Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Argumento de Hopf para sistemas dinámicos uniformemente hiperbólicos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jorge Luis ABANTO MONTOYA

ASESOR

Dr. Jorge Luis CRISÓSTOMO PAREJAS

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Abanto, J. (2021). *Argumento de Hopf para sistemas dinámicos uniformemente hiperbólicos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Abanto Montoya
DNI	41640808
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
DNI	43688114
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-9049-4125
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Análisis Funcional
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: -12.063897 Longitud: -77.064461
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2020 - 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 08:00 horas del viernes 30 de abril del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Renato Mario Benazic Tome (PRESIDENTE), Dr. José Raúl Luyo Sánchez (MIEMBRO) y el Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: *"*ARGUMENTO DE HOPF PARA SISTEMAS DINÁMICOS UNIFORMEMENTE HIPERBÓLICOS*"*, presentado por el señor Bachiller Jorge Luis Abanto Montoya, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación SOBRESALIENTE con un calificativo promedio de DIECIOCHO (18).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Renato Mario Benazic Tome, manifestó que el señor Bachiller Jorge Luis Abanto Montoya, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 09:19 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. RENATO MARIO BENAZIC TOME
PRESIDENTE

DR. JOSÉ RAÚL LUYO SÁNCHEZ
MIEMBRO

DR. JORGE LUIS CRISÓSTOMO PAREJAS
MIEMBRO ASESOR

La Vicedecana (e) de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Mg. Zoraida Judith Huamán Gutiérrez, ccertifica virtualmente la participación del Jurado Evaluador, el titulando, el acto de instalación y el inicio, desarrollo y término del acto académico de sustentación, dejando constancia en el acta respectiva.

Argumento de Hopf para sistemas dinámicos uniformemente hiperbólicos

Jorge Luis Abanto Montoya

Tesis de Licenciatura presentada al Programa de Pregrado de la Escuela Profesional de Matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del Título de Licenciado en Matemática.

Asesor: Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas

Lima - Perú

Abril de 2021

FICHA CATALOGRÁFICA

Jorge Luis Abanto Montoya

Argumento de Hopf para sistemas dinámicos uniformemente hiperbólicos,(Lima) 2021.
V, 71p., 29, 7cm (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2021). Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas. Matemática. UNMSM/FCM
II. Título (Serie)

Argumento de Hopf para sistemas dinámicos uniformemente hiperbólicos

Jorge Luis Abanto Montoya

Tesis de Licenciatura sometida al Cuerpo Docente de la Escuela Profesional de Matemática de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del Título de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Dr. Renato Mario Benazic Tome

Presidente

Dr. José Raúl Luyo Sánchez

Miembro

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas

Miembro Asesor

Lima - Perú

Abril de 2021

Dedicado este trabajo: A mis padres, Antia y Segundo, a mis hermanas Evelyn y Lis, a mis abuelos Jorge, Belermina, Luis y Clara, y mis sobrinos Joaquín y Liam.

Agradecimientos

A mis padres Antia y Segundo, por su comprensión, soporte y los valores que me enseñaron, los cuales tengo presente en el pasaje de mi vida.

A mis hermanas, Evelyn y Lis por su apoyo y comprensión.

A mis amigos, Angel y Raime.

A mi asesor. Prof. Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas, por sus conocimientos e interés mostrado en el trabajo; además de su comprensión por los contratiempos que tuve a lo largo de la misma.

Índice general

Abstract iv

1. Introducción **1**

1.1. Motivación de la tesis 1

1.2. Estructura 3

2. Preliminares **4**

2.1. Teoría de la medida 4

2.2. Variedades diferenciables 8

2.2.1. Medida de Lebesgue 15

2.2.2. Foliaciones 18

2.3. Teoría ergódica 20

2.3.1. Medida invariante 20

2.3.2. Shift de Bernoulli 22

2.3.3. Medidas ergódicas 25

3. Pesadilla de Fubini **35**

3.1. Pesadilla de Fubini 35

3.1.1. Conjunto de medida total 35

3.1.2. Curvas analíticas 40

3.1.3. Holonomía 43

3.2. Dinámica uniformemente hiperbólica 44

4. Argumento de Hopf **51**

4.1. Consecuencias del teorema ergódico de Birkhoff 51

4.2. Conclusión 59

Bibliografía 60

Resumen

En este trabajo mostraremos que todo $f : M \to M$ difeomorfismo uniformemente hiperbólico de clase C^2 que preserva la medida de Lebesgue en M, donde M es una variedad Riemanniana compacta de clase C^∞ es ergódico, para ello utilizamos el método conocido como el Argumento de Hopf expuesto en el libro (Hopf, 1939). Además daremos un ejemplo interesante denominado la pesadilla de Fubini que está expuesto en el artículo (Milnor, 1997) que nos permite comprender la definición y sus propiedades de las foliaciones estables e inestables, esto ayudará para demostrar la ergodicidad de f.

Palabras claves: Variedad Riemanniana, sistemas uniformemente hiperbólicos, foliaciones, hojas, medidas ergódicas.

Abstract

In this work we will show that all uniformly hiperbolic difeomorphism of class C^2 that preserves the Lebesgue measure in M, where M is a compact Riemannian manifold of class C^∞ is ergodic, for this we use the method known as the Hopf's Argument exposed in the book (Hopf, 1939). We will also give an interesting example called Fubini's nightmare that is exposed in the article (Milnor, 1997) that allows us to understand the definition and its properties of the stable and unstable foliations which will help to demostrate the ergodicity of f.

keywords: Riemannian manifold, uniformly hyperbolic systems, foliations, leaves, ergodic measure.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación de la tesis

Dado un sistema dinámico $f : M \to M$ una de las principales preguntas iniciales es, dado un estado inicial $x \in M$ es averiguar el futuro de este estado vía la dinámica f, esto es; $x, f(x), f^2(x), f^3(x), \cdots, f^n(x), \cdots$, ¿ qué sucede con $f^n(x)$ cuando $n \to \infty$?. Esta pregunta es respondida parcialmente por el teorema de recurrencia de Poincaré, que nos dice, si μ es una medida invariante por f (ver definición 2.39) entonces para casi todo estado inicial de un conjunto con medida positiva, existen infinitos valores de n para los cuales $f^n(x)$ también visita dicho conjunto, es decir, dado $E \subset M$ con $\mu(E) > 0$, entonces para casi todo punto $x \in E$ el conjunto

$$P = \left\{ j \geq 0 : f^j(x) \in E \right\}$$

es infinito. Ahora bien, desearíamos tener información más precisa, de naturaleza cuantitativa. LLamamos tiempo medio de visita de x a E al valor:

$$\tau(E, x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \# \left\{ 0 \leq j < n : f^j(x) \in E \right\} \tag{1.1}$$

