{\lambda\beta}\partial_\eta g_{\beta\nu} + g^{\lambda\beta}\partial_\nu g_{\beta\eta} - g^{\lambda\beta}\partial_\beta g_{\nu\eta}\right)$$

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} = \frac{1}{4}\left(\partial_\lambda g^{\eta\alpha}g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g^{\eta\alpha}g_{\alpha\lambda} - \partial^\eta g_{\mu\lambda}\right)\left(\partial_\eta g^{\lambda\beta}g_{\beta\nu} + \partial_\nu g^{\lambda\beta}g_{\beta\eta} - \partial^\lambda g_{\nu\eta}\right)$$

$$\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} = \frac{1}{4}\left(\partial_{\lambda}\delta^{\eta}_{\mu} + \partial_{\mu}\delta^{\eta}_{\lambda} - \partial^{\eta}g_{\mu\lambda}\right)\left(\partial_{\eta}\delta^{\lambda}_{\nu} + \partial_{\nu}\delta^{\lambda}_{\eta} - \partial^{\lambda}g_{\nu\eta}\right)$$

$$\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} = \frac{1}{4}\partial^{\eta}g_{\mu\lambda}\partial^{\lambda}g_{\nu\eta}$$

De acuerdo con la expresión (3.1) tendremos que:

$$\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} = \frac{1}{4}\partial^{\eta}\left(\eta_{\mu\lambda} + h_{\mu\lambda}\right)\partial^{\lambda}\left(\eta_{\nu\eta} + h_{\nu\eta}\right)$$

$$\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} = \frac{1}{4}\left(\partial^{\eta}h_{\mu\lambda}\right)\left(\partial^{\lambda}h_{\nu\eta}\right)$$

Dado que:

$$\forall\ \left|h_{\mu\nu}\right| \ll 1$$

Entonces, de manera igualmente proporcional:

$$\forall\ \left|\partial_{\lambda}h_{\mu\nu}\right| \ll 1$$

Con esto:

$$\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} = \frac{1}{4}\left(\partial^{\eta}h_{\mu\lambda}\right)\left(\partial^{\lambda}h_{\nu\eta}\right) \approx 0$$

$$\Gamma^{\eta}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \approx 0 \tag{3.41}$$

Similarmente, también podemos demostrar y obtener que:

$$\Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\eta} \approx 0 \tag{3.42}$$

Reemplazando (3.41) y (3.42) en (3.40) obtenemos las componentes del tensor de Ricci en el límite del campo gravitacional débil, que ahora quedarán reescritas como:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{3.43}$$

Diagonalizando (3.43), finalmente se obtiene:

$$g^{\lambda\nu}R_{\mu\nu} = g^{\lambda\nu}\partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} - g^{\lambda\nu}\partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu}^{\lambda} = \partial^{\lambda}\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} - \partial^{\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$$

Haciendo ahora $\lambda = \mu$:

$$R_{\mu}^{\mu} = \partial^{\mu}\Gamma_{\mu\mu}^{\mu} - \partial^{\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} \tag{3.44}$$

Evaluando (3.44) ahora para $\mu = 0$, obtenemos:

$$R_{0}^{0} = \partial^{0}\Gamma_{00}^{0} - \partial^{\nu}\Gamma_{0\nu}^{0}$$

Expandiendo ahora el subíndice ν:

$$R_{0}^{0} = -\partial^{1}\Gamma_{01}^{0} - \partial^{2}\Gamma_{02}^{0} - \partial^{3}\Gamma_{03}^{0}$$

Como señalamos anteriormente, dado que nos encontramos empleando la convención de signatura $(-,+,+,+)$, esto implicará que:

$$\partial^{i} = \partial_{i}$$

Con $i = 1,2,3$

$$R_{0}^{0} = -\partial_{1}\Gamma_{01}^{0} - \partial_{2}\Gamma_{02}^{0} - \partial_{3}\Gamma_{03}^{0}$$

$$R_{0}^{0} = -\partial_{1}\left[\frac{1}{2}g^{00}(\partial_{1}g_{00} + \partial_{0}g_{01} - \partial_{0}g_{01})\right] - \partial_{2}\left[\frac{1}{2}g^{00}(\partial_{2}g_{00} + \partial_{0}g_{02} - \partial_{0}g_{02})\right]$$
$$- \partial_{3}\left[\frac{1}{2}g^{00}(\partial_{3}g_{00} + \partial_{0}g_{03} - \partial_{0}g_{03})\right]$$

Ahora, como hemos indicado anteriormente, puesto que la métrica o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ que se ha definido para este problema es diagonal, esto significa que se eliminarán todas las componentes que se encuentren fuera de la diagonal, esto es:

$$g_{\mu\nu} \neq 0 \ \ \forall\, \mu = \nu$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \ \ \forall\, \mu \neq \nu$$

Con esto, la expresión anteriormente obtenida se reducirá a la forma:

$$R_{0}^{0} = -\partial_{1}\left[\frac{1}{2}g^{00}(\partial_{1}g_{00})\right] - \partial_{2}\left[\frac{1}{2}g^{00}(\partial_{2}g_{00})\right] - \partial_{3}\left[\frac{1}{2}g^{00}(\partial_{3}g_{00})\right]$$

Empleando ahora la aproximación del campo gravitatorio débil, dada por la expresión (3.1), esto se reescribirá como:

$$R_0^0 = -\partial_1\left[\frac{1}{2}(\eta^{00}+h^{00})\big(\partial_1(\eta_{00}+h_{00})\big)\right] - \partial_2\left[\frac{1}{2}(\eta^{00}+h^{00})\big(\partial_2(\eta_{00}+h_{00})\big)\right] - \partial_3\left[\frac{1}{2}(\eta^{00}+h^{00})\big(\partial_3(\eta_{00}+h_{00})\big)\right]$$

$$R_0^0 = -\partial_1\left[\frac{1}{2}(\eta^{00}+h^{00})(\partial_1\eta_{00}+\partial_1 h_{00})\right] - \partial_2\left[\frac{1}{2}(\eta^{00}+h^{00})(\partial_2\eta_{00}+\partial_2 h_{00})\right] - \partial_3\left[\frac{1}{2}(\eta^{00}+h^{00})(\partial_3\eta_{00}+\partial_3 h_{00})\right]$$

Donde:

$$\eta^{00} = \eta_{00} = -1$$

$$R_0^0 = -\partial_1\left[\frac{1}{2}(-1+h^{00})(\partial_1 h_{00})\right] - \partial_2\left[\frac{1}{2}(-1+h^{00})(\partial_2 h_{00})\right] - \partial_3\left[\frac{1}{2}(-1+h^{00})(\partial_3 h_{00})\right]$$

De acuerdo con la definición dada sobre la aproximación de campo débil, tenemos que:

$$h^{00} \ll 1$$

Con esto obtendremos:

$$R_0^0 = \tfrac{1}{2}\partial_1(\partial_1 h_{00}) + \tfrac{1}{2}\partial_2(\partial_2 h_{00}) + \tfrac{1}{2}\partial_3(\partial_3 h_{00})$$

$$R_0^0 = \frac{1}{2}\partial_1^2 h_{00} + \frac{1}{2}\partial_2^2 h_{00} + \frac{1}{2}\partial_3^2 h_{00}$$

$$R_0^0 = \frac{1}{2}(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2)h_{00}$$

Donde:

$$\nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$$

Con esto:

$$R_0^0 = \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \tag{3.45}$$

Podemos observar que las expresiones (3.39) y (3.45) deben ser necesariamente igualadas. Con esto obtenemos:

$$\nabla^2 h_{00} = \frac{16\pi G}{c^4}T_0^0 + 2\Lambda \tag{3.46}$$

Luego, en coordenadas esféricas, esto resulta:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial h_{00}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\frac{\partial h_{00}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2 sen^2\theta}\frac{\partial^2 h_{00}}{\partial\phi^2}=\frac{16\pi G}{c^4}T_0^0+2\Lambda$$

Debido a que, como se indicó, esta configuración posee simetría esférica, entonces:

$$h_{00}=h_{00}(r)$$

Con esto, la expresión anterior se reduce a la forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dh_{00}}{dr}\right)=\frac{16\pi G}{c^4}T_0^0+2\Lambda$$

$$h''_{00}+\frac{2}{r}h'_{00}=\frac{16\pi G}{c^4}T_0^0+2\Lambda \tag{3.47}$$

Ahora, reemplazando (3.23) en (3.47), se tiene que:

$$h''_{00}+\frac{2}{r}h'_{00}=-\frac{2G}{c^4}E^2+2\Lambda \tag{3.48}$$

Dado que tenemos una distribución continua de carga eléctrica Q esféricamente simétrica, se empleará entonces la ley de Gauss para calcular la magnitud del campo eléctrico $\vec{E}$ que esta generará en cualquier punto arbitrario fuera de ella.

$$\oint \vec{E}.d\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho_V dV \tag{3.49}$$

Donde:

$$q_{enc}=\int \rho_V dV$$

$$\oint \vec{E}.d\vec{s}=\frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \tag{3.50}$$

Con $d\vec{s}=ds\hat{n}$

Por las propiedades de simetría esférica señaladas:

$$\vec{E}=E\hat{r}$$

Y además:

$$\hat{r}//\hat{n}$$

Entonces:

$$\oint Eds = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Para cualquier punto arbitrario del espacio que se encuentre fuera de la esfera cargada, se tiene que:

$$q_{enc} = Q$$

Con esto:

$$\oint Eds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

En este tipo de casos, como es sabido, se suele asumir que dicho campo eléctrico $\vec{E}$ es uniforme. Con esto:

$$E \oint ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Con:

$$S = 4\pi r^2$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{3.51}$$

Que es, tal como se esperaba encontrar, la magnitud del campo eléctrico Coulombiano. Dadas las condiciones de simetría esférica y de estado de reposo completo planteadas de la distribución cargada que se han considerado para este caso.

Entonces:

$$E^2 = \frac{1}{16\pi^2{\varepsilon_0}^2}\frac{Q^2}{r^4} \tag{3.52}$$

Luego, reemplazando (3.52) en (3.48), se obtendrá:

$$h''_{00} + \frac{2}{r} h'_{00} = -\frac{GQ^2}{8\pi^2 \varepsilon_0{}^2 c^4 r^4} + 2\Lambda \tag{3.53}$$

Es fácil notar que:

$$h''_{00} + \frac{2}{r} h'_{00} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 h'_{00}) \tag{3.54}$$

Sustituyendo (3.54) en (3.53):

$$\frac{d}{dr} (r^2 h'_{00}) = -\frac{GQ^2}{8\pi^2 \varepsilon_0{}^2 c^4 r^2} + 2\Lambda r^2 \tag{3.55}$$

Dado que:

$$h_{00} = h_{00}(r)$$

Entonces:

$$h'_{00} = \alpha(r)$$

Con esto:

$$r^2 \alpha(r) = r^2 h'_{00}$$

Luego hacemos que:

$$W(r) = r^2 h'_{00}$$

Efectuando este cambio de variable en la ecuación (3.55), podemos obtener:

$$\frac{dW(r)}{dr} = -\frac{GQ^2}{8\pi^2 \varepsilon_0{}^2 c^4 r^2} + 2\Lambda r^2 \tag{3.56}$$

Integrando (3.56):

$$dW = -\frac{GQ^2}{8\pi^2 \varepsilon_0{}^2 c^4 r^2} dr + 2\Lambda r^2 dr$$

$$W(r) = \frac{GQ^2}{8\pi^2 \varepsilon_0{}^2 c^4 r} + \frac{2}{3} \Lambda r^3 + CTE$$

Pero tenemos que:

$$W(r) = r^2 h'_{00}$$

Con esto:

$$r^2 h'_{00} = \frac{GQ^2}{8\pi^2 {\varepsilon_0}^2 c^4 r} + \frac{2}{3}\Lambda r^3 + CTE$$

$$\frac{dh_{00}}{dr} = \frac{GQ^2}{8\pi^2 {\varepsilon_0}^2 c^4 r^3} + \frac{2}{3}\Lambda r + \frac{C_1}{r^2}$$

Integrando nuevamente, obtendremos:

$$h_{00}(r) = -\frac{GQ^2}{16\pi^2 {\varepsilon_0}^2 c^4 r^2} + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2$$

Con C_1 y C_2 constantes de integración.

Pero este $h_{00}(r)$ hallado es la solución particular Y_P de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en r, lineal, de coeficientes variables y no homogénea encontrada (3.53). Con esto, entonces, tenemos que:

$$h_{00}(r) \to Y_P$$

$$Y_P = -\frac{GQ^2}{16\pi^2 {\varepsilon_0}^2 c^4 r^2} + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2 \tag{3.57}$$

Ahora procederemos a hallar la solución homogénea Y_H de la ecuación diferencial ordinaria (3.53). Para esto, Y_H deberá satisfacer la ecuación diferencial ordinaria (3.53), escrita ahora como una ecuación diferencial homogénea. Con esto tenemos:

$$h''_{00} + \frac{2}{r}h'_{00} = 0 \tag{3.58}$$

Empleando ahora la ecuación geodésica para la relatividad general:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{3.59}$$

Donde:

λ, μ, ν =0, 1, 2, 3

$$a^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\mu^{\mu}\mu^{\nu} = 0$$

Expandiendo esta expresión:

$$a^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{0\nu}\mu^{0}\mu^{\nu} + \Gamma^{\lambda}_{1\nu}\mu^{1}\mu^{\nu} + \Gamma^{\lambda}_{2\nu}\mu^{2}\mu^{\nu} + \Gamma^{\lambda}_{3\nu}\mu^{3}\mu^{\nu} = 0$$

Asumiendo velocidades en el límite no-relativista, es decir, para $v \ll c$, tendremos que:

$\mu^{i} \ll c$; donde $i = 1, 2, 3$

Haciendo $c = 1$:

$$\mu^{i} \ll 1$$

Entonces, esto implicará que $\left(\mu^{i}\right)^{2} \approx 0$. Extrapolando este razonamiento tendremos que:

$$\mu^{i}\mu^{\nu} \approx 0$$

Con esto:

$$\mu^{1}\mu^{\nu} = \mu^{2}\mu^{\nu} = \mu^{3}\mu^{\nu} \approx 0$$

La expresión anterior se reduce a la forma:

$$a^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{0\nu}\mu^{0}\mu^{\nu} = 0$$

$$a^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{00}\mu^{0}\mu^{0} + \Gamma^{\lambda}_{01}\mu^{0}\mu^{1} + \Gamma^{\lambda}_{02}\mu^{0}\mu^{2} + \Gamma^{\lambda}_{03}\mu^{0}\mu^{3} = 0$$

Asimismo, tendremos que:

$$\mu^{i}\mu^{0} \approx 0$$

Entonces, similarmente:

$$\mu^{0}\mu^{1} = \mu^{0}\mu^{2} = \mu^{0}\mu^{3} \approx 0$$

Con esto:

$$a^{\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{00}(\mu^{0})^{2} = 0$$

Donde:

$$\mu^{0} = \frac{dx^{0}}{d\tau} \text{ , con } x^{0} = ct$$

$$\mu^{0} = c\frac{dt}{d\tau}$$

$$a^{\lambda} + c^2 \Gamma_{00}^{\lambda} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

En el límite no-relativista de velocidades, se tiene que:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dt}{d\tau}\right) = 0$$

Entonces:

$$\frac{dt}{d\tau} = CTE$$

No se perderá generalidad si se asume:

$$\frac{dt}{d\tau} = 1$$

Reemplazando esto en la expresión obtenida anteriormente:

$$a^{\lambda} + c^2 \Gamma_{00}^{\lambda} = 0$$

$$a^{\lambda} = -c^2 \Gamma_{00}^{\lambda}$$

Finalmente, haciendo que:

$$\lambda = j$$

Donde:

$j = 1, 2, 3$

$$a^{j} = -c^2 \Gamma_{00}^{j} \tag{3.60}$$

Aquí a^j viene a ser la componente en tres dimensiones de la cuadriaceleración a^{λ}, o sea, la aceleración $\vec{a}$ debida a la gravedad.

Luego:

De acuerdo con el principio de equivalencia, tenemos que:

$$a^{j} = \xi^{j}$$

Donde:

ξ^j es la componente del campo gravitacional en tres dimensiones.

Luego, por definición, tenemos que:

$$\xi^j = -\nabla^j \varphi_g \tag{3.61}$$

Entonces, con esto:

$$a^j = \xi^j = -\nabla^j \varphi_g$$

$$a^j = -\nabla^j \varphi_g \tag{3.62}$$

Sustituyendo (3.62) en (3.60) esto nos da:

$$\nabla^j \varphi_g = c^2 \Gamma^j_{00}$$

Donde:

$$\nabla^j = \partial^j$$

φ_g es el potencial gravitacional.

Con esto:

$$\partial^j \varphi_g = c^2 \Gamma^j_{00}$$

Donde:

$j = 1, 2, 3$

Analizando únicamente para la coordenada radial $j = 1$:

$$\partial^1 \varphi_g = c^2 \Gamma^1_{00}$$

Pero, recordando que:

$$\partial^1 = \partial_1$$

$$\partial_1 \varphi_g = c^2 \Gamma^1_{00}$$

$$\partial_1 \varphi_g = c^2 \left[\frac{1}{2} g^{11} (\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00})\right]$$

Dado que la componente g_{10} es mixta, entonces esto se reduce a:

$$\partial_1 \varphi_g = -\frac{1}{2} c^2 g^{11} \partial_1 g_{00}$$

Empleando ahora nuestra condición de campo gravitacional débil dada por la expresión (3.1), tenemos que:

$$\partial_1 \varphi_g = -\frac{1}{2} c^2 \left[(\eta^{11} + h^{11}) \left(\partial_1 (\eta_{00} + h_{00}) \right) \right]$$

Esto nos conduce a:

$$\partial_1 \varphi_g = -\frac{1}{2} c^2 \eta^{11} \partial_1 h_{00}$$

$$\partial_1 \varphi_g = -\frac{1}{2} c^2 \partial_1 h_{00}$$

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial x^1} = -\frac{1}{2} c^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial x^1}$$

Donde:

$$x^1 = r$$

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial r} = -\frac{1}{2} c^2 \frac{\partial h_{00}}{\partial r}$$

Puesto que el campo gravitacional producido por la distribución se define en este caso como un campo central, debido a las propiedades de simetría esférica de la misma, entonces esto implicará que el potencial gravitacional φ_g sea de dependencia exclusivamente radial. Es decir:

$$\varphi_g = \varphi_g(r)$$

Y dado que, por las mismas propiedades de simetría esférica, sabemos que:

$$h_{00} = h_{00}(r)$$

Entonces:

$$\frac{d\varphi_g}{dr} = -\frac{1}{2} c^2 \frac{dh_{00}}{dr}$$

$$d\varphi_g = -\frac{1}{2} c^2 dh_{00}$$

Integrando tenemos:

$$\int d\varphi_g = -\frac{1}{2}c^2 \int dh_{00}$$

$$\varphi_g = -\frac{1}{2}c^2 h_{00} + \kappa$$

Donde κ es una constante de integración.

Asumiendo que $\kappa = 0$:

$$\varphi_g = -\frac{1}{2}c^2 h_{00} \tag{3.63}$$

Luego:

En el límite Newtoniano $\varphi_g \to \varphi_N$ y $h_{00} \to Y_H$, siendo Y_H la solución homogénea de la ecuación diferencial ordinaria (3.53). Con esto:

$$\varphi_N = -\frac{1}{2}c^2 Y_H$$

$$Y_H = -\frac{2}{c^2}\varphi_N$$

Donde φ_N es el potencial gravitacional Newtoniano, el cual es:

$$\varphi_N = -\frac{GM}{r}$$

Reemplazando:

$$Y_H = \frac{2GM}{c^2 r} \tag{3.64}$$

Donde podemos observar que:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

r_s viene a ser el radio de Schwarzschild, que es, como sabemos, el límite físico que todo objeto del universo debe alcanzar para convertirse en un agujero negro.

Con esto:

$$Y_H = \frac{r_s}{r}$$

Con esto entonces, la solución global a la ecuación diferencial ordinaria, no homogénea y lineal (3.53) será una combinación de las soluciones homogénea y particular Y_H y Y_P respectivamente halladas:

$$h_{00} = Y_H + Y_P \tag{3.65}$$

Reemplazando (3.57) y (3.64) en (3.65) obtenemos finalmente:

$$h_{00} = \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{GQ^2}{16\pi^2 {\varepsilon_0}^2 c^4 r^2} + \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2 \tag{3.66}$$

Luego:

Sin perder generalidad, se despreciarán las constantes de integración C_1 y C_2, con lo cual, el resultado dado en la expresión (3.66) se reescribirá como:

$$C_1 = C_2 \approx 0 \tag{3.67}$$

$$h_{00} = \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{GQ^2}{16\pi^2 {\varepsilon_0}^2 c^4 r^2} + \frac{\Lambda}{3} r^2$$

$$h_{00} = \frac{2GM}{c^2 r} - \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{GQ^2}{c^4 r^2} + \frac{\Lambda}{3} r^2 \tag{3.68}$$

Expresando ahora la constante de Coulomb en el vacío $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ en unidades gaussianas (Sistema C.G.S), esto se reducirá a:

En unidades gaussianas:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 1 \tag{3.69}$$

Sustituyendo (3.69) en (3.68):

$$h_{00} = \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{GQ^2}{c^4 r^2} + \frac{\Lambda}{3} r^2 \tag{3.70}$$

Finalmente, expresando este resultado en Unidades Naturales, se tiene que:

$$c = G = 1$$

Con esto:

$$h_{00} = \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda}{3} r^2 \tag{3.71}$$

Luego:

De acuerdo con la definición dada en la expresión (3.1) tenemos:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Para $\mu = \nu = 0$:

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} \tag{3.72}$$

Donde, de acuerdo con la convención de signatura $(-,+,+,+)$ elegida, tenemos que:

$$\eta_{00} = -1$$

Entonces:

$$g_{00} = -1 + h_{00} \tag{3.73}$$

Con esto, reemplazando (3.71) en (3.73), obtenemos finalmente:

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda}{3} r^2 \tag{3.74}$$

Por otro lado, la forma general del elemento de línea ds^2 viene definida como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3.75}$$

Donde:

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

Expandiendo (3.75):

$$ds^2 = g_{0\nu} dx^0 dx^\nu + g_{1\nu} dx^1 dx^\nu + g_{2\nu} dx^2 dx^\nu + g_{3\nu} dx^3 dx^\nu$$

Debido a que, como ya se indicó anteriormente, la métrica que se encuentra definida aquí es diagonal, esto implicará que todas las componentes mixtas del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ presentes en cada término se anularán. Esto es:

$$g_{\mu\nu} = 0 \ \ \forall\, \mu \neq \nu$$

Con esto:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \tag{3.76}$$

Debido a la simetría esférica existente en este problema, entonces se tendrá que:

$$g_{22} = r^2 \quad \text{con} \ \ x^2 = \theta, \ \text{entonces} \ \ dx^2 = d\theta$$

$$g_{33} = r^2 sen^2\theta \quad \text{con} \ \ x^3 = \phi, \ \text{entonces} \ \ dx^3 = d\phi$$

Con esto:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2$$

Donde:

$$x^0 = ct$$

Con $c = 1$:

$$x^0 = t, \ \text{entonces} \quad dx^0 = dt$$

$$x^1 = r \ , \text{entonces} \ \ dx^1 = dr$$

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2 \tag{3.77}$$

Por otro lado:

La forma general o estándar de la métrica para un espacio-tiempo estacionario (sin dependencia temporal explícita) y con altas propiedades de simetría esférica, generada por una distribución estática y esféricamente simétrica, viene dada por:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2 \tag{3.78}$$

Ahora igualando (3.78) y (3.77):

(3.78) = (3.77):

$$-A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta d\phi^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta d\phi^2$$

$$-A(r)dt^2 + B(r)dr^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2$$

$$B(r) = g_{11}$$

$$A(r) = -g_{00} \tag{3.79}$$

Reemplazando (3.74) en (3.79):

$$A(r) = -\left(-1 + \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda}{3}r^2\right)$$

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{3.80}$$

Luego:

Introduciremos la siguiente condición coordenada en la expresión (3.78):

$$A(r) = e^{\lambda(r)} \tag{3.81}$$

$$B(r) = e^{\mu(r)} \tag{3.82}$$

Tal que, cuando $r \to \infty$ las funciones $\lambda(r)$ y $\mu(r)$ satisfagan:

Para $r \to \infty$:

$$\lambda(r) \to 0$$

$$\mu(r) \to 0$$

Con esto:

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)}dt^2 + e^{\mu(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta d\phi^2$$

De modo tal que en el límite $r \to \infty$ se obtenga:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta d\phi^2 \tag{3.83}$$

Que viene a ser la métrica del espacio-tiempo plano de Minkowski expresada en coordenadas esféricas, satisfaciéndose con esto el límite minkowskiano en el infinito.

Introduciendo adicionalmente que:

$$\lambda(r) = -\mu(r)$$

Se obtiene:

$$\mu(r) = -\lambda(r)$$

$$B(r) = e^{\mu(r)} = e^{-\lambda(r)}$$

$$B(r) = \left[e^{\lambda(r)}\right]^{-1}$$

$$B(r) = A(r)^{-1}$$

Con esto:

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} \tag{3.84}$$

Con esto, reemplazando (3.80) en (3.84):

$$B(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} \tag{3.85}$$

Finalmente, sustituyendo (3.80) y (3.85) en la expresión (3.78) obtenemos:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta d\phi^2 \tag{3.86}$$

Habiendo obtenido la métrica que nos describe la geometría del espacio-tiempo en el exterior del agujero negro de RNdS, estamos listos ahora para abordar el estudio minucioso del comportamiento de la misma y de sus propiedades más importantes. En este sentido, en el próximo capítulo nos daremos

cuenta de que el sistema esférico, elegido en esta última ecuación para expresar dicha métrica, no será el más adecuado para estudiarla en todo el continuo del espacio-tiempo, y que, sin embargo, será necesario e imperativo efectuar una transformación coordenada para poder llevar a cabo a plenitud la descripción de su comportamiento. Como veremos más adelante, esto vendrá motivado principalmente por las inconsistencias que presentará dicha métrica al ser evaluada en los respectivos horizontes que presentará el espacio-tiempo de RNdS, al evaluarla en el sistema de las coordenadas esféricas, y cuya deducción y análisis detallado también veremos en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 4

ESTRUCTURA CAUSAL DEL AGUJERO NEGRO DE RNdS

4.1 Introducción

Del elemento de línea ds^2 para la métrica de RNdS obtuvimos:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.1}$$

Con:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2$$

Donde:

$$\forall\ \Lambda = CTE, \Lambda \neq 0, \Lambda > 0$$

La expresión (4.1) viene a ser el elemento de línea ds^2 que nos describe la métrica del espacio-tiempo en el exterior de un agujero negro de RNdS expresada en coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ). Extrayendo su correspondiente función métrica $f(r)$, tenemos que:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{4.2}$$

La cual puede ser reescrita como:

$$f(r) = \frac{r^2 - 2Mr + Q^2 - \frac{\Lambda}{3}r^4}{r^2}$$

Como se puede observar, al encontrarse dicha función métrica definida en términos de un polinomio de cuarto grado, esto implica que existen 4 raíces reales que la hacen nula, y con ello, en cada una de las cuales se obtiene como resultado una singularidad coordenada en la métrica (es decir, $ds^2 \to \infty$). No obstante, no todas las cuatro raíces que satisfacen la nulidad de la función métrica $f(r)$ mencionadas corresponden a los radios físicos de los respectivos horizontes de sucesos que envuelven a la singularidad de RNdS. Así tenemos que, como bien lo señalan de manera enfática C. González y B. Koch [81], una de estas cuatro raíces resulta siendo negativa, con lo cual no logra satisfacer (a pesar

de ser real) el carácter positivo requerido para definir el radio de un verdadero horizonte físico. Por otro lado, se tiene que su valor absoluto nos define el radio de una *esfera de fotones*: esto es, una superficie sobre la cual (debido a la intensa gravedad existente en dicha región) los fotones se encuentran confinados a describir orbitas circulares de caída libre alrededor de la singularidad. Debido a la permanente inestabilidad de las órbitas, tanto dentro como fuera de la esfera, se descarta a dicha superficie como un horizonte físico (M. Mokdad [82]).

De modo tal que en el caso de RNdS sólo se consideran 3 horizontes, a saber: el horizonte interior de radio r_-, también llamado horizonte de Cauchy, el horizonte exterior de radio r_+ y un horizonte cosmológico de radio r'_+. Con tales cambios, la función métrica se reescribe ahora como:

$$f(r) = \frac{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}{r^2} \tag{4.3}$$

Donde, en general, se asume:

$$\forall\ r_+,\ r_-,\ r'_+ \in R$$

$$r_+,\ r_-,\ r'_+ = CTES$$

$$r_+ \neq r_- \neq r'_+$$

$$r_+,\ r_-,\ r'_+ \neq 0$$

$$r_+,\ r_-,\ r'_+ > 0$$

Puesto que el elemento de línea que estamos definiendo corresponde al caso de un agujero negro estático y con altas propiedades de simetría esférica, entonces la métrica es de la forma genérica en coordenadas esféricas dada por:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.4}$$

Con esto, de (4.3) tenemos:

$$ds^2 = -\frac{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.5}$$

4.2 Estructura causal en coordenadas esféricas

Considerando ahora el caso especial de las partículas carentes de masa en reposo, al encontrarse éstas gobernadas por el intervalo tipo-luz, y omitiendo sin perder generalidad la parte angular de la métrica dada en (4.5), podemos obtener:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)} \tag{4.6}$$

Integrando, obtenemos la forma exacta de las geodésicas radiales nulas en coordenadas esféricas:

$$t = \pm \int \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}$$

$$t = \pm(k_+ \ln|r - r_+| - k_- \ln|r - r_-| + k'_+ \ln|r - r'_+|) + CTE \tag{4.7}$$

En (4.7) el signo $(+)$ denota a las geodésicas radiales nulas salientes (aquellas trayectorias luminosas que parten de los puntos de intersección y que se extienden hacia el infinito), mientras que el signo $(-)$ nos denota a las geodésicas entrantes (aquellas trayctorias de luz que provienen del infinito y que concluyen en los puntos de intersección señalados). Donde, como sabemos, en tales puntos de intersección se forman los llamados *conos de luz*. De la expresión (4.7) es fácil deducir que a medida que nos alejamos de los horizontes los conos de luz se abren; en cambio, a medida que la distancia hacia cualquiera de estos distintos horizontes se reduce, los conos comienzan a comprimirse hasta finalmente cerrarse por completo al llegar finalmente a la superficie de dichos horizontes. Lo cual significa que en los horizontes (es decir, cuando $r = r_+, r_-, r'_+$) dichas geodésicas no pueden escapar de los conos. Con ello, la luz –a pesar de ser lo más rápido que existe en el universo- no posee la capacidad de comunicarse con ningún punto arbitrario del espacio-tiempo exterior a cada uno de los 3 horizontes de sucesos señalados. Esto implica que la información pierde toda capacidad y posibilidad de comunicación y, por lo tanto, de *conexión causal* fuera de cualesquiera de los 3 horizontes que *envuelven* la singularidad de RNdS cuando es enviada desde estos mismos horizontes. Consistentemente con esto, toda señal de periodo propio $\Delta\tau$ finito que se propaga a la velocidad de la luz que es enviada desde alguno de estos 3 horizontes presenta un corrimiento infinito al rojo para cualquier observador arbitrariamente lejano, puesto que dicho observador no puede recibir tal señal al cabo de un tiempo finito, sino más bien dicho periodo $\Delta t \to \infty$. Tal último resultado viene a ser la estructura causal del agujero negro de RNdS expresada en coordenadas esféricas, expresión que se puede derivar directamente de la métrica dada en (4.5) al considerar ahora dentro de ella a la distancia r como constante y volviendo a prescindir de la parte angular de la misma, así tenemos:

$$ds^2 = -\frac{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}{r^2} dt^2$$

Recordando que:

$$ds^2 = -d\tau^2$$

$$d\tau = \frac{\sqrt{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}}{r} dt \tag{4.8}$$

Integrando (4.8) se logra obtener:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \frac{\sqrt{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}}{r} \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}}{r} \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{r}{\sqrt{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}} \Delta\tau \tag{4.9}$$

Donde:

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Asumimos en general que el periodo propio de la señal enviada $\Delta\tau$ siempre será finito.

De (4.9) podemos observar que dicho periodo propio $\Delta\tau$ no podrá ser eventualmente nulo, puesto que este hecho implicaría que la señal electromagnética (y con esto la información) que fuese enviada desde cualquiera de los 3 horizontes señalados, llegaría instantáneamente a cualquier punto arbitrario del espacio-tiempo exterior al horizonte, sin importar cuán distante pudiera encontrarse respecto a este (caso como sabemos correspondiente a un periodo Δt igualmente nulo). De modo tal que, asimismo, tenemos necesariamente que asumir en general que:

$$\forall\ \Delta\tau \neq 0$$

Tenemos dos observadores O y O'. El primero de ellos cayendo por uno de los 3 horizontes de sucesos que envuelven al agujero negro de RNdS, cuyos radios son $r_+,\ r_-,\ r'_+$.

El observador O envía un pulso electromagnético de periodo propio $\Delta\tau$, el cual se asumirá siempre como finito y no nulo en cualquier circunstancia, a una distancia r de la singularidad de RNdS (la cual asumiremos ubicada en el origen de coordenadas $r = 0$). A una distancia lo suficientemente grande de los 3 horizontes señalados que protegen causalmente a dicha singularidad, se encuentra el segundo

observador O' que, en teoría, se encontrará apto para recibir dicha señal luminosa a una distancia tan grande, tal que lo asumiremos ubicado en alguna región del espacio-tiempo que sea asintóticamente plana o minkowskiana. Para O' la señal llegará al cabo de un periodo Δt que él deberá medir.

La expresión (4.9) nos describe el comportamiento del periodo Δt medido exclusivamente por el observador muy lejano O' de una señal luminosa de periodo finito $\Delta\tau$ enviada por otro observador O ubicado a una distancia r de la singularidad o agujero negro de RNdS. De esta ecuación se concluye que si la señal luminosa es enviada desde cualesquiera de los 3 horizontes de eventos que envuelvan dicha singularidad, esto es, cuando O se encuentre a una distancia exacta de la singularidad $r = r_+$, $r = r_-$ o $r = r'_+$, ningún observador que se encuentre fuera de los horizontes mencionados (y por ende que se encontrará distante del agujero negro en cuestión) podrá recibir la señal en un tiempo finito, puesto que para este observador O', dicha señal tendrá un periodo $\Delta t \to \infty$, lo cual implicará que la señal luminosa que reciba dicho observador lejano O' presentará un corrimiento infinito hacia el rojo.

Observar que dicho periodo Δt es obtenido como resultado de emplear específicamente el sistema de las coordenadas esféricas para el análisis de la estructura causal, respecto a los 3 horizontes de radios r_+, r_-, r'_+ que envuelven a la singularidad o agujero negro de RNdS. En otras palabras, el comportamiento descrito para Δt es el resultado del tipo de coordenadas empleado. Más adelante analizaremos cómo se comportaría este mismo periodo Δt, dentro del mismo problema físico analizado, cuando efectuemos una transformación de coordenadas y expresemos luego dicho periodo Δt tras el empleo de un sistema de coordenadas diferente.

