Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado
Facultad de Ciencias Matemáticas
Unidad de Posgrado

Existencia de soluciones de una ecuación no local con el operador (p1(x), p2(x))-Laplaciano y dependencia del gradiente

TESIS

Para optar el Grado Académico de Doctor en Matemática Pura

AUTOR

Eduardo Valdemar TRUJILLO FLORES

ASESOR

Dr. Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2020



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Trujillo, E. (2020). *Existencia de soluciones de una ecuación no local con el operador (p1(x), p2(x))-Laplaciano y dependencia del gradiente*. [Tesis de doctorado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Eduardo Valdemar Trujillo Flores
DNI	08660272
URL de ORCID	https://orcid.org/**0000-0003-3087-6604**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Eugenio Cabanillas Lapa
DNI	06445705
URL de ORCID	https://orcid.org/**0000-0002-8941-4394**
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis Funcional y Ecuaciones Diferenciales
Grupo de investigación	Ecuación de Kirchhoff- ECUKI
Agencia de financiamiento	AUTOFINANCIAMIENTO
Ubicación geográfica de la investigación	PERU, Departamento de Lima, provincia de Lima, Distrito de San Martin de Porres Latitud: -12.001558 Longitud: -77.085340
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2018
URL de disciplinas OCDE	http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTOR EN MATEMÁTICA PURA

Siendo las, 17:30 horas del día viernes dieciséis de octubre del dos mil veinte, en la sala virtual https://meet.google.com/tqr.ebzw-nvt, el Jurado de Tesis conformado por los siguientes docentes:

PRESIDENTE:	Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
MIEMBRO:	Dr. José Edmundo Esparta Rodríguez
MIEMBRO:	Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
ASESOR:	Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: « EXISTENCIA DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN NO LOCAL CON EL OPERADOR (P1(X), P2(X)) – LAPLACIANO Y DEPENDENCIA DEL GRADIENTE» presentada por el MAGISTER EDUARDO VALDEMAR TRUJILLO FLORES para optar el Grado Académico de DOCTOR EN MATEMÁTICA PURA.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por el graduando; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido el Bachiller Eduardo Valdemar Trujillo Flores el calificativo de MUY BUENO (Dieciocho).

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de DOCTOR EN MATEMÁTICA PURA** al **Magister EDUARDO VALDEMAR TRUJILLO FLORES**.

Siendo las 18:30 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. José Edmundo Esparta Rodríguez
MIEMBRO

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
PRESIDENTE

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
ASESOR

Existencia de soluciones de una ecuación no local con el operador $(p_1(x), p_2(x))$-Laplaciano y dependencia del gradiente.

Eduardo Valdemar TRUJILLO FLORES

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Grado Academico de Doctor en Matematica Pura.

Aprobado por:

.....
(Nombre Docente)
Presidente

.....
(Nombre Docente)
Miembro

.....
Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro Asesor

LIMA - PERÚ

2020

FICHA CATALOGRÁFICA

Eduardo Valdemar TRUJILLO FLORES

Existencia de soluciones de una ecuación no local con el operador $(p_1(x), p_2(x))$-Laplaciano y dependencia del gradiente. (Lima) 2020.
xii, 74 pp, 29.7 cm, (UNMSM, Doctor, Matemática Pura 2020).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Matemática Pura UNMSM/FCM II. Grado (Serie).

Dedicatoria

La presente tesis dedico en primer lugar a **Dios**,
A mi esposa **Dora**,
A mis hijos: **Josué, Elí y Daniel**
a mis nietos; A mi hermano **Rogelio**, *su esposa* **Rita**
A mis sobrinos: **Esther** *y* **David**
Asimismo a toda persona
nutridos con un espíritu de superación y guiados por Dios,
sean iluminados sus caminos para ser
útiles a su prójimo.

Agradecimientos

Mi agradecimiento infinito en primer lugar a la **Facultad de Ciencias Matemáticas** de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, por haberme abierto sus puertas académicas para poder realizar mis estudios de Doctorado en Matemática Pura; asimismo agradezco a cada uno de mis profesores que supieron transmitirme sus conocimientos y experiencias.

Agradezco de una manera muy especial al **Dr. Eugenio Cabanillas Lapa** por haberme dirigido, por su calidez, benevolencia y generosidad que tantas veces tuvo conmigo, por el entusiasmo y optimismo que me brindó durante todo el proceso, por su amabilidad y buena disposición en el desempeño de sus funciones como asesor de la presente tesis.

Doy gracias a mis amigos y colegas de trabajo **Félix León Barboza** y **Carlos Tome Ramos** quienes me incentivaron en todo tiempo aún en los momentos difíciles que pasamos en la universidad, como también de manera espiritual con sus oraciones cada uno de acuerdo a su fe, además debo expresar que tuvieron plena confianza en mi persona durante todo el proceso de mis estudios de doctorado.

Doy gracias a mi familia

A mi esposa **Dora Antonieta Ulloa Quevedo** por todo su amor, ánimo, oración y apoyo que me brindó cada día, por su comprensión en mis horas de ausencia, dándome su fortaleza para perseverar, avanzar y culminar esta investigación. Gracias mi amor.

A mis hijos: **Josué**, **Elí** y **Daniel** por su compañía en mis horas de amanecida, dándome apoyo y fortaleza en los días más cansados, por sus llamadas a mi celular para transmitirme ánimo, por su comprensión en los momentos que estaba ausente en casa al encontrarme decidido en conseguir un grado académico más. Ustedes son el mejor regalo que Dios me ha concedido convirtiéndose en el trípode de mi inspiración.

"Por el camino de la sabiduría te he encaminado,

y por veredas derechas te he hecho andar.

Cuando anduvieres,

no se estrecharán tus pasos,

y si corrieres,

no tropezarás."

Proverbios 4:11-12 RVR 1960.

RESUMEN

Existencia de soluciones de una ecuación no local con el operador $(\,p_1(x), p_2(x)\,)$-Laplaciano y dependencia del gradiente.

Eduardo Valdemar TRUJILLO FLORES

Abril - 2020

Orientador: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Grado obtenido: Magister en Matemática Pura

En este trabajo investigamos la existencia de soluciones débiles para el problema

$$-M_1(L_1(u))div(|\,\nabla u\,|^{p_1(x)-2}\,\nabla u) - M_2(L_2(u))div(|\,\nabla u\,|^{p_2(x)-2}\,\nabla u)$$

$$= f(x, u, \nabla u\,)\,|\,u\,|^{t(x)}_{s(x)} \text{ en } \Omega$$

$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

donde $L_i(u) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p_i(x)}\,|\,\nabla u\,|^{p_i(x)}\,dx$, Ω es un abierto, acotado y regular de $\mathbb{R}^n$; M_i , $i = 1, 2$ y f funciones son dadas.
Establecemos nuestros resultados usando la teoría del grado para operadores del tipo (S_+) en el contexto de las espacios de Sobolev con exponente variable.

Palabras clave: Operador del tipo (S_+), Espacio de Sobolev con exponente variable, Teoría del grado, Término gradiente.

ABSTRACT

Existence of Solutions of an equation nonlocal with the operator $(\,p_1(x), p_2(x)\,)$-Laplacian and dependence on the gradient

Eduardo Valdemar TRUJILLO FLORES

April - 2020

Advisor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Obtained Title: Magister en Matemática Pura

In this work we investigate the existence of solutions for the problem

$$-M_1(L_1(u))div(|\,\nabla u\,|^{p_1(x)-2}\,\nabla u) - M_2(L_2(u))div(|\,\nabla u\,|^{p_2(x)-2}\,\nabla u)$$

$$= f(x, u, \nabla u\,)\,|\,u\,|^{t(x)}_{s(x)} \text{ in } \Omega$$

$$u = 0 \text{ in } \partial\Omega$$

where $L_i(u) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p_i(x)}\,|\,\nabla u\,|^{p_i(x)}\,dx$, Ω is a smooth bounded domain of $\mathbb{R}^n$; M_i , $i = 1, 2$ and f are given functions.
We establish our results by using the degree theory for operator of (S_+) type in the framework of variable exponent sobre Sobolev spaces.

Keywords: Operator of (S_+) type, Variable exponent Sobolev space, Degree theory, Gradient term.

Índice general

Índice de notaciones 1
Introdución 3

1. Preliminares **7**
1.1. Los espacios $L^{p(x)}(\Omega)$ y $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 7
1.2. Propiedades del espacio $L^{p(x)}(\Omega)$ 9
1.3. El espacio $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 10
1.4. Inmersiones 11

2. Operadores de tipo monótono **13**
2.1. Teoría abstracta 13
2.2. Modos de continuidad 14
2.3. Operadores monótonos 15
2.4. Operadores Pseudomonótonos 25

3. Existencia de soluciones de una ecuación no local con el operador $(p_1(x), p_2(x))$-Laplaciano y dependencia del gradiente. **34**
3.1. Teoría de grado 34
3.2. Existencia de soluciones para la ecuación no local. 39
3.3. Preliminares 42
3.4. El resultado principal 54
Trabajos futuros 60
Conclusión 61
Apéndice 62
Bibliografía 67

Índice de Notaciones

- En esta tesis C y C_i denotan constantes positivas genéricas, las cuales pueden variar de línea en línea.
- $\mathbb{R}^N$ denota el espacio es liviano N-dimensional;
- $B_r(x)$ es la bola abierta de centro x y radio $r > 0$;
- Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto Lebesgue medible, entonces $|\Omega|$ denota la medida de Lebesgue de $\Omega|$;
- La expresión q.t.p. es una abreviación para **casi todo punto**;
- $supp(u)$ denota el soporte de la función u;
- El símbolo $\longrightarrow$ significa convergencia en norma;
- El símbolo $\rightharpoonup$ significa convergencia débil;
- $X \hookrightarrow Y$ denota que X está inmerso continuamente en Y;
- X^* es el dual topológico de X. (o también X' dual topológico de X)

Espacio de Funciones:

- $\mathcal{C}(\Omega)$ denota el espacio de las funciones continuas;
- $\mathcal{C}^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\Omega); u \text{ es k-veces continuamente diferenciable}\}$;
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geqslant 1} \mathcal{C}^k(\Omega)$;
- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega); supp(u) \subset \Omega \text{ es Compacto}\}$;

- $\mathrm{L}^h(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible } ;\ \int_\Omega |u|^h < \infty\}$ dotado de la Norma

$$|u|_h = \left(\int_\Omega |u|^h \right)^{\frac{1}{h}};$$

- $\mathrm{L}^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible } ;\ \sup_{\Omega} ess|u| < \infty\}$ dotado de la Norma

$$|u|_\infty = \sup_{\Omega} ess|u|;$$

- $\mathrm{L}^\infty_+(\Omega) = \{h \in \mathrm{L}^\infty(\Omega) \ ;\ h \geqslant 1\}$
- Si $h \in \mathrm{L}^\infty_+(\Omega)$, definimos

$$\mathrm{L}^{h(x)}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible } ;\ \int_\Omega |u|^{h(x)} < \infty\}$$

dotado de la norma

$$|u|_{h(x)} = \text{ínf}\Big\{\lambda > 0 \ ;\ \int_\Omega \Big|\frac{u}{\lambda}\Big|^{h(x)} dx \leqslant 1\Big\};$$

- Si $h \in \mathrm{L}^\infty_+(\Omega)$, definimos

$$W^{1,h(x)}(\Omega) = \Big\{u \in \mathrm{L}^{h(x)}(\Omega) \ ;\ |\nabla u| \in \mathrm{L}^{h(x)}(\mathbb{R}^N)\Big\}$$

dotado de la Norma

$$\|u\| = \|\nabla u\|_{h(x)} + \|u\|_{h(x)}$$

- $j_f(x)$ es el jacobiano de f en x.
- $d(f, \Omega, y)$ denota la aplicación grado de f respecto a Ω en el punto y.

Introducción

El estudio de problemas no lineales descritos por operadores diferenciales con exponente variable es un tópico sumamente interesante que ha recibido particular atención por los investigadores matemáticos en los últimos años. El interés en dicho estudio está motivado por las múltiples aplicaciones que tienen en procesos físicos y mecánicos, elasticidad no lineal, restauración de imagenes, fluidos electrorreológicos (fluidos "inteligentes"), etc .

A nuestro conocimiento, el primer resultado sobre fluidos electrorreológico fue debido a Weillir Wilnslow en 1949. El percibió que en estos fluidos (por ejemplo polimetacrilato de litio) la viscosidad es inversamente proporcional a la fuerza del campo eléctrico; este fenómeno es denominado el efecto Winslow [72].

Así la viscosidad de estos fluidos depende del campo eléctrico aplicado. Un modelo específico para éstos fluidos es dado en el libro de Ruzicka [65].
Aquí se presenta el modelo matemático que describe el movimiento de un fluido electrorreológico incompresible, homogéneo e isotérmico, dado por las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial t} + divS(u) + (u\nabla)u + \nabla\Pi = f$$

dónde $u : \mathbb{R}^{3+1} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es la velocidad del fluido en un punto del espacio–tiempo, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ es el operador gradiente,
$\Pi : \mathbb{R}^{3+1} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es la presión, $f : \mathbb{R}^{3+1} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ representa las fuerzas

externas, y el tensor de la tensión $S : W^{1,1}_{loc} \longrightarrow \mathbb{R}^{3+3}$ es de la forma

$$S(u)(x) = \mu(x)\left(1 + |Du(x)|^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} Du(x)$$

dónde $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^2)$ es la parte simétrica del gradiente de u
las ecuaciones del tipo (p,q)-Lplaciano resultan al estudiar el estado estacionario de un sistema general de reacción - difusión de la forma

$$u_t = div(k(u)\nabla u) + f(x, u, \nabla u) \tag{1}$$

donde $k(u) = |\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{q-2}$. Este sistema tiene una diversidad de aplicaciones en Física y Ciencias Aplicadas, cómo diseño de reacciones químicas [3], biofísica [45] y físicas de plasmas [71]. En química y biología, $f(x, u, \nabla u) \equiv f(x, u)$ es un polinomio en u con coeficientes variables [26], [48].

En particular, el estado estacionario asociado a (1) es

$$-\Delta_p u - \Delta_q u = f(x, u, \nabla u) \tag{2}$$

Observe aquí que la dependencia del gradiente de u de la fuerza externa f genera dificultades técnicas para obtener soluciones; en particular los métodos variacionales usuales del (tipo de teorema del paso de la montaña, Principio de Ekeland etc) no pueden aplicarse directamente al menos.
Por otro lado las ecuaciones del tipo Kirchhoff en espacios de Sobolev con exponente variable son motivos de intensos estudios actualmente. El trabajo de Lions [57] ha sido completamente generalizado dando lugar a la relativamente reciente investigación de Autori, Pucci y Salvatori [6] quienes estudiaron una ecuación hiperbólica del tipo Kirchhoff que involucra el $p(x)$-Laplaciano de la forma.

$$u_{tt} - M\left(\int_\Omega \frac{1}{p(x)} \|\nabla u\|^{p(x)}\, dx\right) \Delta_{p(x)} u + Q(t, x, u, u_t) + f(x, u) = 0$$

Este tipo de problemas y sus procesos estacionarios asociados ha recibido

considerable atención por diversos autores, ver [4, 25, 33].
Existen muy pocos trabajos de investigación abordando la generalización natural a espacios de Sobolev con exponente variable, con operadores del tipo Kirchhoff de los problemas elípticos asociado a (1): En este sentido el objetivo fundamental de esta tesis es mostrar la existencia de solución débil de la ecuación no local con el operador $(p_1(x), p_2(x))$-Laplaciano con términos de fuerza externa dependiendo del gradiente de la ecuación:

$$\left\| \begin{array}{l} -M_1(L_1(u))div\left(\|\nabla u\|^{p_1(x)-2}\nabla u\right) - M_2(L_2(u))div\left(\|\nabla u\|^{p_2(x)-2}\nabla u\right) \\ \qquad = f(x,u,\nabla u)\,\|u\|_{s(x)}^{t(x)} \quad \text{en } \Omega \\ \qquad u = 0, \quad \text{en } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3}$$

Como se mencionó líneas arriba, al depender la fuerza externa f del gradiente, limita el uso directo de métodos variacionales, por lo que para obtener la solución del problema (3) implementamos un método topológico que consiste en una generalización de la teoría de grado de Leray-Schauder [54] para operadores compactos en espacios de Banach infinito dimensionales, a una nueva teoría de grado topológico para operadores demicontínuos del tipo (S_+) generalizados en espacios reales de Banach reflexivos. Este grado topológico fue recientemente introducido por Kim y Hong [51] y es una herramienta elegante y potente para resolver ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse con métodos variacionales usuales.
La idea esencial de la resolución del problema (3) usando la nueva teoría del grado es la siguiente: transformar la ecuación (3) en un sistema

$$u = Tv \ , \ \ v + (S \circ T)v = 0 \quad \text{en } X \tag{4}$$

donde X es un espacio de Banach reflexivo con espacio dual X' y $T : X \longrightarrow X'$, $S : X' \longrightarrow X$ son operadores del tipo monótono generalizado y verificamos las condiciones y propiedades del teorema del grado de Kim-Hong. Esto permite probar la existencia de la solución del

problema.
Observe que la segunda ecuación en (4) es una ecuación abstracta de Hammerstein, ver Zeidler [75].
En todo este trabajo Ω es un conjunto abierto, acotado y suave de $\mathbb{R}^n$.
Esta tesis consta de tres capítulos. En el capítulo I presentamos el espacio de Lebesgue generalizado.

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \ u \text{ es } \text{ medible } \ , \ \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx < \infty \right\}$$

con $p \in C(\Omega)$. Mencionamos diversos propiedades de este espacio como: completitud, separabilidad, reflexividad y densidad.

Aquí también vemos algunos resultados del espacio de Sobolev

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) \ : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p(x)}(\Omega) \ , \quad i = 1, 2, ..., N \right\}$$

Este espacio es sumamente importante ya que la solución a nuestro problema, estará ubicado en la intersección de espacios de este tipo. Este capítulo está basado en Fan y Shao [39].
En el capítulo II, vemos definiciones y resultados de la teoría de operadores monótonos, pseudomonótonos y cuasimonótonos.
El capítulo III, presenta el objetivo central de esta tesis. Se muestra la existencia de la solución debíl del problema (3), vía la teoría del grado topológico de Kim and Hong. Tambien obtenemos resultados adicionales de existencia por medio de la teoría del Grado para operadores (S_+).
Es importante observar que este trabajo fue sometido a Gulf Journal of Mathematics siendo aceptado para su publicación.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Los espacios $L^{p(x)}(\Omega)$ y $W^{1,p(x)}(\Omega)$

En este capítulo estudiaremos es espacio de Lebesgue Generalizado $L^{p(x)}(\Omega)$ y presentamos un estudio del espacio de Sobolev Generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Las demostraciones se pueden encontrar en Fan and Zhao [39, 41] y Kovacik [53].