Sería interesante saber, ¿ cuántas veces en promedio un estado inicial regresa al conjunto E?, es decir, en que condiciones este tiempo medio de visita es positivo, mas aún saber si el límite en (1.1) existe. La respuesta a esta pregunta nos la proporciona el teorema ergódico de Birkhoff, que nos dice, el tiempo medio de visita $\tau(E, x)$ existe en casi todo punto $x \in M$, gracias a este útimo teorema podemos decir en promedio cuántas veces regresa el estado x al conjunto E. Para una clase de sistemas dinánimos denominado ergódicos

con respecto a μ (ver definición 2.51) se tiene que $\tau(E, x) = \mu(E)$ para casi todo punto $x \in M$, es decir, para esta clase de sistemas dinámicos se tiene que el tiempo promedio de visita es constante, en este sentido es importante saber qué sistemas dinámicos son ergódicos.

Nuestro resultado principal es justamente demostrar que, para todo difeomorfismo uniformemente hipérbolico $f : M \to M$ de clase C^2 que preserva la medida de Lebesgue en M, donde M es una variedad Riemanniana compacta de clase C^∞; es ergódico. Cabe indicar que f es un difeomorfismo uniformemente hiperbólico, si para cada $x \in M$ existe una descomposición del espacio tangente $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$ tales que $df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ y $df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$, además df_x restricto a $E^s(x)$ se contrae y df_x restricto a $E^u(x)$ se expande.

En (Hopf, 1939), Hopf Eberhard prueba que el flujo geodésico de una superficie compacta con curvatura negativa, es ergódico. Su método consistió en estudiar las medias temporales de Birkhoff (ver Teorema 2.50) de funciones continuas a lo largo de las hojas de la foliación estable e inestable del flujo. Este tipo de argumento se ha utilizado desde entonces en contextos cada vez más generales, que es conocido como el Argumento de Hopf.

Para cualquier $f : M \to M$ se define la *relación de equivalencia estable* $\sim_s$, donde $x \sim_s y$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$. Denotado por $W^s(x)$ la clase de equivalencia estable que contiene a x. Cuando f es invertible se define la *relación de equivalencia inestable* $\sim_u$, como la relación de equivalencia estable para f^{-1}, y denotado por $W^u(x)$ la clase de equivalencia inestable que contiene a x.

El primer paso del Argumento de Hopf es demostrar que las medias temporales de Birkhoff de funciones continuas son constantes a lo largo de las hojas estables e inestables. El siguiente paso se limita cuando estamos ante la situación de un difeomorfismo uniformemente hiperbólico f, que preserva la medida de Lebesgue m (*conservativo*), en este caso f es invertible y las clases de equivalencia estable son las hojas de la foliación estable $\mathcal{F}^s$, y las clases de equivalencia inestable son las hojas de la foliación inestable $\mathcal{F}^u$.

Finalmente, desde que f es conservativo, es suficiente probar que, dada cualquier función continua φ, entonces su media temporal $\widetilde{\varphi}$ es constante en $m - ctp$, con ello se obtiene que f es ergódico. Para tal fin, se necesita que las foliaciones estable e inestable sean de clase C^1, pero un difeomorfismo uniformemente hiperbólico la foliación estable e

inestable no son de clase C^1, por lo que el paso final del Argumento de Hopf no se aplica.

El avance fundamental de Anosov y Anosov−Sinai fue demostrar que las foliaciones estable e inestable de un difeomorfismo unifomemente hiperbólico conservativo o no, satisface una condición más débil que la de clase C^1, que es la de *continuidad absoluta*. Para los sistemas conservativos, la continuidad absoluta es suficiente para terminar el Argumento de Hopf, demostrando que todo difeomorfismo uniformemente hiperbólico de clase C^2 y conservativo, es ergódico (Anosov, 1969), (Anosov y Sinai, 1967).

El propósito de este trabajo es exponer las ideas planteadas por Anosov y Anosov−Sinai para demostrar la ergodicidad de un difeomorfismo uniformemente hiperbólico de clase C^2 usando el Argumento de Hopf.

1.2. Estructura

Comenzaremos por dar en el capítulo 2 algunos conceptos y resultados importantes de la teoría de la medida, variedades diferenciables y teoría ergódica. Por ejemplo, en teoría de la medida necesitaremos de espacio medible, espacio de medida, teorema de convergencia dominada, etc. Las variedades diferenciables que nos servirá para generar la medida de Lebesgue que desempeña un rol importante para nuestro problema y terminando este capítulo con algunas definiciones y resultados de la teoría ergódica tales como, medida invariante, medida ergódica, el shift de Bernoulli y caracterizaciones de ergodicidad.

El capítulo 3 en su mayoría está basado en el artículo de Jhon Milnor (Milnor, 1997), que trata a groso modo sobre la existencia de un conjunto E en el cuadrado $(0,1)\times(0,1]$ con medida total y la construcción de una foliación $\mathcal{F}$ tal que la medida de E restricto a dicha foliación tiene medida cero. Luego, definiremos una aplicación a la que llamaremos holonomía con la propiedad que, la imagen de un conjunto con medida positiva via dicha holonomía tiene medida cero. Estos ejemplos nos servirá como motivación para futuras definiciones y propiedades, tales como foliaciones absolutamente continuas y foliaciones transversalmente absolutamente continuas que son requisitos para demostrar nuestro problema principal.

Finalmente, en el capítulo 4 daremos la demostración de nuestro resultado principal que se basa en la técnica empleada por E. Hopf, conocida como el *argumento de Hopf*, para ello previamente expondremos algunas consecuencias del teorema ergódico de Birkhoff.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Teoría de la medida

En esta sección veremos algunas definiciones y resultados sobre teoría de la medida, cabe indicar que el contenido mostrado a continuación es extraído en su mayoría de (Oliveira y Viana, 2014) y (Fernandez, 1976).

Definición 2.1. Un *álgebra* de X es una familia $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que satisface

- $X \in \mathcal{B}$
- $A \in \mathcal{B}$, entonces $A^c \in \mathcal{B}$
- Si $A, B \in \mathcal{B}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{B}$.