4.3 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Las coordenadas de Eddington-Finkelstein (E-F) por definición vienen dadas por:

$$v = t + \xi(r) \tag{4.10}$$

$$\mu = t - \xi(r) \tag{4.11}$$

Cuyas respectivas diferenciales vendrán dadas por:

$$dv = dt + \xi'(r)dr \tag{4.12}$$

$$d\mu = dt - \xi'(r)dr \tag{4.13}$$

Donde $\xi(r)$ es la coordenada de Regge-Wheeler, también conocida como *coordenada tortuga*. Efectuando el producto:

$$dvd\mu = dt^2 - \xi'^2 dr^2$$

$$dt^2 = dvd\mu + \xi'^2 dr^2 \tag{4.14}$$

Reemplazando (4.14) en (4.5):

$$ds^2 = -f(r)dvd\mu - f(r)\xi'^2 dr^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.15}$$

Impondremos ahora la siguiente condición coordenada:

$$\xi'(r) = \frac{1}{f(r)} \tag{4.16}$$

Entonces:

$$f(r) = \frac{1}{\xi'(r)} \tag{4.17}$$

Con esto, reemplazando (4.16) y (4.17) en (4.15), obtendremos:

$$ds^2 = -f(r)dvd\mu + r^2 d\Omega^2 \tag{4.18}$$

Luego, sustituyendo (4.3) en (4.18) obtenemos:

$$ds^2 = -\frac{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}{r^2}dvd\mu + r^2 d\Omega^2 \tag{4.19}$$

Asimismo, de (4.10) y (4.11) tenemos adicionalmente que:

$$\xi(r) = \frac{1}{2}(v - \mu) \tag{4.20}$$

4.4 Agujero negro de RNdS en las coordenadas de Kruskal

De la condición coordenada impuesta en la expresión (4.16) tenemos que:

$$\xi'(r) = \frac{1}{f(r)} \tag{4.16}$$

Sustituyendo (4.3):

$$\xi'(r) = \frac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)(r-r'_+)}$$

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)(r-r'_+)}$$

$$d\xi = \frac{r^2 dr}{(r-r_+)(r-r_-)(r-r'_+)}$$

Integrando:

$$\xi(r) = \int \frac{r^2 dr}{(r-r_+)(r-r_-)(r-r'_+)} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\xi(r) = {} & \frac{{r_+}^2}{(r_+-r_-)(r_+-r'_+)}\ln|r-r_+| + \frac{{r_-}^2}{(r_--r_+)(r_--r'_+)}\ln|r-r_-| \\ & + \frac{{r'_+}^2}{(r'_+-r_+)(r'_+-r_-)}\ln|r-r'_+| + CTE\end{aligned} \tag{4.22}$$

Reescribiendo el resultado obtenido:

$$\begin{aligned}\xi(r) = {} & \frac{{r_+}^2}{(r_+-r_-)(r_+-r'_+)}\ln|r-r_+| - \frac{{r_-}^2}{(r_+-r_-)(r_--r'_+)}\ln|r-r_-| \\ & + \frac{{r'_+}^2}{(r_+-r'_+)(r_--r'_+)}\ln|r-r'_+| + CTE\end{aligned} \tag{4.23}$$

Ahora haciendo:

$$k_+ = \frac{{r_+}^2}{(r_+-r_-)(r_+-r'_+)}$$

$$k_- = \frac{{r_-}^2}{(r_+-r_-)(r_--r'_+)}$$

$$k'_+ = \frac{{r'_+}^2}{(r_+ - r'_+)(r_- - r'_+)}$$

Donde:

$$k_+,\ k_-,\ k'_+ = CTES$$

Sustituyendo las constantes $k_+,\ k_-,\ k'_+$ en (4.23):

$$\xi(r) = k_+ \ln|r - r_+| - k_- \ln|r - r_-| + k'_+ \ln|r - r'_+| + CTE \tag{4.24}$$

Ajustando ahora la constante de integración del siguiente modo, obtendremos:

$$CTE = -k_+ \ln|r_+| + k_- \ln|r_-| - k'_+ \ln|r'_+| \tag{4.25}$$

Reemplazando (4.25) en (4.24):

$$\xi(r) = k_+[\ln|r - r_+| - \ln|r_+|] - k_-[\ln|r - r_-| - \ln|r_-|] + k'_+[\ln|r - r'_+| - \ln|r'_+|]$$

Con esto, la coordenada de Regge-Wheeler resulta:

$$\xi(r) = k_+ \ln\left|\frac{r - r_+}{r_+}\right| - k_- \ln\left|\frac{r - r_-}{r_-}\right| + k'_+ \ln\left|\frac{r - r'_+}{r'_+}\right| \tag{4.26}$$

Luego, sustituyendo (4.20) obtendremos:

$$\frac{1}{2}(v - \mu) = k_+ \ln\left|\frac{r - r_+}{r_+}\right| - k_- \ln\left|\frac{r - r_-}{r_-}\right| + k'_+ \ln\left|\frac{r - r'_+}{r'_+}\right|$$

$$v - \mu = 2k_+ \ln\left|\frac{r - r_+}{r_+}\right| - 2k_- \ln\left|\frac{r - r_-}{r_-}\right| + 2k'_+ \ln\left|\frac{r - r'_+}{r'_+}\right| \tag{4.27}$$

A continuación se efectuará el proceso de transformación a las coordenadas de Kruskal (V, U, θ, ϕ) correspondiente a la métrica de RNdS obtenida en coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ), relativa a cada uno de los 3 horizontes de eventos de radios r_+, r_-, r'_+ señalados. Así tenemos que:

Para el horizonte exterior de radio r_+:

De la expresión obtenida (4.27):

$$v-\mu = 2k_+ \ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| - 2k_- \ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| + 2k'_+ \ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right| \tag{4.27}$$

$$\frac{1}{2k_+}(v-\mu) = \ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| - \frac{k_-}{k_+}\ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| + \frac{k'_+}{k_+}\ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|$$

$$\frac{1}{2k_+}(v-\mu) = \ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| - \ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right|^{k_-/k_+} + \ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|^{k'_+/k_+}$$

$$\frac{1}{2k_+}(v-\mu) = \ln\left(\frac{\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right|}{\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right|^{k_-/k_+}}\right) + \ln\left(\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|^{k'_+/k_+}\right)$$

$$\ln\left(\frac{\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right|}{\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right|^{k_-/k_+}}\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|^{k'_+/k_+}\right) = \frac{1}{2k_+}(v-\mu)$$

Con esto:

$$\frac{\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right|}{\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right|^{k_-/k_+}}\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|^{k'_+/k_+} = e^{\frac{1}{2k_+}(v-\mu)} \tag{4.28}$$

Puesto que, como lo que buscamos es analizar el comportamiento de la métrica fuera de cada horizonte y no dentro o detrás de estos, entonces se tendrá en cuenta que:

Aquí:

∀ Asumiremos que:

$r > r_+$ entonces $\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| = \frac{r-r_+}{r_+}$ (4.29)

$r > r_-$ entonces $\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| = \frac{r-r_-}{r_-}$ (4.30)

$r > r'_+$ entonces $\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right| = \frac{r-r'_+}{r'_+}$ (4.31)

Reemplazando:

$$\frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{k'_+/k_+}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{k_-/k_+}} = e^{\frac{1}{2k_+}(v-\mu)} \tag{4.32}$$

$$\frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{k'_+/k_+}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{k_-/k_+}} = e^{\frac{1}{2k_+}v} e^{-\frac{1}{2k_+}\mu} \tag{4.33}$$

Las coordenadas de Kruskal relativas a este horizonte (V^+, U^+, θ, ϕ) vendrán dadas por:

$$V^+ = e^{\frac{1}{2k_+}v} \tag{4.34}$$

$$U^+ = -e^{-\frac{1}{2k_+}\mu} \tag{4.35}$$

Donde, además, es fácil obtener:

$$v = 2k_+ \ln|V^+| \tag{4.36}$$

$$\mu = -2k_+ \ln|U^+| \tag{4.37}$$

Reemplazando (4.34) y (4.35) en (4.33) se obtiene:

$$V^+U^+ = -\frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{k'_+/k_+}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{k_-/k_+}} \tag{4.38}$$

Con esto:

$$\frac{1}{V^+U^+} = -\frac{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{k_-/k_+}}{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{k'_+/k_+}} \tag{4.39}$$

Diferenciando ahora V^+ y U^+:

$$dV^+ = \frac{1}{2k_+}V^+dv$$

$$dv = \frac{2k_+}{V^+}dV^+ \tag{4.40}$$

$$dU^+ = -\frac{1}{2k_+}U^+d\mu$$

$$d\mu = -\frac{2k_+}{U^+}dU^+ \tag{4.41}$$

Con esto:

$$dvd\mu = -\frac{4k_+^2}{V^+U^+}dV^+dU^+ \tag{4.42}$$

Reemplazando (4.39) en (4.42) obtenemos:

$$dvd\mu = 4k_+^2\frac{(r-r_-)^{k_-/k_+}r_+r'^{k'_+/k_+}_+}{(r-r_+)(r-r'_+)^{k'_+/k_+}r_-^{k_-/k_+}}dV^+dU^+ \tag{4.43}$$

Finalmente, sustituyendo el resultado (4.43) en la expresión (4.19) se obtendrá el elemento de línea ds^2 de la métrica de RNdS en las coordenadas de Kruskal relativo al horizonte exterior de radio r_+ (V^+, U^+, θ, ϕ), el cual vendrá dado por:

$$ds^2 = -4k_+^2\frac{(r-r_-)^{1+k_-/k_+}(r-r'_+)^{1-k'_+/k_+}r_+r'^{k'_+/k_+}_+}{r_-^{k_-/k_+}r^2}dV^+dU^+ + r^2d\Omega^2 \tag{4.44}$$

Para el horizonte de Cauchy de radio r_-:

Empleando nuevamente la expresión general (4.27) obtenida anteriormente, tenemos que:

$$v-\mu = 2k_+ \ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| - 2k_- \ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| + 2k'_+ \ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right| \tag{4.27}$$

$$-(v-\mu) = -2k_+ \ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| + 2k_- \ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| - 2k'_+ \ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|$$

$$-\frac{1}{2k_-}(v-\mu) = -\frac{k_+}{k_-}\ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| + \ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| - \frac{k'_+}{k_-}\ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|$$

$$-\frac{1}{2k_-}(v-\mu) = \ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| - \ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right|^{k_+/k_-} - \ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|^{k'_+/k_-}$$

Con esto:

$$\frac{\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right|}{\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right|^{k_+/k_-}} \frac{1}{\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|^{k'_+/k_-}} = e^{-\frac{1}{2k_-}(v-\mu)} \tag{4.45}$$

Luego, tras reemplazar las expresiones (4.29), (4.30) y (4.31) en (4.45), se obtiene:

$$\frac{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)}{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{k_+/k_-}\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{k'_+/k_-}} = e^{-\frac{1}{2k_-}v} e^{\frac{1}{2k_-}\mu} \tag{4.46}$$

Se proponen las siguientes coordenadas de Kruskal relativas al horizonte de Cauchy cuyo radio es r_- (V^-, U^-, θ, ϕ):

$$V^- = e^{-\frac{1}{2k_-}v} \tag{4.47}$$

$$U^- = -e^{\frac{1}{2k_-}\mu} \tag{4.48}$$

Con esto (4.46) se reescribirá como:

$$V^-U^- = -\frac{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)}{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{k_+/k_-}\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{k'_+/k_-}} \tag{4.49}$$

Donde además se tiene que:

$$v = -2k_- \ln|V^-| \tag{4.50}$$

$$\mu = 2k_- \ln|U^-| \tag{4.51}$$

Diferenciando:

$$dV^- = -\frac{1}{2k_-}V^- dv \tag{4.52}$$

$$dU^- = \frac{1}{2k_-}U^- d\mu \tag{4.53}$$

$$dV^- dU^- = -\frac{1}{4k_-^2}V^- U^- dv d\mu$$

$$dv d\mu = -\frac{4k_-^2}{V^- U^-}dV^- dU^- \tag{4.54}$$

Por otro lado, de (4.49) obtenemos:

$$\frac{1}{V^-U^-} = -\frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{k_+/k_-}\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{k'_+/k_-}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)} \tag{4.55}$$

Con esto, reemplazando (4.55) en (4.54) obtenemos:

$$dvd\mu = 4k_-^2 \frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{k_+/k_-}\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{k'_+/k_-}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)} dV^- dU^-$$

Resultado que puede ser reescrito como:

$$dvd\mu = 4k_-^2 \frac{(r-r_+)^{k_+/k_-}(r-r'_+)^{k'_+/k_-} r_-}{(r-r_-) r_+^{k_+/k_-} r'^{k'_+/k_-}_+} dV^- dU^- \tag{4.56}$$

Finalmente, sustituyendo (4.56) en la forma dada por (4.19), obtendremos el elemento de línea ds^2 correspondiente al exterior del agujero negro de RNdS relativo al horizonte interior de eventos de radio r_- en el sistema de las coordenadas de Kruskal (V^-, U^-, θ, ϕ):

$$ds^2 = -\frac{4k_-^2(r-r_+)^{1+k_+/k_-}(r-r'_+)^{1+k'_+/k_-} r_-}{r_+^{k_+/k_-} r'^{k'_+/k_-}_+ r^2} dV^- dU^- + r^2 d\Omega^2 \tag{4.57}$$

Para el horizonte cosmológico de radio r'_+:

Empleando nuevamente la relación general (4.27) hallada:

$$v - \mu = 2k_+ \ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| - 2k_- \ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| + 2k'_+ \ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right| \tag{4.27}$$

$$\frac{1}{2k'_+}(v-\mu) = \frac{k_+}{k'_+}\ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| - \frac{k_-}{k'_+}\ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| + \ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|$$

$$\frac{1}{2k'_+}(v-\mu) = \ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right|^{k_+/k'_+} - \ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right|^{k_-/k'_+} + \ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|$$

$$\frac{1}{2k'_+}(v-\mu) = \ln\left(\frac{\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right|^{k_+/k'_+}}{\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right|^{k_-/k'_+}}\right) + \ln\left(\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|\right)$$

$$\frac{1}{2k'_+}(v-\mu)=\ln\left(\frac{\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right|^{k_+/k'_+}}{\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right|^{k_-/k'_+}}\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|\right)$$

Con esto:

$$\frac{\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right|^{k_+/k'_+}\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right|}{\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right|^{k_-/k'_+}}=e^{\frac{1}{2k'_+}(v-\mu)} \tag{4.58}$$

Reemplazando (4.29), (4.30) y (4.31) en (4.58):

$$\frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{k_+/k'_+}\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{k_-/k'_+}}=e^{\frac{1}{2k'_+}v}e^{-\frac{1}{2k'_+}\mu}$$

Proponiendo ahora el siguiente juego de coordenadas de Kruskal asociado al horizonte cosmológico de radio r'_+ $(V^{+\prime},U^{+\prime},\theta,\phi)$, tenemos:

$$V^{+\prime}=e^{\frac{1}{2k'_+}v} \tag{4.59}$$

$$U^{+\prime}=-e^{-\frac{1}{2k'_+}\mu} \tag{4.60}$$

Donde, adicionalmente:

$$v=2k'_+\ln|V^{+\prime}| \tag{4.61}$$

$$\mu=-2k'_+\ln|U^{+\prime}| \tag{4.62}$$

Con esto:

$$V^{+\prime}U^{+\prime}=-\frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{k_+/k'_+}\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{k_-/k'_+}} \tag{4.63}$$

Luego:

$$\frac{1}{V^{+\prime}U^{+\prime}} = -\frac{(r-r_-)^{k_-/k\prime_+} r_+^{k_+/k\prime_+} r_+'}{(r-r_+)^{k_+/k\prime_+}(r-r_+')r_-^{k_-/k\prime_+}} \tag{4.64}$$

Luego, diferenciando $V^{+\prime}$ y $U^{+\prime}$:

$$dV^{+\prime} = \frac{1}{2k_+'} V^{+\prime} dv$$

$$dv = \frac{2k_+'}{V^{+\prime}} dV^{+\prime} \tag{4.65}$$

$$dU^{+\prime} = -\frac{1}{2k_+'} U^{+\prime} d\mu$$

$$d\mu = -\frac{2k_+'}{U^{+\prime}} dU^{+\prime} \tag{4.66}$$

Con esto:

$$dvd\mu = -\frac{4{k_+'}^2}{V^{+\prime}U^{+\prime}} dV^{+\prime} dU^{+\prime} \tag{4.67}$$

Luego, reemplazando (4.64) en (4.67), se obtiene:

$$dvd\mu = \frac{4{k_+'}^2 (r-r_-)^{k_-/k\prime_+} r_+^{k_+/k\prime_+} r_+'}{(r-r_+)^{k_+/k\prime_+}(r-r_+')r_-^{k_-/k\prime_+}} dV^{+\prime} dU^{+\prime} \tag{4.68}$$

Sustituyendo ahora el resultado (4.68) en la forma general dada por (4.19), obtendremos la forma exacta del elemento de línea ds^2 correspondiente a la métrica que describe el espacio-tiempo en el exterior de un agujero negro de RNdS asociado al horizonte cosmológico cuyo radio es r_+' en las coordenadas de Kruskal $(V^{+\prime}, U^{+\prime}, \theta, \phi)$:

$$ds^2 = -4{k_+'}^2 \frac{(r-r_+)^{1-k_+/k\prime_+}(r-r_-)^{1+k_-/k\prime_+} r_+^{k_+/k\prime_+} r_+'}{r_-^{k_-/k\prime_+} r^2} dV^{+\prime} dU^{+\prime} + r^2 d\Omega^2 \tag{4.69}$$

En ciertos casos es bastante conveniente y útil expresar las coordenadas de Kruskal (V, U, θ, ϕ) empleando para este fin un nuevo sistema de coordenadas (T, X), en donde T venga a ser la

coordenada como de tiempo y X sea la *coordenada como de espacio*. Esta nueva forma de representar a las coordenadas de Kruskal nos permitirá trazar los diagramas de Kruskal, con el objeto de estudiar los diferentes tipos de trayectorias geodésicas que podrían ser descritas en el espacio-tiempo. Así tenemos que tales coordenadas se definen como:

$$X = \frac{1}{2}(V + U) \tag{4.70}$$

$$T = \frac{1}{2}(V - U) \tag{4.71}$$

De esta forma, despejando, podemos obtener:

$$V = X + T \tag{4.72}$$

$$U = X - T \tag{4.73}$$

Con esto:

$$dV = dX + dT \tag{4.74}$$

$$dU = dX - dT \tag{4.75}$$

$$VU = X^2 - T^2 \tag{4.76}$$

$$dVdU = dX^2 - dT^2 \tag{4.77}$$

Como se puede observar, no se perderá generalidad si adoptamos los cambios:

$$V \to V^+, V^-, V^{+\prime}$$

Entonces:

$$V^+, V^-, V^{+\prime} = X + T$$

(4.78)

$$U \to U^+, U^-, U^{+\prime}$$

Entonces:

$$U^+, U^-, U^{+\prime} = X - T \tag{4.79}$$

De manera similar se obtiene:

$$V^+U^+, V^-U^-, V^{+\prime}U^{+\prime} = X^2 - T^2 \tag{4.80}$$

$$dV^+, dV^-, dV^{+\prime} = dX + dT \tag{4.81}$$

$$dU^+, dU^-, dU^{+\prime} = dX - dT \tag{4.82}$$

Con esto:

$$dV^+dU^+, dV^-dU^-, dV^{+\prime}dU^{+\prime} = dX^2 - dT^2 \tag{4.83}$$

Por lo tanto, con esto, a partir de aquí podremos reescribir la métrica del agujero negro de RNdS en las coordenadas de Kruskal, así como sus propiedades fundamentales, en términos del nuevo sistema (T, X) para cada uno de sus tres horizontes de radios r_+, r_- y r'_+ estudiados de la siguiente manera:

Para el horizonte exterior de radio r_+ tenemos:

Reemplazando en (4.44):

$$ds^2 = -4{k_+}^2 \frac{(r - r_-)^{1+{k_-}/{k_+}}(r - r'_+)^{1-{k'_+}/{k_+}} r_+ {r'_+}^{{k'_+}/{k_+}}}{{r_-}^{{k_-}/{k_+}} r^2}(-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2 \tag{4.84}$$

Reemplazando en (4.38):

$$T^2 - X^2 = \frac{\left(\frac{r - r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r - r'_+}{r'_+}\right)^{{k'_+}/{k_+}}}{\left(\frac{r - r_-}{r_-}\right)^{{k_-}/{k_+}}} \tag{4.85}$$

Para el horizonte de Cauchy de radio r_- tenemos:

Reemplazando en (4.57):

$$ds^2 = -4{k_-}^2 \frac{(r-r_+)^{1+{k_+}/{k_-}}(r-r'_+)^{1+{k'_+}/{k_-}}r_-}{{r_+}^{{k_+}/{k_-}}{r'_+}^{{k'_+}/{k_-}}r^2}(-dT^2+dX^2)+r^2d\Omega^2 \tag{4.86}$$

Reemplazando esto en (4.49):

$$T^2-X^2 = \frac{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)}{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{{k_+}/{k_-}}\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{{k'_+}/{k_-}}} \tag{4.87}$$

Para el horizonte cosmológico de radio r'_+ tenemos:

Reemplazando esto en (4.69):

$$ds^2 = -4{k'_+}^2 \frac{(r-r_+)^{1-{k_+}/{k'_+}}(r-r_-)^{1+{k_-}/{k'_+}}{r_+}^{{k_+}/{k'_+}}r'_+}{{r_-}^{{k_-}/{k'_+}}r^2}(-dT^2+dX^2)+r^2d\Omega^2 \tag{4.88}$$

Reemplazando en (4.63):

$$T^2-X^2 = \frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{{k_+}/{k'_+}}\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{{k_-}/{k'_+}}} \tag{4.89}$$

4.5 Estructura causal del agujero negro de RNdS en las coordenadas de Kruskal

Estructura causal relativa al horizonte exterior:

Para obtener la forma de las geodésicas radiales nulas que describan las trayectorias de señales luminosas y partículas lumínicas, debemos considerar al intervalo *tipo-luz* en la métrica dada en las coordenadas (T, X) dada en (4.84).Esto es:

$$ds^2 = 0$$

Asimismo, no se perderá generalidad si omitimos el aporte de la parte angular del elemento de línea:

$$d\Omega^2 = 0$$

Con esto:

$$0 = -4{k_+}^2 \frac{(r-r_-)^{1+{}^{k_-}/_{k_+}}(r-r'_+)^{1-{}^{k'_+}/_{k_+}} r_+ {r'_+}^{{}^{k'_+}/_{k_+}}}{{r_-}^{{}^{k_-}/_{k_+}} r^2}(-dT^2 + dX^2)$$

$$-dT^2 + dX^2 = 0$$

$$dT = \pm dX$$

Integrando:

$$\int dT = \pm \int dX$$

$$T = \pm X + cte \tag{4.90}$$

Con esto, en estas coordenadas (T, X) la forma más general de las geodésicas radiales nulas que describen las trayectorias de la luz en el espacio-tiempo viene precisada por la expresión (4.90).

Ahora, de la expresión (4.85) obtenida, tenemos que:

$$T^2 - X^2 = \frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{{}^{k'_+}/_{k_+}}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{{}^{k_-}/_{k_+}}} \tag{4.85}$$

En el horizonte exterior:

$r = r_+$

$$T^2 - X^2 = \frac{\left(\frac{r_+-r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r_+-r'_+}{r'_+}\right)^{{}^{k'_+}/_{k_+}}}{\left(\frac{r_+-r_-}{r_-}\right)^{{}^{k_-}/_{k_+}}}$$

Con esto:

$$T^2 - X^2 = 0$$

$$T = \pm X \tag{4.91}$$

Con esto tenemos que las superficies con $r = r_+$ serán geodésicas radiales nulas cuya forma vendrá dada por la expresión (4.91).

Luego tenemos que, para una distancia r constante y distinta al radio del horizonte r_+, la relación dada en (4.85) nos dará como resultado:

Sea:

$$r = r_0 = cte$$

Donde:

$\forall\ r_0 = cte$

$r_0 \neq r_+$

$r_0 > r_+$ (sólo se estudia el comportamiento de la métrica *fuera* de los horizontes y no *detrás* de estos).

Con esto, en (4.85), obtenemos que:

$$T^2 - X^2 = \frac{\left(\frac{r_0 - r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r_0 - r_+'}{r_+'}\right)^{k_+'/k_+}}{\left(\frac{r_0 - r_-}{r_-}\right)^{k_-/k_+}}$$

Es fácil observar que:

$$\sigma_+ = \frac{\left(\frac{r_0 - r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r_0 - r_+'}{r_+'}\right)^{k_+'/k_+}}{\left(\frac{r_0 - r_-}{r_-}\right)^{k_-/k_+}} \tag{4.92}$$

$$\sigma_+ = cte$$

Con esto:

$$T^2 - X^2 = \sigma_+ \tag{4.93}$$

Esto significa que las superficies en las cuales la distancia $r = r_0 = cte$ tal que $r_0 \neq r_+$, corresponderán a hipérbolas en torno al horizonte exterior cuyo radio es r_+.

Ahora dividiremos las relaciones (4.70) con (4.71) y obtendremos:

$$\frac{X}{T} = \frac{V + U}{V - U}$$

Particularizando ahora para nuestro caso específico, no perderemos generalidad si:

$$V \to V^+$$

$$U \to U^+$$

Con esto:

$$\frac{X}{T} = \frac{V^+ + U^+}{V^+ - U^+} \tag{4.94}$$

Sustituyendo (4.34) y (4.35) en (4.94):

$$\frac{X}{T} = \frac{e^{\frac{1}{2k_+}v} - e^{-\frac{1}{2k_+}\mu}}{e^{\frac{1}{2k_+}v} + e^{-\frac{1}{2k_+}\mu}} \tag{4.95}$$

Sustituyendo ahora las coordenadas de Eddington-Finkelstein dadas por (4.10) y (4.11) en (4.95), obtenemos:

$$\frac{X}{T} = \frac{e^{\frac{1}{2k_+}t} - e^{-\frac{1}{2k_+}t}}{e^{\frac{1}{2k_+}t} + e^{-\frac{1}{2k_+}t}}$$

$$\frac{X}{T} = \frac{senh\left(\frac{1}{2k_+}t\right)}{cosh\left(\frac{1}{2k_+}t\right)}$$

Con esto:

$$\frac{X}{T} = tangh\left(\frac{1}{2k_+}t\right) \tag{4.96}$$

Notar que la expresión (4.96) obtenida constituye una relación *general* para el caso específico del horizonte exterior cuyo radio es r_+. Sin embargo, ya sabemos que para el caso especial de la luz, sus geodésicas radiales nulas relativas a este mismo horizonte de radio r_+ mencionado –cuando nos encontramos en el horizonte referido, es decir, cuando específicamente $r = r_+$- son de la forma dada por (4.91):

$$T = \pm X \tag{4.91}$$

Luego de (4.91):

$$\frac{X}{T} = \pm 1 \tag{4.97}$$

Por tanto, para el caso especial de las señales luminosas en torno al horizonte exterior tendremos que comparar las relaciones dadas por (4.96) y (4.97), obteniendo como resultado:

$$tangh\left(\frac{1}{2k_+}t\right) = \pm 1 \tag{4.98}$$

Diferenciando:

$$\frac{1}{2k_+} sech^2\left(\frac{1}{2k_+}t\right) dt = 0$$

$$sech^2\left(\frac{1}{2k_+}t\right) dt = 0 \tag{4.99}$$

Puesto que nos encontramos tratando el caso especial y específico de las señales luminosas, recordando que éstas se encuentran gobernadas por el intervalo *tipo-luz*, tenemos que:

$$ds^2 = 0$$

Adicionalmente, recordando que:

$$ds^2 = -d\tau^2$$

Entonces, con esto, el intervalo *tipo-luz* (light-like) se reescribirá como:

$$-d\tau^2 = 0$$

$$d\tau^2 = 0$$

$$d\tau = 0$$

(4.100)

Luego, proponiendo el *azantz* de la igualación de las expresiones dadas por (4.99) y (4.100), podemos obtener:

$$sech^2\left(\frac{1}{2k_+}t\right)dt = d\tau \tag{4.101}$$

Debemos notar que la ecuación (4.101) es válida únicamente y sí y solamente sí cuando la distancia $r = r_+$, puesto que dicha expresión se obtuvo directamente de la relación (4.91):

$$T = \pm X \tag{4.91}$$

Que es, como sabemos, la forma de las geodésicas radiales nulas que definen las trayectorias que describan las señales luminosas en las coordenadas de Kruskal (T, X), la cual es válida tan sólo y únicamente para las superficies en las que $r = r_+$.

Luego:

Integrando la expresión (4.101):

$$\int_0^{\Delta t} sech^2\left(\frac{1}{2k_+}t\right)dt = \int_0^{\Delta\tau} d\tau$$

$$2k_+ tangh\left(\frac{1}{2k_+}\Delta t\right) = \Delta\tau$$

Entonces, con esto:

$$tangh\left(\frac{1}{2k_+}\Delta t\right) = \frac{1}{2k_+}\Delta\tau$$

Aplicando ahora la función hiperbólica inversa, esto resulta finalmente:

$$\Delta t = 2k_+ tangh^{-1}\left(\frac{1}{2k_+}\Delta\tau\right) \tag{4.102}$$

Donde aquí:

En general, asumimos que:

$\forall\ \Delta\tau \neq 0$ y finito.

Sea un observador O *cayendo* por el horizonte exterior de radio r_+ hacia el agujero negro de RNdS. Dicho observador envía una señal luminosa (señal electromagnética), encontrándose ubicado a una distancia r de la posición de la singularidad o agujero negro de RNdS (la cual se encuentra ubicada en el origen de coordenadas $r = 0$).Dicha señal emitida poseerá un *periodo propio* $\Delta\tau$, el cual se asumirá en general como siempre finito y no nulo. A una distancia lo suficientemente grande de dicho horizonte, se encuentra ubicado un segundo observador O', tal que a dicha distancia del horizonte mencionado la geometría del espacio-tiempo sea minkowskiana o asintóticamente plana. El observador lejano O', en teoría, tendrá que recibir la señal luminosa al cabo de un tiempo Δt, el cual será finalmente el periodo que tendrá dicha señal para él.

El resultado obtenido (4.102) constituye el periodo de la señal luminosa Δt que medirá el observador lejano O', cuando dicha señal sea enviada por un observador O que se encuentre ubicado exactamente en la frontera misma del horizonte exterior cuyo radio es r_+, esto es, cuando la distancia de O a la singularidad o agujero negro de RNdS r sea exacta y precisamente el radio del horizonte señalado $r = r_+$.

La expresión (4.102) obtenida nos muestra que una señal luminosa de periodo finito $\Delta\tau$, que sea enviada por un observador O que se encontrase ubicado exactamente en el horizonte de radio r_+, será recibida por un segundo observador O' -muy lejano al horizonte mencionado- en un intervalo de tiempo finito Δt, lo que implicaría que para este segundo observador lejano O' dicha señal luminosa tendría un periodo Δt finito y como consecuencia de esto no presentaría un corrimiento infinito hacia el rojo. Es preciso y necesario aclarar y recalcar que este resultado es obtenido mediante el empleo y auxilio de las coordenadas de Kruskal.

Dicho resultado contrasta por completo con el resultado obtenido en coordenadas esféricas dado por la expresión (4.9), según el cual, el observador lejano O' jamás llegaría a recibir la misma señal de periodo propio $\Delta\tau$ finito al cabo de un tiempo finito Δt, por lo que en consecuencia tal señal presentaría para O' un corrimiento infinito hacia el rojo, en el caso específico de ser enviada desde el horizonte.

Por lo tanto, como se puede observar, los resultados (4.9) y (4.102) obtenidos mediante el empleo de las coordenadas esféricas y de Kruskal respectivamente, nos muestran que la forma en cómo se comporte el periodo Δt (y en suma la estructura causal) de una señal enviada desde el horizonte exterior para el observador lejano a dicho horizonte O' dependerá del sistema de coordenadas que se emplee para resolver e interpretar el problema físico en cuestión. De modo tal que la solución dada a este problema mediante el empleo de las coordenadas de Kruskal, nos da el resultado más completo y consistente.

Estructura causal relativa al horizonte interior o de Cauchy:

Partiremos similarmente al caso anterior del intervalo *tipo-luz* (light-like), sustituyéndolo en el elemento de línea expresado en las coordenadas de Kruskal del tipo (T, X) correspondiente a este caso,

para obtener la forma más general de las geodésicas radiales nulas en éstas coordenadas en torno al horizonte de radio r_-.Así tenemos que:

$$ds^2 = 0 \qquad \text{(light-like)}$$

Tal como en el caso anterior, no se perderá generalidad alguna si además prescindimos de la parte angular de dicha métrica:

$$d\Omega^2 = 0$$

Con esto, la expresión (4.86) queda como:

$$0 = -4k_-{}^2 \frac{(r - r_+)^{1+{k_+}/{k_-}} (r - r'_+)^{1+{k'_+}/{k_-}} r_-}{r_+^{\,{k_+}/{k_-}} r'^{\,{k'_+}/{k_-}}_+ r^2} (-dT^2 + dX^2)$$

$$-dT^2 + dX^2 = 0$$

$$dT = \pm dX$$

Integrando:

$$T = \pm X + cte \qquad (4.103)$$

Que corresponde a la forma más general de las geodésicas radiales nulas en las coordenadas de Kruskal del tipo (T, X) asociadas al horizonte de Cauchy.

Ahora, evaluando en este horizonte la relación dada por (4.87) tenemos:

En el horizonte:

Para $r = r_-$:

$$T^2 - X^2 = 0$$

$$T = \pm X \qquad (4.104)$$

Que viene a ser la forma particular de las geodésicas radiales nulas expresadas en las coordenadas de Kruskal del tipo (T, X) correspondiente a las superficies donde $r = r_-$.

Ahora considerando solo aquellas superficies en las que tengamos que la distancia $r = r_0 = cte$ diferente al radio de este horizonte específico r_-, es decir:

Para:

$$r = r_0 = cte$$

Donde:

$\forall \;\; r_0 = cte$

$r_0 \neq r_-$

$r_0 > r_-$ (sólo se estudia el comportamiento de la métrica *fuera* de los horizontes y no *detrás* de estos).

Sustituyendo esto en la relación (4.87):

$$T^2 - X^2 = \frac{\left(\frac{r_0 - r_-}{r_-}\right)}{\left(\frac{r_0 - r_+}{r_+}\right)^{k_+/k_-}\left(\frac{r_0 - r'_+}{r'_+}\right)^{k'_+/k_-}}$$

Donde tenemos que:

$$\sigma_- = \frac{\left(\frac{r_0 - r_-}{r_-}\right)}{\left(\frac{r_0 - r_+}{r_+}\right)^{k_+/k_-}\left(\frac{r_0 - r'_+}{r'_+}\right)^{k'_+/k_-}}$$

$$\sigma_- = cte$$

Con esto:

$$T^2 - X^2 = \sigma_- \tag{4.105}$$

Con esto, las superficies con $r = r_0 = cte$ tal que $r_0 \neq r_-$ corresponderán a hipérbolas (es decir, a trayectorias hiperbólicas sobre el espacio-tiempo) expresadas en las coordenadas de Kruskal del tipo (T, X).

Ahora, empleando el mismo procedimiento relativo al horizonte de radio r_+, la relación entre las coordenadas de Kruskal (T, X) para el horizonte cuyo radio sea r_-, vendrá dada por:

$$\frac{X}{T} = \frac{V + U}{V - U}$$

Haciendo:

$$V \to V^-$$

$$U \to U^-$$

$$\frac{X}{T} = \frac{V^- + U^-}{V^- - U^-} \tag{4.106}$$

Donde V^- y U^- venían dadas por:

$$V^- = e^{-\frac{1}{2k_-}v} \tag{4.47}$$

$$U^- = -e^{\frac{1}{2k_-}\mu} \tag{4.48}$$

Con esto:

$$\frac{X}{T} = \frac{e^{-\frac{1}{2k_-}v} - e^{\frac{1}{2k_-}\mu}}{e^{-\frac{1}{2k_-}v} + e^{\frac{1}{2k_-}\mu}}$$

Donde, las coordenadas de Eddington-Finkelstein v y μ eran dadas por:

$$v = t + \xi(r) \tag{4.10}$$

$$\mu = t - \xi(r) \tag{4.11}$$

Sustituyendo la relación anterior, se convierte en:

$$\frac{X}{T} = \frac{e^{-\frac{1}{2k_-}t} - e^{\frac{1}{2k_-}t}}{e^{-\frac{1}{2k_-}t} + e^{\frac{1}{2k_-}t}}$$

$$\frac{X}{T} = -\frac{senh\left(\frac{1}{2k_-}t\right)}{cosh\left(\frac{1}{2k_-}t\right)}$$

Con esto:

$$\frac{X}{T} = -tangh\left(\frac{1}{2k_-}t\right) \tag{4.107}$$

Siendo r la distancia a la cual se encuentre un observador O que envíe una señal luminosa, medida desde la propia singularidad o agujero negro de RNdS, sabemos que las geodésicas radiales nulas expresadas en las coordenadas de Kruskal (T, X) de dicha señal enviada desde el horizonte de Cauchy vienen dadas por:

$$T = \pm X \tag{4.108}$$

Donde, como sabemos, tal expresión sólo es válida únicamente cuando $r = r_-$.