En esta sección Ω es un subconjunto medible, de $\mathbb{R}^n$
Se define, para $p \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$ el conjunto

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ es medible}, \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dt \right\}$$

Considere el conjunto

$$C_{+}(\Omega) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : u(x) > 1, \forall x \in \overline{\Omega} \right\}$$

Para cada $u \in C_{+}(\Omega)$ y $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, definimos

$$\rho(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} \, dx$$

$$p^{-} = \max_{x \in \overline{\Omega}} p \qquad y \qquad p^{+} = \min_{x \in \overline{\Omega}} p$$

La función ρ se denomina modular.
En adelante $p \in C_{+}(\Omega)$.

Proposición 1.1. *Para cada* $u, v \in L^{p(x)}(\Omega)$ *se tiene*

(a) $\rho(u) = 0$ *si y solo si* $u = 0$

(b) $\rho(-u) = \rho(u) = 0$

(c) $\rho(tu + (1-t)v) \leq t\rho(u) + (1-t)\rho(v), \forall t \in [0,1]$, *es decir,* ρ *es una función convexa.*

(d) $\rho(u+v) \leq 2^{p^+}[\rho(u) + \rho(v)]$

(e) *Si* $\lambda > 1$, *entonces*

$$\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^+}\rho(u),$$

y si $0 \leq \lambda \leq 1$, *tenemos*

$$\lambda^{p^+}\rho(u) \leq \rho(\lambda u) \leq \lambda^{p^-}\rho(u) \leq \lambda\rho(u) \leq \rho(u)$$

(f) *Para cada* $u \in L^{p(x)}(\Omega)/\{0\}, \rho(\lambda u)$ *es una función creciente, contínua y convexa en* $x \in [0, \infty[$.

Proposición 1.2. $L^{p(x)}(\Omega)$ *es un espacio vectorial.*

Vamos, ahora a, definir una norma en el espacio $L^{p(x)}(\Omega)$, que sea denotada por $\|\cdot\|_{p(x)}$ y presentan algunas propiedades.

Proposición 1.3. $\|u\|_{p(x)} = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \rho(\frac{u}{\lambda}) \leq 1\}$ *es una norma en* $L^{p(x)}(\Omega)$.

Proposición 1.4. *Si la función* $p(x) = p$ *es constante, entonces*

$$\|\cdot\|_{p(x)} = \|\cdot\|_p$$

donde $\|\cdot\|_p$ *es una norma usual del espacio* $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Proposición 1.5. *Sea* $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ *entonces*

$$\|\cdot\|_{p(x)} = a \quad \textit{si y solo si} \quad \rho(\frac{u}{a}) = 1$$

Proposición 1.6. *Sea $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ entonces*

(1) $\| u \|_{p(x)} < 1 \ \ (= 1, > 1)$ *si y solo si* $\rho(u) < 1 \ \ (= 1, > 1)$*;*

(2) *Si* $\| u \|_{p(x)} > 1$ *entonces* $\| u \|_{p(x)}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \| u \|_{p(x)}^{p^+}$

(3) *Si* $\| u \|_{p(x)} < 1$ *entonces* $\| u \|_{p(x)}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \| u \|_{p(x)}^{p^-}$

Proposición 1.7. *Sea $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$. Si $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|_{p(x)} = 0$*;*

(2) $\lim_{n\to\infty} \rho(\ u_n - u\ ) = 0$*;*

1.2. Propiedades del espacio $L^{p(x)}(\Omega)$

En esta sección presentaremos las principales propiedades de $L^{p(x)}(\Omega)$. El resultado abajo es un corolario de la demostración de la proposición 1.1.7

Teorema 1.1. *Sea $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$. Entonces existe una subsucesión (u_{n_k}) tal que*

(a) $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)$*, c.s. en* Ω

(b) $| u_{n_k}(x) | \leq h(x), \quad$ *para* $k \geq 1$ *c.s. en* $\Omega, h \in L^{p(x)}(\Omega)$

Teorema 1.2. *Si $p^- > 1$, entonces $L^{p(x)}(\Omega)$ es un espacio reflexivo.*

El siguiente enunciado es una versión del Teorema de la Representación de Riesz para el espacio $L^{p(x)}(\Omega)$.

Teorema 1.3. *Si $p^- > 1$ y sea $q \in L^{\infty}_{+}(\Omega) = \{q \in L^{\infty}(\Omega), q(x) > 0\}$ tal que $\dfrac{1}{p(x)} + \dfrac{1}{q(x)} = 1, \ \forall x \in \Omega$, entonces dado $f \in \Big(L^{p(x)}(\Omega)\Big)^*$ existe un único $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ tal que*

$$f(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \ \ , \ \ \forall u \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Teorema 1.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Entonces el espacio $C_0(\Omega)$ es denso en $L^{p(x)}(\Omega)$*

Teorema 1.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Entonces el espacio $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^{p(x)}(\Omega)$*

Teorema 1.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Entonces el espacio $L^{p(x)}(\Omega)$ es separable.*

1.3. El espacio $W^{1,p(x)}(\Omega)$

Es esta sección, estudiaremos el espacio de Sobolev generalizado $W^{1,p(x)}(\Omega)$, dado por el conjunto

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) \ : \ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p(x)}(\Omega) \ , \ j = 1, \cdots, N \right\}$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N, (N \geq 3)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Este espacio es muy importante, pues es sobre él estudiaremos la existencia de solución para el problema considerado en el capitulo 3.
Observamos que, si $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ que denota la j-ésima derivada débil de u, está dada por la relación:

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_\Omega -\frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi dx \ , \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

En $W^{1,p(x)}(\Omega)$, tenemos la norma

$$\| \ u \ \| = \| \ u \ \|_{p(x)} + \sum_{j=1}^{N} \left\| \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \ \right\|_{p(x)}$$

Si $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$, definimos el gradiente de u, por

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

donde las derivadas son consideradas en el sentido débil.

Note que podemos escribir el espacio $W^{1,p(x)}(\Omega)$ como

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) \ : \ | \nabla u | \in L^{p(x)}(\Omega) \right\}$$

En adelante usaremos la norma equivalente

$$\| u \| = \| u \|_{p(x)} + | \nabla u |_{p(x)}$$

Teorema 1.7. *$W^{1,p(x)}(\Omega)$ es un espacio Banach.*

Teorema 1.8. *El espacio $W^{1,p(x)}(\Omega)$ es separable y reflexivo si $p^- > 1$.*

Definición 1.1. *Definimos el espacio $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ como la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p(x)}(\Omega)$.*

De la definición de $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ y de las propiedades de $W^{1,p(x)}(\Omega)$, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.9. *$W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ es un espacio de Banach, separable y reflexivo si $p^- > 1$.*

1.4. Inmersiones

Aqui mencionamos las inmersiones necesarias que usaremos en el capítulo 3.
Dentro de esos resultados, destacaremos un teorema que generaliza los teoremas de Sobolev y de Rellich-Kondrachov, así como la desigualdad de tipo Poincaré.

Teorema 1.10. *Sean $p, q \in C_+(\Omega)$ tal que $q(x) \leq p(x)$ c.s. en Ω. Entonces*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,q(x)}(\Omega)$$

El símbolo " $\hookrightarrow$ " significa, inmersión contínua.

En lo que sigue, denotamos

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)} & , \ p(x) < N \\ \\ \infty & , \ p(x) \geq N \end{cases}$$

Teorema 1.11. *Sean $p, q \in C(\overline{\Omega})$ tal que $p^-, q^- \geq 1$. Si $q(x) \leq p^*(x), \forall x \in \Omega$, entonces $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ siendo la inmersión compacta, si $q(x) < p^*(x)$.*

Observación 1.1. *Si $p, q \in C(\overline{\Omega})$ son tales que*

$$1 \leq p(x) \leq q(x) \leq p^*(\Omega), \forall x \in \overline{\Omega},$$

entonces

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega).$$

Teorema 1.12. (Desigualdad de Poincaré) *Sea Ω un abierto, acotado de $\mathbb{R}$. Sea $p \in C(\overline{\Omega})$ tal que $p^- > 1$. Entonces existe $C > 0$ tal que*

$$\| u \|_{p(x)} \leq C \| \nabla u \|_{p(x)} \ , \ \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

Observación 1.2. *Como consecuencia de la desigualdad de Poincaré, tenemos*

$$\| \nabla u \|_{p(x)} \leq \| u \| = \| u \|_{p(x)} + \| \nabla u \|_{p(x)} \leq (C-1) \| \nabla u \|_{p(x)} \ , \ \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

osea, las normas $\| u \|$ y $\| \nabla u \|_{p(x)}$ son equivalentes en $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Escribimos

$$L(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} | \nabla u |^{p(x)} \, dx.$$

Proposición 1.8. ([40]) *El funcional $L : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexo. La aplicación $L' : X \longrightarrow X^*$ es un homeomorfismo estrictamente monótono y acotado, y es de tipo (S_+), esto es $u_n \rightharpoonup u$ y*

$$\lim_{n \to +\infty} \sup L'(u_n)(u_n - u) \leq 0 \quad \textit{entonces} \quad u_n \longrightarrow u \ ,$$

donde $X = W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, X^* es el espacio dual de X.

Capítulo 2

Operadores de tipo monótono

2.1. Teoría abstracta

La teoría de operadores monótonos constituye un método analítico fundamental para la investigación de ecuaciones no lineales y es en términos simples una generalización de las ideas empleadas en el estudio de funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no decrecientes.
En problemas concretos discretos para ecuaciones diferenciales parciales, estos operadores (colocados en el contexto del Análisis Funcional no lineal) forman una clase amplia, cuya estructura puede ser muy bien estudiada y nos permite establecer resultados de existencia y regularidad. Por ejemplo, las propiedades de los operadores monótonos introducidas por F. E. Browder [16, 17, 21, 22, 18, 20] 1960, permite abordar una clase mayor de ecuaciones que Browder obtuvo importantes resultados de existencia para ecuaciones diferenciales parciales elípticas y parabólicas. Sin embargo, hay una variedad de problemas en el mundo real, modelados por ecuaciones diferenciales parciales, a los cuales la teoría de operadores monótonos no puede ser aplicada, por lo menos directamente. Fue Brezis [14, 15] quién extendió los resultados de Browder, a una clase mayor de operadores, denominadas operadores pseudomonótonos, que en cierto sentido es la generalización del concepto de operador monótono maximal. El prototipo de operador pseudomonótono es un operador del tipo $A + B$, dónde A es monótono y hemicontínuo, en tanto que B es fuertemente contínuo.
Así la teoría de operadores pseudomonótonos implica los argumentos de

monotonía y de compacidad.

2.2. Modos de continuidad

Sea V un espacio de Banach, real, reflexivo con norma $\|\cdot\|$, V' sea espacio dual y denotemos con $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ la dualidad entre V' y V. La convergencia (según la norma) fuerte en X será denotada por " $\longrightarrow$ " y convergencia débil con " $\rightharpoonup$ ".

Definición 2.1. *Sea $A : V \longrightarrow V'$; se dice que A es:*

(i) *Contínuo (respectivamente débilmente contínuo) si $u_r \longrightarrow u$ implica $Au_r \longrightarrow Au$ (respectivamente $u_r \rightharpoonup u$ implica $Au_r \rightharpoonup Au$).*

(ii) *Demicontínuo si $u_r \longrightarrow u$ implica $Au_r \longrightarrow Au$*

(iii) *Hemicontínuo si la función real $t \rightsquigarrow \langle\, A(u+tv), w\,\rangle$ es contínua de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ $\forall u, v, w \in V$.*

(iv) *Fuertemente contínuo o completamente contínuo si $u_r \rightharpoonup u$ implica $Au_r \longrightarrow Au$.*

(v) *Acotado si A lleva conjuntos acotados en conjuntos acotados.*

(vi) *Coercivo si* $\displaystyle\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle\, Au, u\,\rangle}{\|u\|} = +\infty.$

Observe que inmediatamente se verifica que:
A fuertemente contínuo $\Rightarrow$ A demicontínuo $\Rightarrow$ A hemicontínuo.
En lo que viene Ω es un conjunto abierto, acotado bien regular de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1. (Operador Hemicontínuo)
Consideremos $A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, $2 \le p < +\infty$ tal que

$$Au = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Veamos que A es hemicontínuo. Sean $u, v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \longrightarrow \lambda_0$.
Luego

$$\langle\ A(u+\lambda v), w\ \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx$$

Haciendo $F_i(u,v,w) = \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i}$
Ahora observamos que

$$|F_i(u,v,w)| \leq \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \longrightarrow \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda_0 \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-1} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| \text{ c.s. en } \Omega$$

y

$$F_i(u,v,w) \leq 2^{p-3} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} + \lambda^{p-2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^1(\Omega)$$

se sigue del teorema de convergencia dominada de Lebesgue que
$\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \langle\ A(u+\lambda v), w\ \rangle = \langle\ A(u+\lambda_0 v), w\ \rangle$, asi A es hemicontínuo.

2.3. Operadores monótonos

En esta sección veremos algunos resultados de operadores monótonos, que nos preparan el camino para obtener resultados fundamentales como el teorema de Browder-Minty ver [60, 61] .

Nuestro objetivo aqui es asentar las bases para la siguiente sección dedicada a los operadores pseudomonótonos, y la teoría del grado generalizado para operadores $(S)_+$, así como permitir una comparación entre los resultados sobre operadores monótonos y pseudomonótonos.

El siguiente enunciado establece una conexión entre el concepto de operador monótono y la noción más familiar de función creciente monótona de valor real.

Proposición 2.1. *Sea V un espacio de Banach y el operador $A : V \longrightarrow V'$. Considere*

$$f(t) = \langle A(u + tv), v\rangle \, , \forall t \in \mathbb{R}.$$

Entonces los siguientes enunciados son equivalentes

(i) *El operador A es monótono.*

(ii) *La función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona creciente para todo $u, v \in V$*

Demostración: Supongamos que A es monótono, para $0 \leq s < t$, se deduce que

$$f(t) - f(s) = (t - s)^{-1} \langle A(u + tv) - A(u + sv), (t - s)v\rangle \geq 0$$

Reciprocamente, supongamos que f es como en (ii), luego para $u, v \in V$, sea $v = w - u$, entonces tenemos

$$\langle A(w) - A(u), w - u\rangle = \langle A(u + v) - A(u), v\rangle = f(1) - f(0) \geq 0$$

■

Los siguientes dos lemas permitirán probar sin dificultad el teorema fundamental de la teoría de operadores monótonos, el teorema de Browder-Minty.

Lema 2.1. : *Sea V un espacio de Banach reflexivo y $A : V \longrightarrow V'$ un operador monótono y hemicontínuo. Entonces*

(i) *Si A es monótono maximal, esto es, si $u \in V$ y $f \in V^*$ son dados tal que*

$$\langle f - A(v), u - v\rangle \geq 0, \forall v \in V$$

entonces $A(u) = f$ en V^*

(ii) *Si*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ en } V, \quad A(u_n) \rightharpoonup f \text{ en } V^*, \quad y \quad \langle A(u_n), u_n\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle$$

entonces $A(u) = f$ en V^*

(iii) *Si se verifica una de las hipótesis*

$$u_n \rightharpoonup u \ en \ V, \quad y \quad A(u_n) \longrightarrow f \ en \ V^*,$$

ó

$$u_n \longrightarrow u \ en \ V, \quad y \quad A(u_n) \rightharpoonup f \ en \ V^*,$$

entonces $A(u) = f \ en \ V^*$

Demostración:

(i) Supongamos que $u \in V$ y $f \in V^*$ son dados satisfaciendo la desigualdad mencionada. Sea $w \in V$ y $v = u - tw$ para $t > 0$.
Luego

$$\langle f - A(v), u - v\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle f - A(u - tw), w\rangle \geq 0$$

Considere una sucesión $t_n > 0$ tal que $t_n \longrightarrow 0$. Usando la hemicontinuidad de A obtenemos.

$$\langle f - A(u - t_n w), w\rangle \longrightarrow \langle f - A(u), w\rangle \geq 0$$

Ahora haciendo $-w$ en lugar de w, obtenemos la desigualdad inversa y se obtiene $\langle f.A(u), w\rangle = 0$ para cualquier $w \in V$.

(ii) De la monotonía de A se deduce que

$$\langle A(u_n) - A(v), u_n - v\rangle = \langle A(u_n), u_n\rangle - \langle A(v), u_n\rangle - \langle A(u_n) - A(v), v\rangle \geq 0$$

para todo $v \in V$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (\langle A(u_n), u_n\rangle - \langle A(v), u_n\rangle - \langle A(u_n) - A(v), v\rangle) \ &= \\ = \langle f, u\rangle - \langle A(v), u\rangle \ &- \ \langle f - A(v), v\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

esto da

$$\langle f - A(v), u - v\rangle \geq 0 \quad , \quad \forall v \in V$$

Como A es monótno maximal, el resultado se deduce de (i).

(iii) Como $\langle A(u_n), u_n\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle$ se sigue de cualquiera de las suposiciones de (iii), que $A(u) = f$ en V^* , razonando de la misma manera que la prueba de (ii).

■

Lema 2.2. *Sea V un espacio de Banach reflexivo con el operador $A : V \longrightarrow V^*$. Luego*

(i) *Si A es fuertemente contínuo, entonces A es compacto.*

(ii) *Si A es demicontínuo, entonces A es localmente acotado, es decir, para cada $x \in V$, existe una vecindad $M \subset V$ de x tal que $A(M) \subset V^*$ es acotado.*

(iii) *Si A es monótono, entonces A es localmente acotado.*

(iv) *Si A es monótono y hemicontínuo, entonces A es demicontínuo.*

Demostración:

(i) Supongamos que A es fuertemente continuo. Dado que la compacidad secuencial y compacidad coinciden en los espacios métricos, es suficiente probar que A lleva conjuntos compactos $B \subset V$ a conjuntos $A(B) \subset V^*$ relativamente secuencialmente compactos. Tome una sucesión arbitraria $\{A(u_n)\}_n$ en $A(B)$. Entonces dado que B es acotado, también tenemos qu $\{u_n\}_n$ es acotado en V.

Del Teorema de Eberlein - Smulian, (ver apendice), se sigue que existe una subsucesión debílmente convergente $\{u_k\}_k$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ en V. De la continuidad fuerte se concluye que $A(u_{n_k}) \longrightarrow A(u)$ en V^*. Esto prueba que $A(B)$ es sucesión relativamente compacto y por lo tanto A es operador compacto.

