Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

El último teorema de Fermat y la conjetura de Goldbach: Implicaciones no convencionales a través de un análisis axiomático y enfoque didáctico de la teoría de números transfinitos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Pablo Sebastian MONTOYA PESANTES

ASESOR

Dr. José Raúl LUYO SÁNCHEZ

Lima, Perú

2026



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Montoya, P. (2026). *El último teorema de Fermat y la conjetura de Goldbach: Implicaciones no convencionales a través de un análisis axiomático y enfoque didáctico de la teoría de números transfinitos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Pablo Sebastian Montoya Pesantes
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	44091601
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0006-6210-3998
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	José Raúl Luyo Sánchez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09394743
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-5120-5274
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Renato Mario Benazic Tomé
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445668
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43688114
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis Funcional
Grupo de investigación	Dynamical Systems, Differential Equations and their Applications

Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú.
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2025
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela
S/N cuadra 34Teléfono: 619-7000,
Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail:
eapmat@unmsm.edu.peLima - Perú

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ..16:05.. horas del jueves 16 de abril de 2026, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Renato Mario Benazic Tomé (PRESIDENTE), Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO) y el Dr. José Raúl Luyo Sánchez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: "EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT Y LA CONJETURA DE GOLDBACH: IMPLICACIONES NO CONVENCIONALES A TRAVÉS DE UN ANÁLISIS AXIOMÁTICO Y ENFOQUE DIDÁCTICO DE LA TEORÍA DE NÚMEROS TRANSFINITOS", presentado por el Bachiller señor PABLO SEBASTIAN MONTOYA PESANTES, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación .....SOBRESALIENTE..... con un calificativo promedio de .....DIECIOCHO..... (..18..).

A continuación, el presidente del Jurado, Dr. Renato Mario Benazic Tomé, manifestó que el Bachiller señor PABLO SEBASTIAN MONTOYA PESANTES, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las ..17:10.. horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Renato Mario Benazic Tomé
PRESIDENTE

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
MIEMBRO

Dr. José Raúl Luyo Sánchez
MIEMBRO ASESOR

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE
SAN MARCOS
Universidad del Perú, Decana de América

Anexo 1

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Dr. José Raúl Luyo Sánchez en mi condición de asesor acreditado con el Dictamen de la EP N.º 000756-2025-D-FCM/UNMSM de la tesis cuyo título es "**EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT Y LA CONJETURA DE GOLDBACH: IMPLICACIONES NO CONVENCIONALES A TRAVÉS DE UN ANÁLISIS AXIOMÁTICO Y ENFOQUE DIDÁCTICO DE LA TEORÍA DE NÚMEROS TRANSFINITOS"**, presentado por el bachiller Pablo Sebastian Montoya Pesantes para optar el título profesional de Licenciado en Matemática, **CERTIFICO** que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante la plataforma PIDS, el documento evaluado cuenta con el 8% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para **su publicación en el repositorio institucional**.

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemática.

Lima, 06 de julio de 2026



Firma del Asesor:

Nombres y Apellidos del asesor: José Raúl Luyo Sánchez

DNI: 09394743

Dedicatoria

Esta tesis, así como el esfuerzo y sacrificio empleados en su realización, está dedicada a mis padres, hermanos, sobrinas, y mi novia. Por su constante motivación y apoyo incondicional.

¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.
David Hilbert

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor, el DSc. José Luyo por su infinita paciencia y orientación en la realización de esta tesis.
Una mención especial a todos mis profesores, por haber dejado un aprendizaje en mi camino profesional.

Resumen

En el presente trabajo, estudiamos la teoría de los números ordinales, sus propiedades aritméticas y sus implicaciones. Presentaremos resultados no convencionales del Último Teorema de Fermat y la Conjetura de Goldbach cuando éstas son adaptadas a los números ordinales transfinitos.

Palabras clave: Números ordinales, Último teorema de Fermat, Conjetura de Goldbach

Abstract

In this work, we study the theory of ordinal numbers, their arithmetic properties, and their implications. We will present unconventional results of Fermat's Last Theorem and the Goldbach Conjecture when adapted to transfinite ordinal numbers.

Keywords: Ordinal numbers, Fermat's Last Theorem, Goldbach Conjecture

Índice general

1. Preliminares **10**
1.1. Lenguaje Formal 10
1.2. Funciones 13
1.3. Números Naturales 14
1.4. Orden 17
1.5. Numerabilidad 20

2. George Cantor: Una mirada hacia el infinito **25**
2.1. La unicidad de las series de Fourier 25
2.2. El desarrollo de los números irracionales 27
2.3. El destino de conjuntos derivados 30
2.4. El inicio de la Teoría de Conjuntos 34
2.5. Mas allá del conteo: Números transfinitos 36

3. Sistemas Axiomáticos **42**
3.1. La paradoja de Russell 42
3.2. Sistemas Axiomáticos ZF y ZFC 43
3.3. Sistema Axiomático VNB 46

4. Números ordinales **48**
4.1. Números ordinales 48
4.2. Aritmética ordinal 55

5. Resultados no convencionales **65**
5.1. El Último Teorema de Fermat 65
5.2. La Conjetura de Goldbach 67

6. Conclusiones **71**
Referencias 72

Introducción

A lo largo de la historia, el legado de los grandes matemáticos ha sido un aliciente del espíritu académico de todo interesado por conocer los fundamentos de las matemáticas, uno de ellos fue Georg Cantor (1845 - 1918). La motivación de este trabajo radica en la historia de cómo se desarrolla la teoría de conjuntos y los números transfinitos, y su sorpresiva relación con las series trigonométricas. Todo empezó con un concurso propuesto por el Instituto de Francia en 1811 para formular una teoría matemática sobre la transmisión de calor, el cual ganó Joseph Fourier (1768 - 1830), empleando una función expresada en senos y cosenos, la cual publicó en 1822 bajo el nombre de "Theorie analytique de la chaleur" (Fourier, 1988).

A partir de aquí, en 1829, Johann Dirichlet (1805 - 1859) prueba un teorema de convergencia para series de Fourier bajo las siguientes condiciones: que la función sea continua en $[0; 2\pi]$ a excepción de una cantidad finita de puntos, y que posea un número finito de máximos y mínimos en dicho intervalo. Luego Rudolph Lipschitz (1832 - 1903) en su tesis de 1853 extiende el teorema a funciones acotadas con infinitas discontinuidades, con finitos puntos de acumulación. Después Bernhard Riemann (1826 - 1866) vuelve a extender el teorema de Dirichlet a funciones con un número infinito de discontinuidades que forman un conjunto denso en el intervalo .

Por otro lado, Eduard Heine (1821 - 1881) en 1870 investigaba si de una serie en senos y cosenos $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ implica que $a_n = 0$ y $b_n = 0$ para todo n, y este resultado lo probó para un conjunto finito E de tal forma que la serie converge uniformemente en todo subintervalo cerrado junto con E . J.Paúl. (2018).

El desarrollo de esta historia tendría un nuevo protagonista: Georg Cantor. Él se propone a investigar la unicidad de la serie de Fourier convergente en puntos que no están en E, donde dicho conjunto E es de naturaleza infinita. Es aquí donde se dedica a trabajar en la construcción de E, Y donde empieza a gestarse la teoría de conjuntos de Cantor (Pujós, 2019).

Es así que el presente trabajo tiene por finalidad:

1. Explorar el recorrido realizado por Cantor desde su investigación sobre la unicidad de una serie de Fourier hasta el descubrimiento de los números transfinitos.

2. Realizar una exposición didáctica sobre las propiedades de los números transfinitos.

3. Analizar la construcción de los números transfinitos.

4. Realizar diversas aplicaciones de los números transfinitos en diversas áreas de la matemática, obteniendo resultados poco convencionales.

En el capítulo 1 se desarrolla el orden en los conjuntos el cual será importante en el concepto de número ordinal, también se aborda la construcción de los números naturales mediante los axiomas de Peano, además de revisar el teorema de recurrencia, el cual dará una visión acerca de lo que sucederá más adelante con los números ordinales con el denominado teorema de recursión transfinita, mediante el cual se definirán las operaciones aritméticas ordinales. Otro de los temas presentados es el de la numerabilidad de conjuntos, una noción imprescindible en la comprensión de un sucesor ordinal y límite ordinal.
El capítulo 2 aborda los acontecimientos históricos sobre el problema del Calor y la solución mediante series de Fourier, y cómo esto motivó a Cantor a descubrir los números ordinales.
En el capítulo 3 se muestra la construcción axiomática de la matemática dada por Ernst Zermelo (1871 - 1953) y posteriormente por John Von Neumann (1903 - 1957). los cuales seran necesarios en el desarrollo de los números ordinales.
El capítulo 4 está destinado al desarrollo de los números ordinales bajo el concepto de Von Neumann. Finalmente, en el capítulo 5 se estudia la aplicación de los números ordinales, obteniéndose resultados inesperados.

Capítulo 1

Preliminares

Para poder definir un número ordinal se necesitará de la definición de conjunto bien ordenado, el cual a su vez requiere de definiciones de orden parcial y total. Además se abordará al conjunto de los números naturales incluyendo el cero, para esto se hace una revisión de los Axiomas de Peano, así como también del teorema de recursión que se empleará para definir las operaciones con números ordinales y transfinitos. Es importante señalar que en este capítulo se tomará un conjunto como un término primitivo.
Los libros consultados en este apartado son (Cohen y Ehrlich, 1969), (Hamilton, 1982), (Lima, 1997), (Castillo, 1999)

1.1. Lenguaje Formal

Definición 1.1 *Un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es una colección de signos que se encuentran clasificados en: variables, constantes, relatores, funtores, conectores, cuantificadores y descriptor.*

Entre los conectores se encuentran los siguientes:

1. **Negador** ($\neg$): Aquel que cambia el valor de verdad de una afirmación, en el lenguaje castellano emplea la expresión "no". Por ejemplo, si p: "El león es un mamífero" es verdadera, entonces $\neg p$: "El león no es un mamífero" será falsa, y viceversa.

2. **Conjuntor** ($\wedge$): En el lenguaje castellano es el equivalente a "y", y es verdadero cuando ambas afirmaciones son verdaderas, caso contrario será falso. Por ejemplo, si p: "El Sol es una estrella", y q: "La Tierra es un planeta", entonces $p \wedge q$: "El Sol es una estrella y la Tierra es un planeta", será verdadera ya que ambas afirmaciones lo son.

3. **Disyuntor** ($\vee$): Este conector es el equivalente al "o" en el lenguaje, y es verdadero si al menos una de las afirmaciones es verdadera, caso contrario será falsa. Por ejemplo, si p: "Lima es la capital de Perú" y q: "Lima es la capital de Colombia", entonces $p \vee q$: "Lima es la capital de Perú o de Colombia", será verdadera dado que la primera afirmacion es verdadera pese a que la segunda sea falsa.

4. **Implicador** ($\rightarrow$): Es el equivalente a la expresión "si ... entonces" en el lenguaje, el cual es falso cuando la primera afirmación sea falsa y la segunda verdadera, en cualquier otro caso será verdadera. Por ejemplo, si p: "Existen infinitos números naturales", y q: "El conjunto de los números racionales es finito"; la expresión $p \rightarrow q$: "Si existen infinitos números naturales, entonces el conjunto de los números racionales es finito", será falsa puesto que la primera afirmación era verdadera, sin embargo la segunda es falsa.

5. **Coimplicador** ($\longleftrightarrow$): Es aquel conector que está representado por "si y solo si" en el lenguaje castellano, además es verdadero cuando ambas afirmaciones tienen el mismo valor de verdad, y es falso cuando tienen diferente valor de verdad. Por ejemplo, si p: "5 es un número primo", y q: "5 tiene dos divisores", así que la afirmación $p \longleftrightarrow q$: "5 es un número primo si y solo si tiene dos divisores", es verdadera, puesto que ambas afirmaciones tienen el mismo valor de verdad, en este caso verdadero.

De los cuantificadores se tienen:

1. **Existencial** ($\bigvee$) Este cuantificador indica que cierta expresión será verdadera para algún valor que pueda asumir cierta variable. Por ejemplo, $\bigvee x \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{N}$, en efecto esta expresión es verdadera cuando $x = 1$.

2. **Universal** ($\bigwedge$) Indica que una expresión es verdadera para todo valor que asuma cierta variable. Por ejemplo, $\bigwedge x \in \mathbb{N}$: $x + 1 \in \mathbb{N}$ significa que, para todo número natural, su sucesor también será natural.

Además, se tienen otros signos, tales como:

1. **Descriptor** ($|$) La función que realiza este signo, valga la redundancia, es el de describir una expresión que se hace verdadera para cierta variable x. Por ejemplo, $x \mid x$ es un número primo menor que 10.

2. **Relator** (R) Es aquel signo que establece una afirmación empleando unos objetos. Por ejemplo igualdad entre dos números $= xy$ que se lee x es igual a y, también la pertenencia $x \in y$ son ejemplos de relatores pues el primero afirma que dos cantidades son idénticas y el segundo afirma que un elemento está dentro de un conjunto.

3. **Funtor** (F) Es aquel signo que nombra a un objeto, empleando otros objetos. Por ejemplo, la unión de dos conjuntos x e y es un funtor Uxy, también el producto de dos números a y b, $a \times b$ es otro funtor.

4. **Variable** (x_i) Es aquello que nombra a un objeto indeterminado. Por ejemplo, x representa a un número real.

5. **Constante** (c_i) Es aquello que nombra a un objeto determinado. Por ejemplo, 1 representa a la unidad, otra constante sería $\mathbb{Z}$ el cual representa al conjunto de los números enteros.

Un lenguaje formal bien podría estar definido con la cantidad necesaria de conectores, de tal manera que, a partir de estos, se puedan definir los demás.

Una *cadena* es una sucesión finita de signos de un lenguaje formal. Dos cadenas son idénticas y usan el símbolo $\equiv$ si tienen el mismo valor de verdad.

Ejemplo 1.2 Se puede considerar los conectores: negador e implicador, y así definir los demás como:
$\alpha \vee \beta \equiv \neg\alpha \to \beta$
$\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\alpha \to \neg\beta)$
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \neg[(\alpha \to \beta) \to \neg(\beta \to \alpha)]$
También, se pueden considerar los conectores: negador y conjunto y a partir de ellos definir los otros:
$\alpha \vee \beta \equiv \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
$\alpha \to \beta \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv \neg(\alpha \wedge \neg\beta) \wedge \neg(\beta \wedge \neg\alpha)$

Definición 1.3 *Una cadena de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es una sucesión finita de signos.*

Las cadenas que nombran a un objeto son llamadas *términos*, mientras que aquellas que realizan una afirmación son conocidas como *fórmula*. Este tipo de cadenas (términos o fórmulas) se les denomina *expresiones*. Sin embargo, la definición de estas expresiones viene dada por:

Definición 1.4 *Una cadena de signos de un lenguaje formal $\mathcal{L}$ es un término o una fórmula de $\mathcal{L}$, si puede ser probada a partir de alguna de las siguientes reglas.*
(t_i representa a un término, y α, β representan fórmulas)

1. x_i es un término.
2. c_i es un término.
3. $R_i^n t_1 t_2 t_3 \ldots$ es una fórmula.
4. $F_i^n t_1 t_2 t_3 \ldots$ es un término.
5. $\neg\alpha$ es una fórmula.
6. $\to \alpha\beta$ es una fórmula.
7. $\bigwedge x_i\alpha$ es una fórmula.
8. $\mid x_i\alpha$ es un término.

De lo anterior, se observa de los cuatro primeros enunciados que:
Las variables y constantes son términos. Mientras que los relatores y funtores aplicados a una cantidad finita de términos son fórmulas y términos respectivamente.

Ejemplo 1.5 La expresión:
$\alpha \vee \beta \equiv \neg\alpha \to \beta$ es una fórmula, basta con aplicar las reglas (5) y (6).

Observación 1.6 Existen otros símbolos empleados de forma estándar para representar al cuantificador Universal ($\forall$), Existencial ($\exists$) y al Descriptor (:). Estos símbolos serán usados frecuentemente en el presente texto.

Para el desarrollo de las siguientes secciones se emplearon (Halmos, 2017) y (Cohen y Ehrlich, 1969) principalmente.

1.2. Funciones

Definición 1.7 *Un par ordenado de a y b, con primera coordenada a y segunda coordenada b, es el conjunto (a, b) definido en la forma*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Definición 1.8 *El producto cartesiano de A y B es el conjunto $A \times B$ definido por*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Definición 1.9 *Sean A y B dos conjuntos no vacíos, una función f de A en B es un subconjunto de $A \times B$ que satisface las condiciones:*

(i) Para cada $x \in A$, $(x, y) \in f$ para algún $y \in B$.

(ii) Si $(x, y) \in f$ y $(x, y') \in f$, entonces $y = y'$.

Los conjuntos A y B son llamados respectivamente dominio y contradominio de f.

Se denota $y = f(x)$ para indicar que y es el valor de la función en el punto x, también llamado imagen de f en el punto x.

Definición 1.10 *Una función $f : A \to B$ es inyectiva si dados $x, y \in A$ arbitrarios, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.*
En otras palabras: si $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$.

Definición 1.11 *Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si para todo $y \in B$ existe al menos un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

Definición 1.12 *Una función $f : A \to B$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.*

Definición 1.13 *Sea R una relación binaria en A y S una relación binaria en B. Un isomorfismo entre (A, R) y (B, S) es una función biyectiva $f : A \to B$ tal que para todo $x, y \in A$: xRy si y solo si $f(x)Sf(y)$.*

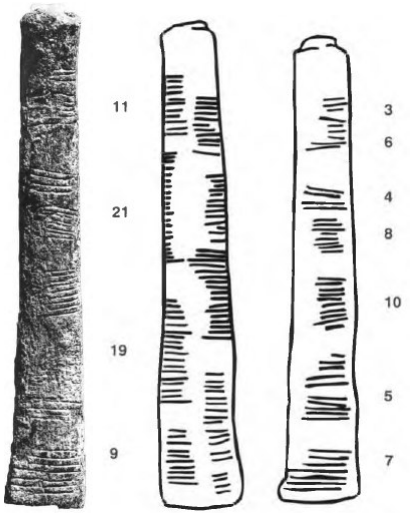
Todo isomorfismo es una biyección, sin embargo, no toda biyección es un isomorfismo. La diferencia entre ambas radica en que el isomorfismo no solo exige una correspondencia entre cada elemento de ambos conjuntos, sino que además preserva la estructura de operaciones de los conjuntos.

1.3. Números Naturales

"Dios creó los números naturales, el resto es obra de los hombres."
Esta frase de Kronecker (1823 - 1891) nos traslada a los orígenes de la noción de número, no solo en la remota época del hombre primitivo, sino también en la actualidad, en donde nuestros primeros años de vida esta idea se encuentra relacionada con la acción natural de contar.

En nuestra propia experiencia, desde pequeños asociamos colecciones de objetos tangibles a la idea abstracta de número mediante el conteo de estos mismos. Más adelante con el transcurso de los años y de la madurez de nuestra abstracción, que la idea de número trasciende el simple hecho de contar y adopta otras características. (Courant y Robbins, 1996).

Un ejemplo de esta abstracción numérica se evidencia a través del *hueso de Ishango* en Zaire, el cual tiene, según estimaciones, 25 000 años de antigüedad. En él se encuentran inscritas marcas que pueden ser interpretadas como números o incluso como un calendario lunar.