Otra manera de reescribir la relación (4.108) es como:

$$\frac{X}{T} = \pm 1 \tag{4.109}$$

Ahora, igualando los resultados (4.107) y (4.109) obtenemos:

$$-tangh\left(\frac{1}{2k_-}t\right) = \pm 1$$

$$tangh\left(\frac{1}{2k_-}t\right) = \mp 1$$

Diferenciando esto, tenemos:

$$\frac{1}{2k_-}sech^2\left(\frac{1}{2k_-}t\right)dt = 0$$

Entonces, con esto:

$$sech^2\left(\frac{1}{2k_-}t\right)dt = 0 \tag{4.110}$$

Puesto que tratamos de describir específicamente el comportamiento de las señales luminosas en torno al horizonte de Cauchy, dado que éstas vienen representadas en el espacio-tiempo por el intervalo *tipo-luz*, entonces tendremos análogamente al caso anterior del horizonte r_+ que:

$$d\tau^2 = 0$$

$$d\tau = 0 \tag{4.111}$$

Luego, comparando las expresiones (4.110) y (4.111), se obtiene:

$$sech^2\left(\frac{1}{2k_-}t\right)dt = d\tau \tag{4.112}$$

Integrando tenemos finalmente:

$$\int_0^{\Delta t} sech^2\left(\frac{1}{2k_-}t\right)dt = \int_0^{\Delta\tau} d\tau$$

$$2k_-tangh\left(\frac{1}{2k_-}\Delta t\right) = \Delta\tau$$

$$tangh\left(\frac{1}{2k_-}\Delta t\right) = \frac{1}{2k_-}\Delta\tau$$

Luego, aplicando la respectiva función inversa, finalmente se obtiene:

$$\Delta t = 2k_-tangh^{-1}\left(\frac{1}{2k_-}\Delta\tau\right) \tag{4.113}$$

Donde:

En general, se asume que:

$\forall\ \Delta\tau \neq 0$ y finito.

Tal cual, como se obtuvo en relación al horizonte exterior de radio r_+, aquí también podrá existir intercambio de información entre el horizonte de Cauchy de radio r_- y cualquier punto lejano arbitrario del espacio-tiempo a dicho horizonte, sin importar lo distante que se encuentre de él. Podemos concluir –tal como se dedujo para el horizonte anterior r_+- que al analizar el problema de la causalidad con el auxilio de las coordenadas de Kruskal, cualquier observador lejano O' al horizonte de radio r_- podrá recibir cualquier señal luminosa que haya sido enviada desde este mismo horizonte específico señalado por otro observador O, al cabo de un tiempo Δt finito.Como consecuencia de

dicho periodo finito Δt medido por el observador lejano O', este hecho implicará que dicha señal enviada desde el horizonte interior no presentará para tal observador lejano un corrimiento infinito hacia el rojo. Este resultado obtenido –plasmado en la ecuación (4.113)- es totalmente contrario al resultado que describe el mismo problema estudiado mediante la métrica de RNdS expresada en coordenadas esféricas –dado por la ecuación (4.9)-, el cual establece que se impondrá la *censura cósmica* de un $\Delta t \to \infty$ y, en virtud de ello, para el observador lejano O' al horizonte r_-, una señal enviada desde tal horizonte presentará un corrimiento infinito al rojo. Como podemos observar, el tipo de *singularidades coordenadas* que acabamos de presentar son evitadas y, por lo tanto, resueltas cuando se aborda el problema referido empleando las coordenadas de Kruskal (V^-, U^-, θ, ϕ) relativas al horizonte de Cauchy.

Lo cual nos vuelve a mostrar una vez más que la solución del problema depende de manera crucial del tipo de sistema de coordenadas que se proponga utilizar y emplee para resolverlo.

Estructura causal relativa al horizonte cosmológico:

Siguiendo exactamente el mismo procedimiento empleado en los casos precedentes, relativos a los horizontes exterior y de Cauchy, se obtienen los mismos resultados análogos siguientes:

$$T = \pm X + cte \tag{4.114}$$

Que, como sabemos, viene a ser la forma general de las geodésicas radiales nulas en las coordenadas de Kruskal del tipo *como de tiempo* y *como de espacio* (T, X) en torno al horizonte cosmológico de radio r'_+.

$$T = \pm X \tag{4.115}$$

Forma particular de las geodésicas radiales nulas, expresadas en las coordenadas de Kruskal del tipo (T, X), para las superficies en las que $r = r'_+$, esto es, para aquellas señales luminosas que sean enviadas desde el horizonte cosmológico de radio r'_+.

Por otro lado, análogamente tenemos que:

$$T^2 - X^2 = \sigma'_+ \tag{4.116}$$

Donde aquí:

$$\sigma'_+ = cte$$

Que vienen a ser las trayectorias hiperbólicas sobre el espacio-tiempo, expresadas mediante las coordenadas de Kruskal del tipo (T, X), en torno al horizonte r'_+, para aquellas superficies en las cuales la distancia $r = r_0 = cte \neq r'_+$.

Por otra parte,

$$\frac{X}{T} = tangh\left(\frac{1}{2k'_+}t\right) \tag{4.117}$$

Y finalmente:

$$\Delta t = 2k'_+ tangh^{-1}\left(\frac{1}{2k'_+}\Delta\tau\right) \tag{4.118}$$

Donde, en general, se asume:

$\forall\ \Delta\tau \neq 0$ y finito.

Habiendo estudiado y descrito el comportamiento del espacio-tiempo en las cercanías y alrededores al horizonte del agujero negro de RNdS, así como su estructura causal (esto es, la posibilidad de ser físicamente factible o no el envío e intercambio de información desde sus horizontes hacia cualquier punto exterior e incluso *muy lejano* al mismo en el universo) y las propiedades geométricas básicas que presenta, empleando para ello el sistema de las coordenadas de Kruskal, estamos listos ahora para ponerlo en contacto con el campo escalar de la energía oscura genéricamente llamado *Quintaesencia*. Por lo tanto, en el siguiente capítulo podremos ver las consecuencias físicas surgidas del *acoplamiento mínimo* entre el campo gravitacional de RNdS (la curvatura o deformación del espacio-tiempo) y la Quintaesencia. Seremos testigos de cómo este acoplamiento entre ambos campos puede modificar la misma estructura geométrica del espacio inicial (produciendo el agujero negro de RNdS-Quintaesencia o *agujero negro con pelo*) y de qué manera la misma deformación en la métrica del espacio podría variar o no las propiedades de la propia Quintaesencia, al encontrarse esta acoplada o no al campo gravitacional de RNdS, mediante el enfoque de distintos modelos que nos permitirán describirla tales como la teoría de Kiselev, el modelo ΛCDM y el gas de Chaplygin generalizado.

CAPÍTULO 5

QUINTAESENCIA EN EL ESPACIO-TIEMPO DE RNdS

5.1 Quintaesencia en el modelo de fluido perfecto inhomogéneo de Kiselev

El acoplamiento mínimo de un campo escalar de quintaesencia ϕ al espacio-tiempo curvo que define el campo gravitacional en el exterior de un agujero negro arbitrario, viene descrito por la densidad lagrangiana L_q de dicho campo escalar de quintaesencia, escrita en su forma covariante como:

$$L_q = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \tag{5.1}$$

Dado que, como se sabe, se cumple que:

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$$

$$\nabla_\nu \phi = \partial_\nu \phi$$

Entonces:

$$L_q = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \tag{5.2}$$

El tensor de energía-momento T_ν^μ del campo escalar ϕ se define en general como:

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial L_q}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^\mu L_q \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial L_q}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\nu \phi + \partial_\mu \phi \delta_\mu^\nu)$$

Efectuando:

$$\frac{\partial L_q}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial^\nu \phi \delta_\mu^\nu$$

Haciendo $\nu = \mu$:

$$\frac{\partial L_q}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi + \frac{1}{2}\partial^\mu \phi$$

$$\frac{\partial L_q}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi \tag{5.4}$$

Reemplazando:

$$T_\nu^\mu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \delta_\nu^\mu L_q$$

$$g^{\lambda\nu} T_\nu^\mu = g^{\lambda\nu}\partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - g^{\lambda\nu}\delta_\nu^\mu L_q$$

$$T^{\mu\lambda} = \partial^\mu \phi \partial^\lambda \phi - g^{\lambda\mu} L_q$$

Debido a la simetría del tensor métrico sabemos que:

$$g^{\lambda\mu} = g^{\mu\lambda}$$

$$T^{\mu\lambda} = \partial^\mu \phi \partial^\lambda \phi - g^{\mu\lambda} L_q \tag{5.5}$$

Ahora, reemplazando (5.2) en (5.5):

$$T^{\mu\lambda} = \partial^\mu \phi \partial^\lambda \phi - g^{\mu\lambda}\left[\frac{1}{2} g^{\beta\nu}\partial_\beta \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)\right]$$

$$T^{\mu\lambda} = \partial^\mu \phi \partial^\lambda \phi - g^{\mu\lambda}\left[\frac{1}{2}\partial_\beta \phi \partial^\beta \phi - V(\phi)\right]$$

$$T^{\mu\lambda} = \partial^\mu \phi \partial^\lambda \phi - \frac{1}{2}\partial^\lambda \phi \partial^\mu \phi + g^{\mu\lambda} V(\phi)$$

$$T^{\mu\lambda} = \frac{1}{2}\partial^\mu \phi \partial^\lambda \phi + g^{\mu\lambda} V(\phi) \tag{5.6}$$

A continuación, se considera este campo escalar de quintaesencia ϕ, como un fluido perfecto de densidad de energía ρ_q y presión isotrópica P_q. De modo tal que el tensor de energía-momento para dicho fluido perfecto $T^{\mu\lambda}_{(fluido)}$ es dado por:

$$T^{\mu\lambda}_{(fluido)} = (\rho_q + P_q)\mu^\mu \mu^\lambda - P_q g^{\mu\lambda} \tag{5.7}$$

Como el campo escalar de quintaesencia ϕ se considera como un fluido perfecto de presión P_q y densidad de energía ρ_q, entonces:

$$T^{\mu\lambda} = T^{\mu\lambda}_{(fluido)}$$

$$\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial^{\lambda}\phi + g^{\mu\lambda}V(\phi) = \left(\rho_q + P_q\right)\mu^{\mu}\mu^{\lambda} - P_q g^{\mu\lambda}$$

$$\frac{1}{2}g_{\lambda\beta}\partial^{\mu}\phi\partial^{\lambda}\phi + g_{\lambda\beta}g^{\mu\lambda}V(\phi) = \left(\rho_q + P_q\right)g_{\lambda\beta}\mu^{\mu}\mu^{\lambda} - P_q g_{\lambda\beta}g^{\mu\lambda}$$

$$\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\beta}\phi + \delta^{\mu}_{\beta}V(\phi) = \left(\rho_q + P_q\right)\mu^{\mu}\mu_{\beta} - P_q\delta^{\mu}_{\beta}$$

Hacemos $\beta = \mu$:

$$\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi + \delta^{\mu}_{\mu}V(\phi) = \left(\rho_q + P_q\right)\mu^{\mu}\mu_{\mu} - P_q\delta^{\mu}_{\mu}$$

$$\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi + V(\phi) = \left(\rho_q + P_q\right)\mu^{\mu}\mu_{\mu} - P_q \tag{5.8}$$

Podemos definir la cuadrivelocidad μ^{μ} en términos del campo escalar de quintaesencia ϕ como:

$$\mu^{\mu} = \frac{\partial^{\mu}\phi}{\sqrt{-\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi}}$$

$$\mu_{\mu} = \frac{\partial_{\mu}\phi}{\sqrt{-\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi}}$$

Con esto:

$$\mu^{\mu}\mu_{\mu} = 1 \tag{5.9}$$

y

$$\rho_q = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi + V(\phi)$$

$$\rho_q = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}\partial_{\lambda}\phi\partial_{\mu}\phi + V(\phi) \tag{5.10}$$

Por otro lado, es sencillo darnos cuenta de que:

$$[L_q] = [P_q]$$

Entonces:

Como consecuencia de esto, se propone, sin perder generalidad, la equivalencia directa entre ambas cantidades:

$$P_q = L_q \tag{5.11}$$

En virtud de esto, reemplazando la expresión (5.2) en (5.11), obtenemos que:

$$P_q = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \tag{5.12}$$

A partir de aquí se considerará que el agujero negro que entrará en juego en el sistema campo gravitacional-campo escalar será el agujero negro de RNdS. De esta forma tenemos un agujero negro de RNdS (caracterizado por su masa M, carga eléctrica Q y una constante cosmológica positiva Λ) rodeado por el campo escalar de la quintaesencia ϕ, el cual es asumido como un fluido perfecto de presión isotrópica P_q y densidad de energía ρ_q.

Este sistema, así constituido, traerá como consecuencia el acoplamiento de ambos campos. Así tendremos que el acoplamiento mínimo del campo escalar de quintaesencia ϕ modificará la estructura métrica del propio espacio-tiempo de RNdS, convirtiéndolo en el agujero negro de RNdS-Quintaesencia.

Dicha solución viene definida en el trabajo de Kiselev [56, 57, 58], mediante el siguiente elemento de línea ds^2, expresado como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5.13}$$

En el modelo de la solución del agujero negro de RNdS-Quintaesencia hallada por Kiselev, se considera que la quintaesencia corresponde a un fluido perfecto inhomogéneo de presión isotrópica $P_q(r)$ y densidad de energía $\rho_q(r)$, que se encuentra gobernado por la ecuación de estado:

$$P_q(r) = w_q \rho_q(r) \tag{5.14}$$

Donde el parámetro de estado de quintaesencia w_q se considera constante, tal que:

$$\forall\ w_q = cte$$

Cuya condición de contorno es:

$$-1 < w_q < -\frac{1}{3}$$

En el modelo de Kiselev, el parámetro r_q viene a ser una constante de normalización con unidades y dimensiones de longitud:

$$\forall\ r_q = cte$$

$$[r_q] = distancia$$

Adicionalmente, Kiselev y Ghaffarnejad [56,57] plantearon que la densidad de energía $\rho_q(r)$, al encontrarse definida para un fluido perfecto no homogéneo, es de la forma:

$$\rho_q(r) = -\frac{3}{2} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.15}$$

De lo cual podemos deducir fácilmente que:

$$\forall\ \rho_q(r) > 0$$

Dado que aquí $w_q < 0$ –por la ecuación de estado (5.14)- esto implica que en este modelo de quintaesencia no homogénea (el modelo de Kiselev) la presión isotrópica $P_q(r)$ siempre será negativa, siendo con ello, en consecuencia, un modelo bastante acertado y, por lo tanto, consistente con la actual fase de expansión acelerada del universo.

Entonces:

$$\forall\ P_q(r) < 0$$

De todo lo anterior es fácil observar y deducir, debido a que este campo escalar de quintaesencia ϕ, al encontrarse modelado como un fluido perfecto inhomogéneo de acuerdo con la teoría de Kiselev, podemos concluir que será un campo escalar inhomogéneo, es decir:

$$\forall\ \phi = \phi(r) \tag{5.16}$$

Luego, expandiendo la expresión (5.10):

$$\rho_q = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \partial_\lambda \phi \partial_\mu \phi + V(\phi)$$

$$\rho_q = \frac{1}{2}\left[g^{0\mu}\partial_0\phi\partial_\mu\phi + g^{1\mu}\partial_1\phi\partial_\mu\phi + g^{2\mu}\partial_2\phi\partial_\mu\phi + g^{3\mu}\partial_3\phi\partial_\mu\phi\right] + V(\phi)$$

$$\begin{aligned}\rho_q = \frac{1}{2}[&g^{00}\partial_0\phi\partial_0\phi + g^{01}\partial_0\phi\partial_1\phi + g^{02}\partial_0\phi\partial_2\phi + g^{03}\partial_0\phi\partial_3\phi + g^{10}\partial_1\phi\partial_0\phi + g^{11}\partial_1\phi\partial_1\phi \\ &+ g^{12}\partial_1\phi\partial_2\phi + g^{13}\partial_1\phi\partial_3\phi + g^{20}\partial_2\phi\partial_0\phi + g^{21}\partial_2\phi\partial_1\phi + g^{22}\partial_2\phi\partial_2\phi \\ &+ g^{23}\partial_2\phi\partial_3\phi + g^{30}\partial_3\phi\partial_0\phi + g^{31}\partial_3\phi\partial_1\phi + g^{32}\partial_3\phi\partial_2\phi + g^{33}\partial_3\phi\partial_3\phi] + V(\phi)\end{aligned}$$

Debido a que la métrica dada en (5.13) es diagonal, esto significa que:

$$g^{\mu\nu} = 0 \quad \forall\ \mu \neq \nu$$

Con esto, la expresión anteriormente obtenida se reduce a la forma:

$$\rho_q = \frac{1}{2}[g^{00}(\partial_0\phi)^2 + g^{11}(\partial_1\phi)^2 + g^{22}(\partial_2\phi)^2 + g^{33}(\partial_3\phi)^2] + V(\phi)$$

Dado que el campo escalar ϕ es inhomogéneo, entonces, por la expresión (5.16) sabemos que:

$$\phi = \phi(r)$$

Entonces:

$$\rho_q = \frac{1}{2}g^{11}\phi'^2 + V(\phi) \tag{5.17}$$

Luego, de (5.13):

$$g_{11} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right)^{-1}$$

Puesto que $g^{11} = {g_{11}}^{-1}$:

Entonces:

$$g^{11} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}} \tag{5.18}$$

Con esto:

$$\rho_q(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right)\phi'^2 + V(\phi) \tag{5.19}$$

De igual manera procederemos con la expresión (5.12) obtenida:

$$P_q = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi)$$

$$P_q = \frac{1}{2} [g^{00}(\partial_0 \phi)^2 + g^{11}(\partial_1 \phi)^2 + g^{22}(\partial_2 \phi)^2 + g^{33}(\partial_3 \phi)^2] - V(\phi)$$

Y puesto que aquí, como ya indicamos, se cumple que:

$$\phi = \phi(r)$$

Entonces, obtenemos de manera similar al caso anterior:

$$P_q = \frac{1}{2} g^{11} \phi'^2 - V(\phi)$$

Y sustituyendo (5.18) obtenemos:

$$P_q(r) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right) \phi'^2 - V(\phi) \tag{5.20}$$

Con esto tenemos que:

(5.19) + (5.20):

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right) \phi'^2 = \rho_q(r) + P_q(r)$$

$$\phi'^2 = \frac{\rho_q(r) + P_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}$$

$$\phi' = \sqrt{\frac{\rho_q(r) + P_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}} \tag{5.21}$$

Luego (5.19)-(5.20):

$$\rho_q(r) - P_q(r) = 2V(\phi)$$

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\left[\rho_q(r) - P_q(r)\right]$$

$$V(r) = \frac{1}{2}\left[\rho_q(r) - P_q(r)\right] \tag{5.22}$$

Reemplazando (5.15) en (5.14):

$$P_q(r) = w_q\left[-\frac{3}{2}w_q\frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}}\right]$$

$$P_q(r) = -\frac{3}{2}{w_q}^2\frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.23}$$

Podemos observar que, sin importar el valor negativo que adopte el parámetro de estado de quintaesencia w_q, la presión $P_q(r)$ siempre será negativa, satisfaciendo plenamente con ello la condición anteriormente señalada de la expansión acelerada.

Luego:

Reemplazando (5.14) en (5.22):

$$V(r) = \frac{1}{2}\left(1 - w_q\right)\rho_q(r)$$

y reemplazando adicionalmente (5.15):

$$V(r) = -\frac{3}{4}w_q\left(1 - w_q\right)\frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.24}$$

Reemplazando la ecuación de estado dada por (5.14) en la expresión (5.21) obtenida, obtenemos que:

$$\phi' = \sqrt{\frac{\left(1 + w_q\right)\rho_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}}$$

$$\phi'^2 = \frac{\left(1 + w_q\right)\rho_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}$$

Reemplazando el resultado obtenido para la densidad de energía de quintaesencia no homogénea $\rho_q(r)$, se obtiene finalmente:

$$\phi'^2 = -\frac{3}{2}w_q(1+w_q)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2-\frac{r_q{}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right)^{-1}\frac{r_q{}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}}$$

$$\phi' = -\frac{3}{2}w_q(1+w_q)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2-\frac{r_q{}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right)^{-1}\frac{r_q{}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}}\phi'^{-1}$$

$$\phi' + \frac{3}{2}w_q(1+w_q)\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2-\frac{r_q{}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right)^{-1}\frac{r_q{}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}}\phi'^{-1} = 0 \tag{5.25}$$

Podemos ver claramente que la expresión (5.25) obtenida corresponde a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en r, de coeficientes variables, igualmente en r, homogénea y no lineal.

Con esto, hemos obtenido como resultado las expresiones que nos describirán a la densidad de energía $\rho_q(r)$ (5.15), la presión isotrópica $P_q(r)$ (5.23), el potencial escalar $V(r)$ (5.24) y la ecuación de campo para la quintaesencia ϕ mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo correspondiente al campo gravitacional en el exterior del agujero negro de RNdS (5.25), definida como un fluido perfecto aún isotrópico pero inhomogéneo de presión siempre negativa de acuerdo a lo propuesto por el modelo de Kiselev. Describiéndose con ello las propiedades físicas más importantes anteriormente señaladas de una quintaesencia no homogénea en el exterior del agujero negro de RNdS-Quintaesencia de Kiselev.

Es posible reescribir la ecuación diferencial no lineal (5.25) como una ecuación lineal efectuando una serie de cambios y operaciones algebraicas más o menos elaboradas, hasta finalmente lograr obtener:

$$\phi'' + \frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2-\frac{r_q{}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right)^{-1}\left(\frac{2M}{r^2}-\frac{2Q^2}{r^3}-\frac{2}{3}\Lambda r+(3w_q+1)\frac{r_q{}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+2}}\right) + \frac{3w_q+3}{r}\right]\phi' = 0 \tag{5.26}$$

Con esto se ha logrado convertir la ecuación de campo escalar de quintaesencia que era inicialmente no lineal (5.25), en una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en r, lineal, de coeficientes variables en r y homogénea de la forma:

$$\phi'' + \chi(r)\phi' = 0$$

5.2 Quintaesencia en el modelo del gas de Chaplygin

En la descripción de la naturaleza y propiedades de la energía oscura existen dos tipos de modelos que destacan: la Quintaesencia, que consiste en definir a la energía oscura como un campo escalar cuyas propiedades físicas son descritas por un potencial $V(\phi)$ que depende explícitamente de dicho campo escalar, el cual por este motivo recibe el nombre de Quintaesencia o simplemente campo escalar de Quintaesencia ϕ.

La segunda opción se encuentra en describir a la energía oscura presente en el universo como un fluido perfecto de presión isotrópica P_q, densidad de energía ρ_q y parámetro de estado w_q, encontrándose gobernado por una ecuación de estado específica y cuyas propiedades físicas específicas dependerán del tipo de modelo que se asuma para describir dicho fluido, es decir, si la energía oscura se describirá en términos de un fluido perfecto homogéneo o no-homogéneo, isotrópico o anisótropo, relativista o como un *gas frío*, etc.

Es sabido que ambas concepciones no son mutuamente excluyentes entre sí, por lo que podemos optar por un modelo de campo escalar ϕ para definir la energía oscura y describirla en términos de la estructura física de un modelo tipo *fluido perfecto*. Este hecho se ve claramente reflejado en las expresiones (5.10) y (5.12) que nos dicen que el campo escalar de quintaesencia ϕ posee una densidad de energía ρ_q y una presión isotrópica P_q, mediante la existencia de un potencial escalar $V(\phi)$ que depende explícitamente de la propia quintaesencia ϕ.Con esto, como sabemos, el modelo de quintaesencia se despliega como un modelo mucho más general que el modelo ΛCDM, el cual tan sólo es capaz de predecir la etapa actual de aceleración cósmica caracterizada por el dominio de la constante cosmológica Λ, pudiendo, en cambio, describir el comportamiento de la energía oscura en las distintas etapas o fases cronológicas del universo e incluso pudiendo hacer algunas predicciones en el tiempo cosmológico hacia el futuro.

Esto en gran parte es posible porque la quintaesencia se desarrolla por lo general sobre la base del principio cosmológico a grandes escalas cosmológicas de distancia, lo cual permite que la quintaesencia ϕ que describe a la energía oscura, varíe únicamente en función del tiempo t.

Es así como la quintaesencia trabaja sobre un parámetro de estado w_q constante, que en general, comprende valores en el rango:

$$-1 \leq w_q \leq \frac{1}{3}$$

Donde $w_q = -1$ corresponde a la etapa actual de expansión acelerada del cosmos en la que hoy domina la constante cosmológica Λ, la cual es descrita con bastante éxito, como ya se señaló, por el modelo ΛCDM; y, por otro lado, para $w_q = \frac{1}{3}$ hablamos de un universo en cuya fase o etapa es dominado por la radiación. Con esto, es factible describir el comportamiento de los distintos tipos de densidades de energía oscura en las correspondientes diferentes etapas cosmológicas del universo,

dado que se asume para grandes escalas espaciales que el campo escalar de quintaesencia es homogéneo y como consecuencia de esto se tiene que $\phi = \phi(t)$.

En la sección anterior se describió a dicho campo escalar mediante un modelo de fluido perfecto que seguía siendo isotrópico pero no homogéneo, ese modelo es la teoría de Kiselev, en el cual la ecuación de estado para el fluido sigue teniendo la misma estructura salvo que la densidad y presión ya no dependen más del tiempo t, sino ahora de la distancia r (expresión (5.14)), puesto que se pretende acoplar de manera mínima dicho campo escalar ϕ al espacio-tiempo curvo del agujero negro de RNdS en las vecindades de su horizonte más externo, donde la deformación intensa de la métrica del espacio implica que se deba de tomar en cuenta los efectos de la distancia r sobre el comportamiento de la presión isotrópica $P_q(r)$ y de la densidad de energía $\rho_q(r)$, formando con esto el agujero negro de RNdS-Quintaesencia.

Como ya se mostró en esa misma sección, la correspondiente ecuación de estado posee tan sólo dependencia radial y en ella el parámetro de estado w_q se encuentra regulado dentro del intervalo $-1 < w_q < -\frac{1}{3}$, de modo que a diferencia de los modelos quintaesencia usuales donde w_q puede adoptar valores tanto negativos como positivos, en cambio, en los modelos quintaesencia descritos a partir de un modelo de fluido perfecto isotrópico e inhomogéneo, tales como el de Kiselev [56, 57, 58], el parámetro de estado w_q sólo puede adoptar valores negativos lo cual, como ya se vio, asegura que la presión $P_q(r)$ que ejerza la quintaesencia ϕ siempre sea negativa, lo que significa que un modelo de quintaesencia no homogénea puede satisfacer y describir correctamente la etapa actual de aceleración cósmica moderada, tal cual como lo hacen desde hace mucho tiempo los modelos quintaesencia de dependencia temporal –los cuales trabajan con un campo escalar homogéneo $\phi(t)$ bajo la suposición del principio cosmológico- y el modelo standart ΛCDM donde w_q siempre vale -1.

Ahora, antes de abordar el modelo del gas de Chaplygin y más adelante su generalización (el cual es otra clase de modelo quintaesencia tipo fluido perfecto, donde se plantea una energía oscura escalar gobernada por una ecuación de estado esta vez bastante distinta que la de otros modelos similares de igual naturaleza), echemos un vistazo a la cosmología de FRW, la cual es válida para todo universo que satisfaga la presunción del principio cosmológico a grandes escalas cósmicas y cuya métrica [73] describe la estructura de un espacio-tiempo isotrópico, homogéneo y cuyas componentes espaciales posean dependencia temporal explícita mediante la función del *factor de escala* del universo $a(t)$, la cual viene definida como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2] \tag{5.27}$$

Reemplazando los coeficientes métricos de este elemento de línea ds^2, así como las componentes no nulas (diagonales) del tensor de energía-momento para el fluido perfecto $T^{\mu\nu}_{(fluido)}$ en las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein, conjuntamente con las componentes diagonales del tensor de

Ricci $R_{\mu\nu}$ y la correspondiente curvatura escalar R, se obtienen las famosas ecuaciones de Friedmann [73]:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho_q \tag{5.28}$$

$$-3H^2 - 2\dot{H} = 8\pi P_q \tag{5.29}$$

Como sabemos, derivando temporalmente la primera de estas expresiones (5.28) y reemplazando este resultado en (5.29) se obtiene la ecuación de continuidad de la cosmología:

$$\dot{\rho_q} + 3H\left(P_q + \rho_q\right) = 0 \tag{5.30}$$

Donde el parámetro de Hubble H viene dado por:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{5.31}$$

De las ecuaciones de Friedmann se obtienen expresiones generales que nos definirán el factor de escala a, así como la densidad de energía ρ_q en función del tiempo cosmológico t en la aproximación de un universo isotrópico y homogéneo a gran escala [73]:

$$a(t) \propto \ (t - t_0)^{2/3(w_q+1)} \tag{5.32}$$

$$\rho_q(t) \propto a(t)^{-3(w_q+1)} \tag{5.33}$$

Con t_0 una constante de integración.

Así tenemos que:

En los tiempos tempranos del universo, posteriores al big-bang y al brevísimo periodo de inflación cósmica, de acuerdo a la ecuación de estado:

$$P_q(t) = w_q\rho_q(t) \tag{5.34}$$

El universo era dominado por la materia ordinaria, de modo tal que esto implicaba que la presión de energía oscura o quintaesencia debía de ser mínima. Esto es $P_q \to 0$, lo que significa que en esta etapa

evolutiva del universo el parámetro de estado de quintaesencia $w_q = 0$.Sustituyendo esto en (5.33) tenemos que:

$$\rho_q(t) \propto a(t)^{-3} \tag{5.35}$$

Para la fase de un universo dominado por radiación (materia relativista) $w_q = \frac{1}{3}$, la densidad de energía resulta:

$$\rho_q(t) \propto a(t)^{-4} \tag{5.36}$$

Mientras que para la etapa actual de aceleración cósmica moderada, caracterizada por el predominio de la constante cosmológica Λ con $w_q = -1$, se tiene que:

$$\rho_q = constante$$

Más exactamente:

$$\rho_q = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \tag{5.37}$$

Puesto que para $w_q = -1$:

$$P_q = -\rho_q = constante \tag{5.38}$$

En concordancia y consistencia con lo establecido por el modelo de la materia oscura *fría*, incluyendo la constante cosmológica, el modelo ΛCDM.

Hechas estas precisiones, estamos ahora en condiciones de analizar y abordar lo concerniente al modelo de la energía oscura escalar del gas de Chaplygin:

5.2.1 Gas de Chaplygin

El gas de Chaplygin es un modelo en el cual la energía oscura puede ser descrita como un fluido perfecto de características muy peculiares y específicas, descrito por la ecuación de estado siguiente:

$$P_q = -\frac{A}{\rho_q} \tag{5.39}$$

Donde aquí:

$$\forall\ A = cte$$

$$A > 0$$

De este modo, para una densidad de energía oscura o densidad de quintaesencia ρ_q positiva, obtendremos siempre una presión isotrópica P_q negativa. Resultado que es consistente con la fase actual de expansión acelerada [68, 69, 70].

Si reemplazamos esta ecuación de estado (5.39) en la ecuación de continuidad (5.30), obtendremos una densidad de energía oscura ρ_q que dependerá únicamente del tiempo cosmológico t [68, 69, 70, 71, 72, 73]:

$$\dot{\rho_q} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(-\frac{A}{\rho_q} + \rho_q\right) = 0$$

$$d\rho_q + \frac{3}{a}da\left(-A{\rho_q}^{-1} + \rho_q\right) = 0$$

Integrando:

$$\rho_q(t) = \sqrt{A + \frac{B}{a^6(t)}} \tag{5.40}$$

Con B una constante de integración.

Este resultado nos dice que el gas de Chaplygin en su forma más básica o simple corresponde a un fluido perfecto isotrópico y homogéneo, dado que –como ya se había adelantado- su densidad de energía depende de manera explícita tan solo de la coordenada temporal. Este resultado es válido siempre y cuando se trabaje a grandes escalas, comparables a las distancias cósmicas a partir de unos cuantos *parsecs*, donde es válida la aproximación o presunción de isotropía y homogeneidad del universo y de todo lo que este contenga (incluida la energía oscura o quintaesencia), alrededor de la cual también es válida la métrica de FRW.

En este contexto de isotropía y homogeneidad de la quintaesencia ϕ el comportamiento de dicha densidad de energía oscura, como se puede notar, va a depender del comportamiento del factor de escala $a(t)$ comprendido dentro de la métrica de FRW.

Ahora, por otro lado, cabría preguntarnos ¿por qué el gas de Chaplygin sería un modelo adecuado o por lo menos recomendable para explicar el comportamiento de la energía oscura?.

Para responder esto, debemos tomar los siguientes límites asintóticos sobre la expresión de la densidad de energía. Así tenemos que:

Si $a(t) \ll \left(\frac{B}{A}\right)^{1/6}$ en (5.40), entonces $A \to 0$ y dicha expresión se reduce a:

$$\rho_q(t) \approx \sqrt{B}a(t)^{-3} \tag{5.41}$$

Cumpliéndose de este modo que:

$$\rho_q(t) \propto a(t)^{-3}$$

Caso que corresponde –como se anotó en la expresión (5.35)- a la situación en la que la presión de energía oscura o quintaesencia $P_q(t) \approx 0$, donde en consecuencia, $w_q = 0$, contexto que tan sólo es posible cuando la densidad de materia ordinaria es mucho mayor a la de energía oscura; por lo que dicho límite refleja el comportamiento de la energía oscura en los tiempos tempranos del universo, en los que predominaba la materia ordinaria [73].

Si por el contrario $a(t) \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{1/6}$ en (5.40), entonces $\frac{B}{a^6(t)} \to 0$, con esto:

$$\rho_q(t) \approx \sqrt{A} \tag{5.42}$$

Reemplazando en (5.39) se obtiene:

$$P_q(t) = -\sqrt{A}$$

Reemplazando esto en la ecuación de estado (5.34):

$$P_q(t) = w_q\rho_q(t)$$

$$-\sqrt{A} = w_q\sqrt{A}$$

Con esto:

$$w_q = -1$$

Resultado que corresponde, como sabemos, al momento cosmológico actual de expansión acelerada moderada bajo el dominio de la constante cosmológica Λ, con lo cual se retorna al caso especial del modelo ΛCDM.

Con lo cual tenemos que, las observaciones mostradas y analizadas nos sirven para concluir que el modelo del gas de Chaplygin es capaz de describir de manera coherente y precisa el comportamiento de las densidades de energía oscura o quintaesencia en las distintas etapas cosmológicas del universo,

incluyendo la actual, tal cual como lo hacen los modelos quintaesencia convencionales y el modelo estándart ΛCDM [73].

5.2.2 Gas de Chaplygin generalizado

Ahora considerando un parámetro α extra a la ecuación de estado del gas de Chaplygin, dada por (5.39), donde α se encuentra en el intervalo:

$$0 < \alpha \leq 1$$

Se define la siguiente ecuación de estado:

$$P_q = -\frac{A}{{\rho_q}^{\alpha}} \tag{5.43}$$

Con

$$\forall\ A = cte$$

$$A > 0$$

Reemplazando la ecuación de estado (5.43) en la ecuación de continuidad dada por (5.30) y luego integrando, se obtiene la forma generalizada de la densidad de energía del gas de Chaplygin [70, 71, 72, 73]:

$$\rho_q(t) = \left[A + \frac{B}{a(t)^{3(\alpha+1)}}\right]^{1/\alpha+1} \tag{5.44}$$

Donde para $\alpha = 1$ se obtiene la densidad para el gas de Chaplygin en su forma más simple.

Tal como ocurre con el caso de Chaplygin en su forma más simple, se puede mostrar que el modelo generalizado satisface y describe con la misma precisión que los modelos quintaesencia convencionales el comportamiento de la energía oscura, tanto para las etapas tempranas del universo, como para su etapa actual. Así tenemos que:

En el límite asintótico en el que $a(t) \ll \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$ entonces $A \to 0$, con lo que:

$$\rho_q(t) \approx B^{1/\alpha+1} a(t)^{-3} \tag{5.45}$$

Con lo cual, la densidad de energía resulta siendo:

$$\rho_q(t) \propto a(t)^{-3}$$

que reproduce el resultado (5.35), que corresponde al caso cuando el parámetro de estado es nulo. Esto significa que se obtiene el comportamiento de la densidad de energía oscura o quintaesencia en los tiempos tempranos del universo inmediatamente posteriores a la *gran explosión*, donde la presión isotrópica del fluido perfecto del gas de Chaplygin de energía oscura o quintaesencia $P_q(t) \to 0$, lo que implica (tal como se obtuvo en el primer análisis) que el universo era gobernado en su mayor porcentaje por la materia ordinaria o bariónica.