(ii) Suponer que A no es acotado localmente entonces existe un punto $u \in V$ tal que si consideramos las bolas abiertas $B(u, \frac{1}{n})$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}, \forall R > 0$ existe un $v \in A(B(u, \frac{1}{n}))$ tal que $\|v\|_{V^*} > R$.
Podemos construir una sucesión $u_n \longrightarrow u$ tomando $u_m \in B(u, \frac{1}{m})$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Podemos elegir la sucesión $\{u_m\}_m$ tal que $\|A(u_m)\|_{V^*} > m$. Luego como $u_m \longrightarrow u$ se sigue que $\|A(u_m)\|_{V^*} \longrightarrow \infty$. Pero como A es demicontínuo $u_m \longrightarrow u$ implica que $A(u_m) \rightharpoonup A(u)$ en V^*.
Así tenemos que $\{A(u_m)\}_m$ es acotado, lo que es una contradicción.

(iii) Supongamos que A es monótono pero no está acotado localmente. Entonces, existe un $u \in V$ y una sucesión $u_n \longrightarrow u$ en V, tal que $\|A(u_n)\|_{V^*} \longrightarrow \infty$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $u = 0$. Considerar la sucesión $s_n := (1 + \|A(u_n)\|_{V^*} \|u_n\|)^{-1}$. De la monotonía del operador A, tenemos
$\langle A(u_n) - A(v), u_n - v\rangle \geq 0$ y $\langle A(u_n) - A(-v), u_n - (-v)\rangle \geq 0$. Luego

$$\begin{aligned} \pm s_n \langle A(u_n); v\rangle &\leq s_n(\langle A(u_n); u_n\rangle - \langle A(\pm v), u_n \pm v\rangle) \\ &\leq s_n(\|A(u_n)\|_{V^*} \|u_n\|) + \|A(\pm v)\|_{V^*} (\|u_n\| + \|u\|) \\ &\leq 1 + \|A(\pm v)\|_{V^*} (D + \|u\|) \end{aligned}$$

donde usamos $\|u_n\| \leq D$ para alguna constante $D > 0$. Por lo tanto,

$$\sup_n |\langle s_n A(u_n), v\rangle| < \infty, \ \ \forall v \in V$$

De acuerdo al teorema 1.2.3, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\sup_n \|s_n A(u_n), v\|_{V^*} \leq c$$

obtenemos $s_n \|A(u_n)\|_{V^*} \leq c$ por lo tanto,
$\|A(u_n)\|_{V^*} \leq \dfrac{c}{s_n} = c\,(1 + \|A(u_n)\|_{V^*} \|u_n\|_V)$.
De ello se deduce, despues de expander la expresión, que

$$\|A(u_n)\|_{V^*} \leq \frac{c}{1 - c\,\|u_n\|},$$

esto prueba que $\|A(u_n)\|_{V^*}$ es acotado para algun $n > n_0$, ya que $\|u_n\| \longrightarrow 0$. Así tenemos una contradicción.

(iv) Suponer que $u_n \longrightarrow u$ en V. Luego $\{u_n\}_n$ es acotado. Es facíl mostrar que la sucesión $\{A(u_n)\}_n$ también esta acotada, esto se deduce de (iii). Por la reflexividad de V (y por ende la reflexividad de $V*$), existe un elemento $f \in V^*$ y una subsucesión $\{u_{n_k}\}_k$ tal que $\{A(u_{n_k})\} \rightharpoonup f$. Del Lema 2.3 (iii), obtenemos $A(u) = f$. Podemos afirmar además que cada subsucesión de $\{A(u_n)\}$ tiene una subsucesión que converge debilmente. Todas estas subsucesiones deben converger debilmente en $A(u)$. Supongamos que podemos encontrar una subsucesión $\{u_{n_l}\}_l$ tal que $\{A(u_{n_l})\}_l \rightharpoonup c \neq f$. Entonces aplicando Lema 2.3 (iii) se obtiene nuevamente $A(u) = c$, esto da una contradicción. Así del Lema 3.9 (ver apendice), se deduce que toda la sucesión $\{A(u_n)\}_n$ converge debilmente a $A(u)$. Por eso tenemos que A es demicontínua.

■

El teorema de Browder-Minty es uno de los pilares de la teoría de operadores monótonos y tiene una interpretación muy simple en $\mathbb{R}$.

El teorema nos dice que una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qué es continua, monótona tal que $f(x) \longrightarrow \pm\infty$ si $x \longrightarrow \pm\infty$ es suryectiva. Como su propio nombre lo indica es debido a los matemáticos norteamericanos Felix Browder y George Minty.

Teorema 2.1. (Browder, Minty 1963) *Sea V un espacio de Banach separable, reflexivo y $A : V \longrightarrow V^*$ un operador monotono, coercivo, hemicontínuo. Entonces para cada $f \in V^*$, existe una solución $u \in V$, tal que*

$$A(u) = f \ \ en \ V^* \tag{2.1}$$

El conjunto de soluciones es acotado convexo y cerrado. Si A es estrictamente monotono, entonces la solución es única.

Demostración:
Probaremos este teorema mediante el método de Galerkin.

Paso 1: Tomar una sucesión $(e_k)_k$ de vectores linealmente independiente en V, tal que la configuración

$$V_n := span\{e_1, ..., e_n\},$$

con $V = \overline{U_n V_n}$. Estamos buscando una solución $u_n \in V_n$ tal que es de la forma

$$u_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^n e_k \tag{2.2}$$

y que resuelve el sistema de ecuaciones

$$\langle A(u_n) - f, e_k \rangle = 0, \text{ para } k \in \{1, ..., n\} \tag{2.3}$$

Primero probaremos que la solución del sistema existe. Escribamos el sistema de ecuaciones no lineales como

$$g(c^n) = 0 \quad en \quad \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

donde $c^n = (c_n^1, ..., c_n^n) \in \mathbb{R}^n$ y $g = (g_1, ..., g_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son dados por

$$g_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ c^n \ :\longmapsto g_k(c^n) := \langle A(u_n) - f, e_k \rangle, \text{ donde } k \in \{1, ..., n\}$$

Usando el Lema 2.4 (iv), se deduce que dado que A es monótono y hemicontínuo, también es demicontínuo. A continuación probaremos que $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es continuo.
Utilizando la demicontinuidad (considere una sucesión convergente $x^i \longrightarrow x$ en $\mathbb{R}^n$, luego elije $y_i = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, y $y = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ se sigue que $y_i \longrightarrow y$ en V. La demicontinuidad de A implica que $\langle A(y_i), e_k \rangle \longrightarrow \langle A(y), e_k \rangle$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$, por lo tanto, cada g_k es contínuo).
Como A es coerciva, tenemos

$$\lim_{\|u\|_V \to \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|_V} \longrightarrow \infty,$$

por lo tanto

$$\lim_{\|u\|_V \to \infty} \frac{\langle A(u) - f, u \rangle}{\|u\|_V} \longrightarrow \infty,$$

entonces $\forall d > 0, \exists R > 0$, tal que $\|u\|_V \geq R$ implica que

$$\frac{\langle A(u) - f, u \rangle}{\|u\|_V} > d$$

Entonces podemos concluir que existe una constante $R_1 > 0$, tal que

$$\langle A(u) - f, u \rangle > 0 \quad \text{para todo} \quad u \in V : \|u\|_V \geq R_1 \tag{2.5}$$

A partir de la equivalencia de normas en el espacio de dimensión finita V_n existe un par de números reales $0 < D_1 \leq D_2$ tal que

$$D_1 \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_V \leq |x| \leq D_2 \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_V$$

donde $|x| := \left(\sum_{k=1}^{n} (x_i)^2 \right)^{1/2}$. Por lo tanto, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, que satisface $|x| \geq D_2 R_1$, se deduce que $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| \geq R_1$, por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x) x_k = \left\langle A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right) - f \ , \ \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\rangle > 0$$

Por el Lema del ángulo agudo, en el apendice, existe una solución $c^n \in \mathbb{R}^n$ de (2.8) , con $|c^n| \leq D_2 R_1$. Por lo tanto tenemos

$$\|u\|_V \leq R_1 \tag{2.6}$$

donde tenemos que $R_1 > 0$ es independiente de $n \in \mathbb{N}$.

Paso 2: Ahora probaremos que $\{A(u_n)\}_n$ está acotada. El Lema 2.3 (ii) implica que A es acotada localmente. Luego

$$\exists\ \alpha, \delta > 0\ :\ \|v\|_V \leq \alpha \Rightarrow \|A(v)\|_{V^*} \leq \delta$$

De la monotonía de A, tenemos

$$\langle A(u_n) - A(v), u_n - v\rangle \geq 0\ \ \forall v \in V$$

De la monotonía de A y la ecuación de Galerkin (2.3), se tiene $\langle A(u_n), u_n\rangle = \langle f, u_n\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$\begin{aligned}
\|A(u_n)\|_{V^*} &= \sup_{\|u\|_V=\alpha} \alpha^{-1} \langle A(u_n), v\rangle \\
&\leq \sup_{\|u\|_V=\alpha} \alpha^{-1} \left(\langle A(u_n), v\rangle + \langle A(u_n), u_n\rangle - \langle A(v), u_n\rangle\right) \\
&\leq \alpha^{-1} \left(\delta\alpha + R_1 \|f\|_{V^*} + \delta R_1\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{A(u_n)\}_n$ está acotada.

Paso 3: Aquí pasaremos al límite. Como V es reflexivo y la sucesión $\{u_n\}_n$ esta acotada, el teorema de Eberlein - Smulian, implica la existencia de una subsucesión debilmente convergente y $u \in V$, tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad en \quad V$$

Para simplificar la notación, nuevamente hemos denotado la subsucesión por $\{u_n\}_n$. Tomando cualquier $v \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ implica que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $v \in V_m$. Dado que tenemos que u_n es una solución de (2.7) para todo $n \geq m$, se sigue que

$$\langle A(u_n), v\rangle = \langle f, v\rangle\,,$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u_n), v\rangle = \langle f, v\rangle\,, \forall v \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \tag{2.7}$$

Como hemos demostrado que $\{A(u_n)\}_n$ está acotada en el paso 2,

por el teorema Eberlein-Smulian (ya que V' es un espacio de Banach reflexivo), tenemos la existencia de una subsucesión $\{A(u_{n_k})\}_k$, donde $A(u_{n_k}) \rightharpoonup \psi \quad en \quad V'$, por la unicidad de los límites y $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ siendo denso en V conduce a $\psi = f$ en V'. Usando el Lema 2.2 obtenemos la convergencia debíl de toda la sucesión $\{A(u_n)\}_n$, por lo tanto

$$A(u_n) \rightharpoonup f \quad en \quad V'$$

Teniendo en cuenta que u_n es una solución para (2.3), tenemos que $\langle A(u_n), v\rangle = \langle f, v\rangle \ ; \ \forall v \in V$. Luego por densidad y continuidad.

$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u_n), v\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, v\rangle = \langle f, v\rangle \ ; \ \forall v \in V$$

Despues de aplicar el Lema 2.2 (iii), se obtiene el resultado deseado, $A(u) = f$.
Ahora, investigamos algunas propiedades del conjunto de soluciones para algún $f \in V'$ fijo. Sea $W := \{u \in V : A(u) = f\}$ en V' el conjunto de soluciones.

- Esto es claro que $W \neq \phi$ de lo que hemos probado.
- W es acotado. Supongamos que para todo $R > 0$ existe un $u \in W$ tal que $\|u\|_V \geq R$. Considere $R = R_1$, entonces se sigue una contradicción de (2.9), ya que

  $$\|u\|_V \geq R_1 \Rightarrow \langle A(u) - f, u\rangle > 0 \quad \text{pero} \quad u \in W \Rightarrow \langle A(u) - f, u\rangle = 0$$

- W es convexo. Supongamos que $u_1, u_2 \in W$. Entonces considere $u = tu_1 + (1-t)u_2$, donde $0 \leq t \leq 1$; tenemos la siguiente desigualdad (utilizando la monotonia de A)

  $$\begin{aligned} \langle f - A(v), u - v\rangle &= \langle f - A(v), tu_1 + (1-t)u_2 - tv - v + tv\rangle \\ &= \langle f - A(v), t(u_1 - v)\rangle \\ &= + \langle f - A(v), (1-t)(u_2 - v)\rangle \geq 0 \ , \ \forall v \in V \end{aligned}$$

  Del Lema 2.2 (i), obtenemos $A(u) = f$.

- W es cerrado. Queremos probar que $W = \overline{W}$. Tenemos $W \subset \overline{W}$ trivialmente. Supongamos que $u \in \overline{W}$, entonces existe una sucesión tal que $u_n \longrightarrow u$, donde $\{u_n\}_n \subset W$.

$$\begin{aligned} \langle f - A(v), u - v\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle f - A(v), u_n - v\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle A(u_n) - A(v), u_n - v\rangle \geq 0 \ , \ \ \forall v \in V. \end{aligned}$$

Nuevamente por el Lema 2.2 obtenemos
$Au = f$, así $u \in W$

Finalmente, supongamos que A es estrictamente monótono. Considere los elementos distintos u_1 y u_2 del conjunto de soluciones W. Por consiguiente,

$$0 < \langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle = \langle f - f, u_1 - u_2\rangle = 0.$$

Claramente tenemos una contradicción. Por lo tanto, la solución para (2.1) es única.

■

2.4. Operadores Pseudomonótonos

Hay una gran clase de ecuaciones diferenciales parciales cuasilineales, que no pueden ser colocadas en las condiciones del Teorema de Browder-Minty. Por lo que, se introdujo una noción más debíl que la de monotonía como es la pseudomonotonía, con el objetivo de abordar una clase mayor de ecuaciones.

Definición 2.2. *Un operador $A : V \longrightarrow V^*$ es pseudomonótono si*

$$A \quad \textit{es acotado} \tag{2.8}$$

$y \quad u_n \rightharpoonup u \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \sup \langle f - A(v), u_n - u\rangle \leq 0$
implica

$$\langle A(u), u - v\rangle \leq \lim_{n\to\infty} \text{ínf} \langle A(u_n), u_n - v\rangle \ \ \forall v \in V \tag{2.9}$$

Lema 2.3. *Sea V un espacio de Banach reflexivo, entonces cada operador pseudomonótono $A : V \longrightarrow V^*$ es demicontínuo.*

Demostración: Supongamos que $u_n \longrightarrow u$. Por definición de un operador pseudomonótono, $\{A(u_n)\}_n$ es acotado, por lo tanto, cualquier subsucesión de $\{A(u_n)\}_n$ también es acotada. Como asumimos que V es un espacio de Banach reflexivo, resulta que V^* es un espacio de Banach reflexivo. Podemos entonces aplicar el Teorema Eberlein-Smulian y obtener una subsucesión debílmente convergente, que aún denotaremos $\{A(u_n)\}_n$ tal que $A(u_n) \rightharpoonup f$, para algún $f \in V^*$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u_n), u_n - v\rangle \ = \langle f, u - u\rangle$$

Como

$$0 \leq |\langle A(u_n), u_n - v\rangle - \langle f, u - u\rangle| \leq \|A(u_n) - f\|_{V^*} \|u_n - u\|,$$

$\|A(u_n) - f\|_{V^*}$ está acotada ; $\|u_n - u\| \longrightarrow 0$ obtenemos

$$\langle A(u), u - v\rangle \leq \lim_{n\to\infty} \text{ínf} \langle A(u_n), u_n - v\rangle = \langle f, u - v\rangle \tag{2.10}$$

para cualquier $v \in V$.

Desde $\langle A(u), u - v\rangle \leq \langle f, u - v\rangle$, tomar $v = u - w$ resulta en
$\langle A(u), w\rangle \leq \langle f, w\rangle$.
Similarmente, tomar $v = u + w$ resulta la desigualdad inversa
$\langle A(u), w\rangle \geq \langle f, w\rangle$. Consecuentemente $A(u) = f$.
Demostramos que cualquier subsucesión de la sucesión $\{A(u_n)\}_n$ tiene una subsucesión debílmente convergente, que converge a $A(u) = f$, por lo tanto por el Lema 2.1 se deduce que toda la sucesión $\{A(u_n)\}_n$ converge debílmente a $A(u)$.
Esto prueba que A es demicontínuo. ■

Observación 2.1. *La coercividad se puede obtener a partir de una monotonía fuerte:*

$$\langle A(u), u\rangle = \langle A(u) - A(0), u\rangle + \langle A(0), u\rangle \geq c\|u\|_V^2 - \|A(0)\|_{V^*} \|u\|_V \ ,$$

por lo tanto, se sigue que:

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} \geq c\,\|u\|_V - \|A(0)\|_{V^*} \longrightarrow \infty \quad \textit{para } \|u\|_V \longrightarrow \infty.$$

Lema 2.4. *Sea V un espacio de Banach reflexivo y $A\ ,\ A_1\ ,\ A_2 : V \longrightarrow V'$.*

(i) *La suma de operadores pseudomonótonos sigue siendo pseudomonótono, es decir, A_1 y A_2 pseudomonótonos implica $u \longrightarrow A_1(u) + A_2(u)$ es pseudomonótono.*

(ii) *Una "traslación" de un operador pseudomonótono sigue siendo pseudomonótono, es decir, un pseudomonótono implica $u \longrightarrow A(u + w)$ es pseudomonótono, para $w \in V$ fijado*

Demostración:
Note que las aplicaciones $u \longrightarrow A_1(u) + A_2(u)$, $A(u + w)$ son acotadas. Demostraremos el requisito (2.9) de la pseudomonotonía.

