Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Estabilidad asintótica de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales cuasilineales periódicos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Vidal Max CHAVEZ AGUILAR

ASESOR

Dr. Yony Raúl SANTARIA LEUYACC

Lima, Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Chavez, V. (2026). *Estabilidad asintótica de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales cuasilineales periódicos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Vidal Max Chavez Aguilar
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43587902
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0006-8284-0960
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Yony Raúl Santaria Leuyacc
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42159219
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-8279-7460
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Teófanes Quispe Méndez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06969492
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Victor Rafael Cabanillas Zannini
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445770
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	DYNAMICAL SYSTEMS, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

Agencia de financiamiento	Esta investigación fue financiada por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos RR N° 006081-R-23 con código de Proyecto B23140711 - PCONFIGI 2023
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2024-2025
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:15 horas del miércoles 4 de febrero de 2026, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Mg. Teófanes Quispe Méndez (PRESIDENTE), Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini (MIEMBRO) y el Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: "ESTABILIDAD ASINTÓTICA DE SOLUCIONES PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES CUASILINEALES PERIÓDICOS", presentado por el señor Bachiller VIDAL MAX CHAVEZ AGUILAR, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ...Sobresaliente..... con un calificativo promedio de ....dieciocho..... (18.).

A continuación, el presidente del Jurado, Mg. Teófanes Quispe Méndez, manifestó que el señor Bachiller VIDAL MAX CHAVEZ AGUILAR, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 17:15 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Mg. Teófanes Quispe Méndez
PRESIDENTE

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini
MIEMBRO

Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
MIEMBRO ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la EP N° 001184-2025-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es **"Estabilidad asintótica de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales cuasilineales periódicos"**, presentado por el bachiller Chavez Aguilar Vidal Max para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 15% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Firmado digitalmente por:
SANTARIA LEUYACC Yony
Raúl FAU 20148092282 soft
Motivo:
Fecha: 06/03/2026 11:27:31-0500

Lima, 06 de marzo de 2026

Firma del Asesor
Nombres y Apellidos del asesor: Yony Raúl Santaria Leuyacc
DNI: 42159219

Estabilidad asintótica de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales cuasilineales periódicos

Vidal Max Chavez Aguilar

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

.....

Dr. Victor Rafael Cabanillas Zannini
Presidente del Jurado

.....

Mg. Teófanes Quispe Méndez
Miembro del Jurado

.....

Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
Miembro asesor

LIMA- PERÚ
FEBRERO 2026

FICHA CATALOGRÁFICA

VIDAL MAX CHAVEZ AGUILAR

Estabilidad asintótica de soluciones para sistemas de ecuaciones diferenciales cuasilineales periódicas, (Lima) 2026. V, 61 p., 29,7 cm (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2025). Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

Agradecimientos

Agradezco a Dios por permitirme realizar este trabajo. A mis padres, por la educación y el cariño brindados; a mis maestros de la Facultad de Ciencias Matemáticas, quienes dejaron en mí valiosos aportes académicos. Finalmente, agradezco a mi asesor, el Dr. Yony Santaria, quien me animó en todo momento a concluir este trabajo, por sus enseñanzas, su paciencia y el tiempo dedicado. Asimismo, expreso mi agradecimiento al jurado revisor, Dr. Teófanes Quispe y Dr. Víctor Cabanillas, por sus valiosas sugerencias en el mejoramiento de la tesis.

Índice general

Agradecimientos **I**

Índice general **III**

Resumen **IV**

Abstract **V**

Introducción **VI**

I Preliminares **1**

1.1 Análisis matricial 1

1.1.1 Espectro y normas de una matriz 1

1.1.2 Matrices normales y hermitianas 3

1.1.3 Matrices definidas positivas 5

1.2 Estabilidad y comportamiento asintótico 6

1.2.1 Estabilidad para sistemas con coeficientes variables 7

1.2.2 Estabilidad para sistemas con coeficientes constantes 9

1.2.3 Estabilidad para sistemas lineales periódicos 9

II Ecuaciones de Lyapunov **13**

2.1 Ecuación algebraica de Lyapunov 13

2.1.1 Ecuación algebraica de Lyapunov (versión continua) 13

2.1.2 Ecuación algebraica de Lyapunov (versión discreta) 14

2.2 Ecuación diferencial de Lyapunov 15

III Estabilidad de ecuaciones diferenciales cuasilineales periódicas **17**

3.1 Estabilidad de un sistema lineal periódico 17

3.2 Estabilidad para sistemas cuasilineales 29

IV Aplicación a la teoría de oscilación **47**

Conclusiones **58**

Resumen

En el presente trabajo se analiza las condiciones de estabilidad asintótica para una clase de sistemas cuasilineales de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos en los términos lineales. En particular, consideraremos el sistema:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y), \quad t \geq 0,$$

donde $A(t)$ es una matriz periódica y $\varphi(t, y)$ es una función suave. Nuestro objetivo es obtener estimaciones para el dominio de atracción de la solución cero y establecer la tasa de decaimiento de las soluciones conforme t tiende al ∞. Para este fin, utilizaremos la ecuación de Lyapunov:

$$\frac{dH}{dt} + HA(t) + A^*(t)H = -C(t).$$

Los resultados se expresarán en términos de las integrales de la norma de la solución periódica de la ecuación de Lyapunov, lo que nos permitirá caracterizar la estabilidad asintótica de las soluciones.

Palabras clave: Estabilidad asintótica; ecuaciones cuasilineales periódicas; ecuación diferencial de Lyapunov.

Abstract

In this work, we analyze the conditions for asymptotic stability for a class of quasilinear systems of differential equations with periodic coefficients in the linear terms. In particular, we will consider the system:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y), \quad t \geq 0,$$

where $A(t)$ is a periodic matrix and $\varphi(t, y)$ is a smooth function. Our objective is to obtain estimates for the attraction domain of the zero solution and to establish the decay rate of the solutions as t approaches infinity. To this end, we will utilize the Lyapunov equation:

$$\frac{dH}{dt} + HA(t) + A^*(t)H = -C(t).$$

The results will be expressed in terms of the integrals of the norm of the periodic solution to the Lyapunov equation, allowing us to characterize the asymptotic stability of the solutions.

Keywords: Asymptotic stability; periodic quasilinear equations; Lyapunov differential equation.

Introducción

El análisis de la estabilidad asintótica de soluciones en sistemas de ecuaciones diferenciales es un tema crucial en la teoría de sistemas dinámicos y control. Este estudio se vuelve aún más interesante cuando consideramos sistemas cuasilineales con coeficientes periódicos en los términos lineales. En este trabajo, basado en el artículo de Demindenko [6], nos enfocaremos en un sistema cuasilineal descrito por la ecuación:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y), \quad t \geq 0, \tag{$\mathcal{P}$}$$

donde $A(t)$ es una matriz continua y T-periódica de dimensión $N \times N$ y $\varphi(t, y)$ es una función suave que satisface $\varphi(t, 0) = 0$. La periodicidad de los coeficientes introduce una complejidad adicional en el análisis, ya que se deben considerar las propiedades de la matriz de monodromía asociada al sistema lineal:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y.$$

Para estudiar la estabilidad asintótica de la solución cero, utilizaremos la ecuación de Lyapunov, que es fundamental en la teoría de estabilidad. Esta se expresa como:

$$\frac{dH}{dt} + HA(t) + A^*(t)H = -C(t),$$

donde $C(t)$ es continua en el intervalo considerado. Esta ecuación nos permite establecer criterios de estabilidad que no dependen de la diagonalización de la matriz monodromia del sistema $y' = A(t)y$.

La estabilidad de la solución cero ha sido estudiada ampliamente, y se ha demostrado que bajo ciertas condiciones, si la solución del problema de valor en la frontera para la ecuación de Lyapunov existe y es definida positiva, la solución cero es asintóticamente estable [4, 6]. Este enfoque es ventajoso en comparación con las técnicas espectrales, que requieren un conocimiento detallado de los autovalores de la matriz de monodromía, lo cual puede ser problemático debido a que el problema de en-

contrar los valores propios de una matriz está mal condicionado; es decir, pequeñas variaciones en los coeficientes de la matriz pueden provocar cambios significativos en sus valores propios [3, 8, 15]. Además, se ha observado que el comportamiento asintótico de las soluciones a medida que $t \to \infty$ puede caracterizarse utilizando la integral de la norma de la solución periódica de la ecuación de Lyapunov. Esto se expresa como:

$$\theta_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\|H(s)\|} ds,$$

donde $H(s)$ es una solución de la ecuación de Lyapunov y $\|\cdot\|$ representa la norma espectral [4–6]. Esta integral no solo caracteriza el dominio de atracción de la solución cero, sino que también proporciona estimaciones para la tasa de decaimiento de las soluciones [5, 6].

La combinación de estos enfoques nos permitirá obtener resultados robustos sobre la estabilidad de soluciones de sistemas cuasilineales con coeficientes periódicos. En particular, nuestro objetivo es determinar el dominio de atracción de la solución cero y establecer estimaciones precisas para la tasa de decaimiento de las soluciones en función de las propiedades de la matriz $A(t)$ y la función $\varphi(t, y)$.

En secciones posteriores, exploraremos ejemplos específicos y aplicaremos nuestros resultados a casos concretos, como el comportamiento de un péndulo con un punto de pivote oscilante, donde se ha demostrado que un estado de equilibrio puede ser estable bajo condiciones apropiadas de frecuencia de oscilación [14]. Este análisis es esencial no solo en el contexto teórico, sino también en aplicaciones prácticas donde la dinámica oscilatoria juega un papel crucial.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el **Capítulo** I, primero mencionaremos algunas definiciones y propiedades de la norma de matrices; segundo, algunos conceptos de estabilidad, caracterización de la estabilidad asintótica para sistemas lineales, los cuales serán empleados en capítulos posteriores. En el **Capítulo** II, mencionaremos la ecuación de Lyapunov en sus diferentes versiones (algebraica y diferencial) y posteriormente enunciaremos teoremas que relacionan la estabilidad de un sistema lineal con coeficientes constantes y la existencia de soluciones de una ecuación de Lyapunov. En el **Capítulo** III, enunciaremos y demostraremos los teoremas más importantes de estabilidad asintótica del sistema $(\mathcal{P})$. Finalmente, en el **Capítulo** IV se dará una aplicación práctica a la teoría de oscilaciones, más específicamente, al péndulo invertido de Kapitza.

Capítulo I

Preliminares

En el presente capítulo se abordarán resultados básicos que serán utilizados a lo largo de la presente tesis. Iniciaremos con una breve introducción a algunos conceptos y propiedades del análisis matricial que serán utilizados, para mayor referencia se recomienda [13] y [18]. También se establecerán algunas definiciones y teoremas clásicos de estabilidad asintótica, que serán utilizados para relacionar la estabilidad un sistema lineal periódico con la existencia de la solución de la ecuación de Lyapunov, para mayor referencia ver [10], [12] y [19].

1.1. Análisis matricial

En esta sección se presentan algunas definiciones y notaciones básicas.

1.1.1. Espectro y normas de una matriz

Definición 1.1.

1. *El conjunto de matrices cuadradas de orden n con entradas en los complejos se denota por*

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = \{A = (a_{ij}) : a_{ij} \in \mathbb{C},\ 1 \leq i, j \leq n\}.$$

2. *El conjunto de matrices cuadradas invertibles de orden n en $\mathbb{C}$ se denota por*

$$GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : \det(A) \neq 0\}.$$

3. *El conjunto de matrices cuadradas de orden n se denota por $\mathcal{M}_n$ cuyas entradas pueden ser reales o complejas.*

4. *La adjunta de una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se define como*

$$A^* = \overline{A}^T = (\overline{a}_{ji}),$$

donde $\overline{A}$ es la matriz conjugada de A.

5. *El producto interno (o escalar) usual en $\mathbb{C}^n$ está dado por*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\overline{y_i}, \qquad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

6. *La norma vectorial inducida por el producto interno anterior se define como*

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \qquad x \in \mathbb{C}^n.$$

Definición 1.2. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

(a) *El espectro de A se define como*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es un autovalor de } A\}.$$

(b) *El radio numérico de A se define como*

$$r(A) = \text{máx}\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in \mathbb{C}^n,\ \|x\|_2 = 1\}.$$

(c) *El radio espectral de A se define como*

$$\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

(d) *La norma espectral de A se define como*

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\text{máximo autovalor de } A^*A}.$$

(e) La norma Frobenius de A se define como

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|^2 = \operatorname{tr}(A^*A).$$

Proposición 1.3. *Para una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se cumple*

$$\rho(A) \leq r(A) \leq \|A\|_2.$$

Demostración. Para probar que $\rho(A) \leq r(A)$, sea λ un valor propio de A con vector propio $\|x_0\|_2 = 1$. Entonces $|\lambda| = |\langle Ax_0, x_0\rangle| \leq \max_{\|x\|_2=1} |\langle Ax, x\rangle|$, de donde se deduce $\rho(A) \leq r(A)$. Para demostrar que $r(A) \leq \|A\|_2$, aplicando la desigualdad de Cauchy–Schwarz se tiene $|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|_2\|x\|_2$, luego tomando máximo sobre $\|x\|_2 = 1$ se obtiene

$$r(A) = \max_{\|x\|_2=1} |\langle Ax, x\rangle| \leq \|A\|_2.$$

En consecuencia se ha probado que $\rho(A) \leq r(A) \leq \|A\|_2$. □

En lo sucesivo, la norma espectral será denotada simplemente como $\|\cdot\|$.

Proposición 1.4. *Para una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son equivalentes:*

(a) $\rho(A) < 1$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \|A^n\|^2$ *converge.*

(c) $\lim_{n\to\infty} \|A^n\| = 0$.

Demostración. Para la implicación $(a) \to (b)$, como $\rho(A) < 1$, por la fórmula de Gelfand, $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \rho(A)$ (véase [13, pág. 349]), existe α con $0 < \alpha < 1$ tal que $\|A^n\| < \alpha^n$ para todo $n \geq n_0$. Dado que la serie $\sum \alpha^{2n}$ converge y por el criterio de comparación se concluye que $\sum \|A^n\|^2$ converge. La implicación $(b) \to (c)$ es inmediata. Para la última implicación $(c) \to (a)$, es claro que $A^n \to 0$. Sea λ un valor propio de A con vector propio $x \neq 0$; entonces $\|A^n x\| = \|\lambda^n x\| \to 0$, lo que implica $|\lambda| < 1$. Así se concluye la demostración. □

1.1.2. Matrices normales y hermitianas

Recordemos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es normal si $A^*A = AA^*$. El siguiente teorema caracteriza las matrices normales.

Teorema 1.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) A es normal.

(b) A es unitariamente diagonalizable.

(c) $\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$.

(d) A tiene n vectores propios ortonormales.