Definición 2.2. Un $\sigma-$*álgebra* $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X es un álgebra que satisface

$$A_i \in \mathcal{B} \text{ para } i = 1, 2, \cdots, \text{ entonces } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{B}.$$

Un espacio medible es una dupla $(X, \mathcal{B})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{B}$ un $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X. Los elementos de $\mathcal{B}$ son llamados *conjuntos medibles*.

Proposición 2.3. *Considere una familia no vacia cualquiera* $\{B_i : i \in \mathcal{I}\}$ *de* $\sigma-$*álgebras. Entonces la intersección* $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} B_i$ *es también un* $\sigma-$*álgebra.*

Definición 2.4. La $\sigma-$álgebra generada por la familia ε de subconjuntos de X es la menor $\sigma-$álgebra $\sigma(\varepsilon)$ que contiene a ε, es decir, es la intersección de todas las $\sigma-$álgebras que contiene a ε.

Definición 2.5. Una $\sigma-$álgebra de *Borel* de un espacio topógico es una $\sigma-$álgebra $\sigma(\tau)$ generada por la topología τ, esto es, el menor $\sigma-$álgebra que contiene todos los subconjuntos abiertos. En este caso, los conjuntos medibles reciben el nombre de *Borelianos*

Definición 2.6. Una medida en un $(X, \mathcal{B})$ espacio medible es una función $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

para cualquier $A_i \in \mathcal{B}$ disjuntos dos a dos. Esta última propiedad es llamada $\sigma - aditiva$. El triplete $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es llamado *espacio de medida*. Cuando $\mu(X) < \infty$ decimos que μ es una *medida finita* y si $\mu(X) = 1$ decimos que μ es una *medida de probabilidad*. En este último caso, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es un *espacio de probabilidad*.

Definición 2.7. Decimos que una medida es $\sigma-$finita, si existe una sucesión de subconjuntos $A_1, A_2, \cdots$ de X tal que $\mu(A_i) < \infty$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Teorema 2.8. *Sea $\mathcal{B}_0$ un álgebra de subconjuntos de X y sea $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \to [0, +\infty]$ una función $\sigma-$aditiva con $\mu_0(\emptyset) = 0$ y $\mu_0(X) < \infty$. Entonces existe una única medida μ definida en la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{B}_0$ que es una extensión de μ_0, esto es, para todo elemento $B \in \mathcal{B}_0$ tenemos que $\mu(B) = \mu_0(B)$.*

Definición 2.9. Sean μ y ν dos medidas en un espacio de medida $(X, \mathcal{B})$. Decimos que ν es *absolutamente continua* en relación a μ, si todo conjunto medible E satisface

$$\mu(E) = 0 \;\Rightarrow\; \nu(E) = 0$$

en este caso, escribimos $\nu \ll \mu$. Decimos que μ y ν son *equivalentes* y escribimos $\mu \sim \nu$, si y solamente si, $\mu \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$.

Sean $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, \cdots, n$ espacios de medida finita. Consideremos en $X_1 \times \cdots \times X_n$ la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ dada por la familia de todos los conjuntos de la forma $A_1 \times \cdots \times A_n$ con $A_i \in \mathcal{A}_i$ que es llamada $\sigma-$álgebra producto y es denotada por $\mathcal{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{A}_n$.

Teorema 2.10. *Existe una única medida μ en $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$ tal que $\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n)$ para todo $A_1 \in \mathcal{A}_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}_n$. En particular, μ es una medida finita.*

Veamos la construcción del producto de una familia enumerable de espacios de probabilidad. Sean $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, con $i \in \mathcal{I}$ espacios de probabilidad. El conjunto de índices puede ser $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ o $\mathcal{I} = \mathbb{Z}$. Consideremos el producto cartesiano

$$\sum = \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i = \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} : x_i \in X_i\}$$

Llamamos *cilindros* de Σ a los conjuntos de la forma

$$[m; A_m, \cdots A_n] = \{(x_i)_{i \in \mathcal{I}} : x_i \in A_i, \ para\ m \leq i \leq n\}$$

donde $m \in \mathcal{I}$, $n \geq m$ y $A_i \in \mathcal{B}_i$ para $m \leq i \leq n$. Por definición la $\sigma-$álgebra producto en Σ es la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ generada por la familia de todos los cilindros. La familia $\mathcal{A}$ de las uniones finitas de cilindros disjuntos dos a dos es un álgebra que genera la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$.

Teorema 2.11. *Existe una única medida μ en $(\Sigma, \mathcal{B})$ tal que*

$$\mu([m; A_m, \cdots, A_n]) = \mu_m(A_m) \cdots \mu_n(A_n)$$

para cualquier cilindro $[m; A_m, \cdots, A_n]$. En particular, μ es una medida de probabilidad.

La medida de probabilidad μ es llamada *medida producto* y es representada por $\prod_{i \in \mathcal{I}} \mu_i$ y el espacio de probabilidad $(\Sigma, \mathcal{B}, \mu)$ es llamado *espacio producto* de los espacios $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i \in \mathcal{I}$.

Definición 2.12. Dados dos espacios medibles $(X, \mathcal{B})$ y $(Y, \mathcal{C})$, decimos que una aplicación $f : X \to Y$ es *medible* si $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Ejemplo 2.13. Dado un conjunto $B \subset X$ definimos la función característica $\chi_B : X \to \mathbb{R}$ de B por

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in B \\ 0, & \text{si} \quad x \in X \backslash B \end{cases}$$

Observar que χ_B es medible si, y solamente si, B es un conjunto medible.

Definición 2.14. Decimos que una propiedad es válida en $\mu - ctp$ de X, si es válida en todo X excepto posiblemente en un conjunto de medida nula.

Vamos a definir la integral de Lebesgue de una función en relación a una medida, esta integral generaliza la noción de integral de Riemann, ya que la integral de Lebesgue se define para toda clase de funciones medibles. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, entonces

Definición 2.15. Decimos que una función $s : X \to \mathbb{R}$ es simple, si existen constantes $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ y conjuntos medibles $A_1, \cdots, A_k \in \mathcal{B}$ disjuntos 2 a 2 tales que

$$s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}$$

donde χ_A es la función característica del conjunto A.

Definición 2.16. Sea $s = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}$ una función simple, entonces la integral de s en relación a la medida μ es

$$\int s d\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j)$$

Se puede verificar que esta integral está bien definida, esto es, si dos combinaciones lineales de funciones características definen una misma función s, entonces los valores de las integrales obtenidos a partir de las dos combinaciones coinciden.