(i) Sean A_1 y A_2 pseudomonótonos y supongamos que $u_n \rightharpoonup u$ y

$$\lim_{x\to\infty} \sup \langle (A_1 + A_2)(u_n), u_n - u \leq 0\rangle.$$

Primero mostraremos

$$\lim_{x\to\infty} \sup \langle A_1(u_n), u_n - u \leq 0\rangle \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \sup \langle A_2(u_n), u_n - u \leq 0\rangle \tag{2.11}$$

Por contradicción, adecuamos que $\lim_{x\to\infty} \sup \langle A_1(u_n), u_n - u\rangle = \epsilon > 0$,

entonces existe una subsucesión, tal que

$\lim_{x\to\infty} \sup \langle A_1(u_n), u_n - u\rangle = \lim_{x\to\infty} \sup \langle A_1(u_n), u_n - u\rangle$, entonces existe una subsucesión, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \langle A_1(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle = \lim_{n\to\infty} \sup \langle A_1(u_n), u_n - u\rangle = \epsilon > 0.$$

Consideremos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{n\to\infty} \sup \left(\langle A_1(u_n), u_n - u \rangle + \langle A_2(u_n), u_n - u \rangle \right) \\ &\geq \lim_{k\to\infty} \sup \left(\langle A_1(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle + \langle A_2(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle \right) \\ &\geq \lim_{k\to\infty} \text{ínf} \, \langle A_1(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle + \lim_{k\to\infty} \sup \langle A_2(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle \end{aligned}$$

Resulta que $\lim_{k\to\infty} \sup \langle A_2(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle \leq -\epsilon < 0$. Tambien tenemos

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \sup \langle A_2(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle \leq 0 \ ,$$

y por lo tanto

$$\langle A_2(u), u - v \rangle \leq \lim_{k\to\infty} \text{ínf} \, \langle A_2(u_{n_k}), u_{n_k} - v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Hagamos $u = v$ en esta desigualdad entonces

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \text{ínf} \, \langle A_2(u_{n_k}), u_{n_k} - v \rangle \leq \lim_{k\to\infty} \sup \langle A_2(u_{n_k}), u_{n_k} - u \rangle \leq -\epsilon < 0 \ .$$

Lo que es una contradicción. Lo que prueba (2.11). En consecuencia.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \text{ínf} \, \langle (A_1 + A_2)(u_n), u_n - v \rangle &\geq \lim_{n\to\infty} \text{ínf} \, \langle A_1(u_n), u_n - v \rangle \\ &+ \lim_{n\to\infty} \text{ínf} \, \langle A_2(u_n), u_n - v \rangle \\ &\geq \langle A_1(u), u - v \rangle + \langle A_2(u), u - v \rangle \\ &= \langle (A_1 + A_2)(u), u - v \rangle \, . \end{aligned}$$

(A2) Sea $u_n \rightharpoonup u$ y $\lim_{n\to\infty} \sup \langle A(u_n + w), u_n - u \rangle \leq 0$.
Luego tenemos:
$u_n + w \rightharpoonup u + w$ y $\lim_{n\to\infty} \sup \langle A(u_n + w), (u_n + w) - (u + w) \rangle \leq 0$.

Como A, es pseudomonótono, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup\langle A(u_n+w),u_n-u\rangle &= \lim_{n\to\infty}\sup\langle A(u_n+w),(u_n+w)-(v+w)\rangle\\ &\geq \langle A(u+w),(u+w)-(v+w)\rangle\\ &= \langle A(u+w),u-v\rangle\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto $A(\cdot+w)$ es pseudomonótono. ■

Ejemplo 2. (De Operador Pseudomonótono)
Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, no vacio, acotado, bien regular, $1<q<p$, Δ_p y Δ_q el p-Laplaciano y q-Laplaciano respectivamente, donde

$$\Delta_p u = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\ ,\ \Delta_q u = div\left(|\nabla u|^{q-2}\nabla u\right)\ .$$

Sea la función $f:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ una función Caratheodory, i.e. $f(\cdot,s,\xi)$ medible, $\forall(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ y $f(x,\cdot,\cdot)$ contínua, c.t.p $x\in\Omega$, talque (F_1). Existen constantes $a_1\geq 0$, $a_2\geq 0$, $\alpha\in[0,p^*-1[$, $\beta\in[0,\frac{p}{(p^*)'}[$ y una función $G\in L^{r'}(\Omega)$ con $r\in[1,p^*[$, $p^*=$ exponente critico de Sobolev tal que

$$|f(x,s,\xi)|\leq G(x)+a_1|s|^{\alpha}+a_2|\xi|^{\beta}\ c.t.p.\ ;\ x\in\Omega,\ \forall(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

Definimos el operador $A:W_0^{1,p}(\Omega)\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ tal que

$$Au=-\Delta_p u-\Delta_q u-N(u)\ ,$$

$$\langle\ Au,v\ \rangle=\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx+\int_\Omega|\nabla u|^{q-2}\nabla u.\nabla v dx-\int_\Omega f(\,x,u,\nabla u\,)v dx$$

$\forall u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, donde

$$\begin{aligned}N:\ W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)\\ u &\longmapsto N(u)=f(\,x,u,\nabla u\,)\end{aligned}$$

es el operador de Nemyskii asociado a f.
En [7] se demuestra en detalle que A es un operador psedomonótono.

Teorema 2.2. (De Brezis 1968) *Sea V un espacio de Banach reflexivo, separable. Asuma que $A : V \longrightarrow V'$ es acotado, pseudomonótono y coercivo, entonces A es suryectivo.*

Demostración: Será mediante el método de Galerkin. Sea $F \in V'$. Como V es separable, existe $\{u_r\}_{r\geq 0}$ base de Schawder.
Consideremos $V_m = [w_1, \cdots, w_m]$ el espacio generado por los " m " primeros elementos de la base
Determinemos

$$u_m = \sum_{i=0}^{m} \xi_i w_i \ , \ \ w_i \in V_m,$$

solución del sistema

$$\langle\ Au_m, w_j\ \rangle = \langle\ F, w_j\ \rangle \ \ , \ \ j = 1, 2, ..., m \tag{2.12}$$

esto es

$$\langle\ Au_m, v\ \rangle = \langle\ F, v\ \rangle \ \ , \ \ \forall v \in V_m \tag{2.13}$$

Construimos

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \xi = (\xi_1, ..., \xi_m) & \longmapsto & \sigma(\xi) = (g_1(\xi), ..., g_1(\xi)) \end{array}$$

tal que

$$g_i(\xi) = \left\langle\ A(\ \sum_{i=0}^{m} \xi_i w_i\ ), w_j\ \right\rangle - \langle\ F, w_j\ \rangle \ \ , \ \ j = 1, 2, ..., m$$

Como A es acotado y pseudomonótono resulta que A es demicontinuo, y así cada g_j es continúa, luego σ es continua.
Denotemos $z = \sum_{i=0}^{m} \xi w_i \in V_m$ y asumimos $z \neq 0$, se tiene

$$\langle\ \sigma(\xi), \xi\ \rangle_{\mathbb{R}^m} \ = \ \sum_{j=0}^{m} \xi_j(\xi)\xi_j$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle\ A(\ \sum_{i=1}^{m}\xi_i w_i\ )\ ,\ \sum_{j=0}^{m}\xi_j w_j\ \right\rangle - \left\langle\ F, \sum_{j=1}^{m}\xi_j w_j\ \right\rangle \\
&= \left[\frac{\langle\ Az, z\ \rangle}{\|\ z\ \|_V} - \frac{\langle\ F, z\ \rangle}{\|\ z\ \|_V}\right]\|\ z\ \|_V \\
&\geq \left[\frac{\langle\ Az, z\ \rangle}{\|\ z\ \|_V} - \|\ F\ \|_{V\prime}\right]\|\ z\ \|_V
\end{aligned}
$$

Pero como A es coercivo

$$\lim_{\|\ z\ \|\to\infty}\frac{\langle\ Az, z\ \rangle}{\|\ z\ \|_V} = +\infty$$

Por lo que

$$\langle\ \sigma(\xi), \xi\ \rangle_{\mathbb{R}^m} \geq 0\ ,\ \forall|\ \xi\ | = R,\ \text{para algún } R > 0$$

Así por el teorema del ángulo agudo (en el Apéndice) existe $\xi \in \mathbb{R}^m$ tal que $\sigma(\xi) = 0$, así (2.12) tiene una solución u_m.
Si $dimV < \infty$, no hay nada que hacer.
Consideremos el caso que $dimV = +\infty$. Así tenemos una sucesión (u_m) que satisface (2.12).
Cómo A es coercivo, esto implica que (u_m) es acotada en V, pués de lo contrario habría una subsucesión u_{m_k} de (u_m) tal que

$$\lim_{\|\ k\ \|\to+\infty}\|u_{m_k}\|_V = +\infty$$

lo que no puede ser, ya que de (2.12):

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle\ Au_{m_k}, u_{m_k}\ \rangle \\
&= \langle\ F, u_{m_k}\ \rangle \\
&\geq \left[\frac{\langle\ Au_{m_k}, u_{m_k}\ \rangle}{\|\ u_{m_k}\ \|_V} - \|\ F\ \|_{V\prime}\right]\|\ u_{m_k}\ \|_V \longrightarrow +\infty
\end{aligned}
$$

(esto es una contradicción).
Cómo A es acotado, $(Au_m)_{m\geq 1}$ es acotada en V'.

De la reflexividad de V, existen $u \in V$, $\chi \in V'$ y una subsucesion u_{m_k} de (u_m) tal que

$$u_{m_k} \rightharpoonup u \text{ en } V \ \vee \ Au_{m_k} \rightharpoonup \chi \text{ en } V' \tag{2.14}$$

Probemos que $\chi = F$. De (2.12), para m fijo, $m < k$ hacemos $k \longrightarrow \infty$ $(\Rightarrow m_k \longrightarrow +\infty \ , \ m_k \geq k)$, luego

$$\langle \ Au, v \ \rangle = \langle \ F, v \ \rangle \ , \ u, v \in V_m \tag{2.15}$$

como $\overline{UV_m} = V$ la igualdad (2.15) vale $\forall v \in V$.

En consecuencia $\chi = F$.

Finalmente

$$\begin{aligned} \langle \ Au_{m_k}, u_{m_k} - u \ \rangle &= \langle \ Au_{m_k}, u_{m_k} \ \rangle - \langle \ Au_{m_h}, u \ \rangle \\ &= \langle \ F, u_{m_h} \ \rangle - \langle \ Au_{m_h}, u \ \rangle \longrightarrow \langle \ F, u \ \rangle - \langle \ \chi, u \ \rangle = 0 \end{aligned}$$

esto es $Au = \chi \ \ (= F)$ ■

Corolario 2.2.1. (Browder-Visick) *Sea V un espacio como el teorema y $A : V \longrightarrow V'$ un operador monótono, hemicontínuo, acotado y coercivo. Entonces A es suryectivo.*

Demostración: Basta ver que un operador monótono y hemicontínuo es pseudomonótono. ■

Corolario 2.2.2. (Teorema de Lax-Milgran) *Sea V un espacio de Hilbert real y $\mathfrak{a} : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, continúa y coerciva. Luego para cada $f \in V'$ existe un único elemento $u \in V$ tal que*

$$\mathfrak{a}(u, v) = \langle \ f, v \ \rangle \ , \ \forall v \in V$$

Demostración: La forma bilineal define un operador lineal, acotado, fuertemente monótono $A : V \longrightarrow V'$ dado por la relación

$$\langle \ Au, v \ \rangle = \mathfrak{a}(u, v) \ , \ \forall u, v \in V$$

Por lo que la ecuación: $\mathfrak{a}(u, v) = \langle \ f, v \ \rangle \ , \ \forall v \in V$

Es equivalente a : $Au = f$ en V'
Así por el corolario (2.2.1), obtenemos la existencia de u en V, ya que A es fuertemente monótono y continúa, por lo tanto, en particular, es coercivo.
La unicidad es obtenida de la monotonía fuerte de A. ■

El siguiente resultado caracteriza al operador casimonótono.

Teorema 2.3. *Sea $T : V \longrightarrow V'$ un operador acotado y demicontínuo entonces*
T es cuasimonótono $\Leftrightarrow T + \varepsilon J$ es del tipo (S_+), $\forall \varepsilon > 0$
donde $J : V \longrightarrow V'$ es la aplicación de dualidad (satisface $\|Ju\| = \|u\|$ y $\langle\, Ju, u \,\rangle = \|u\|^2$)

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea T casimonótono, entonces
$\lim\sup \langle\, (T + \varepsilon J)u_r - (T + \varepsilon J)u\,,\, u_r - u \,\rangle = 0$, implica que
$\lim\sup \varepsilon \langle\, Ju_r - Ju\,,\, u_r - u \,\rangle \leq 0$. Pero como J es del tipo $(S)_+$, resulta que $u_r \longrightarrow u$.

$\Leftarrow$) Si T no fuera casimonótono, existe una subsucesion (u_r)

$$u_r \rightharpoonup u \text{ en } V \text{ y } \lim\sup \langle\, Tu_r - Tu, u_r - u \,\rangle = -\delta \quad , \quad \delta > 0$$

Luego, por la demicontinuidad de T, $u_r \nrightarrow u$.
Cómo (u_r) es acotado, $\|u_r\|_V \leq M$ para algún $M > 0$, por lo que eligiendo $\varepsilon \leq \dfrac{\delta}{4M}$ tenemos

$$\lim\sup \langle\, (T + \varepsilon J)u_r - (T + \varepsilon J)u\,,\, u_r - u \,\rangle \leq 0$$

Pero $u_r \nrightarrow u$, así $T + \varepsilon J$ no es del tipo $(S)_+$, lo que contradice la hipótesis

■

El teorema anterior muestra que cada operador pseudomonótono es casimonótono.

Capítulo 3

Existencia de soluciones de una ecuación no local con el operador $(p_1(x), p_2(x))$-Laplaciano y dependencia del gradiente.

3.1. Teoría de grado

" El concepto de grado de una aplicación, en todas sus diferentes formas, es una de las herramientas más efectivas para estudiar las propiedades de existencia y multiplicidad de ecuaciones no lineales"
Felix E. Browder (1983).

Diversos problemas de ecuaciones diferenciales e integrales adoptan la forma

$$Tx = y$$

donde T es una aplicación definida en un subconjunto Ω de un espacio de Banach X, con valores en X y $y \in X$. En general T puede ser una aplicación no lineal.

Usualmente no es posible hallar la solución (ó soluciones) de una manera explícita (ó constructiva), por lo que la investigación de las propiedades cualitativas de ellas, existencia, unicidad, multiplicidad, etc, es de vital importancia en la obtención de información sobre dichas soluciones.

Una herramienta fundamental en el estudio de estas propiedades es la teoría del grado topológico. Las raíces de esta teoría van hacia las demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra, dadas por C. F. Gauss en 1799, y que permitieron crear la Teoría del Índice por L. Kronecker en 1869. Fué Browder, quién en 1911 dio la definición precisa del grado de una función continúa (usando técnicas de la topología combinatoria).

En su famoso trabajo de Leray y Schauder [54], se extiende las construcciones anteriores definiendo el grado topológico para ciertas funciones definidas en conjuntos abiertos, acotados en espacios de Banach arbitrario, estas funciones son llamadas transformaciones de Leray-Schauder (L-S), y son perturbaciones compactas de la identidad, esto es $T = I - F$, donde F es una aplicación compacta.

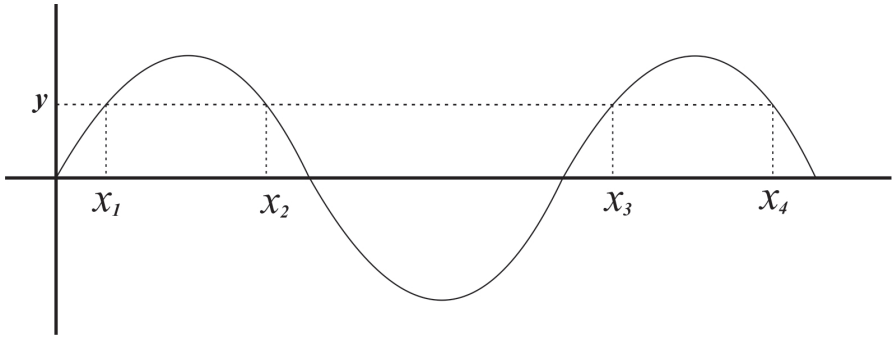
Basado en el estudio de la Integral de Kronecker y el teorema de Sard, Heinz [49] en 1959 obtiene una caracterización axiomática de la teoría del grado de Leray-Schauder.

Actualmente la construcción del grado por Heinz, se realiza definiendo primero el grado para funciones continuamente diferenciables y luego ésta definición es extendida a funciones contínuas vía un proceso de aproximación con respecto a la norma sup; esta aproximación es posible debido al Teorema de Sard.

Por otro lado, debemos mencionar que el resultado clave para la obtención del Grado de Leray-Schauder como una generalización del Grado de Brauwer, es el denominado Lema Leray-Schauder que nos permite bajo ciertas condiciones, interactuar entre el espacio finito - dimensional sin cambiar el valor de la función grado. El Lema de Leray-Schauder permite también la construcción del grado topológico a aplicaciones del tipo (S_+). Ver Berkovits [10, 11, 13], Browder [9, 18, 20].

Una idea intuitiva del grado es la siguiente:

Considera una función $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y $y \in f(I)$ tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in f^{-1}(\{y\})$



El grado es (por definición) la suma de los signos de $f'(x)$ para $x \in f^{-1}(\{y\})$ y que escribimos $d(f, I, y)$. Así en el gráfico

$$d(f, I, y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\}) \cap I} signf'(x) = \sum_{i=1}^{4} signf'(x_i) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

donde

$$sign(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \\ \\ -1 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

Generalizando, consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, abierto, acostado y $y \in \mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Recordemos que si $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, entonces el Jacobiano de f en $x \in \Omega$ está definido por

$$J_f(x) = det(f'(x)) \text{ dónde } f'(x) = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

Considere $S = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$ y $y \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$, se define el grado topológico de Brouwer de la aplicación f en relación a Ω en el punto y, como el número entero

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{\varepsilon_i \in f^{-1}(\{y\}) \cap \Omega} sign(J_f(\varepsilon_i))$$

Si $f^{-1}(\{y\}) = \phi$ definimos $d(f, \Omega, y) = 0$.

El siguiente resultado extiende la anterior definición a funciones continuas.

Teorema 3.1. *Sea* $M = \{d(f, \Omega, y) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *es abierto y acotado ,* $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es contínua ,* $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)\}$*, existe una única aplicación* $d : M \longrightarrow \mathbb{Z}$ *que satisface:*

(d_1) $d(I, \Omega, y) = 1$*, si* $y \in \Omega$ *(normalidad)*

(d_2) $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$*, dónde* Ω_1 *y* Ω_2 *son conjuntos abiertos, disjuntos tal que* $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$ *(aditividad).*

(d_3) $d(h(t, \cdot), \Omega, z(t))$ *es independiente de* $t \in [0, 1]$ *sí* $z : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *y* $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *son funciones continuas y* $z(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ *para cada* $t \in [0, 1]$ *(Invarianza por homotopía).*

Este teorema, permite definir el grado de Brouwer de f en y con respecto al conjunto Ω, como el número $d(f, \Omega, y)$.