Demostración. Ver [13, pág. 133]. □

Del teorema anterior podemos deducir que

$$\|A\| = r(A) = \rho(A), \quad \text{para todo} \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Definición 1.6. *Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se dice hermitiana si cumple*

$$A = A^*.$$

El conjunto de matrices hermitianas será denotado por

$$\mathcal{H}(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : A = A^*\}.$$

El siguiente teorema caracteriza a las matrices hermitianas.

Teorema 1.7. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) $A \in \mathcal{H}(n)$.

(b) A es normal y solo tiene valores propios reales.

(c) $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

Demostración. Ver demostración en [13, pág. 228]. □

Para un $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, por el teorema anterior, sus autovalores se pueden ordenar en $\mathbb{R}$ (con el orden usual). En adelante se emplearán las siguientes notaciones:

$$\lambda_{\text{mín}}(A) = \text{mín}\, \sigma(A) \qquad \text{y} \qquad \lambda_{\text{máx}}(A) = \text{máx}\, \sigma(A).$$

Proposición 1.8. *Sea $A \in \mathcal{H}(n)$, entonces para todo $x \in \mathbb{C}^n$ se tiene que*

$$\lambda_{\text{mín}}(A)\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_{\text{máx}}(A)\|x\|^2.$$

Demostración. Ver [19, pág. 30]. □

1.1.3. Matrices definidas positivas

Definición 1.9. *Una matriz $A \in \mathcal{H}(n)$ se dice que es definida positiva si cumple*

$$\langle Ax, x\rangle > 0, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n - \{0\},$$

lo que será denotado por $A > 0$.

Una consecuencia directa de la definición es que, si $A > 0$, se cumple que $\lambda_{\text{máx}}(A) = \|A\|$.

Proposición 1.10. *Sea $H(t)$ una función matricial continua en $[0, T]$. Si $H(t) = H^*(t) > 0$, entonces existen*

$$m_H = \min_{t\in[0,T]} \lambda_{\text{mín}}(H(t)) \qquad y \qquad M_H = \max_{t\in[0,T]} \|H(t)\|,$$

tales que

$$0 < m_H\|x\|^2 \leq \langle H(t)x, x\rangle \leq M_H\|x\|^2, \quad \textit{para todo} \;\; x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Demostración. Al ser $H(t)$ una matriz definida positiva se cumple

$$\lambda_{\text{máx}}(H(t)) = \|H(t)\| \qquad \text{y} \qquad \lambda_{\text{mín}}(H(t)) = \frac{1}{\|H^{-1}(t)\|}.$$

Además es claro que dichas funciones son continuas en el conjunto compacto $[0, T]$. Entonces existen $m_H, M_H > 0$ que son respectivamente el mínimo y el máximo de $\lambda_{\text{mín}}(H(t))$ y $\|H(t)\|$. □

Proposición 1.11. *Sea $Y(s) \in GL_n(\mathbb{C})$ continua en $[0, T]$. Si $C(t) = C^*(t) > 0$ es una función matricial continua en $[0, T]$ entonces*

$$Q = \int_0^T Y^*(s)C(s)Y(s)\, ds,$$

es una matriz definida positiva, es decir, $Q = Q^* > 0$.

Demostración. Como $C(t) = C^*(t) > 0$, para cada $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, por la Proposición 1.10 se tiene

$$\langle Qv, v\rangle = \int_0^T \langle C(s)Y(s)v, Y(s)v\rangle \, ds \geq m_C \int_0^T \|Y(s)v\|^2 ds,$$

donde $m_C = \min_{t\in[0,T]}(\lambda_{\min}(C(t)) > 0$. Como $Y(s)$ es una matriz no singular continua en $[0, T]$, tenemos

$$k = \min_{\|v\|=1} \int_0^T \|Y(s)v\|^2 ds > 0.$$

En consecuencia, $Q > 0$. □

1.2. Estabilidad y comportamiento asintótico

La estabilidad es un concepto que nos permite describir el comportamiento de las soluciones cercanas a una solución específica (solución nula) en un intervalo de tiempo infinito, ante pequeñas perturbaciones de los valores iniciales.

Dada una función continua $f : [0, \infty) \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $f(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$, consideremos la ecuación

$$x' = f(t, x). \tag{1.1}$$

Supongamos que para cada (t_0, x_0) en $[0, \infty)\times\mathbb{C}^n$ existe una solución única $x(t, t_0, x_0)$ del problema de valor inicial

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Es claro que la función constante $x(t) = x(t, t_0, 0) = 0$ es una solución de (1.1), llamada solución nula. A continuación se introduce la noción de estabilidad para esta solución.

Definición 1.12. *Sea* $x(t) = 0$ *la solución nula de (1.1).*

(*i*) *La solución* $x(t) = 0$ *es llamada estable si para cualquier* $\epsilon > 0$ *y* $t_0 \geq 0$ *existe un* $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ *tal que* $\|x_0\| < \delta$ *implica* $\|x(t, t_0, x_0)\| < \epsilon$ *para* $t \in [t_0, \infty)$.

(*ii*) *La solución* $x(t) = 0$ *es llamada asintóticamente estable si es estable y existe un* $b = b(t_0)$ *tal que* $\|x_0\| < b$ *implica* $\|x(t, t_0, x_0)\| \to 0$ *cuando* $t \to \infty$.

Suponga que la solución cero $x(t) = 0$ de $x' = f(t, x)$ es asintóticamente estable. Entonces el dominio de atracción $\mathcal{D}_0$ de la solución $x(t) = 0$ está dado por

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ x \in \mathbb{C}^n : \text{si } x(0) = x \text{, entonces } \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \right\}.$$

Para el caso de un sistema lineal todas las soluciones del sistema tienen el mismo carácter de estabilidad o inestabilidad. Así, para un sistema lineal tiene sentido hablar de la estabilidad (asintótica) de la ecuación misma. El estudio de la estabilidad de sistemas lineales que se realizará seguirá la secuencia de [12], es decir, partiendo de sistemas lineales con coeficientes variables, seguidamente los sistemas con coeficientes constantes y, finalmente, los sistemas con coeficientes periódicos.

1.2.1. Estabilidad para sistemas con coeficientes variables

Un sistema lineal cambiante en el tiempo

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \qquad \text{definido en } J \subseteq \mathbb{R}.$$

El estudio de la estabilidad para sistemas lineales admite una reducción muy importante, dado que su solución se puede expresar como:

$$y(t) = \phi(t)y(0),$$

donde $\phi(t)$ es una matriz fundamental tal que $\phi(0) = I$. Posteriormente se definirán y mencionarán algunas propiedades de $\phi(t)$. En esta subsección, se presentará una caracterización de la estabilidad para sistemas lineales con coeficientes variables que se basa en el concepto de matriz fundamental.

Definición 1.13. *La matriz fundamental de*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

es una función matricial $\phi(t) = (\phi_1(t); \phi_2(t); \ldots; \phi_n)$ *de* $J \to \mathbb{C}^{n\times n}$ *tal que :*

(i) $\phi(t)$ *es solución de la ecuación matricial* $Y' = A(t)Y$.

(ii) $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n$ *son linealmente independientes.*

Existen muchas matrices fundamentales para un mismo sistema, pero hay una relación entre ellas. Esto se precisa en las siguientes proposiciones.

Proposición 1.14. *Sean $A(t) \in C(J;\mathbb{C}^{n\times n})$ y $\phi : J \to \mathbb{C}^{n\times n}$ una función matricial diferenciable. $\phi(t)$ es una matriz fundamental si y solo si*

(i) $\phi(t)$ es solución de la ecuación matricial $Y' = A(t)Y$.

(ii) Existe $t_0 \in J$ tal que la matriz $\phi(t_0)$ es no singular.

Demostración. La demostración es análoga al caso real, cuya demostración aparece en [1, pág. 158]. □

La siguiente proposición relaciona dos funciones matriciales que son soluciones de la misma ecuación diferencial matricial.

Proposición 1.15. *Sea $A(t) \in C(J;\mathbb{C}^{n\times n})$ y $\phi, \psi : J \to \mathbb{C}^{n\times n}$ funciones matriciales que son soluciones de $Y' = A(t)Y$. Entonces se cumple:*

(i) Si $\phi(t)$ es la matriz fundamental de $y' = A(t)y$, entonces existe $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\psi(t) = \phi(t)C$ para todo $t \in J$.

(ii) C es una matriz no singular si y solo si $\psi(t)$ es la matriz fundamental de $y' = A(t)y$.

Demostración. La prueba sigue los mismos pasos que en el caso real, expuestos en [1, pág. 159]. □

El teorema siguiente expresa una condición de estabilidad en términos de una matriz fundamental.

Teorema 1.16. *Sea $\phi(t)$ una matriz fundamental del sistema $y' = A(t)y$, con $t \in \mathbb{R}$. Entonces, el sistema $y' = A(t)y$ es:*

i) Estable para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ si y solo si existe un $k = k(t_0) > 0$ tal que

$$\|\phi(t)\| < k, \quad t \in [t_0, \infty);$$

ii) Asintóticamente estable para cualquier $t_0 \in \mathbb{R}$ si y solo si

$$\|\phi(t)\| \to 0, \quad \text{cuando } t \to \infty.$$

Demostración. Ver [12, pág. 84]. □

Del teorema se puede obtener que la norma de la matriz fundamental nos proporciona información sobre la estabilidad del sistema lineal.

1.2.2. Estabilidad para sistemas con coeficientes constantes

Un sistema lineal con coeficientes constantes es de la forma

$$\frac{dy}{dt} = Ay,$$

y es un caso particular del sistema de coeficientes variables. Además, la estabilidad de sus soluciones solo depende de los autovalores de la matriz A. Esto se precisa en el siguiente teorema.

Teorema 1.17. *Para el sistema $y' = Ay$ se cumple:*

(i) Una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea estable es que los valores propios de A tengan parte real menor o igual a cero y que aquellos con parte real cero tengan divisores elementales simples.

(ii) Una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea asintóticamente estable es que los valores propios de A tengan parte real negativa. Si este es el caso, existen constantes positivas k, α tales que

$$\|e^{At}\| \leq ke^{-\alpha t},\ t \geq 0.$$

Demostración. Ver [12, pág. 99]. □

1.2.3. Estabilidad para sistemas lineales periódicos

Un sistema lineal periódico, también llamado sistema lineal con coeficientes periódicos, es un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y,$$

donde $A : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}^{n\times n}$ es una función matricial continua, y existe un $T > 0$ tal que

$$A(t+T) = A(t), \qquad \text{para todo } \ t \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.18. *Dado $T > 0$, la función $F : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{C}^{n\times n}$ es T-periódica si*

$$F(t+T) = F(t), \qquad \text{para todo } \ t \in \mathbb{R}.$$

Se dice que la función F es periódica si es T-periódica para algún $T > 0$.

En lugar del intervalo $(-\infty, +\infty)$ también se puede considerar el intervalo $[0, +\infty)$, además es claro que un sistema lineal periódico vendría a ser un caso particular del sistema lineal de coeficientes variables.

A continuación, presentamos algunas características de la matriz fundamental para este sistema.

Proposición 1.19. *Para $y' = A(t)y$; $A(t) = A(t+T)$, para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple:*

(i) Si $\phi(t)$ es la matriz fundamental de $y' = A(t)y$, entonces existe una matriz M_ϕ no singular asociada a $\phi(t)$ tal que $M_\phi = \phi^{-1}(t)\phi(t+T)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son matrices fundamentales de $y' = A(t)y$, entonces M_ψ y M_ϕ son matrices semejantes.

Demostración. (i) Es claro que $\phi(t)$ y $\phi(t+T)$ son matrices fundamentales de $y' = A(t)y$ entonces, por la Proposición 1.15, existe una matriz no singular $C = M_\phi$ tal que $\phi(t)M_\phi = \phi(t+T)$ de donde se obtiene lo pedido.
(ii) Por la Proposición 1.15, existe una matriz no singular $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\psi(t) = \phi(t)C$. Entonces

$$C^{-1}M_\phi C = C^{-1}\phi^{-1}(t)\phi(t+T)C = \psi^{-1}(t)\psi(t+T) = M_\psi,$$

luego M_ψ y M_ϕ son matrices semejantes. □

Lema 1.20. *Si $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz con $\det C \neq 0$ (no singular) entonces existe una matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$C = e^B.$$

Demostración. Ver [12, pág. 118]. □

Teorema 1.21 (Floquet)**.** *Considere la ecuación $\frac{dy}{dt} = A(t)y$, donde $A(t)$ es una matriz periódica y $\phi(t)$ su matriz fundamental asociada entonces existen $P(t) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no singular, de periodo T, y una matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$\phi(t) = P(t)e^{tB}.$$

Demostración. Ver [12, pág. 118]. □

Corolario 1.22. *Existe una transformación periódica no singular que transforma el sistema $y' = A(t)y$ periódico en un sistema lineal de coeficientes constantes.*

Demostración. Ver [12, pág. 119]. □

A continuación se define la matriz de monodromía.

Definición 1.23. *La matriz de monodromía de $y' = A(t)y, A(t) = A(t+T)$, asociada a la matriz fundamental $\phi(t)$ se define por*

$$M_\phi = \phi^{-1}(t)\phi(t+T), \qquad \text{para todo } \ t \in \mathbb{R}.$$

De la Proposición 1.15 se deduce que dos matrices de monodromía de un mismo sistema son semejantes, es decir tienen los mismos autovalores. Por lo cual en adelante usaremos el término matriz de monodromía para $\phi(T) = M_\phi = C$ (constante), donde se considerará que $\phi(0) = I$ y $\phi(t)$ una matriz fundamental. Además por Lema 1.20 para C existe una matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $C = e^{TB}$.

Para poder diferenciar los valores propios de C y B se dan las siguientes definiciones.

Definición 1.24. *Los valores propios de la matriz de monodromía $M_\phi = C$ asociada al sistema periódico $y' = A(t)y$ se denominan multiplicadores característicos (m_j) del sistema periódico y los valores propios de B, donde $C = e^{TB}$, se denominan exponentes característicos (λ_j) del sistema periódico $y' = A(t)y$. Además,*

$$m_j = e^{T\lambda_j}.$$

El siguiente teorema es una caracterización de la estabilidad para sistemas lineales periódicos en función de sus multiplicadores característicos y exponentes característicos.

Teorema 1.25. *Sea el sistema lineal periódico $y' = A(t)y$. Se cumple:*

(a) Una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea estable es que los multiplicadores característicos del sistema tengan módulo ≤ 1 (los exponentes característicos tengan parte real ≤ 0) y los que tienen módulo 1 (los exponentes característicos con parte real 0) tengan divisores elementales simples.