Definición 2.17. Sea $f : X \to [0, +\infty]$ una función medible no negativa,entonces

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu$$

donde $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$ es una sucesión no decreciente de funciones simples tal que $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Se verifica que esta integral esta bien definida, esto es, el valor de la integral no depende de la elección de la sucesión de funciones simples. Ahora bien, para extender la definición de integral a cualquier función medible, observemos que dada una función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ siempre lo podemos escribir como $f = f^+ - f^-$ donde

$$f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \quad y \quad f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}$$

es claro que, f^+ y f^- son no negativas, además medibles.

Definición 2.18. Sea $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una función medible, entonces

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Si una de las integrales del lado derecho fuese finita, vale las convenciones $(+\infty) - a = +\infty$ y $a - (+\infty) = -\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$

Definición 2.19. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Decimos que una función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ es *integrable* si, es medible y su integral es un número real. Denotamos el conjunto de las funciones integrables por $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ o simplemente $L^1(\mu)$.
Dada una función medible $f : X \to [-\infty, +\infty]$ y un conjunto medible E, definimos la integral de f sobre E por

$$\int_E f d\mu = \int_X f\chi_E d\mu$$

Ejemplo 2.20. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida finita y sea $A \subset X$ un conjunto medible, entonces la función característica χ_A es integrable. En efecto, veamos primero que dicha función es medible, sea $I \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, entonces $\chi_A^{-1}(I) = \emptyset$ o $\chi_A^{-1}(I) = A$ o $\chi_A^{-1}(I) = A^c$ o $\chi_A^{-1}(I) = X$, luego χ_A es medible. Además

$$\int_X \chi_A(x)d\mu(x) = \int_A \chi_A(x)d\mu(x) + \int_{A^c} \chi_A(x)d\mu(x) = \mu(A) + 0 < \infty$$

Por lo tanto, χ_A es integrable.

Teorema 2.21 (Convergencia dominada)**.** *Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles y suponga que existe una función integrable g tal que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ para $\mu-ctp$ en X. Suponga también que la sucesión $(f_n)_n$ converge en $\mu - ctp$ para la función f, entonces f es integrable y*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

2.2. Variedades diferenciables

En esta sección daremos algunos alcances sobre variedades diferenciables, métrica Riemanniana, difeomorfismo, espacio tangente, etc; que fue consultado en su mayoría por (Lee, 2013). Esto nos dará la base para generar la medida de Lebesgue en una variedad diferenciable.

Definición 2.22. Sea M un espacio topológico. Un sistema de coordanadas locales o *carta local* en M es un homeomorfismo $x : U \to x(U)$ de un subconjunto abierto $U \subset M$ sobre un abierto $x(U) \subset \mathbb{R}^m$. Decimos que m es la dimensión de $x : U \to x(U)$. Un *atlas* de dimensión m sobre un espacio topológico M es una colección $\mathcal{A}$ de sistemas de coordenadas locales $x : U \to \mathbb{R}^m$ en M, cuyos domínios U cubren M. Los domínios U de los sistemas de coordenadas $x \in \mathcal{A}$ son llamados *vecindades coordenadas* de $\mathcal{A}$.

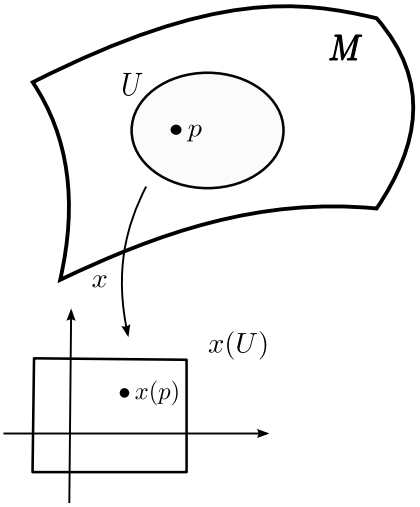

Figura 2.1: Carta local

Un espacio topológico M en el cual existe un atlas de dimensión m se llama una *variedad topológica* de dimensión m. En otras palabras, M es una variedad topológica de dimensión m si, y solamente si, cada punto de M posee una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^m$.

Dados los sistemas de coordenadas locales $x : U \to \mathbb{R}^m$ y $y : V \to \mathbb{R}^m$ en el espacio topológico M, tales que $U \cap V \neq \emptyset$, establece un homeomorfismo $\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ que es llamado *cambio de coordenadas*.

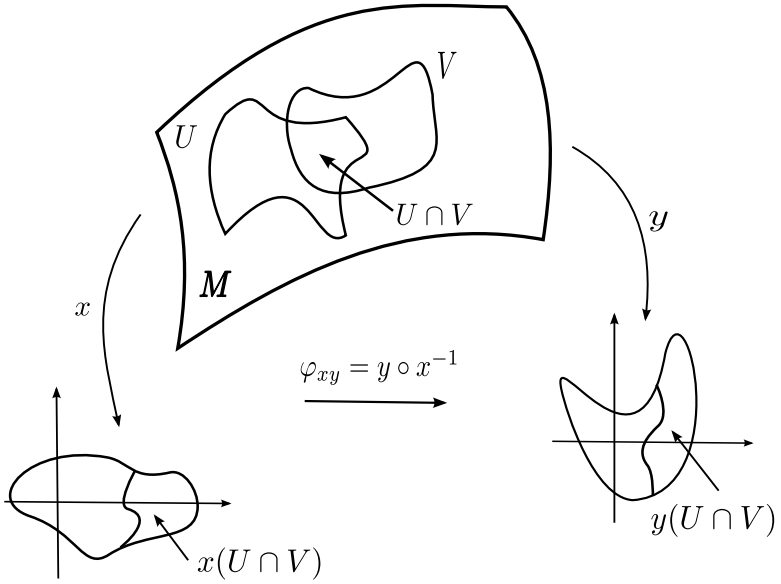

Figura 2.2: Cambio de coordenadas

Definición 2.23. Un atlas $\mathcal{A}$ sobre un espacio topológico M se dice *diferenciable* de clase C^k, si todos los cambios de coordenadas φ_{xy}, $x, y \in \mathcal{A}$ son aplicaciones de clase C^k.