La propiedad de aproximación uniforme de aplicaciones compactas $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$, donde X es un espacio de Banach real (de dimensión arbitraria) y $\Omega \subseteq X$ es un conjunto abierto y acotado (esto es aplicaciones continuas con $T(\overline{\Omega})$ relativamente compacto), por aplicaciones compactas cuyo rango está contenido en subespacios de X, de dimensión finita, permite definir, basado en el grado de Browder, un grado para perturbaciones compactas de la identidad, llamada el grado de Leray-Schouder. Así tenemos el

Teorema 3.2. *Sea* X *un espacio de Banach real,* $\Gamma = \{(I - T, \Omega, y) : \Omega$ *abierto acotado de* X *,* $T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *es aplicación compacta* $\wedge$ $y \notin (I - T)(\partial\Omega)\}$*. Entonces existe una aplicación* $d_{LS} : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}$ *tal que*

(D_1) $d_{LS}(I, \Omega, y) = 1$*, si* $y \in \Omega$*.*

(D_2) *Si* Ω_1 *y* Ω_2 *son subconjuntos abiertos y disjuntos de* Ω *tal que* $(I - T)(\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2))$*, entonces*

$$d_{LS}(I - T, \Omega, y) = d_{LS}(I - T, \Omega_1, y) + d_{LS}(I - T, \Omega_2, y)$$

(D_3) *Si* $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *es compacta,* $z : [0,1] \longrightarrow X$ *es continua y* $z(x) \notin (I - h(t,\cdot))(\partial\Omega)$ *para cada* $t \in [0,1]$*, entonces* $d_{LS}(I - h(t,\cdot), \Omega, z(t))$ *es independiente de* t*. (Invarianza por homotopía).*

Ya estamos en condiciones de presentar el grado topológico para operadores monótonos generalizados. Como es sabido las aplicaciones del tipo monótono surge naturalmente en la investigación de ecuaciones diferenciales parciales elípticas y por lo tanto es natural extender el concepto del grado para estos operadores. Así consideramos X un espacio de Banach real reflexivo y X' su dual. Consideremos el operador $T : X \longrightarrow X'$. Se dice que T satisface la condición (S_+) sí

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ en } X \ , \ \lim_{\nu \to +\infty} sup \langle \, Tu_\nu \, , \, u_\nu - u_0 \, \rangle \leq 0$$

implica $u_\nu \longrightarrow u_0$ en X.
La condición (S_+) es un tipo de condición de compacidad que fué introducida independientemente por Browder [9] en 1983 y Skypnik [67] en 1982 (quién le llamó condición $\alpha(X)$), y es esencial para construir el grado para $T : X \longrightarrow X'$.
El grado para éste tipo de operadores es construído usando el grado de Browder y aproximaciones finito dimensionales como es la construcción del grado de Leray-Schauder; en este caso las aplicaciones que satisfacen la condición (S_+) juegan un papel similar de las perturbaciones compactas de la identidad.
En 1986, J. Berkovits y V. Mustonen presentaron una construcción alternativa, más sólida, que usa la teoría del grado de Leray-Schauder y el Teorema de la inmersión de Browder-Ton, ver [23]. Éste método es llamado de superregularización elíptica.
La teoría del grado para operadores monótonos generalizados ha sido recientemente (hasta donde conocemos) extendido a una clase mayor de operadores en espacios de Banach no reflexivos [70].
Las ecuaciones abstractas de Hammerstein de la forma

$$u + (S \circ T)(u) = 0$$

donde $T : X \longrightarrow X'$ y $S : X' \longrightarrow X$ son operadores del tipo monótono han sido estudiados por diversos autores [76], [12] y tienen una gran aplicabilidad para resolver ecuaciones integrales.
Recientemente en 2015, Kim and Hong [51] introdujeron una teoría del grado para una clase de operadores demicontínuos del tipo (S_+) generalizado en espacios de Banach reflexivos, basados en el trabajo de Berkovits [13]. Esta teoría del grado será aplicada para resolver nuestro problema no local en espacios de Sobolev con exponente variable.

3.2. Existencia de soluciones para la ecuación no local.

En esta sección, abordaremos el problema central en esta tesis:

$$-M_1(L_1(u))div(|\nabla u|^{p_1(x)-2}\nabla u) - M_2(L_2(u))div(|\nabla u|^{p_2(x)-2}\nabla u)$$

$$= f(x,u,\nabla u)\,|u|_{s(x)}^{t(x)} \text{ en } \Omega \qquad (3.1)$$

$$u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio abierto, acotado y suave, $p_i(x) \in C(\overline{\Omega})$ con $p_i(x) > 1$ para cualquier $x \in \overline{\Omega}$, $i = 1, 2$

$$L_i(u) = \int_\Omega \frac{1}{p_i(x)} |\nabla u|^{p_i(x)}\, dx$$

y M_i, f son funciones que satisfacen condiciones las cuales se establecerán más adelante.
El problema (3.1) está relacionado al problema estacionario de un problema presentado por Kirchhoff [52].

Especificamente, presentó un modelo dado por la ecuación

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho_0}{h} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{3.2}$$

que extiende la clásica ecuación de onda de D'Alembert's considerando los efectos de los cambios en la longitud de la cuerda durante las vibraciones. Después del trabajo de Lions [57], donde se da el problema (3.2) en un marco abstracto, muchos autores estudiaron varios problemas del tipo Kirchhoff, por ejemplo [4, 25, 33, 35, 73]. El estudio de las ecuaciones del tipo Kirchhoff ya ha sido extendido a los casos que involucran el p-Laplaciano (ver [30, 31, 37, 38]) y el $p(x)$-Laplaciano (ver [29, 34, 36, 42, 35, 74]). Para el significado físico y biológico de los coeficientes no locales, ver [2, 32, 27, 28] y las referencias, allí indicadas.
En un trabajo reciente, los autores en [6], investigaron la ecuación tipo $p(x)$-Kirchhoff.

$$-M\left(\int_\Omega \left(A(x,\nabla u) + \frac{1}{p(x)}\right)|\,u\,|^{p(x)}\,dx\right)\left[div(a(x,\nabla u)) - |\,u\,|^{p(x)-2}\,u\right]$$

$$= f(x,u,)\,|\,u\,|_{s(x)}^{t(x)} \text{ en } \Omega$$

$$u = constante \text{ sobre } \partial\Omega$$

$$\int_{\partial\Omega} a\,(x,\nabla u)\,.\nu\,d\Gamma = 0$$

mediante métodos topológicos.
Debido a que la no linealidad f depende del gradiente de la solución, el problema (3.1) no tiene estructura variacional, por lo que, las técnicas variacionales más usuales no se pueden aplicar directamente. Para el caso $M_1 = M_2 = 1$ y $p_1 = p_2 =: constante$, $t(x) = 0$ existen varios trabajos, usando el método de sub y supersoluciones, grado topológico, teorema del punto fijo, teoria de operadores seudomonótonos, la teoria de Morse y técnicas de aproximación, ver, entre otros los papers [44, 43, 59, 63, 64, 69]. En [47], los autores usaron la idea desarrollada en [46].

Esta idea consiste en recuperar el aspecto variacional para (3.1) congelando el término ∇u que aparece como argumento de f. Después de esto, se realiza un esquema iterativo para obtener una solución no trivial del problema inicial. Similarmente, en un muy reciente trabajo [8], los autores establecieron la existencia de una solución positiva. El caso $M_1 = M_2$ y $p_1 = p_2 =: \textit{constante}$, $t(x) = 0$, se estudió en [50, 63, 1, 58]. En [55, 56, 67, 75] los autores consideran el problema (3.1) con $M_1 M_2 = 1$, $p_1 \neq p_2$, siendo p_1, p_2 funciones contínuas y $f = f(x, u)$, ellos demostraron la existencia de soluciones mediante métodos variacionales. Hasta donde conocemos, hay pocos trabajos que se ocupan de problemas no locales que involucran el operador $((p_1(x), p_2(x)))$-Laplaciano (ver [5]).
Nuestro objetivo es establecer la existencia de soluciones para el problema (3.1) mediante la teoría de grado. Primero, estableceremos la existencia de una solución débil mediante la teoría de grado para operadores del tipo (S_+) en términos de la ecuación de Hammerstein. Este método se ha introducido recientemente en [51] para estudiar una ecuación cuasilineal con el operador p-Laplaciano $-\Delta_p$ cuando el término no lineal depende del gradiente de la solución, i.e. cuando $f = f(x, u, \nabla u)$. Aqui adaptamos esta técnica para considerar una ecuación no local con el operador $((p_1(x), p_2(x)))$-Laplaciano.
Conseguiremos la existencia de una solución débil del problema (3.1) empleando directamente la teoría de grado para operadores del tipo generalizado (S_+).
Hasta donde sabemos, el problema (3.1) no se ha estudiado mediante esta teoría. Los resultados obtenidos en esta tesis son tambien nuevos para el caso en que $p(x)$ es constante.
Esta sección es reorganizada como sigue. En la subsección 3.3 vemos resultado de la teoría de grado para operadores de tipo (S_+). También probamos propiedades fundamentales de los operadores aparecids en nuestro problema. La subsección 3.4 está dedicado a la demostración de los resultados principales de esta tesis.

3.3. Preliminares

Primero veamos definiciones y propiedades básicas de la teoría del grado de Berkovits para operadores demicontinuas de tipo (S_+) generalizado en espacios de Banach real reflexivo [51].
Sea X un espacios de Banach real reflexivo con espacio dual X^*. Podemos asumir que X y X^* son uniformemente y localmente convexos (Teorema de Troyanski's [69]). El símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ denota el dual usual entre X^* y X en este orden. En el caso reflexivo donde el espacio bidual X^{**} es identificado con X, a veces escribimos $\langle y, x \rangle_X$ por $\langle x, y \rangle_{X^*}$ para $x \in X$ y $y \in X^*$
Sea Ω un subconjunto no vacio de $X, (u_\nu)_{\nu \leq 1} \subseteq \Omega$ y $F : \Omega \subseteq X \longrightarrow X^*$. Recordemos la aplicación F es

1) Demicontinua si $u_\nu \longrightarrow u$ implica $F(u_\nu) \rightharpoonup F(u)$

2) Es de clase (S_+) si $u_\nu \rightharpoonup u$ y $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \sup \langle Fu_\nu, u_\nu - u \rangle \leq 0$ resulta $u_\nu \longrightarrow u$

3) Cuasimonótono si $u_\nu \rightharpoonup u$ implica $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \sup \langle Fu_\nu, u_\nu - u \rangle \leq 0$

Para cualquier operador $F : \Omega \subseteq X \longrightarrow X$ y cvualquier operador acotado $T : \Omega_1 \subseteq X \to X^*$ tal que $\Omega \subseteq \Omega_1$, decimos que F satisface la condición $(S_+)_T$ si para cualquier sucesión (u_ν) en Ω con $u_\nu \rightharpoonup u$, $Tu_\nu \rightharpoonup y$ y $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \sup \langle Fu_\nu, Tu_\nu - y \rangle \leq 0$, tenemos $u_\nu \longrightarrow u$

Observación 3.1. ***:*** *Es conocido que*

(a) *Si una transformación es compacta en un conjunto, entonces es cuasi-monótona en ese conjunto.*

(b) *Si la transformación es demi-continua y satisface la condición (S_+) en un conjunto, entonces es cuasimonótona en ese conjunto.*

(c) *La suma de dos operadores del tipo (S_+) es un operador del tipo (S_+)*

(d) *La suma de una aplicación del tipo (S_+) y un operador compacto, es un operador del tipo (S_+).*

Ejemplo 3. (De operador del tipo $(S_+)_T$)
Sea H un espacio de Hilbert, real, separable e infinito- dimensional, $E \subseteq H$ un subespacio lineal cerrado tal que $dimE^{\perp} = dimE = \infty$. Sea $T : H \longrightarrow E$ el operador de proyección ortogonal y denotamos

$$Q = I - T : H \longrightarrow E^{\perp}$$

Tomemos

$$F_2(u) = \frac{Tu}{\|u\| + 1} \ , \ \forall u \in H$$

Evidentemente la aplicación F_2 es acotada

$\left(\|F_2 u\| \leq \dfrac{\|Tu\|}{\|u\| + 1} \leq \dfrac{\|u\|}{\|u\| + 1} \leq 1 \right)$ y continúa.

(es cociente de aplicación es continua con denominador no nulo).

Veamos qué F_2 satisface la condición $(S_+)_+$

Asumamos

$$u_r \rightharpoonup u \ \ , \ \ T\,u_r \rightharpoonup v \ \ y \ \ \lim\sup \langle \ F_2(u_r), T\,u_r - v \ \rangle \leq 0$$

Se tiene inicialmente que, como

$$u_r \rightharpoonup u \ \text{ es equivalente a } \ T\,u_r \rightharpoonup v \ \text{ así } \ T\,u = v$$

$$\|T\,u_r\|^2 - \langle \ T\,u_r, v \ \rangle = \langle \ T\,u_r, T\,u_r - v \ \rangle = \frac{1}{\|u\| + 1} \langle \ F_2\,u_r, T\,u_r - v \ \rangle \ \ ...(*)$$

De la última igualdad de (*) se tiene

$$\lim\sup \langle \ T\,u_r, T\,u_r - v \ \rangle \leq \left(\lim\sup \frac{1}{\|u\|} \right) \lim\sup \langle \ F_2\,u_r, T\,u_r - v \ \rangle \leq 0$$

De la primera igualdad de (*)

$$\lim\sup \langle \ T\,u, T\,u_r - v \ \rangle \geq \lim\sup \|T\,u_r\|^2 \geq 0$$

En consecuencia $\lim\sup \langle \ T\,u, T\,u_r - v \ \rangle = 0$ y cómo $Tu = v$ resulta $T\,u_r \longrightarrow Tu$, luego $\|T\,u_r\| \longrightarrow \|T\,u\|$.

Como H es reflexivo $u_r \longrightarrow u$.

Ahora, consideremos el siguiente conjunto.
$\mathscr{F}_1(\Omega) = \{F : \Omega \subseteq X \longrightarrow X^*, F\text{es acotada, demicontínua y de clase } (S_+) \}$
$\mathscr{F}_T(\Omega) = \{F : \Omega \subseteq X \longrightarrow X^*, F\text{es demicontínua y de clase } (S_+)_T \}$
Para cualquier $\Omega \subseteq D_F$ y cualquier $T \in \mathscr{F}_1(\Omega)$, donde D_F denota el dominio de F. Necesitamos el siguiente resultado relacionado al operador Hammerstein de la forma $I + S \circ T$

Lema 3.1. ([51, Lema 2.3]) *Supongamos que $T \in \mathscr{F}_1(\overline{\Omega})$ es continua y $S : D_S \subseteq X^* \to X$ demicontinua tal que $T(\overline{\Omega}) \subseteq D_S$, donde Ω es un conjunto acotado en el espacio de Banach real reflexivo X. Entonces*

(1) *a) Si S es cuasimonótona, entonces $I + S \circ T \in \mathscr{F}_T(\overline{\Omega})$ donde I denota el operador identidad.*

(2) *b) Si S satisface la condición (S_+), entonces $S \circ T \in \mathscr{F}_T(\overline{\Omega})$*

Seguidamente, presentamos un resultado que pertenece a la existencia del grado topológico para una clase de operador demicontínuo que satisface la condición $(S_+)_T$.

Teorema 3.3. ([51, Teorema 3.4]) *Sea*

$$\mathscr{M} = \left\{(F, \Omega, h) \ / \ \Omega \in \mathcal{O} \ , \ T \in \mathscr{F}_T(\overline{\Omega}) \ , \ F \in \mathscr{F}_T(\overline{\Omega}) \ , \ h \notin F(\partial\Omega) \right\}$$

entonces $\mathcal{O}$ denota la colección de todos los conjuntos abiertos limitados en X. Entonces existe una función de grado (tipo Hammerstein) $d : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{Z}$ la cual tiene las siguientes propiedades:

(a) *(existencia) Si $d(F, \Omega, h) \neq 0$ entonces la ecuación $Fu = h$ tiene una solución en Ω.*

(b) *(Aditiva) Sea $F \in \mathscr{F}_T(\overline{\Omega})$, para cada conjuntos abiertos disjuntos $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$ y cada $h \notin F(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ tenemos*

$$d(F, \Omega, h) = d(F, \Omega_1, h) + d(F, \Omega_2, h)$$

(c) *(Normalización) $d(F, \Omega, h) = 1$ para cada $h \in \Omega$.*

(d) *(Invarianza bajo la homotopía) Sea* $T \in \mathscr{F}_1(\overline{\Omega})$*, es contínua y* $F, S \in \mathscr{F}_T(\overline{\Omega})$*. Una homotopía afin admisible (de* $\overline{\Omega}$ *en* X*) es una transformación*

$$H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow X$$

definida por

$$H(t,u) = (1-t)Fu + tSu \ , \ (t,u) \in [0,1] \times \overline{\Omega}$$

(También H *satisface la condición* $(S_+)_T$ *por el Lema 2.5 en [5]). Si* $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *es una homotopía afin admisible, con el soporte usual* T *y* $h : [0,1] \longrightarrow X$ *es una curva contínua en* X *tal que* $h(t) \notin H(t, \partial\Omega)$ *para todo* $t \in [0,1]$*, el valor* $d(H(t,\cdot), \Omega, h(t))$ *es constante para todo* $t \in [0,1]$*.*
Con estos resultados preliminares de la teoría de grados, abordamos el problema (3.1).
Sobre las funciones M_1, M_2 *asumimos que* (M_0)

$$M_i : [0, +\infty[\longrightarrow]m_0, +\infty[\quad (i = 1, 2)$$

son funciones continuas, no decrecientes con $m_0 > 0$*.*
Ahora analizamos las propiedades del operador no local $(p_1(x), p_2(x))$*-Laplaciano*

$$-M_1\left(L_1(u)\right) div\left(\mid \nabla u \mid^{p_1(x)-2} \nabla u\right) - M_2\left(L_2(u)\right) div\left(\mid \nabla u \mid^{p_2(x)-2} \nabla u\right)$$

Denotamos

$$p_M(x) = \max\left\{ \ p_(x), p_2(x) \ \right\} \ , \ p_m(x) = \min\left\{ \ p_(x), p_2(x) \ \right\}$$

Observación 3.2. ***:***

(i) $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach separable y reflexivo.*

(ii) *Para* $q(x) \in C_+(\overline{\Omega})$ *tal que* $q(x) < p_M^*(x)$ *para cualquier* $x \in \overline{\Omega}$*, tenemos*

$$X := W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p_2(x)}(\Omega) = W_0^{1,p_M(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

inmersión continua y compacta.