(b) Una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea asintóticamente estable es que todos los multiplicadores característicos del sistema tengan módulo < 1 *(los exponentes característicos con parte real* < 0*).*

Demostración. El resultado puede demostrarse usando el Teorema 1.17 y luego relacionando las soluciones del sistema $y' = A(t)y$ con las soluciones del sistemas $x' = Bx$, donde B es la matriz que se obtiene al aplicar el Teorema 1.21 al sistema $y' = A(t)y$. □

Observación 1.26. *Todo lo desarrollado en esta sección para* $\mathbb{C}^n$ *y* $\mathbb{C}^{n\times n}$ *es igualmente válido en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Capítulo II

Ecuaciones de Lyapunov

En este capítulo se presentan algunas ecuaciones de Lyapunov, algebraicas y diferenciales. Luego se enunciarán teoremas que muestran la relación que hay entre la estabilidad asintótica del sistema lineal y la ecuación de Lyapunov asociada a este.

2.1. Ecuación algebraica de Lyapunov

En esta subsección definiremos la ecuación algebraica de Lyapunov continua y discreta. Así como un teorema que caracteriza la estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes mediante las ecuaciones de Lyapunov.

2.1.1. Ecuación algebraica de Lyapunov (versión continua)

La ecuación algebraica de Lyapunov en su versión continua es de la forma

$$A^*P + PA + Q = 0,$$

donde las matrices $A, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son dadas y la matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es la incógnita, existen muchos métodos para resolver la ecuación. El siguiente teorema muestra las condiciones para que la ecuación matricial de Lyapunov tenga solución única.

Teorema 2.1. *Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son tales*

$$\lambda_i + \overline{\lambda_j} \neq 0, \qquad i, j = 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

Entonces la ecuación matricial

$$A^*P + PA + Q = 0,$$

tiene una solución única para cada matriz $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Demostración. Ver [10, pág. 125] □

Además, es claro que si todos los valores propios de A tienen parte real negativa, entonces la ecuación de Lyapunov tiene una solución única para cada Q. La existencia de una solución única está relacionada con la estabilidad del sistema lineal asociado. Esta relación se establece con precisión en el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *Sea* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(a) La solución $y = 0$ *del sistema* $\frac{dy}{dt} = Ay$ *es asintóticamente estable.*

(b) Los valores propios de A *tienen parte real negativa.*

(c) Para todo $Q = Q^* > 0$ *existe un único* $P = P^* > 0$ *solución de:*

$$A^*P + PA + Q = 0.$$

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) se obtiene del Teorema 1.17. La implicación $(b) \to (c)$ es consecuencia del teorema anterior y, finalmente, para demostrar la implicación $(c) \to (b)$, véase [10, pág. 128]. □

2.1.2. Ecuación algebraica de Lyapunov (versión discreta)

La ecuación algebraica de Lyapunov en su versión discreta es de la forma

$$A^*PA + Q = P,$$

donde las matrices A, $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son dadas y la matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es la incógnita. El siguiente teorema proporciona condiciones para la existencia de una solución única.

Teorema 2.3. *Si* $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, ..., n$, *para todos los valores propios de* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, entonces la ecuación matricial*

$$A^*PA + Q = P,$$

tiene una solución única $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ para cada matriz $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Demostración. Ver [11, pág. 55]. □

En el caso en que la ecuaciones de Lyapunov se formulen en el conjunto de los números reales, existen teoremas análogos de existencia y unicidad de la solución de la ecuación matricial de Lyapunov, pero con pequeñas variaciones, ver [9, pág. 4].

2.2. Ecuación diferencial de Lyapunov

Según la definición de estabilidad, conocida como estabilidad en el sentido de Lyapunov, se puede comprobar la estabilidad de un sistema encontrando ciertas funciones, llamadas funciones de Lyapunov. No existe un procedimiento general para encontrar una función de Lyapunov para sistemas no lineales, pero para sistemas lineales invariantes en el tiempo, el procedimiento se reduce al problema de resolver la ecuación matricial de Lyapunov.

La ecuación matricial diferencial general de Lyapunov, correspondiente a sistemas continuos dependientes del tiempo, está dada por

$$\begin{cases} A^*(t)P(t) + P(t)A(t) + Q(t) &= P'(t), \\ P(t_0) &= P_0, \end{cases}$$

donde $P(t)$ es la matriz de $n \times n$ entradas desconocidas, $A(t)$ una matriz del sistema con $n \times n$ elementos y $Q(t)$ es una matriz $n \times n$ elegida según convenga, generalmente es hermitiana.

La ecuación matricial en diferencias de Lyapunov, correspondiente a sistemas discretos, está dada por

$$\begin{cases} A^*(k)\,P(k)\,A(k) + Q(k) &= P(k+1), \\ P(k_0) &= P_0. \end{cases}$$

donde $A(k), Q(k), P(k)$ son matrices cuadradas que dependen de la variable discreta $k \in \mathbb{N}$ y P_0 es una matriz inicial dada. Más información sobre las ecuaciones de Lyapunov se puede encontrar en la referencia [9, pág. 3]. Existen otras ecuaciones como:

$$P'(t) = A(t)P(t) + P(t)A^*(t) - B(t)B^*(t)$$

asociada al sistema $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)f(t)$, véase [16, pág. 183].

Capítulo III

Estabilidad de ecuaciones diferenciales cuasilineales periódicas

En este capítulo se estudiará la estabilidad de la solución cero de la ecuación diferencial cuasilineal periódica

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y) \quad \text{para todo} \quad t \geq 0, \tag{$\mathcal{P}$}$$

mediante el estudio de la existencia de soluciones de la ecuación diferencial de Lyapunov.

Este resultado se basa en los resultados desarrollados por Demidenko en [6].

3.1. Estabilidad de un sistema lineal periódico

Consideremos la ecuación diferencial lineal periódica

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \qquad t \geq 0, \tag{3.1}$$

donde $A(t) \in \mathcal{M}_n$ es una matriz continua de periodo T, es decir, $A(t+T) = A(t)$. Utilizando la ecuación diferencial de Lyapunov

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t), \tag{3.2}$$

se establecerá un criterio de estabilidad asintótica para la solución cero del sistema (3.1) análogo al criterio de Lyapunov para sistemas lineales con coeficientes cons-

tantes. Antes de ello, se presentan dos proposiciones que relacionan los autovalores de la matriz de monodromía del sistema (3.1) con la existencia de una solución de la ecuación diferencial de Lyapunov asociada. Dichos resultados también aparecen en [4, págs. 283, 285].

Proposición 3.1. *Supongamos que $A(t)$ es una matriz continua T-periódica.*

(i) Si todos los valores propios de la matriz de monodromía de (3.1) están contenidos en un disco unitario $\{|\lambda| < 1\}$, entonces para cada matriz C, existe una solución única $H(t)$ del problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H &= -C, \qquad 0 < t < T, \\ H(0) &= H(T). \end{cases} \tag{3.3}$$

Además, si $C = C^* > 0$ entonces

$$H(t) = H^*(t) > 0, \qquad t \in [0, T].$$

(ii) Si, para $C = C^* > 0$, el problema de valores en la frontera (3.3) tiene una solución hermitiana $H(t)$ tal que $H(0) > 0$ entonces todos los valores propios de la matriz de monodromía de (3.1) se encuentran en un disco unitario $\{|\lambda| < 1\}$.

Demostración. Supongamos que la ecuación diferencial (3.2) tiene una solución $H(t)$ y $Y(t)$ es una matriz fundamental de (3.1). Obteniendo las siguientes igualdades:

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C, \ 0 < t < T, \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dt}Y(t) = A(t)Y(t), \ Y(0) = I, \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt}Y^*(t) = Y^*(t)A^*(t). \tag{3.6}$$

Multiplicando (3.4) por $Y^*(t)$ a la izquierda

$$Y^*(t)\frac{d}{dt}H(t) + Y^*(t)H(t)A(t) + Y^*(t)A^*(t)H(t) = -Y^*(t)C.$$

Luego, utilizando (3.6)

$$Y^*(t)\frac{d}{dt}H(t) + Y^*(t)H(t)A(t) + \frac{d}{dt}Y^*(t)H(t) = -Y^*(t)C.$$

Por consiguiente,

$$\frac{d}{dt}(Y^*(t)H(t)) + (Y^*(t)H(t))A(t) = -Y^*(t)C.$$

Multiplicando a la derecha por $Y(t)$

$$\frac{d}{dt}(Y^*(t)H(t))Y(t) + (Y^*(t)H(t))A(t)Y(t) = -Y^*CY(t).$$

Usando (3.5)

$$\frac{d}{dt}(Y^*(t)H(t))Y(t) + (Y^*(t)H(t))\frac{d}{dt}Y(t) = -Y^*(t)CY(t).$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}(Y^*(t)H(t)Y(t)) = -Y^*(t)CY(t).$$

Integrando ambos lados respecto a t, obtenemos

$$H(t) = (Y^{-1}(t))^*H(0)Y^{-1}(t) - (Y^{-1}(t))^*\int_0^t Y^*(s)CY(s)\,dsY^{-1}(t). \tag{3.7}$$

Si se agrega la condición de frontera $H(0) = H(T)$, se tendrá que $H(0)$ satisface la ecuación

$$H(0) = (Y^{-1}(T))^*H(0)Y^{-1}(T) - (Y^{-1}(T))^*\int_0^T Y^*(s)CY(s)\,dsY^{-1}(T)$$

o

$$H(0) = Y^*(T)H(0)Y(T) + \int_0^T Y^*(s)CY(s)\,ds. \tag{3.8}$$

Esta es una ecuación discreta de Lyapunov con

$$Q = \int_0^T Y^*(s)CY(s)\,ds.$$

Por hipótesis, los autovalores de la matriz de monodromía $Y(T)$ están en un disco unitario entonces, por el Teorema 2.3, esta ecuación tiene una solución única.

(i) Demostremos primero que existe una solución única de (3.3). Para demostrar la existencia de dicha solución, dado que, por hipótesis, los autovalores de la matriz de monodromía $Y(T)$ están contenidos en un disco unitario, entonces para Q la ecuación discreta de Lyapunov tiene una solución única que será denotada por $H(0)$, es decir $H(0)$ satisface (3.8). Con ello definimos $H(t)$ como en (3.7). Derivando $H(t)$ se verifica que es solución de la ecuación (3.2) con $C(t) = C$ y para $t = T$ se tiene

$$H(T) = (Y^{-1}(T))^* H(0) Y^{-1}(T) - (Y^{-1}(T))^* \int_0^T Y^*(s) C Y(s)\, ds Y^{-1}(T),$$

o

$$Y^*(T) H(T) Y(T) = H(0) - Q. \tag{3.9}$$

De (3.8) y (3.9) se obtiene

$$\begin{cases} Y^*(T)H(T)Y(T) &= Y^*(T)H(0)Y(T) \\ H(T) &= H(0). \end{cases}$$

En consecuencia, $H(t)$ es solución de (3.3).

Para probar la unicidad, sean H_1 y H_2 dos soluciones de la ecuación (3.3). Por lo expuesto al inicio, estas deben ser de la forma dada en (3.7) y satisfacer las condiciones de frontera, por tanto $H_1(0)$ y $H_2(0)$ satisfacen la ecuación discreta de Lyapunov la cual tiene solución única, por lo tanto, $H_1(0) = H_2(0)$ y en consecuencia $H_1(t) = H_2(t)$.

Para expresar $H(t)$ en forma explícita, se realizan sustituciones sucesivas de $H(0)$ en (3.8) obteniéndose

$$H(0) = (Y^*(T))^n H(0) (Y(T))^n + \sum_{m=0}^{n-1} (Y^*(T))^m Q (Y(T))^m, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

Por la Proposición 1.4 se tiene que $(Y(T))^n$ converge a 0, lo que implica que

$$H(0) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (Y^*(T))^m \int_0^T Y^*(s) C Y(s)\, ds (Y(T))^m. \tag{3.11}$$

Luego,

$$\begin{aligned} H(0) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (Y^*(T))^m \int_0^T Y^*(s)CY(s)\,ds (Y(T))^m \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^T (Y^*(T))^m Y^*(s)CY(s)(Y(T))^m\,ds. \end{aligned}$$

Dado que $Y(s+mT) = Y(s)Y^m(T)$, se tiene

$$H(0) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \int_0^T Y^*(s+mT)CY(s+mT)\,ds.$$

Realizando el cambio de variable $u = s + mT$, se obtiene

$$\begin{aligned} H(0) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{mT}^{(m+1)T} Y^*(u)CY(u)\,du \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{nT} Y^*(u)CY(u)\,du \\ &= \int_0^{\infty} Y^*(s)CY(s)\,ds. \end{aligned}$$

Conociendo $H(0)$ en forma explícita, reemplazamos en (3.7)

$$H(t) = (Y^{-1}(t))^* \int_t^{\infty} Y^*(s)CY(s)\,ds Y^{-1}(t). \tag{3.12}$$

Demostremos que la matriz (3.12) es definida positiva para todo $t \in [0,T]$, si $C = C^* > 0$. En efecto, para cada vector $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle H(t)v, v\rangle &= \left\langle (Y^{-1}(t))^* \int_t^{\infty} Y^*(s)CY(s)\,ds Y^{-1}(t)v, v \right\rangle \\ &= \left\langle \int_t^{\infty} Y^*(s)CY(s)Y^{-1}(t)v\,ds, Y^{-1}(t)v \right\rangle \\ &= \int_t^{\infty} \left\langle Y^*(s)CY(s)Y^{-1}(t)v, Y^{-1}(t)v\right\rangle ds \\ &= \int_t^{\infty} \left\langle CY(s)Y^{-1}(t)v, Y(s)Y^{-1}(t)v\right\rangle ds, \end{aligned}$$

y como $C = C^* > 0$, por la Proposición 1.8 se tiene

$$\begin{aligned}\langle H(t)v, v\rangle &= \int_t^\infty \left\langle CY(s)Y^{-1}(t)v, Y(s)Y^{-1}(t)v\right\rangle ds \\ &\geq \lambda_{\text{mín}}(C)\int_t^\infty \|Y(s)Y^{-1}(t)v\|^2\, ds.\end{aligned}$$

Supongamos que existen t_1 y v_1 tales que

$$\int_{t_1}^\infty \|Y(s)Y^{-1}(t_1)v_1\|^2 ds = 0.$$

Dado que $\|Y(s)Y^{-1}(t_1)v_1\|^2$ es una función continua y no negativa, se concluye que $Y(s)Y^{-1}(t_1)v_1 = 0$, lo cual contradice la hipótesis de que $Y(s)Y^{-1}(t_1) \in GL_n(\mathbb{C})$. Por tanto

$$\int_t^\infty \|Y(s)Y^{-1}(t)v\|^2 ds > 0.$$

En consecuencia, $H(t) > 0$ para todo $t \in [0, T]$.