Sea $\mathcal{A}$ un atlas de dimensión m y clase C^k en un espacio topológico M. Un sistema de coordenadas $z : W \to \mathbb{R}^m$ en M se dice *admisible relativamente* al atlas $\mathcal{A}$ si, para todo sistema de coordenadas locales $x : U \to \mathbb{R}^m$, perteneciente a $\mathcal{A}$, con $U \cap W \neq \emptyset$, los cambios de coordenadas φ_{xz} y φ_{zx} son de clase C^k, en otras palabras, $\mathcal{A} \cup \{z\}$ sigue siendo un atlas de clase C^k en M.

Un atlas $\mathcal{A}$, de dimensión m y clase C^k, sobre M, se dice *máximo* cuando contiene todos los sistemas de coordenadas que son admisibles en relación a $\mathcal{A}$. Todo atlas de clase C^k en M puede ser ampliado, de modo único, hasta un atlas máximo de clase C^k.

Definición 2.24. Una *variedad diferenciable*, de dimensión m y clase C^k es un par ordenado $(M, \mathcal{A})$ donde M es un espacio topológico de Hausdorff, con base enumerable y $\mathcal{A}$ un atlas máximo de dimensión m y clase C^k sobre M.

Sean M^m, N^n variedades diferenciables de clase C^r $(r \geq 1)$. Se dice que una aplicación $f : M \to N$ es *diferenciable* en $p \in M$, si existen sistemas de coordenadas $x : U \to \mathbb{R}^m$ en M, $y : V \to \mathbb{R}^n$ en N, con $p \in U$ y $f(U) \subset V$ tal que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \to y(V)$ es diferenciable en $x(p)$.

Decimos que $f : M \to N$ es de clase C^k $(k \leq r)$, si para cada $p \in M$ existen sistemas de coordenadas locales $x : U \to \mathbb{R}^m$ en M, $y : V \to \mathbb{R}^n$ en N, con $p \in U$ y $f(U) \subset V$ tales que $y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \to y(V)$ es de clase C^k.

Sea M una variedad de dimensión m y clase C^k. Sea $p \in M$, denotemos por $\mathcal{C}_p$ al conjunto de todos los caminos $\lambda : J \to M$ definido en el intervalo J, conteniendo el cero tal que $\lambda(0) = p$ y λ diferenciable en 0. Si $\lambda \in \mathcal{C}_p$ y $x : U \to \mathbb{R}^n$ es un sistema de coordenadas de M, con $p \in U$ y $\lambda(J) \subset U$, diremos que dos caminos λ, $\mu \in \mathcal{C}_p$ son equivalentes y escribiremos $\lambda \sim \mu$, si existe un sistema de coordenadas $x : U \to \mathbb{R}^m$ en M, con $p \in U$ tales que $x \circ \lambda : J \to \mathbb{R}^m$ y $x \circ \mu : I \to \mathbb{R}^m$ tienen el mismo vector velocidad en $t = 0$, es decir $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$.

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}_p$, el vector velocidad $[\lambda]$ de un camino $\lambda \in \mathcal{C}_p$ es por definición, la clase de equivalencia de λ, esto es

$$[\lambda] = \{\mu \in \mathcal{C}_p : \lambda \sim \mu\}$$

El conjunto cociente $\mathcal{C}_p/\sim$ será indicado por T_pM y será llamado el *espacio tangente* a la variedad M en el punto p. Podemos dotar al espacio T_pM una estructura natural de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, de la siguiente manera, cada sistema de coordenadas locales $x : U \to \mathbb{R}^m$ en M con $p \in U$ dá origen a una biyección

$$\begin{array}{rccl} \tilde{x}_p & : & T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & [\lambda] & \longmapsto & \tilde{x}_p([\lambda]) = (x \circ \lambda)'(0) \end{array}$$

Ahora daremos a T_pM una estructura de espacio vectorial, exigiendo que la biyección $\tilde{x}_p$ sea un isomorfismo. Así podemos definir las operaciones de suma y producto de un vector por un número real como

$$\begin{array}{rcl} [\lambda] + [\mu] & = & \tilde{x}_p^{-1}\left(\tilde{x}_p([\lambda]) + \tilde{x}_p([\mu])\right) \\ c[\lambda] & = & \tilde{x}_p^{-1}\left(c\tilde{x}([\lambda])\right) \end{array}$$

mas aún, estas operaciones no dependen del sistema de coordenadas x. Dado un sistema de coordenadas locales $x : U \to \mathbb{R}^m$ en M y $p \in U$, indicamos por $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1}(p), \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x^m}(p)\right\}$ la base de T_pM que es llevada por el isomorfismo $\tilde{x}_p : T_pM \to \mathbb{R}^m$ sobre la base canónica $\{e_1, \cdots, e_m\}$. El vector básico $\dfrac{\partial}{\partial x^i} \in T_pM$ es la clase de equivalencia de cualquier camino $\lambda \in \mathcal{C}_p$ tal que $(x \circ \lambda)'(0) = e_i$.

Sean M y N variedades diferenciables y $f : M \to N$ una aplicación diferenciable en $p \in M$. La derivada de f en el punto p es la transformación lineal $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ que asocia a cada $v = [\lambda] \in T_pM$ el elemento $df_p(v) = [f \circ \lambda] \in T_{f(p)}N$, que es el vector velocidad del camino $f \circ \lambda \in \mathcal{C}_{f(p)}$.

Definición 2.25. Sean M y N variedades diferenciables. Una aplicación $f : M \to N$ es un *difeomorfismo*, si es diferenciable, biyectiva y su inversa f^{-1} diferenciable. Decimos que f es un *difeomorfismo local* en $p \in M$, si existen abiertos $p \in U$ y $f(p) \in V$ tal que $f : U \to V$ es un difeomorfismo.

Una consecuencia del teorema de la función compuesta es que si $f : M \to N$ es un difeomorfismo, entonces $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es un isomorfismo para todo $p \in M$.

Teorema 2.26. *Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable y sea $p \in M$ tal que $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ es un isomorfismo, entonces f es un difeomorfismo local en p.*

Definición 2.27. Sean $f : M \to M$ y $g : N \to N$ funciones continuas en espacios topológicos compactos M y N. Decimos que f y g son *topológicamente equivalentes* o

topológicamente conjugados, si existe un homeomorfismo $h : M \to N$ tal que $h \circ f = g \circ h$, y llamamos h conjugación topológica entre f y g.