Hueso de Ishango y los números que pueden representar sus marcas (Stewart, 2008)

En consecuencia de todo lo expuesto, la idea de la creación de los números naturales por Dios, según Kronecker, está fundada en la acción inherente de la vida humana, mientras que todo lo demás es producido por la necesidad de nuevos conceptos, y por la satisfacción de un mayor conocimiento.

Desde ahora entenderemos por número al elemento de un conjunto que posee ciertas características, y en particular estudiaremos a los denominados números naturales. Cabe señalar que la construcción del número no es una intención de este trabajo, por lo tanto no definirlo no afecta su propósito.

Los números naturales pueden ser construidos a partir de los *axiomas de Zermelo*, tomando un interesante punto de partida: el vacío. También pueden ser construidos me-

diante los *axiomas de Peano*.

Axiomas de Peano:
Se suponen dados, como objetos no definidos al conjunto $\mathbb{N}$ cuyos elementos de denominan números naturales y a $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ denominada función sucesor Los axiomas son:

P1: S es inyectiva.

P2: $S(\mathbb{N}) \neq \mathbb{N}$.

P3: Axioma de Inducción.
Si $u \in \mathbb{N}$ con $u \notin S(\mathbb{N})$ y $M \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

i $u \in M$

ii $S(n) \in M$ si $n \in M$

Entonces $M = \mathbb{N}$.

El axioma $A1$ indica que si dos números tienen el mismo sucesor, entonces son iguales. El axioma $A2$ mencionan que existe un número que no es sucesor de ningún otro.

Estos son conocidos como los Axiomas de Peano, sin embargo fueron originalmente de Dedekind en 1888 (Cohen y Ehrlich, 1969).

Otra forma de obtener los números Naturales es a través del concepto de conjunto sucesor, junto con la aplicación del axioma del infinito. Esto se explicará más adelante en el capítulo 3, también para mayor detalle ver (Halmos, 2017).

El hecho de considerar o no al cero como número natural es una convención. Por este motivo, en lo que sigue de este capítulo, en algunas ocasiones se tomará a 1 como primer elemento con el objeto de probar ciertos teoremas.

Teorema 1.14 *Existe un único número natural, el cual no es sucesor de ningún número.*

Demostración:
Sea $N_s = S(\mathbb{N})$ el rango de S. Por el axioma $P2$, existe un número natural u el cual no está en N_s. Sea $M = \{u\} \cup N_s$, entonces $u \in M$ y $S(n) \in M$ para cada $n \in M$, ya que $N_s \subseteq M$. Por el axioma $P3$, $M = \mathbb{N}$. Por tanto $\mathbb{N} = \{u\} \cup N_s$, y cada número natural $n \neq u$ en N_s, es decir, cada número natural excepto u es el sucesor de algún número natural. ■

Definición 1.15 *Un subconjunto $M \subseteq \mathbb{N}$ se denomina inductivo si $n \in M$ implica que $S(n) \in M$.*

Una aplicación importante del Axioma de Inducción se ve en la prueba del Teorema de Recursión, en ella podemos mostrar un ejemplo de conjunto inductivo.

Teorema 1.16 (Recurrencia) *Sea A un conjunto no vacío. Si $G : A \to A$ es una función y $a \in A$, entonces existe exactamente una función $F : \mathbb{N} \to A$ tal que $F(1) = a$ y $F(S(n)) = G(F(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración:

Sea C el conjunto formado por aquellos subconjuntos $T \subseteq \mathbb{N} \times A$ tales que cumplen las siguientes condiciones:

$(1, a) \in T$.

1. $(S(n), G(b)) \in T$ si $(n, b) \in T$

Ya que el mismo conjunto $\mathbb{N} \times A$ satisface. (1) y (2), entonces C es no vacío.
Sea el conjunto $F = \bigcap_{T \in C} T$, este satisface las condiciones (1) y (2).

En efecto, sea $(1, a) \in T$ para todo $T \in C$ entonces $(1, a) \in \bigcap_{T \in C} T$,
Asi $(1, a) \in F$.
Por otro lado, sea $(1, a) \in F$, luego $(S(n), G(b)) \in T$ para cada $T \in C$, entonces. $(S(n), G(b)) \in F$.

Por tanto $F \in C$ y también $F \subseteq T$ pues $F = \bigcap_{T \in C} T \subseteq T$.

Sea el conjunto $M = \{n \in \mathbb{N} : (n, b) \in F \textit{ para exactamente un } b \in A\}$. De acuerdo con esto, F es una función de M en A.

En primer lugar, demostraremos que $1 \in M$.
Como $F \in C$ se tiene que $(1, a) \in F$. Ahora supongamos que $(1, b) \in F$ con $a \neq b$. Sea $F_b = F \backslash \{(1, b)\}$, como $(1, b) \neq (1, a) \in F$, se tiene que $(1, a) \in F_b$. Si $(n, c) \in F_b$ se tiene que $(S(n), G(c)) \neq (1, b)$ entonces $(S(n), G(c)) \in F_b$, y esto implica que $F_b \in C$. Sin embargo $F \subseteq F_b = F \backslash \{(1, b)\}$ lo cual es una contradicción, así que $(1, b) \in F$ para un único $b = a$, esto es $1 \in M$.

En segundo lugar, probaremos que si $n \in M$ entonces $S(n) \in M$.
Si $n \in M$, entonces existe un único $b \in A$ tal que $(n, b) \in F$. Como $F \in C$, entonces para la segunda condición $(S(n), G(b)) \in F$. Para probar que $S(n) \in M$ es necesario que a $S(n)$ solo le corresponda. $G(b) \in A$. Supongamos ahora que $(S(n), c) \in F$ con $c \neq G(b)$ y sea $F_c = F \backslash \{(S(n), c)\}$. Como $(S(n), c) \neq (1, a) \in F$ entonces $(1, a) \in F_c$. Por otro lado, si $(m, d) \in F_c$ implica que $(S(m), G(d)) \neq (S(n), c)$ ya que si fuesen iguales, se tendría que $S(m) = S(n)$ y $G(d) = c \neq G(b)$ y eso implica que $m = n$ y $d \neq b$, Luego $(n, d), (n, b) \in F$ lo cual contradice la condición que $n \in M$, entonces $(S(m), G(d)) \neq (S(n), c)$ esto es $(S(m), G(d)) \in F_c$ y $F_c \in C$, lo que en consecuencia $F \subseteq F_c = F \backslash \{(S(n), c)\}$, es una contradicción. Por lo tanto $S(n) \in M$. Esto prueba que M es un conjunto inductivo. Por el Axioma de Inducción, $M = \mathbb{N}$.

Para probar la unicidad de la función F, supongamos que $\bar{F}$ Es otra función de $\mathbb{N}$ en A tal que $\bar{F}(1) = a$ y $\bar{F}(S(n)) = G(\bar{F}(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por la primera condición $\bar{F}(1) = F(1)$.

Supongamos que $\bar{F}(n) = F(n)$, entonces G es una función de A tal que $\bar{F}(S(n)) = G(\bar{F}(n))$ y $F(S(n)) = G(F(n))$, esto es $\bar{F}(S(n)) = F(S(n))$ luego, por el Axioma de Inducción $\bar{F} = F$. ■

Definición 1.17 *Dados $m, n \in \mathbb{N}$. Se define:*

(i) $m < n$ *si existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $n = m + p$

(ii) $m > n$ *si existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $m = n + p$

(iii) $m \leq n$ *si* $m < n$ *o* $m = n$

(iv) $m \geq n$ *si* $m > n$ *o* $m = n$

1.4. Orden

En esta sección se presentan las definiciones de orden parcial y total, las cuales servirán para la definición del buen orden.
En lo que sigue consideraremos a X como un conjunto no vacío.

Definición 1.18 *Un orden parcial en X es una relación R que satisface las siguientes condiciones.*

1. *Reflexiva: xRx para todo $x \in X$.*

2. *Antisimétrica: Si xRy e yRx entonces $x = y$.*

3. *Transitiva: Si xRy e yRz entonces xRz.*

Cabe señalar que en un orden parcial no es necesario que todos los elementos del conjunto deban estar relacionados.

Ejemplo 1.19 La inclusión $\subseteq$ es una relación de orden parcial en el conjunto potencia de $X = \{0, 1, 2\}$, dado por

$$P(X) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

Esto puede ilustrarse en el siguiente gráfico:

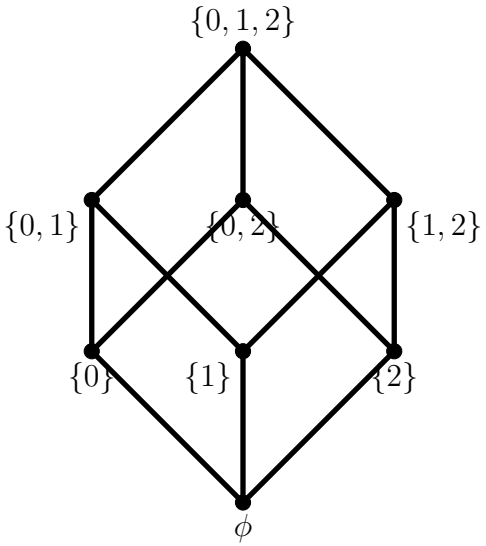


Fig 1

donde no todos los elementos del conjunto potencia se relacionan mediante la inclusión.

Definición 1.20 *Dada una relación de orden parcial R en un conjunto X. Se dice que R es una relación de orden total en X si xRy o yRx para todo $x, y \in X$.*

Ejemplo 1.21 Tomando en cuenta el ejemplo anterior, se puede considerar a una parte del conjunto potencia de $X = \{0, 1, 2\}$ tal como

$$Y = \{\phi, \{0\}, \{0, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

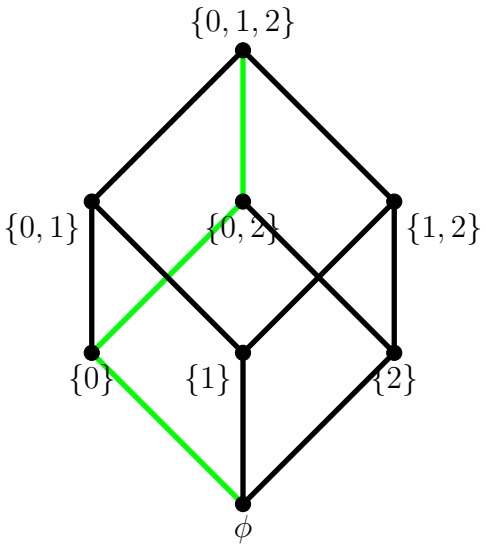


Fig 2

Y la inclusión $\subseteq$ es una relación de orden total, como puede verse en la *Fig* 3.

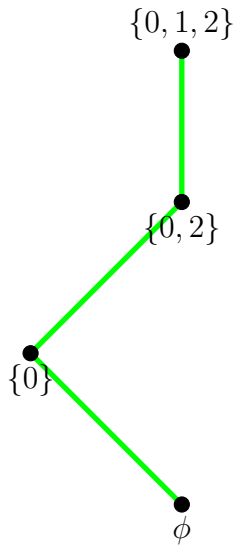


Fig 3

Se puede decir que un orden total es un caso particular de orden parcial.

Definición 1.22 *Sea A un conjunto ordenado por una relación de orden parcial R.*

(i) Un elemento $a \in A$ es minimal si xRa entonces $x = a$ para todo $x \in A$.

(ii) Un elemento $b \in A$ es maximal si bRx entonces $x = b$ para todo $x \in A$.

De acuerdo a la definición, los elementos minimal y maximal deben relacionarse con todos los elementos del conjunto. Además, no debe existir ningún otro elemento en el conjunto que se relacione por la izquierda con el minimal, y análogamente que no exista ningún otro que se relacione por la derecha con el maximal.

Ejemplo 1.23 Dados los conjuntos de números enteros $A = \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$, $B = \{3, 5, 9, 15, 45\}$ y $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ordenados respectivamente mediante xRy si y solo si x divide a y.

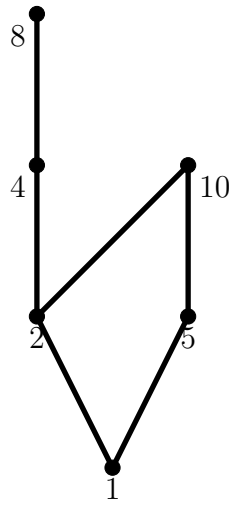


Fig 4 – a

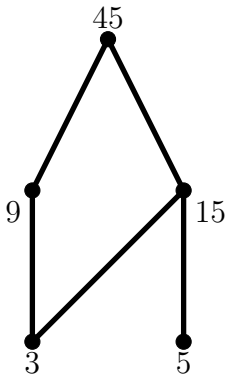


Fig 4 – b

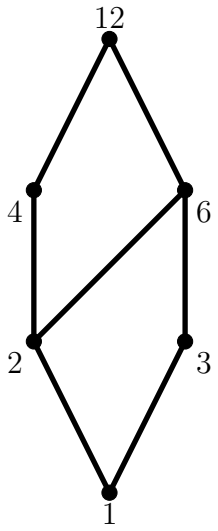


Fig 4 – c

Del gráfico, A tiene minimal 1 pero no maximal, en cambio B tiene maximal 45 pero no minimal, mientras que C tiene ambos maximal 12 y minimal 1.

En efecto, en el conjunto A dado que 1 es divisor de todo número natural, lo será particularmente a todo elemento de A, luego 1 es elemento minimal. Sin embargo, este conjunto no posee maximal, dado que no hay ningún elemento que sea dividido por todos los demás elementos. Observar que 8 es dividido por 1, 2 y 4, pero no por 5 ni 10, además 10 es dividido por 1, 2 y 5 pero no por 4 ni 8.

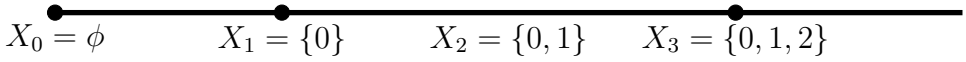
Algo similar ocurre con el conjunto B, se tiene que 45 es dividido por 3, 5, 9 y 15, luego es el elemento maximal. Mientras que no hay ningún elemento que divida a todos los demás elementos del conjunto, es decir, no hay elemento minimal. Esto es claro, pues 3 divide a 9, 15 y 45 pero no a 5, 5 divide a 15 y 45 pero no. A 3 ni 9.

Finalmente, en el conjunto C, se tiene que 1 divide a todos los elementos de C, eso lo convierte en el minimal; por otro lado 12 sería maximal puesto que es dividido por todos los demás elementos del conjunto, es decir, por 1, 2, 3, 4 y 6.

Definición 1.24 *Sea X un conjunto parcialmente ordenado. Entonces X es bien ordenado si todo subconjunto no vacío de X tiene elemento mínimo.*

Ejemplo 1.25 La inclusión $\subseteq$ es una relación de orden total .

$$X = \{\phi, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}, \{0,1,2,3\}, \ldots\}$$



El elemento mínimo de X es ϕ. Además

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \ldots$$

y es claro que cualquier subconjunto de X tiene elemento mínimo.

1.5. Numerabilidad

Una de las acciones más naturales del hombre a lo largo de su historia ha sido la de contar los objetos que percibe a su alrededor, dándole un significado abstracto a algo concreto. Este acto fue transformándose en algo más abstracto de la mano del desarrollo matemático, pues ya no solamente consistía en contar objetos sino en el de diferenciar dos cosas puntuales: aquello que puede terminar de contarse y lo que no.
Esta parte esta dedicada a las definiciones y teoremas más relevantes a la numerabilidad y no numerabilidad de conjuntos, los cuales serán importantes para entender los tipos de números ordinales.

Definición 1.26 *Se denota al conjunto de los n primeros números naturales como $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.*

Definición 1.27 *Un conjunto X es finito si es vacío o existe una biyección $\varphi : I_n \to X$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 1.28 Un conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ es finito pues basta con hacer corresponder $x \to x - 1$ para cada $x \in I_n$.

Ejemplo 1.29 La colección de estrellas es finita. Esto puede fundamentarse según la teoría de Stephen Hawking y Thomas Hertog, que dice que el universo es finito (teoría que fue promulgada en la revista Journal Of Hight Energy Physics después del fallecimiento de Stephen Hawking).

Se deduce de la definición que un conjunto X es no finito si es no vacío y ademas no existe una biyeccion entre X e I_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.30 *Sea $X \subseteq I_n$. Si existe una biyección $f : I_n \to X$ entonces $X = I_n$.*

Demostración:
Se utilizará inducción respecto a n. El resultado es obvio para $n = 1$. Supongamos cierto para n y consideremos una biyección $f : I_{n+1} \to X$. Sea $a = f(n+1)$. La restricción de f a I_n es una biyeccion $f' : I_n \to X\backslash\{a\}$. Si se cumple, $X\backslash\{a\} \subseteq I_n$, entonces, por hipótesis de inducción, se concluye que $X\backslash\{a\} = I_n$, de donde $a = n + 1$ y $X = I_{n+1}$. Si no se cumplen $X\backslash\{a\} \subseteq I_n$, entonces se tiene $n + 1 \in X\backslash\{a\}$. En este caso, existe $p \in I_{n+1}$ tal que $f(p) = n + 1$. Definimos una nueva bioyeccion $g : I_{n+1} \to X$ como $g(x) = f(x)$ si $x \neq p$ y $x \neq n + 1$, $g(p) = a$, $g(n + 1) = n + 1$. Ahora, la restricción de g a I_n nos da una biyección $g' : I_n \to X\backslash\{n + 1\}$. Evidentemente, $X\backslash\{n + 1\} \subseteq I_n$. Luego por hipótesis de inducción, $X\backslash\{n + 1\} = I_n$, de donde $X = I_{n+1}$. Esto termina la demostración. ■

Corolario 1.31 *No puede existir una biyección $f : X \to Y$ de un conjunto finito X sobre una parte propia $Y \subseteq X$.*

Demostración:
Supongamos que existe una biyección f entre X e Y. Dado que X es finito, entonces existe una biyección $\varphi : I_n \to X$. Luego $f \circ \varphi$ Es una biyeccion de I_n en Y, y en consecuencia Y es finito, teniendo la misma cantidad de elementos que X lo cual genera una contradicción. ■

Definición 1.32 *Un conjunto $X \subseteq \mathbb{N}$ es acotado si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \leq n$ para todo $x \in X$.*

Ejemplo 1.33 I_n es acotado por $n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.34 *Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.*

Demostración:
Sea X un conjunto finito, luego existe una biyección entre X e I_n. Por eso bastara con Conprobar el teorema para el caso $X = I_n$. Para $n = 1$ Es cierto, puesto que las únicas partes de I_1 son ϕ e I_1. Supongamos demostrado el teorema para I_n Y consideremos un subconjunto $Y \subseteq I_{n+1}$. Si $Y \subseteq I_n$, entonces por hipótesis de inducción, Y será un conjunto finito, cuyo número de elementos es menor o igual que n, y por tanto, menor o igual que $n+1$. Si, por el contrario, $n+1 \in Y$, entonces $Y\backslash\{n+1\} \subseteq I_n$ y, consecuentemente (salvo

en el caso trivial $Y = \{n+1\}$), existe una biyeccion $\psi : I_p \to Y\backslash\{n+1\}$ con $p \leq n$. Definamos la biyección $\varphi : I_{p+1} \to Y$ como $\varphi(x) = \psi(x)$ para $x \in I_p$ y $\varphi(p+1) = n+1$. Se deduce que Y es finito y su número de elementos no excede a $p+1$. Como $p \leq n$, se tiene $p+1 \leq n+1$. Además, si $Y \subseteq I_n$ tiene n elementos, entonces $Y = I_n$. Esto se deduce del corolario anterior, puesto que no puede haber una biyección de I_n sobre una parte propia Y. ■

Teorema 1.35 *Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ no vacío. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i . X es finito.

ii . X es acotado.

iii . X posee máximo.