(ii) Sea $C = C^* > 0$ (por ejemplo, $C = I$). Entonces, por hipótesis, existe $H(t)$ solución de (3.3), que puede expresarse en la forma (3.7), y considerando las condiciones de frontera $H(0) = H(T)$ se tiene:

$$H(0) = Y^*(T)H(0)Y(T) + \int_0^T Y^*(s)CY(s)ds.$$

Además, por (1.11), al ser $C = C^* > 0$, la matriz

$$Q = \int_0^T Y^*(s)CY(s)ds = Q^* > 0.$$

Demostremos que $|\lambda| < 1$ para todo valor propio de $Y(T)$. Sea λ un valor propio de $Y(T)$ y v el vector propio asociado a dicho valor propio. Entonces

$$\begin{aligned}\langle H(0)v, v\rangle &= \langle (Y^*(T)H(0)Y(T) + Q)v, v\rangle \\ &= \langle Y^*(T)H(0)Y(T)v, v\rangle + \langle Qv, v\rangle \\ &= \langle H(0)Y(T)v, Y(T)v\rangle + \langle Qv, v\rangle \\ &= \langle H(0)\lambda v, \lambda v\rangle + \langle Qv, v\rangle \\ &= |\lambda|^2\langle H(0)v, v\rangle + \langle Qv, v\rangle.\end{aligned}$$

De la igualdad anterior se obtiene

$$\langle H(0)v, v\rangle(1 - |\lambda|^2) = \langle Qv, v\rangle,$$

y al ser $H(0) > 0$ y $Q > 0$ se tiene

$$1 - |\lambda|^2 = \frac{\langle Qv, v\rangle}{\langle H(0)v, v\rangle} > 0,$$

por lo tanto, $|\lambda| < 1$.

□

Generalizamos la proposición anterior para el caso de una matriz variable en el tiempo $C(t)$ en el lado derecho de la ecuación diferencial de Lyapunov (3.2).

Proposición 3.2. *Sea $A(t)$ una matriz continua de periodo T.*

(i) Si todos los valores propios de la matriz de monodromía de (3.1) se encuentran en el disco unitario $\{|\lambda| < 1\}$, entonces para cada matriz continua $C(t)$ en $[0, T]$, existe una solución única $H(t)$ del problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H &= -C(t), \quad 0 < t < T, \\ H(0) &= H(T). \end{cases} \tag{3.13}$$

Además, si

$$C(t) = C^*(t) > 0, \quad t \in [0, T], \tag{3.14}$$

entonces

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in [0, T].$$

(ii) Supongamos que la función $C(t)$, que aparece en el lado derecho de la ecuación (3.13), es continua en $[0, T]$ y satisface (3.14). Si el problema de valores en frontera (3.13) tiene una solución hermitiana $H(t)$ tal que $H(0) > 0$, entonces todos los valores propios de la matriz de monodromía de (3.1) se encuentran en el disco unitario $\{|\lambda| < 1\}$.

Demostración. De manera similar al caso $C(t) = C$, la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t)$$

es

$$H(t) = (Y^{-1}(t))^* H(0) Y^{-1}(t) - (Y^{-1}(t))^* \int_0^t Y^*(s) C(s) Y(s) ds Y^{-1}(t). \tag{3.15}$$

Agregando la condición de frontera $H(T) = H(0)$ se obtiene

$$H(0) = (Y^{-1}(T))^* H(0) Y^{-1}(T) - (Y^{-1}(T))^* \int_0^T Y^*(s) C(s) Y(s) ds Y^{-1}(T)$$

o

$$H(0) = Y^*(T) H(0) Y(T) + \int_0^T Y^*(s) C(s) Y(s) ds. \tag{3.16}$$

(i) Dado que $|\lambda| < 1$, existe una única solución $H(0)$, para

$$Q = \int_0^T Y^*(s) C(s) Y(s)\, ds,$$

de la ecuación discreta de Lyapunov

$$H(0) - Y^*(T) H(0) Y(T) = \int_0^T Y^*(s) C(s) Y(s) ds = Q$$

o

$$H(0) = Y^*(T) H(0) Y(T) + \int_0^T Y^*(s) C(s) Y(s) ds = Y^*(T) H(0) Y(T) + Q.$$

Con ello definimos

$$H(t) = (Y^{-1}(t))^* H(0) Y^{-1}(t) - (Y^{-1}(t))^* \int_0^t Y^*(s) C(s) Y(s) ds Y^{-1}(t).$$

Es claro que esta función es solución de (3.13) y la unicidad se deduce de la unicidad de $H(0)$ en la ecuación de Lyapunov discreta. Además, es posible expresar $H(t)$ como una serie, en efecto por iteración de $H(0)$ en (3.16)

$$H(0) = (Y^*(T))^n H(0) (Y(T))^n + \sum_{k=0}^{n-1} (Y^*(T))^k Q (Y(T))^k, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Dado que $\|Y(T)^n\| \to 0$, pues $|\lambda| < 1$, se obtiene

$$H(0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (Y^*(T))^k Q(Y(T))^k.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
H(t) &= (Y^{-1}(t))^* H(0) Y^{-1}(t) - (Y^{-1}(t))^* \int_0^t Y^*(s)C(s)Y(s)ds Y^{-1}(t) \\
&= (Y^{-1}(t))^* \left(H(0) - \int_0^t Y^*(s)C(s)Y(s)ds \right) Y^{-1}(t) \\
&= (Y^{-1}(t))^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} (Y^*(T))^k Q(Y(T))^k - \int_0^t Y^*(s)C(s)Y(s)ds \right) Y^{-1}(t) \\
&= (Y^{-1}(t))^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Y^*(T))^k Q(Y(T))^k + Q - \int_0^t Y^*(s)C(s)Y(s)ds \right) Y^{-1}(t).
\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de Q

$$\begin{aligned}
H(t) &= (Y^{-1}(t))^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Y^*(T))^k Q(Y(T))^k + \int_0^T Y^*(s)C(s)Y(s)ds \right. \\
&\quad \left. - \int_0^t Y^*(s)C(s)Y(s)ds \right) Y^{-1}(t) \\
&= (Y^{-1}(t))^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Y^*(T))^k Q(Y(T))^k + \int_t^T Y^*(s)C(s)Y(s)ds \right) Y^{-1}(t) \\
&= (Y^{-1}(t))^* \left(\sum_{k=1}^{\infty} (Y^*(T))^k Q(Y(T))^k \right) Y^{-1}(t) \\
&\quad + (Y^{-1}(t))^* \left(\int_t^T Y^*(s)C(s)Y(s)ds \right) Y^{-1}(t)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
H(t) = &\sum_{k=1}^{\infty} (Y^{-1}(t))^* (Y^*(T))^k Q(Y(T))^k Y^{-1}(t) \\
&+ (Y^{-1}(t))^* \left(\int_t^T Y^*(s)C(s)Y(s)ds \right) Y^{-1}(t).
\end{aligned}$$

La serie de la parte derecha de la igualdad converge uniformemente en $[0,T]$, en efecto

$$\begin{aligned}
\|\sum_{k=1}^{n}(Y^{-1}(t))^*(Y^*(T))^kQ(Y(T))^kY^{-1}(t)\| & \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\|(Y^{-1}(t))^*\|\|(Y^*(T))^k\|\|Q\|\|(Y(T))^k\|\|Y^{-1}(t)\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\|(Y^{-1}(t))^*\|\|Y^{-1}(t)\|\|Q\|\|(Y^*(T))^k\|\|(Y(T))^k\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\max_{t\in[0,T]}\{\|(Y^{-1}(t))^*\|\|Y^{-1}(t)\|\}\|Q\|\|(Y(T))^k\|^2 \\
&\leq \max_{t\in[0,T]}\{\|(Y^{-1}(t))^*\|\|Y^{-1}(t)\|\}\|Q\|\sum_{k=1}^{n}\|(Y(T))^k\|^2,
\end{aligned}$$

la serie de la parte derecha de la desigualdad es convergente por la Proposición 1.4. Entonces, por el criterio de comparación (M-test de Weierstrass), la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(Y^{-1}(t))^*(Y^*(T))^kQ(Y(T))^kY^{-1}(t),$$

converge uniformemente en $[0,T]$. Por consiguiente, $H(t)$ se puede expresar como una serie de funciones uniformemente convergente, es decir

$$\begin{aligned}
H(t) = (Y^{-1}(t))^*&\int_t^T Y^*(s)C(s)Y(s)ds\,Y^{-1}(t) \\
&+ (Y^{-1}(t))^*Y^*(T)\int_0^T Y^*(s)C(s)Y(s)ds\,Y(T)Y^{-1}(t) \\
&+ (Y^{-1}(t))^*(Y^*(T))^2\int_0^T Y^*(s)C(s)Y(s)ds\,(Y(T))^2Y^{-1}(t)+\cdots
\end{aligned}$$

Finalmente, demostremos que esta serie de matrices es definida positiva uniformemente en $[0,T]$. Para $C(t) = C^*(t) > 0$, por la Proposición 1.11, se obtiene

$$Q = \int_0^T Y^*(s)C(s)Y(s)ds = Q^* > 0.$$

Para el vector $v \in \mathbb{C}^n$, $\|v\| = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle H(t)v, v\rangle &= \left\langle (Y^{-1}(t))^* \int_t^T Y^*(s)C(s)Y(s)ds Y^{-1}(t)v, v \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} (Y^{-1}(t))^* (Y^*(T))^k Q(Y(T))^k Y^{-1}(t)v, v \right\rangle \\
&= \int_t^T \left\langle (Y^{-1}(t))^* Y^*(s)C(s)Y(s)Y^{-1}(t)v, v\right\rangle ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle (Y^{-1}(t))^* (Y^*(T))^k Q(Y(T))^k Y^{-1}(t)v, v\right\rangle \\
&= \int_t^T \left\langle C(s)Y(s)Y^{-1}(t)v, Y(s)Y^{-1}(t)v\right\rangle ds \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle Q(Y(T))^k Y^{-1}(t)v, (Y(T))^k Y^{-1}(t)v\right\rangle . \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Como $C(s) > 0$ y $t \leq T$ se tiene

$$\int_t^T \left\langle C(s)Y(s)Y^{-1}(t)v, Y(s)Y^{-1}(t)v\right\rangle ds \geq \int_t^T \lambda_{\text{mín}}(C(s))\|Y(s)Y^{-1}(t)v\|^2 ds \geq 0. \qquad (3.18)$$

Acotando inferiormente la serie:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle Q(Y(T))^k Y^{-1}(t)v, (Y(T))^k Y^{-1}(t)v\right\rangle &\geq \lambda_{\text{mín}}(Q) \sum_{k=1}^{\infty} \|(Y(T))^k Y^{-1}(t)v\|^2 \\
&\geq \lambda_{\text{mín}}(Q)\|Y(T)Y^{-1}(t)v\|^2,
\end{aligned}$$

como $Y(t) \in GL_n(\mathbb{C})$ y es continua, existe

$$m = \min_{t\in[0,T], \|v\|=1} \|Y(T)Y^{-1}(t)v\|^2 > 0.$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\langle Q(Y(T))^k Y^{-1}(t)v, (Y(T))^k Y^{-1}(t)v\right\rangle > \lambda_{\text{mín}}(Q)m > 0. \qquad (3.19)$$

Luego en (3.17), por (3.18) y (3.19), se obtiene

$$\langle H(t)v, v\rangle > \lambda_{\text{mín}}(Q)m > 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Es decir, $H(t)$ es definida positiva uniformemente en $t \in [0, T]$.

(ii) La demostración es similar a la segunda parte de la Proposición 3.1. Es suficiente considerar

$$Q = \int_0^T Y^*(s)C(s)Y(s)\, ds,$$

y según la Proposición 1.11 se tiene $Q^* = Q > 0$, dado que $C(s) = C^*(s) > 0$. Los pasos restantes siguen el mismo razonamiento.

□

El siguiente teorema proporciona un criterio para determinar la estabilidad asintótica de la solución cero del sistema lineal periódico, mediante la existencia de una solución de la ecuación diferencial de Lyapunov.

Teorema 3.3.

(a) Si la solución cero del sistema lineal (3.1) es asintóticamente estable, entonces para cada matriz $C(t)$, continua en $[0, T]$, existe una solución única $H(t)$ para el problema con valores en la frontera

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H &= -C(t), \quad 0 \le t \le T, \\ H(0) &= H(T). \end{cases} \tag{3.20}$$

Además, si

$$C(t) = C^*(t) > 0,\ t \in [0, T], \tag{3.21}$$

entonces

$$H(t) = H^*(t) > 0,\ t \in [0, T].$$

(b) Supongamos que la función $C(t)$, que aparece en el lado derecho de la ecuación (3.20), es continua en $[0, T]$ y satisface (3.21). Si el problema de valores en la frontera (3.20) tiene una solución hermitiana $H(t)$ tal que $H(0) > 0$ entonces la solución cero del sistema lineal (3.1) es asintóticamente estable.

Demostración. Para la prueba de este teorema se utilizará la Proposición 3.2 y el Teorema 1.25.

(a) Al ser la solución cero del sistema (3.1) asintóticamente estable se tiene por el Teorema 1.25 (segunda parte) que los multiplicadores característicos tienen módulo menor que uno; es decir, los módulos de los valores propios de la matriz de monodromía son menores que 1. Luego, aplicando la primera parte de la Proposición 3.2 se obtiene lo deseado.

(b) Dado que se cumplen las hipótesis de la Proposición 3.2 (segunda parte) se obtiene que $|\lambda| < 1$, donde λ es cualquier valor propio de la matriz de monodromía de $A(t)$. Luego, aplicando la segunda parte del Teorema 1.25, se concluye que la solución cero del sistema $y' = A(t)y$ es asintóticamente estable.

□

3.2. Estabilidad para sistemas cuasilineales

Consideremos la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y), \quad t \geq 0, \tag{$\mathcal{P}$}$$

donde $A(t) \in \mathcal{M}_n$ es una función continua $T-$periódica, es decir, $A(t+T) = A(t)$, $\varphi(t, y)$ es una función vectorial continua, y $\varphi(t, 0) = 0$. El objetivo es estudiar la estabilidad asintótica de la solución cero del sistema por medio de una solución periódica de la ecuación diferencial de Lyapunov

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t).$$

Una versión más sencilla se da cuando $C(t) = C$, obteniéndose

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C.$$

Utilizando el Teorema 3.3, demostraremos un criterio para determinar la estabilidad asintótica de la solución cero de $(\mathcal{P})$, daremos estimaciones para el dominio de atracción de la solución cero y obtendremos estimaciones para las soluciones que caracterizan la tasa de decaimiento cuando $t \to \infty$. Además, consideraremos los

sistemas de ecuaciones con un parámetro pequeño como

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \mu\varphi(t, y), \quad t \geq 0.$$

Si suponemos que el sistema (3.1) es asintóticamente estable, entonces, por el Teorema 3.3, el problema de valores en la frontera con una matriz continua $C(t)$ que satisface (3.21) tiene una solución única $H(t) > 0, t \in [0, T]$. Extendiendo esta matriz periódicamente a todo el semieje $\{t \geq 0\}$ y denotando esta extensión con el mismo símbolo $H(t)$, es decir, $H(t) = H(t + T)$, $t \geq 0$.
Además, para la demostración de los siguientes teoremas es necesario el siguiente resultado, llamado el teorema de la desigualdad diferencial.