En el límite asintótico contrario en el que $a(t) \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$, entonces $\frac{B}{a(t)^{3(\alpha+1)}} \to 0$, con esto:

$$\rho_q(t) \approx A^{1/\alpha+1} \tag{5.46}$$

Con lo cual

$$\rho_q(t) \approx cte$$

Para interpretar qué implicancias físicas tiene esto, basta con reemplazar el resultado (5.46) en la ecuación de estado (5.43):

$$P_q(t) = -\frac{A}{\rho_q(t)^{\alpha}} = -\frac{A}{(A^{1/\alpha+1})^{\alpha}} = -AA^{-\alpha/\alpha+1} = -A^{1/\alpha+1}$$

$$P_q(t) \approx -A^{1/\alpha+1} = cte \tag{5.47}$$

Y reemplazando ρ_q y P_q en la ecuación de estado fundamental de la quintaesencia finalmente volvemos a obtener que:

$$P_q(t) = w_q \rho_q(t) \tag{5.34}$$

$$-A^{1/\alpha+1} = w_q A^{1/\alpha+1}$$

Con esto:

$$w_q = -1$$

Lo que de inmediato nos conduce de nuevo a la ecuación de estado:

$$P_q = -\rho_q = cte \tag{5.38}$$

Que describe al universo actual en expansión acelerada y moderada, en el que predomina la constante cosmológica. De hecho, esto encaja perfectamente con una presión y densidad de energía constantes, asociadas a una constante cosmológica positiva, tal cual como lo plantea el modelo ΛCDM [73].

Con base en estas observaciones, se puede concluir que el modelo del gas de Chaplygin, tanto en su forma simple como el modelo generalizado, es adecuado para describir el comportamiento de la energía oscura –dentro del contexto de asumirla como isotrópica y homogénea-, ya que reproduce exactamente las mismas estimaciones obtenidas por los modelos quintaesencia típicos y del modelo ΛCDM, para los diferentes periodos o etapas cosmológicas del universo [73].

Hasta aquí estudiamos las propiedades básicas del gas de Chaplygin en el contexto de un fluido perfecto isotrópico y homogéneo a grandes escalas. A continuación vamos a estudiar el campo escalar de quintaesencia ϕ de acuerdo a la descripción del fluido perfecto de Chaplygin generalizado en dos situaciones: en la primera como un campo escalar desacoplado del espacio-tiempo curvo de RNdS, en cuyo caso se considera una quintaesencia *libre* o *no-acoplada*, la cual será descrita tomando como base el modelo de un gas de Chaplygin generalizado isotrópico y homogéneo, cuya densidad de energía vendrá definida de acuerdo a la expresión (5.44) y obedeciendo la ecuación de estado generalizada (5.43) y posteriormente una segunda situación en la que ahora describiremos cómo se comportaría el campo escalar de quintaesencia ϕ acoplado al espacio de RNdS –formando con esto el agujero negro de RNdS-Quintaesencia- pero ahora siendo descrito de acuerdo al modelo de un gas de Chaplygin igualmente generalizado e isotrópico pero inhomogéneo. En este último caso, volveremos a emplear la ecuación de estado generalizada de Chaplygin (5.43), pero esta vez, en vez de emplear la definición de una densidad homogénea dada por (5.44), se empleará, en cambio, la descripción de una densidad de dependencia radial no homogénea dada en la ecuación (5.15) [68, 69, 70, 71, 72, 73].

5.2.3 Quintaesencia no acoplada en el modelo del gas de Chaplygin generalizado

En ausencia de acoplamiento al espacio-tiempo curvo en las cercanías al horizonte más externo del agujero negro de RNdS, los efectos de la deformación del espacio sobre las propiedades físicas del gas de Chaplygin generalizado se vuelven despreciables, por lo que dicho fluido perfecto satisface las condiciones de isotropía y homogeneidad del Principio cosmológico. De modo tal que la quintaesencia ϕ será descrita por un gas de Chaplygin generalizado, isotrópico y homogéneo, tal que:

$$\phi = \phi(t) \tag{5.48}$$

Este campo escalar de quintaesencia *libre* o *no acoplada* ϕ será gobernado de acuerdo con la ecuación de estado del gas de Chaplygin generalizado:

$$P_q(t) = -\frac{A}{\rho_q^{\alpha}(t)} \tag{5.49}$$

y cuya densidad de energía viene dada por la expresión (5.44):

$$\rho_q(t) = \left[A + \frac{B}{a(t)^{3(\alpha+1)}}\right]^{1/\alpha+1} \tag{5.44}$$

Ahora, de la relación (5.10) se tiene:

$$\rho_q = \frac{1}{2}\partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi + V(\phi)$$

y de acuerdo con (5.48):

$$\rho_q = \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial^0\phi + V(\phi)$$

$$\rho_q = \frac{1}{2}\partial_0\phi(-\partial_0\phi) + V(\phi)$$

$$\rho_q = -\frac{1}{2}(\partial_0\phi)^2 + V(\phi)$$

$$\rho_q = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \tag{5.50}$$

De igual manera, de (5.12):

$$P_q = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi)$$

Debido a (5.48) esta expresión se reduce a:

$$P_q = \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial^0\phi - V(\phi)$$

$$P_q = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \tag{5.51}$$

Por otro lado, reemplazando (5.44) en (5.49) tenemos:

$$P_q(t) = -\frac{A}{\rho_q^{\alpha}(t)}$$

$$P_q(t) = -A\rho_q(t)^{-\alpha}$$

$$P_q(t) = -A\left\{\left[A + \frac{B}{a(t)^{3(\alpha+1)}}\right]^{1/\alpha+1}\right\}^{-\alpha}$$

$$P_q(t) = -A\left[A + \frac{B}{a(t)^{3(\alpha+1)}}\right]^{-\alpha/\alpha+1}$$

Con esto:

$$P_q(t) = -A\left[A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1} \tag{5.52}$$

Ahora, restando las expresiones (5.50) y (5.51), se obtiene el potencial escalar $V(\phi)$:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\left(\rho_q - P_q\right) \tag{5.53}$$

y sumando las expresiones (5.50) y (5.51), se tiene:

$$\rho_q + P_q = -\dot{\phi}^2$$

$$\dot{\phi}^2 = -\left(\rho_q + P_q\right) \tag{5.54}$$

Reemplazando entonces las expresiones exactas correspondientes a la densidad de energía $\rho_q(t)$ y a la presión isotrópica $P_q(t)$ de este gas de Chaplygin isotrópico y homogéneo no acoplado (5.44) y (5.52) en la ecuación diferencial (5.54):

$$\dot{\phi}^2 = -\left[\rho_q(t) + P_q(t)\right]$$

$$\dot{\phi}^2 = A\left[A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1} - \left[A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{1/\alpha+1}$$

$$\dot{\phi}^2 = A\left[A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1} - \left[A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right]\left[A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}$$

$$\dot{\phi}^2 = \left[A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}\left[A - \left(A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right)\right]$$

Efectuando, tenemos:

$$\dot{\phi}^2 = -B^{1/\alpha+1}\left[\frac{A}{B} + a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1} a(t)^{-3(\alpha+1)} \tag{5.55}$$

ahora hacemos:

$$\sigma(t) = B^{1/\alpha+1}\left[\frac{A}{B} + a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1} a(t)^{-3(\alpha+1)} \tag{5.56}$$

entonces

$$\dot{\phi}^2 = -\sigma(t) \tag{5.57}$$

$$\dot{\phi}^2 + \sigma(t) = 0$$

Luego:

$$\dot{\phi} + \sigma(t)\dot{\phi}^{-1} = 0$$

Derivando temporalmente esta expresión y multiplicando por $\dot{\phi}^2$:

$$\dot{\phi}^2\ddot{\phi} + \dot{\sigma}\dot{\phi} - \sigma\ddot{\phi} = 0 \tag{5.58}$$

Reemplazando (5.57) en (5.58):

$$-\sigma\ddot{\phi} + \dot{\sigma}\dot{\phi} - \sigma\ddot{\phi} = 0$$

$$-2\sigma\ddot{\phi} + \dot{\sigma}\dot{\phi} = 0$$

$$\ddot{\phi} - \frac{\dot{\sigma}}{2\sigma}\dot{\phi} = 0 \tag{5.59}$$

Reescribiendo (5.56):

$$\sigma(t) = B^{1/\alpha+1}\left[a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}\left[\frac{A}{B}a(t)^{3(\alpha+1)}+1\right]^{-\alpha/\alpha+1}a(t)^{-3(\alpha+1)}$$

$$\sigma(t) = B^{1/\alpha+1}a(t)^{-3}\left[\frac{A}{B}a(t)^{3(\alpha+1)}+1\right]^{-\alpha/\alpha+1} \tag{5.60}$$

Luego, derivando (5.60):

$$\dot{\sigma} = -3\dot{a}a^{-4}B^{1/\alpha+1}\left(\frac{A}{B}a^{3(\alpha+1)}+1\right)^{-\alpha/\alpha+1}\left[1+\frac{A}{B}\alpha a^{3(\alpha+1)}\left(\frac{A}{B}a^{3(\alpha+1)}+1\right)^{-1}\right] \tag{5.61}$$

Luego, con esto:

$$\frac{\dot{\sigma}}{2\sigma} = -\frac{3}{2}\frac{\dot{a}}{a}\left[1+\frac{A}{B}\alpha a^{3(\alpha+1)}\left(\frac{A}{B}a^{3(\alpha+1)}+1\right)^{-1}\right]$$

y como el parámetro de Hubble viene dado por:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}$$

entonces:

$$\frac{\dot{\sigma}}{2\sigma} = -\frac{3}{2}H\left[1+\alpha\left(1+\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right)^{-1}\right] \tag{5.62}$$

Con esto, reemplazando (5.62) en (5.59) se obtiene la siguiente ecuación de campo:

$$\ddot{\phi}+\frac{3}{2}H\left[1+\alpha\left(1+\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right)^{-1}\right]\dot{\phi} = 0 \tag{5.63}$$

La ecuación de campo dada en (5.63) que regirá el comportamiento del campo escalar de quintaesencia ϕ *libre* o no acoplado, y como consecuencia de esto, modelado como un gas de Chaplygin isotrópico y homogéneo, es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en la coordenada temporal t, de coeficientes variables en t, lineal y homogénea.

Finalmente, reemplazando las expresiones de la densidad de energía dada por (5.44) y de la presión dada por (5.52) en la ecuación (5.53), se obtiene el potencial escalar $V(\phi)$:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\left[\rho_q(t) - P_q(t)\right]$$

$$V(\phi) = \frac{1}{2}A^{1/\alpha+1}\left[1+\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}\left[2+\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]$$

y dado que, por la definición dada por (5.48):

$$\phi = \phi(t) \tag{5.48}$$

$$V(t) = \frac{1}{2}A^{1/\alpha+1}\left[1+\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}\left[2+\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right] \tag{5.64}$$

A continuación se someterán las expresiones generales halladas que describen a la densidad de energía $\rho_q(t)$, la presión isotrópica $P_q(t)$, el potencial escalar $V(t)$ y la ecuación de campo escalar que describen a la energía oscura dentro del enfoque escalar de la quintaesencia, modelada o descrita en términos del fluido perfecto del gas de Chaplygin generalizado isotrópico y homogéneo, en los límites asintóticos, antes analizados en las secciones anteriores. Esto dará en el comportamiento y cantidad de la energía oscura en las diferentes etapas cronológicas del universo.

Así tenemos que:

Para las etapas tempranas del universo posteriores a la gran explosión y a la época inflacionaria, en donde predominaba la materia ordinaria, debido esto a que en los primeros tiempos del universo el parámetro de estado de quintaesencia $w_q = 0$, se tiene que:

$$a(t) \ll \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$$

Esto es equivalente al límite asintótico:

$$\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)} \gg 1$$

De (5.44) sabemos que:

$$\rho_q(t) = \left[A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{1/\alpha+1}$$

$$\rho_q(t) = A^{1/\alpha+1}\left[1+\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{1/\alpha+1}$$

Aplicando el límite:

$$\rho_q(t) \approx A^{1/\alpha+1}\left[\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{1/\alpha+1}$$

$$\rho_q(t) \approx B^{1/\alpha+1}a(t)^{-3} \tag{5.65}$$

Verificándose plenamente con este resultado que:

$$\rho_q(t) \propto a(t)^{-3}$$

En los albores del universo temprano, posteriormente a la gran explosión, en donde predominaba la materia ordinaria sobre la energía oscura.

Para la presión en la expresión (5.52) tenemos que:

$$P_q(t) = -A\left[A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}$$

$$P_q(t) = -A^{1/\alpha+1}\left[1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}$$

De igual manera, aplicando el límite señalado, tendremos que:

$$P_q(t) \approx -A^{1/\alpha+1}\left[\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}$$

Con esto:

$$P_q(t) \approx -AB^{-\alpha/\alpha+1}a(t)^{3\alpha} \tag{5.66}$$

De (5.66):

$$P_q(t) \propto a(t)^{3\alpha}$$

De igual forma, el potencial escalar en este límite asintótico del universo se comportaría como:

En (5.64):

$$V(t) = \frac{1}{2}A^{1/\alpha+1}\left[1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}\left[2 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]$$

$$V(t) = \frac{1}{2}A^{1/\alpha+1}\left[1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}\left[1 + \left(1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right)\right]$$

En el límite mencionado, se obtiene:

$$V(t) \approx \frac{1}{2} A^{1/\alpha+1} \left[\frac{B}{A} a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1} \left[1 + \frac{B}{A} a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]$$

Aplicando ahora por segunda vez consecutiva, el mismo límite:

$$V(t) \approx \frac{1}{2} A^{1/\alpha+1} \frac{B^{-\alpha/\alpha+1}}{A^{-\alpha/\alpha+1}} a(t)^{3\alpha} \frac{B}{A} a(t)^{-3(\alpha+1)}$$

Efectuando esto, tenemos:

$$V(t) \approx \frac{1}{2} B^{1/\alpha+1} a(t)^{-3} \tag{5.67}$$

Comparando (5.67) con (5.65), se obtiene:

$$V(t) \approx \frac{1}{2} \rho_q(t) \tag{5.68}$$

Por lo que en este límite, el potencial escalar $V(t)$ es proporcional a $a(t)^{-3}$ y a la densidad de energía $\rho_q(t)$.

Ahora, reemplazando dicho límite correspondiente a la etapa primigénia del universo en la ecuación de campo en su forma general para la quintaesencia ϕ dada por la expresión (5.63):

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2} H \left[1 + \alpha \left(1 + \frac{B}{A} a(t)^{-3(\alpha+1)}\right)^{-1}\right] \dot{\phi} = 0 \tag{5.63}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2} H \left[1 + \alpha \left(\frac{B}{A} a(t)^{-3(\alpha+1)}\right)^{-1}\right] \dot{\phi} = 0$$

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2} H \left[1 + \alpha \frac{A}{B} a(t)^{3(\alpha+1)}\right] \dot{\phi} = 0$$

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2} \alpha H \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{A}{B} a(t)^{3(\alpha+1)}\right] \dot{\phi} = 0$$

Es fácil observar que la cantidad $\frac{A}{B} a(t)^{3(\alpha+1)} \ll 1$, puesto que el parámetro α se encuentra comprendido entre $0 < \alpha \leq 1$, esto implica que:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{A}{B} a(t)^{3(\alpha+1)} \approx \frac{1}{\alpha}$$

Con esto, obtenemos la siguiente ecuación de campo para el campo escalar ϕ de quintaesencia en el límite asintótico $a(t) \ll \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$:

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2}H\dot{\phi} = 0 \tag{5.69}$$

Para la actual expansión acelerada moderada en la que predomina la constante cosmológica Λ, consistente con el modelo ΛCDM, en la que el parámetro de estado $w_q = -1$ se tiene que:

$$a(t) \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$$

Siendo esta condición equivalente a:

$$\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)} \ll 1$$

Reemplazando esto en la expresión (5.44):

$$\rho_q(t) = A^{1/\alpha+1}\left[1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{1/\alpha+1}$$

$$\rho_q(t) \approx A^{1/\alpha+1} \tag{5.46}$$

Es decir, se obtiene el resultado dado por la expresión (5.46). Entonces, en este límite asintótico la densidad de energía resulta siendo una cantidad aproximadamente constante y siempre positiva, puesto que en el modelo del gas de Chaplygin generalizado la constante A se define y caracteriza siempre como un parámetro constante y siempre positivo:

$$\forall\ A > 0$$

Entonces, con esto:

$$\rho_q(t) = cte > 0$$

Ahora reemplazando este límite en la expresión (5.52):

$$P_q(t) = -AA^{-\alpha/\alpha+1}\left[1+\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}$$

$$P_q(t) \approx -A^{1/\alpha+1}(1) \approx -A^{1/\alpha+1}$$

$$P_q(t) \approx -A^{1/\alpha+1} \tag{5.47}$$

Con esto, la expresión general que define la presión isotrópica del gas de Chaplygin generalizado, la ecuación (5.52), en el límite en el cual $a(t) \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$ se reduce a la forma dada en la ecuación (5.47); expresión que además puede ser obtenida directamente de la ecuación general de estado del gas de Chaplygin generalizado, la expresión (5.49).

Y se observa inmediatamente que:

$$P_q(t) = cte < 0$$

Satisfaciéndose con esto, la condición necesaria que asegura desde el punto de vista físico la fase actual de expansión acelerada que requiere que la presión de energía oscura o quintaesencia $P_q < 0$, puesto que A siempre será una constante positiva en el modelo del gas de Chaplygin generalizado.

Con esto, observamos que las expresiones que rigen la densidad de energía (5.44) y la presión isotrópica (5.52) para el gas de Chaplygin generalizado isotrópico y homogéneo, se reducen a sus correspondientes formas en el límite en el que $a(t) \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$ dadas por (5.46) y (5.47), respectivamente. Demostrándose con esto, la consistencia y coherencia de la teoría que se está desarrollando y con ello la validez de las expresiones exactas (5.44) y (5.52) halladas, señaladas.

Como ya habíamos adelantado, reemplazando las expresiones (5.46) y (5.47) en la ecuación de estado (5.34), podemos obtener:

$$P_q(t) = w_q\rho_q(t)$$

$$-A^{1/\alpha+1} = w_qA^{1/\alpha+1}$$

$$w_q = -1$$

De este modo, se logra demostrar que el gas de Chaplygin generalizado isotrópico y homogéneo en el límite asintótico extremo en el que $a(t) \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$ –correspondiente a la etapa actual de aceleración cósmica moderada en la cual predomina la constante cosmológica Λ- se comporta muy similarmente a cómo lo hace la energía oscura en el modelo ΛCDM, en donde se establece un parámetro de estado $w_q = -1$. A este respecto, el resultado obtenido en la expresión (5.46) define una densidad de energía oscura o de quintaesencia ρ_q aproximadamente constante y positiva, en analogía evidente a lo que se encuentra definido por el propio modelo ΛCDM señalado.

Así tenemos que, según el modelo ΛCDM, la densidad de energía de quintaesencia ρ_q se define como:

$$\rho_q = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

Puesto que en la expresión (5.46) por definición del modelo del gas de Chaplygin, tanto en su forma simple como en la generalizada, A es una constante *siempre* positiva y, dado que nos encontramos trabajando específicamente en el régimen del espacio-tiempo o del universo de De Sitter, donde $\Lambda > 0$; esto permite concluir que tanto la expresión (5.37) como la expresión (5.46), definen o describen ambas una densidad de energía ρ_q constante y positiva.

Es decir, la densidad de energía del gas de Chaplygin generalizado isotrópico y homogéneo $\rho_q(t)$ en la fase actual de aceleración cósmica moderada, donde se cumple el límite en el que $a(t) \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$ se comporta como lo haría la densidad de energía oscura en el modelo ΛCDM para la misma etapa actual del universo, donde $w_q = -1$, en tanto que resulta siendo una densidad de energía de gas de Chaplygin generalizado isotrópico y homogéneo $\rho_q(t) = cte > 0$ en un espacio-tiempo tipo De Sitter.

Asimismo, del resultado (5.47) igualmente obtenemos que la presión isotrópica del gas de Chaplygin generalizado, isotrópico y homogéneo $P_q(t)$ en la actual fase o etapa de expansión acelerada moderada referida en la que se impone el límite asintótico en el que $a(t) \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$ se comporta como la presión isotrópica de la energía oscura en el modelo ΛCDM, en tanto que en ese modelo dicha presión isotrópica de Chaplygin $P_q(t) = cte < 0$; debido a que en el modelo del gas de Chaplygin generalizado (así como en el modelo simple) el parámetro A es una constante *siempre* positiva.

Por último, si se relacionan las expresiones (5.46) y (5.47) se obtiene la ecuación de estado que rige a la energía oscura de acuerdo al modelo ΛCDM, en donde el parámetro de estado $w_q = -1$.Así tenemos que:

$$P_q(t) \approx -A^{1/\alpha+1} = -\rho_q(t) = cte$$

Con esto:

$$P_q(t) = -\rho_q(t) = cte$$

Reproduciendo con ello, la ecuación de estado que gobierna a la energía oscura en el modelo ΛCDM donde $w_q = -1$.

Por lo tanto, hechas todas estas necesarias y pertinentes observaciones físicas, es fácil darnos cuenta de que la equivalencia entre las expresiones (5.37) y (5.46) para la densidad de energía es necesaria e inevitable. Así tenemos finalmente que:

$$\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = A^{1/\alpha+1}$$

Con esto obtenemos:

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} A^{1/\alpha+1} \tag{5.70}$$

De este modo, la constante cosmológica Λ continuará siendo constante respecto a todas las coordenadas del espacio y del tiempo; sin embargo, queda con esta última expresión definida en función del parámetro de Chaplygin α, es decir:

$$\Lambda = \Lambda(\alpha)$$

De tal forma que, de acuerdo a este resultado, existirán tantos valores de Λ como valores contenga el dominio del parámetro de Chaplygin α, el cual, como sabemos, es $< 0, 1]$.

Este hecho implicaría que el parámetro cosmológico Λ podría tener un valor mínimo Λ_{min} para el valor mínimo del parámetro de Chaplygin α_{min} comprendido dentro de su respectivo dominio. Puesto que tal dominio viene dado por:

$$0 < \alpha \leq 1$$

Entonces, para conocer el Λ_{min} tan sólo sería necesario tomar el límite cuando el parámetro α tendiera asintóticamente a cero. Esto es:

$$\Lambda_{min} = \lim_{\alpha \to 0} \Lambda = \lim_{\alpha \to 0} \frac{8\pi G}{c^4} A^{1/\alpha+1} \approx \frac{8\pi G}{c^4} A^{1/0+1} \approx \frac{8\pi G}{c^4} A$$

$$\Lambda_{min} \approx \frac{8\pi G}{c^4} A \tag{5.71}$$

Mientras que, para α_{max} obtendremos el valor Λ_{max} dentro del dominio de α. De acuerdo con el dominio de α ya señalado, tenemos que:

Para $\alpha_{max} = 1$ la expresión (5.70) se obtiene:

$$\Lambda_{max} = \frac{8\pi G}{c^4} A^{1/\alpha_{max}+1}$$

$$\Lambda_{max} = \frac{8\pi G}{c^4} A^{1/1+1} = \frac{8\pi G}{c^4} A^{1/2}$$

$$\Lambda_{max} = \frac{8\pi G}{c^4} \sqrt{A} \tag{5.72}$$

Observamos, pues, que aquí:

$$\Lambda_{max} < \Lambda_{min}$$

Puesto que aquí A es una constante positiva. Esto significa que el parámetro cosmológico Λ evoluciona respecto a los límites del dominio definido del parámetro de Chaplygin α, de modo tal que: en el límite inferior del dominio de α, cuando $\alpha \to 0$, se tiene un valor inicial de la constante cosmológica $\Lambda_{inicial}$:

$$\Lambda_{inicial} \approx \frac{8\pi G}{c^4} A \tag{5.73}$$

y, en el límite superior del dominio de α, cuando $\alpha = 1$, tenemos un valor final de la constante cosmológica Λ_{final}:

$$\Lambda_{final} = \frac{8\pi G}{c^4}\sqrt{A} \tag{5.74}$$

Lo que finalmente implicará que:

$$\Lambda_{final} < \Lambda_{inicial} \tag{5.75}$$

A continuación se determinará el potencial escalar $V(t)$ en el límite considerado, en el cual el factor de escala $a(t) \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$ correspondiente, como ya hemos señalado, al tiempo actual del universo. Dicho límite se puede reescribir como:

$$\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)} \ll 1$$

Reemplazando esto en (5.64) se obtiene:

$$V(t) = \frac{1}{2}A^{1/\alpha+1}\left[1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}\left[2 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]$$

(5.64)

$$V(t) = \frac{1}{2}A^{1/\alpha+1}\left[1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}\left\{1 + \left[1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]\right\}$$

$$V(t) \approx A^{1/\alpha+1} \tag{5.76}$$

Luego, comparando (5.46) y (5.76) es fácil notar que:

$$V(t) \approx \rho_q(t) \approx A^{1/\alpha+1} \tag{5.77}$$

Adicionalmente, podemos observar de manera no trivial inmediatamente que:

$$V(t) = cte > 0$$

Finalmente, reemplazando nuestro límite asintótico $\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)} \ll 1$ en la ecuación de campo escalar general que describe el comportamiento de la quintaesencia ϕ, modelada y asumida como un gas de Chaplygin generalizado isotrópico y homogéneo, que es la ecuación (5.63), se obtiene la siguiente aproximación:

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2}H\left[1 + \alpha\left(1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right)^{-1}\right]\dot{\phi} = 0 \tag{5.63}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2}H(1+\alpha)\dot{\phi} = 0 \tag{5.78}$$

Notar que para el caso especial del gas de Chaplygin simple, esto es cuando $\alpha = 1$, la ecuación del campo escalar de quintaesencia en el límite correspondiente a la etapa actual del universo en aceleración cósmica moderada y con predominio de la constante cosmológica, $\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)} \ll 1$, se reduce a la forma:

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2}H(1+1)\dot{\phi} = 0$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = 0 \tag{5.79}$$

Con H el parámetro de Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = H(t)$$

5.2.4 Quintaesencia mínimamente acoplada en el modelo del gas de Chaplygin generalizado

En este trabajo se ha optado por definir y describir la energía oscura de acuerdo con un modelo de energía oscura escalar. Ese modelo de energía oscura escalar es lo que se denomina *Quintaesencia*. De este modo, se define la quintaesencia como el campo escalar ϕ de la energía oscura, la cual en este capítulo ha sido modelada como un fluido perfecto denominado *gas de Chaplygin generalizado*.

En la sección anterior se analizó cómo se comportaría la quintaesencia ϕ totalmente desacoplada del campo gravitatorio de un espacio-tiempo curvo, en especial del RNdS, definiéndose como consecuencia de este hecho que el modelo de gas de Chaplygin generalizado que la describiría corresponda al de un fluido perfecto isotrópico y homogéneo, de densidad de energía $\rho_q(t)$, presión isotrópica $P_q(t)$ y ecuación de estado w_q. Puesto que al encontrarse fuera del alcance de las deformaciones agudas del espacio-tiempo en la periferia o en las vecindades del agujero negro de RNdS, se adoptó como hipótesis que, en ausencia de tales deformaciones en la métrica o geometría del espacio, las propiedades físicas fundamentales de este fluido quedarían aproximadamente inalterables con respecto a las coordenadas de posición, lográndose imponer con esto la aproximación de un modelo de gas de Chaplygin generalizado que describiera una quintaesencia isotrópica y homogénea a gran escala. Pudiéndose determinar con ello cuál sería el comportamiento que tendrían las propiedades de dicho fluido en las etapas cronológicas extremales del universo; lográndose adicionalmente como resultado de este análisis –como se vio al final de la sección anterior- establecer una relación cuantitativa entre la constante cosmológica Λ y el parámetro de Chaplygin generalizado α, válida en el límite próximo a las etapas actuales del universo donde se impone la aceleración cósmica moderada y de dicha constante cosmológica. Observándose con ello similitudes evidentes entre el modelo de un gas de Chaplygin generalizado isotrópico y homogéneo y lo que establece el modelo ΛCDM en el límite asintótico correspondiente a la época actual del universo.

Ahora volveremos a acoplar mínimamente el campo escalar de quintaesencia ϕ al espacio-tiempo curvo del agujero negro de RNdS, trayendo esto como resultado el espacio-tiempo de RNdS-quintaesencia de la teoría o modelo de Kiselev. En esta nueva situación, las deformaciones del espacio-tiempo en la periferia o en las vecindades al horizonte de sucesos más externo del agujero negro de RNdS influirán en las propiedades físicas fundamentales del fluido perfecto de Chaplygin generalizado que describe y que representa al campo escalar de quintaesencia ϕ. Como resultado de esto, las propiedades fundamentales de este gas quintaesencia, tales como su densidad de energía ρ_q y presión isotrópica P_q tendrán ahora dependencia radial y, por lo tanto, serán a partir de aquí de la forma $\rho_q(r)$ y $P_q(r)$. Si se desea continuar describiendo al campo escalar ϕ de la energía oscura o quintaesencia en términos del gas de Chaplygin generalizado, se debe abandonar la ecuación de la densidad de energía homogénea $\rho_q(t)$ y reemplazarla por la expresión de densidad de energía correspondiente al campo escalar isotrópico e inhomogéneo del modelo de Kiselev e imponer dicho cambio, finalmente, dentro de la ecuación de estado correspondiente al modelo del gas de Chaplygin generalizado.

Con esto se obtendrá el diseño de un modelo *híbrido* de Chaplygin generalizado-Kiselev o, más exactamente, una extensión del propio modelo del gas de Chaplygin generalizado al caso más general del acoplamiento mínimo de la quintaesencia ϕ al espacio-tiempo curvo de RNdS; en cuyo caso, la energía oscura se comportará de acuerdo a un fluido perfecto isotrópico y no homogéneo de presión $P_q(r)$, densidad de energía $\rho_q(r)$ y ecuación de estado w_q, de acuerdo esta vez a las propiedades de la teoría de Kiselev.

Así tenemos que; introduciendo la densidad de energía del fluido perfecto isotrópico e inhomogéneo, en términos del cual se describe la quintaesencia (o sea, al campo escalar ϕ de la energía oscura) correspondiente al modelo de Kiselev y Ghaffarnejad [56,57], dada por la expresión (5.15) en la ecuación de estado del gas de Chaplygin generalizado –dada por la expresión (5.43)- asumiéndolo ahora, como señalamos, como un fluido perfecto isotrópico, pero no homogéneo, se obtendrá que:

Por el lado del modelo del gas de Chaplygin generalizado, tenemos:

$$P_q = -\frac{A}{{\rho_q}^{\alpha}} \tag{5.43}$$

Para una quintaesencia ϕ mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo de RNdS, teníamos que:

$$\phi = \phi(r) \tag{5.16}$$

En virtud de esto, entonces, se tiene que:

$$P_q = P_q(r)$$

$$\rho_q = \rho_q(r)$$

Con esto:

$$P_q(r) = -\frac{A}{\rho_q^{\alpha}(r)} \tag{5.80}$$

Donde:

$$\forall\ A = cte$$

$$A > 0$$

$$0 < \alpha \leq 1$$

Por otro lado, del modelo para el fluido perfecto isotrópico y no homogéneo de quintaesencia de Kiselev:

$$\rho_q(r) = -\frac{3}{2} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.15}$$

Donde:

$$\forall\ r_q = cte$$

$$[r_q] = DISTANCIA$$

$$w_q = cte$$

Aquí:

$$-1 < w_q < -\frac{1}{3}$$

$$\forall\ w_q < 0$$

Luego:

$$\rho_q^{\alpha}(r) = \left[-\frac{3}{2} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}}\right]^{\alpha}$$

$$\rho_q^{\alpha}(r) = (-1)^{\alpha}\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha} {w_q}^{\alpha} \frac{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}}{r^{\alpha(3w_q+3)}}$$

$$\rho_q^{\alpha}(r) = (-1)^{\alpha}\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha} {w_q}^{\alpha} {r_q}^{\alpha(3w_q+1)} r^{-\alpha\,(3w_q+3)} \tag{5.81}$$

Reemplazando (5.81) en (5.80):

$$P_q(r) = -A(-1)^{-\alpha}\left(\frac{3}{2}\right)^{-\alpha} {w_q}^{-\alpha} {r_q}^{-\alpha(3w_q+1)} r^{\alpha(3w_q+3)}$$

$$P_q(r) = (-1)^{1-\alpha} A\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} {w_q}^{-\alpha} {r_q}^{-\alpha(3w_q+1)} r^{\alpha(3w_q+3)} \tag{5.82}$$

A continuación, del potencial escalar de quintaesencia $V(r)$ para cualquier tipo de presión $P_q(r)$ y de densidad de energía $\rho_q(r)$, obtenida para el caso de un fluido perfecto isotrópico e inhomogéneo de

quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo en las cercanías al horizonte más externo del agujero negro de RNdS, es dada por (5.22):

$$V(r) = \frac{1}{2}\left[\rho_q(r) - P_q(r)\right]$$

Reemplazando (5.15) y (5.82) en la expresión (5.22) se obtiene:

$$V(r) = \frac{1}{2}\left[(-1)^{-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} {w_q}^{-\alpha} {r_q}^{-\alpha(3w_q+1)} r^{\alpha(3w_q+3)} - \frac{3}{2} w_q {r_q}^{3w_q+1} r^{-(3w_q+3)}\right] \tag{5.83}$$

Ahora, empleando la ecuación de campo (5.21) en su forma general para un fluido perfecto de quintaesencia isotrópico e inhomogéneo, mínimamente acoplado al espacio-tiempo curvo de RNdS, de densidad de energía $\rho_q(r)$ y presión $P_q(r)$, tenemos que:

$$\phi' = \sqrt{\frac{\rho_q(r) + P_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}}$$

Reescribiendo:

$$\phi'^2 = \frac{\rho_q(r) + P_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}} \tag{5.84}$$

En (5.84):

$$\phi'^2 = \frac{\rho_q(r) + P_q(r) - P_q(r) + P_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}$$

$$\phi'^2 = \frac{\rho_q(r) - P_q(r) + 2P_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}$$

De (5.22):

$$\phi'^2 = \frac{2V(r) + 2P_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}} \tag{5.85}$$

En torno a esta ecuación diferencial se analizarán los siguientes casos límites:

Para distancias próximas al horizonte de sucesos más externo del agujero negro de RNdS, esto es:

Cuando $r \ll r_q$:

Esta condición de contorno especial puede ser reescrita como:

$$\frac{r}{r_q} \ll 1$$

En este límite de la expresión (5.82), la presión isotrópica $P_q(r) \to 0$:

$$P_q(r) = (-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} {w_q}^{-\alpha} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}}\Bigg|_{r \ll r_q} \approx 0$$

Con esto:

$$P_q(r)\big|_{r \ll r_q} \approx 0 \tag{5.86}$$

Cabe destacar que en tales condiciones de frontera la densidad de energía no se altera. Así tendremos de (5.15) que:

$$\rho_q(r)\big|_{r \ll r_q} = -\frac{3}{2} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.87}$$

Ahora el potencial escalar $V(r)$ en este límite sobre (5.83):

$$V(r) = \frac{1}{2}\left[(-1)^{-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} {w_q}^{-\alpha} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}} - \frac{3}{2} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}}\right]\Bigg|_{r \ll r_q}$$

Efectuando el límite indicado, obtenemos:

$$V(r)|_{r \ll r_q} \approx -\frac{3}{4} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.88}$$

Podemos notar que el potencial de este fluido de quintaesencia cuando $r \ll r_q$ resulta siendo muy parecido al potencial del campo escalar obtenido cuando dicho campo escalar ϕ viene descrito por el modelo de Kiselev, el cual se encuentra detallado por la expresión (5.24).