Para cada $n \geq 1$ consideremos la relación de equivalencia en $\mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \cdots, x_n) \sim (y_1, \cdots, y_n) \Leftrightarrow (x_1 - y_1, \cdots, x_n - y_n) \in \mathbb{Z}^n$$

LLamamos *toro* de dimensión n o simplemente $n - toro$ al espacio $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ de las clases de equivalencia de esta relación $\sim$. La operación

$$[(x_1, \cdots, x_n)] + [(y_n, \cdots, y_n)] = [(x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)]$$

hace que $\mathbb{T}^n$ sea un grupo abeliano.

Definición 2.28. Sea G un grupo y M un conjunto. Una acción de G en M es una aplicación $\theta : G \times M \to M$ tal que

i) $\theta(e, p) = p$

ii) $\theta(g_1, \theta(g_2, p)) = \theta(g_1.g_2, p)$

para todo $g_1, g_2 \in G$ y $p \in M$; donde $e \in G$ denota el elemento neutro. En este caso, decimos que el grupo G *actúa* en el conjunto M

Ejemplo 2.29. Tomando $(\mathbb{Z}^n, +)$ y $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$\begin{array}{rccc} \theta & : & \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & & (a, x) & \longmapsto & \theta(a, x) = a + x \end{array}$$

i) $\theta(0, x) = 0 + x = x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\theta(a, \theta(b, x)) = \theta(a, b + x) = (a + b) + x = \theta(a + b, x), \ \forall\, a, b \in \mathbb{Z}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.30. Sea G un grupo y M un espacio topológico. Una acción por trasformaciones continuas de G en M es una acción $\theta : G \times M \to M$ tal que, para todo $g \in G$, la biyección $\theta_g : M \to M$ es continua. Sea M una variedad diferenciable de clase C^k, decimos que θ es una acción por transformaciones de clase C^k, si la biyección θ_g es de clase C^k, para todo $g \in G$.

Ejemplo 2.31. Sea $a \in \mathbb{Z}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \theta_a \ : \ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \theta_a(x) = a + x \end{aligned}$$

es una función continua y biyectiva. Por tanto θ es una acción por tranformaciones continuas de $\mathbb{Z}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

La órbita de p por la acción de G, denotada por $G(p)$, es definida por

$$G(p) = \{g.p : g \in G\}$$

Definición 2.32. Sea G un grupo y M un espacio topológico. Una acción de G en M por transformaciones continuas es llamada *propiamente discontinua* si satisfacen las siguientes condiciones:

i) Para todo $p \in M$, existe un abierto $U \subset M$ conteniendo p tal que $gU \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G$, $g \neq e$.

ii) Para cualquier $p, q \in M$, con $q \notin G(p)$, existen abiertos $U, V \subset M$, con $p \in U$, $q \in V$ tal que $gU \cap V = \emptyset$, para todo $g \in G$.

donde $gU = \{g.p : p \in U\} = \theta_g(U)$. En este caso decimos que G actúa de modo propiamente discontinuo en M.

Ejemplo 2.33. Tomando $(\mathbb{Z}^n, +)$ y $\mathbb{R}^n$.

i) Sea $x \in \mathbb{R}^n$, entonces existe $B(x, 1/2) = U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $aU \cap U = \emptyset$ para todo $a \in \mathbb{Z}^n$, $a \neq 0$. En efecto, supongamos que $aU \cap U \neq \emptyset$ para algún $a \in \mathbb{Z}^n$ con $a \neq 0$ entonces, existe $z \in aU \cap U$ tales que $z = a + p$ y $z, p \in U$. Como $a = (a_1, \cdots, a_n) \neq 0$, existe $a_i \in \mathbb{Z}$ con $a_i \neq 0$, además $|a_i| \geq 1$. Luego

$$||z - x|| = ||a + p - x|| \geq ||a|| - ||x - p|| > ||a|| - \frac{1}{2} \geq |a_i| - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

lo cual es una contradicción.

ii) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \notin \mathbb{Z}^n(x)$; entonces $||x - y + \alpha|| > 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Definimos $U = B(x, \varepsilon/2)$, $V = B(y, \varepsilon/2)$ donde $\varepsilon = \text{mín}\{||x - y + \alpha|| : \alpha \in \mathbb{Z}^n\}$, entonces $aU \cap V = \emptyset$, para todo $a \in \mathbb{Z}^n$.

En efecto, supongamos que $aU \cap V \neq \emptyset$ para algún $a \in \mathbb{Z}^n$, entonces existe $z \in aU \cap V$ tal que $z = a + p$ con $p \in U$ y $z \in V$. Luego

$$||z - y|| = ||a + p - y + x - x|| \geq ||x - y + a|| - ||x - p|| > \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$$

Teorema 2.34. *Sea G un grupo propiamente discontinuo actuando en una variedad diferenciable M de dimensión n y clase C^k. Entonces, el cociente M/G admite una única estructura diferenciable cociente de clase C^k. Además, la aplicación cociente $\pi : M \to M/G$ es un difeomorfismo local de clase C^k.*

Demostración. Ver la demostración en (Lee, 2013). □

Por lo ya visto anteriormente, sabemos que $(\mathbb{Z}^n, +)$ actúa de modo propiamente discontinuo en la variedad diferenciable $\mathbb{R}^n$ de clase C^∞. Entonces, por el Teorema 2.34 se tiene que $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ admite una única estructura diferenciable cociente de clase C^∞, es decir, $\mathbb{T}^n$ es una variedad diferenciable de clase C^∞, además

$$\begin{array}{rccc} \pi & : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \\ & & x & \longmapsto & \pi(x) = [x] \end{array} \tag{2.1}$$

es un difeomorfismo local de clase C^∞.

Una *métrica Riemanniana* en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asocia a cada punto $p \in M$ un producto interno en el espacio tangente T_pM, esto es

$$\begin{array}{rccc} g_p & : & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (u, v) & \longmapsto & g_p(u, v) \end{array}$$

donde $g_p(u, v)$ es el producto interno de los vectores $u, v \in T_pM$, o simplemente $\langle u, v \rangle$. La norma del vector tangente $u \in T_pM$ es definida por $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Una variedad diferenciable donde está definida una métrica Riemanniana se llama una *variedad Riemanniana*; es decir, un par (M, g) donde g es una métrica Riemanniana en la variedad M.