Lema 3.4. *Sea $f(t, u)$ una función continua en un conjunto abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y supongamos que el problema de valor inicial para la ecuación*

$$v'(t) = f(t, v(t)), \qquad v(a) = v_0,$$

posee una solución única en el intervalo $[a, b]$. Si $v(t)$ es dicha solución y $u(t)$ es una función continua en $[a, b)$, con derivada lateral derecha $D_r u(t)$ existente y que satisface

$$D_r u(t) \leq f(t, u(t)), \qquad a \leq t < b,$$

junto con la condición inicial $u(a) \leq v(a)$, entonces se cumple

$$u(t) \leq v(t), \qquad a \leq t \leq b.$$

Demostración. Ver [12, pág. 31] □

Teorema 3.5. *Suponga que $C(t)$ es la matriz identidad y que la función vectorial $\varphi(t, y)$ en $(\mathcal{P})$ satisface la condición*

$$\mathrm{Re}\langle H(t)\varphi(t, y), y\rangle \leq q\langle H(t)y, y\rangle^{1+\alpha}, \qquad t \geq 0,\ y \in \mathbb{C}^n,\ q \geq 0,\ \alpha > 0. \tag{3.22}$$

Entonces la solución cero del sistema cuasilineal $(\mathcal{P})$ es asintóticamente estable y el conjunto $\mathcal{E} = \{y \in \mathbb{C}^n : \langle H(0)y, y\rangle^{\alpha} < r\}$, donde

$$r = \left(1 - \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\, ds\right)\right)\left(2q\alpha \int_0^T \exp\left(-\int_0^{\xi} \frac{\alpha}{\|H(s)\|} ds\right) d\xi\right)^{-1}, \tag{3.23}$$

es el dominio de atracción de la solución cero. Además, la solución de $(\mathcal{P})$*, con la condición inicial* $y(0) \in \mathcal{E}$*, satisface la estimación*

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}ds\right)\langle H(0)y(0), y(0)\rangle \times \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha}}{r}\right)^{-1/\alpha}, \tag{3.24}$$

para todo $t > 0$*.*

Demostración. Sea $y(t)$ una solución de $(\mathcal{P})$ definida en el intervalo $[0, b)$. Entonces la función $\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$ es continuamente diferenciable y

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle &= \left\langle \frac{d}{dt}(H(t)y(t)), y(t)\right\rangle + \left\langle H(t)y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t)\right)y(t) + H(t)\frac{d}{dt}y(t), y(t)\right\rangle + \left\langle H(t)y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t)\right)y(t), y(t)\right\rangle + \left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t), y(t)\right\rangle \\ &\quad + \langle H(t)y(t), A(t)y(t) + \varphi(t, y(t))\rangle\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \\ &\quad = \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t)\right)y(t), y(t)\right\rangle + \langle H(t)A(t)y(t) + H(t)\varphi(t, y(t)), y(t)\rangle \\ &\qquad + \langle H(t)y(t), A(t)y(t)\rangle + \langle H(t)y(t), \varphi(t, y(t))\rangle \\ &\quad = \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t)\right)y(t), y(t)\right\rangle + \langle H(t)A(t)y(t), y(t)\rangle + \langle H(t)\varphi(t, y(t)), y(t)\rangle \\ &\quad + \langle A^*(t)H(t)y(t), y(t)\rangle + \langle H(t)y(t), \varphi(t, y(t))\rangle\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle &= \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t)\right)y(t), y(t)\right\rangle \\ &\quad + \langle H(t)\varphi(t, y(t)), y(t)\rangle + \langle H(t)y(t), \varphi(t, y(t))\rangle\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle &= \langle -Iy(t),y(t)\rangle + \langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle + \langle y(t),H^*(t)\varphi(t,y(t))\rangle\\ &= -\|y(t)\|^2 + \langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle + \langle y(t),H(t)\varphi(t,y(t))\rangle\\ &= -\|y(t)\|^2 + \langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle + \overline{\langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle}\\ &= -\|y(t)\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle.\end{aligned}$$

De (3.22) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \leq -\|y(t)\|^2 + 2q\langle H(t)y(t),y(t)\rangle^{1+\alpha}.$$

Además,

$$\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \leq \|H(t)\|\|y(t)\|^2,$$

lo que implica

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \leq -\frac{1}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle + 2q\langle H(t)y(t),y(t)\rangle^{1+\alpha}. \tag{3.25}$$

A esta desigualdad se le aplicará el Lema (3.4). Para ello, consideremos el problema de Cauchy para la ecuación diferencial de Bernoulli:

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt} &= -\dfrac{1}{\|H(t)\|}v + 2qv^{1+\alpha}\\ v(0) &= \langle H(0)y(0),y(0)\rangle.\end{cases} \tag{3.26}$$

El problema de Cauchy anterior admite una única solución, la cual se determina de la siguiente manera:

$$\left[1 - 2q\alpha\int_0^t \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi v^\alpha(0)\right]v^\alpha(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)v^\alpha(0). \tag{3.27}$$

Denotemos por $w(t)$ la función que aparece entre corchetes. Probemos que si $y(0) \in \mathcal{E}$, entonces $w(t) > 0$. Es claro que la integral $\int_0^\infty$ en $w(t)$ existe, lo que permite la

partición de la integral y, en consecuencia, la acotación de $w(t)$

$$w(t) = 1 - 2q\alpha \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) d\xi \langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha + 2q\alpha \int_t^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) d\xi \langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha.$$

Luego,

$$w(t) \geq 1 - 2q\alpha \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) d\xi \langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha. \tag{3.28}$$

Considerando la integral

$$J = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) d\xi.$$

Dado que esta es una integral impropia convergente, es posible expresar como una serie de integrales convergentes

$$J = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)T}^{nT} \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) d\xi = J_1 + J_2 + \cdots \tag{3.29}$$

Reescribiendo J_2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) d\xi \\ &= \int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds - \int_T^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) d\xi \\ &= \int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) \exp\left(-\int_T^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) d\xi \\ &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) \int_T^{2T} \exp\left(-\int_T^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) d\xi. \end{aligned}$$

Usando la sustitución $\eta = s - T$, obtenemos

$$\begin{aligned} J_2 &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\int_T^{2T}\exp\left(-\int_0^{\xi-T}\frac{\alpha}{\|H(\eta+T)\|}d\eta\right)d\xi \\ &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\int_T^{2T}\exp\left(-\int_0^{\xi-T}\frac{\alpha}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)d\xi. \end{aligned}$$

Luego, realizando el cambio de variable $\tau = \xi - T$ se tiene

$$\begin{aligned} J_2 &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\int_0^{T}\exp\left(-\int_0^{\tau}\frac{\alpha}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)d\tau \\ &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)J_1. \end{aligned}$$

Similarmente, J_3 se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{2T}^{3T}\exp\left(-\int_0^{\xi}\frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi \\ &= \int_{2T}^{3T}\exp\left(-\int_0^{2T}\frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\exp\left(-\int_{2T}^{\xi}\frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi. \end{aligned}$$

Dado que la matriz $H(t)$ es $T-$periódica, obtenemos la igualdad

$$J_3 = \exp\left(-2\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\int_{2T}^{3T}\exp\left(-\int_{2T}^{\xi}\frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi.$$

Realizando el cambio de variable $\eta = s - 2T$ se obtiene

$$J_3 = \left(\exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\right)^2\int_{2T}^{3T}\exp\left(-\int_0^{\xi-2T}\frac{\alpha}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)d\xi.$$

Con la sustitución $\tau = \xi - 2T$ se obtiene

$$\begin{aligned} J_3 &= \left(\exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\right)^2\int_0^{T}\exp\left(-\int_0^{\tau}\frac{\alpha}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)d\tau \\ &= \left(\exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\right)^2 J_1. \end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, se obtiene

$$J_k = \left(\exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\right)^{k-1} J_1, \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Al ser

$$\exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right) < 1,$$

se puede calcular la suma de la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} J_k$. En consecuencia, (3.29) se puede escribir en la forma

$$J = \left(1 - \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\right)^{-1} J_1,$$

y (3.28) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} w(t) \geq 1 - 2q\alpha &\left(1 - \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\right)^{-1} \\ &\times \left(\int_0^T \exp\left(-\int_0^{\xi} \frac{\alpha}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)d\xi\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} w(t) &\geq 1 - \left(1 - \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)\right)^{-1} \\ &\quad \times \left(2q\alpha \int_0^T \exp\left(-\int_0^{\xi} \frac{\alpha}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)d\xi\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha} \\ &\geq 1 - \frac{1}{r}\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha}. \end{aligned}$$

De donde se puede concluir:

$$w(t) > 0$$

y

$$w^{-1/\alpha}(t) \leq \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha}}{r}\right)^{-1/\alpha}. \tag{3.30}$$

En resumen, si $y(0) \in \mathcal{E} = \{y \in \mathbb{C}^n : \langle H(0)y, y\rangle^{\alpha} < r\}$, donde r está dado por (3.23), entonces $w(t) > 0$. Por lo tanto, por (3.27), la solución del problema de

Cauchy (3.26) existe en todo el semieje $\{t \geq 0\}$ y

$$v(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\alpha}{\|H(s)\|} ds\right) v(0) w^{-1/\alpha}(t).$$

Luego, por el Lema (3.4), para $u(t) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle$ en (3.25) y $v(t)$ solución de (3.26), se tiene la desigualdad

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq v(t).$$

Utilizando la acotación de $w^{-1/\alpha}(t)$ en (3.30) se obtiene la siguiente estimación

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{\alpha}{\|H(s)\|} ds\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha}}{r}\right)^{-1/\alpha}.$$

Al ser $H(t)$ una matriz definida positiva y periódica, por la Proposición 1.10, se cumple :

$$m_H \|y(t)\|^2 \leq \langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq M_H \|y(t)\|^2, \tag{3.31}$$

donde $m_H > 0$ y M_H son respectivamente el mínimo de $\lambda_{\text{mín}}(H(t))$ y máximo de $\|H(t)\|$, con lo cual se obtiene que la solución $y(t)$ está acotada en $[0, b)$. Por lo tanto, se deduce que $b = +\infty$. Además, por lo visto anteriormente, es claro que una solución de $(\mathcal{P})$ con $y(0) \in \mathcal{E}$ satisface la estimación (3.24). Demostremos la estabilidad asintótica de la solución $y(t) = 0$.

Dado $\epsilon > 0$ se considera:

$$\delta = \text{mín}\left\{\sqrt{\frac{r^{1/\alpha}}{M_H}}, \sqrt{\frac{1}{M_H}\left(\frac{1}{\epsilon^{2\alpha} m_H^{\alpha}} + \frac{1}{r}\right)^{-1/\alpha}}\right\}. \tag{3.32}$$

Sea $y(t)$ una solución de $(\mathcal{P})$ tal que $\|y(0)\| < \delta$. Entonces

$$\|y(0)\| < \sqrt{\frac{r^{1/\alpha}}{M_H}}.$$

Lo que implica

$$\|y(0)\|^2 M_H < r^{1/\alpha}.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad (3.31), se obtiene

$$\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha} < r,$$

es decir, $y(0) \in \mathcal{E}$. Por consiguiente, $y(t)$ satisface la desigualdad (3.24) y, teniendo en cuenta (3.31), se obtiene

$$\|y(t)\|^2 \; m_H \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|} ds\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha}}{r}\right)^{-1/\alpha}.$$

Por consiguiente,

$$\|y(t)\|^2 \; m_H \leq \langle H(0)y(0), y(0)\rangle \times \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha}}{r}\right)^{-1/\alpha}. \tag{3.33}$$

Además,

$$\|y(0)\| < \sqrt{\frac{1}{M_H}\left(\frac{1}{\epsilon^{2\alpha} m_H^{\alpha}} + \frac{1}{r}\right)^{-1/\alpha}}.$$

Elevando al cuadrado y multiplicando por M_H, se obtiene

$$\|y(0)\|^2 M_H < \left(\frac{1}{\epsilon^{2\alpha} m_H^{\alpha}} + \frac{1}{r}\right)^{-1/\alpha}.$$

Utilizando la desigualdad (3.31) se tiene

$$\langle H(0)y(0), y(0)\rangle < \left(\frac{1}{\epsilon^{2\alpha} m_H^{\alpha}} + \frac{1}{r}\right)^{-1/\alpha}.$$

Luego,

$$\langle H(0)y(0), y(0)\rangle \times \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^{\alpha}}{r}\right)^{-1/\alpha} < \epsilon^2 m_H. \tag{3.34}$$

Aplicando la transitividad a las desigualdades (3.33) y (3.34) se concluye que

$$\|y(t)\| < \epsilon,$$

con lo cual se concluye que la solución cero del sistema $(\mathcal{P})$ es estable.

Para la estabilidad asintótica considerando

$$\delta = \text{mín}\left\{\sqrt{\frac{r^{1/\alpha}}{M_H}}, \sqrt{\frac{1}{M_H}\left(\frac{1}{m_H^\alpha}+\frac{1}{r}\right)^{-1/\alpha}}\right\},$$

se obtiene

$$\|y(t)\|^2 \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}ds\right).$$

Como

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}ds = +\infty,$$

entonces es claro que $y(t)\to 0$ cuando $t\to+\infty$. Así queda demostrada la estabilidad asintótica de la solución cero del sistema $(\mathcal{P})$. □

Ahora damos una generalización del Teorema 3.5.

Teorema 3.6. *Supongamos que $C(t)$ es una matriz continua que satisface (3.21), $c_1(t)>0$ es el mínimo valor propio de $C(t)$, y la función vectorial $\varphi(t,y)$ en $(\mathcal{P})$ satisface (3.22). Entonces la solución cero del sistema cuasilineal $(\mathcal{P})$ es asintóticamente estable y el conjunto*

$$\mathcal{E} = \{y\in\mathbb{C}^n : \langle H(0)y, y\rangle^\alpha < r\},$$

es el dominio de atracción para la solución cero, donde

$$r = \left(1-exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}\,ds\right)\right)\left(2q\alpha\int_0^T exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi\right)^{-1}.$$

Además, la solución de $(\mathcal{P})$ con los datos iniciales $y(0)\in\mathcal{E}$ satisface la estimación

$$\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{c_1(s)\,ds}{\|H(s)\|}\right)\langle H(0)y(0),y(0)\rangle\left(1-\frac{\langle H(0)y(0),y(0)\rangle^\alpha}{r}\right)^{-\frac{1}{\alpha}},$$

para todo $t>0$.