Demostración:

$i \to ii$. Sea $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$. Si $p = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$, entonces $p > x$, para todo $x \in X$ y, en consecuencia, X está acotado.

$ii \to iii$. Si suponemos $X \subseteq \mathbb{N}$ acotado, se deduce que el conjunto

$$A = \{p \in \mathbb{N} : p \geq n, \forall n \in X\}$$

no es vacío. Por el Principio del Buen Orden, existe $p_0 \in A$, mínimo de A.
Afirmamos que $p_0 \in X$. En efecto, si $p_0 \notin X$ entonces se tendría que $p_0 > n$ para todo $n \in X$. Como $X \neq \phi$, ello obligaría a que $p_0 > 1$ y, por tanto $p_0 = p_1 + 1$. Si existiese algún $n \in X$ con $p_1 < n$, entonces $p_0 = p_1 + 1 \leq n$ y, como estamos suponiendo que $p_0 \notin X$, tendríamos que $p_0 < n$ es absurdo. Luego $p_1 \geq n$ para todo $n \in X$. Pero esto implica que $p_1 \in A$, que es absurdo, pues al ser p_0 mínimo de A se verifica que $p_0 = p_1 + 1 \leq p_1$. Por tanto debe cumplirse que $p_0 \in X$. Como $p_0 \geq n$ para todo $n \in X$, concluimos que p_0 es el máximo de X.

$iii \to i$. Si $p \in X$ es el máximo de X, entonces X está contenido en I_p, y dado que I_p es finito, X es finito.

■

Definición 1.36 *Un conjunto X es infinito si no es finito.*

Ejemplo 1.37 Los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son infinitos.

Definición 1.38 *Un conjunto X es numerable si es finito o existe una biyección $f : \mathbb{N} \to X$.*

Ejemplo 1.39 Tomando $f(n) = 2n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de los números pares $\{2, 4, 6, \ldots\}$ es numerable.
Además, $f(n) = 2n - 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, hace que el conjunto de los números impares $\{1, 3, 5, \ldots\}$ sea numerable.

Ejemplo 1.40 Los conjuntos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables. La prueba de la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ se encuentra en el capítulo 2.

Definición 1.41 *Un conjunto es no numerable si es infinito y no existe una biyección con* $\mathbb{N}$.

Ejemplo 1.42 Los conjuntos $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son no numerables. La prueba de la no numerabilidad de $\mathbb{R}$ se encuentra en el capítulo 2.

Un resultado necesario en la prueba del siguiente teorema es el denominado Axioma de Elección, el cual establece que, de una familia no vacía de conjuntos no vacíos, es posible *escoger* un elemento de cada conjunto. Esta elección de elementos es realizada mediante una función denominada *función de elección*.

El axioma de la elección tiene diversas formas equivalentes de ser enunciado, como por ejemplo el Teorema de Zermelo, el Lema de Zorn y el Lema de Tukey. Cada uno de estos principios tiene aplicaciones en las distintas ramas de la matemática, por ejemplo, el Lema de Tukey se emplea en Topología, en la prueba del Teorema de Tychonoff, otro ejemplo se da el en Análisis Funcional, en la demostración de la Extensión del Teorema de Hahn - Banach, utilizando el Lema de Zorn (Jech, 2008).

Axioma de Elección Si X es un conjunto no vacío y $P(X)$ su conjunto de partes, entonces existe una función T de $P(X) - \{\phi\}$ en X tal que $T(Y) \in Y$ para todo $Y \in P(X) - \{\phi\}$. La función T es llamada *función de elección* de X.

Teorema 1.43 *Si un conjunto* X *es infinito, entonces existe una función inyectiva de* $\mathbb{N}$ *sobre algún subconjunto de* X.

Demostración:
Sea T una función de elección para X y sea Q la colección de todos los subconjuntos finitos de X, como X es infinito, $X - Y \neq \phi \ \ \forall y \in Q$, entonces $T(X - Y) \in X - Y$ para el axioma de elección.
Si $y \in Q$, sea $G(Y) = Y \cup \{T(X - Y)\}$ entonces $G(Y) \in Q$ para todo. $Y \in Q$. Luego $G = \{(Y, G(Y)) : y \in Q\}$ es una función de Q en Q. Por el teorema de la recursión, existe una función $F : \mathbb{N} \to Q$ tal que $F(1) = \{T(X)\}$, y
(1) $F(S(n)) = G(F(n)) = F(n) \cup \{T(X - F(n))\} \ \forall n \in \mathbb{N}$
Además
(2) Si $m \leq n$ en $\mathbb{N}$, entonces $F(m) \subseteq F(n)$.
En efecto, sea $M = \{n \in \mathbb{N} : F(m) \subseteq F(n) \ \forall m \leq n\}$ claramente $1 \in M$.
Supongamos que $n \in M$. Si $m \leq S(n)$ entonces $m \leq n$ o $m = S(n)$. Si $m \leq n$, para la hipótesis inductiva, (1) y (2) se tienen que $F(m) \subseteq F(n) \subseteq F(S(n))$ donde $F(S(n)) = F(n) \cup \{T(X - F(n))\}$. Si $m = S(n)$ entonces $F(m) = F(S(n))$ luego $S(n) \in M$. Por tanto $M = \mathbb{N}$.
El conjunto $H = \{(n, T(X - F(n))) : n \in \mathbb{N}\}$ es una función de red. $\mathbb{N}$ en X.
Veamos qué H es inyectiva. Si $m < n$ en $\mathbb{N}$, entonces $S(m) \leq n$, luego $H(m) = T(X - F(m)) \in G(F(m)) = F(S(m)) \subseteq F(n)$; implica que $H(m) \in F(n)$; además $H(n) =$

$T(X - F(n)) \in X - F(n)$ entonces se observa que $H(n) \notin F(n)$ luego $H(m) \neq H(n)$, es decir, si $m \neq n$ entonces $H(m) \neq H(n)$, esto es H es inyectiva. ■

El teorema anterior también puede ser enunciado como sigue: "Todo conjunto infinito X contiene un subconjunto infinito numerable."

Cabe mencionar que otro de los usos del Axioma de la Elección se encuentra en la demostración del corolario del teorema anterior: Un conjunto es infinito si y solo si es equivalente a un subconjunto propio de sí mismo. Dicho corolario fue usado por Dedekind para definir un conjunto infinito. (Halmos, 2017).

Teorema 1.44 *Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ es finito o numerable.*

Demostración:
Sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Para todo $m \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$A_m = \{n \in A : m < n\}$$

Es infinito, pues de no serlo, existirá algún $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que A_{m_0} es finito y en ese caso A_{m_0} está acotado, por otro lado si definimos $B_{m_0} = \{n \in A : m_0 \geq n\}$ el cual tiene a m_0 como elemento máximo y por tanto acotado. Así $A = A_{m_0} \cup B_{m_0}$ es acotado y en consecuencia finito, lo cual es una contradicción.

Además, A_m no vacío. Por el Principio del Buen Orden, tomaremos a $G(m)$ como el primer elemento de A_m. Entonces:

(1) $m < G(m)$ para todo $m \in A$
Y $G = \{(m, n) \in A \times A : n = G(m)\}$ Es una función de A en A.

Habiendo definido la función G de A en A, y tomando $\bar{n}$ el primer elemento de A, para el Teorema de Recursión, existe una función F de $\mathbb{N}$ en A tal que

$$F(1) = \bar{n}$$

y

(2) $F(S(n)) = F(n + 1) = G(F(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por (1) y (2), $F(n) < G(F(n)) = F(n + 1)$ para todos $n \in \mathbb{N}$. Por el Axioma de Inducción, se sigue que $F(n) < F(m)$ si $n < m$. Por tanto F es inyectable y su rango, $A_F = \{F(n) : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto numerable de A.
Pero $A = A_F$. Por otro lado, existe algún $h \in A - A_F$. Ya que A_F es un conjunto infinito, $N_h = \{n : h < F(n)\} \neq \phi$. Sea j el primer elemento de elemento N_h. Ya que $F(1) = \bar{n} \leq h < F(j), 1 < j$. Por tanto $j = k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $h \notin A_F$ y $F(k) < F(k + 1)$, $F(k) < h < F(k + 1)$. Esto es imposible, ya que, para (1) y (2),

$$F(k + 1) = G(F(k)) \leq h$$

. ■

Capítulo 2

George Cantor: Una mirada hacia el infinito

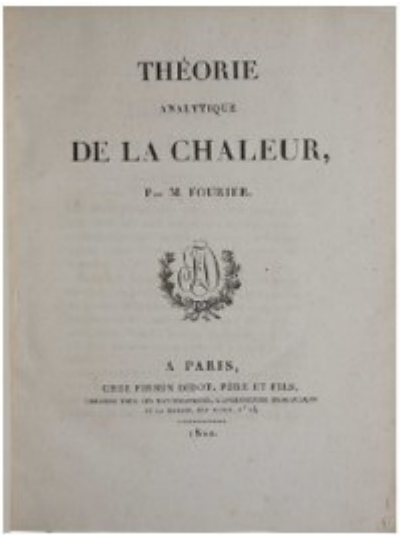
Uno de los momentos caóticos que atravesó la matemática estuvo en develar algunas cuestiones fundamentales, tales como: ¿Qué es una función?, ¿qué propiedades tiene? ¿de qué forma se la puede representar?, etc. Estas interrogantes surgieron en el estudio de las denominadas *Series de Fourier* , las cuales fueron desarrolladas con el propósito de dar solución al Problema del Calor (Jech, 2008).

Sin embargo, al estudiar dichas series se fueron desarrollando otras ideas matemáticas las cuales serán el motivo de este capítulo. Es así que a partir de ahora se dará una mirada al recorrido que realizó Cantor (1845 - 1918), desde la de investigación de la unicidad de la serie de Fourier hasta el descubrimiento de la teoría de conjuntos y los números transfinitos.

2.1. La unicidad de las series de Fourier

El análisis matemático puro centra su atención desde el siglo XIX hasta la actualidad en conceptos que se originaron a partir del trabajo de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), quien se encontraba investigando métodos para el tratamiento del *Problema de la Conducción del Calor*.





Joseph Fourier y la portada de su Teoría analítica del calor. (Stewart, 2008)

El problema de la cuerda vibrante fue el origen de esta historia. Euler y D'Alembert realizaban estudios sobre dicho problema, por otro lado Daniel Bernoulli notó que la solución de aquel problema podía darse en serie de senos y cosenos, aquella idea le sirvió a Fourier para realizar su trabajo. La influencia del trabajo de las series trigonométricas de Fourier fue grande, pues su trabajo sobre el problema del calor daría lugar al desarrollo de la teoría de funciones, y no solamente ella, sino también el del concepto de continuidad y convergencia de series infinitas, mostrando así que una concepción física sirvió como un motor para el desarrollo de teorías matemáticas puras, tal y como se señala en (Duoandikoetxea, 2007).

De acuerdo con Dauben (Dauben, 2020), en la Universidad de Halle, en la década de 1860, Eduard Heine realiza una investigación para determinar la unicidad de una serie de Fourier, y aprovechando la llegada de Cantor a Halle, le propuso trabajar en la demostración de la unicidad de una serie de Fourier, algo que sedujo su atención. Un año después, en 1870, Cantor determinó que la unicidad era posible bajo ciertas condiciones para los puntos de discontinuidad, y para lograr esto, Cantor necesitaría del concepto de conjunto derivado. Ese mismo año enuncia el siguiente teorema:

Teorema 2.1 *Sean las sucesiones infinitas* $a_1; a_2; ...a_n; ...$ *y* $b_1; b_2; ...b_n; ...$ *a través de las cuales* $\lim_{n\to\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx) = 0$*, para todo* $a < x < b$*, entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Primera generalización: En 1871, Cantor extendió el teorema de la siguiente manera: La unicidad de la representación de una función mediante una serie trigonométrica es convergente en todos los puntos a excepción de ciertos puntos.

Segunda generalización: El teorema de la unicidad pudo extenderlo aún más: la unicidad de la representación en serie trigonométrica es convergente en todos los puntos, a excepción de una cantidad infinita de ellos. Estos puntos debían presentar una distribución particular.

Las diversas restricciones realizadas a los puntos x gestarían las semillas que mas adelante darían como fruto la teoría de números reales, la teoría de conjuntos y los números transfinitos (Dauben, 2020).

2.2. El desarrollo de los números irracionales

Cantor se dio cuenta que el conjunto de puntos excepcionales necesarios para la segunda generalización del teorema de unicidad de las series trigonométricas, requería de un desarrollo detallado de los números reales. En esta sección mostraremos brevemente el camino para la construcción de los números irracionales y reales.

El conjunto de los números reales ha sido construido de diversas formas, por ejemplo mediante las cortaduras de Dedekind, por medio de las sucesiones fundamentales, etc.

Los números racionales, los cuales denotaremos por A, es en este punto el origen de una serie de construcciones, las cuales desembocarán en el conjunto de los números reales. Para ello Cantor tomó una sucesión de números racionales.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

De modo que:
para todo racional $\epsilon > 0$ existe un $n_0 > 0$ tal que $|a_{m+n} - a_n| < \epsilon$ si $n > n_0$

Estas son sucesiones de Cauchy de números racionales, los cuales a través de ciertas construcciones darán lugar a los números reales. (Suppes, 1972).

Dichas sucesiones, según Cantor tenían la propiedad de tener un determinado límite b, y las denominó *sucesiones fundamentales* (Cantor, 1915).

Dadas dos sucesiones:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ con límite b y $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_n, \ldots$ con límite b'

Al comparar los límites de estas sucesiones fundamentales se obtuvo que:

$b = b'$, si $a_n - a'_n$ se hace hace infinitamente pequeño a partir de cierto n.

$b > b'$, si $a_n - a'_n > \epsilon$ donde ϵ es racional positivo, a partir de cierto n.

$b < b'$, si $a_n - a'_n < -\epsilon$ donde ϵ es racional positivo, a partir de cierto n.

Además se compara el límite de una sucesión con un número racional a.

$b = a$, si $a_n - a$ se hace hace infinitamente pequeño a partir de cierto n.

$b > a$, si $a_n - a > \epsilon$ donde ϵ es racional positivo, a partir de cierto n.

$b < a$, si $a_n - a < -\epsilon$ donde ϵ es racional positivo, a partir de cierto n.

Esto permitió extender las operaciones con números racionales a operaciones con límites tales como:

$$Adición : b + b'$$
$$Sustracción : b - b'$$
$$Multiplicación : bb'$$
$$División : \frac{b}{b'} \ siempre \ que \ b' \neq 0$$

los cuales corresponden respectivamente a:

$$\lim(a_n + a'_n)$$
$$\lim(a_n - a'_n)$$
$$\lim a_n a'_n$$
$$\lim \frac{a_n}{a'_n} \ siempre \ que \ \lim a'_n \neq 0$$

Lo cual justifica la denominación que tiene b como límite de una sucesión.

Denotemos a los números racionales como A, así diremos que una sucesión (a_n) en A es aquella cuyos términos son todos números racionales.
Supongamos que esta sucesión (a_n) es fundamental, así que, dado un número racional positivo ϵ existe un n_0 natural tal que $n > n_0$ entonces $|a_n - b| < \epsilon$, según esto b es el límite de dicha sucesión. Así el conjunto formado por cada uno de estos límites b lo denotaremos por B. Ver (Cantor, 1915).

Cabe señalar que una sucesión fundamental de términos racionales puede tener límite racional o no. Por ejemplo, si tomamos las sucesiones de términos racionales:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

y

$$a'_n = (1 + \frac{1}{n})^n$$

En el primer caso esta sucesión tiene $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ que es racional, mientras que en el segundo, tiene $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ el cual no es racional.

De acuerdo a lo anterior, el sistema A genera otro sistema B. De la misma manera, los sistemas A y B generan otro sistema C, y así sucesivamente.

Es así que el sistema A genera esta construcción de sistemas $B, C, \ldots, K$ llamados *dominios*. Este proceso tendría el propósito de construir a los números irracionales a partir de los racionales, sin embargo para Dedekind todo esto era innecesario. (Dauben, 2020).

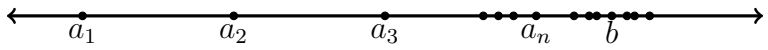
Ya que se menciona este sistema de números racionales A, geométricamente hablando es posible relacionarlos con los puntos de una línea recta, tal y como lo enuncia el

siguiente axioma: "A cada magnitud numérica pertenece también, recíprocamente, un punto determinado de la línea recta cuya coordenada es igual a esta magnitud numérica" (Cantor, 1915).

En (Dauben, 2020) se señala que este axioma fue una contribución de Cantor, que a diferencia del axioma de Dedekind, en este último no se hizo mención explícita la correspondencia de cada número real con un único punto de la recta.

El axioma dice que se puede asociar cada número real con un punto en la recta, y esto permite pensar un número como un punto en la recta y viceversa.

Por ejemplo, los términos de sucesión fundamental (a_n) con límite b, se asocia a una línea recta como:

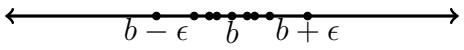


2.3. El destino de conjuntos derivados

La segunda generalización sobre la unicidad de una función representada como una serie trigonométrica tuvo un elemento novedoso: la inclusión del concepto de conjunto derivado.

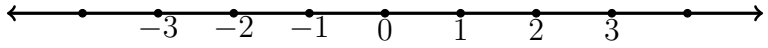
Definición 2.2 *Se dice que L es punto límite de un conjunto de números reales P (donde L no necesariamente está en P), Si todo intervalo que contenga a L, contiene infinitos puntos de P*

Si la sucesión (a_n) contiene infinitos términos, su punto límite sería b, puesto que, por definición de sucesión fundamental, a partir de cierto $n > n_0$ se cumple $b-\epsilon < a_n < b+\epsilon$, es decir que existen infinitos términos a_n dentro de un intervalo que contiene a b.



Por el contrario, de no ser un punto límite, se denominará punto aislado del conjunto P.

Ejemplo 2.3 En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, cada número sería un punto aislado.



Definición 2.4 *Sea P un conjunto, al conjunto de los puntos límite de P se le denomina conjunto derivado, denotado por P'.*

Análogamente se denotará por P'' al derivado del conjunto P', P''' al derivado de P'', y así sucesivamente. Con respecto a los conjuntos derivados, se pueden dar dos casos.

Definición 2.5 *Sea P un conjunto de números reales.*

1. *P es de primera especie si existe un orden finito v tal que $P^{(v+1)} = \phi$, Es decir, la sucesión de derivados*
   $P', P'', P''', \ldots, P^{(v)}$ es finita.