Proposición 2.35. *Una variedad diferenciable M de clase C^∞, de Hausdorff y con base enumerable posee una métrica Riemanniana.*

En una variedad Riemaniana podemos definir la longitud de un camino $\alpha : [a, b] \to M$ de clase C^1 de la siguiente forma

$$\ell(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)|| dt; \ \alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}M$$

Un camino $\alpha : [a, b] \to M$ se dice *seccionalmente de clase* C^1, si α es continua y existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ tal que $\alpha/[t_i, t_{i+1}]$ es de clase C^1 para todo $i = 0, \cdots, m-1$. Podemos entonces definir la *distancia intrínseca* $d(p, q)$ entre dos puntos p, q de una variedad Riemanniana conexa de clase C^k como

$$d(p, q) = \text{ínf}\{\ell(\alpha) : \alpha \text{ seccionalmente } C^1 \text{ en } M \text{ que une } p \text{ y } q\}$$

Esta distancia d define en M una métrica, entonces (M, d) es un espacio métrico. Además, la topología en M definida por la distancia d coincide con la topología original de M.

2.2.1. Medida de Lebesgue

En esta parte vamos a generar la medida de Lebesgue en M, donde M es una variedad Riemanniana compacta de clase C^∞, el cual es consultado del libro (Mañé, 2012). Veamos primero la construcción de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

La medida de Lebesgue formaliza la noción de volumen de subconjuntos del espacio euclideano $\mathbb{R}^n$. Consideremos $X = [0, 1]$ y sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los subcojuntos de la forma $A = I_1 \cup \cdots \cup I_N$ donde $I_1, \cdots, I_N$ son intervalos disjuntos 2 a 2; es fácil probar que $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de X, además podemos definir la función

$$\begin{aligned} m_0 \ : \ \mathcal{A} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto m_0(A) = |I_1| + \cdots + |I_N| \end{aligned}$$

donde $|I_j|$ representa la longitud del intervalo I_j. Así m_0 es una función $\sigma-$ aditiva, notar que la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ generada por el álgebra $\mathcal{A}$ coincide con la $\sigma-$álgebra de Borel de X. Entonces por el Teorema 2.8 existe una única medida de probabilidad m en $\mathcal{B}$ que extiende m_0, llamamos m la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

Ahora definimos la medida de Lebesgue en el cubo $X = [0, 1]^n$ para cualquier $n \geq 1$. Llamamos rectángulo en X a todo subcojunto de la forma $R = I_1 \times \cdots \times I_n$ donde los I_j son intervalos en $[0, 1]$ y

$$m_0(R) = |I_1| \cdots |I_n|$$

también tomemos el álgebra $\mathcal{A}$ de los subconjuntos de $[0, 1]^n$ de la forma $A = R_1 \cup \cdots \cup R_N$, donde $R_1, \cdots, R_N$ son rectángulos disjuntos 2 a 2 y definimos

$$\begin{aligned} m_0 \ : \ \mathcal{A} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto m_0(A) = m_0(R_1) + \cdots + m_0(R_N) \end{aligned}$$

la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{A}$ coincide con la $\sigma-$álgebra de Borel de X. Haciendo uso del Teorema 2.8, existe una única medida de probabilidad m en $\mathcal{B}$ que extiende m_0, llamamos m la medida de Lebesgue en $[0,1]^n$. Finalmente, para definir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, descomponemos ese espacio en cubos de lado unitario

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k_1\in\mathbb{Z}} \cdots \bigcup_{k_n\in\mathbb{Z}} [k_1, k_1+1) \times \cdots \times [k_n, k_n+1)$$

cada cubo $[k_1, k_1+1) \times \cdots \times [k_n, k_n+1)$ puede ser identificado con $[0,1)^n$ por medio de la traslación

$$T_{k_1,\cdots,k_n}(x) = x - (k_1, \cdots, k_n)$$

que envía el punto $(k_1, \cdots, k_n)$ en el origen, esto nos permite definir una medida en C, dada por $m_{k_1,\cdots,k_n}(B) = m_0(T_{k_1,\cdots,k_n}(B))$, para todo conjunto medible $B \subset C$. Luego, dado cualquier conjunto medible $B \subset \mathbb{R}^n$ definimos

$$m(B) = \sum_{k_1\in\mathbb{Z}} \cdots \sum_{k_n\in\mathbb{Z}} m_{k_1,\cdots,k_n}\left((B \cap ([k_1, k_1+1) \times \cdots \times [k_n, k_n+1))\right)$$

el cual es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Observe que m no es una medida finita, pero si una medida $\sigma-$finita. Pasemos a construir la medida de Lebesgue en una variedad diferenciable M.

Sea M una variedad diferenciable $n-$dimensional de clase C^∞. Una forma de volumen en M es una función ω que asocia a cada $p \in M$ una aplicación $n-$lineal alternada no degenerada $\omega_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}$. La forma ω se dice que es de clase C^r, si ω_p depende diferencialmente de p, en el siguiente sentido, si $\phi : U \to M$ es una carta, entonces la función

$$\begin{aligned} \psi \ : \ U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \psi(p) = \omega_{\phi(p)}(d_p\phi(e_1), \cdots, d_p\phi(e_n)) \end{aligned}$$

es de clase C^r, donde $\{e_1, \cdots, e_n\}$ es la base canónica en $\mathbb{R}^n$. Si ω es una forma de volumen de clase C^r en M, asociamos una medida de Borel μ_ω. Sea $A \subset M$ un conjunto de Borel. Tomando cartas $\phi_j : U_j \to M$, $j \geq 1$ tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \phi_j(U_j)$$

descompone A en conjuntos de Borel disjuntos $A_1, A_2, \cdots$ donde $A_j \subset \phi_j(U_j)$. Definimos

$$\mu_\omega(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\phi_j^{-1}(A_j)} \omega_{\phi_j(x)}(d_x\phi_j(e_1), \cdots, d_x\phi_j(e_n))dx$$

esta definición no depende de las cartas o la descomposición. Todas las medidas μ_ω asi obtenidas son equivalentes.

Si M es una variedad diferenciable de clase C^∞ dotada de una métrica Riemanniana, definimos la forma de volumen asociada a esta métrica $\omega_x(u_1, \cdots, u_n) = 1$, para todo $x \in M$ y cualquier base ortonormal positivamente orientada $\{u_1, \cdots, u_n\}$ de T_xM. Esta definición es consistente y determina de manera única ω.