Reemplazando estos resultados en (5.85):

$$\phi'^2 = \left. \frac{-\frac{3}{2} w_q {r_q}^{3w_q+1} r^{-(3w_q+3)} + 0}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}} \right|_{r \ll r_q}$$

$$\left. \phi'^2 + \frac{\frac{3}{2} w_q {r_q}^{3w_q+1} r^{-(3w_q+3)}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}} = 0 \right|_{r \ll r_q} \tag{5.89}$$

Linealizando la ecuación; sea:

$$\chi(r) = \frac{\frac{3}{2} w_q {r_q}^{3w_q+1} r^{-(3w_q+3)}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}$$

Con esto, la ecuación diferencial no lineal en el límite de $r \ll r_q$ dada por (5.89) es de la forma:

$$\phi'^2 + \chi(r) = 0$$

Dividiendo esta expresión entre ϕ' y derivando a continuación respecto a la distancia r, se obtiene:

$$\phi'' + \chi'(r)\phi'^{-1} - \chi(r)\phi'^{-2}\phi'' = 0$$

Multiplicando ahora por ϕ'^2:

$$\phi'^2\phi'' + \chi'(r)\phi' - \chi(r)\phi'' = 0$$

y como

$$\phi'^2 = -\chi(r)$$

entonces,

$$-2\chi(r)\phi'' + \chi'(r)\phi' = 0$$

Con lo que se logra obtener finalmente una ecuación diferencial lineal de la forma:

$$\phi'' - \frac{\chi'(r)}{2\chi(r)}\phi' = 0$$

Efectuando los cálculos pertinentes, tenemos:

$$\frac{\chi'(r)}{2\chi(r)} = -\frac{3}{2}\left(\frac{w_q + 1}{r}\right) - \frac{\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3} r + \left(\frac{3w_q + 1}{2}\right)\frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+2}}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}$$

Finalmente, reemplazando este resultado, podemos obtener la ecuación diferencial lineal, de coeficientes variables en r, ordinaria, de segundo orden y homogénea siguiente:

$$\phi'' + \left\{ \frac{3}{2}\left(\frac{w_q+1}{r}\right) + \frac{\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3}r + \left(\frac{3w_q+1}{2}\right)\frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+2}}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}} \right\} \phi' = 0 \Bigg|_{r \ll r_q} \tag{5.90}$$

Podemos observar claramente que los resultados dados en las expresiones (5.87) y (5.90), correspondientes a la densidad de energía y a la ecuación de campo de quintaesencia ϕ linealizada en el límite en el que $r \ll r_q$, respectivamente, son exactamente las mismas a las dadas por las expresiones (5.15) y (5.26) para describir a la densidad de energía y a la ecuación diferencial de campo igualmente linealizada, correspondiente al fluido perfecto de quintaesencia ϕ isotrópico y no homogéneo y mínimamente acoplado al campo gravitacional de RNdS, obtenidas de acuerdo al modelo de Kiselev, deducidas en la primera sección de este capítulo.

De modo tal que, de las expresiones (5.87), (5.88), (5.89) y (5.90) se deduce que la quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo en el exterior del agujero negro de RNdS, y como consecuencia de dicho acoplamiento, modelada en términos de un fluido perfecto isotrópico pero no homogéneo –en el límite específico y especial de las distancias próximas a su horizonte de sucesos más externo, cuando $r \ll r_q$- no se comporta como el gas de Chaplygin generalizado, sino más bien, en tales condiciones se comporta aproximadamente como el fluido perfecto de quintaesencia descrito por el modelo de Kiselev.

Adicionalmente, en dicho límite, la presión de quintaesencia no homogénea $P_q(r)$, modelada como este gas perfecto isotrópico e inhomogéneo, según lo establecido por el resultado (5.86), tiende asintóticamente a anularse en tales condiciones.

Ahora, en el límite de las distancias muy alejadas del horizonte de sucesos más externo que envuelva al agujero negro de RNdS, es decir:

Cuando $r \gg r_q$:

Esta condición es equivalente a afirmar que:

$$\frac{r_q}{r} \ll 1$$

Emplearemos la densidad de energía no homogénea $\rho_q(r)$ propuesta por la teoría del gas de Kiselev dada en (5.15) para analizar su comportamiento en este límite:

$$\rho_q(r)\big|_{r \gg r_q} = -\frac{3}{2} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}}\Bigg|_{r \gg r_q} \approx 0$$

$$\rho_q(r)\big|_{r\gg r_q} \approx 0 \tag{5.91}$$

Para encontrar la forma de la presión isotrópica y no homogénea $P_q(r)$ dentro de este límite, no sería adecuado emplear la presión definida según el gas de Chaplygin generalizado *puro* dado por (5.80), puesto que es fácil observar que el valor de dicha presión sería divergente (esto es $P_q(r) \to -\infty$).

Por este motivo, para este fin se tiene necesariamente que definir la presión de quintaesencia mínimamente acoplada $P_q(r)$ en términos de la expresión (5.82), la cual describe la forma general que tiene la presión de quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo de RNdS según el *modelo híbrido del gas de Kiselev-Chaplygin generalizado*. Esto es:

$$P_q(r)\big|_{r\gg r_q} = (-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}}\Bigg|_{r\gg r_q}$$

Con esto:

$$P_q(r)\big|_{r\gg r_q} = (-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}} \tag{5.92}$$

De las expresiones dadas por (5.86) y (5.87) para la presión y la densidad de energía respectivamente, de acuerdo a este modelo *híbrido* de gas de Kiselev-Chaplygin generalizado que se está planteando, tenemos que una quintaesencia mínimamente acoplada –y en consecuencia, isotrópica, pero no homogénea- cerca al horizonte de sucesos del agujero negro de RNdS, tendrá una presión isotrópica asintóticamente nula, es decir, $P_q(r) \to 0$ y una densidad de energía no nula, finita y siempre positiva $\rho_q(r) > 0$.

Es inmediato observar y deducir que estos resultados implican, dentro del régimen de este límite específico, que:

$w_q \approx 0$, toda vez que $r \ll r_q$

De lo que se desprende y, en efecto, podemos concluir que, en la periferia al horizonte de sucesos más externo del agujero negro de RNdS, predominará la materia ordinaria y no la quintaesencia, lo cual no significa que esta no se encontrará presente en las cercanías a dicho horizonte: esta se encontrará, pero en una cantidad mucho menor en comparación a la cantidad de materia ordinaria y la *poca* quintaesencia presente en dicha región, siempre será de densidad positiva.

En el límite de las distancias lo suficientemente lejanas al horizonte de eventos más externo que envuelva la singularidad de RNdS, es decir, en el régimen de $r \gg r_q$ del resultado dado en (5.91)

observamos que la densidad de energía $\rho_q(r) \to 0$.Lo que significa que una quintaesencia mínimamente acoplada en las regiones muy distantes al horizonte, se comportará como un gas de una densidad muy baja en el límite mencionado.

Por otro lado, del resultado dado en (5.92) podemos apreciar que la presión de esta quintaesencia no homogénea $P_q(r)$ presentará un comportamiento bastante peculiar:

Puesto que, de acuerdo con este modelo híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado, tenemos que:

$$A > 0$$

$$0 < \alpha \leq 1$$

Con lo cual aquí $\alpha > 0$ (por el lado de Chaplygin generalizado)

Y además:

$$-1 < w_q < -\frac{1}{3}$$

Con lo cual aquí $w_q < 0$ (por el lado de Kiselev)

Entonces, la expresión (5.92) nos dice que:

Cuando $\alpha \to 0$:

$$P_q(r)\big|_{r \gg r_q} \neq 0$$

Que corresponde al caso de una presión finita.

Donde tenemos que:

$$P_q(r)\big|_{r \gg r_q} < 0$$

Cuando $\alpha = 1$:

$$P_q(r)\big|_{r \gg r_q} \neq 0$$

Que corresponde igualmente al caso de una presión finita.

Donde volvemos a obtener que:

$$P_q(r)\big|_{r \gg r_q} < 0$$

Por lo tanto, estos resultados implicarán:

i. En el límite de las distancias muy lejanas al horizonte más externo y, por ende, para grandes distancias de la singularidad de RNdS (o sea cuando $r \gg r_q$), para valores de α sumamente pequeños (es decir, cuando $\alpha \to 0$ o lo que es equivalente decir para $\alpha \ll 0.1$) la quintaesencia mínimamente acoplada, de acuerdo al modelo híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado aquí expuesto y desarrollado, satisfacerá la condición necesaria y suficiente que permite un régimen de expansión acelerada, que es, como claramente se puede observar, la presión isotrópica y negativa de Quintaesencia no homogénea así obtenida. Con lo cual, dentro de este límite, tal quintaesencia mínimamente acoplada será capaz de provocar la expansión acelerada del cosmos (ver anexos-gráficos).

ii. Una quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo del agujero negro de RNdS en el límite de las distancias muy lejanas al horizonte (cuando $r \gg r_q$), que sea descrita mediante el modelo híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado mencionado, toda vez que se encuentre definida en el caso especial del gas de Chaplygin simple –lo que ocurre cuando $\alpha = 1$- también exhibirá tener una presión isotrópica de quintaesencia no homogénea análogamente negativa. No obstante, a diferencia del primer caso cuando teníamos que $\alpha \ll 0.1$, en el caso especial en el que $\alpha = 1$, dicha presión negativa de quintaesencia así obtenida en este último caso, muestra, en cambio, un comportamiento lineal (ver anexos-gráficos).

iii. De lo que podemos deducir, como corolario, que la presión de quintaesencia isotrópica y no homogénea $P_q(r)$ en el caso especial y específico en el que la distancia r satisfaga la condición $r \gg r_q$, tendrá un comportamiento dentro del límite mencionado que dependerá de los valores que adopte el parámetro de Chaplygin α, dentro de su correspondiente y respectivo dominio –el cual es $< 0, 1]$-. De modo tal, que dicha presión será positiva o negativa (aceleración cósmica) dependiendo de los valores que tome el parámetro α (ver anexos-gráficos).

iv. Del resultado (5.91) podemos establecer que, de acuerdo con la descripción física dada por este modelo híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado aquí planteado, la quintaesencia ϕ mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo del agujero negro de RNdS (y como consecuencia de este hecho isotrópica, pero no homogénea) se define en las lejanías al horizonte más externo (cuando $r \gg r_q$) como un gas de muy baja densidad ($\rho_q(r) \to 0$) o infraligero.

Evaluando ahora la ecuación (5.83) en este límite especial:

$$V(r) = \frac{1}{2}\left[(-1)^{-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}} - \frac{3}{2} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}}\right]\Bigg|_{r \gg r_q}$$

Con esto:

$$V(r)|_{r\gg r_q} \approx \frac{1}{2(-1)^{\alpha}} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}}$$

$$V(r)|_{r\gg r_q} \approx \frac{A}{2(-1)^{\alpha}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}} \tag{5.93}$$

Sustituyendo ahora los resultados (5.92) y (5.93), correspondientes a la presión y al potencial escalar en el límite asintótico en el que $r \gg r_q$, respectivamente, en la expresión (5.85) –la forma no lineal de la ecuación de campo en su forma general para la quintaesencia ϕ- tenemos:

$$\phi'^2 = \left. \frac{2V(r) + 2P_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}} \right|_{r\gg r_q}$$

$$\phi'^2 = \frac{2V(r)|_{r\gg r_q} + 2P_q(r)\big|_{r\gg r_q}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}$$

$$\phi'^2 = \frac{\frac{A}{(-1)^{\alpha}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}} + 2(-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}$$

Efectuando:

$$\phi'^2 = \frac{(-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}}$$

$$\left. \phi'^2 - \frac{(-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}} = 0 \right|_{r\gg r_q}$$

Aplicando ahora el límite asintótico propuesto en el que $r \gg r_q$ dicha expresión finalmente se reducirá a:

$$\phi'^2 - \frac{(-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2} = 0 \Bigg|_{r \gg r_q} \tag{5.94}$$

Que viene a ser la forma no lineal de la ecuación de campo para la quintaesencia mínimamente acoplada al campo gravitacional del agujero negro de RNdS para el caso especial de distancias muy lejanas o alejadas de su horizonte de eventos (es decir, válida únicamente cuando $r \gg r_q$), de acuerdo al modelo híbrido del gas de Kiselev-Chaplygin generalizado descrito aquí.

Linealizando a continuación la ecuación diferencial (5.94) tenemos:

Haciendo:

$$y(r) = \frac{(-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} r^{\alpha(3w_q+3)} {r_q}^{-\alpha(3w_q+1)}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2}$$

Por lo que esta ecuación de campo podrá ser reescrita como:

$$\phi'^2 - y(r) = 0 \tag{5.95}$$

De manera similar al caso anterior, dividiendo ahora la expresión entre ϕ', tal que:

$$\forall \ \phi' \neq 0$$

Se obtiene:

$$\phi' - y(r)\phi'^{-1} = 0$$

Derivando la expresión obtenida respecto a r:

$$\phi'' - y'(r)\phi'^{-1} + y(r)\phi'^{-2}\phi'' = 0$$

Ahora multiplicando esta expresión por ϕ'^2 resulta:

$$\phi'^2\phi'' - y'(r)\phi' + y(r)\phi'' = 0 \tag{5.96}$$

Pero, de (5.95) tenemos:

$$\phi'^2 = y(r) \tag{5.97}$$

Sustituyendo (5.97) en (5.96) se obtiene:

$$y(r)\phi'' - y'(r)\phi' + y(r)\phi'' = 0$$

$$2y(r)\phi'' - y'(r)\phi' = 0$$

Con esto:

$$\phi'' - \frac{y'(r)}{2y(r)}\phi' = 0 \tag{5.98}$$

Donde:

$$\frac{y'(r)}{2y(r)} = \frac{3}{2}\alpha\left(\frac{w_q+1}{r}\right) - \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3}r\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} \tag{5.99}$$

Finalmente, sustituyendo (5.99) en (5.98):

$$\phi'' - \left[\frac{3}{2}\alpha\left(\frac{w_q+1}{r}\right) - \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3}r\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}\right]\phi' = 0$$

Con esto:

$$\phi'' + \left\{\left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3}r\right)\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} - \frac{3}{2}\alpha\left(\frac{w_q+1}{r}\right)\right\}\phi' = 0\Bigg|_{r\gg r_q} \tag{5.100}$$

Que viene a ser la forma lineal de la ecuación de campo para la quintaesencia ϕ mínimamente acoplada al espacio-tiempo de RNdS, de acuerdo al modelo híbrido del gas de Kiselev-Chaplygin generalizado, en el límite extremo especial de las distancias lo suficientemente grandes o alejadas del horizonte de sucesos más externo que envuelva al agujero negro de RNdS. Dicha ecuación de campo se constituye como una ecuación diferencial lineal, ordinaria de segundo orden en r, de coeficientes variables en r y homogénea. En consecuencia, esta ecuación de campo para tal quintaesencia mínimamente acoplada ϕ, tan sólo será válida únicamente para el caso especial en el que $r \gg r_q$.

Habiendo estudiado el comportamiento de la quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo de RNdS, produciendo como resultado el espacio-tiempo o agujero negro de RNdS-Quintaesencia, de acuerdo al enfoque del modelo de fluido perfecto isotrópico pero no homogéneo de Kiselev y del modelo *híbrido* del gas de Kiselev-Chaplygin generalizado, estamos listos ahora para obtener y describir la forma exacta de un potencial gravitacional debido y generado por la presencia de un agujero negro de RNdS-Quintaesencia en la periferia de su horizonte más externo. Siendo esto posible derivar de la métrica o solución exacta correspondiente a dicho espacio-tiempo, obtenida y planteada por la teoría de Kiselev ya abordada y estudiada en el presente capítulo. Asimismo, empleando las herramientas obtenidas en los capítulos precedentes, en el próximo capítulo se describirá la forma exacta del potencial gravitatorio en el exterior del agujero negro de RNdS, así como finalmente las propiedades del movimiento de toda partícula de prueba no cargada en este tipo de espacio-tiempo.

CAPÍTULO 6
MOVIMIENTO DE UNA PARTÍCULA DE PRUEBA Y POTENCIAL GRAVITACIONAL EN EL ESPACIO-TIEMPO DE RNdS

6.1 Ecuación radial

Sea una partícula de prueba clásica (sin spin) de masa m no cargada, moviéndose en las cercanías o en la vecindad de un espacio-tiempo de RNdS descrito por la métrica:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2 \tag{6.1}$$

donde $\Lambda = cte$ y $\Lambda > 0$.

La forma general del elemento de línea ds^2 es:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{6.2}$$

Expandiendo:

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & g_{00}dx^0dx^0 + g_{01}dx^0dx^1 + g_{02}dx^0dx^2 + g_{03}dx^0dx^3 + g_{10}dx^1dx^0 + g_{11}dx^1dx^1 \\ & + g_{12}dx^1dx^2 + g_{13}dx^1dx^3 + g_{20}dx^2dx^0 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}dx^2dx^2 \\ & + g_{23}dx^2dx^3 + g_{30}dx^3dx^0 + g_{31}dx^3dx^1 + g_{32}dx^3dx^2 + g_{33}dx^3dx^3 \end{aligned}$$

Como sabemos, esta métrica, por poseer propiedades de simetría esférica, y puesto que el cuerpo compacto o distribución esférica de masa total M y con carga eléctrica neta Q, permanece en reposo y, por lo tanto, no es rotante. Esto implica que dicha métrica (tensor métrico) sea en este caso diagonal, es decir:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 \tag{6.3}$$

Comparando (6.1) con (6.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right) \\ g^{00} &= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$g_{11} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}$$

$$g^{11} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2$$

$$g_{22} = r^2$$

$$g^{22} = \frac{1}{r^2}$$

$$g_{33} = r^2 sen^2\theta$$

$$g^{33} = \frac{1}{r^2 sen^2\theta}$$

Ahora de la ecuación de la geodésica en relatividad general, se puede determinar la ecuación de movimiento correspondiente a la coordenada radial r:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{6.5}$$

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\mu^\mu\mu^\nu = 0$$

y para $\Lambda = 1$,

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1_{\mu\nu}\mu^\mu\mu^\nu = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1_{0\nu}\mu^0\mu^\nu + \Gamma^1_{1\nu}\mu^1\mu^\nu + \Gamma^1_{2\nu}\mu^2\mu^\nu + \Gamma^1_{3\nu}\mu^3\mu^\nu = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1_{00}\mu^0\mu^0 + \Gamma^1_{01}\mu^0\mu^1 + \Gamma^1_{02}\mu^0\mu^2 + \Gamma^1_{03}\mu^0\mu^3 + \Gamma^1_{10}\mu^1\mu^0 + \Gamma^1_{11}\mu^1\mu^1 + \Gamma^1_{12}\mu^1\mu^2 + \Gamma^1_{13}\mu^1\mu^3 \\ + \Gamma^1_{20}\mu^2\mu^0 + \Gamma^1_{21}\mu^2\mu^1 + \Gamma^1_{22}\mu^2\mu^2 + \Gamma^1_{23}\mu^2\mu^3 + \Gamma^1_{30}\mu^3\mu^0 + \Gamma^1_{31}\mu^3\mu^1 + \Gamma^1_{32}\mu^3\mu^2 \\ + \Gamma^1_{33}\mu^3\mu^3 = 0\end{aligned}$$

Consideraremos que el movimiento de la partícula de prueba de masa m estará confinado en el plano ecuatorial o azimutal, esto implica que:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \tag{6.6}$$

Con esto:

$$\mu^2 = \frac{dx^2}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} = 0$$

$$\mu^2 = 0 \tag{6.7}$$

La ecuación anterior se reduce a la forma:

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1_{00}(\mu^0)^2 + \Gamma^1_{01}\mu^0\mu^1 + \Gamma^1_{03}\mu^0\mu^3 + \Gamma^1_{10}\mu^1\mu^0 + \Gamma^1_{11}(\mu^1)^2 + \Gamma^1_{13}\mu^1\mu^3 + \Gamma^1_{30}\mu^3\mu^0 + \Gamma^1_{31}\mu^3\mu^1 + \Gamma^1_{33}(\mu^3)^2 = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \Gamma^1_{00}(\mu^0)^2 + \Gamma^1_{11}(\mu^1)^2 + \Gamma^1_{33}(\mu^3)^2 + 2\Gamma^1_{01}\mu^0\mu^1 + 2\Gamma^1_{03}\mu^0\mu^3 + 2\Gamma^1_{13}\mu^1\mu^3 = 0 \tag{6.8}$$

Hallando los símbolos de Christoffel, dados por:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right) \tag{6.9}$$

Así, la métrica dada en la expresión (6.1) correspondiente a un espacio-tiempo estacionario, es decir, sin dependencia temporal explícita; de modo tal que todas las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ serán estacionarias, esto es:

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \tag{6.10}$$

donde

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

Con esto:

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_0 g_{10} + \partial_0 g_{10} - \partial_1 g_{00}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{00}$$

$$\Gamma^1_{00} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)\left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3}r\right)$$

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1 g_{11} + \partial_1 g_{11} - \partial_1 g_{11}) = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{11}$$

$$\Gamma^1_{11} = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}\left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3}r\right)$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_3 g_{13} + \partial_3 g_{13} - \partial_1 g_{33}) = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{33}$$

$$\Gamma^1_{33} = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) r sen^2\theta$$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{11} + \partial_1 g_{10} - \partial_1 g_{01})$$

$$\Gamma^1_{01} = 0$$

$$\Gamma^1_{03} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_0 g_{13} + \partial_3 g_{10} - \partial_1 g_{03})$$

$$\Gamma^1_{03} = 0$$

$$\Gamma^1_{13} = \frac{1}{2} g^{11}(\partial_1 g_{13} + \partial_3 g_{11} - \partial_1 g_{13}) = \frac{1}{2} g^{11} \partial_3 g_{11}$$

$$\Gamma^1_{13} = 0$$

Reemplazando esto en (6.8):

$$\frac{d^2x^1}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)\left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3} r\right)\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)^{-1}\left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3} r\right)\left(\frac{dx^1}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) r sen^2\theta \left(\frac{dx^3}{d\tau}\right)^2 = 0$$

donde en unidades naturales; $c = 1$, se tiene:

$$x^0 = ct$$

En unidades naturales:

Con $c = 1$, se tiene

Con esto:

$$x^0 = t$$

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)\left(\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}-\frac{\Lambda}{3}r\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$
$$-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}\left(\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}-\frac{\Lambda}{3}r\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2$$
$$-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)rsen^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2=0$$

y de (6.6), se tiene:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)\left(\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}-\frac{\Lambda}{3}r\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$$
$$-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1}\left(\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}-\frac{\Lambda}{3}r\right)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 \qquad (6.11)$$
$$-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{3}r^2\right)r\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2=0$$

Esta expresión es la ecuación geodésica para la coordenada radial r, que describe el movimiento de una partícula de prueba de masa m, no cargada, cuando dicho movimiento arbitrario se encuentre restringido y confinado únicamente al plano ecuatorial, donde $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Ahora asumiremos que la partícula de prueba en cuestión describe en dicho plano ecuatorial, un movimiento circular cuyo radio de órbita sea r_0. Esto implicará que:

$$r=r_0=cte \qquad (6.12)$$

Entonces, tendremos que:

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr_0}{d\tau}=0$$

$$\frac{dr}{d\tau}=0 \qquad (6.13)$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=0 \qquad (6.14)$$

Reemplazando (6.12), (6.13) y (6.14) en (6.11):

$$\left(1-\frac{2M}{r_0}+\frac{Q^2}{{r_0}^2}-\frac{\Lambda}{3}{r_0}^2\right)\left(\frac{M}{{r_0}^2}-\frac{Q^2}{{r_0}^3}-\frac{\Lambda}{3}r_0\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2-\left(1-\frac{2M}{r_0}+\frac{Q^2}{{r_0}^2}-\frac{\Lambda}{3}{r_0}^2\right)r_0\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2=0$$

Efectuando, obtenemos:

$$\left(\frac{M}{{r_0}^3}-\frac{Q^2}{{r_0}^4}-\frac{\Lambda}{3}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2=\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{M}{{r_0}^3}-\frac{Q^2}{{r_0}^4}-\frac{\Lambda}{3}}\frac{dt}{d\tau}=\frac{d\phi}{d\tau}$$

$$dt=\frac{1}{\sqrt{\frac{M}{{r_0}^3}-\frac{Q^2}{{r_0}^4}-\frac{\Lambda}{3}}}d\phi$$

Integrando:

$$\int_{t_i}^{t_f}dt=\frac{1}{\sqrt{\frac{M}{{r_0}^3}-\frac{Q^2}{{r_0}^4}-\frac{\Lambda}{3}}}\int_0^{2\pi}d\phi$$

donde:

$$\Delta t=t_f-t_i$$

$$\Delta t=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{M}{{r_0}^3}-\frac{Q^2}{{r_0}^4}-\frac{\Lambda}{3}}} \tag{6.15}$$

De la expresión (6.15) se puede obtener el periodo de rotación, es decir, el tiempo que emplea una partícula de prueba de masa m no cargada en describir una órbita circular completa alrededor de un cuerpo esférico compacto, masivo y cargado no rotante e incluyendo además a la constante cosmológica Λ. Se observa que dicho periodo de rotación Δt es constante, lo que significa que la partícula de prueba realiza un movimiento periódico.

Se puede notar que si la distribución esférica sea de carga Q nula y cuando no se considera a la constante cosmológica ($\Lambda=0$), el periodo obtenido se reduce al de Kepler, así (6.15) representa la corrección, y, por lo tanto, la generalización del periodo que se obtendría de la métrica de

Schwarzschild al incluir además la carga Q y acoplar una constante cosmológica Λ dentro del problema. Es decir:

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{\sqrt{\frac{M}{{r_0}^3} - \frac{Q^2}{{r_0}^4} - \frac{\Lambda}{3}}}{2\pi}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M}{{r_0}^3} - \frac{Q^2}{{r_0}^4} - \frac{\Lambda}{3}} \tag{6.16}$$

y como la frecuencia angular ω viene dada por:

$$\omega = 2\pi\nu \tag{6.17}$$

entonces

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{{r_0}^3} - \frac{Q^2}{{r_0}^4} - \frac{\Lambda}{3}} \tag{6.18}$$

Es fácil observar que la frecuencia angular ω es constante:

$$\omega = cte.$$

6.2 Potencial Gravitacional

Empezamos haciendo uso de la ecuación de la geodésica, dada por:

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\mu^\mu\mu^\nu = 0$$

Con $\lambda, \mu, \nu = 0,1,2,3$

Haciendo $\lambda = i$ y $\mu = \nu = 0$ con $i = 1,2,3$, esto se reescribe como:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{00}(\mu^0)^2 = 0$$

Con esto:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + c^2\Gamma^i_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{6.19}$$

Por otra parte:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{d^2x^i}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{dx^i}{dt}\frac{d^2t}{d\tau^2}$$

Pero:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0$$

Entonces:

$$\frac{dt}{d\tau} = cte$$

Con esto:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \vec{a} \tag{6.20}$$

(6.20) en (6.19):

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \vec{a} + c^2\Gamma^i_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0$$

factorizando $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$, se tiene

$$\vec{a} = -c^2\Gamma^i_{00} \tag{6.21}$$

Por otro lado:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U_g$$

donde

$$\phi_g = \frac{U_g}{m}$$

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\phi_g \tag{6.22}$$

(6.22) en (6.21):

$$\vec{\nabla}\phi_g = c^2\Gamma^i_{00} \tag{6.23}$$

Esta expresión muestra la equivalencia entre el *potencial gravitacional* y la deformación en la geometría del espacio-tiempo, en el caso correspondiente a la topología de un espacio *curvo*. Ahora, restringiendo i sólo a la coordenada radial r tenemos que:

Con $i = 1$:

$$\partial_1 \phi_g = c^2 \Gamma^1_{00}$$

Puesto que ϕ_g es el potencial de un campo central:

$$\phi_g = \phi_g(r)$$

Con esto, se tiene

$$\phi'_g = c^2 \Gamma^1_{00} \tag{6.24}$$

Debemos observar, de manera no trivial, que si hubiésemos considerado dentro de la ecuación de la geodésica inicial las respectivas componentes tridimensionales de la cuadrivelocidad μ^μ y μ^ν la expresión (6.24) adoptaría la siguiente forma:

$$\phi'_g = c^2 \Gamma^1_{00} + v^j v^k \Gamma^1_{jk}$$

Con: $j, k = 1,2,3$.

De tal manera que la ecuación del potencial gravitatorio ϕ_g está sujeta a la expansión de las distintas componentes de la tri-velocidad v^j y v^k –que incluirían, además de la velocidad radial, adicionalmente el aporte de las velocidades angulares en θ y ϕ- lo que traería como consecuencia la dependencia angular del potencial gravitacional. Sin embargo, dado que dicho potencial es definido por un campo de *fuerza* central, este hecho implica que sólo depende de la coordenada radial r. Siendo esta la razón física por la que se omite el aporte de la tri-velocidad en la ecuación de la geodésica.

El campo es estacionario y, además, la métrica de RNdS es diagonal; con esto, la conexión afín se reduce a la forma:

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{00}$$

Ahora bien, sabemos que en el límite Newtoniano el campo gravitatorio es débil [8, 79], lo cual implica que:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Con:

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G\rho$$

donde

$$G_{00} \approx \nabla^2 g_{00}$$

$$\left|\mu^i\right| = |\vec{\mu}| \ll c$$

para

$$i = 1,2,3$$

Teniendo en cuenta que:

$$g^{11} = \eta^{11} + h^{11}$$

y como

$$|h^{11}| \ll 1$$

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$$

entonces

$$|h_{00}| \ll 1$$

Obtenemos

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{11}\partial_1 h_{00} \tag{6.25}$$

Asumiendo signatura $(+,-,-,-)$ en la métrica:

$$\eta^{00} = \eta_{00} = 1$$

$$\eta^{ii} = \eta_{ii} = -1$$

Tenemos:

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\partial_1 h_{00} \tag{6.26}$$

Debido a que el campo es central, se tiene

$$h_{00} = h_{00}(r)$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}h'_{00} \tag{6.27}$$

así, (6.27) en (6.24):

$$\phi_g'(r) = \frac{1}{2}c^2 h_{00}'$$

Con esto:

$$d\phi_g = \frac{1}{2}c^2 dh_{00}$$

Integrando obtenemos:

$$\phi_g(r) = \frac{1}{2}c^2 h_{00} + cte$$

Puesto que en $r \to \infty$ el potencial es nulo localmente en la región asintóticamente plana del espacio-tiempo, en donde, por ser la componente temporal de la perturbación h_{00} sobre la métrica de Minkowski despreciable, esto implica necesariamente que la constante de integración sea nula.

Para $r \to \infty$:

$$\phi_g(r)\big|_{r\to\infty} = h_{00}(r)|_{r\to\infty} \approx 0$$

Por tanto:

$$cte \approx 0$$

Con esto:

$$\phi_g(r) = \frac{1}{2}c^2 h_{00}$$

Es decir:

$$h_{00} = \frac{2\phi_g(r)}{c^2} \tag{6.28}$$

Pero:

$$h_{00} = g_{00} - 1 \tag{6.29}$$

Sustituyendo (6.29) en (6.28):

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi_g(r)}{c^2} \tag{6.30}$$

Notar que si adoptamos en esta expresión el potencial de Newton, la componente temporal de la métrica g_{00} resulta siendo la correspondiente al del caso de Schwarzschild. No obstante, la expresión

(6.30) constituye una definición bastante general, para todo campo gravitatorio que, siendo producido por una distribución estática y esféricamente simétrica, se define como un campo débil y estacionario [8,79]. Empleando luego la solución de RNdS con la misma signatura $(+,-,-,-)$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + g_{ii}\left(dx^i\right)^2 \tag{6.31}$$

Por otro lado, expandiendo el elemento de línea ds^2, en unidades naturales, sabemos que:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ii}\left(dx^i\right)^2 \tag{6.32}$$

Comparando (6.31) con (6.32) despejamos la componente temporal de la métrica:

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{6.33}$$

Reemplazando la expresión (6.33) en (6.30) (expresándola ahora en unidades naturales con $c = 1$), obtenemos:

$$\phi_g(r) = -\frac{M}{r} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{6}r^2 \tag{6.34}$$

Invirtiendo ahora la signatura y considerando en cambio $(-,+,+,+)$, tenemos que:

$$\eta^{00} = \eta_{00} = -1$$

$$\eta^{ii} = \eta_{ii} = 1$$

Reemplazando esto en (6.25):

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}h'_{00}$$

y en (6.24):

$$\phi'_g(r) = -\frac{1}{2}c^2 h'_{00}$$

Integrando:

$$\phi_g(r) = -\frac{1}{2}c^2 h_{00} + cte$$

Del mismo modo, en el infinito se tiene que:

$$\phi_g = h_{00} \approx 0$$

Entonces $cte \approx 0$. Con esto:

$$\phi_g(r) = -\frac{1}{2}c^2 h_{00}$$

Despejando h_{00}:

$$h_{00} = -\frac{2\phi_g(r)}{c^2}$$

y como

$$h_{00} = g_{00} + 1$$

entonces reemplazando en la expresión anterior:

$$g_{00} = -(1 + 2\phi_g(r)) \tag{6.35}$$

Luego, con la misma convención de signatura $(-,+,+,+)$ expresamos el elemento de línea ds^2 correspondiente a RNdS:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + g_{ii}\left(dx^i\right)^2$$

Análogamente, al caso anterior, comparando esta última expresión con la expansión del elemento de línea:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{ii}\left(dx^i\right)^2$$

Se obtiene:

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (6.35), obtenemos nuevamente el potencial gravitacional de RNdS $\phi_g(r)$ deducido en la expresión (6.34):

$$\phi_g(r) = -\frac{M}{r} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{6}r^2$$

Por lo tanto, el potencial gravitacional en el exterior del agujero negro de RNdS obtenido es invariante y, por tanto, independiente de la convención de signatura que se adopte. Se obtiene el mismo resultado dado por la expresión (6.34), tanto empleando la convención $(+,-,-,-)$ correspondiente a una contracción par del tensor de Riemann que da como resultado ecuaciones de campo de la forma $G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ (M. P. Hobson, pag 180, [79]), como utilizando la

convención $(-,+,+,+)$ correspondiente a una contracción impar del tensor de Riemann que da como resultado, por el contrario, ecuaciones de campo cuya forma es $G_{\mu\nu}+\Lambda g_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$ (J. B. Hartle, pag 480, [80]).

Si ahora derivamos $\phi_g(r)$ tenemos que:

$$\phi_g'=\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}-\frac{\Lambda}{3}r$$

Con esto:

$$\frac{d\phi_g}{dr}=\frac{M}{r^2}-\frac{Q^2}{r^3}-\frac{\Lambda}{3}r$$

e integrando:

$$\phi_g(r)=-\frac{M}{r}+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{r^2}-\frac{\Lambda}{6}r^2+cte \tag{6.36}$$

Con lo cual restituimos la expresión (6.34) anteriormente obtenida, pero incluyendo esta vez adicionalmente una constante de integración arbitraria, la cual podemos *calibrar* o escoger a conveniencia del siguiente modo:

Haciendo:

$$cte=\frac{\Lambda}{6}M^2 \tag{6.37}$$

Finalmente, sustituyendo (6.37) en (6.36) obtenemos:

$$\phi_g(r)^{(RNdS)}=-\frac{M}{r}+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{r^2}+\frac{\Lambda}{6}(M^2-r^2) \tag{6.38}$$

Esta última expresión viene a ser la forma exacta del potencial gravitacional total en el exterior del agujero negro de RNdS, cuyo comportamiento, como podemos notar, depende tanto de los aportes de la masa M y la carga eléctrica Q de dicho agujero negro, así como del aporte de la constante cosmológica positiva Λ que se encuentra acoplada a él.

CAPÍTULO 7
CONCLUSIONES

1. Se obtiene la solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein, incluyendo una constante cosmológica positiva, para el caso específico de una distribución de masa cargada esféricamente simétrica y en reposo, mediante el empleo de la aproximación del campo gravitatorio débil. La utilización del método perturbativo referido permite linealizar las ecuaciones de campo señaladas -en particular la relacionada específicamente con la componente temporal de la perturbación a la métrica de Minkowski-, en contraste con los métodos convencionales, con los que tan sólo es posible obtener en una primera instancia un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, correspondientes a las componentes diagonales del tensor de Ricci en los casos típicos pertenecientes a las soluciones exactas de Schwarzschild y de RN.
2. El elemento de línea ds^2, que describe el comportamiento de la geometría del espacio-tiempo en el exterior del agujero negro o singularidad de RNdS, colapsa y diverge en los 3 horizontes de sucesos de radios r_+, r_-, r'_+ que envuelven, aíslan o que protegen causalmente a dicha singularidad, cuando este elemento de línea se encuentra expresado y definido en el sistema de las coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ). No obstante, resulta finito y regular al evaluarlo en los 3 horizontes señalados, al expresarlo y definirlo en el sistema de las coordenadas de Kruskal relativas a cada uno de estos respectivos horizontes (V^+, U^+, θ, ϕ), (V^-, U^-, θ, ϕ), $(V^{+\prime}, U^{+\prime}, \theta, \phi)$ y así como también al expresarlo y analizarlo en el sistema de las coordenadas *como de tiempo* y *como de espacio* (T, X). Presentando con esto la forma de comportamiento descrita y señalada, en general, aquellas métricas correspondientes a agujeros negros estáticos

y esféricamente simétricos tales como los de Schwarzschild [50, 51] y así como también el caso sub-extremal de Reissner-Nordstrom (RN) [38, 51, 74].