2. *P es de segunda especie si $P^{(v)} \neq \phi$ para todo orden v, es decir*
   $P', P'', P''', \ldots, P^{(v)}, \ldots$ es infinita.

Ejemplo 2.6 El conjunto $P = \left\{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots\right\}$ es de primera especie, ya que tiene por conjunto derivado $P' = \{0\}$ el cual al ser finito tiene derivado vacío, es decir $P'' = \phi$.

Ejemplo 2.7 *Son conjuntos de primera especie:*

(i) El conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ ya que $\mathbb{N}' = \phi$.

(ii) El conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ dado que $\mathbb{Z}' = \phi$.

Cantor probó que los conjuntos de primera especie existían tomando en primera instancia a un punto de la recta, el cual estaba determinado por un número del tipo v - ésimo, y a partir de éste trabajando hacia atrás, tomó una sucesión de números del tipo $v-1$ y, luego una sucesión de números del tipo $v-2$ que determinaban a cada uno de estos, y así sucesivamente, hasta que llegó a un número infinito de números racionales del dominio A (Grattan-Guinness, 2020).

En el caso de los conjuntos de segunda especie, se dice que Cantor encontró un ejemplo en el que un conjunto P de segunda especie tenía todos sus derivados $P', P'', P^{(3)}, P^{(4)}, \ldots$ diferentes, de ahí que surge la idea de definir al derivado de orden infinito $P^{(\infty)}$ como el conjunto de los puntos en común de todos los derivados de orden finito.

Ejemplo 2.8 *El Conjunto de Cantor:*
Dado un intervalo $[0;1]$ *se construye de la siguiente manera:*
Se toma

$$E_1 = [0;1]$$

.
Se elimina el tercio central del intervalo anterior, obteniéndose

$$E_2 = [0;\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3};1]$$

.
Y cada conjunto E_i *se construye a partir del anterior, eliminando iterativamente el tercio central en cada paso.*

$$E_3 = [0;\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9};\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3};\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9};1]$$

El conjunto de Cantor se obtiene como la intersección de todos estos conjuntos:

$$C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} E_i$$

Este conjunto cumple $C' = C$ *(Rudin, 2021) y en consecuencia todos los derivados de todas las órdenes también son iguales a* C*. Esto quiere decir que el derivado de este conjunto nunca se anula, y así el conjunto de Cantor es de segunda especie. Además, si se toma la intersección de todos sus derivados se obtiene su derivado de orden infinito*

$$P^{(\infty)} = C$$

Cantor también encontró otro ejemplo en el que $P^{(\infty)}$ era un conjunto finito, esto implicaba que el siguiente derivado se debía de anular, y esto propició que el siguiente orden de derivación sea $P^{(\infty+1)}$ (Piñeiro, 2013).

Además se establecieron órdenes como:

$$P^{(\infty)}, P^{(\infty+1)}, P^{(\infty+2)}, \ldots$$

incluso surgieron otros tales como:

$$P^{(n\infty^{\infty})}, P^{(\infty^{\infty+1})}, P^{(\infty^{\infty+n})}, P^{(\infty n^{\infty})}, P^{(\infty^{\infty^n})}, P^{(\infty^{\infty^{\infty}})}, P^{(\infty^{\infty^{\infty^{\cdot^{\cdot}}}})}, \ldots$$

Ejemplo 2.9 *Son conjuntos de segunda especie:*

(i) El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$ *ya que* $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}'' = \mathbb{Q}''' = \ldots = \mathbb{R}$. *Luego* $\mathbb{Q}^{(\infty)} = \mathbb{R}$.

(ii) El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ *ya que* $\mathbb{R}' = \mathbb{R}'' = \mathbb{R}''' = \ldots = \mathbb{R}$. *Entonces* $\mathbb{R}^{(\infty)} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.10 *Se define los elementos de* P *distribuidos por niveles:*

Elementos de Nivel 1*: Aquellos de la forma*

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$; $a_3 = \frac{1}{3}$; ...; ...
Para cada $n \in \mathbb{N}$ *definimos los intervalos*

$$I_n = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3^n},\ \frac{1}{n} + \frac{1}{3^n}\right)$$

Estos intervalos tienen por centro a los elementos a_n *y radio* $\frac{1}{3^n}$, *esto asegura que todos estos intervalos sean disjuntos. En estos intervalos se definirán los elementos de los siguientes niveles agrupados por columnas.*

Elementos de Nivel 2*: Para cada valor de los elementos de nivel 1 (a partir de* a_2*), se construyen sucesiones de la forma:*

$$b_{n,m} = a_n + \frac{1}{3^n \cdot 2^m}$$

Y cada uno de ellos converge a $a_n; n \geq 2$.

$$b_{2,m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9 \cdot 2^m};\ b_{3,m} = \frac{1}{3} + \frac{1}{27 \cdot 2^m};\ \ldots$$

Elementos de Nivel 3*: De la misma manera, para cada elemento del nivel 2 (a partir de* b_3*), se construyen sucesiones* $c_{n,m,k}$ *que convergen a* $b_{n,m}$.

$$c_{n,m,k} = b_{n,m} + \frac{1}{3^n \cdot 2^{m+2} \cdot 2^k}$$

Y así sucesivamente.

***Esquema**: El conjunto P se vería de esta manera:*

	Columna 1	*Columna 2*	*Columna 3*	$\cdots$	*Columna n*
Nivel n					$\cdots$
$\cdots$					$\cdots$
Nivel 3			$(c_{3,m,k})$	$\cdots$	$(c_{2,m,k})$
Nivel 2		$(b_{2,m})$	$(b_{3,m})$	$\cdots$	$(b_{n,m})$
Nivel 1	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n

***Cálculo de los derivados**:*

***P'**: el primer derivado de P está formado por:*

(i) 0 *por ser el punto límite de los elementos del nivel 1.*

(ii) Todos los elementos de cada columna a excepción de los elementos de sus niveles más altos.

***P"**: el segundo derivado de P está formado por*

(i) 0 *por ser punto límite de los elementos restantes del nivel 1.*

(ii) Todos los elementos de cada columna restante a excepción de los elementos de sus niveles más altos restantes.

y así sucesivamente.

Luego, $P^{(\infty)} = 0$ dado que 0 es el único elemento común en cada derivado. Además en este caso, se puede tomar $P^{(\infty+1)} = \phi$.

Cantor había dado lugar al origen de los números ordinales (Dauben, 2020).

En este punto, nos encontramos en el umbral de la idea del infinito. Históricamente, Aristóteles distinguió dos tipos de infinitos:

1. Infinito en potencia.
2. Infinito en acto.

El infinito en potencia es considerado como un proceso recurrente, desde una cantidad finitamente pequeña hasta llegar a una cantidad inimaginablemente grande. Por otro lado, el infinito en acto se concibe en sí mismo como algo inmensamente grande.

Según Hallet (Hallett, 1984), Es sobre esto último que Cantor discernió como:

(i) El infinito en acto aumentable o transfinito.

(ii) El infinito en acto inaumentable o absoluto.

El primero considera que el infinito siempre se puede incrementar, dando lugar a los números transfinitos, mientras que el segundo se entiende como un infinito del infinito.

En el año 1655 Jhon Wallis (1616 - 1703) empleó la lemniscata (∞) para simbolizar al infinito (entendiéndose en ese tiempo bajo el concepto de infinito en potencia) y desde ese momento se usó hasta el día de hoy. Wallis al no dar algún motivo que lo llevara a emplear la lemniscata como símbolo del infinito, dio lugar a una serie de teorías, una de ellas menciona que Wallis se inspiró en letra griega omega minúscula, siendo esta la última letra del alfabeto como metáfora del fin. Ver Gargantilla, P.(2019). Volviendo al origen de los números ordinales, Cantor desechó el uso del símbolo ∞ por el de ω, pues la lemniscata esta asociada a la idea de infinito en potencia, dando lugar así a la idea de infinito en acto (Pujós, 2019).

2.4. El inicio de la Teoría de Conjuntos

El inicio de este viaje hacia este universo Cantoriano comienza con una batalla contra la intuición. Esta aventura empieza en 1873, año en el cual Cantor probaría que el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es numerable, estableciendo así las bases de la *Teoría de conjuntos cantoriana*. El hecho que los números reales no fuesen numerables implicaría que hay infinitos más grandes que otros, y con esto empezó el estudio sobre los números cardinales.

De hecho, Cantor realizó tres demostraciones, siendo la más conocida el procedimiento en diagonal.

Teorema 2.11 *El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no es numerable.*

Demostración:
Supongamos que el conjunto de los números reales es numerable. Por otro lado, todo número real tiene representación decimal (Niven, 2005), luego, se puede formar una sucesión con todos los números reales:

$$x_1 = a_1, a_{11}a_{12}a_{13}a_{44}\ldots$$

$$x_2 = a_2, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots$$

$$x_3 = a_3, a_{31}a_{32}a_{33}a_{24}\ldots$$

$$\vdots$$

A continuación, se procederá a construir un número real. $x_0 = 0, d_1d_2d_3\ldots$, de tal manera que no esté dentro de esta numeración. En primer lugar, se impondrá la condición de que cada $d_i, i \in \mathbb{N}$ sea distinto de 0 y 9, esto se hace para evitar el caso en que se presente la siguiente igualdad: $0,999\ldots = 1,000\ldots$. En segundo lugar, se exigirá que la parte decimal sea tal que: $d_1 \neq a_{11}$, $d_2 \neq a_{22}$, $d_3 \neq a_{33}$ y así sucesivamente, esto implica que el número x_0 es diferente de x_1 en su décima, diferente de x_2 en su centésima, diferente de x_3 en su milésima, y así sucesivamente será distinto de cada uno de los números de la sucesión dada, llegando así a una contradicción. Por tanto, el conjunto de los números reales es no numerable. ■

Ya en el año 1877, Cantor escribía una carta a Dedekind diciendo: "Lo veo y no lo creo" (Pujós, 2019). Estas palabras mostraban su sorpresa al haber encontrado que la cantidad de puntos en la recta era la misma que la de un plano; esto era algo evidentemente polémico entre la comunidad matemática de esa época.

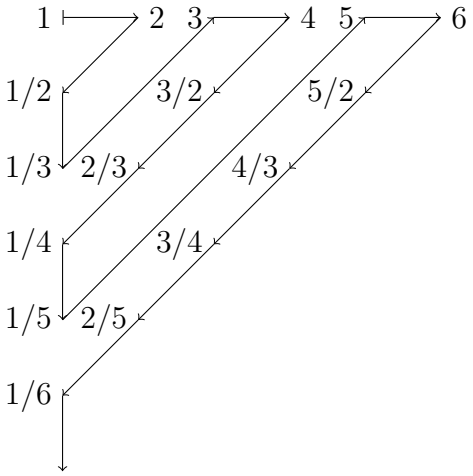
Después de realizar las demostraciones de la numerabilidad de los números algebraicos (Cantor, 1915) , y la no numerabilidad de los reales, publica en 1878 la demostración de la numerabilidad de los racionales.

Teorema 2.12 *El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable.*

Demostración:
Cantor probó que el conjunto de los números racionales era numerable, para ello dispuso a los números racionales en una disposición de filas y columnas.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots & \frac{n}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots & \frac{n}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \cdots & \frac{n}{4} & \cdots \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \cdots & \frac{n}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Eliminando los números racionales equivalentes con diferente representación, consiguió enumerar cada número racional como en el siguiente esquema:



■

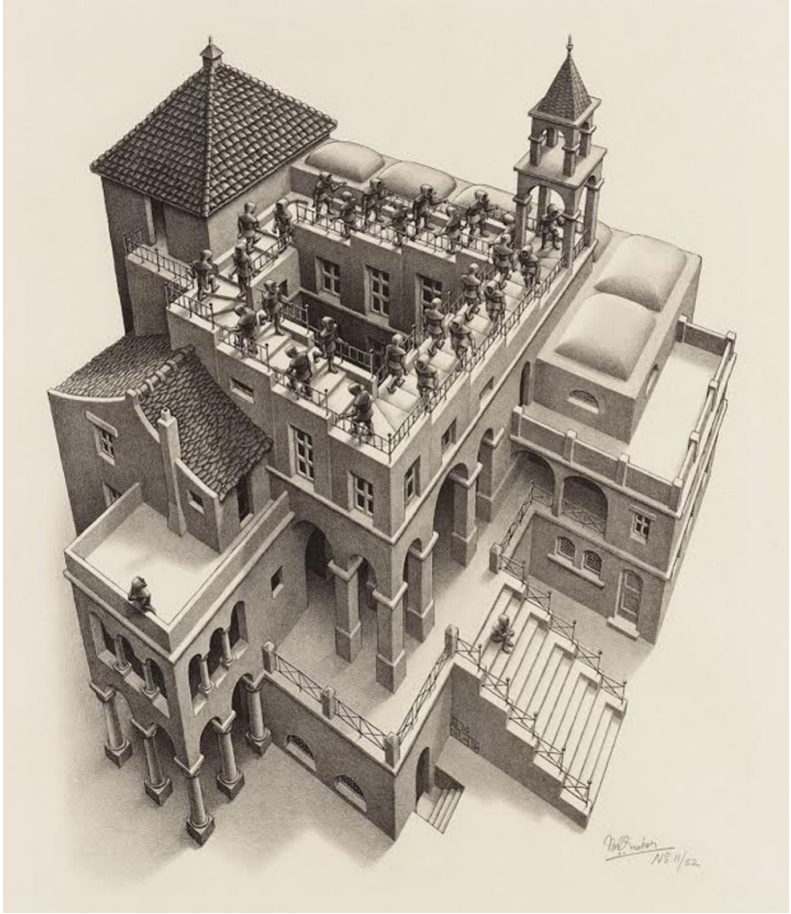
Courant (Courant y Robbins, 1996).

Más adelante, entre los años 1895 y 1897, Cantor se encontraba desarrollando las bases de su teoría de conjuntos. Cantor caracterizó a los elementos de cierto conjunto, una propiedad exclusiva de ellos, es así que un conjunto C está formado por todos aquellos elementos x que verifiquen cierta propiedad $p(x)$, esto es $C = \{x : p(x)\}$. Esta manera de definir a un conjunto generó un sector opositor de matemáticos, del cual uno de ellos abriría el paso a un nuevo capítulo de esta historia.

2.5. Mas allá del conteo: Números transfinitos

A lo largo del desarrollo de la historia de la humanidad y de la mano con ella, la matemática ha estado en constante evolución. En la etapa más primitiva del hombre su necesidad de contar lo llevó a emplear gráficos, símbolos y hasta los dedos de sus manos, todo esto influenciado por la naturaleza de su entorno, como por ejemplo el hueso de Lebombo y el hueso de Ishango (Stewart, 2008).

Es aquí que se puede observar la naturalidad con que la matemática se hace necesaria en la vida del hombre, y no sólo fundada en la naturaleza de la realidad, sino que también en lo profundo de su abstracción.
Un ejemplo de cómo la matemática influye en el arte es la obra de Escher, llamada *Escalera arriba y escalera abajo* de 1960. Esta obra, claramente influenciada en la idea del infinito, muestra una escalera en la que cada escalón es el principio y a la vez el final de la misma, por la cual se puede subir (o bajar) infinitamente.



Escalera arriba y escalera abajo. Escher. Tones, J.(2015)

Ver 14 Obras de Escher

Al realizar el conteo de ciertos objetos, nosotros empleamos los números naturales; por ejemplo podríamos contar los siguientes elementos geométricos:



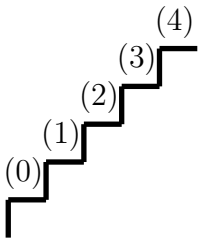
(1) (2) (3) (4)

Sin embargo también se puede empezar el conteo a partir del *cero*.

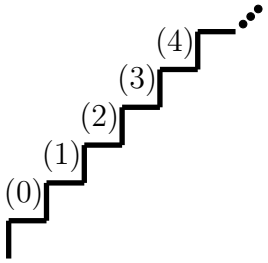


(0) (1) (2) (3)

Ya que se ha mencionado el infinito en la obra de Escher, a partir de ahora se realizará el conteo utilizando escalones, una idea similar a la que puede verse en (Conway y Guy, 1998).



La escalera mostrada representa 5 escalones enumerados como $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Por otro lado, se puede pensar en una escalera sin fin, como la siguiente.



Esta última escalera posee ω escalones enumerados como $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Este número ω es el primer número transfinito.

La concepción de los números ordinales está basada en dos principios:

1. Todo número ordinal tiene su sucesor.

2. Toda sucesión de números ordinales tiene un ordinal inmediato siguiente a todos ellos.

De esta manera, los números ordinales fueron clasificados de la siguiente manera:

Clase I : $0; 1; 2; 3; 4; 5; \ldots$

Clase II : $\omega; \omega+1; \omega+2; \omega+3 \ldots;$
$\omega \times 2; \omega \times 2+1; \omega \times 2+2; \ldots; \omega \times 3; \omega \times 3+1; \omega \times 3+2; \ldots;$
$\omega^2; \omega^2+1; \omega^2+2; \ldots;$
$\omega^\omega; \omega^\omega+1; \omega^\omega+2; \ldots;$
$\omega^{\omega^\omega}; \omega^{\omega^\omega}+1; \omega^{\omega^\omega}+2; \ldots$

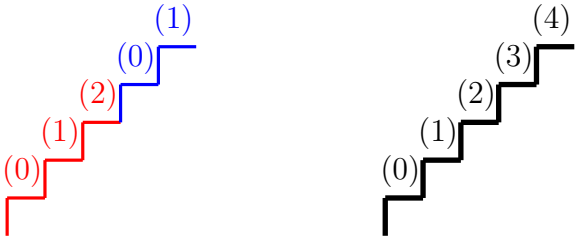
Clase III : $\epsilon_0; \ldots; \epsilon_1; \ldots; \epsilon_2 \ldots; \epsilon_\omega; \ldots; \epsilon_{\omega^\omega;\ldots;}$

$\epsilon_{\epsilon_0}; \ldots; \epsilon_{\epsilon_1}; \ldots; \epsilon_{\epsilon_2}; \ldots; \epsilon_{\epsilon_\omega}; \ldots$

Y así sucesivamente. Ver (Conway y Guy, 1998) y (Sierpinski, 1965).

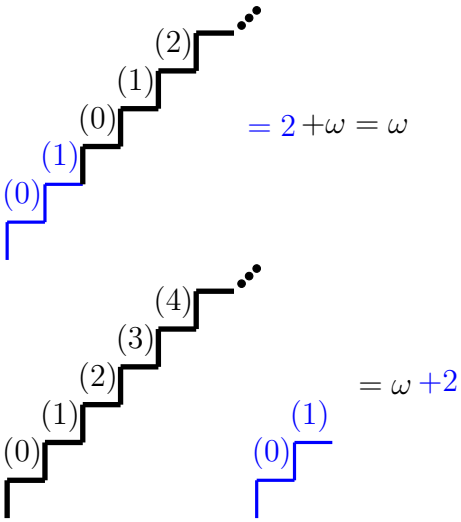
Los de Clase I están conformados por aquellos que tienen una cantidad finita de predecesores. El primer ordinal es 0, y por el primer principio tiene un sucesor 1, y este último a su sucesor 2, y así sucesivamente. Esta clase está conformada por todos los números naturales (incluyendo al cero).