Demostración. La función $\langle H(t)y(t),y(t)\rangle$ es continuamente diferenciable. Además,

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle = \left\langle\left(\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)\right)y(t),y(t)\right\rangle$$

$$+2\text{Re}\langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle &= -\langle C(t)y(t),y(t)\rangle + 2\mathrm{Re}\langle H(t)\varphi(t,y(t)),y(t)\rangle \\ &\leq -\langle C(t)y(t),y(t)\rangle + 2q\langle H(t)y(t),y(t)\rangle^{1+\alpha}.\end{aligned}$$

Dado que

$$\langle C(t)y(t),y(t)\rangle \geq c_1(t)\|y(t)\|^2 \geq c_1(t)\frac{\langle H(t)y(t),y(t)\rangle}{\|H(t)\|},$$

se obtiene

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \leq -\frac{c_1(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle + 2q\langle H(t)y(t),y(t)\rangle^{1+\alpha}, \tag{3.35}$$

considerando la ecuación de Bernoulli asociada con la desigualdad anterior

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} &= -\dfrac{c_1(t)}{\|H(t)\|}v + 2qv^{1+\alpha} \\ v(0) &= \langle H(0)y(0),y(0)\rangle \end{cases} \tag{3.36}$$

cuya solución única es

$$\left[1 - 2q\alpha\int_0^t \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi v^\alpha(0)\right]v^\alpha(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)v^\alpha(0). \tag{3.37}$$

Denotemos la expresión entre corchetes de (3.37) por $w(t)$. Probemos que si $y(0)\in\mathcal{E}$, entonces $w(t)>0$. En efecto, acotando $w(t)$ inferiormente

$$\begin{aligned} w(t) &= 1 - 2q\alpha\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi\langle H(0)y(0),y(0)\rangle^\alpha \\ &\quad + 2q\alpha\int_t^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi\langle H(0)y(0),y(0)\rangle^\alpha \\ &\geq 1 - 2q\alpha\int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi\langle H(0)y(0),y(0)\rangle^\alpha. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Considerando la integral

$$J = \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi,$$

la cual se puede expresar como una serie:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi + \int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi \\ &\quad + \int_{2T}^{3T} \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi + \cdots \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + \cdots \end{aligned}$$

Reescribimos J_2:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi \\ &= \int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\exp\left(-\int_T^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi \\ &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\int_T^{2T} \exp\left(-\int_T^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi. \end{aligned}$$

Usando la sustitución $\eta = s - T$,

$$\begin{aligned} J_2 &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^{\xi-T} \frac{\alpha c_1(\eta+T)}{\|H(\eta+T)\|}d\eta\right)d\xi \\ &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\int_T^{2T} \exp\left(-\int_0^{\xi-T} \frac{\alpha c_1(\eta)}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)d\xi. \end{aligned}$$

Realizando la sustitución $\tau = \xi - T$,

$$\begin{aligned} J_2 &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\int_0^T \exp\left(-\int_0^\tau \frac{\alpha c_1(\eta)}{\|H(\eta)\|}d\eta\right)d\tau \\ &= \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)J_1. \end{aligned}$$

De forma similar, se obtiene para J_3:

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{2T}^{3T} \exp\left(-\int_0^{\xi} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right) d\xi \\ &= \int_{2T}^{3T} \exp\left(-\int_0^{2T} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right) \exp\left(-\int_{2T}^{\xi} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right) d\xi \\ &= \int_{2T}^{3T} \exp\left(-2\int_0^{T} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right) \exp\left(-\int_{2T}^{\xi} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right) d\xi \\ &= \exp\left(-2\int_0^{T} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right) \int_{2T}^{3T} \exp\left(-\int_{2T}^{\xi} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right) d\xi. \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variable $\eta = s - 2T$,

$$\begin{aligned} J_3 &= \exp\left(-2\int_0^{T} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right) \int_{2T}^{3T} \exp\left(-\int_0^{\xi-2T} \frac{\alpha c_1(\eta+2T)}{\|H(\eta+2T)\|} d\eta\right) d\xi \\ &= \left(\exp\left(-\int_0^{T} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right)\right)^2 \int_{2T}^{3T} \exp\left(-\int_0^{\xi-2T} \frac{\alpha c_1(\eta)}{\|H(\eta)\|} d\eta\right) d\xi. \end{aligned}$$

Cambio de variable $\tau = \xi - 2T$,

$$\begin{aligned} J_3 &= \left(\exp\left(-\int_0^{T} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right)\right)^2 \int_0^{T} \exp\left(-\int_0^{\tau} \frac{\alpha c_1(\eta)}{\|H(\eta)\|} d\eta\right) d\tau \\ &= \left(\exp\left(-\int_0^{T} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right)\right)^2 J_1. \end{aligned}$$

Por analogía con los casos anteriores se obtiene

$$J_k = \left(\exp\left(-\int_0^{T} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right)\right)^{k-1} J_1,\ k = 2, 3, ...$$

Y al ser

$$\exp\left(-\int_0^{T} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right) < 1,$$

J se puede expresar, como una serie geométrica convergente, en la forma

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \cdots = \left(1 - \exp\left(-\int_0^{T} \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|} ds\right)\right)^{-1} J_1;$$

y (3.38) adopta la forma

$$\begin{aligned} w(t) &\geq 1 - 2q\alpha\left(1 - \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\right)^{-1}\left(\int_0^T \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}d\eta\right)d\xi\right)v^\alpha(0) \\ &\geq 1 - \left(1 - \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\right)^{-1}\left(2q\alpha\int_0^T \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}d\eta\right)d\xi\right)v^\alpha(0) \\ &\geq 1 - \frac{1}{r}v^\alpha(0) \\ &\geq 1 - \frac{1}{r}\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha}{r} > 0,$$

dado que $y(0) \in \mathcal{E}$. En consecuencia, se obtiene $w(t) > 0$ y la desigualdad

$$w^{-1/\alpha}(t) \leq \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha}{r}\right)^{-1/\alpha}. \tag{3.39}$$

En resumen, si $y(0) \in \mathcal{E} = \{y \in \mathbb{C}^n : \langle H(0)y, y\rangle^\alpha < r\}$, donde r está dado por el Teorema 3.6, entonces $w(t) > 0$. En consecuencia por (3.37), la solución del problema de Cauchy (3.36) está definida en todo el semieje positivo y

$$v(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)v(0)w^{-1/\alpha}(t).$$

Luego, por el Lema (3.4), para $u(t) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle$ en (3.35) y $v(t)$ solución de (3.36), se obtiene la desigualdad

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)v(0)w^{1/\alpha}(t).$$

En consecuencia, por (3.39), se obtiene la estimación

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq v(t) \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{\alpha c_1(s)}{\|H(s)\|}ds\right)v(0)\left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha}{r}\right)^{-1/\alpha}.$$

Finalmente, a partir de la estimación obtenida se deduce que la solución $y(t) = 0$ de $(\mathcal{P})$ es asintóticamente estable, y cuyo dominio de atracción es el conjunto

$$\mathcal{E} = \{y \in \mathbb{C}^n : \langle H(0)y, y\rangle^\alpha < r\},$$

así queda demostrado el teorema. □

Consideremos el siguiente sistema cuasilineal de ecuaciones diferenciales con un parámetro:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \mu\varphi(t,y), \qquad t \geq 0. \tag{3.40}$$

Teorema 3.7. *Supongamos que la función vectorial $\varphi(t,y)$ cumple la desigualdad*

$$|\langle H(t)\varphi(t,y),y\rangle| \leq q\langle H(t)y,y\rangle^{1+\alpha}, \qquad t \geq 0,\ y \in \mathbb{C}^n,\ \alpha > 0,$$

y

$$m = \left(1 - \exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha\, ds}{\|H(s)\|}\right)\right)\left(2\rho q\alpha \int_0^T \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha\, ds}{\|H(s)\|}\right) d\xi\right)^{-1}, \quad \rho > 0.$$

Si $|\mu| < m$ entonces la estimación

$$\begin{aligned}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}ds\right)\langle H(0)y(0),y(0)\rangle \\ \times\left(1 - \frac{\langle H(0)y(0),y(0)\rangle^\alpha|\mu|}{\rho m}\right)^{-1/\alpha}, \qquad t > 0,\end{aligned}$$

se cumple para las soluciones de (3.40) con condición inicial

$$y(0) \in \{y \in \mathbb{C}^n : \langle H(0)y,y\rangle^\alpha < \rho\}.$$

Demostración. Sea $\varphi_1(t,y) = \mu\varphi(t,y)$, luego

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\langle H(t)\varphi_1(t,y),y\rangle &\leq |\langle H(t)\varphi_1(t,y),y\rangle| \\ &\leq |\langle H(t)\mu\varphi(t,y),y\rangle| \\ &\leq |\mu||\langle H(t)\varphi(t,y),y\rangle| \\ &\leq |\mu|q\langle H(t)y,y\rangle^{1+\alpha}.\end{aligned}$$

Tomando $q_1 = |\mu|q > 0$ se tiene

$$\mathrm{Re}\langle H(t)\varphi_1(t,y),y\rangle \leq q_1\langle H(t)y,y\rangle^{1+\alpha}. \tag{3.41}$$

Relacionemos ρ con r del Teorema 3.5:

$$\begin{aligned}\rho &= \left(1 - exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\, ds\right)\right)\left(2mq\alpha \int_0^T exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|} ds\right) d\xi\right)^{-1} \\ &= \frac{|\mu|}{m}\left(1 - exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\, ds\right)\right)\left(2|\mu|q\alpha \int_0^T exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|} ds\right) d\xi\right)^{-1} \\ &= \frac{|\mu|}{m}\left(1 - exp\left(-\int_0^T \frac{\alpha}{\|H(s)\|}\, ds\right)\right)\left(2q_1\alpha \int_0^T exp\left(-\int_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|} ds\right) d\xi\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Observamos que el segundo y el tercer factor coincide con la definición de r, por lo tanto

$$\rho = \frac{|\mu|}{m} r.$$

Dado que por hipótesis $|\mu| < m$, se concluye de forma inmediata que

$$\rho < r.$$

Sea $y(t)$ una solución del sistema (3.40) con condición inicial $y(0) \in \{y \in \mathbb{C}^n : \langle H(0)y, y\rangle^\alpha < \rho\}$. Es claro que $y(0) \in \mathcal{E} = \{y \in \mathbb{C}^n : \langle H(0)y, y\rangle^\alpha < r\}$, puesto que $\rho < r$. Entonces, por el Teorema 3.5, se tiene que $y(t)$ satisface la estimación

$$\begin{aligned}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \le \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|} ds\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle \\ \times \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha}{r}\right)^{-1/\alpha}, \qquad t > 0.\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de $r = \rho m/|\mu|$ se obtiene la estimación pedida

$$\begin{aligned}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \le exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|} ds\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle \\ \times \left(1 - \frac{\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha |\mu|}{\rho m}\right)^{-1/\alpha}, \qquad t > 0.\end{aligned}$$

Lo cual implica la estabilidad asintótica de la solución $y(t) = 0$ del sistema (3.40). □

Teorema 3.8. *Supongamos que la función vectorial $\varphi(t, y)$ satisface la desigualdad*

$$|\langle H(t)\varphi(t, y), y\rangle| \le q\langle H(t)y, y\rangle, \qquad t \ge 0,\ y \in \mathbb{C}^n, \tag{3.42}$$

y

$$m = (2q \max_{t\in[0,T]} \|H(t)\|)^{-1}.$$

Si $|\mu| < m$ entonces la solución cero de (3.40) es asintóticamente estable. Además, para la solución con condición inicial $y(0) \in \mathbb{C}^n$, se cumple la siguiente estimación:

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}ds + 2q|\mu|t\right)\langle H(0)y(0), y(0)\rangle, \quad t > 0. \quad (3.43)$$

Demostración. Sea $y(t)$ una solución de (3.40). Entonces $\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$ es continuamente diferenciable y, siguiendo los mismos argumentos del Teorema 3.5 se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle &= \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t)\right)y(t), y(t)\right\rangle \\ &\quad + 2\,\mathrm{Re}\ \mu\langle H(t)\varphi(t, y(t)), y(t)\rangle \\ &= -\|y(t)\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\ \mu\langle H(t)\varphi(t, y(t)), y(t)\rangle.\end{aligned}$$

Por (3.42) y sabiendo que

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \|H(t)\|\|y(t)\|^2,$$

tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle &\leq -\frac{\langle H(t)y(t), y(t)\rangle}{\|H(t)\|} + 2q|\mu|\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \\ &= \left(-\frac{1}{\|H(t)\|} + 2q|\mu|\right)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle.\end{aligned}$$

Esta desigualdad es equivalente a la expresión:

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle - \left(-\frac{1}{\|H(t)\|} + 2q|\mu|\right)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq 0.$$

Aplicando el criterio del factor integrante al lado izquierdo de la desigualdad, se concluye que

$$\left[\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \times \exp\left(-\int_0^t \left(-\frac{1}{\|H(s)\|} + 2q|\mu|\right)\,ds\right)\right]' \leq 0.$$

Luego, integrando esta desigualdad resulta

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \exp\left(\int_0^t \left(-\frac{1}{\|H(s)\|} + 2q|\mu|\right) ds\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle,$$

reescribiendo se obtiene (3.43), es decir

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|} ds + 2q|\mu|t\right) \langle H(0)y(0), y(0)\rangle.$$

A partir de la condición $|\mu| < m$, se obtiene

$$|\mu| < \frac{1}{2q \operatorname{máx}_{t\in[0,T]} \|H(t)\|}.$$

Como $\operatorname{máx}_{t\in[0,T]} \|H(t)\| \geq \|H(t)\|$ se concluye

$$2q|\mu| < \frac{1}{\operatorname{máx}_{t\in[0,T]} \|H(t)\|} \leq \frac{1}{\|H(t)\|}.$$

De donde se deduce que

$$-\frac{1}{\|H(t)\|} + 2q|\mu| \leq -\frac{1}{\operatorname{máx}_{t\in[0,T]} \|H(t)\|} + 2q|\mu| < 0.$$

Integrando esta desigualdad , se consigue

$$-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|} ds + 2q|\mu|t \leq \left(-\frac{1}{\operatorname{máx}_{t\in[0,T]} \|H(t)\|} + 2q|\mu|\right) t < 0.$$

Por lo tanto

$$\exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\|H(s)\|} ds + 2q|\mu|t\right) \to 0, \quad \text{cuando } t \to +\infty.$$

Lo que implica que $\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \to 0$ en (3.43). Con esto, se concluye que la solución cero de (3.40) es asintóticamente estable. □

Capítulo IV

Aplicación a la teoría de oscilación

En este capítulo consideraremos un ejemplo muy representativo en la teoría de oscilaciones paramétricas. Es bien sabido que el estado de equilibrio inferior (abajo) de un péndulo de longitud constante con un pivote fijo es un punto de equilibrio estable; en cambio, la posición superior (arriba) del péndulo es inestable. Un resultado históricamente famoso es que la posición superior de un péndulo se puede estabilizar si el punto de pivote oscila adecuadamente de forma vertical. El péndulo con esas características es conocido como el péndulo de Kapitza; este fenómeno se explica por medio del método de promediado desarrollado por Bogolyubov [2, 14]. Demostraremos este hecho en base a los resultados obtenidos y los artículos [4, 5].