3. Es posible enviar información a la velocidad de la luz desde todos y cada uno de los 3 horizontes de sucesos que envuelven al agujero negro de RNdS (de radios r_+, r_- y r'_+) y recibirla en cualquier punto del espacio-tiempo arbitrariamente lejano a cualesquiera de los horizontes mencionados, en un intervalo de tiempo Δt finito. Sin importar cuán lejos se encuentre el punto de recepción señalado, para cualquier observador que se encuentre ubicado en él, la señal que contiene tal información no presenta un corrimiento infinito al rojo, debido a que dicho observador es capaz de medir un período Δt finito correspondiente a dicha señal.

4. Este resultado sólo es posible de obtenerse mediante el auxilio y empleo de las coordenadas de Kruskal relativas a cada uno de los 3 horizontes mencionados, contrastando esto, de manera radical y fundamental, con el resultado que predice el empleo de las coordenadas esféricas. El cual establece, en cambio, la imposibilidad del intercambio de información con el horizonte que envuelve a todo agujero negro estático y esféricamente simétrico (tal como corresponde a los casos típicos de Schwarzschild, sub-extremal de Reissner-Nordstrom e incluyendo también al referente a RNdS), en cuyos casos tenemos que el observador lejano a la singularidad jamás recibe la señal que contiene la información enviada desde su horizonte en un intervalo de tiempo Δt finito, puesto que para dicho observador tal señal presenta un corrimiento infinito al rojo.

5. De todo lo anteriormente expuesto y señalado, se concluye que el comportamiento que presenta la estructura causal en torno a los horizontes del agujero negro de RNdS depende de manera crucial y fundamental del sistema de coordenadas que se emplea para describirla. De tal manera que las singularidades que se obtienen en la descripción del comportamiento tanto de la métrica ds^2, así como de la estructura causal Δt en torno a los respectivos horizontes de

agujeros negros estáticos y esféricamente simétricos, tales como el de RNdS, son el resultado única y exclusivamente del sistema de coordenadas que se utilice para describirlos. Con esto, tales singularidades obtenidas vienen a ser *singularidades coordenadas*, mas no propiamente físicas.

Por lo tanto, el sistema coordenado más idóneo capaz de lograr una descripción física coherente de la estructura causal en torno a cada uno de los 3 horizontes del agujero negro de RNdS, evadiendo o *levantando* con ello tales singularidades coordenadas, viene a ser el sistema de las coordenadas de Kruskal $(V, U - T, X)$.

6. Mediante el empleo de las coordenadas de Kruskal del tipo *como de tiempo* y *como de espacio* (T, X), podemos obtener la forma exacta de las geodésicas radiales nulas, que nos definen las trayectorias que describen las señales luminosas sobre el espacio-tiempo en torno a cada uno de los 3 horizontes que envuelven al agujero negro de RNdS. A este respecto, las superficies en las cuales la distancia r -medida desde la propia singularidad de RNdS- desde la cual son emitidas o enviadas tales señales luminosas, es $r = r_+,\ r_-,\ r'_+$ corresponden a geodésicas radiales nulas de la forma específica $T = \pm X$.

7. Las superficies en las cuales dicha distancia r es constante y distinta al radio de cualquiera de estos 3 horizontes -es decir, sí, $r = r_0 = cte$, tal que $r_0 \neq r_+,\ r_-,\ r'_+$- corresponden a trayectorias hiperbólicas sobre el espacio-tiempo, cuyas asíntotas vienen a ser las geodésicas radiales nulas de la forma $T = \pm X$ anteriormente definidas y señaladas.

8. En el límite de los órdenes de magnitud muy pequeños para $\Lambda > 0$ el potencial gravitacional en el exterior del agujero negro de RNdS se reduce al potencial de Newton $-\frac{M}{r}$, de modo tal que dicho potencial define un campo gravitacional atractivo y cuya intensidad disminuye a medida que se incrementa la distancia. Dicho comportamiento lo podemos apreciar en la gráfica 9.a.

9. Por otro lado, en el límite de los órdenes de magnitud muy grandes para $\Lambda > 0$ el potencial gravitacional de RNdS se reduce al potencial gravitatorio debido exclusivamente a la presencia de la constante cosmológica positiva, en cuyo caso tenemos que su comportamiento se encuentra sujeto a la masa M del agujero negro referido. Así tenemos que cuando $M > r$ el potencial corresponde a un campo gravitatorio de efecto manifiestamente repulsivo (mostrando con esto características propias de un espacio-tiempo tipo De Sitter), en cambio, cuando $M < r$ dicho potencial define un campo gravitacional de carácter atractivo. Este comportamiento en el potencial gravitacional de RNdS lo podemos ver en las gráficas 9.b y 9.c, respectivamente.

10. La densidad de energía, tanto para el caso de una quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo de RNdS –en el límite especial de las distancias próximas al horizonte donde $r \ll r_q$- así como también para el caso relativo a una no acoplada o *libre*, varía de forma inversa respecto a su respectiva variable y es positiva. Así tenemos que, en virtud de esto, de acuerdo con los modelos de Kiselev e híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado (figuras 1.a y 5.a, respectivamente), correspondientes al contexto de una quintaesencia inhomogénea, ésta tiene un máximo a distancias próximas a la singularidad y es asintóticamente nula a distancias considerables; por otro lado, en el contexto correspondiente a una quintaesencia homogénea, de acuerdo exclusivamente al modelo del gas de Chaplygin generalizado, dicha densidad alcanzó su valor máximo en los instantes inmediatamente posteriores al *big bang* para posteriormente empezar a hacerse asintóticamente nula aproximadamente a partir de $2x10^5$ años después de ocurrido dicho evento (figura 2.a).

11. De acuerdo única y exclusivamente al modelo de Kiselev, la presión de quintaesencia isotrópica y no homogénea es negativa y varía inversamente con la distancia (gráfico 1.b). En cambio, cuando pretendemos describir dicha presión a partir del modelo híbrido de Kiselev-

Chaplygin generalizado, tenemos que dicha presión isotrópica e inhomogénea continúa siendo negativa y, asimismo, esta vez en cambio, varía de manera directa con la distancia, siendo el incremento de tal presión lineal (ver figuras 7.a y 7.b).

12. El modelo híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado muestra que la presión asociada a una quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo de RNdS posee un comportamiento tal que, esta puede ser positiva o negativa según sean los valores que adopte el parámetro de Chaplygin α dentro de su respectivo dominio $0 < \alpha \leq 1$. Así tenemos que dicha presión es negativa para todo $0 < \alpha < 0.25$, mientras que, en cambio, resulta siendo positiva para todo $0.25 < \alpha < 0.75$ y, finalmente, vuelve a ser negativa para todo $0.75 < \alpha \leq 1$. Asimismo, es nula cuando $\alpha = 0.25$ y en $\alpha = 0.75$. Tal comportamiento es el resultado de la forma campaniforme que adopta la distribución de la presión de quintaesencia respecto al parámetro de Chaplygin α. Esto se puede observar y analizar con suficiente claridad en el gráfico 7.c.

13. En el contexto de una quintaesencia mínimamente acoplada al campo gravitacional de RNdS, el modelo híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado planteado en este trabajo proporciona una manera de predecir bajo qué condiciones físicas específicas la quintaesencia puede ejercer una presión positiva, negativa y nula sin que tengamos que apelar esta vez al estudio de su evolución temporal, asumiéndola como un campo o *fluido* homogéneo, y por consiguiente, sin tener que satisfacer la presunción de homogeneidad e isotropía del universo establecida por el paradigma del principio cosmológico. Puesto que la polaridad de la presión de quintaesencia, de acuerdo a nuestro modelo híbrido mencionado, sólo depende de los valores que adopta el parámetro de Chaplygin α, por lo tanto, con esto podemos saber con precisión cuándo la quintaesencia es capaz de provocar una expansión acelerada y cuando no; asimismo, también

podemos saber para qué valores exactos de α dicha presión viene a ser nula y, por consiguiente, bajo qué condiciones nos encontramos hablando del predominio de la materia ordinaria sobre la energía oscura, tal cual como nos ofrece el análisis de la figura 7.c.

14. Actualmente existen numerosos modelos quintaesencia que son capaces de predecir el comportamiento de la energía oscura en las distintas etapas cronológicas del universo, hecho que es debido a que la mayoría de tales modelos describen a dicho campo escalar como un fluido o gas isotrópico y homogéneo, satisfaciendo con ello la presunción de valides del principio cosmológico a gran escala. En esa misma dirección encontramos que el modelo del gas de Chaplygin generalizado, para el caso de una quintaesencia no acoplada a ningún tipo de campo gravitacional o espacio-tiempo curvo (y con esto, en consecuencia, isotrópica y homogénea), presenta para los primeros instantes del universo inmediatamente posteriores a la gran explosión $(t \to 0)$ una presión negativa asintóticamente nula $(P_q \to 0)$. Este hecho implica, tal cual como lo sugieren muchos otros tipos de modelos y teorías quintaesencia, el predominio de la materia ordinaria sobre una cantidad prácticamente despreciable de energía oscura en los momentos primigenios del universo. Puesto que de ello es fácil deducir para este caso que el parámetro de estado $w_q \approx 0$, entonces, se logra satisfacer y constatar lo predicho por tales modelos teóricos. Posteriormente a esta etapa, la presión de quintaesencia presenta un aumento lineal de su carácter negativo a lo largo de su evolución temporal, el cual se mantiene hasta aproximadamente el primer millón de años del cosmos, tal cual como lo podemos apreciar en el gráfico 2.b.

Por otro lado, encontramos adicionalmente que, de acuerdo al modelo del gas de Chaplygin generalizado, el campo escalar de quintaesencia presenta una presión isotrópica y homogénea negativa para todos los valores del parámetro α (esto es, para el dominio completo $0 < \alpha \leq 1$)

correspondiente con la etapa actual; resultado que, como se puede ver en la figura 3.b, es totalmente consistente y coherente con las observaciones astronómicas que muestran en la actualidad una aceleración cósmica moderada.

15. El potencial escalar de una quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo de RNdS corresponde a un potencial asociado a un fluido o gas perfecto, isotrópico e inhomogéneo. En tal sentido, las descripciones dadas tanto por el modelo de Kiselev (figura 1.c), así como por el modelo híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado, en el límite especial de las distancias próximas o cercanas al horizonte de eventos más externo que envuelve la singularidad (figura 5.b), convergen, mostrándonos que dicho potencial es positivo, y que variando de manera inversa con la distancia, posee un valor máximo a una distancia próxima a la singularidad (cuando $r \to 0$) y es asintóticamente nulo a una distancia lo suficientemente grande de la misma. Por el contrario, en el límite especial de las distancias muy alejadas al horizonte señalado, el modelo híbrido mencionado describe un potencial escalar que varía de manera directamente proporcional a la distancia a la singularidad de RNdS, donde dicho potencial continúa siendo positivo (figura 6.a).

16. De acuerdo con el modelo del gas de Chaplygin generalizado, el potencial escalar asociado a un campo de quintaesencia no acoplado a ningún tipo de campo gravitatorio o espacio-tiempo curvo o *libre*, y por consiguiente isotrópica y homogénea, es siempre positivo y varía en relación inversa con el tiempo. Esto implica que el potencial de la energía oscura tuvo un valor máximo o muy alto en los primeros instantes del universo inmediatamente posteriores a la gran explosión (es decir, cuando $t \to 0$). Como es fácil de observar en la gráfica 2.c, este resultado es bastante consistente y compatible con la descripción de la breve etapa inflacionaria del cosmos dada por las teorías y modelos inflacionarios, los cuales predicen que el potencial asociado a una energía oscura o quintaesencia homogénea en los momentos primigenios del

universo posteriores al big bang presentaba un comportamiento de carácter exponencial. Posteriormente a dicha *fase inflacionaria*, y tal cual como se espera encontrar, el modelo del gas de Chaplygin muestra que la disminución del potencial escalar comenzó a ser apreciable aproximadamente a partir del primer millón de años, hasta finalmente alcanzar un valor asintóticamente nulo.

17. De acuerdo con el modelo del gas de Chaplygin generalizado, para la etapa actual del universo -correspondiente a una aceleración cósmica moderada- tenemos que el potencial escalar varía inversamente con el parámetro de Chaplygin α, tal cual como lo muestra la gráfica 3.c. De modo tal que el potencial de quintaesencia es máximo cuando este parámetro es mínimo, esto es, cuando $\alpha \to 0$ (o lo que es equivalente a decir para $\alpha \ll 0.1$) y alcanza su valor mínimo en el caso especial del gas de Chaplygin simple, el cual corresponde al valor específico de $\alpha = 1$.

18. El campo escalar de una quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo de RNdS, y por consiguiente isotrópica pero no homogénea $\phi(r)$, presenta básicamente el mismo comportamiento al describirlo tanto mediante el modelo de Kiselev (figura 1.d), como por el modelo híbrido del gas de Kiselev-Chaplygin generalizado aquí presentado. Tal convergencia se presenta tanto al evaluar su comportamiento en el límite de las distancias próximas al horizonte de eventos más externo (figura 5.c), así como en el límite de aquellas regiones cuya distancia al horizonte referido es considerable (figura 6.b). De acuerdo con ambos modelos, el campo escalar de quintaesencia no homogénea $\phi(r)$ es positivo y su variación viene a ser directamente proporcional a la distancia. De manera análoga, una quintaesencia no acoplada a ningún tipo de campo gravitacional o *libre* presenta un campo escalar $\phi(t)$ igualmente positivo que varía de forma directamente proporcional al tiempo transcurrido. De acuerdo con lo anteriormente indicado, el crecimiento del campo escalar, correspondiente a una quintaesencia homogénea no acoplada, fue rápido en los primeros años posteriores al big bang. Podemos

observar que al cabo de aproximadamente unos 100 mil años de ocurrida la gran explosión, dicho crecimiento comenzó a desacelerarse, de modo tal que, a partir de unos 250 mil años, tal desaceleración comenzó a ser apreciable. Finalmente, eventualmente el campo escalar de dicha quintaesencia se estabilizó en un valor aproximadamente constante al cabo de un tiempo cosmológico lo suficientemente largo; constituyendo este último resultado así obtenido, de acuerdo al modelo del gas de Chaplygin generalizado (figura 2.d), una ratificación y validación de las observaciones astronómicas relativas a la etapa actual del universo, en cuanto a su modo de expansión acelerada *moderada* a causa de un fluido oscuro de densidad y presión negativa constantes, tal cual como es predicho por otros enfoques tales como el modelo ΛCDM.

19. La constante cosmológica Λ es inversamente proporcional al parámetro de Chaplygin α, de modo tal que, cuando α es mínimo ($\alpha \to 0$), el valor inicial de dicha constante coincide con su valor máximo; mientras que, por el contrario, cuando α alcanza el valor máximo de su respectivo dominio ($\alpha = 1$), la constante cosmológica adopta como valor final su correspondiente valor mínimo. Verificándose con esto la predicción teórica formulada en este trabajo de investigación que nos dice que $\Lambda_{inicial} > \Lambda_{final}$. Asimismo, dicha constante cosmológica Λ siempre es positiva, de acuerdo con la respectiva y correspondiente gráfica 4 obtenida en este trabajo de investigación.

20. La frecuencia angular de oscilación ω, así como el periodo Δt que emplea toda partícula de prueba clásica sin spin (sin giro), no cargada de masa m -cuyo movimiento se encuentra confinado únicamente al plano ecuatorial, en el exterior del agujero negro de RNdS- en efectuar una revolución completa alrededor de dicha distribución, son constantes y dependientes exclusivamente de la masa M y la carga eléctrica total Q del agujero negro en

cuestión, así como del valor de la constante cosmológica positiva Λ acoplada a este sistema y adicionalmente del radio r_0 de su órbita circular.

21. Asimismo, tenemos que, al prescindir de dicha carga Q y de la constante cosmológica Λ implicada en este problema, el periodo Δt encontrado se reduce al periodo de Kepler (es decir, a la tercera ley de Kepler). Lo cual demuestra que el periodo correspondiente al caso de RNdS hallado en este trabajo constituye la generalización del periodo deducido a partir de la solución de Schwarzschild bajo las mismas condiciones físicas planteadas y asumidas anteriormente señaladas.

22. El modelo del gas de Chaplygin generalizado al describir el comportamiento de una quintaesencia homogénea $\phi = \phi(t)$, en el contexto de asumirla desacoplada a todo espacio-tiempo curvo y a gran escala cósmica, determina que el parámetro de estado ω_q tenga dependencia temporal. Dado que aquí ahora tenemos que $\omega_q = \frac{P_q(t)}{\rho_q(t)} = \omega_q(t)$, dicha dependencia temporal abarca todas las distintas etapas cronológicas del cosmos de acuerdo a la condición $-1 \leq \omega_q \leq \frac{1}{3}$; desde la etapa actual dominada por la presencia de una constante cosmológica positiva, hasta un universo hipotéticamente dominado por radiación (materia relativista) y pasando por la etapa inicial posterior a la gran explosión con $\omega_q = 0$, donde no existía presencia alguna de quintaesencia ó la *cantidad* de ésta era despreciable en el universo.

23. La figura 8.a muestra el comportamiento de las geodésicas radiales nulas salientes en coordenadas esféricas alrededor de los horizontes de Cauchy, exterior y cosmológico. Se observa cómo las trayectorias luminosas parten de los conos de luz, correspondientes a cada uno de los 3 puntos de intersección, y se extienden hacia el infinito. Del mismo modo, la figura 8.b muestra el comportamiento de las geodésicas radiales nulas entrantes, igualmente en coordenadas esféricas, en donde podemos observar cómo las trayectorias luminosas llegan

desde el infinito y se incrustan en los respectivos conos de luz correspondientes a los mismos horizontes de Cauchy, exterior y cosmológico. En ambos casos tenemos que en la superficie de dichos horizontes (esto es, cuando $r = r_+,\ r_-,\ r'_+$) los conos de luz se cierran completamente, lo cual significa que la información contenida en las trayectorias luminosas es incapaz de comunicarse con el resto del universo cuando es enviada desde los horizontes. La incapacidad de *conexión causal* que se tiene en cada uno de los tres casos señalados, cuando $t \to \pm\infty$, denota que esto es sólo el resultado del sistema de coordenadas elegido, y por lo tanto, la consecuencia de las *singularidades coordenadas* obtenidas al emplear el sistema de las coordenadas esféricas.

CAPÍTULO 8
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] S.L. Adler, F.M. Ramazanoglu; (2015); **Spherically symmetric vacuum solutions arising from trace dynamics modifications to gravitation**; Department of physics, Princeton University, Princeton USA.

[2] M. Paakkonen; (2014); **Spherically symmetric inhomogeneous cosmological models**; Department of physics University of Jyvaskyla, Finlandia.

[3] A. Dharwadker; (2011); **The cosmological constant**; Institute of mathematics, India.

[4] J. Sánchez Villanueva; (2013); **Algunas soluciones para las ecuaciones de campo de la cosmología estándar**; Revista de la Escuela de Física, Vol. 1, No. 1, UNAH.

[5] **Tema 12: Cosmología**; Universidad de Granada; http://www.ugr.es/~jillana/sr/sr12.pdf

[6] J. Zorzano; (2008); **El modelo standart, Pilares básicos de la cosmología**; Departamento de física aplicada, U.P.M.

[7] M. Carmeli and T. Kuzmenko; (2001); **Value of the cosmological constant: Theory versus experiment**; Department of physics, Ben Gurion University, Israel.

[8] L.D. Landau y E.M. Lifshitz; (2008); **Teoría clásica de los campos**; Vol. 2 del Curso de Física Teórica, Editorial Reverté, Barcelona, España.

[9] I.S. Sokolnikoff; (1971); **Análisis tensorial**; Editorial Index-Prial.

[10] C.G. Bohmer; (2006); **General relativistic static fluid solutions with cosmological constant**; Berlin.

[11] C. Heinicke and F.W. Hehl; (2015); **Schwarzschild and Kerr solutions of Einstein's field equation an introduction**; Institute theoric of physics, University of Cologne, Germany.

[12] G.J. Galloway; (2016); **Cosmological spacetimes with $\Lambda > 0$**; Department of mathematics, University of Miami, USA.

[13] A.H. Abbassi, S. Abbassi and A.M. Abbassi; (2002); **General spherically symmetric solutions of Einstein vacuum field equations with Λ**; Department of physics, School of sciences, Tarbiat Modarres University, Tehran, I.R. Iran.

[14] M. Crespo Ballesteros; (2015); **Ecuaciones de campo de Einstein**; Universidad de

Murcia, España.

[15] R.A. Alemañ Berenguer; (2010); **El significado de la Relatividad General**; Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 4, No. 1.

[16] Real Academia de Ciencias de Suecia; (2011); **El universo en aceleración***;* Compilado por The class of physics de la Real Academia de Ciencias de Suecia.

[17] C. Moreno, R. García-Salcedo, A. Lara y J. Ramírez; (2008); **Introducción a las ondas gravitacionales**; Instituto politécnico Nacional, México, D.F.

[18] J.D. García Fuentes; (2008); **Ondas gravitacionales**; Universidad de Murcia.

[19] R. Lazkoz y J.A. Kroon; (2003); **Ondas gravitatorias**; Revista Mexicana de Física.

[20] H. García Compeán, J.R. Morones Ibarra y L. Toledo Sesma; (2006); **Ondas gravitacionales: Un nuevo contacto de la física con la tecnología**; Ingenierías (Vol. IX, No. 31).

[21] E. Sánchez; (2014); **La energía oscura y el destino del universo**; CIEMAT.

[22] T. Davis and B. Griffen; (2010); **Cosmological constant**; Scholarpedia.

[23] **The cosmological constant**; http://www.astro.umd.edu/~miller/teaching/astr422/lecture12.pdf

[24] J.D. Barrow and D.J. Shaw; (2011); **The value of the cosmological constant**; Cornell University, Library (arxiv).

[25] M.E. Atala; (2010); **Perturbación escalar en Reissner-Nordstrom: Formulación covariante**; Universidad Nacional de Córdoba.

[26] **Lecture 3: Reissner-Nordstrom Black Holes**; http://aesop.phys.utk.edu/ads-cft/l3.pdf

[27] M.A. Olivares Rubilar; (2011); **Movimiento de partículas de prueba cargadas y fotones en agujeros negros de Einstein**; Universidad de Santiago de Chile.

[28] L. Nuñez, H. Rago y L. Aulestia; (1983); **Modificación a la métrica de Reissner-Nordstrom en una cosmología de Einstein-De Sitter**; Departamento de física, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, Venezuela.

[29] F.W. Sears, M.W. Zemansky, H.D. Young y R.A. Freedman; (2004); **Física Universitaria**; Undécima edición, Vol. 2.

[30] E. Espinoza Ramos; (2002); **Análisis matemático IV para estudiantes de ciencias e ingeniería**; Primera edición, Lima, Perú.

[31] S. Weinberg; (1972); **Gravitation and cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity**; 1st edition.

[32] G. Arfken, H. Weber and F.E. Harris; (2012); **Mathematical Methods for physicists**; 7th edition.

[33] R.J. Howes; (1981); **Effects of a positive cosmological constant on circular orbits in the Reissner-Nordstrom, Schwarzschild, and Kerr fields**; General relativity and gravitation, Vol. 13, p. 829-835.

[34] J.L. Costa, P.M. Girao, J. Natario, J. Drumond Silva; (2015); **On the global uniqueness for the Einstein-Maxwell scalar field system with a cosmological constant: well posedness and breakdown criterion**; Classical and quantum gravity, Volume 32, Issue 1, article id. 015017.

[35] N. Ozdemir; (2007); **Spherical symmetric charged solution with cosmological constant**; arXiv:0711.4732

[36] H. Laue and M. Weiss; (1977); **Maximally extended Reissner-Nordstrom manifold with cosmological constant**; Physical Review, Vol. 16, No. 12.

[37] K. Lake; (1979); **Reissner-Nordstrom De Sitter metric, the third law, and cosmic censorship**; Physical Review, Vol. 19, No. 2.

[38] A. Borchers Pascual; (2019); **Global properties of charged black holes with cosmological constant**; Universidad del País Vasco, España.

[39] J. Londoño Cardoso; (2012); **Teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo**; Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

[40] E. Lavia; (2011); **Cuantización de campos escalares libres en espacio-tiempos curvos**.

[41] J. Solís López; (2017); **Campo escalar en el espacio-tiempo curvo. Interpretación hidrodinámica, vórtices y energía**; Centro de investigación y de estudios avanzados del Instituto politécnico nacional.

[42] D. Sobral Blanco, C. M. Barriuso Gutérrez y I. Asensio Pol; (2018); **Ecuación de Klein-Gordon en espacio-tiempos curvos globalmente hiperbólicos**; Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

[43] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim, J. Zanelli; (1993); **Geometry of the 2+1 black hole**; Physical Review, Vol. 48, No. 4.

[44] J. M. La Madrid; (2017); **Dinámica del campo escalar en el agujero negro BTZ no**

rotante; Universidad de Buenos Aires, Argentina.

[45] F. R. Muñoz Muñoz; (2014); **El polilogaritmo ayuda a corroborar la relación entre la entropía y el área de un agujero negro**; Innovaciencia, Vol. 2, No. 1, pag: 25-32.

[46] F. G. Lopez Armengol; (2015); **Evolución cosmológica de agujeros negros y su relación con la segunda ley de la termodinámica**; Universidad Nacional de La Plata, Argentina.

[47] A. Bonilla García; (2019); **¿Podría ser la gravedad una fuerza entrópica?***;* Universidad Nacional de Educación a Distancia.

[48] S. G. Zacarías Nicasio; (2008); **Hacia la generalización supersimétrica del agujero negro de Schwarzschild**; Universidad de Guanajuato, México.

[49] W. A. Rojas Castillo; (2018); **Mecánica estadística de la termodinámica de black shells**; Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

[50] E.A. Larrañaga R.; (2008); **Agujeros negros clásicos**.

[51] J. M. Pérez Poyatos; (2016); **Estudio comparativo de diferentes tipos de agujeros negros**; Universidad de Granada, España.

[52] U. E. Molina Redondo, D. Tovar, I. S. De Leon, Y.C. Arteta Pena; (2014); **Influencia de la constante cosmológica en el ángulo de deflexión de una lente gravitacional**; Ingeniare, Universidad Libre-Barranquilla, No. 16, pag: 39-46.

[53] C. Miranda, U. Molina y P. Viloria; (2014); **Retardo temporal en las lentes por galaxias en el contexto de Reissner-Nordstrom**; Revista mexicana de física, Vol. 60, pag: 190-194.

[54] C.S. Negrelli; (2014); **Agujero negro regular en la geometría de Schwarzschild-De Sitter**; Universidad Nacional de La Plata, Argentina.

[55] J.A. Caballero; (2005); **Mecánica cuántica relativista**; Dpto. Física atómica, molecular y nuclear, Universidad de Sevilla, España.

[56] V.V. Kiselev; (2002); **Quintessence and black holes**; arXiv:gr-qc/0210040v3

[57] H. Ghaffarnejad, E. Yaraie, M. Farsam; (2018); **Quintessence Reissner-Nordstrom Antidesitter black holes and joule Thomson effect**; arXiv:1802.08749v1[8r-qc]

[58] Wei Yi-Huan, Ren Jun; (2013); **Thermodynamic properties of Reissner-Nordstrom-de Sitter quintessence black holes**; Chin.Phys.B, Vol.22, No. 3.

[59] J. A. Espichán Carrillo; (2011); **Potencial escalar y densidad de energía de la quintaesencia dependiente del tiempo**; UNAC-FCNM.

[60] J. A. Magaña Zapata; (2012); **Materia oscura escalar: Implicaciones astronómicas y formación de estructuras cósmicas**; Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.

[61] A. M. De La Torre Gálvez; (2018); **Modelos cosmológicos de Quintaesencia interactuante**; Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

[62] T. Gonzalez Cruz; (2006); **Modelos del Universo con inclusión de campos escalares e interacción no gravitatoria entre la materia oscura y la energía oscura**; Universidad Central ''Marta Abreu'' de Las Villas.

[63] J. A. Espichán Carrillo; (2012); **Teoría Clásica de campos**; UNAC-FCNM.

[64] M. Visser; (2020); **The Kiselev black hole is neither perfect fluid, nor is it Quintessence**; Classical and Quantum Gravity, 37, 045001 (8pp).

[65] P. Boonserm, T. Ngampitipan, A. Simpson and M. Visser; (2020); **The composition of the total stress energy for the generalized Kiselev black hole**; Physical Review, 101, 024022.

[66] J. Cepa; (2007); **Cosmología Física**; Ediciones Akal.

[67] Sanjeev S. Seahra; (2006); **An introduction to black holes**.

[68] M. C. Bento, O. Bertolami and A. A. Sen; (2002); **Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy-matter**; arXiv: gr-qc/0202064v2

[69] J. C. Fabris, S.V.B. Goncalves and P.E. de Souza; (2001); **Density perturbations in an universe dominated by the Chaplygin gas**; arXiv: gr-qc/01033083v1

[70] V. Gorini and U. Moschella; (2008); **Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations in presence of the Chaplygin gas: stars and wormhole-like solutions**; arXiv:0807.2740v2

[71] V. Gorini, A. Yu, A. Kamenshchik, U. Moschella, O. F. Piattella and A. A. Starobinsky; (2009); **More about the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations for the generalized Chaplygin gas**; arXiv:0909.0866v3[gr-qc]

[72] V. Gorini, A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier; (2004); **The Chaplygin gas as a model for dark energy**; arXiv:gr-qc/0403062v2

[73] G. A. Parra Cerquera; (2014); **Gas de Chaplygin en teorías escalar-tensoriales de energía oscura**; Universidad del Valle, Facultad de ciencias naturales y exactas, Santiago de Cali, Colombia.

[74] H.S. Reall; (2014); **Part 3 Black Holes**; Lecture notes given as part of the Cambridge University Mathematical Tripos.

[75] G. Dotti, J. M. Fernández Tío; (2020); **Black hole nonmodal linear stability: even perturbations in the Reissner-Nordstrom case**; Phys.Rev.D **101**, 024034; https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.024034

[76] J. L. Costa, P. Girao; (2020); **Higher order linear stability and instability of Reissner-Nordstrom's Cauchy horizon**; Analysis and Mathematical Physics 10(3); arXiv: 1902.10726v1

[77] Z. Stuchlík, S. Hledík; (2002); **Properties of the Reissner-Nordstrom spacetimes with a nonzero cosmological constant**; Acta physica slovaca; Vol. 52, No. 5, 363-407.

[78] D. Kastor, J. Traschen; (1992); **Cosmological multi-black hole solutions**; arXiv:hep-th/9212035v2

[79] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou and A. N. Lasenby; (2006); **General relativity: An introduction for physicists**; Cambridge University Press.

[80] J. B. Hartle; (2003); **Gravity: An introduction to Einstein's general relativity**; Addison Wesley.

[81] C. González and B. Koch; (2016); **Improved Reissner-Nordstrom-(A)dS black hole in asymptotic safety**; International Journal of Modern Physics A; Vol. 31, No. 26; DOI: 10.1142/S0217751X16501414

[82] M. Mokdad; (2019); **Conformal scattering of Maxwell fields on Reissner-Nordstrom-De Sitter black hole spacetimes**; Annales de L'Institut Fourier; Université Grenoble Alpes, 69, 5, 2291-2329.

ANEXOS

A) GRÁFICOS

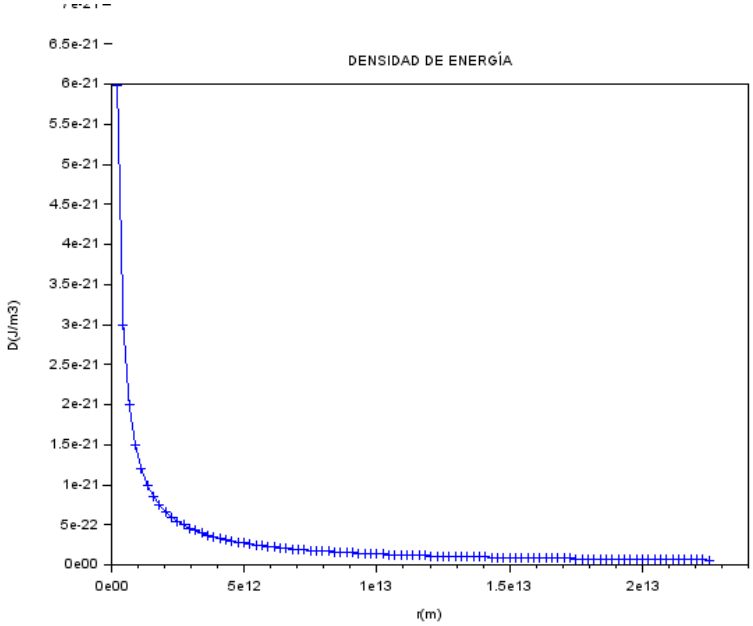


Fig 1.a

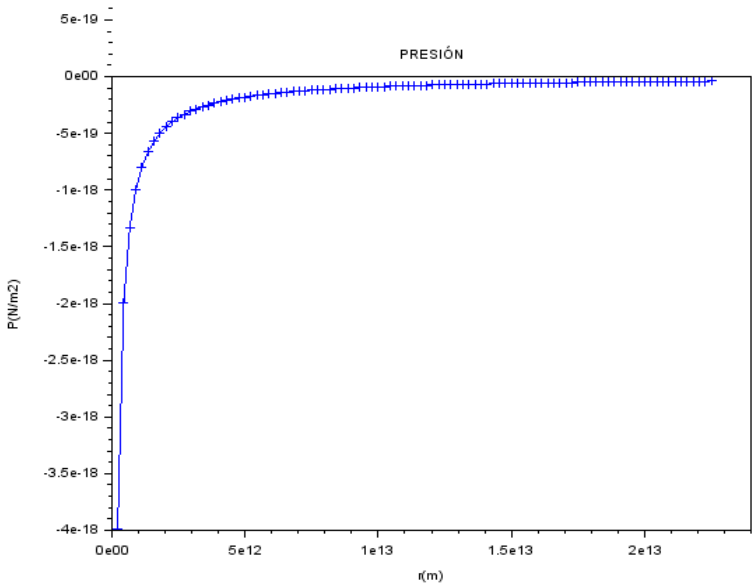


Fig 1.b

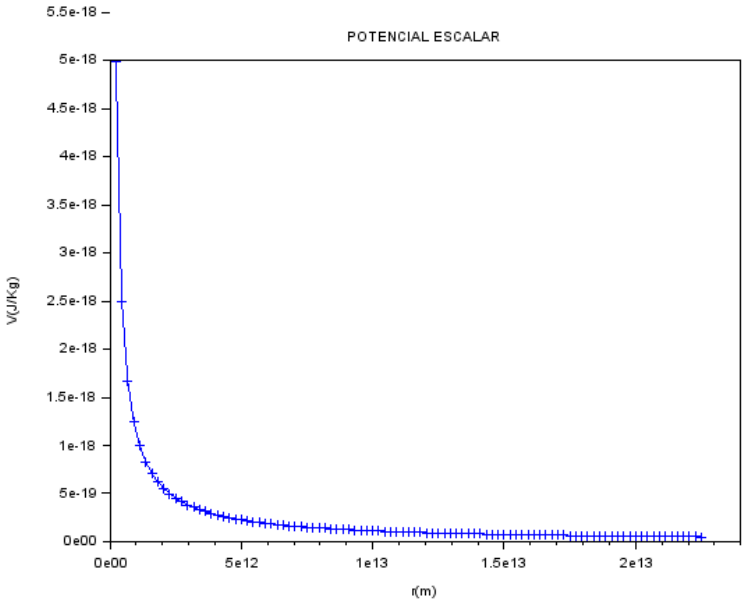

POTENCIAL ESCALAR
V(J/Kg)
r(m)
5.5e-18
5e-18
4.5e-18
4e-18
3.5e-18
3e-18
2.5e-18
2e-18
1.5e-18
1e-18
5e-19
0e00
0e00
5e12
1e13
1.5e13
2e13

Fig 1.c

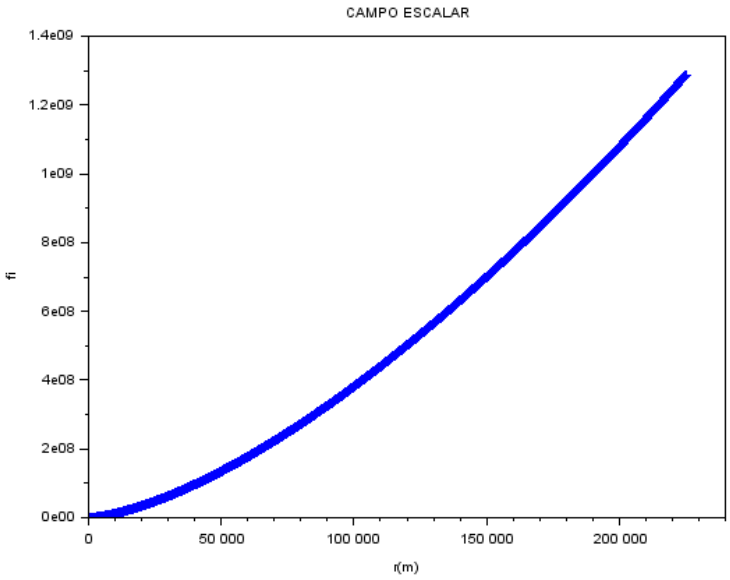

CAMPO ESCALAR
fi
r(m)
1.4e09
1.2e09
1e09
8e08
6e08
4e08
2e08
0e00
0
50 000
100 000
150 000
200 000

Fig 1.d

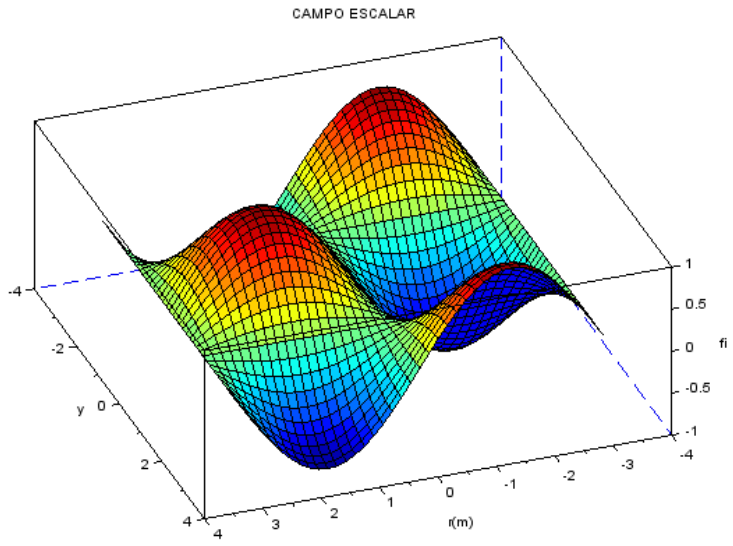


Fig 1.e

Figuras 1.a. Comportamiento de la densidad de energía $\rho_q(r)$. 1.b la presión $P_q(r)$, 1.c el potencial escalar $V(r)$ y gráficos 1.d y 1.e. El campo escalar de quintaesencia $\phi(r)$ isotrópico e inhomogéneo en la descripción de la quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo de RNdS, de acuerdo al modelo del fluido perfecto isotrópico pero no homogéneo de Kiselev descrito en 2D y como una superficie, respectivamente.