En el siguiente gráfico se puede observar la adición entre ordinales de la clase I. Para sumar $\alpha+\beta$ donde $\alpha = 2 = \{0, 1\}$ y $\beta = 3 = \{0, 1, 2\}$, se yuxtapone la representación de β debajo de α, resultando otro ordinal de la misma clase $\alpha + \beta = 5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

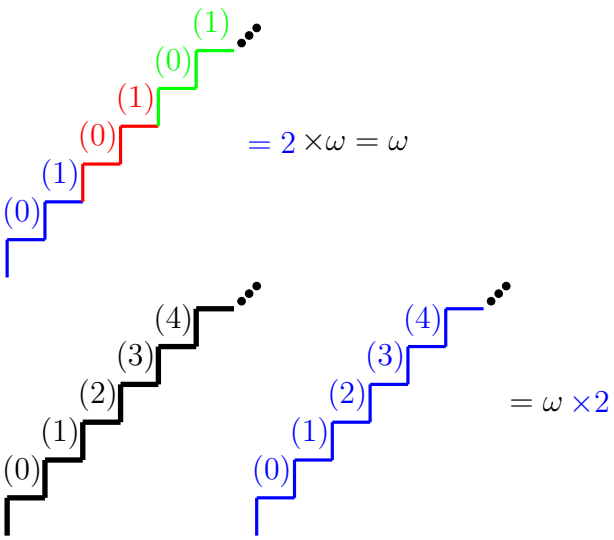


Por otro lado, los de Clase II son aquellos que tienen una cantidad numerable de predecesores. Debido al segundo principio, la sucesión de ordinales de Clase I tiene un ordinal inmediato superior ω, y empleando el primer principio su sucesor será $\omega+1$, que a su vez tendrá un sucesor $\omega+2$, y así hasta llegar a $\omega+\omega$, el cual está representado por la expresión $\omega \times 2$, el cual tiene por sucesor $\omega \times 2+1$, y continuando de esta manera hasta llegar al ordinal $\omega \times 2+\omega$ escrito como $\omega \times 3$, Esta sucesión de ordinales continúa así, llegando en algún momento a una expresión de la forma $\omega \times \omega$ escrito por ω^2, y de esta manera continua con expresiones del tipo $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$.

Los números ordinales de esta clase son denominados números transfinitos, y el primero de ellos es ω. En cuanto a las operaciones aritméticas de esta clase son un tanto distintas a lo que se pueda esperar; por ejemplo, la adición no es conmutativa como se puede apreciar en el siguiente gráfico.



Del gráfico anterior se observa que al adicionar $2+\omega$ se yuxtapone el ordinal 2 debajo de ω obteniéndose el mismo ω, por otro lado, al sumar $\omega + 2$ no se puede yuxtaponer ω por debajo de 2.
Otra curiosidad es que la multiplicación tampoco es conmutativa, nuevamente se elige a los mismos ordinales como ejemplo.



En el primer caso $2 \times \omega$ representa una escalera compuesta por la yuxtaposición de ω veces 2, mientras que en el segundo caso $\omega \times 2$ uno no puede colocarse debajo del otro.

Otras formas de expresar a ω y otros ordinales se muestran en el siguiente.

Ejemplo 2.13 Se verifica:

(a) $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ tiene ordinal ω

(b) $\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots\}$ Tiene ordinal ω

(c) $\{2, 3, 4, \ldots, 1\}$ tiene ordinal $\omega + 1$

(d) $\{1, 3, 5, \ldots, 2, 4, 6, \ldots\}$ tiene ordinal. $\omega \times 2$

(e) $\{1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n, \ldots$
$3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, 3 \times 2^3, \ldots, 3 \times 2^n, \ldots$
$3^2, 3^2 \times 2, 3^2 \times 2^2, 3^2 \times 2^3, \ldots, 3^2 \times 2^n, \ldots$
$3^m, 3^m \times 2, 3^m \times 2^2, 3^m \times 2^3, \ldots, 3^m \times 2^n, \ldots\}$ tiene ordinal. ω^2

Por otro lado, también se encuentran los ordinales de la clase III, y, por el segundo principio de generación, la sucesión de ordinales de segunda clase debe tener un ordinal inmediato superior, en este caso un límite ordinal denotado por $\epsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot}}}}}$, y de esta manera se continúa con el proceso, incluyendo más clases.

Observación 2.14 El número ϵ_0 es la primera solución de la Ecuación de Cantor $\omega^\epsilon = \epsilon$.

Ver (Conway y Guy, 1998).

Capítulo 3

Sistemas Axiomáticos

En este capítulo se abordará el rol principal que desempeñó Zermelo ante la encrucijada que se encontró la teoría de conjuntos Cantoriana debido a la paradoja de Russell (Castillo, 1999) , cimentando así las bases de la matemática axiomática.

3.1. La paradoja de Russell

Se conoce como el *principio de comprehensión* a la siguiente afirmación: Dada una propiedad, existe un conjunto formado por todos los elementos que satisfacen dicha propiedad.

Sin embargo, este principio que en apariencia es certero e inofensivo fue refutado en 1901, por el inglés Bertrand Russell (1872 - 1970) quien pondría a temblar los cimientos de la teoría de conjuntos con una paradoja que lleva su nombre. Se conoce como *Paradoja de Russell* al siguiente enunciado:

Se define como *conjunto ordinario* a aquel conjunto que no pertenece a sí mismo, es decir $\mathscr{C} \notin \mathscr{C}$, mientras que un *conjunto extraordinario* es aquel que pertenece a sí mismo, esto es $\mathscr{C} \in \mathscr{C}$. Es así que un conjunto puede ser ordinario o bien extraordinario; a partir de esta afirmación, se sigue el siguiente razonamiento:

Sea el conjunto $\mathscr{C} = \{X : X \text{ es ordinario}\}$, si este es es ordinario, entonces se tendrá que $\mathscr{C} \in \mathscr{C}$ eso quiere decir que $\mathscr{C}$ es un elemento de si mismo y por tanto cumple la condición se ser un conjunto extraordinario, generando así una contradicción. Por otro lado, si se supone que dicho conjunto fuese extraordinario, entonces verificaría que $\mathscr{C} \in \mathscr{C}$ Y para la definición del conjunto, $\mathscr{C}$ debe ser ordinario, generando otra contradicción. Ver (Ferreirós, 2000).

La paradoja de Russell había dejado en jaque a la definición de conjunto que empleaba Cantor, dejando en vilo el desarrollo de la teoría de conjuntos. Es así que el matemático Ernst Zermelo (1871 - 1953) asumió el reto de contrarrestar el ataque de Russell.

3.2. Sistemas Axiomáticos ZF y ZFC

La construcción de estos axiomas fue desarrollada por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel (ZF), cuyo propósito está orientado a la formalización de la teoría de conjuntos, ya que el concepto inicial de conjunto había originado la ya mencionada Paradoja de Russell.
Estos axiomas toman como punto de partida las nociones de conjunto y pertenencia como términos primitivos.
Un aspecto importante de estos axiomas es que Fraenkel consideró que todo objeto es un conjunto, en particular todo elemento es un conjunto, incluso los elementos de un conjunto son también conjuntos. Esta consideración evitaría posibles contradicciones en la teoría.

En adelante, al enunciar los axiomas, los conjuntos serán denotados por letras minúsculas.

ZF1: Axioma de la extensión. Dos conjuntos son iguales si y solo si poseen los mismos elementos.

El primer axioma establece que un conjunto está determinado por sus elementos, para que dos conjuntos sean iguales, únicamente dependen de que tengan los mismos elementos.

Ejemplo 3.1 Los conjuntos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\}$ y
$\{0, 2, 4, 6 \ldots, 1, 3, 5, \ldots\}$ son iguales a pesar de estar escritos en orden distinto ambos conjuntos describen los mismos elementos.

ZF2: Axioma del conjunto nulo. Existe un conjunto sin elementos.

Este conjunto se denomina vacío, y se le denota por ϕ. La trascendencia de este conjunto en este sistema axiomático es tal que permite la construcción de los números naturales.

ZF3: Axioma del par. Para dos conjuntos cualesquiera, existe un conjunto al que ambos pertenecen.

Dados los conjuntos x e y, existe un conjunto z tal que $x \in z \wedge y \in z$.

Ejemplo 3.2 Dado el conjunto vacío ϕ, por el axioma del emparejamiento se puede tomar el conjunto $\{\phi, \phi\}$ el cual es igual a $\{\phi\}$. Así con los elementos ϕ y $\{\phi\}$ se puede construir al conjunto $\{\phi, \{\phi\}\}$, y de esta manera se puede continuar un proceso similar.

ZF4: Axioma de la unión. Dado cualquier conjunto x (cuyos elementos son conjuntos) existe un conjunto que tiene por elementos a todos los elementos de los elementos de x.

ZF5: Axioma de la potencia. Dado un conjunto x, existe un conjunto que contiene como elementos a todos los subconjuntos de x.

ZF6: Axioma de la separación. Dada una fórmula bien definida $\mathscr{A}(y)$ y un conjunto x, existe un conjunto $\{y \in x : \mathscr{A}(y)\}$.

A partir de una fórmula, y un conjunto x, se obtiene un subconjunto de x que satisface dicha fórmula.

Ejemplo 3.3 A partir de un conjunto x se puede definir $\{z \in x : z \in y\}$ El cual representa a la intersección $x \cap y$.

ZF7: Axioma de la sustitución. Dada cualquier fórmula $\mathscr{F}(x, y)$ que determina una función y cualquier conjunto u, existe un conjunto v que consiste en todos los objetos y para los cuales existe $x \in u$ tal que $\mathscr{F}(x, y)$ se cumple.

Este axioma indica que a partir de un conjunto u y una función $\mathscr{F}(x, y)$ que hace corresponder cada elemento x con otro objeto y, genera otro conjunto v que tiene por elemento y.

Ejemplo 3.4 La función sucesora es un ejemplo de esto, pues tomando al conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ del cual cada elemento m forma un conjunto $\{m+1\}$ y esto define a una función f tal que $f(m) = m + 1$.

ZF8: Axioma del infinito. Existe un conjunto que x tal que $\phi \in x$ y tal que, para cada conjunto $u \in x$, se tiene $u \cup \{u\} \in x$

Este axioma da por sentada la existencia del conjunto de los números naturales (incluyendo al cero).

Antes de mostrar el ejemplo, primero se dará la definición de sucesor.

Definición 3.5 *Se define al sucesor de* $x \in \mathbb{N}$ *como* $x^+ = \{0,1, 2, 3, \ldots\}$

Ejemplo 3.6 Al pensar en un número es inevitable asociarlo con la cantidad de elementos que pueda contener cierto conjunto, por ejemplo del axioma del emparejamiento podemos asociar a los números 1 y 2 con los conjuntos unitarios $\{a\}$ y par $\{a, b\}$ respectivamente.
Esta idea puede originar la siguiente construcción:
Ya que ϕ es el conjunto vacío, entonces al no tener ningún elemento se puede asociar a 0. Este sería el punto de partida.

$$0 = \phi$$

Dado que ya se tiene el conjunto 0, entonces a partir de él se construye al 1 como un conjunto unitario que contenga al único elemento conocido hasta ahora, a saber, el 0.

$$1 = \{0\}$$

Ahora con los elementos anteriormente descritos 0 y 1 se forma el par

$$2 = \{0, 1\}$$

De la misma manera se forma la terna.

$$3 = \{0, 1, 2\}$$

y así sucesivamente.
Cada número estará conformado como un conjunto cuyos elementos son todos los números naturales (incluido el 0) anteriores a él.

Es así que, de acuerdo con el axioma del infinito, existe un conjunto formado por

$$0$$

$$1 = 0^+$$

$$2 = 1^+$$

$$3 = 2^+$$

$$\vdots$$

ZF9: Axioma de fundamentación. Todo conjunto no vacío x contiene un elemento, el cual es disjunto de x.

Este axioma implica que $x \notin x$.

Ejemplo 3.7 *Todo conjunto no vacío es ordinario (en términos de Russell).*

AC: Axioma de la elección. El producto cartesiano de una familia no vacío de conjuntos no vacíos, no está vacío.

Este axioma quiere decir que de una colección de conjuntos no vacíos es posible elegir de manera simultánea a un elemento de cada conjunto mediante una *función selectora.*

Si la colección de conjuntos fuese finita $\mathscr{C} = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Para $n = 1$, x_1 no es vacío y por tanto debe tener un elemento.

Para $n = 2$, x_1 y x_2 no son vacíos; deben existir. $a_1 \in x_1$ y $a_2 \in x_2$, y por tanto, $(a_1, a_2) \in x_1 \times x_2$, es decir, el producto cartesiano no es vacío.

Es así que, bastaría con emplear la inducción sobre n.

Sin embargo, la importancia del axioma de elección se da para el caso en que la colección de conjuntos fuese infinita.

De todo lo anterior se denomina Sistema axiomático de ZFC (Zermelo Fraenkel Choice) cuando al sistema ZF se le adiciona el Axioma de la elección.

3.3. Sistema Axiomático VNB

En 1925 Von Neumman (y posteriormente Bernays y Godel) desarrolló un sistema axiomático en el cual introdujo la noción de *clase*. En este sistema todos los objetos son clases y se distinguieron dos tipos:

1. *Conjuntos* Son aquellas clases que pueden ser elementos de otra clase.

2. *Clases propias*. Son aquellas clases que no pueden ser elementos de otra clase.

Ahora se presentan los axiomas de Von Neumman - Bernays, muchos de ellos similares a los de Zermelo - Fraenkel. En cuanto a la notación, se presentan con minúsculas a los conjuntos y con mayúsculas a las clases.

VNB1: Axioma de extensión. Dos clases son iguales si y solo si tienen los mismos elementos.

Von Neumman introduce la noción de clase en sus axiomas y eso se ve reflejado en el hecho de que este axioma esté aplicado a clases, mientras que en ZF aplicado a conjuntos.

VNB2: Axioma del vacío. Existe un conjunto que no tiene elementos.

Si bien es cierto este axioma es idéntico al de ZF, pero cabe señalar que dentro de los axiomas VNB donde se distingue una clase de un conjunto, acá está definido el vacío como un conjunto.

VNB3: Axioma del par. Dados dos conjuntos x e y , existe un conjunto z cuyos elementos son x e y.

Este axioma solo es aplicado a conjuntos, no a clases propias.

VNB4: Axioma de la unión. Dado un conjunto x (cuyos elementos son conjuntos), existe un conjunto $\mathscr{C}$ que tiene como elementos a los elementos de x.

Se afirma que la unión de conjuntos es otro conjunto, mas no una clase propia.
VNB5: Axioma del conjunto potencia. Dado cualquier conjunto x, existe un conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de x.

Este axioma garantiza que la potencia de un conjunto es otro conjunto, esto no aplica a clases propias.

VNB6: Axioma del infinito. Existe un conjunto x tal que $\phi \in x$, y para cada conjunto $u \in x$ se tiene que $u \cup \{u\} \in x$.

VNB7: Axioma de la fundamentación. Toda clase no vacía X contiene un elemento el cual es disjunto de X.

Claramente los elementos de dicha clase deben ser conjuntos pues si sus elementos fuesen clases, habría una contradicción. Una clase no puede pertenecer a otra.

VNB8: Axioma de la sustitución. Dado cualquier conjunto u y función F, existe un conjunto v consistente en todos los conjuntos y para los cuales existe un conjunto $x \in u$ con $(x, y) \in F$.

En este axioma se refiere a que la función puede ser una clase, pero el resultado obtenido será un conjunto.

VNB6: Axioma de comprensión. Sea $\mathscr{A}(X)$ una fórmula bien definida que solo use cuantificadores de conjuntos, entonces existe una clase que contiene a todos los conjuntos x que verifican $\mathscr{A}(X)$.

Este axioma indica que puede crearse clases a partir de unos conjuntos.

Los dos anteriores axiomas se enuncian de la misma forma que en ZF.

La diferencia sustancial entre los sistemas axiomáticos ZF y VNB radican en las de nociones de conjuntos y clases. Para VNB se hace una distinción en cuanto a la naturaleza de un conjunto, el cual puede pertenecer a otro conjunto, y también menciona otro tipo de objeto que denomina clase adecuada, que a diferencia del conjunto, no puede pertenecer a otra clase. En cuanto a los axiomas, se puede observar que los de Extensión, de Comprensión y de Fundamentación, están orientados a clases en VNB y a conjuntos en ZF, por otro lado los axiomas restantes están orientados a únicamente a conjuntos en VNB.

Capítulo 4

Números ordinales

En el capítulo 3 se realizó una breve revisión de cómo Cantor determinó la existencia de los números que trascienden de los naturales.
A partir de ahora, se realizará un análisis sobre la construcción de los números transfinitos, y para este propósito se hace necesario considerar al cero como el primer elemento de los números Naturales. Dicho punto de partida está motivado y justificado por el ejemplo estudiado en el capítulo anterior sobre el Axioma del infinito.

En el presente capítulo se emplearon los siguientes textos de consulta (Castillo, 1999),(Halmos, 2017), (Hamilton, 1982).

4.1. Números ordinales

Definición 4.1 *Un número ordinal es un conjunto bien ordenado, tal que todo elemento es igual al conjunto de sus predecesores.*

Nuestra atención está completamente centrada en el conjunto de los números naturales considerando al cero como primer elemento; esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.2 De acuerdo al ejemplo expuesto en el capítulo anterior respecto al axioma del infinito, se puede escribir: $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ el cual es un número ordinal, pues dado que dado $\xi \in n$ Este se define como el conjunto de sus predecesores $\xi = \{0, 1, 2, \ldots, \xi - 1\}$.

El 0 es predecesor de todo número natural y es el único que no posee predecesores. Esto implica que se puede escribir 0 como el conjunto vacío. este resultado de forma general puede ser enunciado como que todo número natural es ordinal.

Definición 4.3 *Dado un conjunto X bien ordenado por la relación R. El segmento inicial de X determinado por $a \in X$ es el conjunto*
$X_a = \{x \in X : xRa \wedge x \neq a\}$.

Es decir, un segmento inicial determinado por a está conformado por todos los elementos del conjunto relacionados por la izquierda con a.

Ejemplo 4.4 El conjunto $I_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ es un segmento inicial determinado por $n \in \mathbb{N}$.

Una expresión equivalente a la definición de número ordinal sería:
Un número ordinal es un conjunto bien ordenado, tal que cada uno de sus elementos es un segmento inicial.
Se observa además que cada elemento es a la vez un subconjunto del ordinal.

Teorema 4.5 *Sea X un conjunto bien ordenado con una relación R, y Y un subconjunto de X tal que para todo $b \in Y$ se tiene que $X_b \subseteq Y$. Entonces $Y = X$ o Y es un segmento inicial de X.*

Demostración:
Supongamos que $Y \neq X$. Sea u el menor elemento en $X \backslash Y$. Mostraremos que $Y = X_u$. En primer lugar, sea $b \in Y$ y $b \notin X_u$. Entonces $u \in X_b$, así que por la suposición acerca de Y, se tendrá que $u \in Y$, lo cual es una contradicción. Así que $Y \subseteq X_u$. Por otro lado, $X_u \subseteq Y$ ya que u es el primer elemento de. $X \backslash Y$. ■

Esto quiere decir que el subconjunto formado por los segmentos iniciales de un conjunto dado, puede ser el mismo conjunto o un segmento inicial de este.