Denotemos el ángulo de desviación del péndulo respecto de la posición vertical por θ. Supongamos que el desplazamiento vertical del punto de pivote está descrito por la función $x(t) = asen(\omega t)$. En este caso, la ecuación del movimiento del péndulo tiene la forma (por ejemplo, ver [2])

$$\theta'' + \lambda\theta' + \frac{g - a\,\omega^2 sen(\omega t)}{l} sen\theta = 0, \tag{4.1}$$

donde λ es el coeficiente de amortiguación (atenuación), l la longitud del péndulo y g la aceleración de la gravedad. Nuestro objetivo es encontrar los valores de los parámetros a y ω para los cuales el estado de equilibrio superior es asintóticamente estable.

Emplearemos las siguientes notaciones

$$\mu = \frac{a}{l}, \qquad k = \frac{\sqrt{gl}}{\omega a}, \qquad \sigma = \frac{\lambda k\sqrt{l}}{2\sqrt{g}}.$$

Luego, utilizando la sustitución $\tau = \omega t$, la ecuación (4.1) adopta la forma

$$\tilde{\theta}'' + 2\sigma\mu\tilde{\theta}' + (k^2\mu^2 - \mu sen\tau)sen\tilde{\theta} = 0, \tag{4.2}$$

donde $\tilde{\theta}(\tau) = \theta(\tau/\omega) = \theta(t)$. Supongamos que las oscilaciones del punto de pivote tienen una amplitud a pequeña y frecuencia ω suficientemente grande. Por consiguiente, el parámetro μ es pequeño. Nuestro problema se reduce a encontrar los dominios de variación de los parámetros μ y k, donde el estado de equilibrio superior $\tilde{\theta}(\tau) = \pi$ es asintóticamente estable. Con la sustitución $\hat{\theta}(\tau) = \tilde{\theta}(\tau) - \pi$ la ecuación (4.2) toma la forma

$$\hat{\theta}'' + 2\sigma\mu\hat{\theta}' - (k^2\mu^2 - \mu sen\tau)sen\hat{\theta} = 0, \tag{4.3}$$

y el problema se reduce al estudio de la estabilidad de la solución cero de esta ecuación.

Usando la función vectorial

$$y(\tau) = \begin{pmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}(\tau) \\ \hat{\theta}\,'(\tau) \end{pmatrix},$$

la ecuación (4.3) se transforma en el sistema

$$\frac{dy}{d\tau} = A(\tau)y + \varphi(\tau, y), \tag{4.4}$$

donde

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2\mu^2 - \mu\, sen\tau & -2\sigma\mu \end{pmatrix},\ \varphi(\tau, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ (k^2\mu^2 - \mu sen\tau)(seny_1 - y_1) \end{pmatrix}.$$

Claramente, la matriz $A(\tau)$ es $2\pi-$periódica y la función vectorial φ satisface la desigualdad

$$\|\varphi(\tau, y)\| \leq c\|y\|^3, \qquad c > 0,\ \tau \geq 0. \tag{4.5}$$

En efecto, dado que

$$\lim_{y_1 \to \infty} \frac{seny_1 - y_1}{y_1^3} = 0,$$

entonces existe un $c_1 > 0$ tal que

$$\|\varphi(\tau, y)\| \leq c_1(k^2\mu^2 + \mu)|y_1|^3 \leq c_1(k^2\mu^2 + \mu)\left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right)^3.$$

Considerando $c = c_1(k^2\mu^2 + \mu)$, obtenemos lo pedido.

Consideremos el sistema lineal

$$\frac{dy}{d\tau} = A(\tau)y. \tag{4.6}$$

Si suponemos que la solución cero de este sistema es asintóticamente estable entonces, por el Teorema 3.3, el problema de valores en la frontera

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}H + HA(\tau) + A^*(\tau)H &= -C(\tau), \qquad 0 \leq \tau \leq 2\pi, \\ H(0) &= H(2\pi) \end{cases}$$

tiene una solución única $H(\tau)$ la cual se extiende periódicamente al semieje positivo. Entonces, por la Proposición 1.8 y la desigualdad (4.5) se obtiene

$$\mathrm{Re}\langle H(\tau)\varphi(\tau, y), y\rangle \leq \langle H(\tau)\varphi(\tau, y), y\rangle \leq \|H(\tau)\|\|\varphi(\tau, y)\|\|y\|$$

$$\leq c\|H(\tau)\|\|y\|^4 \leq c\frac{\|H(\tau)\|}{\gamma^2(\tau)}\langle H(\tau)y, y\rangle^2, \qquad \tau \geq 0,$$

donde $\gamma(\tau) = \lambda_{\text{mín}}(H(\tau)) > 0$, es el menor autovalor de la matriz $H(\tau)$. Con lo cual, encontramos que la función vectorial $\varphi(\tau, y)$ satisface (3.22) para

$$q = c \max_{\tau\in[0,T]} \frac{\|H(\tau)\|}{\gamma^2(\tau)},\ \alpha = 1,$$

por lo tanto, la conclusión del Teorema 3.5 (o más general, el Teorema 3.6) es válida. En resumen, si la solución del sistema (4.6) es asintóticamente estable, entonces la solución cero del sistema (4.4) también lo es. Por lo tanto, nos centraremos en el estudio de la estabilidad de la solución cero del sistema (4.6). Buscando una solución de (4.6) de la forma

$$\begin{cases} y_1(\tau) = (1 + \mu a(\tau))u_1(\tau) \\ y_2(\tau) = \mu b(\tau)u_1(\tau) + \mu c(\tau)u_2(\tau), \end{cases}$$

que en su forma matricial se expresa como

$$y(\tau) = \begin{pmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\mu a(\tau) & 0 \\ \mu b(\tau) & \mu c(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{pmatrix} = R(\tau,\mu)u(\tau), \qquad (4.7)$$

donde la función vectorial $u(\tau)$ satisface el sistema

$$\frac{du}{d\tau} = \widetilde{U}(\tau,\mu)u.$$

Demostremos que existen funciones $2\pi-$periódicas $a(\tau), b(\tau), c(\tau)$ tales que $\widetilde{U}(\tau,\mu) = \mu U(\tau,\mu)$ con ello el sistema anterior se puede reescribir como

$$\frac{du}{d\tau} = \mu U(\tau,\mu)u. \qquad (4.8)$$

En efecto, despejando $u(\tau)$ de (4.7) y derivando

$$\begin{aligned} u'(\tau) &= \left(R^{-1}(\tau,\mu)y(\tau)\right)' \\ &= \left(R^{-1}(\tau,\mu)\right)' y(\tau) + R^{-1}(\tau,\mu)y'(\tau) \\ &= \left(R^{-1}(\tau,\mu)\right)' R(\tau,\mu)u(\tau) + R^{-1}(\tau,\mu)A(\tau)y(\tau) \\ &= \left(R^{-1}(\tau,\mu)\right)' R(\tau,\mu)u(\tau) + R^{-1}(\tau,\mu)A(\tau)R(\tau)u(\tau) \\ &= \left(\left(R^{-1}(\tau,\mu)\right)' R(\tau,\mu) + R^{-1}(\tau,\mu)A(\tau)R(\tau)\right) u(\tau) \\ &= \widetilde{U}(\tau,\mu)u(\tau), \end{aligned}$$

donde las entradas de $\widetilde{U}(\tau,\mu)$ tienen la forma

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{11}(\tau,\mu) = \dfrac{\mu(b(\tau)-a'(\tau))}{(1+\mu a(\tau))} \\ \widetilde{u}_{12}(\tau,\mu) = \dfrac{\mu c(\tau)}{(1+\mu a(\tau))} \\ \widetilde{u}_{21}(\tau,\mu) = \dfrac{\mu}{c(\tau)}\left(k^2 - a(\tau)\operatorname{sen}\tau - 2\sigma b(\tau) + \mu k^2 a(\tau) - \dfrac{b(\tau)(b(\tau)-a'(\tau))}{(1+\mu a(\tau))}\right) \\ \qquad\qquad -\dfrac{b'(\tau)+\operatorname{sen}\tau}{c(\tau)} \\ \widetilde{u}_{22}(\tau,\mu) = -\mu\left(\dfrac{b(\tau)}{(1+\mu a(\tau))} + 2\sigma\right) - \dfrac{c'(\tau)}{c(\tau)}. \end{cases}$$

Para que cada una de las entradas contenga μ o sus potencias exigimos que $b'(\tau) + \operatorname{sen}\tau = 0$ y $c'(\tau) = 0$, de donde podemos considerar $b(\tau) = \cos\tau$ y $c(\tau) = 1$, además es posible simplificar las entradas de $\widetilde{U}(\tau,\mu)$ eligiendo $b(\tau) - a'(\tau) = 0$; más precisamente $a(\tau) = \operatorname{sen}\tau$.
Finalmente en (4.8) se tiene

$$U(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1+\mu\operatorname{sen}\tau)} \\ k^2 - \operatorname{sen}^2\tau - 2\sigma\cos\tau + \mu k^2 \operatorname{sen}\tau & -\frac{\cos\tau}{(1+\mu\operatorname{sen}\tau)} - 2\sigma \end{pmatrix}.$$

Probemos primero que la solución cero del sistema (4.8) es asintóticamente estable, lo cual se puede obtener de las afirmaciones establecidas en los artículos [4, 5]. Luego probaremos que la solución cero de (4.6) también es asintóticamente estable. Usando la representación

$$\frac{1}{1+\mu\operatorname{sen}\tau} = 1 - \mu sen\tau + \frac{\mu^2\operatorname{sen}^2\tau}{1+\mu sen\tau},$$

se reescribe $U(\tau,\mu)$ como

$$\begin{aligned} U(\tau,\mu) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 - 1/2 & -2\sigma \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -\mu\operatorname{sen}\tau \\ 1/2 - \operatorname{sen}^2\tau + k^2\operatorname{sen}\tau - \sigma\cos\tau & (\mu\operatorname{sen}\tau - 1)\cos\tau \end{pmatrix} \\ &\quad + \mu^2 \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\operatorname{sen}^2\tau}{1+\mu\operatorname{sen}\tau} \\ 0 & -\dfrac{\cos\tau\ \operatorname{sen}^2\tau}{1+\mu\operatorname{sen}\tau} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$U(\tau,\mu) = U_1 + U_2(\tau,\mu) + \mu^2 U_3(\tau,\mu),$$

donde

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k^2 - 1/2 & -2\sigma \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mu\operatorname{sen}\tau \\ 1/2 - \operatorname{sen}^2\tau + k^2\operatorname{sen}\tau - \sigma\cos\tau & (\mu\operatorname{sen}\tau - 1)\cos\tau \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\operatorname{sen}^2 \tau}{1+\mu s \operatorname{sen}\tau} \\ 0 & -\dfrac{\cos\tau \operatorname{sen}^2\tau}{1+\mu \operatorname{sen}\tau} \end{pmatrix}.$$

Si

$$k^2 < 1/2, \tag{4.9}$$

entonces $\operatorname{Re}(\lambda(U_1)) < 0$. Además, se verifica que

$$\int_0^{2\pi} U_2(\tau,\mu)d\tau = 0.$$

Afirmación: Para un pequeño μ, la solución cero del sistema

$$\frac{du}{d\tau} = \mu[U_1 + U_2(\tau,\mu)]u, \tag{4.10}$$

es asintóticamente estable, se puede ver las diversas pruebas en [3–5]. La afirmación anterior se demostrará aplicando el Teorema 3.3 y empleando algunos procedimientos de [4, Pág. 287].

Sea $H_1 = H_1^* > 0$ una solución de la ecuación diferencial de Lyapunov

$$H_1U_1 + U_1^*H_1 = -I. \tag{4.11}$$

Luego, definimos (ver [4]) la matriz

$$H(\tau,\mu) = \frac{1}{\mu}H_1 - H_2(\tau,\mu), \tag{4.12}$$

donde

$$H_2(\tau,\mu) = H_1\int_0^{\tau} U_2(s,\mu)\,ds + \int_0^{\tau} U_2^*(s,\mu)\,dsH_1.$$

Se puede demostrar que $H(\tau,\mu)$ es solución del siguiente problema con valores en la frontera de la forma (3.20):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}H + H[\mu(U_1+U_2(\tau,\mu))] + [\mu(U_1+U_2(\tau,\mu))]^*H &= -C(\tau,\mu), \quad 0 \le \tau \le 2\pi, \\ H(0) &= H(2\pi) \end{cases}$$

con

$$C(\tau,\mu) = I + H_2(\tau,\mu)[\mu(U_1 + U_2(\tau,\mu))] + [\mu(U_1 + U_2(\tau,\mu))]^* H_2(\tau,\mu).$$

Lo cual nos sugiere aplicar el Teorema 3.3, pero primero debemos garantizar que $H(\tau,\mu) = H^*(\tau,\mu) > 0$ y $C(\tau,\mu) = C^*(\tau,\mu) > 0$ lo cual se conseguirá imponiendo restricciones al parámetro μ. De (4.11), por la Proposición 3.1, H_1 tiene la forma

$$H_1 = \int_0^\infty e^{sU_1^*} e^{sU_1} ds.$$

Luego, aplicando el algoritmo de Putzer (véase [1, pág. 73]), H_1 adopta la forma

$$H_1 = \frac{1}{8\sigma(1-2k^2)} \begin{pmatrix} (3-2k^2)(1-2k^2) + 16\sigma^2 & 8\sigma \\ 8\sigma & 2(3-2k^2) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que $h_1 = \lambda_{\text{mín}}(H_1) > 0$ es el menor autovalor de la matriz H_1. Sean

$$\beta_1 = \sup_{\tau\in[0,\pi],\ \mu\in(0,1)} \|H_2(\tau,\mu)\|, \qquad \beta_2 = \sup_{\tau\in[0,\pi],\ \mu\in(0,1)} \|H_2(\tau,\mu)(U_1 + U_2(\tau,\mu))\|,$$

y

$$\mu_1 = \frac{h_1}{\beta_1}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{2\beta_2}.$$