Aquí: $w_q = -2/3 \quad r_q = 5r_s = 7.35x10^5 m \quad r_s = 1.47x10^5 m \quad M = 50M_S = 9.94235x10^{31} Kg \quad Q = 2.3x10^{20} C$ $\Lambda = 1.1056x10^{-52} m^{-2}$ para una distancia r comprendida entre $r_{min} = 0$ y $r_{max} = 150d_s = 2.25x10^{13} m$.

Figuras 2.a. Densidad de energía $\rho_q(t)$, 2.b presión isotrópica $P_q(t)$, 2.c potencial escalar $V(t)$ y 2.d campo escalar $\phi(t)$ correspondientes a una quintaesencia no acoplada en los primeros instantes del universo posteriores a la gran explosión y a la época inflacionaria, donde $w_q = 0$ y el factor de escala satisfacía la condición de contorno extrema $a(t) \ll \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$ de acuerdo al modelo del gas de Chaplygin generalizado. Para un parámetro de Chaplygin $\alpha = 0.45$ $A = 2.854x10^{-19} \quad B = 10$, donde $t \in <0, 10^6] años$.

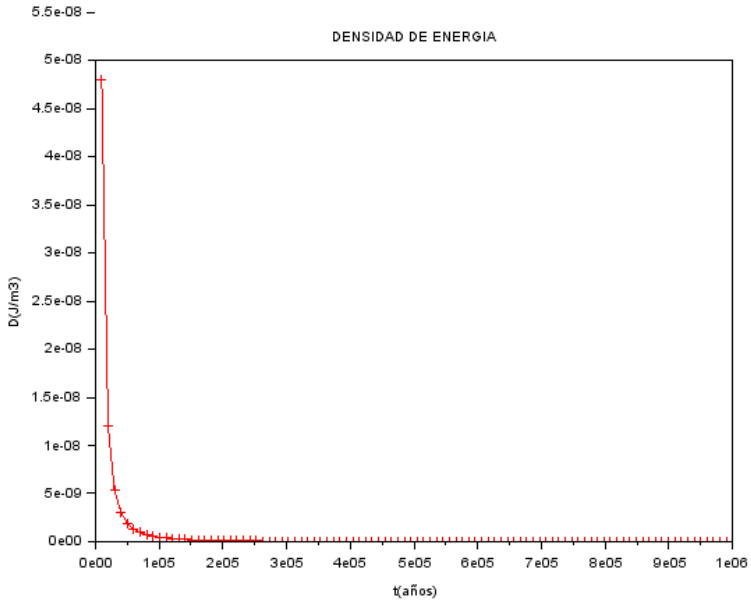

DENSIDAD DE ENERGIA
D(J/m3)
5.5e-08
5e-08
4.5e-08
4e-08
3.5e-08
3e-08
2.5e-08
2e-08
1.5e-08
1e-08
5e-09
0e00
0e00
1e05
2e05
3e05
4e05
5e05
6e05
7e05
8e05
9e05
1e06
t(años)

Fig 2.a

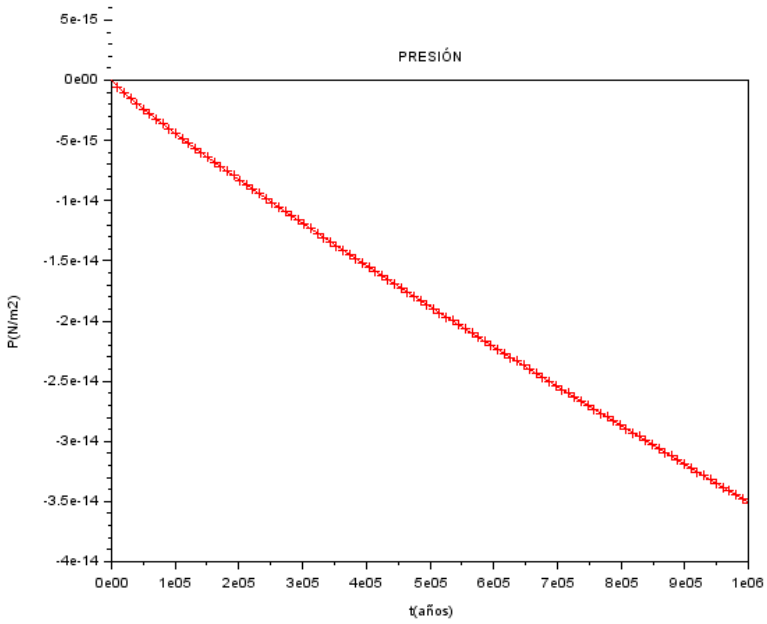

PRESIÓN
P(N/m2)
5e-15
0e00
-5e-15
-1e-14
-1.5e-14
-2e-14
-2.5e-14
-3e-14
-3.5e-14
-4e-14
0e00
1e05
2e05
3e05
4e05
5e05
6e05
7e05
8e05
9e05
1e06
t(años)

Fig 2.b

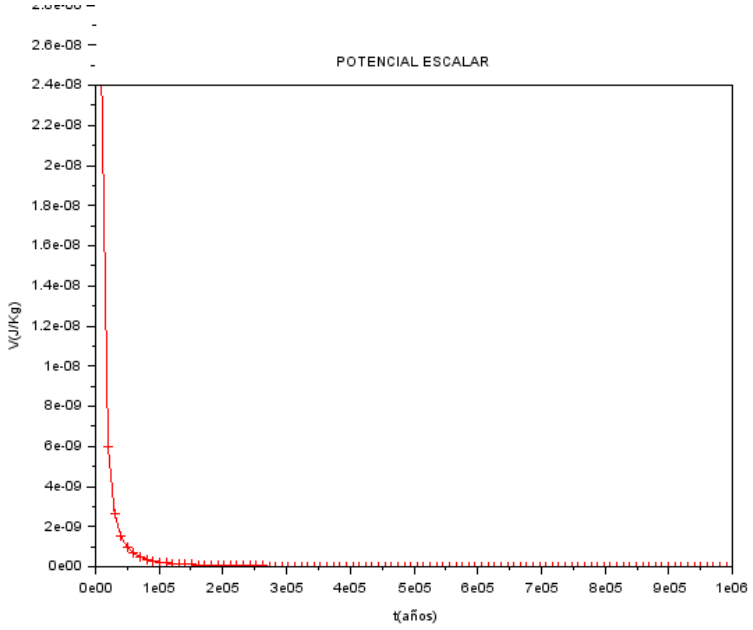


Fig 2.c

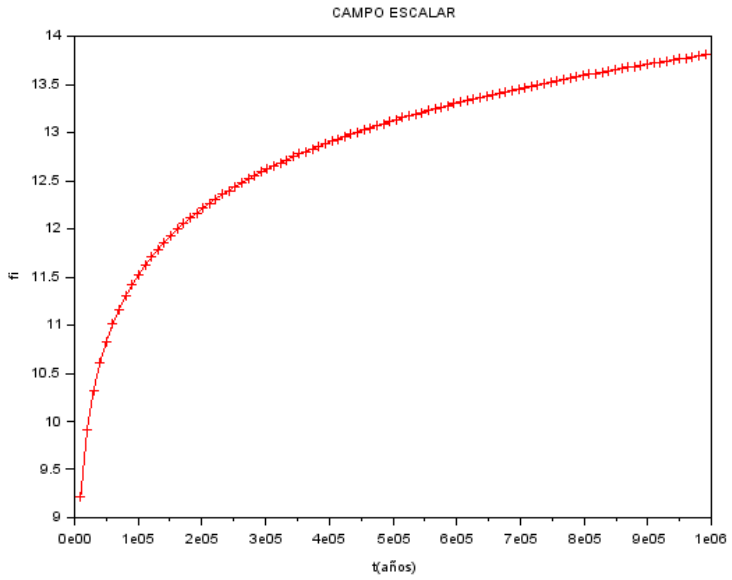


Fig 2.d

Figuras 3.a. Densidad $\rho_q(t)$, 3.b presión $P_q(t)$ y 3.c potencial escalar $V(t)$ de la quintaesencia no acoplada en la fase actual de aceleración cósmica moderada del universo, donde el parámetro de estado $w_q = -1$, de acuerdo al modelo del gas de Chaplygin generalizado al evaluarlo en el límite asintótico extremo $a(t) \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3(\alpha+1)}$ correspondiente con esta etapa del cosmos. Para $0 < \alpha \leq 1$ y $A = 2.854x10^{-19}$.

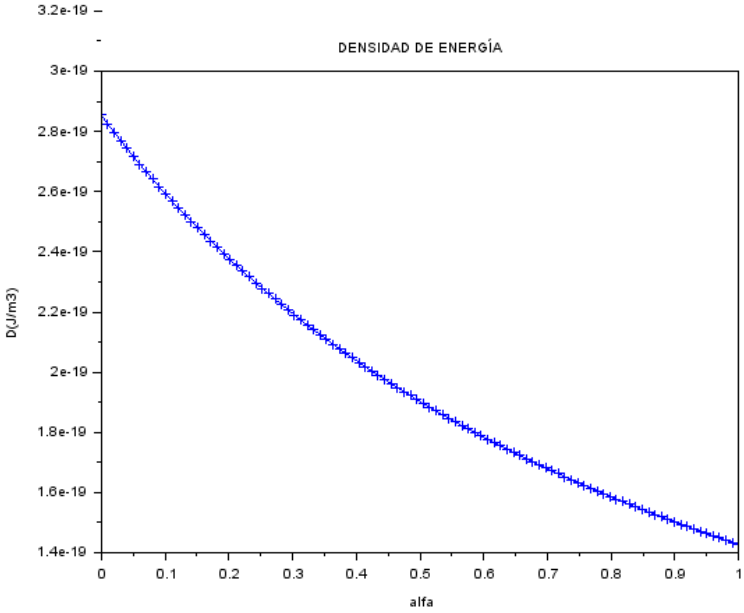

DENSIDAD DE ENERGÍA
D(J/m3)
alfa
3.2e-19
3e-19
2.8e-19
2.6e-19
2.4e-19
2.2e-19
2e-19
1.8e-19
1.6e-19
1.4e-19
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Fig 3.a

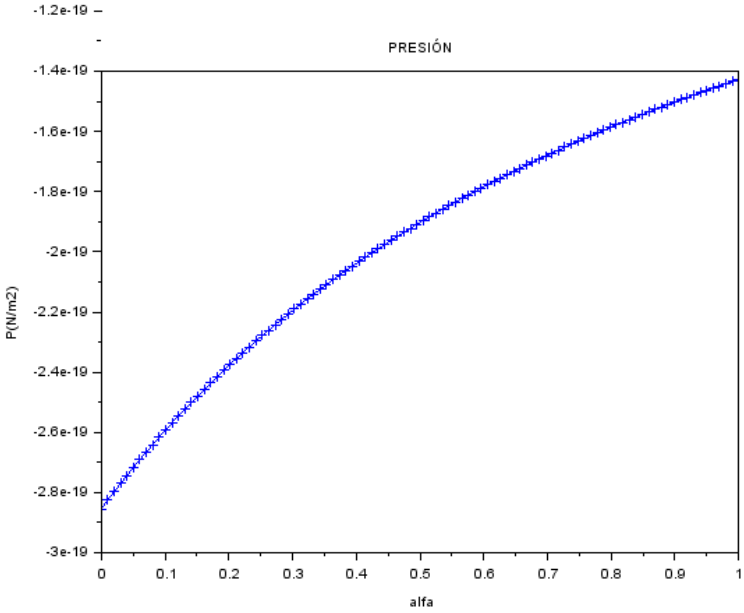

PRESIÓN
P(N/m2)
alfa
-1.2e-19
-1.4e-19
-1.6e-19
-1.8e-19
-2e-19
-2.2e-19
-2.4e-19
-2.6e-19
-2.8e-19
-3e-19
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Fig 3.b

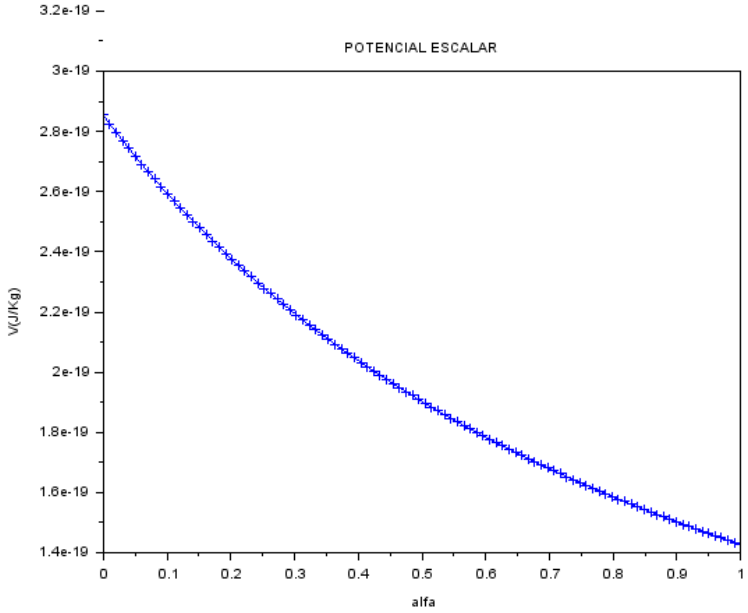


Fig 3.c

Figura 4. Comportamiento de la constante cosmológica Λ en términos del parámetro de Chaplygin α, donde $0 < \alpha \leq 1$ $A = 2.854x10^{-19}$ y $G = 6.67x10^{-11}Nm^2/Kg^2$.

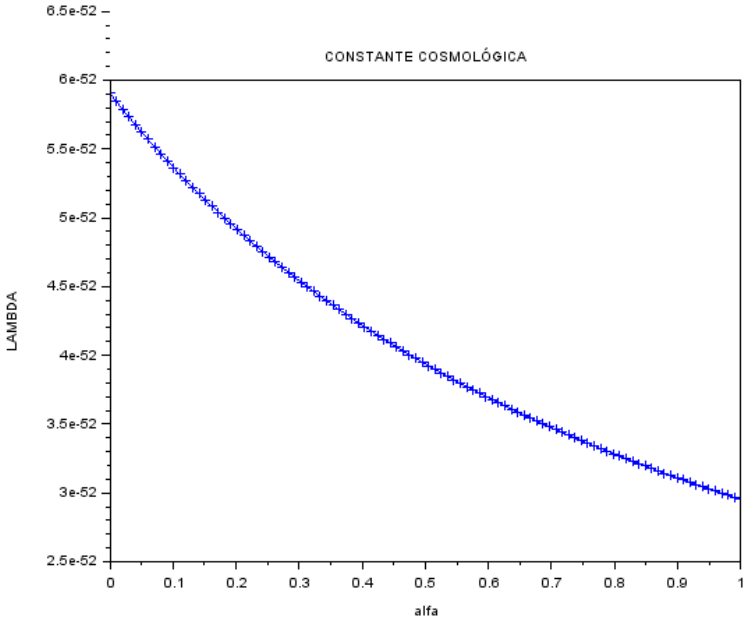


Fig 4

Figuras 5.a. Densidad de energía $\rho_q(r)$, 5.b potencial $V(r)$ y 5.c solución a la ecuación de campo linealizada correspondientes a una quintaesencia mínimamente acoplada al espacio-tiempo curvo del agujero negro de RNdS isotrópica y no homogénea $\phi(r)$ para aquellas regiones cuya distancia r sea próxima o cercana al horizonte que envuelve

dicha singularidad (cuando $r \ll r_q$), descrita según el modelo híbrido de gas de Kiselev-Chaplygin generalizado. Para $w_q = -2/3$ y $r_q = 5r_s = 7.35x10^5m$, donde $r_s = 1.47x10^5m$ correspondiente con una masa $M = 50M_S = 9.94235x10^{31}Kg$, $Q = 2.3x10^{20}C$, $\Lambda = 1.1056x10^{-52}m^{-2}$ y una distancia r comprendida entre $r_{min} = 0$ y $r_{max} = 150d_S = 2.25x10^{13}m$.

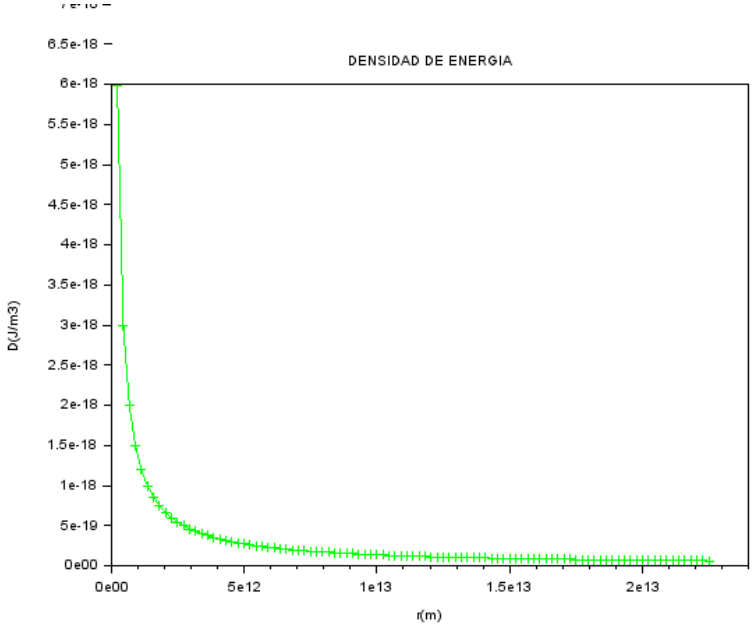


Fig 5.a

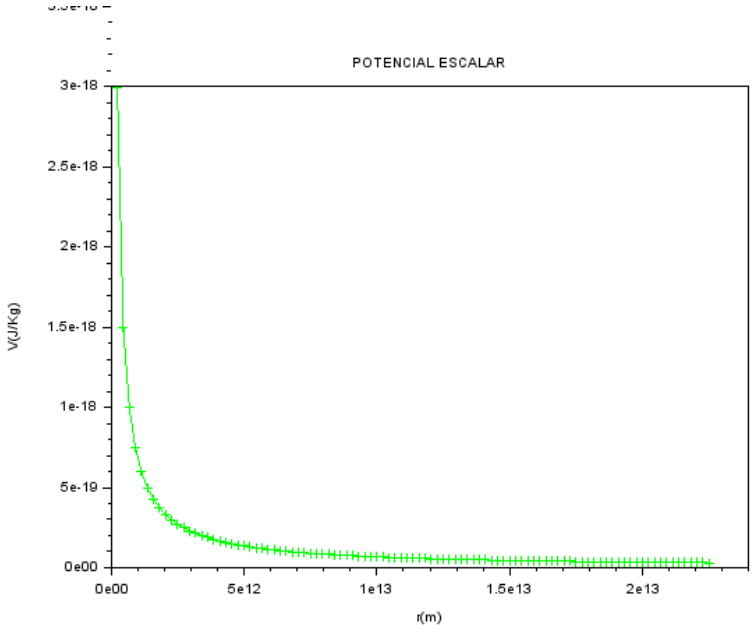


Fig 5.b

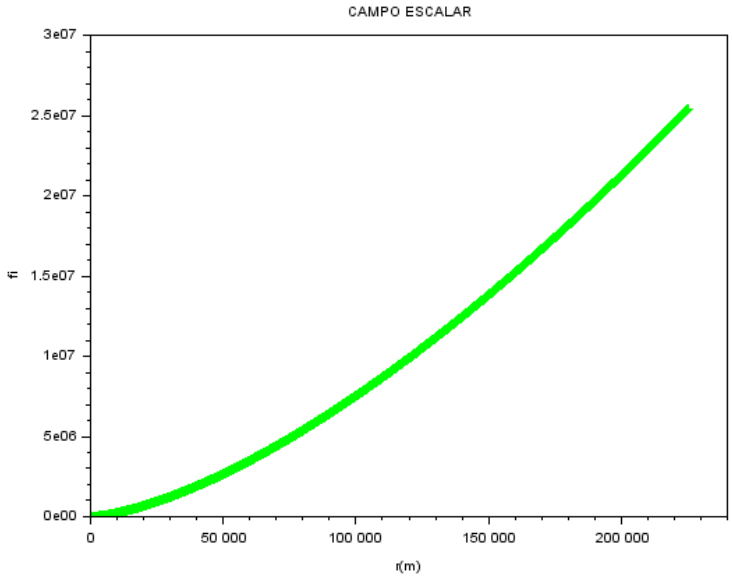


Fig 5.c

Figuras 6.a. Potencial escalar $V(r)$ y 6.b solución a la ecuación de campo linealizada que describe el comportamiento de una quintaesencia isotrópica e inhomogénea $\phi(r)$ mínimamente acoplada al campo gravitacional del agujero negro de RNdS, de acuerdo con el modelo híbrido del gas de Kiselev-Chaplygin generalizado, para regiones muy distantes al horizonte de dicha singularidad, esto es cuando $r \gg r_q$.Donde aquí $A = 2.854x10^{-19}$, $\alpha = 0.45$, $w_q = -2/3$, $r_q = 5r_s = 7.35x10^5 m$, $r_s = 1.47x10^5 m$ para una masa $M = 50M_S = 9.94235x10^{31} Kg$, $Q = 2.3x10^{20} C$, $\Lambda = 1.1056x10^{-52} m^{-2}$, correspondiente a una distancia r comprendida entre $r_{min} = 0$ y $r_{max} = 150d_S = 2.25x10^{13} m$.

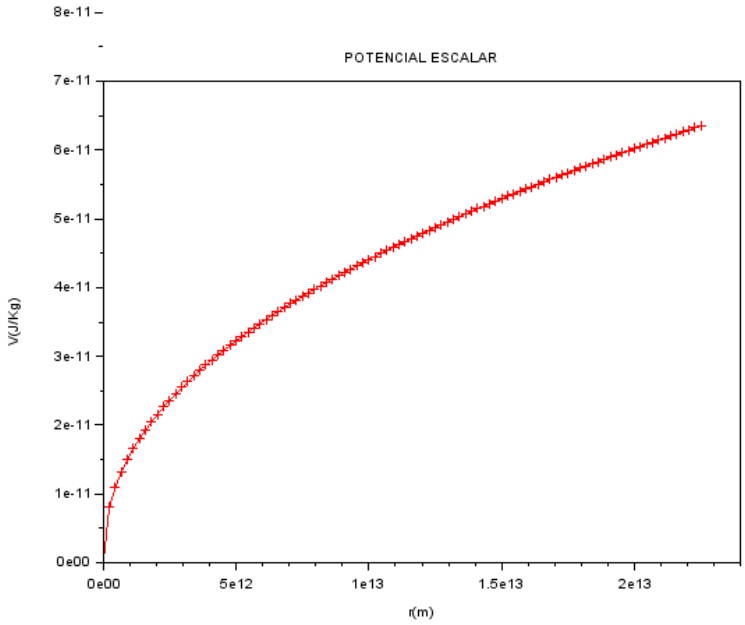


Fig 6.a

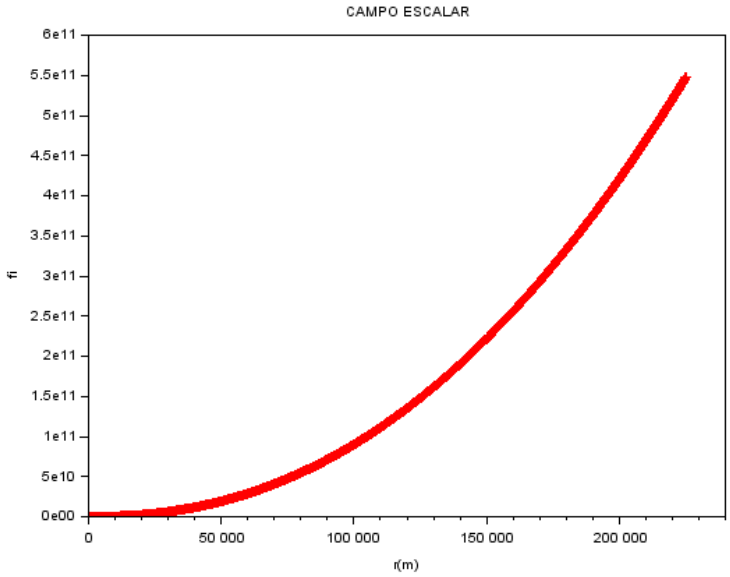


Fig 6.b

Figuras 7.a. Comportamiento de la presión isotrópica y no homogénea de quintaesencia $P_q(r)$ en las regiones que se encuentren muy alejadas del horizonte de eventos del agujero negro de RNdS (cuando $r \gg r_q$), descrita según lo establecido por el modelo híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado, para valores de $\alpha \ll 0.1$.

Y figura 7.b. El comportamiento de la misma presión isotrópica de quintaesencia $P_q(r)$ igualmente evaluada en el mismo límite en el cual $r \gg r_q$ cuando $\alpha = 1$.

Donde aquí: $\alpha = 0.0001$ y $\alpha = 1$, $A = 2.854x10^{-19}$, $w_q = -2/3$, $r_q = 7.35x10^5 m$. Para una distancia r comprendida entre $r_{min} = 0$ y $r_{max} = 2.25x10^5 m$.

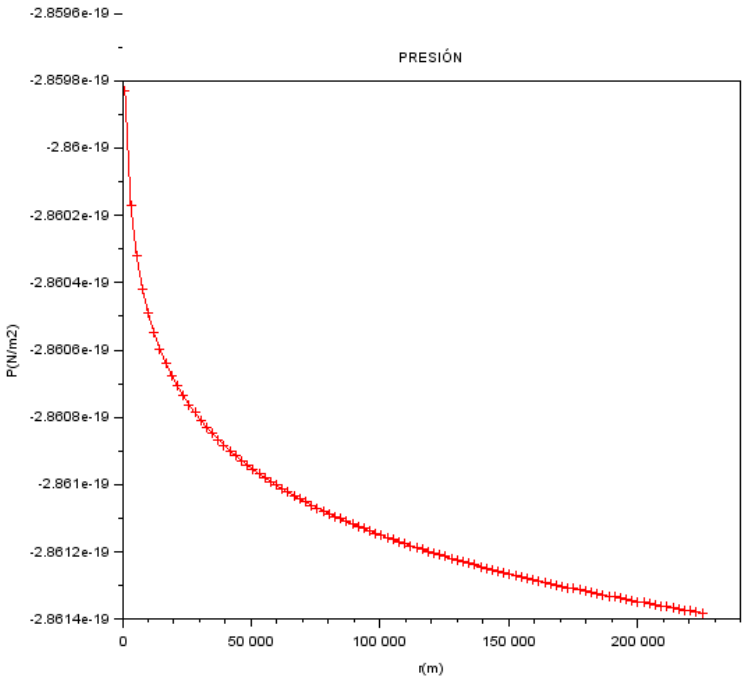


Fig 7.a

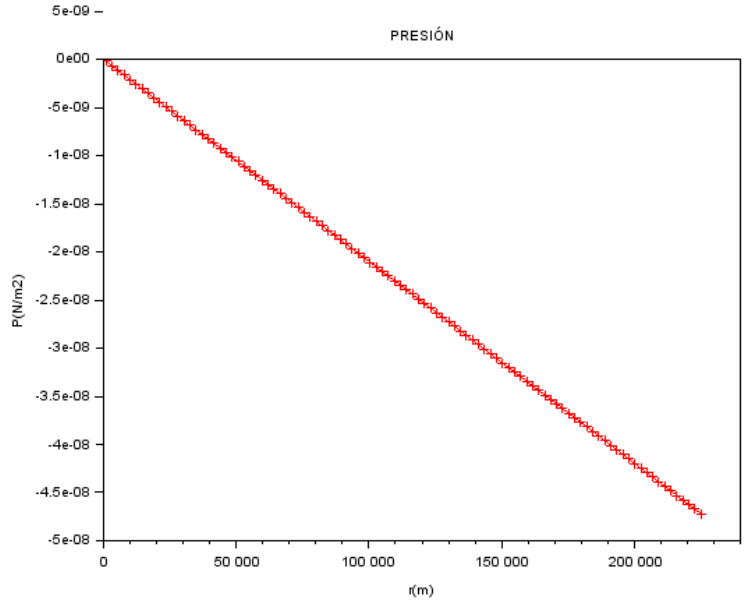


Fig 7.b

Figura 7.c. Comportamiento de la presión isotrópica y no homogénea de quintaesencia $P_q(r)$ en el límite de las distancias $r \gg r_q$ en términos únicamente del parámetro de Chaplygin α, de acuerdo al modelo híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado aquí desarrollado.

Aquí: $0 < \alpha \leq 1,\ A = 2.854x10^{-19},\ w_q = -2/3,\ r_q = 7.35x10^5 m$ y $r = r_0 = 0.000001$.

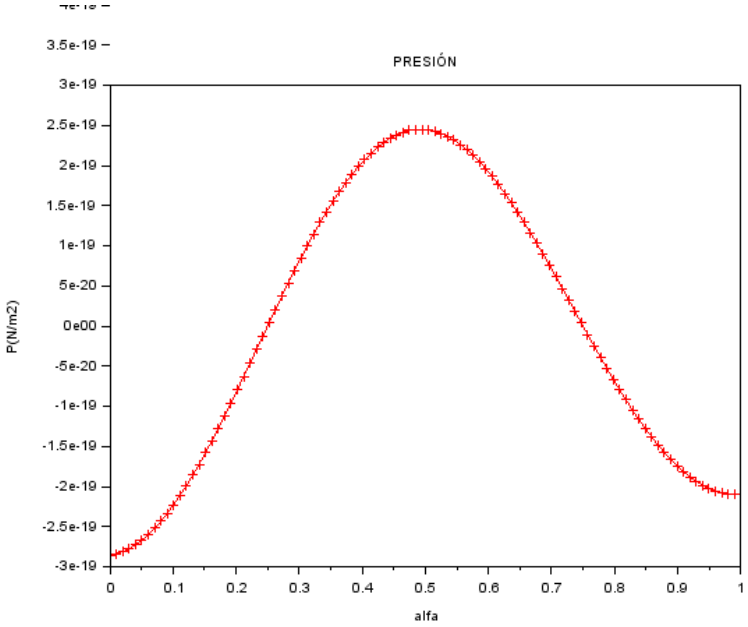
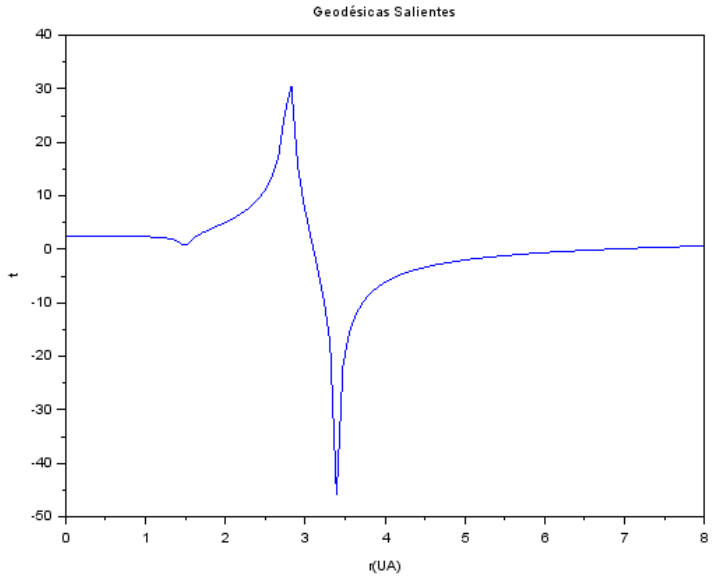


Fig 7.c

A continuación, el comportamiento de las geodésicas para partículas sin masa en reposo en torno a los tres horizontes de la singularidad de RNdS considerada, se muestra en las figuras 8.a y 8.b:

Figura 8.a. Comportamiento de las geodésicas radiales nulas salientes en coordenadas esféricas alrededor del horizonte de Cauchy con $r_- = 1.5UA$, horizonte exterior con $r_+ = 2.8UA$ y horizonte cosmológico con $r'_+ = 3.4UA$.Observamos cómo las trayectorias luminosas parten de los conos de luz correspondientes a cada uno de los 3 puntos de intersección, y



se extienden hacia el infinito.

Fig 8.a

Figura 8.b. Comportamiento de las geodésicas radiales nulas entrantes en coordenadas esféricas. Podemos observar cómo las trayectorias luminosas llegan desde el infinito y se incrustan en los respectivos conos de luz correspondientes al mismo horizonte de Cauchy con $r_- = 1.5UA$, horizonte exterior con $r_+ = 2.8UA$ y horizonte cosmológico con $r'_+ = 3.4UA$.

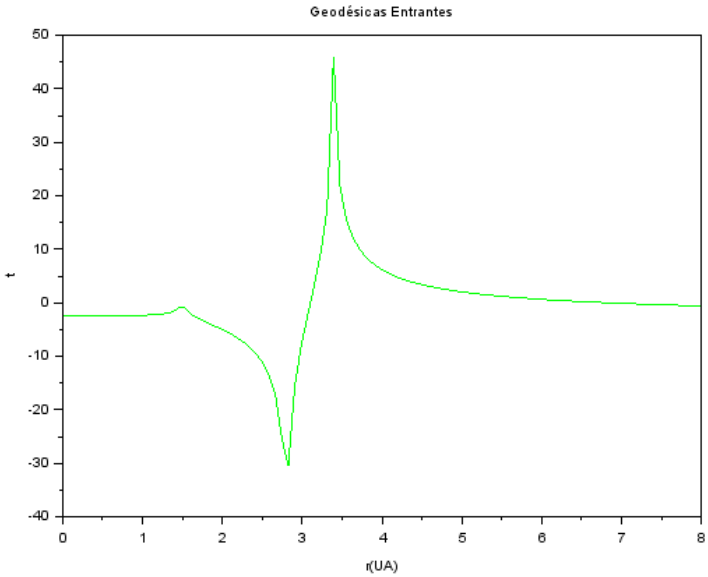


Fig 8.b

Se muestra el comportamiento que exhibe el potencial gravitatorio de RNdS en los límites de Λ pequeño y grande, respectivamente. Tenemos que:

Figura 9.a. Comportamiento del potencial gravitacional de RNdS para valores muy pequeños de $\Lambda > 0$. Podemos observar que, debido a que el orden de magnitud del parámetro cosmológico es muy pequeño, el potencial gravitatorio de RNdS se reduce estrictamente al potencial Newtoniano $-M/r$. Es decir, su valor varía en razón inversa con la distancia y siendo negativo a lo largo de todo su recorrido denota la presencia de un campo gravitatorio de carácter únicamente atractivo. Donde aquí: $M = 9.94235x10^{15}Kg$, $Q = 2.3x10^{10}C$, $\Lambda = 1.1056x10^{-52}m^{-2}$, para una distancia $0 \leq r \leq 2.25x10^{13}m$.