Los siguientes teoremas son necesarios para dar una característica especial a los ordinales.

Teorema 4.6 *Sean X e Y dos conjuntos bien ordenados por las relaciones R y S, respectivamente.*

1. *Si $f : X \to X$ es una inyección que preserva el orden, entonces para cada $a \in X$, se tiene que $aRf(a)$.*

2. *Si $f : X \to X$ es un isomorfismo, entonces f es una función identidad.*

3. *Si $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ son isomorfismos, entonces $f = g$.*

4. *X no puede ser isomorfo con un segmento inicial de sí mismo.*

Demostración:

1. Supongamos que $a \in X$ pero no se cumple $aRf(a)$. Entonces $a \neq f(a)$ y $f(a)Ra$, puesto que R es de orden total. Ya que f es una inyección que preserva el orden, debemos tener . $f(a) \neq f(f(a))$ y $f(f(a))Rf(a)$. Similarmente, $f^2(a) \neq f^3(a)$ y $f^3(a)Rf^2(a)$. Generando el conjunto $\{f^n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ el cual es un subconjunto no vacío de X sin elemento mínimo. Esto no puede existir ya que R es bien ordenado.

2. Sea $f : X \to X$ un isomorfismo. Entonces f^{-1} es también un isomorfismo. Por (1) entonces, para cada $a \in X$ se tiene que $aRf(a)$ y $f(a)Rf^{-1}(f(a))$ es decir $f(a)Ra$. Consecuentemente $a = f(a)$ y f debe ser la función identidad.

3. Sea $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ dos isomorfismos. Entonces $g^{-1} : Y \to X$ es un isomorfismo, así que por (2) $g^{-1} \circ f$ es la identidad de X en X, y por tanto $f = g$.

4. Supongamos que $b \in X$ y $f : X \to X_b$ Un isomorfismo. Entonces f es una inyección que preserva el orden de X en X. Por (1), para cada $a \in X$ se tiene que $aRf(a)$. En particular, $bRf(b)$. Pero $f(b)$ No debe estar en X_b y $X_b = \{y \in X : yRb \ \wedge y \neq b\}$. Por tanto, $f(b)Rb$ y $f(b) \neq b$. Esto contradice que $bRf(b)$.

■

Este teorema es una versión del teorema 4,5 para isomorfismos.

Teorema 4.7 *Dados dos conjuntos bien ordenados, o ellos son isomorfos o uno es isomorfo al segmento inicial del otro.*

Demostración:
Sea X e Y dos conjuntos, bien ordenados por la relación R y S respectivamente, y supongamos que X e Y no son isomorfos. Si cualquiera de los dos X o Y es vacío, entonces el resultado es trivial, así que supongamos que ambos son no vacíos. Entonces X e Y tienen un menor elemento, denotados por x_0 e y_0. Consideremos segmentos iniciales de X e Y. Trivialmente, X_{x_0} e Y_{y_0} son vacíos, así que x_0 e y_0 determinan segmentos iniciales isomorfos. Ahora sea $a \in X$ y supongamos que X_a es isomorfo con el segmento inicial Y_b de Y. Por el Teorema 4,6 (4) tal b, debe existir, debe ser único. Así que podemos definir al subconjunto A de X y la función $\phi : A \to Y$ siendo:

$$A = \{a \in X : \exists\ b \in Y \wedge X_a \simeq Y_b\}$$

$\phi(a) = b$ si $a \in A$ y $X_a \simeq Y_b$.

Mostraremos que ϕ es inyectiva y preserva el orden, y que cualquiera de los dos $A = X$ y $\phi(A)$ es un segmento inicial de Y o A es un segmento inicial de X y $\phi(A) = Y$.
Sea $a \in A$ y $x \in X$ con xRa y $x \neq a$. Tenemos un isomorfismo $f : X_a \simeq Y_b$ para algún $b \in Y$. Ahora $x \in X_a$, así como $f(x) \in Y_b$ y ciertamente la restricción de f es un isomorfismo de X_x a $Y_{f(x)}$, por tanto $x \in A$. Por el Teorema 4,5 entonces, cualquiera de los dos $A = X$ o A es un segmento inicial de X. Un argumento similar muestra que cualquiera de los dos $\phi(A) = Y$ $\phi(A)$ es un segmento inicial de Y.
Ahora sea $a, c \in A$ con aRc. Mostraremos que $\phi(a)S\phi(c)$. Si $a = c$ esto es trivial, así que supongamos que $a \neq c$, luego $a \in X_c$. Desde que $c \in A$, existe un isomorfismo $g : X_c \to Y_{\phi(c)}$. Pero $X_a \subseteq X_c$, así que la restricción de g a X_a es un isomorfismo entre X_a e $Y_{g(a)}$ con $g(a) \in Y_{\phi(c)}$, es decir $g(a)S\phi(c)$. Sin embargo, $g(a) = \phi(c)$ ya que $X_a \simeq Y_{\phi(a)}$. Por tanto $\phi(a)S\phi(c)$ y ϕ que preserva el orden.
Para completar la prueba, se considerará primero el caso en que $A \neq X$ y $\phi(A) \neq Y$. Sea c el menor elemento de $X \backslash A$ y sea d el menor elemento de $X \backslash A$. $Y \backslash \phi(A)$. Entonces $A = X_c$ y $\phi(A) = Y_d$. Además ϕ es un isomorfismo entre X_c e Y_d, y así que $c \in A$, lo cual es una contradicción. Por tanto, esta situación no puede surgir, así que debemos tener que $A = X$ o $\phi(A) = Y$. De ello se deduce que ϕ es un isomorfismo de X en un segmento inicial de Y o ϕ^{-1} es un isomorfismo de Y en un segmento inicial de X. ■

Teorema 4.8 *Se cumple:*

1. *Todo elemento de un ordinal es un ordinal.*
2. *La relación de orden en los ordinales es la inclusión.*
3. *Si dos ordinales son isomorfos, entonces son iguales.*
4. *Si α y β son ordinales, entonces se verifica solo una de las siguientes: $\alpha = \beta$, $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$.*

Demostración:

1. Sea α un ordinal y sea $x \in \alpha$. Entonces $x = \alpha_x$, el segmento inicial de α determinado por x. Ahora si $y \in \alpha_x$, entonces $y \in \alpha$, así que $y = \alpha_y$. Pero $\alpha_y = (\alpha_x)_y$ Y $(\alpha_x)_y = x_y$. Por tanto $y = x_y$ para cada $y \in x$.
2. Sea α un ordinal, y supongamos que la relación de orden en α está denotado por R. Se mostrará que para $x, y \in \alpha$, se cumple que xRy sí y solo sí. $x \subseteq y$. Dados $x, y \in \alpha$ tenemos que xRy si y solo si $\alpha_x \subseteq \alpha_y$. Pero $x = \alpha_x$ e $y = \alpha_y$ ya que α es un ordinal. Consecuentemente, xRy si y solo si $x \subseteq y$.
   Sean α y β ordinales, y sean. $f : \alpha \to \beta$ un isomorfismo. Supongamos que f no es la función identidad en α. Entonces el conjunto $\{x \in \alpha : f(x) \neq x\}$ es no vacío, y así contiene un menor elemento x_0. Para $x \subseteq x_0$ En α, con $x \neq x_0$ tenemos que $f(x) = x$. Es decir, f es la función identidad entre α_{x_0} y $\beta_{f(x_0)}$. Se sigue que $\alpha_{x_0} = \beta_{f(x_0)}$. Pero α Y β son ordinales, así que $\alpha_{x_0} = x_0$ y $\beta_{f(x_0)} = f(x_0)$. Por lo tanto, tenemos que $x_0 = f(x_0)$ lo cual es una contradicción por la definición de x_0, y así f es la función identidad en α. Por tanto $\alpha = \beta$.
3. Sean α y β ordinales. Entonces, por el Teorema 4,7 se verifica uno de los siguientes: α es isomorfo a β, α son isomorfos a un segmento inicial de β, β es isomorfo a un segmento inicial de α. Por (1) y (3) entonces se cumplirá una de las siguientes: $\alpha = \beta$, α es igual a un elemento de β o β es igual a un elemento de α.

■

La segunda parte del teorema establece que la relación de orden entre ordinales se da por medio de la inclusión.
Otra observación interesante, es acerca de la cuarta parte del del del teorema donde se prueba una especie de "tricotomía", en la cual dos ordinales o son iguales, o uno pertenece al otro.

A continuación, el siguiente teorema establece una conexión entre las relaciones de pertenencia e inclusión entre ordinales.

Teorema 4.9 *Si α y β son ordinales, entonces $\alpha \subseteq \beta$ si y solo si $\alpha \in \beta$.*

Demostración:
Si $\alpha \neq \beta$. por lo anterior $\alpha \in \beta$ 0 $\beta \in \alpha$. Si $\beta \in \alpha$, entonces, dado que α es un ordinal, $\beta = \alpha_\beta \subseteq \alpha$. Junto con $\alpha \subseteq \beta$ esto implica $\alpha = \beta$, lo cual contradice la hipótesis, entonces $\alpha \in \beta$ ■

Las siguientes definiciones darán una caracterización de los números ordinales.

Definición 4.10 *Un conjunto X se dice $\in$ - conexo si todo $x, y \in X$ se cumple una y sólo una de las siguientes: $x = y$, $x \in y$, $y \in x$.*

La definición anterior da un nombre a esa "tricotomía" de números ordinales en el teorema 4,8 (4).

Definición 4.11 *Un conjunto X es transitivo si para todo $x \in X$ se tiene que $x \subseteq X$.*

Una definición equivalentees la razón por la cual lleva el nombre es:

Definición 4.12 *Un conjunto X es transitivo si para todo x, y se tiene que si $x \in y \wedge y \in X$ entonces $x \in X$.*

Definición 4.13 *Dado un conjunto X. Se dice que x es $\in$ - minimal de X si $x \in X \wedge x \cap X = \phi$.*

Esto quiere decir que un elemento $\in$ - minimal es aquel que es disjunto con el conjunto al cual pertenece.

Ejemplo 4.14 Dado el ordinal $n = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, su elemento minimal sería 0, dado que $0 = \phi$ y eso implica que su intersección con n sea vacía.

Definición 4.15 *Un conjunto X se dice bien fundado si todo subconjunto no vacío tiene al menos un $\in$ - minimal.*

Esta definición puede ser entendida como una analogía al teorema del buen orden.

Observación 4.16 De acuerdo con las definiciones anteriores, otra forma de caracterizar a un ordinal es como sigue:
Diremos que X es un ordinal si es una clase transitiva. $\in$ - conexo y bien fundada (Castillo, 1999).

Definición 4.17 *Se define a ω como el conjunto de todos los números naturales (incluyendo al cero).*

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Ejemplo 4.18 Tomando el ejemplo del Axioma del Infinito, se puede verificar:
ω es transitiva, ya que para todo $x \in \omega$ se puede escribir $x = \{0, 1, 2, \ldots x - 1\}$ Se tiene que $x \subseteq \omega$ e $y \subseteq \omega$. Luego ω es transitiva.
ω es $\in$ - conexo puesto que para todo $x, y \in \omega$ ambos naturales, por tricotomía deben verificar solo una de las relaciones $x = y$, $x < y$, $y < x$. De estos últimos, si $x < y$ entonces $x = \{0, 1, 2, \ldots x - 1\} \subseteq y$ y por tanto $x \in y$. Similarmente, para el caso en que $y < x$ implicará que $x \in y$.
ω es bien fundada, pues tiene a 0 como $\in$ - minimal de todo número natural, esto es claro dado que $0 \in \omega$, siendo $0 = \phi$ y $0 \cap \omega = \phi$. Luego ω es ordinal.

A veces es más factible hablar en términos de desigualdad en vez de pertenencia; por eso se da la siguiente definición.

Definición 4.19 *Se tiene:*

(i) $A < B$ *si y solo si* $A \in B$.

(ii) $A \leq B$ *si y solo si* $A < B$ *o* $A = B$.

(iii) $A > B$ *si y solo si* $B < A$.

(iv) $A \geq B$ *si y solo si* $B \leq A$.

Uno de los pilares principales para la construcción de los números ordinales es la idea de sucesores.

Definición 4.20 *Dado un ordinal α, se define y denota al sucesor de α Como $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$.*

Ejemplo 4.21 Se tiene:
$0^+ = 0 \cup \{0\} = \phi \cup \{0\} = \{0\}$
$1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\}$
$2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$
$3^+ = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$
$\vdots$

Teorema 4.22 *El sucesor de un ordinal, es un ordinal.*

Demostración:
Sea α un ordinal. Entonces α es bien ordenado . $\subseteq$. Primero se mostrará que $\alpha \cup \{\alpha\}$ Está totalmente ordenado por $\subseteq$. Sean $x, y \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Si ambos x e y pertenecen a α, entonces $x \subseteq y$ o $y \subseteq x$ ya que α es totalmente ordenado por $\subseteq$. Si ambos $x = \alpha$ e $y = \alpha$ entonces $x \subseteq y$, es trivial. Sea $x \in \alpha$ e $y = \alpha$, y siendo α es un ordinal, se tiene que $x = \alpha_x \subseteq \alpha = y$, y luego $x = \alpha x \subseteq \alpha = y$, etc. $x \subseteq y$. Por tanto $\alpha \cup \{\alpha\}$ es totalmente ordenado por $\subseteq$. Ahora sea X un subconjunto no vacío de $\alpha \cup \{\alpha\}$. Si $X = \{\alpha\}$ entonces X, trivialmente, contiene un menor elemento. Si $X \cap \alpha \neq \phi$ entonces $X \cap \alpha$ tiene un menor elemento, ya que α es bien ordenado y este elemento es el mínimo en X desde que tenemos $x \subseteq \alpha$ para todo $x \in \alpha$. Así $\alpha \cup \{\alpha\}$ es bien ordenado por $\subseteq$. Por último, se mostrará que $\alpha \cup \{\alpha\}$ es ordinal, sea. $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Si $x = \alpha$ entonces $(\alpha \cup \{\alpha\})_x = \alpha = x$. Si $x \neq \alpha$ para $x \in \alpha$, entonces $(\alpha \cup \{\alpha\})_x = \alpha_x = x$. Esto completa la prueba. ■

Teorema 4.23 *Todo conjunto de números ordinales está bien ordenado por* $\subseteq$.

Demostración:
Sea X un conjunto cuyos elementos son ordinales. Sean $\alpha, \beta \in X$ con $\alpha \neq \beta$. Entonces $\alpha \in \beta$ o $\beta \in \alpha$ por el Teorema 4,8 parte (4). Si $\alpha \in \beta$ entonces por la definición de número ordinal $\alpha = \beta_\alpha \subseteq \beta$. Similarmente, si $\beta \in \alpha$ entonces $\beta \subseteq \alpha$. Así $\subseteq$ Es un orden total en X. Finalmente, sea Y un subconjunto no vacío de X y sea γ algún elemento elegido de Y. Si γ es el menor elemento en Y entonces no hay nada más que probar, así que supongamos que γ no es el menor elemento de Y. Si $\delta \in Y$ y $\delta \subseteq \gamma$ con $\delta \neq \gamma$, entonces δ es un ordinal y $\delta \in \gamma$ por el Teorema 4,8 parte (4). Ahora $Y \cap \gamma$ es un subconjunto no vacío de γ, y γ está bien ordenado por $\subseteq$, así que $Y \cap \gamma$ tiene un menor elemento, el cual es necesariamente también el menor en. Y.
Así que X está bien ordenado por $\subseteq$. ■

Teorema 4.24 *La unión de todo conjunto de números ordinales es un ordinal.*

Demostración:
Sea X un conjunto cuyos elementos son ordinales. Primero mostraremos que los elementos de $\bigcup X$ son ordinales también. Sea $x \in \bigcup X$. Entonces $x \in \alpha$ para algún $\alpha \in X$. Por el Teorema 4,8 parte (1) esto implica que x es un ordinal. Además por el Teorema 4,23 $\bigcup X$ es bien ordenado por $\subseteq$. Queda por mostrar que para todo $x \in \bigcup X$ se cumple $(\bigcup X)_x = x$. Para verificar que $\bigcup X$ es un ordinal, sea $x \in \bigcup X$ siendo. $x \in \alpha$ para algún $\alpha \in X$. Ahora sea $y \in x$. Dado que x es un ordinal, y es un segmento inicial de x. Además x es un segmento inicial de α, así que y es un segmento inicial de α, y en consecuencia $y \in \alpha$. Por tanto, $y \in \bigcup X$, y $x \subseteq \bigcup X$. Ahora

$$(\bigcup X)_x = \{z \in \bigcup X : z \subseteq x \wedge z \neq x\}$$

$$(\bigcup X)_x = \{z \in \bigcup X : z \in x\}$$

Dado que $\bigcup X$ es un conjunto de ordinales, por el Teorema 4,8 parte (4)

$$(\bigcup X)_x = (\bigcup X) \cap x = x$$

ya que $x \subseteq \bigcup X$. ■

Ejemplo 4.25 Dado un ordinal n.

(i) El sucesor de $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ es $n+1 = \{0, 1, 2 \ldots, n-1, n\}$.

(ii) $n+1 = \{0, 1, 2 \ldots, n\}$ es ordinal.

(iii) $\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n$ Es ordinal.

Definición 4.26 *Un ordinal no nulo puede ser de dos tipos:*

1. *Sucesor ordinal si tiene un ordinal predecesor.*
2. *Límite ordinal si no tiene un ordinal predecesor.*

Ejemplo 4.27 Todo número natural $n+1$ es sucesor ordinal de un $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, ω es un límite ordinal, pues no tiene un predecesor inmediato.

Teorema 4.28 *No existe el conjunto formado por todos los ordinales.*

Demostración:
Supongamos que X es el conjunto de todos los ordinales. Entonces $\bigcup X$ es un ordinal para el Teorema 4,24. Derivamos una contradicción al encontrar un ordinal que no puede pertenecer a X, así que hay que tener en cuenta que es posible que $\bigcup X \in X$. Sea $\alpha = (\bigcup X)^+ = (\bigcup X) \cup \{\bigcup X\}$. Ahora sea $\gamma \in X$. Entonces $\gamma \subseteq \bigcup X$, Luego $\gamma \in \bigcup X$ o $\gamma = \bigcup X$. Si $\gamma \in \bigcup X$ entonces γ es un segmento inicial de $\bigcup X$ y así de α. Si $\gamma = \bigcup X$ entonces γ es un segmento inicial de $(\bigcup X)^+$, es decir de α. En otro caso $\gamma \neq \alpha$. Por tanto α es un número ordinal y $\alpha \notin X$. Esto contradice la suposición inicial, así que X no existe. ■

4.2. Aritmética ordinal

En esta sección se desea realizar operaciones básicas con números ordinales tales como la adición, multiplicación y potenciación. Sin embargo, para hacer esto se requiere de la recursión transfinita y unas definiciones preliminares.

Definición 4.29 *Una sucesión transfinita es una función cuyo dominio es un número ordinal.*

Ejemplo 4.30 Una función sobre ω sería la sucesión $\{\alpha_\xi\}_{\xi<\omega}$.

A continuación, se presenta un teorema análogo al Principio de Inducción visto en el capítulo 2.