Es fácil probar que $p_M, p_m \in C_+(\overline{\Omega})$.
Consideremos el funcional siguiente

$$\Phi(u) = \widehat{M_1}(L_1(u)) + \widehat{M_2}(L_2(u)) := \Phi_1(u) + \Phi_2(u) \ , \ \forall u \in X$$

donde $X := W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$ con su norma dada por

$$\|u\| := \|u\|_{p_1(x)} + \|u\|_{p_2(x)} \ , \text{ para todo } u \in X$$

$$L_i(u) = \int_\Omega \frac{1}{p_i(x)} \mid \nabla u \mid^{p_i(x)} dx \quad y \quad \widehat{M_i}(s) = \int_0^s M_i(t)dt$$

Lema 3.2. Φ *está bien definida y es de clase* $C^1(X, \mathbb{R})$
Además

$$\langle\ \Phi'(u), v\ \rangle = \langle\ \Phi_1'(u), v\ \rangle + \langle\ \Phi_2'(u), v\ \rangle \ , \ u, v \in X$$

dónde

$$\langle\ \Phi_i'(u), v\ \rangle = M_i(L_i(u_r)) \int_\Omega \mid \nabla u \mid^{p_i(x)-2} \nabla u_r . \nabla v dx$$

Por lo tanto, el operador no local $(p_1(x), p_2(x))$-Laplaciano es el operador derivada de Φ en el sentido débil.
Demostración: Primero probaremos que Φ está bien definido.
Al ser $M_i : [0, +\infty[\ \longrightarrow \ ]m_0, +\infty[$, se tiene

$$\widehat{M_i}(t) = \int_0^t M_i(s)ds < +\infty \ , \text{ para cada } t \in [0, +\infty[,$$

luego

$$\widehat{M_i}(L_i(u)) < +\infty \ , \ \forall u \in X$$

Así $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, está bien definido.
Veamos ahora que Φ_i es de clase $C^1(X, \mathbb{R})$
De la definición de $\widehat{M_i}$, se obtiene

$$\widehat{M_i}(t) = M_i(t) \in C(\ [0, +\infty[\ , \ ]m_0\ , \ +\infty[\ )$$

También sabemos que L_i es de clase $C^1(X,\mathbb{R})$ y

$$\langle\ L_i'(u), v\ \rangle = \int_\Omega |\ \nabla u\ |^{p_i(x)-2}\ \nabla u_r.\nabla v dx\ ,\ \forall u, v \in X$$

En consecuencia

$$\Phi_i(u) = \widehat{M_i}(L_i(u))$$

es la composición de dos funciones diferenciables, luego Φ_i es diferenciable y

$$\begin{aligned}\langle\ \Phi_i'(u), v\ \rangle &= \widehat{M_i}'(L_i(u))\ \langle\ L_i'(u), v\ \rangle \\ &= M_i(L_i(u)) \int_\Omega |\ \nabla u\ |^{p_i(x)-2}\ \nabla u_r.\nabla v dx\ ,\ \forall u \neq 0\ ,\ v \in X\end{aligned}$$

La diferenciabilidad en $u = 0$, se prueba directamente por definición.
Veamos que $\Phi_i : X \longrightarrow X^*$ es contínuo.
En efecto, sea $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ una sucesión en X tal que $u_\nu \longrightarrow u$. Así $(u_\nu)_{\nu\geq 1}$ es acotado en X, $(L_i(u_\nu))_{\nu\geq 1}$ es acotado en $\mathbb{R}$ y de la continuidad de M_i existe $C \geq 0$ tal que

$$M_i(L_i(u_\nu)) \leq C\ \ ,\ \ \forall \nu \in \mathbb{N}\ ,\ i = 1, 2$$

La desigualdad de Holder implica que, para $v \in X$

$$\begin{aligned}|\langle\ \Phi_i'(u_\nu), v\ \rangle - \langle\ \Phi_i'(u), v\ \rangle| &= \Big| M_i(L_i(u_\nu)) \int_\Omega |\ \nabla u_\nu\ |^{p_i(x)-2}\ \nabla u_\nu.\nabla v dx \\ &- M_i(L_i(u)) \int_\Omega |\ \nabla u\ |^{p_i(x)-2}\ \nabla u.\nabla v dx \Big| \\ &\leq M(L_i(u_\nu))\Big| \int_\Omega \Big(|\ \nabla u_\nu\ |^{p_i(x)-2}\ \nabla u_\nu \\ &- |\ \nabla u\ |^{p_i(x)-2}\ \nabla u\Big) \nabla v dx \Big| \\ &+ \Big| M_i\Big(L_i(u_\nu)\Big) - M_i\Big(L_i(u)\Big)\Big| \int_\Omega |\ \nabla u\ |^{p_i(x)-1}\ |\nabla v| dx\end{aligned}$$

$$\leq\ C\Big|\int_\Omega\Big(\mid\nabla u_\nu\mid^{p_i(x)-1}\nabla u_\nu-\mid\nabla u\mid^{p_i(x)-1}\nabla u\Big)\nabla v dx\Big|$$

$$+\ \ \|\,u\,\|^{p_i-1}\|\,v\,\|\Big|M_i\Big(L_i(u_\nu)\Big)-M_i\Big(L_i(u)\Big)\Big|$$

donde $p=\max\{p_M^+,p_m^-\}$

En consecuencia
$\|\ \Phi_i'(u_\nu)-\ \Phi_i'(u)\|=\sup\limits_{\|\,v\,\|\leq 1}|\langle\ \Phi_i'(u_\nu),v\ \rangle-\langle\ \Phi_i'(u),v\ \rangle|\longrightarrow 0$
cuando $\nu\longrightarrow+\infty$ ■

Proposición 3.1. *Asuma que (M_0) se verefica. Entonces*

(i) $\Phi':X\longrightarrow X^*$ *es un operador contínuo, acotado y estrictamente monótono.*

(ii) Φ' *es de tipo* (S_+)*, i.e. si* $u_\nu\rightharpoonup u$ *en* X *y*

$$\lim_{\nu\to+\infty}\sup\langle\Phi'(u_\nu)-\Phi'(u),u_\nu-u\rangle=0$$

entonces $u_\nu\longrightarrow u$ *en* X*.*

(iii) Φ' *es coercivo. Además,* Φ' *es un homeomorfismo.*

Demostración:

(i) Es obvio que la transformación $\Phi':X\longrightarrow X^*$ es contínuo y limitado. Considerar el funcional $L_i:X\longrightarrow\mathbb{R}$ definido por

$$L_i(u)=\int_\Omega\frac{1}{p_i(x)}\mid\nabla u\mid^{p_i(x)}dx\ \ ,\ \ \text{para todo}\ \ u\in X$$

cuya derivada Gâteaux en el punto $u\in X$ es dado por

$$\Big\langle L_i^{'}(u),u\Big\rangle=\int_\Omega\mid\nabla u\mid^{p_i(x)-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\ dx\ \ ,\ \ \text{para todo}\ \ v\in X,$$

Sabemos que para $p > 1$ existe una constante positiva C_p tal que

$$\left\langle |x|^{p-2}\, x - |y|^{p-2}\, y, x - y \right\rangle \geq \begin{cases} C_p \, \|x-y\|^p & ; \text{ si } \ p \geq 2, \\ C_p \dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{p-2}} & ; \text{ si } \ 1 < p < 2, \\ & (x,y) \neq (0,0) \end{cases} \tag{3.3}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$ (Ver apéndice). Por tanto

$$\left\langle L_i^{'}(u) - L_i^{'}(v), u - v \right\rangle > 0$$

para todo $u \neq v \in X$, la cual quiere decir que $L_i^{'}$ es estrictamente monótona. Así, por [76, proposición 25.10], L es estrictamente convexa. Además, desde que M_i es no decreciente, $\widehat{M_i}$ es convexo en $[0, +\infty[$. Así, para cada $u, v \in X$ con $u \neq v$, y cada $s, t \in (0,1)$ con $s + t = 1$, uno tiene

$$\widehat{M_i}(L_i(su + tv)) < \widehat{M_j}(sL_i(u) + tL_i(v)) \leq s\widehat{M_i}(L_i(u)) + t\widehat{M_i}(L_i(v))$$

Esto prueba que $\Phi_i, i = 1, 2$ es estrictamente convexa, y así $\Phi^{'} = \Phi_1^{'} + \Phi_2^{'}$ es estrictamente monótono.

(ii) Razonando como en [35] podemos probar que $\Phi_1^{'}$ y $\Phi_2^{'}$ son de tipo (S_+) entonces su suma Φ' también tienen la propiedad (S_+),

(iii) Desde que Φ' es un operador estrictamente monótono en X, Φ' es inyectiva. Para $u \in X$ con $\|u\| > 1$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\left\langle \Phi^{'}(u), u \right\rangle}{\|u\|} &= \frac{M_1(L_1(u)) \displaystyle\int_\Omega |\, \nabla u \,|^{p_1(x)}\, dx + M_2(L_2(u)) \int_\Omega |\, \nabla u \,|^{p_2(x)}\, dx}{\|u\|} \\ &\geq \frac{m_0 \displaystyle\int_\Omega |\, \nabla u \,|^{p_1(x)}\, dx + \int_\Omega |\, \nabla u \,|^{p_2(x)}\, dx}{\|u\|} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{m_0\left(\|u\|^{p_1^-} + \|u\|^{p_2^-}\right)}{\|u\|}$$

$$\geq m_0 \|u\|^{p_m^- - 1}$$

por lo tanto Φ' es coercivo. Claramente Φ' es también demicontínua. En consideración del teorema Browder-Minty [76 , Teorema 26A], el operador $\Phi^{'}$ es una suryección, y desde que la inversa $(\Phi')^{-1} : X^* \longrightarrow X$ de Φ' existe. Esto es suficiente entonces para probar continuidad de $(\Phi')^{-1}$. Sea (g_n) una sucesión de X^* tal que $g_n \longrightarrow g$ en X^*. Sea $u_n = (\Phi')^{-1}(g_n)$, $u = (\Phi')^{-1}(g)$, entonces $\Phi'(u_n) = g_n$, $\Phi'(u) = g$. Por la coercitividad de $\Phi^{'}$ deducimos que (u_n) es acotada en X, aumentar para una subsucesión, podemos asumir que $u_n \rightharpoonup u$. Desde que $g_n \longrightarrow g$,

$$\lim_{\nu \to +\infty} \langle \Phi'(u_\nu) - \Phi'(u), u_\nu - u \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle g_n - g, u_n - u \rangle = 0$$

Desde que Φ' es de tipo (S_+), $u_n \longrightarrow u$, así $(\Phi')^{-1}$ es contínuo.

■

A seguir, veremos las propiedades del operador de superposición inducido por el funcional f en (1.1). Asumamos que

(F1) $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición Carathéodory en el sentido que $f(\cdot, u, \xi)$ es medible para todo $(u, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y $f(x, \cdot, \cdot)$ es continuo para casi todo $x \in \Omega$

(F2) $|f(\cdot, u, \xi)| \leq k(x) + |u|^{\eta(x)} + |\xi|^{\delta(x)}$ a.e. $x \in \Omega$ todo $(u, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ donde $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $k \in L^{p_m^{'}(x)}(\Omega)$ y $0 \leq \eta(x) < p_m^- - 1$, $0 \leq \delta(x) < \dfrac{p_m^- - 1}{p_M^{'}{}^+}$.

Lema 3.3. *Suponiendo* **(F1)** *el operador*

$$S : W_0^{1,p_M(x)}(\Omega) \longrightarrow (W_0^{1,p_M(x)}(\Omega))^*$$

dado por

$$\langle Su, v\rangle = -\int_\Omega f(x, u, \nabla u) \mid u \mid_{s(x)}^{t(x)} v \; dx$$

es contínuo y compacto.

Demostración: Aquí, seguimos la línea del teorema 3.1 en [24]. Dividimos la prueba en dos pasos.

1.- S es bien definido. En efecto, usando **(F1)** y $t \in C(\overline{\Omega})$, para todo u, v en $W_0^{1,p_M(x)}$ tenemos

$$\begin{aligned}
|\langle Su, v\rangle| &\leq \int_\Omega |f(x, u, \nabla u)| \mid u \mid_{s(x)}^{t(x)} |v| dx \\
&\leq C \, |f(x, u, \nabla u)|_{p_M'(x)} \, |v|_{p_M(x)} \\
&\leq C(\int_\Omega \mid k(x) \mid^{p_M'(x)} dx + \int_\Omega \mid u(x) \mid^{\eta(x) p_M'(x)} dx \\
&+ \int_\Omega \mid \nabla u(x) \mid^{\delta(x) p_M'(x)} dx) \\
&\leq C \left(\mid k \mid_{p_M'(x)}^{\tau} + \mid u \mid_{\eta(x) p_M'(x)}^{\beta} + \mid \nabla u \mid_{\delta(x) p_M'(x)}^{\theta} \right)^{1/\alpha} \parallel v \parallel \\
&\leq C \left(1 + \parallel u \parallel^{\beta} + \parallel u \parallel^{\theta} \right)^{1/\alpha} \parallel v \parallel < \infty \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \begin{cases} {p_M'}^{-}, & \text{si} \;\; |f(x, u, \nabla u)|_{p_M'(x)} > 1 \\ {p_M'}^{+}, & \text{si} \;\; |f(x, u, \nabla u)|_{p_M'(x)} \leq 1 \end{cases} \; ; \; \tau = \begin{cases} {p_M'}^{-}, & \text{si} \;\; |k|_{p_M'(x)} > 1 \\ {p_M'}^{+}, & \text{si} \;\; |k|_{p_M'(x)} \leq 1 \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} (\eta \; p_M')^{+}, & \text{si} \;\; |u|_{\eta(x) p_M'(x)} > 1 \\ (\eta \; p_M')^{-}, & \text{si} \;\; |u|_{\eta(x) p_M'(x)} \leq 1 \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} (\delta\ p_M^{'})^{+}, & \text{si} \quad |\nabla u|_{\delta(x)p_M^{'}(x)} > 1 \\ \\ (\delta\ p_M^{'})^{-}, & \text{si} \quad |\nabla u|_{\eta(x)p_M^{'}(x)} \leq 1 \end{cases}$$

Notamos que:

- $0 \leq \eta(x) < p_M(x) - 1 \implies 0 \leq \eta(x)p_M^{'}(x) < p_M(x)$ y

- $0 \leq \delta(x) < (p_M(x) - 1)/p_M^{'}(x)$

  $\implies 0 \leq \delta(x)p_M^{'}(x) < p_M(x) - 1 < p_M(x)$

De este modo, existe $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$|u|_{\eta(x)p_M^{'}(x)} \leq C_1 \, |u|_{p_M(x)} \quad \text{y} \quad |\nabla u|_{\delta(x)p_M^{'}(x)} \leq C_2 \, |\nabla u|_{p_M(x)}$$

respectivamente.

2.- S es contínuo en X.

Sea $u_\nu \longrightarrow u$ en X. Así, para una subsucesión de arriba, deducimos

$$u_\nu \longrightarrow u \quad \text{y} \quad \nabla u_\nu \longrightarrow u \tag{3.5}$$

y

$$|u_\nu(x)|^{p_M(x)} \leq \widehat{k}(x) \ , \ \left|\frac{\partial \nabla u_\nu}{\partial x_j}\right|^{p_M(x)} \leq \widehat{w}_j(x) \quad \text{para algún} \quad \widehat{k}, \widehat{w}_j \in L^1(\Omega) \tag{3.6}$$

para casi todo $x \in \Omega$.

Desde que $t \in C(\overline{\Omega})$

$$|\, u_\nu \,|_{s(x)}^{t(x)} \longrightarrow |\, u \,|_{s(x)}^{t(x)} \quad \text{a.e.} \quad x \in \Omega$$

Además, desde que la función f es una función Caratheodory

$$f(x, u_\nu, \nabla u_\nu) \longrightarrow f(x, u, \nabla u) \quad \text{a.e.} \quad x \in \Omega$$

De este modo, obtenemos

$$f(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\,|\,u_\nu\,|_{s(x)}^{t(x)} \longrightarrow f(x,u,\nabla u)\,|\,u\,|_{s(x)}^{t(x)} \quad \text{a.e.} \quad x\in\Omega$$

Esto sigue de **(F1)** y (3.6) que

$$\begin{aligned}
&\Big|f(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\,|\,u_\nu\,|_{s(x)}^{t(x)} - f(x,u,\nabla u)\,|\,u\,|_{s(x)}^{t(x)}\Big|^{p_M'(x)}\\
\leq\ & C\,2^{p_M'^{+}}\Big[|f(x,u_\nu,\nabla u_\nu)|^{p_M'(x)} + |f(x,u_\nu,\nabla u_\nu)|^{p_M'(x)}\Big]\\
\leq\ & C\left(1+\widehat{k}(x)+|\widehat{w}|^{\alpha(x)}\right) \quad , \quad \widehat{w}=(\widehat{w}_1,\widehat{w}_2,\cdots,\widehat{w}_n),
\end{aligned}$$

Pero, $C\left(1+k(x)+|\widehat{w}|^{\alpha(x)}\right)\in L^1(\Omega)$; de este modo, aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada con (3.5) obtenemos

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega \Big|f(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\,|\,u_\nu\,|_{s(x)}^{t(x)} - f(x,u,\nabla u)\,|\,u\,|_{s(x)}^{t(x)}\Big|^{p_M'(x)}\,dx = 0$$

Esto implica que

$$\lim_{\nu\to\infty}\Big|f(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\,|\,u_\nu\,|_{s(x)}^{t(x)} - f(x,u,\nabla u)\,|\,u\,|_{s(x)}^{t(x)}\Big|_{p_M'(x)} = 0 \qquad (3.7)$$

Por lo tanto por cálculos directos obtenemos

$$\begin{aligned}
|\langle Su_\nu,v\rangle - \langle Su,v\rangle| \ &\leq\ \int_\Omega \Big|f(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\,|\,u_\nu\,|_{s(x)}^{t(x)}\\
&-\ f(x,u,\nabla u)\,|\,u\,|_{s(x)}^{t(x)}\Big|\,|\,v\,|\,dx\\
&\leq\ C\Big|f(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\,|\,u_\nu\,|_{s(x)}^{t(x)}\\
&-\ f(x,u,\nabla u)\,|\,u\,|_{s(x)}^{t(x)}\Big|_{p_M'(x)}\,\|\,v\,\|
\end{aligned}$$

Luego de (3.7)

$$|Su_\nu - Su| \leq C\,\Big|f(x,u_\nu,\nabla u_\nu)\,|\,u_\nu\,|_{s(x)}^{t(x)} - f(x,u,\nabla u)\,|\,u\,|_{s(x)}^{t(x)}\Big|_{p_M'(x)} \longrightarrow 0$$

Por lo tanto, por el principio de convergencia en espacios de Banach, $Su_\nu \longrightarrow Su$ en X^*.
Ahora, repitiendo los mismos argumentos que en los paso 1) y 2), obtenemos que el operador superposición

$$\gamma : L^{p_M(x)}(\Omega) \times L^{p_M(x)}(\Omega, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L^{p_M^{'}(x)}(\Omega)$$

denotado por

$$\gamma(u, v)(x) = f(x, u, v) \mid u \mid_{s(x)}^{t(x)}$$

esta acotado y continuo. Más aún , el operador lineal
$J : X \longrightarrow L^{p_M(x)}(\Omega) \times L^{p_M(x)}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ definido por $J(u) = (u, \nabla u)$ es acotado. La inmersión canónica $I : X \longrightarrow L^{p_M(x)}(\Omega)$ es compacta por el teorema de inmersión Rellich's, así el operador adjunto
$I^* : L^{p_M'(x)}(\Omega) \longrightarrow X^*$ dado por

$$(I^* v)(u) = \int_\Omega v u dx$$

es un operador compacto. De la relación $S = I^* \circ \gamma \circ J$ esto sigue que $S : X \longrightarrow X^*$ es compacto. Así S es cuasimonótono.