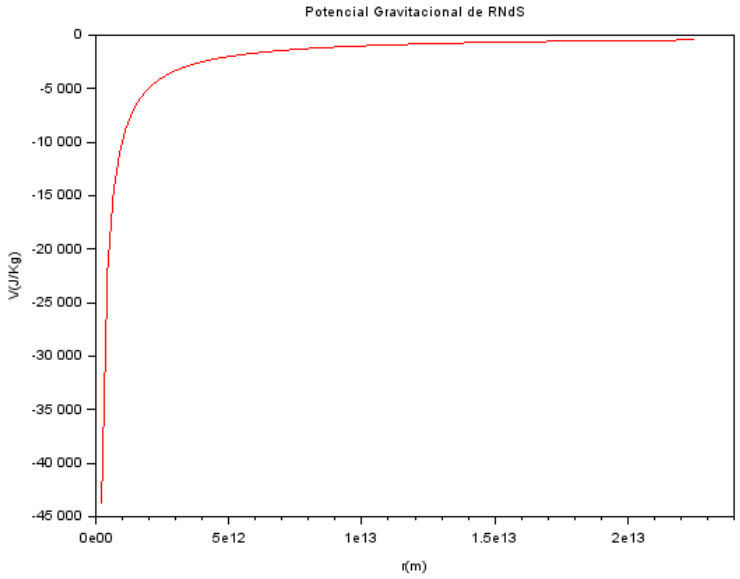


Fig 9.a

Figura 9.b. Para órdenes de magnitud apreciables de $\Lambda > 0$, por el contrario, podemos observar que el potencial gravitatorio de RNdS se encuentra asociado a un campo de efecto repulsivo al ser positivo en todo su recorrido. No obstante, decrece lentamente a medida que aumenta la distancia a lo largo de su respectivo comportamiento de tipo parabólico. Donde se considera aquí $\Lambda = 1.1056x10^{20}m^{-2}$, $M = 9.94235x10^{15}Kg$ para una distancia $0 \leq r \leq 2.25x10^{13}m$.

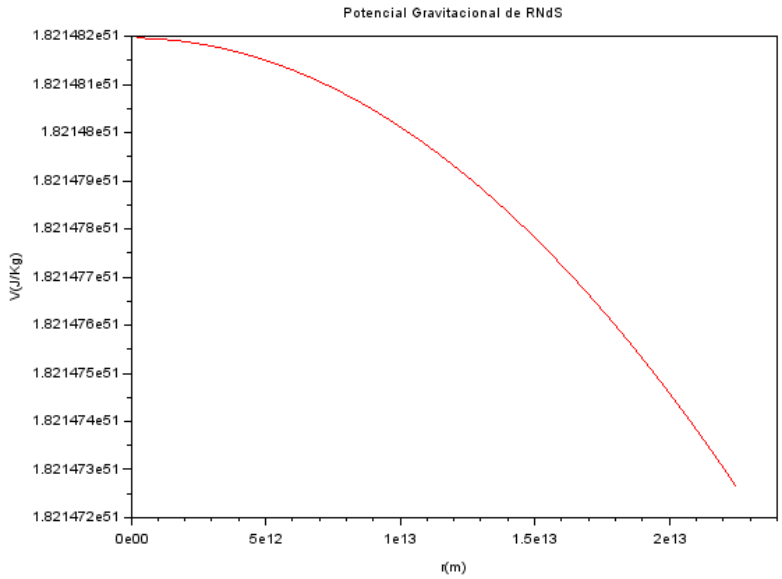


Fig 9.b

Figura 9.c. Para órdenes de magnitud muy grandes de $\Lambda > 0$ podemos apreciar, en cambio, que cuando $M < r$ el potencial gravitatorio de RNdS adopta un comportamiento tipo anti-De Sitter (AdS), dado que al mostrar tener una polaridad únicamente negativa a lo largo de todo su comportamiento de tipo parabólico, se encuentra definido por un campo gravitacional de efecto atractivo. Donde aquí consideramos $M = 9.94235x10^{10}Kg$, $\Lambda = 1.1056x10^{20}m^{-2}$ para una distancia $0 \leq r \leq 2.25x10^{13}m$.

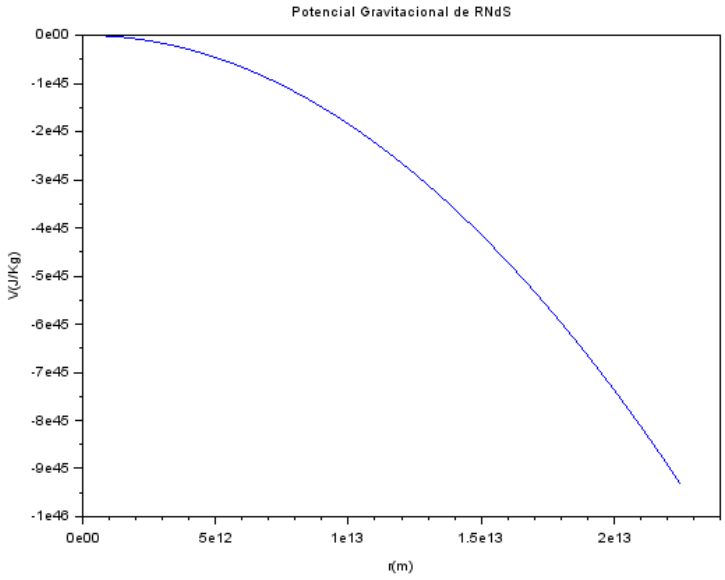


Fig 9.c

Aquí:

d_S Distancia sol-tierra= $1.50x10^{11}m$.

M_S Masa solar= $1.98847x10^{30}Kg$.

$1UA = 1.50x10^{11}m$.

Se muestran dos formas distintas de diagramas de Penrose para el espacio-tiempo curvo en el exterior de la singularidad de RNdS obtenidas mediante compactificación conforme:

Figura 10.a. Diagrama de Carter-Penrose para el agujero negro de RNdS no extremal, cuyos horizontes son: el horizonte interno o de Cauchy r_i, el horizonte exterior r_h y el horizonte cosmológico r_C.[75]. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.024034

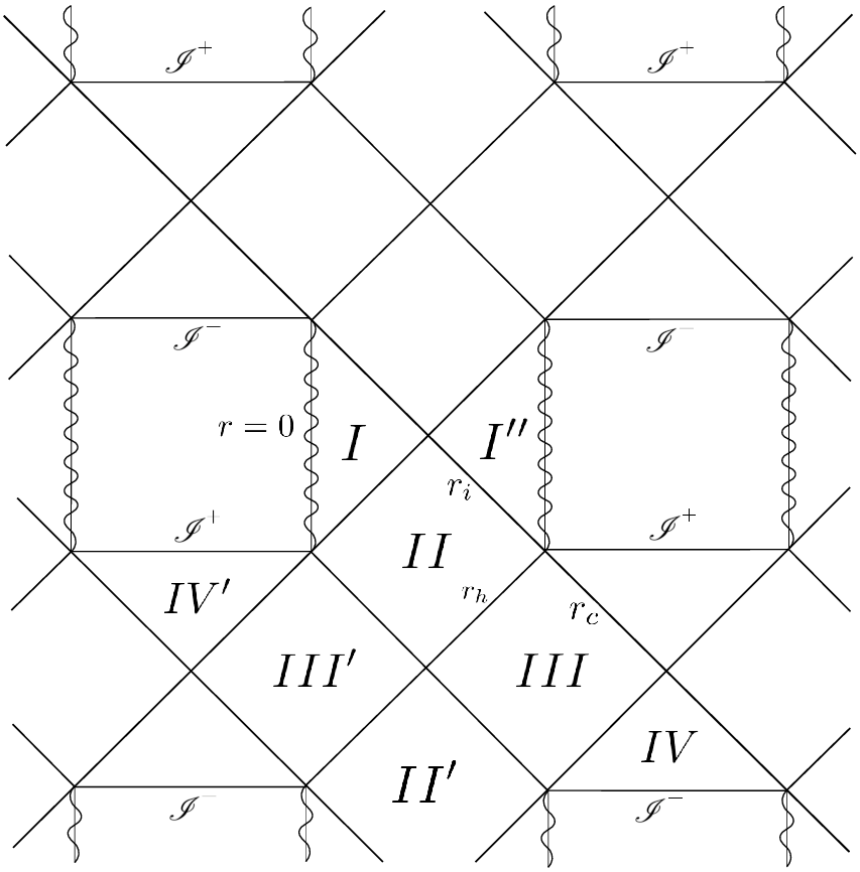


Fig 10.a

Figura 10.b. Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de RNdS. [76]. arXiv: 1902.10726v1

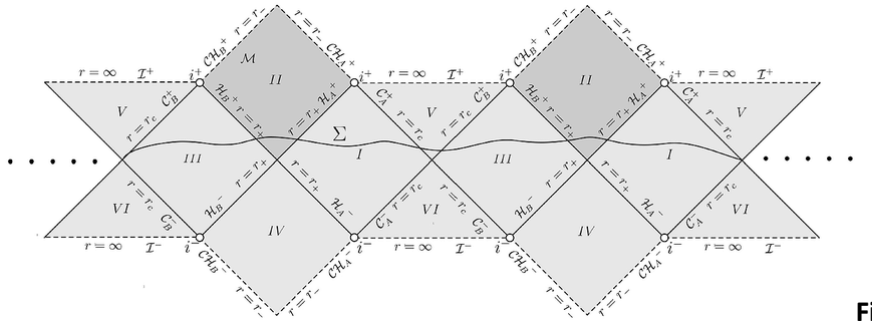


Fig 10.b

B) LISTA DE ECUACIONES FINALES

Aproximación del campo gravitacional débil:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

Tensor de energía-momento del campo electromagnético:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \tag{3.3}$$

Ecuación de campo de Einstein incluyendo la constante cosmológica:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{3.32}$$

Curvatura escalar incluyendo la constante cosmológica:

$$R = 4\Lambda - \frac{8\pi G}{c^4}T \tag{3.35}$$

Curvatura escalar incluyendo la constante cosmológica para el caso específico de una distribución cargada esféricamente simétrica y no rotante:

$$R = 4\Lambda \tag{3.36}$$

Componente temporal del tensor de Ricci en términos de los aportes de la carga de la distribución y de la constante cosmológica positiva:

$$R^0_0 = \frac{8\pi G}{c^4}T^0_0 + \Lambda \tag{3.39}$$

Componente temporal del tensor de Ricci en términos de la geometría perturbada del espacio-tiempo:

$$R^0_0 = \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} \tag{3.45}$$

Ecuación diferencial de campo gravitatorio de RNdS:

$$h''_{00} + \frac{2}{r}h'_{00} = -\frac{GQ^2}{8\pi^2\varepsilon_0{}^2c^4r^4} + 2\Lambda \tag{3.53}$$

Solución particular:

$$Y_P = -\frac{GQ^2}{16\pi^2\varepsilon_0{}^2c^4r^2} + \frac{\Lambda}{3}r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2 \tag{3.57}$$

Solución homogénea:

$$Y_H = \frac{2GM}{c^2r} \tag{3.64}$$

Solución general o global:

$$h_{00} = \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{3.71}$$

Componente temporal del tensor métrico:

$$g_{00} = -1 + h_{00} \tag{3.73}$$

Componente temporal del tensor métrico en el espacio-tiempo de RNdS:

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} - \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{3.74}$$

Forma general de la métrica (elemento de línea) en el espacio-tiempo exterior a un agujero negro esféricamente simétrico y en reposo:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta d\phi^2 \tag{3.78}$$

Componente temporal:

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{3.80}$$

Componente radial:

$$B(r) = \frac{1}{A(r)} \tag{3.84}$$

$$B(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} \tag{3.85}$$

Métrica de RNdS en coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2 \tag{3.86}$$

Función métrica de RNdS expresada en términos de la masa, la carga y la constante cosmológica positiva en coordenadas esféricas:

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 \tag{4.2}$$

Función métrica de RNdS expresada en términos de los horizontes en coordenadas esféricas:

$$f(r) = \frac{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}{r^2} \tag{4.3}$$

Métrica de RNdS expresada en coordenadas esféricas en términos de los horizontes:

$$ds^2 = -\frac{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{4.5}$$

Forma exacta de las geodésicas radiales nulas en coordenadas esféricas:

$$t = \pm \int \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)(r - r'_+)} + CTE$$

$$t = \pm(k_+ \ln|r - r_+| - k_- \ln|r - r_-| + k'_+ \ln|r - r'_+|) + CTE$$

(4.7)

Estructura causal del agujero negro de RNdS en coordenadas esféricas:

$$\Delta t = \frac{r}{\sqrt{(r-r_+)(r-r_-)(r-r'_+)}}\Delta\tau \tag{4.9}$$

Coordenadas de Eddington-Finkelstein:

$$\begin{cases} v = t + \xi(r) \\ \mu = t - \xi(r) \end{cases} \tag{4.10-4.11}$$

Donde se cumplen las siguientes condiciones coordenadas:

$$\xi'(r) = \frac{1}{f(r)} \tag{4.16}$$

$$\xi(r) = \frac{1}{2}(v-\mu) \tag{4.20}$$

Coordenada de Regge-Wheeler (*coordenada tortuga*):

$$\xi(r) = k_+ \ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| - k_- \ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| + k'_+ \ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right| \tag{4.26}$$

Relación general para el agujero negro de RNdS:

$$v-\mu = 2k_+ \ln\left|\frac{r-r_+}{r_+}\right| - 2k_- \ln\left|\frac{r-r_-}{r_-}\right| + 2k'_+ \ln\left|\frac{r-r'_+}{r'_+}\right| \tag{4.27}$$

Coordenadas de Kruskal para el horizonte exterior de radio r_+:

$$V^+ = e^{\frac{1}{2k_+}v} \tag{4.34}$$

$$U^+ = -e^{-\frac{1}{2k_+}\mu} \tag{4.35}$$

Métrica de RNdS en las coordenadas de Kruskal para el horizonte exterior de radio r_+:

$$ds^2 = -4k_+^2 \frac{(r-r_-)^{1+k_-/k_+}(r-r'_+)^{1-k'_+/k_+ r_+ r'^{k'_+/k_+}_+}}{r_-^{k_-/k_+ r^2}} dV^+ dU^+ + r^2 d\Omega^2 \tag{4.44}$$

Coordenadas de Kruskal para el horizonte de Cauchy de radio r_-:

$$V^- = e^{-\frac{1}{2k_-}v} \tag{4.47}$$

$$U^- = -e^{\frac{1}{2k_-}\mu} \tag{4.48}$$

Métrica de RNdS en las coordenadas de Kruskal para el horizonte de Cauchy de radio r_-:

$$ds^2 = -\frac{4k_-^2(r-r_+)^{1+k_+/k_- (r-r'_+)^{1+k'_+/k_- r_-}}}{r_+^{k_+/k_- r'^{k'_+/k_- r^2}_+}} dV^- dU^- + r^2 d\Omega^2 \tag{4.57}$$

Coordenadas de Kruskal para el horizonte cosmológico de radio r'_+:

$$V^{+\prime} = e^{\frac{1}{2k'_+}v} \tag{4.59}$$

$$U^{+\prime} = -e^{-\frac{1}{2k'_+}\mu} \tag{4.60}$$

Métrica de RNdS en las coordenadas de Kruskal para el horizonte cosmológico de radio r'_+:

$$ds^2 = -4k'^2_+ \frac{(r-r_+)^{1-k_+/k'_+ (r-r_-)^{1+k_-/k'_+ r_+^{k_+/k'_+ r'_+}}}}{r_-^{k_-/k'_+ r^2}} dV^{+\prime} dU^{+\prime} + r^2 d\Omega^2 \tag{4.69}$$

De forma alternativa, en términos de las coordenadas *como de tiempo* y *como de espacio*:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}(V+U) \\ T = \frac{1}{2}(V-U) \end{cases} \quad (4.70\text{-}4.71)$$

$$\begin{cases} V = X+T \\ U = X-T \end{cases} \quad (4.72\text{-}4.73)$$

Para el horizonte exterior:

$$ds^2 = -4{k_+}^2 \frac{(r-r_-)^{1+{k_-}/{k_+}}(r-r'_+)^{1-{k'_+}/{k_+}}r_+{r'_+}^{{k'_+}/{k_+}}}{{r_-}^{{k_-}/{k_+}}r^2}(-dT^2+dX^2)+r^2d\Omega^2 \quad (4.84)$$

$$T^2-X^2 = \frac{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{{k'_+}/{k_+}}}{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)^{{k_-}/{k_+}}} \quad (4.85)$$

Para $r = r_+$:

$$T = \pm X \quad (4.91)$$

Para $r = r_0 = cte \neq r_+$:

$$T^2 - X^2 = \sigma_+ \quad (4.93)$$

Donde:

$$\sigma_+ = cte$$

$$\frac{X}{T} = tangh\left(\frac{1}{2k_+}t\right) \quad (4.96)$$

Cuando $r = r_+$:

$$\Delta t = 2k_+ tangh^{-1}\left(\frac{1}{2k_+}\Delta\tau\right) \quad (4.102)$$

Para el horizonte de Cauchy:

$$ds^2 = -4{k_-}^2 \frac{(r-r_+)^{1+{k_+}/{k_-}}(r-r'_+)^{1+{k'_+}/{k_-}}r_-}{{r_+}^{{k_+}/{k_-}}{r'_+}^{{k'_+}/{k_-}}r^2}(-dT^2+dX^2)+r^2d\Omega^2 \tag{4.86}$$

$$T^2-X^2 = \frac{\left(\frac{r-r_-}{r_-}\right)}{\left(\frac{r-r_+}{r_+}\right)^{{k_+}/{k_-}}\left(\frac{r-r'_+}{r'_+}\right)^{{k'_+}/{k_-}}} \tag{4.87}$$

Para $r = r_-$:

$$T = \pm X \tag{4.104}$$

Para:
$r = r_0 = cte \neq r_-$:

$$T^2 - X^2 = \sigma_- \tag{4.105}$$

Donde:

$$\sigma_- = cte$$

$$\frac{X}{T} = -tangh\left(\frac{1}{2k_-}t\right) \tag{4.107}$$

Cuando $r = r_-$:

$$\Delta t = 2k_-tangh^{-1}\left(\frac{1}{2k_-}\Delta\tau\right) \tag{4.113}$$

Para el horizonte cosmológico:

$$ds^2 = -4{k'_+}^2 \frac{(r-r_+)^{1-{k_+}/{k'_+}}(r-r_-)^{1+{k_-}/{k'_+}}{r_+}^{{k_+}/{k'_+}}r'_+}{{r_-}^{{k_-}/{k'_+}}r^2}(-dT^2+dX^2)+r^2d\Omega^2 \tag{4.88}$$

$$T^2 - X^2 = \frac{\left(\frac{r - r_+}{r_+}\right)^{k_+/k'_+}\left(\frac{r - r'_+}{r'_+}\right)}{\left(\frac{r - r_-}{r_-}\right)^{k_-/k'_+}} \tag{4.89}$$

Para $r = r'_+$:

$$T = \pm X \tag{4.115}$$

Para $r = r_0 = cte \neq r'_+$:

$$T^2 - X^2 = \sigma'_+ \tag{4.116}$$

Donde:

$$\sigma'_+ = cte$$

$$\frac{X}{T} = tangh\left(\frac{1}{2k'_+}t\right) \tag{4.117}$$

Cuando $r = r'_+$:

$$\Delta t = 2k'_+ tangh^{-1}\left(\frac{1}{2k'_+}\Delta\tau\right) \tag{4.118}$$

Quintaesencia mínimamente acoplada en el modelo de Kiselev:

Ecuación de estado:

$$P_q(r) = w_q \rho_q(r) \tag{5.14}$$

Con $w_q = cte$

Donde:

$$-1 < w_q < -\frac{1}{3}$$

Densidad de energía:

$$\rho_q(r) = -\frac{3}{2} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.15}$$

Presión:

$$P_q(r) = -\frac{3}{2} {w_q}^2 \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.23}$$

Donde:

$$r_q = cte$$

$$[r_q] = distancia$$

Potencial escalar:

$$V(r) = -\frac{3}{4} w_q (1 - w_q) \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.24}$$

Ecuación de campo linealizada:

$$\phi'' + \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right)^{-1} \left(\frac{2M}{r^2} - \frac{2Q^2}{r^3} - \frac{2}{3}\Lambda r + (3w_q + 1)\frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+2}}\right) + \frac{3w_q + 3}{r}\right]\phi' = 0 \tag{5.26}$$

Métrica o solución de RNdS-Quintaesencia:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{5.13}$$

Quintaesencia no acoplada en el modelo del gas de Chaplygin generalizado:

Ecuación de estado:

$$P_q(t) = -\frac{A}{\rho_q(t)^\alpha} \tag{5.49}$$

Con:

$$A = cte$$

$$A > 0$$

y donde además:

$$0 < \alpha \leq 1$$

Densidad de energía:

$$\rho_q(t) = \left[A + \frac{B}{a(t)^{3(\alpha+1)}}\right]^{1/\alpha+1} \tag{5.44}$$

Presión:

$$P_q(t) = -A\left[A + Ba(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1} \tag{5.52}$$

Ecuación de campo linealizada:

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2}H\left[1 + \alpha\left(1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right)^{-1}\right]\dot{\phi} = 0 \tag{5.63}$$

Con H el parámetro de Hubble:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = H(t)$$

Potencial escalar:

$$V(t) = \frac{1}{2}A^{1/\alpha+1}\left[1 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right]^{-\alpha/\alpha+1}\left[2 + \frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)}\right] \tag{5.64}$$

Para los primeros tiempos del universo:

$w_q = 0$ y $\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)} \gg 1$

Densidad de energía:

$$\rho_q(t) \approx B^{1/\alpha+1}a(t)^{-3} \tag{5.65}$$

Presión:

$$P_q(t) \approx -AB^{-\alpha/\alpha+1}a(t)^{3\alpha} \tag{5.66}$$

Potencial escalar:

$$V(t) \approx \frac{1}{2}B^{1/\alpha+1}a(t)^{-3} \tag{5.67}$$

Ecuación de campo:

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2}H\dot{\phi} = 0 \tag{5.69}$$

Con:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = H(t)$$

Para la etapa actual del universo en expansión acelerada moderada:

$$w_q = -1$$

$$\frac{B}{A}a(t)^{-3(\alpha+1)} \ll 1$$

Densidad de energía

$$\rho_q(t) \approx A^{1/\alpha+1} \tag{5.46}$$

Presión:

$$P_q(t) \approx -A^{1/\alpha+1} \tag{5.47}$$

$$P_q(t) = -\rho_q(t) = cte$$

Constante cosmológica:

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}A^{1/\alpha+1} \tag{5.70}$$

$$\Lambda_{final} < \Lambda_{inicial}$$

(5.75)

Potencial escalar:

$$V(t) \approx A^{1/\alpha+1} \tag{5.76}$$

Ecuación de campo:

Para $0 < \alpha \leq 1$:

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2}H(1+\alpha)\dot{\phi} = 0 \tag{5.78}$$

Para $\alpha = 1$:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = 0 \tag{5.79}$$

Quintaesencia mínimamente acoplada en el modelo híbrido de Kiselev-Chaplygin generalizado:

Ecuación de estado:

$$P_q(r) = -\frac{A}{\rho_q(r)^{\alpha}} \tag{5.80}$$

Donde:

$$\forall\ A = cte$$

$$A > 0$$

$$0 < \alpha \leq 1$$

Densidad de energía:

$$\rho_q(r) = -\frac{3}{2}w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.15}$$

Donde:

$$\forall\ r_q = cte$$

$$[r_q] = DISTANCIA$$

$$w_q = cte$$

Aquí:

$$-1 < w_q < -\frac{1}{3}$$

$$\forall\ w_q < 0$$

Presión:

$$P_q(r) = (-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} {w_q}^{-\alpha} {r_q}^{-\alpha(3w_q+1)} r^{\alpha(3w_q+3)} \tag{5.82}$$

Potencial escalar:

$$V(r) = \frac{1}{2}\left[(-1)^{-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} {w_q}^{-\alpha} {r_q}^{-\alpha(3w_q+1)} r^{\alpha(3w_q+3)} - \frac{3}{2} w_q {r_q}^{3w_q+1} r^{-(3w_q+3)}\right] \tag{5.83}$$

Ecuación de campo no lineal:

$$\phi'^2 = \frac{2V(r) + 2P_q(r)}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}} \tag{5.85}$$

Para distancias próximas al horizonte del agujero negro de RNdS $r \ll r_q$:

Densidad de energía:

$$\rho_q(r)\big|_{r \ll r_q} = -\frac{3}{2} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.87}$$

Presión:

$$P_q(r)\big|_{r \ll r_q} \approx 0 \tag{5.86}$$

Potencial escalar:

$$V(r)|_{r \ll r_q} \approx -\frac{3}{4} w_q \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+3}} \tag{5.88}$$

Ecuación de campo:

Forma no lineal:

$$\phi'^2 + \frac{\frac{3}{2} w_q {r_q}^{3w_q+1} r^{-(3w_q+3)}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}} = 0|_{r \ll r_q} \tag{5.89}$$

Forma lineal:

$$\phi'' + \left\{ \frac{3}{2}\left(\frac{w_q + 1}{r}\right) + \frac{\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3} r + \left(\frac{3w_q + 1}{2}\right) \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+2}}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 - \frac{{r_q}^{3w_q+1}}{r^{3w_q+1}}} \right\} \phi' = 0 \Bigg|_{r \ll r_q} \tag{5.90}$$

Para distancias muy alejadas del horizonte del agujero negro de RNdS $r \gg r_q$:

Densidad de energía

$$\rho_q(r)\big|_{r \gg r_q} \approx 0 \tag{5.91}$$

Presión:

$$P_q(r)\big|_{r \gg r_q} = (-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}} \tag{5.92}$$

Potencial escalar:

$$V(r)|_{r \gg r_q} \approx \frac{A}{2(-1)^{\alpha}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}} \tag{5.93}$$

Ecuación de campo:

Forma no lineal:

$$\phi'^2 - \frac{(-1)^{1-\alpha} A \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \frac{1}{{w_q}^{\alpha}} \frac{r^{\alpha(3w_q+3)}}{{r_q}^{\alpha(3w_q+1)}}}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2} = 0 \Bigg|_{r \gg r_q} \tag{5.94}$$

Forma lineal:

$$\phi'' + \left\{ \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3} r \right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} - \frac{3}{2} \alpha \left(\frac{w_q + 1}{r} \right) \right\} \phi' = 0 \Bigg|_{r \gg r_q} \tag{5.100}$$

Partícula de prueba no cargada moviéndose en la vecindad de un agujero negro de RNdS de manera arbitraria confinada al plano ecuatorial:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \tag{6.6}$$

Ecuación geodésica radial de movimiento:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3} r \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} \left(\frac{M}{r^2} - \frac{Q^2}{r^3} - \frac{\Lambda}{3} r \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 \\ - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) r \left(\frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Para una órbita circular en dicho plano ecuatorial:

$$r = r_0 = cte \tag{6.12}$$

Periodo:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{M}{{r_0}^3} - \frac{Q^2}{{r_0}^4} - \frac{\Lambda}{3}}} \tag{6.15}$$

Frecuencia:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{M}{{r_0}^3} - \frac{Q^2}{{r_0}^4} - \frac{\Lambda}{3}} \tag{6.16}$$

Frecuencia angular de oscilación:

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{{r_0}^3} - \frac{Q^2}{{r_0}^4} - \frac{\Lambda}{3}} \tag{6.18}$$

Ecuación geodésica:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + c^2\Gamma^i_{00}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{6.19}$$

con $i = 1,2,3$

Ecuación de movimiento:

$$\vec{\nabla}\phi_g = c^2\Gamma^i_{00} \tag{6.23}$$

con $i = 1,2,3$

Para la coordenada radial con $i = 1$:

$$\phi'_g = c^2\Gamma^1_{00} \tag{6.24}$$

En el límite Newtoniano, para campos gravitatorios débiles, estacionarios y producidos por materia no relativista, se cumple:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

Con:

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1$$

$$\nabla^2\phi_g = 4\pi G\rho$$

Donde:

$$G_{00} \approx \nabla^2 g_{00}$$

$$\left|\mu^i\right| = |\vec{\mu}| \ll c$$

Con:

$$i = 1,2,3$$

Para todo campo gravitatorio débil y estacionario producido por toda distribución estática y esféricamente simétrica:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi_g(r)}{c^2} \tag{6.30}$$

Potencial gravitacional del agujero negro de RNdS:

$$\phi_g(r)^{(RNdS)} = -\frac{M}{r} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{r^2} + \frac{\Lambda}{6}(M^2 - r^2) \tag{6.38}$$

C) MATRIZ DE CONSISTENCIA

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Población
Determinación del problema Al analizar el significado físico de los diferentes tipos de soluciones exactas a las ecuaciones de campo de Einstein se observa que la forma de la geometría del espacio-tiempo producida depende directamente del valor de las densidades de masa y energía involucradas. En las últimas décadas se han hecho importantes avances teóricos acerca de la descripción, ampliación y generalización de la métrica de Schwarzschild al incluir en ella a la constante cosmológica, no obstante, aún no se ha estudiado con igual profundidad la influencia que podría tener dicho parámetro constante dentro de los espacios de Reissner-Nordstrom. Los estudios más recientes acerca de la métrica de Reissner-Nordstrom se han enfocado sobre todo, en el estudio del comportamiento de agujeros negros originados por singularidades y al estudio del movimiento de partículas de prueba cargadas en las cercanías de espacios de Reissner-Nordstrom extremos (agujeros negros de Reissner-Nordstrom o singularidades) pero, sin considerar la constante cosmológica en los resultados de las nuevas métricas así obtenidas. En consecuencia, es necesario intentar demostrar si la introducción de la constante cosmológica dentro de la ecuación de campo gravitacional de la relatividad general puede causar algún tipo de modificación en la	**Objetivo general** Obtener una solución exacta a la ecuación de campo gravitacional de la relatividad general, incluyendo en ella una constante cosmológica positiva, que sea una forma modificada de la métrica de Reissner-Nordstrom, esta es una solución tipo Reissner-Nordstrom-De Sitter (RNdS) y estudiar las propiedades físicas y estructurales de este tipo de espacio más fundamentales. Adicionalmente, se analizará el acoplamiento de la Quintaesencia al espacio-tiempo curvo que define el campo gravitacional del agujero negro de RNdS. **Objetivos específicos** **1.**Determinar si la presencia de la constante cosmológica dentro de esta solución puede influir o no en el comportamiento de la geometría del espacio-tiempo de RN. **2.**Estudiar las propiedades de la estructura causal de esta clase de configuración, transformando para esto la solución que se obtendrá en coordenadas esféricas al sistema de las	**Hipótesis general** Es posible hallar una solución exacta a la ecuación de campo gravitacional de Einstein incluyendo en ella una constante cosmológica positiva para el caso de una configuración tipo Reissner-Nordstrom, empleando métodos matemáticos convencionales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, no homogéneas y de coeficientes variables –mediante la obtención de una solución homogénea y particular-; siempre y cuando, se introduzca como condición la aproximación del campo débil dentro de la misma ecuación de campo, el tensor de energía-momentum del campo electromagnético y en la definición general del tensor de Ricci.	**Tipo de investigación** El presente trabajo de investigación de tesis es un estudio analítico desarrollado dentro del área de la física teórica. Más concretamente, en torno al estudio de la teoría general de la relatividad desarrollada por Einstein y ampliada por otros físicos teóricos. **Método** Durante el desarrollo de esta investigación se empleará el método deductivo-inductivo, basándonos permanentemente en el razonamiento analítico-sintético. **Diseño** De tal manera que, los únicos métodos y procedimientos que se emplearán aquí serán los analíticos y no entrarán a intervenir ninguna técnica de procesamiento numérico-computacional de datos (simulaciones), ni procedimiento estadístico en el análisis y en la obtención de sus resultados y conclusiones. Dado que el presente trabajo de investigación de tesis es un estudio de carácter únicamente analítico, se hará uso de las diferentes herramientas matemáticas comprendidas dentro	En esta investigación la población estará constituida por todas las técnicas y procedimientos analíticos estudiados en relatividad general, así como las cantidades tensoriales físicas definidas en ella, empleados en la obtención de soluciones exactas a la ecuación de campo de Einstein. Con esto, la muestra será la ecuación de campo gravitacional de Einstein incluyendo en ella la constante cosmológica. **Técnicas e instrumentos de recolección de datos** Dado que el presente trabajo de investigación de tesis es un estudio de carácter únicamente analítico, se hará uso de las diferentes herramientas matemáticas comprendidas dentro del estudio de la teoría de la relatividad general (tales como: transformaciones de coordenadas, elementos básicos de geometría diferencial, fundamentos de electrodinámica relativista, cálculo tensorial, ecuaciones de campo, etc) y el uso de los diferentes textos pertenecientes al área de investigación, publicaciones

geometría del espacio-tiempo descrita por la métrica de Reissner-Nordstrom. **Formulación del problema** Por todo lo expuesto hasta aquí, se plantearán e intentarán resolver las siguientes interrogantes: **1.**¿Puede una constante cosmológica positiva ser capaz de modificar la geometría del espacio-tiempo descrita en la métrica de Reissner-Nordstrom? **2.**En el caso de ser esto así, ¿Cuáles podrían ser las implicaciones más fundamentales de este hecho? **3.**¿La incorporación o acoplamiento del campo escalar de la Quintaesencia al espacio-tiempo de RNdS así configurado, podría ser capaz de modificar las propiedades geométricas de este tipo de espacio y con ello modificar de manera tanto cualitativa como cuantitativa el comportamiento de su potencial gravitacional? **4.**¿Y recíprocamente, este acoplamiento podría a su vez influir en el propio comportamiento de la Quintaesencia así acoplada?	coordenadas de Kruskal. **3.**Analizar las propiedades cinemáticas de este espacio, mediante el estudio del movimiento de una partícula de prueba no cargada cerca al horizonte y obtener de este modo las ecuaciones geodésicas que permitan especificar los parámetros de su movimiento. **4.**Estudiar el acoplamiento mínimo del campo escalar de la energía oscura al campo gravitacional determinado por el espacio-tiempo curvo de la métrica de RNdS. **5.**Mediante el empleo de métodos analíticos convencionales para resolver la ecuación de campo de Einstein se tratará de comparar la solución obtenida en este trabajo con soluciones similares o que pudieran poseer la misma forma básica en otros trabajos de investigación, en donde también se trate de solucionar la ecuación de campo incluyendo la constante cosmológica para el caso de una distribución cargada esféricamente simétrica y en reposo.	**Hipótesis específicas** **a)** Obtenida la forma exacta de la métrica para este caso, es posible averiguar la influencia que podría tener una constante cosmológica positiva en la geometría del espacio-tiempo de Reissner-Nordstrom. **b)** Es posible conocer el comportamiento de la métrica, e incluso predecir si existirán o no singularidades en ella, evaluando los coeficientes métricos para distintas distancias. **c)** Es posible conocer la estructura causal de tal configuración al efectuar la transformación adecuada de coordenadas del sistema esférico al sistema de Kruskal. **d)** Es posible conocer la dinámica de una partícula de prueba no cargada en dicho espacio-tiempo	del estudio de la teoría de la relatividad general (tales como: transformaciones de coordenadas, elementos básicos de geometría diferencial, fundamentos de electrodinámica relativista, cálculo tensorial, ecuaciones de campo, etc) y el uso de los diferentes textos pertenecientes al área de investigación, publicaciones especializadas y tesis relacionadas. Por la naturaleza del trabajo, este no requiere de ningún tipo de análisis y procesamiento estadístico de datos.	especializadas y tesis relacionadas.

		(espacio-tiempo de RNdS) tras obtener las respectivas ecuaciones geodésicas para esta métrica. **e)** Será posible obtener una ecuación diferencial que nos describa el acoplamiento de un campo escalar de *Quintaesencia* al campo gravitacional de RNdS, mediante el empleo de la acción covariante de acoplo mínimo para el espacio curvo mencionado y la densidad lagrangiana expresada en su forma covariante para el caso de una partícula sin spin.		