Teorema 4.31 (Principio de inducción transfinita) *Sea X un conjunto no vacío y bien ordenado para una relación R,y sea $A \subseteq X$ no vacío, tal que:*
Si $X_a \subseteq A$ implica que $a \in A$ para todo $a \in X$, entonces $A = X$.

Demostración:
Supongamos que bajo las hipótesis dadas $A \neq X$. Entonces $X \backslash A \neq \phi$ y además está bien ordenado, es así que $X \backslash A$ tiene un primer elemento m.
Ahora bien, afirmamos que todos los predecesores de m: X_m, están en A.
En efecto, sea $x \in X_m$ entonces xRm con $x \neq m$ además $x \notin X \backslash A$, luego $x \in A$ esto es $X_m \subseteq A$. Así que para la hipótesis, $m \in A$ lo cual es una contradicción. Por tanto $A = X$. ■

Corolario 4.32 (Principio de inducción transfinita en ordinales) *Sea α un ordinal con $\alpha \neq 0$ y A un subconjunto no vacío de α que satisface: Si $\gamma \subseteq A$, entonces $\gamma \in A$ para todo $\gamma \in \alpha$. Entonces $A = \alpha$.*

Demostración:
Bastará con recordar que para los ordinales α y γ, si $\gamma < \alpha$ entonces $\gamma \in \alpha$ y $\alpha_\gamma = \gamma$.
■

Teorema 4.33 (Recurrencia transfinita) *Sea H una función y α un ordinal, entonces existe una única función F tal que:*

(i) F es una función sobre α.

(ii) $F(\beta) = H(F \mid \beta)$ para todo $\beta < \alpha$.

Tras diversas reformulaciones del teorema de la recursión, esto conlleva a la definición de las operaciones aritméticas de adición, multiplicación y potenciación sobre ordinales. Para un análisis más profundo puede consultar (Suppes, 1972).

Definición 4.34 (Adición) *Fijando un ordinal α. Se define $s_\alpha(\beta)$ para todo ordinal β para:*

1. $s_\alpha(0) = \alpha$
2. $s_\alpha(\gamma^+) = s_\alpha(\gamma)^+$ *para todo ordinal γ.*

Además

$s_\alpha(\lambda) = \bigcup\{s_\alpha(\gamma) : \gamma < \lambda\}$ *para todo límite ordinal λ.*

Se denota $s_\alpha(\beta) = \alpha + \beta$

Ejemplo 4.35 Dadas las siguientes sumas:
$\omega + 1 = s_\omega(1) = s_\omega(0^+) = (s_\omega(0))^+ = \omega^+$
$\omega + 2 = s_\omega(2) = s_\omega(1^+) = (s_\omega(1))^+ = \omega^{++}$
En general:
$\omega + n = s_\omega(n) = s_\omega((n-1)^+) = (s_\omega(n-1))^+ = \omega^{+\cdots+}$ para todo $n \in \omega$
Además:
$\omega + \omega = s_\omega(\omega) = \bigcup\{s_\omega(n) : n < \omega\} = \bigcup\{\omega + n : n < \omega\}$

Teorema 4.36 (Elemento neutro aditivo) *Para todo α ordinal:*

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

Demostración:
Por definición tenemos $\alpha + 0 = \alpha$. Para probar que $0 + \alpha = \alpha$ se hará en tres partes:

(i) Afirmamos que $0 + 0 = 0$. En efecto, tomando $\alpha = 0$ En la Definición de Adición queda demostrado.

(ii) Siendo α es un ordinal tal que $\alpha = \bar{\alpha}^+$. Supongamos que $0 + \bar{\alpha} = \bar{\alpha}$. Empleando la parte (2) de la Definición, se tiene

$$s_0(\bar{\alpha})^+ = (0 + \bar{\alpha})^+$$

$$s_0(\bar{\alpha})^+ = \bar{\alpha}^+$$

$$s_0(\bar{\alpha}^+) = \bar{\alpha}^+$$

$$0 + \bar{\alpha}^+ = \bar{\alpha}^+$$

$$0 + \alpha = \alpha$$

(iii) Siendo α un límite ordinal . $0 + \beta = \beta$ para $\beta < \alpha$. Para esto, se usará la parte (3) de la Definición:

$$s_0(\alpha) = \bigcup\{s_0(\beta) : \beta < \alpha\}$$

$$0 + \alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha}\{0 + \beta\}$$

$$0 + \alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha}\beta$$

$$0 + \alpha = \alpha$$

■

Teorema 4.37 (Asociatividad) *Dados los ordinales α, β, γ, se verificó:*

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

Demostración:
La prueba se hará por inducción transfinita sobre γ:

(i) Para $\gamma = 0$ se tiene:

$$\alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + 0$$

(ii) Supongamos que γ es ordinal y es. $\gamma = \bar{\gamma}^+$ que verifica:

$$\alpha + (\beta + \bar{\gamma}) = (\alpha + \beta) + \bar{\gamma}$$

Empleando la Definición de Adición:

$$\alpha + (\beta + \bar{\gamma}^+) = \alpha + (\beta + \bar{\gamma})^+$$

$$\alpha + (\beta + \bar{\gamma}^+) = (\alpha + (\beta + \bar{\gamma}))^+$$

$$\alpha + (\beta + \bar{\gamma}^+) = ((\alpha + \beta) + \bar{\gamma})^+$$

$$\alpha + (\beta + \bar{\gamma}^+) = (\alpha + \beta) + \bar{\gamma}^+$$

(iii) Supongamos que γ es un límite ordinal tal que para todo $\delta < \gamma$ se cumple:

$$\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$$

Usando la Definición de Adición:

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \bigcup\{\alpha + \theta : \theta < \beta + \gamma\}$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \bigcup\{\alpha + (\beta + \delta) : \beta + \delta < \beta + \gamma\}$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \bigcup_{\delta \in \gamma}(\alpha + (\beta + \delta))$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = \bigcup_{\delta \in \gamma}((\alpha + \beta) + \delta))$$

$$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

■

Una propiedad importante que no satisfacen los números ordinales es la de la conmutatividad: $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Ejemplo 4.38 Del ejemplo anterior se mostró que $\omega + 1 = \omega^+$, sin embargo $1 + \omega = \omega$. En efecto:
$1 + \omega = s_1(\omega) = \bigcup\{s_1(n) : n < \omega\} = \bigcup\{n^+ : n < \omega\} = \bigcup \omega = \omega$

Teorema 4.39 *Si $\beta < \gamma$ entonces $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$*

Demostración:
La demostración se hace por inducción transfinita sobre γ.

(i) Si $\gamma = 0$ la hipótesis es falsa.

(ii) Tomemos dos casos:
Caso 1: Supongamos que sí. $\beta < \gamma$, entonces $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ pero
$\alpha + \gamma < (\alpha + \gamma)^+ = \alpha + \gamma^+$
Luego $\alpha + \beta < \alpha + \gamma^+$
Caso 2: Sea $\beta = \gamma$. Entonces tendremos $\beta < \gamma^+$ y $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, pero $\alpha + \gamma < \alpha + \gamma^+$.
Por tanto $\alpha + \beta < \alpha + \gamma^+$.

(iii) Supongamos ahora que γ es un límite ordinal. Ya que $\beta < \gamma$, luego $\beta \in \gamma$, así por la Definición de Adición:

$$\alpha + \gamma = \bigcup\{\alpha + \delta : \delta < \gamma\}$$

Por otro lado, dado que $\beta < \gamma$ y γ son dos límite ordinal, entonces $\beta^+ < \gamma$ Luego $\alpha + \beta^+ \in \{\alpha + \delta : \delta < \gamma\}$. Como $\alpha + \beta \in (\alpha + \beta)^+ = \alpha + \beta^+$.
Esto implica que $\alpha + \beta \in \bigcup\{\alpha + \delta : \delta < \gamma\}$. Es decir $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

■

Teorema 4.40 *Si $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$ entonces $\alpha = \beta$.*

Demostración:
Supongamos que $\alpha \neq \beta$. Para precisar, sea $\alpha < \beta$, para el Teorema 4,38 se tiene que $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$, lo cual es una contradicción. Por tanto $\alpha = \beta$. ■

A esto se le llama ley de cancelación para la adición, sin embargo la cancelación por derecha no se cumple.

Ejemplo 4.41 $1 + \omega = 2 + \omega$ pero $1 \neq 2$.

Definición 4.42 (Multiplicación) *Fijando un ordinal α. Se define $p_\alpha(\beta)$ para todo ordinal β por:*

1. $p_\alpha(0) = 0$
2. $p_\alpha(\gamma^+) = p_\alpha(\gamma) + \alpha$ *para todo ordinal* γ.

Además

$p_\alpha(\lambda) = \bigcup\{p_\alpha(\gamma) : \gamma < \lambda\}$ *para todo límite ordinal* λ.

Se denota $p_\alpha(\beta) = \alpha\beta$

Ejemplo 4.43 Dados los siguientes productos:
$1\omega = p_1(\omega) = \bigcup\{p_1(n) : n < \omega\} = \bigcup\{n : n < \omega\} = \bigcup\omega = \omega$
$2\omega = p_2(\omega) = \bigcup\{p_2(n) : n < \omega\} = \bigcup\{2n : n < \omega\} = \bigcup\{n : n < \omega\} = \bigcup\omega = \omega$
En general
$m\omega = p_m(\omega) = \bigcup\{p_m(n) : n < \omega\} = \bigcup\{mn : n < \omega\} = \bigcup\{n : n < \omega\} = \bigcup\omega = \omega$ para todo $m \in \omega$

Teorema 4.44 (Elemento neutro multiplicativo) *Dado el ordinal* α.

$$1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$$

Demostración:

En primer lugar mostraremos que $\alpha \cdot 1 = \alpha$. Para esto basta con aplicar la parte (2) de la Definición de Multiplicación, tomando $1 = \gamma^+$ lo cual implica que $\gamma = 0$. Esto es:

$$p_\alpha(1) = p_\alpha(0^+) = p_\alpha(0) + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$$

Afirmamos que $1 \cdot \alpha = \alpha$.
Sea α un horario fijo. Aplicando el Corolario 4,32 se mostrará que $1 \cdot \beta = \beta$ para todo $\beta \in \alpha$. Sea $A = \{\beta \in \alpha : 1 \cdot \beta = \beta\}$. $A \neq \phi$ ya que $0 \in A$. Mostraremos que para todo $\gamma \in \alpha$, si $\gamma \subseteq A$ entonces $\gamma \in A$. Así que sea. $\gamma \in \alpha$ y supongamos que $\gamma \subseteq A$.
Caso 1: γ es un sucesor ordinal, siendo $\gamma = \delta^+$. Entonces $\delta < \gamma$ así que $\delta \in \gamma$, y $\delta \in A$, ya que $\gamma \subseteq A$. Así pues

$$1 \cdot \gamma = p_1(\delta^+) = p_1(\delta) + 1 = p_1(\delta)^+ = (1 \cdot \delta)^+ = \delta^+ = \gamma$$

Caso 2: γ es un límite ordinal. Entonces

$$1 \cdot \gamma = p_1(\gamma) = \bigcup\{p_1(\delta) : \delta < \gamma\} = \bigcup\{1 \cdot \delta : \delta < \gamma\} = \bigcup\{\delta : \delta < \gamma\} = \gamma$$

Usando la suposición de que $\gamma \subseteq A$ para $1 \cdot \delta$ para todo $\delta < \gamma$. Por el Corolario 4,32 $A = \alpha$ es decir $1 \cdot \beta = \beta$ para cada $\beta \in \alpha$. Pero esto se cumple para cada ordinal α. Por tanto $1 \cdot \alpha = \alpha$ para todo ordinal α. ■

Teorema 4.45 *Para todo ordinal* α *se cumple* $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$.

Demostración:

Se demostrará por inducción transfinita sobre α:

(i) Para $0 \cdot \alpha$, se tiene que $0 \cdot 0 = 0$.

(ii) Sea α un ordinal sucesor tal que $\alpha = \bar{\alpha}^+$. Supongamos que $0 \cdot \bar{\alpha} = 0$.
Así $0 \cdot \alpha = 0 \cdot \bar{\alpha}^+ = 0 \cdot \bar{\alpha} + 0 = 0 + 0 = 0$.

(iii) Sea α un ordinal límite y para todo $\beta \in \alpha$.
$0 \cdot \alpha = 0 \cdot \bigcup\{\beta : \beta < \alpha\} = \bigcup 0 \cdot \{\beta : \beta < \alpha\} = \bigcup\{0 \cdot \beta : \beta < \alpha\} = 0$

De ahí que $0 \cdot \alpha = 0$, y como por definición de la multiplicación se obtiene que $\alpha \cdot 0 = 0$, entonces se concluye que $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$. ■

Teorema 4.46 *Dados los ordinales α, β, γ. Se cumple la distributividad a izquierda:* $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Demostración:
La demostración se hace por inducción transfinita sobre γ. Suponemos que $\alpha \neq 0$ pues de otro modo la prueba es trivial.

(i) Para $\gamma = 0$ se tiene: $\alpha(\beta + 0) = \alpha\beta = \alpha\beta + 0 = \alpha\beta + \alpha \cdot 0$.

(ii) Sea γ un sucesor ordinal, así Tomemos $\gamma = \bar{\gamma}^+$ Tenemos las siguientes identidades:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha(\beta + \bar{\gamma})^+$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha(\beta + \bar{\gamma}) + \alpha$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = (\alpha\beta + \alpha\bar{\gamma}) + \alpha$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + (\alpha\bar{\gamma} + \alpha)$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\bar{\gamma}^+$$

(iii) Supongamos ahora que γ es un límite ordinal, y a partir de la Definición de Multiplicación:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \bigcup\{\alpha\theta : \theta < \beta + \gamma\}$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \bigcup\{\alpha\theta : \theta \in \bigcup_{\delta\in\gamma}(\beta + \delta)\}$$

Por el teorema 4,48 dado que $\theta < \beta$ entonces $\alpha\theta < \alpha(\beta + \theta)$ para cualquier $\delta \in \gamma$, así que podemos considerar solamente valores θ para los cuales existe un $\delta \in \gamma$ tal que $\theta = \beta + \delta$ porque si $\theta_1 < \beta$ y $\theta_2 = \beta + \delta$ para algún δ, entonces cualquier elemento de $\alpha\theta_1$ es también un elemento de $\alpha\theta_2$ y la unión de la familia indicada de conjuntos permanece inalterada si se omite θ_1. Por tanto, podemos reemplazar la última identidad por:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \bigcup\{\alpha(\beta + \delta) : \delta < \gamma\}$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \bigcup\{\alpha\beta + \alpha\delta) : \delta < \gamma\}$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \bigcup\{\alpha\beta + \theta) : \theta < \alpha\gamma\}$$
$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

■

Sin embargo la distributividad a derecha: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$. No se cumple.

Ejemplo 4.47 $(1 + 1)\omega \neq 1\omega + 1\omega$.

Teorema 4.48 (Asociatividad) *Dados los ordinales α, β, γ, se verificó:*

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

Demostración:
Se probará por inducción transfinita sobre γ.

(i) Para $\gamma = 0$ se tiene que $\alpha(\beta \cdot 0) = \alpha \cdot 0 = 0 = (\alpha\beta) \cdot 0$.

(ii) Sea γ es un sucesor ordinal tal que $\gamma = \bar{\gamma}^+$, y supongamos que se cumple: $\alpha(\beta\bar{\gamma}) = (\alpha\beta)\bar{\gamma}$.
Ahora, $\alpha(\beta\gamma) = \alpha(\beta\bar{\gamma}^+) = \alpha(\beta\bar{\gamma} + \beta) = \alpha(\beta\bar{\gamma}) + \alpha\beta = (\alpha\beta)\bar{\gamma} + \alpha\beta = (\alpha\beta)\bar{\gamma}^+$
Luego $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

(iii) Sea γ un límite ordinal, y dado que $\theta \in \gamma$.
$\alpha(\beta\gamma) = \alpha(\beta(\bigcup\{\theta : \theta < \gamma\})) = \alpha(\bigcup\{\beta\theta : \theta < \gamma\}) = \bigcup \alpha\{\beta\theta : \theta < \gamma\} = \bigcup\{\alpha(\beta\theta) : \theta < \gamma\} = \bigcup\{(\alpha\beta)\theta : \theta < \gamma\} = (\alpha\beta)\bigcup\{\theta : \theta < \gamma\}$

Por lo tanto $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

■

Al igual que en el caso de la adición, la propiedad conmutativa $\alpha\beta = \beta\alpha$ en la multiplicación es otra de las propiedades que no se verifica para los ordinales.

Ejemplo 4.49 En general la multiplicación de ordinales no es conmutativa. Del ejemplo anterior se tiene que. $2\omega = \omega$, mientras que $\omega 2 = \omega + \omega \neq \omega$. En efecto:
$\omega 2 = p_\omega(2) = p_\omega(1^+) = p_\omega(1) + \omega = p_\omega(0^+) + \omega = (0 + \omega) + \omega = \omega + \omega$

Teorema 4.50 *Si $\beta < \gamma$ y $\alpha > 0$ entonces, $\alpha\beta < \alpha\gamma$.*

Demostración:
La demostración se hace por inducción transfinita sobre γ:

(i) Si $\gamma = 0$, la hipótesis del teorema es falsa y el teorema se cumple.

(ii) Para γ un sucesor ordinal tal que $\gamma = \bar{\gamma}^+$. Así que supongamos que. $\beta < \bar{\gamma}$ implica que $\alpha\beta < \alpha\bar{\gamma}$.
Pero $\alpha\bar{\gamma}^+ = \alpha\bar{\gamma} + \alpha$ y dado que $\alpha > 0$ se tiene $\alpha\bar{\gamma} < \alpha\bar{\gamma}^+$, luego $\alpha\beta < \alpha\bar{\gamma}^+$

(iii) Sea γ un límite ordinal. Puesto que $\beta < \gamma$ tenemos que $\beta \in \gamma$. Luego:

$$\alpha\gamma = \bigcup\{\alpha\delta : \delta < \gamma\}$$

Ahora, dado que $\beta < \gamma$, se tiene que $\beta^+ < \gamma$, pues γ es un límite ordinal. Así que:

$$\alpha\beta^+ \in \{\alpha\delta : \delta < \gamma\}$$

Además $\alpha\beta \in \alpha\beta + \alpha = \alpha\beta^+$. Entonces $\alpha\beta \in \bigcup\{\alpha\delta : \delta < \gamma\}$, esto es $\alpha\beta \in \alpha\gamma$. Por tanto $\alpha\beta < \alpha\gamma$.

■

Teorema 4.51 *Si $\alpha\beta = \alpha\gamma$ y $\alpha > 0$ entonces, $\beta = \gamma$.*

Demostración:
Esta prueba se realizará por contradicción, y sin pérdida de generalidad supongamos que: $\beta < \gamma$. De ser así, se tendrá que $\alpha\beta < \alpha\gamma$, lo cual genera la contradicción. ■

Este resultado es comúnmente conocido como la cancelación por izquierda, sin embargo la cancelación por derecha no se verifica.

Ejemplo 4.52 $2\omega = 1\omega$ y sin embargo $2 \neq 1$.