De la definición de H se deduce que $H(\tau,\mu) = H^*(\tau,\mu)$. Probemos que $H(\tau,\mu) > 0$

$$\begin{aligned} \langle H(\tau,\mu)y, y\rangle &= \frac{1}{\mu}\langle H_1 y, y\rangle - \langle H_2(\tau,\mu)y, y\rangle \\ &\geq \frac{h_1}{\mu}\|y\|^2 - \|H_2(\tau,\mu)\|\|y\|^2 \\ &\geq \frac{h_1}{\mu}\|y\|^2 - \sup_{\tau\in[0,\pi],\,\mu\in(0,1)} \|H_2(\tau,\mu)\|\|y\|^2 \\ &\geq \left(\frac{h_1}{\mu} - \beta_1\right)\|y\|^2. \end{aligned}$$

Entonces $H(\tau,\mu) > 0$ si

$$\frac{h_1}{\mu} - \beta_1 > 0,$$

es decir,

$$\mu < \frac{h_1}{\beta_1} = \mu_1.$$

De forma similar para $C(\tau, \mu)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\langle C(\tau,\mu)y, y\rangle &= \|y\|^2 + \mu \langle H_2(\tau,\mu)[U_1 + U_2(\tau,\mu)]y, y\rangle \\
&\quad +\mu \langle [U_1 + U_2(\tau,\mu)]^* H_2(\tau,\mu)y, y\rangle \\
&= \|y\|^2 + \mu \langle H_2(\tau,\mu)[U_1 + U_2(\tau,\mu)]y, y\rangle \\
&\quad +\mu \langle y, H_2(\tau,\mu)[U_1 + U_2(\tau,\mu)]y\rangle \\
&= \|y\|^2 + 2\mu \mathrm{Re} \langle H_2(\tau,\mu)[U_1 + U_2(\tau,\mu)]y, y\rangle ,
\end{aligned}$$

acotando

$$\begin{aligned}
\langle C(\tau,\mu)y, y\rangle &\geq \|y\|^2 - 2\mu \left(\sup_{\tau\in[0,2\pi],\mu\in(0,1)} \|H_2(\tau,\mu)(U_1 + U_2(\tau,\mu))\| \right) \|y\|^2 \\
&\geq (1 - 2\mu\beta_2)\|y\|^2.
\end{aligned}$$

Entonces $C(\tau, \mu) > 0$, si

$$\mu < \frac{1}{2\beta_2} = \mu_2.$$

Así, la solución cero del sistema (4.10) es asintóticamente estable si $\mu < \text{mín}\{\mu_1, \mu_2\}$. Observe que, para (4.8) , la matriz $H(\tau, \mu)$ definida por (4.12) es una solución del problema de valores en la frontera de la forma (3.20):

$$\begin{cases}
\dfrac{d}{d\tau}H + H[\mu U(\tau,\mu)] + [\mu U(\tau,\mu)]^* H &= -C(\tau,\mu), \qquad 0 \leq \tau \leq 2\pi, \\
H(0) &= H(2\pi)
\end{cases}$$

donde

$$C(\tau,\mu) = I + \mu H_2(\tau,\mu)U(\tau,\mu) + \mu U^*(\tau,\mu)H_2(\tau,\mu) - \mu^2 H_1 U_3(\tau,\mu) - \mu^2 U_3^*(\tau,\mu)H_1. \tag{4.13}$$

De lo anterior se sabe que $H(\tau, \mu) = H^*(\tau, \mu) > 0$. Solo falta demostrar que

$C(\tau,\mu) = C^*(\tau,\mu) > 0$ para ello acotamos inferiormente

$$\begin{aligned}\langle C(\tau,\mu)y, y\rangle &= \|y\|^2 + \mu\langle H_2(\tau,\mu)U(\tau,\mu)y, y\rangle + \mu\langle y, H_2(\tau,\mu)U(\tau,\mu)y\rangle \\ &\quad -\mu^2\langle H_1U_3(\tau,\mu)y, y\rangle - \mu^2\langle y, H_1U_3(\tau,\mu)y\rangle \\ &= \|y\|^2 + 2\mu\mathrm{Re}\langle H_2(\tau,\mu)U(\tau,\mu)y, y\rangle - 2\mu^2\mathrm{Re}\langle H_1U_3(\tau,\mu)y, y\rangle \\ &= \|y\|^2 + 2\mu\mathrm{Re}\langle H_2(\tau,\mu)[U_1 + U_2(\tau,\mu)]y, y\rangle \\ &\quad +2\mu^3\mathrm{Re}\langle H_2(\tau,\mu)U_3(\tau,\mu)y, y\rangle - 2\mu^2\mathrm{Re}\langle H_1U_3(\tau,\mu)y, y\rangle .\end{aligned}$$

Como

$$\|U_3(\tau,\mu)\| < \frac{1}{1-\mu}, \qquad \text{para } \mu < 1,$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\langle C(\tau,\mu)y, y\rangle &\geq \|y\|^2 - 2\mu\beta_2\|y\|^2 - 2\mu^3\beta_1\frac{1}{1-\mu}\|y\|^2 - 2\mu^2\|H_1\|\frac{1}{1-\mu}\|y\|^2 \\ &\geq \left[1 - 2\mu\beta_2 - 2\frac{\mu^2}{1-\mu}(\|H_1\| + \mu\beta_1)\right]\|y\|^2.\end{aligned}$$

Sea

$$f(\mu) = 1 - 2\mu\beta_2 - 2\frac{\mu^2}{1-\mu}(\|H_1\| + \mu\beta_1).$$

Es claro que $f(\mu)$ es decreciente en $[0,1)$, dado que $f'(\mu) < 0$. Como $0 \in f([0,1)) = [1,-\infty)$ se sigue que existe $\mu_0 \in [0,1)$ tal que $f(\mu_0) = 0$. En consecuencia, existe $\mu_3 < \mu_0 < 1$ tal que $f(\mu_3) > 0$, es decir,

$$1 - 2\mu_3\beta_2 - 2\frac{\mu_3^2}{1-\mu_3}(\|H_1\| + \mu_3\beta_1) > 0.$$

Dado que la función $f(\mu)$ es decreciente, se deduce que para todo $\mu < \mu_3$ se cumple $f(\mu) > 0$, y en consecuencia $C(\tau,\mu) > 0$.

Por lo tanto, para $\mu < m = \text{mín}\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ aplicando el Teorema 3.3 la solución cero del sistema (4.8) es asintóticamente estable.

Finalmente, probemos que la solución cero del sistema (4.6) también es asintóticamente estable. En efecto, definimos la matriz

$$\widetilde{H}(\tau,\mu) = T^*(\tau,\mu)H(\tau,\mu)T(\tau,\mu),$$

donde

$$T(\tau,\mu) = R^{-1}(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+\mu\,\mathrm{sen}\,\tau} & 0 \\ -\dfrac{\cos\tau}{1+\mu\,\mathrm{sen}\,\tau} & \dfrac{1}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Se verifica que $\widetilde{H}(\tau,\mu)$ es solución del siguiente problema de valores en la frontera de la forma (3.20) para el sistema (4.6):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\tau}\widetilde{H} + \widetilde{H}A(\tau) + A^*(\tau)\widetilde{H} &= -\widetilde{C}(\tau,\mu), \qquad 0 \le \tau \le 2\pi, \\ \widetilde{H}(0) &= \widetilde{H}(2\pi) \end{cases}$$

donde

$$\widetilde{C}(\tau,\mu) = T^*(\tau,u)C(\tau,\mu)T(\tau,\mu),$$

y la matriz $C(\tau,\mu)$ está definida por (4.13). Además al ser $H(\tau,\mu) > 0$ y $T(\tau,\mu)$ una matriz no singular se tiene que $\widetilde{H}(\tau,\mu) > 0$ lo mismo sucede con $\widetilde{C}(\tau,\mu)$, es decir $\widetilde{C}(\tau,\mu) > 0$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 3.3, se concluye que la solución cero del sistema (4.6) es asintóticamente estable. Luego, en virtud del Teorema 3.6, se obtiene que la solución cero del sistema (4.4) es asintóticamente estable. Además es posible encontrar su dominio de atracción y la tasa de disminución de las soluciones de (4.4) para las condiciones iniciales correspondientes.

Volviendo a las variables iniciales, a partir de los argumentos anteriores, obtenemos los requisitos sobre los parámetros a y w bajo los cuales el estado de equilibrio $\theta(t) = \pi$ de la ecuación (4.1) es asintóticamente estable. En efecto, como

$$k^2 = \left(\frac{\sqrt{gl}}{wa}\right)^2 < \frac{1}{2},$$

se deduce que

$$\frac{\sqrt{2gl}}{a} < w.$$

Además, como $\mu = \frac{a}{l}$ y $\mu < m$, se tiene que

$$a < ml.$$

Además, utilizando el dominio de atracción de la solución cero de (4.4), podemos indicar el ángulo inicial de desviación del péndulo desde la posición vertical superior,

la velocidad angular inicial para la cual el péndulo permanece cerca de la posición superior. Asimismo, la tasa de decaimiento de las oscilaciones del péndulo cerca del estado de equilibrio superior viene dada por

$$\theta_1 = \frac{\omega}{2T}\int_0^T \frac{\lambda_{\text{mín}}(\widetilde{C}(s,\mu))}{\|\widetilde{H}(s,\mu)\|}ds,$$

acotando inferiormente la integral anterior, se obtiene una estimación explícita de la tasa de decaimiento:

$$\frac{\omega}{2}\left(\frac{2}{(1-\mu)^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)^{-1}\left(1+2\mu+2\mu^2\right)^{-1}\left(\frac{1-2\mu\beta_2-2\frac{\mu^2}{1-\mu}(\|H_1\|+\mu\beta_1)}{\|H_1\|+\mu\beta_1}\mu\right).$$

Conclusiones

En el presente trabajo se analizaron ecuaciones de forma:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y), \quad t \geq 0, \tag{$\mathcal{P}$}$$

donde $A(t)$ y $\varphi(t, y)$ son los mismas mencionadas en la introducción.

A continuación se mencionarán los resultados más importantes obtenidos en este trabajo, así como también los posibles proyectos a futuro.

i) Bajo ciertas condiciones impuestas sobre $A(t), H(t), \varphi(t, y)$ se consiguió la estabilidad asintótica de la solución cero del problema $(\mathcal{P})$.

ii) Se obtuvo un método para el análisis de la estabilidad asintótica, fundamentado en la ecuación diferencial de Lyapunov, el cual es una alternativa a los métodos espectrales.

iii) Se obtuvo estimaciones para la tasa de decaimiento de las soluciones en el infinito en función de la integral de la inversa de la norma de $H(t)$, es decir,

$$\theta_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{\|H(s)\|} ds,$$

donde $H(t)$ es una solución periódica de la ecuación diferencial de Lyapunov.

iv) Adicionando condiciones a μ en el sistema $\frac{dy}{dt} = A(t)y + \mu\varphi(t, y)$ se consiguió la estabilidad asintótica de la solución cero.

v) Se demostró la estabilidad del péndulo invertido, conocido como péndulo de Kapitza, en base a los teoremas demostrados y algunos resultados de los artículos [4, 5].

vi) Un proyecto a futuro, podría ser el estudio de la estabilidad asintótica de la solución cero de las ecuaciones diferenciales de retardo cuasilineales con coeficientes periódicos en los términos lineales de la forma:

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau > 0,$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ son matrices continuas de dimensión $(n \times n)$, $T-$periódicas, y F una función vectorial real que satisface la condición de Lipschitz y además

$$\|F(t, u, v)\| \leq q\|u\|^{1+w}, \quad \text{donde } \ q, w \ \text{ son constantes.}$$

Este estudio vendría a ser una extensión natural de este trabajo de investigación y podría desarrollarse a partir del artículo [7] de Demidenko.

vii) Asimismo, se podría también analizar la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales de retardo que describe la propagación de la influenza aviar entre aves que migran entre dos territorios. Este estudio constituiría una extensión y aplicación práctica (concreta) del presente trabajo, y podría desarrollarse a partir del artículo [17].

Bibliografía

[1] Benazic, R. (2007). Tópicos de ecuaciones diferenciales ordinarias. Uni, Perú.

[2] Bogolyubov, N.N., & Mitropolskii, Y.A. (1961). Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations.

[3] Daletskiy, Yu. L., & Krein, M. G. (1970). *Stability of Solutions to Differential Equations in Banach Space* [in Russian]. Nauka, Moscow.

[4] Demidenko, G. V., & Matveeva, I. I. (2001). On stability of solutions to linear systems with periodic coefficients. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 42(2), 332–348.

[5] Demidenko, G. V., & Matveeva, I. I. (2002). On asymptotic stability of solutions to nonlinear systems of differential equations with periodic coefficients. *Selcuk J. Appl. Math.*, 3(2), 37–48.

[6] Demidenko, G. V., & Matveeva, I. I. (2004). On stability of solutions to quasilinear periodic systems of differential equations. *Siberian Mathematical Journal*, 45, 1041-1052.

[7] Demidenko, G. V., & Matveeva, I. I. (2007). Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms. Siberian Mathematical Journal, 48(5), 824-836.

[8] Faddeev, D. K., & Faddeeva, V. N. (1963). *Computational Methods of Linear Algebra* [in Russian]. Fizmatgiz, Moscow; Leningrad.

[9] Gajic, Z., & Qureshi, M. T. J. (1995). Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control. Elsevier.

[10] Godunov, S. K. (1997). Ordinary differential equations with constant coefficient (Vol. 169). American Mathematical Society.

[11] Godunov, S. K. (1997). Modern Aspects of Linear Algebra. Nauchnaya Kniga, Novosibirsk.

[12] Hale, J. K. (1980). Ordinary Differential Equations. Robert E. Krieger Pub. Co.

[13] Horn, R. A., & Johnson, C. R. (2012). Matrix analysis. Cambridge University Press.

[14] Kapitza, L. P. (1951). Dynamical stability of a pendulum with the oscillating pivot point. *Zh. Eksper. Teoret. Fiz.*, 21(5), 588–597.

[15] Malkin, I. G. (1966). *A Theory of Stability of Motion* [in Russian]. Nauka, Moscow.

[16] Megan, M. (1978). On controllability, stability and the Lyapunov differential equation for linear control systems. Glas. Mat. Ser. III, 13(1), 183–198.

[17] Skvortsova, M. A. (2016). Asymptotic properties of solutions to a system describing the spread of avian influenza. Siberian Electronic Mathematical Reports, 13(0), 782-798.

[18] Wilkinson, J. H. (1988). The algebraic eigenvalue problem. Clarendon Press / Oxford University Press.

[19] Yakubovich, V. A., & Starzhinski, V. M. (1975). Linear differential equations with periodic coefficients (Vol. 1). John Wiley.