■

3.4. El resultado principal

Como ya ha sido mencionado, probaremos que existe la solución del problema (3.1) usando la teoría de grado, vista en la subsucesión anterior.
Denotamos con $Y = W_0^{1,p_1(x)}(\Omega) \bigcap W_0^{1,p_2(x)}(\Omega)$. Definimos la transformación $F : Y \longrightarrow Y^*$ y $S : Y \longrightarrow Y^*$ por

$$\begin{aligned} \langle Fu, v\rangle &= M_1(L_1(u)) \int_\Omega \mid \nabla u \mid^{p_1(x)-2} \nabla u . \nabla v \; dx \\ &+ M_2(L_2(u)) \int_\Omega \mid \nabla u \mid^{p_2(x)-2} \nabla u . \nabla v \; dx \end{aligned}$$

y

$$\langle Su, v\rangle = -\int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,|\,u\,|_{s(x)}^{t(x)}\,v\;dx$$

para cualquier $u, v \in Y$.
Entonces $u \in Y$ es una solución débil de (3.1) si y solo si $Fu = -Su$

Teorema 3.4. *Asuma que se verifica* (M_0), **(F1)** *y* **(F2)**. *Entonces el problema (3.1) tiene una solución débil.*

Demostración: Primero, consideramos el problema

$$\begin{cases} -M_1(L_1(u))div(|\,\nabla u\,|^{p_1(x)-2}\,\nabla u) \\ \qquad\qquad -M_2(L_2(u))div(|\,\nabla u\,|^{p_2(x)-2}\,\nabla u) \quad = 0 \text{ en } \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad u \;= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Del teorema 3.2 en [55] este problema admite una solución débil única para cada $v \in Y^*$. En la proposición 3.1 el operador $F : Y \longrightarrow Y^*$ es acotado, contínuo, uniformemente monótono, coercitivo y satisface la condición (S_+).
Sea $X = Y^*$; e identificamos X^* con Y gracias a la reflexividad. Por lo tanto el Teorema Browder-Minty implica que el operador inverso $T := F^{-1} : X \longrightarrow X^*$ existe y es acotado. Además es contínuo y satisface la condición (S_+) por que F es contínuo y satisface la condición (S_+), y T es acotado. También, del Lema 3.3 $S : X^* \longrightarrow X$ es acotado, contínuo y cuasimonótono. Luego $u \in Y$ es una solución débil (3.1) si y solo si

$$u = Tv \quad \text{y} \quad v + (S \circ T)v = 0 \quad \text{para cada} \quad v \in Y^* \tag{3.8}$$

Usaremos la teoría del grado topológico de la anterior subsucesión para resolver (3.8). Consideremos el conjunto

$$B = \{v \in X : \exists \lambda \in [0,1] \quad \text{tal que} \quad v + \lambda(S \circ T)v = 0\}$$

Probaremos que B es acotado en X.

Para $v \in B$, i.e. $v \in X$ y $v + \lambda(S \circ T)v = 0$ para algún $\lambda \in [0,1]$ tenemos

$$\langle Fu, u\rangle = \langle v, Tv\rangle = -\lambda \langle (S \circ T)v, Tv\rangle$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} m_0 C_1 \int_\Omega \Big(|\nabla u|^{p_1(x)} + |\nabla u|^{p_2(x)} \Big) dx &\leq \lambda \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\, |u|_{s(x)}^{t(x)}\, u dx \\ &\leq \int_\Omega \Big(k(x)\,|u| \\ &+ |u|^{\eta(x)+1} + |\nabla u|^{\delta(x)}\,|u| \Big) dx \end{aligned}$$

Entonces

$$\|u\|^\sigma \leq C\left(\|u\| + \|u\|^\beta + \|u\|^{(\theta/\gamma)+1} \right) \tag{3.9}$$

donde

$$\sigma = \begin{cases} p_m^-, & \text{si} \quad \|u\| > 1 \\ \\ p_M^+, & \text{si} \quad \|u\| \leq 1 \end{cases} \quad ; \quad \gamma = \begin{cases} (p_M')^-, & \text{si} \quad \left| |\nabla u|^{\delta(x)} \right|_{p_M'(x)} > 1 \\ \\ (p_M')^+, & \text{si} \quad \left| |\nabla u|^{\delta(x)} \right|_{p_M'(x)} \leq 1 \end{cases}$$

De las hipotesis **(F2)** y (3.9), se sigue que $\{u = Tv : v \in B\}$ es acotado. Por lo tanto, como el operador S es acotado, deducimos que existe R tal que

$$\|v\|_X \leq R$$

Por lo que B es acotado.
De esta manera, $Iv + \lambda(S \circ T)v \neq 0 \quad \text{en} \quad \partial B(0,R), \ \ \forall \lambda \in [0,1]$
Además, del Lema 2.8 podemos afirmar que

$$I + \lambda(S \circ T) \in \mathscr{F}_T(\overline{B(0,R)}) \quad \text{y} \quad I = F \circ T \in \mathscr{F}_T(\overline{B(0,R)})$$

Ahora, definimos la homotopia $H : [0,1] \times \overline{B(0,R)} \longrightarrow X$ dado por

$$H(\lambda, v) = Iv + \lambda(S \circ T)v \quad \text{para} \quad (\lambda, v) \in [0,1] \times \overline{B(0,R)}$$

Por lo tanto, por las propiedades de la invarianza de la homotopia y

normalización en el Teorema 3.3 (d) vemos que

$$d(I + (S \circ T), \overline{B(0,R)}, 0) = d(I, \overline{B(0,R)}, 0) = 1$$

Así, por el Teorema 3.3 (a), podemos encontrar $v \in \overline{B(0,R)}$ tal que

$$v + (S \circ T)v = 0$$

Por lo tanto, tenemos que $u = Tv$ es una solución débil de (3.1).
Esto concluye la prueba. ■

En lo que sigue, usamos la teoría del grado de aplicaciones (S_+) para probar el segundo resultado de este trabajo.
Sea X un espacio de Banach, real y reflexivo.

Lema 3.4. *Sea $T : X \longrightarrow X^*$ una aplicación del tipo (S_+) acotada y demicontínua. Considere $\Omega \subseteq X$ un conjunto no vacío abierto y acotado con frontera $\partial\Omega$, tal que $Tu \neq 0$, $\forall u \in \partial\Omega$. Entonces existe un entero $d(T, \Omega, 0)$ tal que*

(i) *$d(T, \Omega, 0) \neq 0 \Longrightarrow \exists u_0 \in \Omega$ tal que $Tu_0 = 0$.*

(ii) *Sí Ω es simétrico respecto al origen y T satisface $Tu = -T(-u)$ $\forall u \in \partial\Omega$ entonces $d(T, \Omega, 0)$ es impar.*

(iii) *Sea T_λ , $\forall \lambda \in [0,1]$ una familia de aplicaciones acotadas, demicontínuas, del tipo (S_+) con $T_\lambda u \neq 0$, $\forall u \in \partial\Omega$, $\forall \lambda \in [0,1]$. Entonces $d(T_\lambda, \Omega, 0) = C \equiv$ constante , $\forall \lambda \in [0,1]$.*

Demostración: Ver [67].

Observe que (i) permite obtener soluciones de la ecuación $Tu = 0$.
La propiedad (iii) es denominada invarianza por homotopía.
El siguiente Lema será usado en la prueba del teorema 3.3.2.

Lema 3.5. *Sea $T : X \longrightarrow X^*$ una aplicación del tipo (S_+) , acotada, demicontínua, $0 \in \overline{\Omega} \backslash \partial\Omega$, $Tu \neq 0$, $\forall u \in \partial\Omega$ con Ω como en el Lema*

3.4. Si $\langle\, Tu, u \,\rangle \geq 0$, $\forall u \in \partial\Omega$ *entonces*

$$d(T, \Omega, 0) = 1$$

Demostración: Ver [67].

Observación 3.3. *Son válidas las proposiciones:*

(i) *Continuidad* $\Longrightarrow$ *demicontinuidad* $\Longrightarrow$ *hemicontinuidad*

(ii) *Demicontinuidad y* $(S_+) \Longrightarrow$ *pseudomonotonía*

Para la teoría de aplicaciones del tipo (S_+), incluyendo la teoría de grado y el teorema de suryección, ver [9, 68, 72].

Teorema 3.5. *Asuma que* (M_0) *y* (H_0) *se verifican. Si* $\beta < p_m^-$ *y* $\dfrac{\theta}{\gamma} + 1 < p_m^-$ *el problema (3.1) tiene una solución débil.*

Si $h \in X'$, entonces el problema (3.1), con h adicionado a la derecha de su primera ecuación, admite solución.

Demostración: Las aplicaciones J y $S : X \longrightarrow X^*$ definidas por

$$\begin{aligned} \langle Ju, v\rangle &= M_1(L_1(u)) \int_\Omega |\, \nabla u \,|^{p_1(x)-2} \nabla u.\nabla v \; dx \\ &+ M_2(L_2(u)) \int_\Omega |\, \nabla u \,|^{p_2(x)-2} \nabla u.\nabla v \; dx \end{aligned}$$

y

$$\langle Su, v\rangle = -\int_\Omega f(x, u, \nabla u)\, |\, u \,|_{s(x)}^{t(x)} v \; dx \quad , \quad u, v \in X$$

son respectivamente del tipo (S_+) y compacta.
Es claro que $u \in X$ es una solución de (3.1) si y solo si

$$I(u) := J(u) + S(u) = 0.$$

Del análisis anterior, es obvio que $I : X \longrightarrow X^*$ es contínua y acotado. Note que la suma de una transformación del tipo (S_+) y una transformación compacta es del tipo (S_+), en consecuencia la transformación

$I = J + S$ es del tipo (S_+).
Luego, procediendo en las acotaciones de la misma manera como en la prueba del Lema 3.3, para $\| u \| > 1$ tenemos que

$$\langle Iu, u\rangle \geq m_0 \| u \|^{p_m^-} \left(1 - C_1 \| u \|^{1-p_m^-} + C_2 \| u \|^{\beta - p_m^-} + C_3 \| u \|^{(\theta/\gamma)+1-p_m^-}\right) \tag{3.10}$$

Eligiendo $\| u \| = \mathbb{R}$ suficientemente grande, deducimos de (3.3) que

$$\langle Iu, u\rangle > 0 \quad \text{para todo} \quad u \in X \quad \text{tal que} \quad \| u \| = \mathbb{R}.$$

Por la teoría del grado topológico para aplicaciones del tipo (S_+), mencionado en el Lema 3.5 para $R > 0$ concluimos que

$$deg(L\,,\, B(0,R)\,,\, 0) = 1$$

Por lo tanto, la ecuación $I(u) = 0$ tiene al menos una solución
$u \in B(0, R)$.
Ahora probaremos la segunda parte de la tesis del Teorema. Es inmediato probar que

$$\lim_{\| u \| \to +\infty} \frac{\langle Iu, u\rangle}{\| u \|} \geq C_9 \| u \|^{p_m^- - 1} = +\infty$$

Por lo que, la aplicación I es coerciva. También usando la observación 3.3, I es pseudomonótono. Por el Teorema de Brezis, concluimos que la aplicación I es suryectiva, por lo que la ecuación

$$I(u) = h \ \text{ en } X^*$$

admite solución. Esto completa la prueba del teorema ■

Trabajos futuros

En la línea de investigación realizada en este trabajo de tesis, hay diversos tópicos que abordaremos posteriormente, a seguir:

(1) Imponiendo condiciones adecuadas a M_1 y M_2 (por ejemplo ser localmente lipschitzianas) y a f una condición de monotonía, ¿es posible probar unicidad para el problema (3.1)?.

(2) Una línea interesante de trabajo en abierto es resolver el problema

$$\sum_{i=1}^{2} M_i(L_i(u))div(|\nabla u|^{p_1(x)-2}\nabla u) \in f(x,u,\nabla u)\,|u|_{s(x)}^{t(x)} \text{ en } \Omega$$

$$u = 0 \text{ en } \Gamma$$

usando el teorema de operadores multivaluados y su correspondiente aplicación de grado.

(3) Aún está inexplorado, el caso usando p depende de u, esto es

$$M(L(u))div(|\nabla u|^{p(u)-2}\nabla u) = f(x,u,\nabla u)\,|u|_{s(x)}^{t(x)} \text{ en } \Omega$$

$$u = 0 \text{ en } \Gamma$$

siendo $L(u) = \displaystyle\int_\Omega \frac{1}{p(u(x))}|\nabla u|^{p(u(x))}dx$

Conclusión

La teoría del grado para operadores del tipo (S_+) idealizada por Kim y Hong constituye una herramienta útil y efectiva para probar la existencia de soluciones débiles en ecuaciones diferenciales, que definen operadores diferenciales muy generales, en particular nos ha permitido probar la existencia de soluciones en un problema no local con el $(p_1(x), p_2(x))$-Laplaciano, con dependencia del gradiente.
Este grado topológico tiene un amplio espectro de acción y puede ser usada para probar existencia en otros tipos de ecuaciones, por ejemplo ecuaciones integro diferenciales, con condiciones de frontera no homogéneos. La limitación que presenta el método es que no todo problema en E.D.P. puede ser traducido a una ecuación de Hammerstein, en esta situación es recomendable recurrir a otros métodos como el método de Galerkin, Teoría de Morse, etc. Un problema interesante de abordar con la misma teoría del Grado, es resolver un sistema similar al de esta tesis, pero con operadores multivaluados, lo que constituye un tema abierto para futuras investigaciones.

Apéndice

Teorema 3.6. (Banach-Steinhaus) *Sea V un espacio de Banach y Y un espacio normado, sea $(T_i)_{i\in I} \subseteq \mathscr{L}(V,Y)$ tal que*

$$\sup_{i\in I} |T_i(u)|_Y \,<\, \infty \ , \ \forall u \in V$$

Entonces

$$\sup_{i\in I} |T_i(u)|_{\mathscr{L}(V,Y)} \,<\, \infty$$

Lema 3.6. *Sea V espacio normado. Si $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en V tal que si la subsucesión tiene una subsucesión que converge al mismo límite $u \in V$, entonces*

$$u_\nu \longrightarrow u.$$

Lema 3.7. (del ángulo agudo) *Sea $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ funciones contínuas tal que existe $R > 0$ con*

$$\sum_{i=1}^{n} g_(x)\, x_i \geq 0 \ , \ \forall x = (x,x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ , \ |\, x \,| = R.$$

Entonces $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $g_i(x_0)$, $\forall i = 1, 2, ..., n$ con $|\, x_0 \,| < R$

Proposición 3.2. *Existe $C > 0$ tal que*

$$[f(\xi) - f(\eta), \xi - \eta \geq] \geq C \parallel \xi - \eta \parallel^p$$

Demostración: Considerar las componentes de la función f,

$$\phi_i(\xi) := \mid \xi \mid^{p-2} \xi = \left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \xi_i$$

la derivada parcial de la cual es

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_i}(\xi) &= \frac{(p-2)}{2}\left(\sum_{j=1}^{N}\xi_j^2\right)^{\frac{p-2}{2}-1}(2\xi_j)\xi_i + \left(\sum_{j=1}^{N}\xi_j^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\delta_{ij} \\ &= (p-2)|\xi|^{p-4}\xi_i\xi_j + |\xi|^{p-2}\delta_{ij}\end{aligned}$$

Ahora definimos la función $g(t) := \phi_i(\eta + t(\xi - \eta))$. Entonces, usando el teorema fundamental del cálculo.