Definición 4.53 (Exponenciación) *Fijando un ordinal α. Se define $e_\alpha(\beta)$ para todo ordinal β por:*

1. $e_\alpha(0) = 1$
2. $e_\alpha(\gamma^+) = e_\alpha(\gamma)\alpha$ *para todo ordinal* γ.

Además

$e_\alpha(\lambda) = \bigcup\{e_\alpha(\gamma) : \gamma < \lambda\}$ *para todo límite ordinal* λ.

Se denota $e_\alpha(\beta) = \alpha^\beta$

Ejemplo 4.54 Dadas las siguientes potencias:
$\omega^1 = e_\omega(0^+) = e_\omega(0)\omega = 1\omega = \omega$.
$\omega^2 = e_\omega(1^+) = e_\omega(1)\omega = \omega\omega$.
En general
$\omega^n = e_\omega((n-1)^+) = e_\omega(n-1)\omega = \omega^{n-1}\omega$.
Además
$\omega^\omega = e_\omega(\omega) = \bigcup\{e_\omega(n) : n < \omega\} = \bigcup\{\omega^n : n < \omega\}$.

Los anteriores resultados son obtenidos de forma inmediata de la definición.

Teorema 4.55 $\alpha^1 = \alpha$.

Demostración:
De la definición de exponenciación:

$$e_\alpha(1) = e_\alpha(0^+) = e_\alpha(0)\alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha$$

■

Teorema 4.56 $1^\alpha = 1$.

Demostración:
Empleando el Corolario 4,32. Sea $A = \{\beta \in \alpha : 1^\beta = 1\}$, el cual no es vacío ya que $0 \in A$. Se probará que para todo $\gamma < \alpha$ si $\gamma \subseteq A$ implica que $\gamma \in A$.
Así que sea $\gamma \in \alpha$ tal que $\gamma \subseteq A$.

(i) Si γ es un sucesor ordinal, donde $\gamma = \theta^+$. Entonces $\theta < \gamma$ así que $\theta \in \gamma$, además $\theta \in A$ dado que $\gamma \subseteq A$. Entonces:

$$1^\gamma = e_1(\gamma) = e_1(\theta^+) = e_1(\theta) \cdot 1 = 1^\theta \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

(ii) Sea γ un límite ordinal. Entonces

$$1^\gamma = e_1(\gamma) = \bigcup\{e_1(\theta) : \theta < \gamma\} = \bigcup\{1^\theta : \theta < \gamma\} = \bigcup\{1 : \theta < \gamma\} = 1$$

Por el Corolario 4,32 $A = \alpha$, esto es $1^\beta = 1$ para todo $\beta \in \alpha$. En otras palabras $1^\alpha = 1$ para todo ordinal α.

■

Capítulo 5

Resultados no convencionales

Se han observado ciertas diferencias entre las propiedades de la aritmética natural y ordinal, e incluso resultados inesperados en áreas del Análisis y la Teoría de números. Más sorprendente es saber que en el estudio de los números ordinales el último teorema de Fermat no se cumple. (Suppes, 1972).

En este capítulo realizaremos una breve descripción acerca de los avances desarrollados a lo largo de la historia por demostrar dos de los más importantes resultados en la Teoría de números: El Último Teorema de Fermat y la Conjetura de Goldbach. Después mostraremos su aplicación a los números ordinales. Tomaremos como referencia los siguientes textos (Cilleruelo, 2000) y (Helfgott, 2013).

5.1. El Último Teorema de Fermat

Existe una frase que mantuvo ocupado a generaciones de matemáticos durante más de tres siglos intentando demostrar un teorema sin éxito:

"Resolver un cubo en la suma de dos cubos, una cuarta potencia en dos cuartas potencias o, en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos del mismo tipo es imposible; de lo que he encontrado una notable demostración. Este margen es demasiado pequeño para contenerla"

Esta frase había sido escrita por Fermat en el margen del problema 8 del libro "Aritmética" de Diofanto, dicho problema propone realizar una descomposición del cuadrado de un número en suma de dos cuadrados de otros dos números. Fue gracias a su hijo Samuel, quien realizó una edición de la traducción del libro de Diofanto en 1670, que había incluído los comentarios que su padre escribía en sus páginas. En el año 1753 despertó la curiosidad de Euler, demostrando el teorema para los casos $n = 3$ y $n = 4$ pero sin encontrar la prueba para el caso general. Por su parte, Gauss realizó un esbozo de la demostración para el caso $n = 5$, mientras que Sophie Germain contribuyó a que la demostración del Último teorema de Fermat se realice en dos casos, y en uno de ellos demostró el teorema para $n < 100$ y ampliado por Legendre a $n < 197$, mientras que en el otro caso se probó para $n = 5$ por Legendre y Dirichlet. El caso $n = 7$ fue



Arithmeticorum Liber II. 61

IN QVÆSTIONEM VII.

QVÆSTIO VIII.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

QVÆSTIO IX.

Figura 5.1: Arithmetica de Diofanto, editada con la observación de Fermat (Durán y Guardeño, 2000)

.

probado por Gabriel Lamé (1795 − 1870) en el año 1839. Ya en el siglo XX, en el año 1954, Harry Schutz Vandiver (1882 − 1973) con la ayuda, por primera vez, de una computadora electrónica, probó que el útltimo teorema de Fermat es válido para exponentes menores o iguales que 2500. Cabe señalar la importancia de este hecho, pues hasta la actualidad se ha empleado este recurso tecnológico en la Teoría de Números. En 1955, Taniyama propuso estudiar si las curvas elípticas definidas sobre un cuerpo de números son parametrizables sobre funciones automorfas, esto tenía el propósito de demostrar la conjetura de Hasse-Weil. Sin embargo, Shimura en 1964 y Weil en 1967, reformularon la propuesta de Taniyama a curvas elípticas definidas sobre el cuerpo racional, preguntando si serían parametrizables mediante funciones modulares. Es así como se creó la conjetura de modularidad de Shimura-Taniyama-Weil. Son importantes los aportes de Frey (1986) y Serré (1987) sobre cómo la prueba de la conjetura modularidad de Shimura-Taniyama-Weil para curvas elípticas semiestables implica el Último Teorema de Fermat. El final de esta historia culmina en 1995 cuando Wiles demuestra esta conjetura y en consecuencia, el Último Teorema de Fermat.

Teorema 5.1 (Último teorema de Fermat) *Si n es un entero mayor o igual que 3, no existen enteros positivos a, b, c tales que:*

$$a^n + b^n = c^n$$

.

La adaptación de este teorema para números ordinales sería la siguiente manera: Para todo ordinal μ existen ordinales α, β, γ tales que:

$$\alpha^\mu + \beta^\mu = \gamma^\mu$$

A continuación, veremos un contraejemplo para mostrar que en el caso de los números ordinales, no se cumple el último teorema de Fermat.

Ejemplo 5.2 Se verifica que:

$(\omega 2)^3 + (\omega 5)^3 = (\omega 7)^3$.

En efecto:

$$\begin{aligned}(\omega 2)^3 &= (\omega 2)(\omega 2)(\omega 2) = (\omega 2)[(\omega 2)(\omega 2)] \\ &= (\omega 2)[\omega((2\omega)2)] = (\omega 2)[\omega(\omega 2)] \\ &= (\omega 2)[(\omega\omega)2] = (\omega 2)[(\omega^2)2] = \omega[(2\omega^2)2] \\ &= \omega(\omega^2 2) = (\omega\omega^2)2 \\ &= \omega^3 2.\end{aligned}$$

Análogamente: $(\omega 5)^3 = \omega^3 5$ *y* $(\omega 7)^3 = \omega^3 7$
Por tanto: $(\omega 2)^3 + (\omega 5)^3 = (\omega 7)^3$.

5.2. La Conjetura de Goldbach

La historia de esta conjetura inicia con una carta entre dos matemáticos: Leonard Euler $(1707 - 1783)$ y Christian Goldbach $(1690 - 1764)$. Hubo una carta especialmente importante dentro de su regular correspondencia, un 7 de junio de 1742 Goldbach escribió lo siguiente: "Todo número puede ser descompuesto en una suma de un número arbitrario de primos", a lo que Euler redujo a "Todo número entero positivo puede expresarse como la suma de a lo más tres números primos".

Esta conjetura puede ser dividida en dos partes:

1. *La conjetura débil*: Todo número entero impar mayor que 5 puede expresarse como la suma de tres números primos.

2. *La conjetura fuerte*: Todo número entero par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos números primos.

   Sus nombres se deben a que la conjetura fuerte implica a la débil.

La forma de abordar una solución a la conjetura de Goldbach no solo pasó por determinar si un número era posible descomponerse en la suma de primos, además se buscó indicar de cuántas formas podía ser representado de esa manera. Denominemos por $r_2(n)$ a la cantidad de representaciones del número par n como la suma de dos primos, y $r_3(n)$ a la cantidad de representaciones del número impar n como la suma de tres primos.

Por ejemplo, $r_2(20) = 2$ puesto que: $20 = 17 + 3 = 13 + 7$, o también $r_3(17) = 4$ puesto que: $17 = 2 + 2 + 13 = 3 + 3 + 11 = 3 + 7 + 7 = 5 + 5 + 7$.

En esa búsqueda, Hardy y Littlewood idearon una estrategia que denominaron el *Método del Círculo*. Primero tomaron a la exponencial compleja $e^{i\theta}$ el cual tiene la representación gráfica de una circunferencia en el plano complejo, después se reemplaza el ángulo θ por un múltiplo entero de una vuelta $2\pi m$ quedando de esta manera $e^{i2\pi m}$, pero su gráfica estaría siempre en el punto $(1, 0)$ para cualquier valor de m. Pero si se multiplica a m por un ángulo α donde $0 \leq \alpha \leq 1$, entonces al integrar se obtiene:

$$\int_0^1 e^{i2\pi m\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1, \text{ m} = 0 \\ 0, \text{ m} \neq 0 \end{cases}$$

Sin perder el objetivo, suponiendo que n es la suma de tres primos $n = p_1 + p_2 + p_3$, m puede ser reemplazado por $p_1 + p_2 + p_3 - n$.

La integral anterior se puede expresar así:

$$\int_0^1 e^{i2\pi(p_1+p_2+p_3-n)\alpha} d\alpha = \begin{cases} 1, \text{ p}_1 + p_2 + p_3 - n = 0 \\ 0, \text{ p}_1 + p_2 + p_3 - n \neq 0 \end{cases}$$

Considerando el siguiente polinomio:

$$S(\alpha, n) = \sum_{p \leq n} e^{i2\pi p\alpha}$$

Se obtiene

$$r_3(n) = \int_0^1 \sum_{p_1,p_2,p_3 \leq n} e^{i2\pi(p_1+p_2+p_3-n)\alpha} = \int_0^1 S(\alpha, n)^3 e^{i2\pi n\alpha}$$

Hardy y Lettlewood se habían percatado que algunos valores de α hacían que, al evaluar la integral sobre los intervalos centrados en estos puntos tuvieran una mayor contribución. Y a estos intervalos se les llamó *arcos mayores* y a los restantes intervalos *arcos menores*.

Los arcos menores proporciona el término principal para determinar de cuántas maneras se puede representar n como la suma de tres primos, mientras que los arcos

menores brindan un término de error.

Hardy $(1877 - 1947)$ y Littlewood $(1885 - 1977)$ habían demostrado que, bajo la suposición de que la hipoótesis de Riemann fuera cierta, el término principal crece más rápido que el término de error a partir de cierta constante K se cumple que $r_3(n) \geq 1$, lo cual verificaría la conjetura.

En 1937 Vinogradov $(1891 - 1983)$ demostró la veracidad de la conjetura para impares mayores que alguna constante K, sin la necesidad de la hipótesis generalizada de Riemann.

Teorema 5.3 (Vinogradov) *Todo número impar suficientemente grande se puede escribir como la suma de tres primos.*

A partir de aquí, se comenzó a refinar el valor de la constante K. Cabe destacar otros resultados importantes como los siguientes:

En 1933, Schnirelmann, probó que todo entero mayor que 1 puede escribirse como la suma de, a lo más, K primos. Dicha cantidad K no había sido especificada.
En 1969, Klimov dió un primer valor para $K = 6 \times 10^9$, luego lo redujo a $K = 115$ y posteriormente a $K = 55$.
Otras reducciones de K las dieron Vaughan $(K = 27)$, Deshouillers $(K = 26)$, Risel - Vaughan $(K = 19)$.

Teorema 5.4 (Ramaré) *Todo número par se puede escribir como la suma de, a lo más, 6 primos.*

Otra forma de aproximarse a la conjetura fue mediante el concepto de *casiprimos* (primos o producto de dos primos). En 1966 Chen Jing Run publicó:

Teorema 5.5 (Chen) *Todo número par suficientemente grande puede escribirse como la suma de un primo y un casiprimo.*

A partir de este punto el matemático peruano Harald Helfgott (1977) refinó el valor de la constante a $K = 10^{29}$ y computacionalmente habían probado la conjetura para todos los números impares hasta $8{,}8 \times 10^{30}$, con lo cual probó finalmente la Conjetura Débil de Goldbach.

Otra de las conjeturas más famosas en la historia de la matemática fue enunciada por Christian Goldbach en una carta dirigida a Euler en el año 1742, él decía que todo número entero mayor que dos se podía escribir como la suma de tres números primos (para aquel tiempo se consideraba al 1 como primo). Es así que Euler propuso una conjetura. más fuerte: Todo número par mayor que dos es la suma de dos números primos. (Stewart, 2008).

Sin embargo, antes de adaptar la Conjetura de Goldbach, se necesitará revisar la definición de factor primo de un ordinal.

Definición 5.6 *Un número ordinal es denominado factor primo si no es el producto de dos números ordinales menores que él.*

Ejemplo 5.7 *A partir de ω son primos: ω, $\omega + 1$, $\omega^2 + 1$. (Sierpinski, 1965)*

Conjetura 5.8 (Goldbach) *Todo número natural par mayor que dos es la suma de dos números primos.*

En términos de números ordinales se enuncia:
Todo número ordinal mayor que dos es la suma de dos factores primos ordinales.

Para dicha hipótesis se puede encontrar un contraejemplo como:

Ejemplo 5.9 *El número $\omega + 10 \neq \omega + (\omega + 1)$*

En el Análisis Matemático se conocen como formas indeterminadas: ∞^0, 0^0 pero cuando se emplean los números ordinales, los resultados son distintos. Un resultado interesante consecuente de la definición de exponenciación se puede mostrar a continuación.

Ejemplo 5.10 $\omega^0 = 1$ y $0^0 = 1$. Dado que, por definición 4,53 se tiene: $e_\alpha(0) = 1$, tomando $\alpha = \omega$ se obtiene los resultados anteriores. Y $\alpha = 0$

Otra forma indeterminada en el Análisis es: 1^∞, pero en el estudio de los ordinales esto cambia. El siguiente resultado se obtiene directamente del teorema 4,56.

Ejemplo 5.11 $1^\omega = 1$. Por el teorema 4,56 se tiene $1^\alpha = 1$, tomando $\alpha = \omega$ se obtiene el resultado anterior.

Cabe resaltar que existen teoremas que no pueden ser demostrados con la aritmética de Peano, pero pueden ser probados con la teoría de números transfinitos como por ejemplo el teorema de Goodstein.

Capítulo 6

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo inicia con conceptos preliminares sobre orden, números naturales y numerabilidad, los cuales son requeridos para el desarrollo de los números ordinales.

En este trabajo realizamos un estudio preliminar del inicio de la teoría de conjuntos y análisis sobre los números ordinales y transfinitos, partiendo de la investigación de Cantor de la unicidad de la serie de Fourier que daba solución al problema de la conducción del calor, condujo al desarrollo del concepto de conjunto derivado, la existencia de un conjunto no numerable, dando lugar al inicio de la teoría de conjuntos, y además la concepción de los números ordinales y transfinitos.

Durante el transcurso de la investigación surgieron otros estudios adicionales, tales como los sistemas axiomáticos de Zermelo Fraenkel y Von Newmann - Bernays - Gödel para la formalización de la teoría de conjuntos, y para mencionar dichos sistemas axiomáticos, se realizó un breve estudio sobre el lenguaje formal. Además se exploró la teoría de números ordinales y sus propiedades aritméticas, de las cuales se obtuvieron resultados importantes. La dirección de esta investigación culminó con una importante y crucial conexión de la teoría de números con los números ordinales. Esta relación entre ambos campos se dió al realizar una adaptación del Teorema de Fermat - Wiles y la Conjetura de Goldbach mediante los números ordinales. El presente trabajo concluye que, contrario a lo que se esperaba, mediante las definiciones de adición, multiplicación y exponenciación, se implicaron resultados no convencionales: el Último Teorema de Fermat y la Conjetura de Goldbach no se verifican en la teoría de números ordinales.

Estos resultados superaron nuestras expectativas en la realización de esta investigación, mostrando que la teoría de números ordinales puede ofrecernos un universo diferente.

Referencias

Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers* (n.º 1). Open Court Publishing Company.

Castillo, C. I. (1999). Lógica y teoría de conjuntos. *CI Castillo, Lógica y teoría de conjuntos*.

Cilleruelo, J. (2000). La conjetura de goldbach.

Cohen, L. W., y Ehrlich, G. (1969). The structure of the real number system.

Conway, J. H., y Guy, R. (1998). *The book of numbers*. Springer Science & Business Media.

Courant, R., y Robbins, H. (1996). *What is mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press, USA.

Dauben, J. W. (2020). *Georg cantor: Sus matemáticas y filosofía del infinito*. Princeton University Press.

Duoandikoetxea, J. (2007). 200 anos de convergencia de las series de fourier. *La Gaceta de la RSME*, *10*(3), 651–688.

Durán, A. J., y Guardeño, A. J. D. (2000). *El legado de las matemáticas: de euclides a newton: los genios a través de sus libros*. Universidad de Sevilla.

Ferreirós, J. (2000). ¿ antinomia o trivialidad? la paradoja de russell. *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos*, 59–64.

Fourier, J. (1988). Bj (1822) theorie analytique de la chaleur. *Paris*, *284*, 10–77.

Grattan-Guinness, I. (2020). *From the calculus to set theory 1630-1910: An introductory history*. Princeton University Press.

Hallett, M. (1984). *Cantorian set theory and limitation of size*. Clarendon Press Oxford.

Halmos, P. R. (2017). *Naive set theory*. Courier Dover Publications.

Hamilton, A. G. (1982). *Numbers, sets and axioms: the apparatus of mathematics*. Cambridge University Press.

Helfgott, H. (2013). La conjetura débil de goldbach. *La Gaceta de la RSME*, *16*(4), 709–726.

Jech, T. J. (2008). *The axiom of choice*. Courier Corporation.

Lima, E. L. (1997). *Análisis real*. IMCA.

Niven, I. (2005). *Irrational numbers* (n.º 11). Cambridge University Press.

Piñeiro, G. (2013). Cantor-el infinito en matemáticas. *digital: SkynetePub base r2*, *1*.

Pujós, F. (2019). *El infinito: ¿un viaje o un destino?* Emse Edapp, S.L. Descargado de `https://books.google.com.pe/books?id=bStGygEACAAJ`

Rudin, W. (2021). Principles of mathematical analysis.

Sierpinski, W. (1965). Cardinal and ordinal numbers.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas: En los últimos 1000 años*. Grupo Planeta (GBS).

Suppes, P. (1972). *Axiomatic set theory*. Courier Corporation.