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g\prime(t)dt$$

donde $g\prime(t)$ denota la derivada de g respecto a t, por lo tanto,

$$\begin{aligned}g\prime(t) &= \nabla\phi_i\left(\eta + t(\xi-\eta)\right)\cdot(\xi-\eta) \\ &= \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_j}\left(\eta + t(\xi-\eta)\right)(\xi_j - \eta_j) \\ &= \sum_{j=1}^{N}(p-2)\left|\eta + t(\xi-\eta)\right|^{p-4}\left(\eta_j + t(\xi_j-\eta_j)\right)(\xi_j-\eta_j)\left(\eta_i + t(\xi_i-\eta_i)\right) \\ &+ \left|\eta + t(\xi-\eta)\right|^{p-2}(\xi_i - \eta_i)\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\phi_i(\xi) - \phi_i(\eta) &= (p-2)\int_0^1\sum_{j=1}^{N}\left|\eta + t(\xi-\eta)\right|^{p-4}\left(\eta_j + t(\xi_j-\eta_j)\right)(\xi_j-\eta_j)\,. \\ &\quad .\left(\eta_i + t(\xi_i-\eta_i)\right)dt + \int_0^1\left|\eta + t(\xi-\eta)\right|^{p-2}(\xi_i-\eta_i)\,dt\end{aligned}$$

Esto resulta en

$$\begin{aligned}[f(\xi)-f(\eta),\xi-\eta\,] &= \sum_{i=1}^{N}\left(\phi_i(\xi)-\phi_i(\eta)\right)(\xi_i-\eta_i)\\ &= (p-2)\int_0^1 |\eta+t(\xi-\eta)|^{p-4}\left((\eta+t(\xi-\eta))\cdot(\xi-\eta)\right)^2 dt\\ &\quad+\int_0^1 |\eta+t(\xi-\eta)|^{p-2}\,|\xi-\eta|^2\,dt\end{aligned}$$

donde $[\,\cdot,\cdot\,]$ denota el producto escalar, ya que

$$(p-2)\int_0^1 |\eta+t(\xi-\eta)|^{p-4}\left((\eta+t(\xi-\eta))\cdot(\xi-\eta)\right)^2 dt\geq 0,$$

ignorando este término los rendimientos,

$$[f(\xi)-f(\eta),\xi-\eta\,]\geq\int_0^1 |\eta+t(\xi-\eta)|^{p-2}\,|\xi-\eta|^2\,dt,$$

Ahora usar el resultado que $\forall\alpha>0,\exists C>0,\forall a_1,...,a_N\geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{i=1}^{N}a_i\right)^{\alpha}\geq C\sum_{j=1}^{N}a_i^{\alpha}.$$

Aplicando este resultado los rendimientos,

$$\int_0^1 |\eta+t(\xi-\eta)|^{p-2}\,|\xi-\eta|^2\,dt\geq C\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^1 |\eta_j+t(\xi_j-\eta_j)|^{p-2}\,dt\right)|\xi_j-\eta_j|^2$$

Ahora queremos probar un lema que muestra la existencia de una constante $D>0$, tal que

$$\int_0^1 |\eta_j+t(\xi_j-\eta_j)|^{p-2}\,dt\geq D\,|\xi_j-\eta_j|^2$$

Esto resultaría en

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^1 |\eta_j + t(\xi_j - \eta_j)|^{p-2}\, dt\right)|\xi_j - \eta_j|^2 \geq D\,|\xi_j - \eta_j|^p$$

Por equivalencia de normas en $\mathbb{R}^N$, luego se sigue que para alguna constante $C' > 0$,

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\int_0^1 |\eta_j + t(\xi_j - \eta_j)|^{p-2}\, dt\right)|\xi_j - \eta_j|^2 \geq C'\,|\xi - \eta|^p$$

donde tenemos $\|\cdot\| := |\cdot|$ como la norma usual en $\mathbb{R}^N$. El resultado deseado es el siguiente. Necesitamos lo siguiente:

Lema 3.8. : *Para todo* $i \in \{1, ..., N\}, \exists D > 0$ *dependiendo solo de* p *tal que*

$$\int_0^1 |\eta_j + t(\xi_j - \eta_j)|^{p-2}\, dt \geq D\,|\xi_j - \eta_j|^{p-2}$$

Prueba

Esto sigue facilmente SI $\xi_i = \eta_i$. asumir que $\xi_i - \eta_i \neq 0$.
Poner $d = \dfrac{\eta_i}{\xi_i - \eta_i}$, queremos probar que

$$\int_0^1 |d + t|^{p-2}\, dt \geq D$$

Se considera los siguientes casos:
Primer caso, asumir que $0 < -d < 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |d+t|^{p-2}\, dt &= \int_0^{-d} (-d-t)^{p-2}\, dt + \int_{-d}^1 (d+t)^{p-2}\, dt \\
&= \left(-\frac{1}{p-1}(-d-t)^{p-1}\right)_0^{-d} + \left(\frac{1}{p-1}(d+t)^{p-1}\right)_{-d}^1 \\
&= \frac{(-d)^{p-1} + (d+t)^{p-1}}{p-1} \geq \frac{1}{(p-1)2^{p-2}} > 0
\end{aligned}$$

La penúltima desigualdad se deriva de la convexidad de la función $q(t) := t\alpha$, donde $\alpha > 1$.
Segundo caso, se asume que $d \geq 0$, entonces

$$\int_0^1 |d+t|^{p-2}\, dt = \int_0^1 (d+t)^{p-2}\, dt \geq \int_0^1 t^{p-2} dt = \frac{1}{p-1} > 0.$$

Por último, asumir que $d \leq -1$, por lo tanto $d + t \leq 0$,

$$\int_0^1 |d+t|^{p-2}\, dt = \int_0^1 (-d-t)^{p-2}\, dt \geq \int_0^1 (1-t)^{p-2} dt$$

Usando el cambio de variable $u = 1 - t$ da

$$-\int_1^0 u^{p-2} du = \int_0^1 u^{p-2} du = \frac{1}{p-1},$$

Encontramos que

$$\int_0^1 |d+t|^{p-2}\, dt \geq \text{mín}\{\frac{1}{p-1}, \frac{1}{(p-1)2^{p-2}}\} = \frac{1}{(p-1)2^{p-2}} = D > 0.$$

En conclusión, hemos obtenido una constante $D > 0$ (dependiendo solo de p) tal que

$$[f(\xi) - f(\eta), \xi - \eta\ ] \geq D \sum_{i=1}^{N} |\xi_j - \eta_j|^p \geq C' \left\|\xi - \eta\right\|^p, \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N.$$

■

Teorema 3.7. (Teorema de Eferlein - Smuliam)
El espacio de Banach V es reflexivo si y solo si cada sucesión acotada en V tiene una subsucesión la cual converge debilmente a un elemento de V.

Lema 3.9. *Sea V un espacio normado. Si $(u_n)_n$ es una sucesión en V tal que cada subsucesión tiene una nueva subsucesión la cual converge para algún límite $u \in V$, entonces la sucesión también converge a este límite, i.e.*

$$u_n \longrightarrow u.$$

Bibliografía

[1] C.O. Alves, F.J.S.A. Correa; **A sub-supersolution approach for a quasilinear Kirchhoff equation**; J.Math. Phys. 56 (2015), 051501.

[2] C.O. Alves, F.J.S.A. Correa; **On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator**; Comrn. Appl. Nonlinear Anal. 8 (2001) 4356.

[3] R. Aris ; **Mathematical Modelling Techniques**; (Advance Publishing Program) Boston, Mass - London 1979.

[4] A. Arosio, S. Panizzi; **On the well-posedness of the Kirchhoff string**; Trans. Amer. Math. Soc. , 348 (1996), 305-330.

[5] M. Avci , Ayazoglifli; **Solutions of nonlocal - Laplacian Equations**; Int. J. Part. Diff Eq., Voluine 2013, Article ID 364251, http://dx.doi.org/10.1155/2013/364251.

[6] C. Autori, P. Pucci, Mc Salvatori ; **Asymptotic Satability for Anisotropic Kirchhoff Systems**; I. Math. and Appl. 352 (2009) 149-165.

[7] D. Avema , Motreanu D., Tornatore E. ; **Existence and Asymptotic Propertier for Quasilinear Eqations with Gradient Dependence**; Appl. Math. Letlers 61(2016), 102-107.

[8] R. Ayazoglu, I. Ekincoiglu: **Electrorheological Fluids Equations Involving Variable Exponent with Dependence on the Gradient vía Mountain Pass Techniques**; Number. Func. Anal. Opt., 37(9) (2016), 1144-1157.

[9] F.E. Browder ; **Degree of mapping for nonlinear mappings of monotone type**; in Proceadings of the national academy of Sciences of the U.S.a, 80 (1983) 1771 – 1773.

[10] J. Berkovitz ; **On the degree theory for nonlinear mapping of monotone type**; Ann. Acad. Sci. Fennicial, serie A, I, Mathematica Dissertationes 58, 1986.

[11] J. Berkovits, (2003) ; **Anote on the Imbedding Theorem of Browder and Ton**; Proceeding of the American Mathematical Society 131(9): 2963-2966.

[12] J. Berkovits ; **Extension of the Leray – Schauder degree for abstraat Hammerstein type mappings** ; J. Differ. Equ. 234, 289 – 310 (2007).

[13] J. Berkovits, & Mustonen V. (1986) ; **On the Topological Degree for Mappings of Monotone Type**; Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications. An International Multidisciplinary Journal. Series A. Theory and Methods 10: 1373-1373.

[14] H. Brezis, ; **Equations and Inéquations Non Linéaires les Spaces Vectoriels in Dualité**; Annales de L'institut Fourier 18, 1(1968) 115-175.

[15] H. Brezis, and Sibony, M. ; **Methodes D'approximation et D'itération Pour les Operateurs Monotones**; Archive for Rational Mechanics and Analysis 28, 1(1968), 59-82.

[16] F.E. Browder, ; **Existence Theorems for Nonlinear Partial Differential Equations**; Proc. Symp. Pure Math. AMS 16, 1-60 (1970).

[17] F.E. Browder, ; **Existence Theory for Boundary Value Problems for Quasilinear Elliptic Systems with Strongly Nonlinear Lower Order Terms**; Proc. Symp. Pure Math. AMS 23, 269-286 (1973).

[18] F.E. Browder, ; **Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems**; Bulletin of the American Mathematical Society 69, 6(1963), 862-874.

[19] F.E. Browder; Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces in: Proceedings of Svmposia in Puré Mathematics, Part 2,vol. 18, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1976. 0405188

[20] F.E. Browder, ; **Problemes Non-linéaires, Vol. 15, Boundary Value Problems**; Presses de I'Université de Montréal 1966.

[21] F.E Browder, ; **Pseudo-monotone Operator and Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems on Unbounded Domains**; Proc. Acad. Sci. USA 74, 2659-2661 (1977).

[22] F.E. Browder, and Hess, P. ; **Nonlinear Mappings of Monotone Type in Banach Space**; Journal of Functional Analysis 11, 3(1972), 251-294.

[23] F.E. Browder, & Ton B.A. (1968) ; **Nonlinear Functional Equations in Banach Spaces and Elliptic Superregularization**; Mathematische Zeitschrift 105: 177-195.

[24] E. Cabanillas L., A.G. Aliaga LL. ,W. Barahona M., G. Rodríguez V.; **Existence of Solutions for a Class of p(x)-Kirchhoff Type Equation Via Topological Methods**; Int. J. Adv. Appl. Math. and Mech., 2(4) (2015) 64 - 72.

[25] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. A. Soriano; **Global existence and uniform decay rates for the Kirchhoff-Carrier equation with nonlinear dissipation**; Adv. Differential Equations , 6 (2001), 701-730.

[26] L. Cherfils, Y. Il'yason ; **On the Stationary Solutions of Generalized Reaction Diffusion Equations with p& q-Laplacian**; Commun. Pure. Anal. 4(2005), 9-22.

[27] M. Chipot, J.F. Rodrigues; **On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems**; RAIRO Modl. Math. Anal. Numr. 26 (1992) 447467.

[28] M. Chipot, B. Lovat; **Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems**; Nonlinear Anal. 30 (1997) 46194627.

[29] F. Colasuonno, P. Pucci; **Multiplicity of solutions for p(x)-polyharmonic Kirchhoff equations**; Nonlinear Anal., 74 (2011), 5962-5974

[30] F. J. S. A. Correa, G. M. Figueiredo; **On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods**; Bull. Aust. Math. Soc., 74 (2006), 263-277.

[31] F. J. S. A. Correa, G. M. Figueiredo; **On a p-Kirchhoff equation via Krasnoselskii's genus**; Appl. Math. Letters, 22 (2009), 819-822.

[32] F.J.S.A. Correa, S.D.B. Menezes, J. Ferreira; **On a class of problems involving a nonlocal operator**; Appl. Math. Comput. 147 (2004) 475489.

[33] P. D'Ancona and S. Spagnolo; **Global solvability for the degenerate Kirchhoff equation with real analytic data**; Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat., 108(1992) 247262.

[34] G. Dai, R. Hao; **Existence of solutions for a p(x)-Kirchhoff-type equation**; J. Math. Anal. Appl., 359 (2009), 275-284.

[35] G. Dai, R. Ma; **Solutions for a p(x)-Kirchhoff-type equation with Neumann boundary data**; Nonlinear Anal., 12 (2011), 2666-2680.

[36] G. Dai, J. Wei; **Infinitely many non-negative solutions for a p(x)-Kirchhoff-type problem with Dirichlet boundary condition**; Nonlinear Analysis 73 (2010) 3420-3430.

[37] M. Dreher; **The Kirchhoff equation for the p-Laplacian**; Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino 64 (2006) 217-238.

[38] M. Dreher; **The wave equation for the p-Laplacian**; Hokkaido Math. J. 36 (2007) 21-52.

[39] X. L. Fan, J. S. Shen, D. Zhao; **Sobolev embedding the Qrems for spaces** $W^{k,p(x)(\Omega)}$; J. Math. Anal. Appl. 262 (2001), 749-760.

[40] X. L. Fan, Q. H. Zhang; **Existence of solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet problems**; Non- linear Anal. 52 (2003), 1843-1852.

[41] X.L. Fan, D. Zhao; **On the Spaces** $L^{p(x)}$ **and** $W^{k,p(x)(\Omega)}$; J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), 424-446.

[42] X. L. Fan: **On nonlocal** $p(x)$**-Laplacian Dirichlet problems**; Nonlinear Anal. 72 (2010) 3314- 3323.

[43] F. Faraci D. Motreanu D. Puglisi; **Positive solutions of quasilinear elliptic equations with dependence on the gradient**; Calc. Var. 54 (2015) 525538.

[44] L.F.O. Faxia, O.H. Mivagaki, D. Motreanu, M. Tanaka; **Existence results for nonlinear elliptic equations with Leray-Lions operator and dependence on the gradient**; Nonlinear Anal.TMA, 96(2014), 154166.

[45] L.F.O. P.C. Fife; **Mathematical aspect of reacting and difusing systems**; Lecture Notes in Biomathematics, 28, Springer - Verlag, Berlin - New York 1979.

[46] D.G. de Figueiredo, M. Girardi, M. Matzeu; **Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via Mountain Pass techniques**; Differ. Integ. Eq. 17 (2004) 119126.

[47] G. M. Figueiredo; Quasilinear equations with dependence on the gradient via Mountain Pass techniques in Applied Mathematics and Coinp. 203 (2008) 1418

[48] C. He. G. Li ; **The Regularity of Weak Solutions to Nonlinear Scalar Field Elliptic Equations Containing p&q-Laplacians**; Ann. Acad. Sci. Fenn. Math, 33(2008), 337-371.

[49] E. Heinz ; **An elementany analytic theory of the degree of mapping in n-dimensional space**; J. Math. Mech 8 (2) (1959) 231-247.

[50] N.B. Huy, B. T. Quan; **Positive solutions of logistic equations with dependence on gradient and nonhomogeneous Kirchhoff term**; J. Math. Anal. Appl. 444 (2016) 95.109.

[51] I. Kim, S. Hong; **A topological degree for operators of generalized** (S_+) **type**; Fixed Point Theory Appl (2015) 2015: 194. doi:10.1186/sl3663-015-0445-8

[52] G. Kirchhoff; **Mechanik**; Teubner, leipzig, Germanv, 1883.

[53] O. Kovacik , Rakosnik I. ; **On Space** $L^{p(x)}(\Omega)$ **and** $W^{h,p(x)}(\Omega)$; Czechoslovak Math I. 41 (1991) 592-617.

[54] J. Leray and J. Schauder ; **Topologic et Equations Fanctionelles**; Ann. Sci. ecole Norm. Sup. 51: 45-78 (1934).

[55] D. Liu, X. Wang, J. Yao; **On** $p_1(x), p_2(x)$**-Laplace operator, to appear**; ar Xiv: 1205.1854.

[56] D. Liu, X. Wang, J. Yao; **Emph On Solutions for Neumann boundary valué problems involving** $p_1(x), p_2(x)$**-Laplace operator**; ar Xiv:1205.3765.

[57] J. L. Lions; **On some questions in boundary valué problems of mathematical physics, in: Proceedings of international Symposium on Continuum Mechanics and Partial Differential Equations**; Rio de Janeiro 1977, in: de la Penha, Medeiros (Eds.), Math. Stud., North- Holland, 30(1978), 284-346.

[58] J. Liu, L. Wang, P. Zhao; **Positive solutions for a nonlocal problem with a convection term and small perturbations**; Math. Method Appl. Sci., 40(3)(2017) 501852.

[59] G. Liu, S.Shi, Y.Wei ; **Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient** ; Electron. J. Diff. Eq., Vol. 2012 (2012), No. 139, pp. 19.

[60] G. J. Minty, ; **On a "Monotonicity Method" for the Solutions of Nonlinear Equations in Banach Spaces**; Proccedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 50, 6(1963), 1038-1041.

[61] G. J. Minty, E. Al. ; **Monotone (Nonlinear) Operator in Hilbert Space**; Duke Mathematical Journal 29, 3(1962), 341-346.

[62] A. Ourraoui; **On an elliptic equation of p-Kirchhoff type with convection term**; C.R. Acad. Sci. Paxis,Serie 1,354(2016) 253-256.

[63] M. Pei, L. Wang, X. Lv: **Multiplicity of positive radial solutions of p-Laplacian problems with nonlinear gradient term**; Bound. Valué Probl. 2017,36 (2017)

[64] D. Ruiz, ; **A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems**; J. Diífer.Equ. 199(2004), 96114.

[65] M. Ruzicka ; **Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory**; Springer – Verlog, Berlin, 2000.

[66] A.K.Souayah, K. Kefi; **On a class of nonhomogeneus quasüinear problem involving sobolev spaces with variable exponent**; An. tiinifice Univ. Ovidius Constana. Seria: Matematic . 18(1) (2010)309-328.

[67] I.V. Skrypnik; **Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Valué Problems**; Nauka, Moscow, 1990 (in Russian); TVanslation of Mathematical Monographs, vol. 139, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1994 (English transí.); C.F. Vasconcellos, On a nonlinear stationary problem in unbounded domains, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid: 5 (1992) 309-318.

[68] M. Tanaka ; **Existence of a positive solution for quasilinear elliptic equationswith a nonlinearity including the gradient**; Bound. Valué Probl. 2013, 173 (2013)

[69] S. L. Troyanski; **On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non- separable Banach spaces**; Studia Math. 37 (1971), 173180

[70] F. Wanz, Y-Q Chan and D. O'regan ; **Degree Theory for** (S_+) **Mappinga in nonreflexive Banach Spaces**; Appl. Math. Comput., 202(2008), 229-232.

[71] H. Wilhelmssom ; **Explosive Instabilities of Reactions-Diffusion Equations**; Phys. Rev. A(3) no.2.(1987) 965-966.

[72] W. Winslow; **Induced fibration of Suspensions**; I. Appl. Phys. 20 (12) (1949) / 1137-1140).

[73] Z. Yucedag, R. Ayazoglu; **Existence of solutions for a class of Kirchhoff-type equation with nonstandard growth**; Univ. J. App. Math. 2(5)(2014)215-221

[74] Z. Yucedag ; **Infinitely many nontrivial solutions for nonlinear problem involving** $p_1(x), p_2(x)$**-Laplace operator**; Acta Universitatis Apulensis 40 (2014)315-331

[75] E. Zeidler; **Nonlinear Functional Analysis and its Applications**; vol. II/B, Berlín, Heidelberg, New York, 1985.

[76] E. Zeidlen ; **Nonlinear Functional Analysis and its applications**; II/B. Nonlinear Monotone Operations , springer. New York (1990).