Si E_1, E_2 son espacios vectoriales $n-$dimensionales , ω_2 $n-$forma alternada en E_2 y $L : E_1 \to E_2$ una aplicación lineal. Definimos una $n-$forma alternada $L^*\omega_2$ en E_1 por

$$\begin{aligned} L^*\omega_2 \ : \ E_1 \times \cdots \times E_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_1, \cdots, u_n) &\longmapsto L^*\omega_2(u_1, \cdots, u_n) = \omega_2(L(u_1), \cdots, L(u_n)) \end{aligned}$$

Si ω_1 es una $n-$forma alternada en E_1, definimos la *determinante de* L con respecto a ω_1 y ω_2 por

$$L^*\omega_2 = (detL)\omega_1$$

Si $f : M \to M$ es de clase C^1 y ω la forma de volumen en M, denotamos por $det_\omega(d_xf)$ la determinante de $d_xf : T_xM \to T_{f(x)}M$ con respecto a las formas ω_x y $\omega_{f(x)}$. Definimos

$$(f^*\omega)_x = (d_xf)^*\omega_{f(x)} = det_\omega(d_xf)\omega_x$$

Si f es un difeomorfismo, entonces

$$\mu_\omega(f(A)) = \mu_{f^*\omega}(A)$$

para todo conjunto de Borel $A \subset M$. En efecto, sea $A \subset M$ un conjunto de Borel, entonces

$$\begin{aligned} \mu_{f^*\omega}(A) &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\phi_j^{-1}(A_j)} (f^*\omega)_{\phi_j(x)}(d_x\phi_j(e_1), \cdots, d_x\phi_j(e_n))dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\phi_j^{-1}(A_j)} (d_{\phi_j(x)}f)^*\omega_{f(\phi_j(x))}(d_x\phi_j(e_1), \cdots, d_x\phi_j(e_n))dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{(f\circ\phi_j)^{-1}(f(A_j))} \omega_{(f\circ\phi_j)(x)}(d_x(f\circ\phi_j)(e_1), \cdots, d_x(f\circ\phi_j)(e_n))dx \\ &= \mu_\omega(f(A)) \end{aligned}$$

De aquí, μ_ω es $f-$invariante, si y solo si $|det_\omega(d_xf)| = 1$, para todo $x \in M$. Cuando $f^*\omega = \omega$ se dice que ω es $f-$invariante o que f preserva ω.

Hemos visto como se genera la medida μ_ω de Lebesgue en M esto nos ayudará para demostrar nuestro resultado principal. Cuando no exista confusión denotaremos la medida de Lebesgue por m.

Ejemplo 2.36. Para el caso $M = \mathbb{T}^n$ del toro $n-$dimensional, definimos

$$\begin{aligned} \phi \ : \quad [0,1]^n \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{T}^n \\ (x_1, \cdots, x_n) \ &\longmapsto \ \phi(x_1, \cdots, x_n) = [(x_1, \cdots, x_n)] \end{aligned}$$

la cuál es sobreyectiva y nos permite definir la medida de Lebesgue μ en $\mathbb{T}^n$ por $\mu(B) = m(\phi^{-1}(B))$ para todo $B \subset \mathbb{T}^n$ tal que $\phi^{-1}(B)$ es medible, donde m es la medida volumen en $\mathbb{R}^n$.

2.2.2. Foliaciones

Aquí daremos un alcance de la teoría de las foliaciones que hemos consultado en su mayoría de (Camacho y Neto, 2013). Una foliación de dimensión p de una variedad M^n es, a groso modo, una descomposición de M en subvariedades conexas de dimensión p llamadas *Hojas*, los cuales se acumulan localmente como los subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ con segunda coordenada constante.

Definición 2.37. Sea M una variedad de dimensión n y clase C^∞. Una foliación de clase C^r y dimensión p en M, es un *atlas* máximo $\mathcal{F}$ de clase C^r en M con las siguientes propiedades:

a) Si $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ entonces $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, donde U_1 y U_2 son discos abiertos de $\mathbb{R}^p$ y de $\mathbb{R}^{n-p}$ respectivamente.

b) Si (U, φ) y $(U, \psi) \in \mathcal{F}$ son tales que $U \cap V \neq \emptyset$ entonces el cambio de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ es de la forma $\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))$. Decimos que M está foliado por $\mathcal{F}$ o que $\mathcal{F}$ es una estructura foliada de dimensión p y clase C^r en M.

Sea $\mathcal{F}$ una foliación de clase C^r y dimensión p de M. Consideremos una carta local $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Los conjuntos de la forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ son llamados *placas* de U o *placas* de $\mathcal{F}$.

Fijando $c \in U_2$, la aplicación $f = \varphi^{-1} \mid_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \to U$ es una imersión de clase C^r, por tanto, las placas son subvariedades conexas de dimensión p y clase C^r, además, si α y β son placas de U entonces $\alpha \cap \beta = \emptyset$ o $\alpha = \beta$.

Un camino de placas de $\mathcal{F}$ es una secuencia $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \cdots, k-1\}$. Como M es cubierto por placas de $\mathcal{F}$, podemos

definir en M la siguiente relación de equivalencia: $p \sim q$ si existe un camino de placas $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ con $p \in \alpha_1$ y $q \in \alpha_k$. Las clases de equivalencia de la relación "$\sim$"son llamadas *hojas* de $\mathcal{F}$.

De la definición se sigue que, toda hoja de $\mathcal{F}$ es un subconjunto de M conexo por caminos. Otro dato importante es que toda hoja L de $\mathcal{F}$ posee una estructura de variedad C^r de dimensión p inmersa en M naturalmente inducida por las cartas de $\mathcal{F}$.

Definición 2.38. Sea $\mathcal{N}$ una subvariedad de M. Decimos que $\mathcal{N}$ es transversal a $\mathcal{F}$ cuando $\mathcal{N}$ es transversal a todas las hojas de $\mathcal{F}$ que ella encuentre. Cuando $dim(\mathcal{N}) + dim(\mathcal{F}) = dim(M)$, decimos que $\mathcal{N}$ es una sección transversal a $\mathcal{F}$.

Dado $p \in M$ siempre existe una sección transversal a $\mathcal{F}$ pasando por p. En efecto, basta considerar una carta local $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ con $p \in U$, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, $\varphi(p) = (c_1, c_2)$ y tomando $\mathcal{N} = \varphi^{-1}(\{c_1\} \times U_2)$. Como $\{c_1\} \times U_2$ es transversal a las placas $U_1 \times \{c\}$, $c \in U_2$ entonces $\mathcal{N}$ es sección transversal a $\mathcal{F}$.

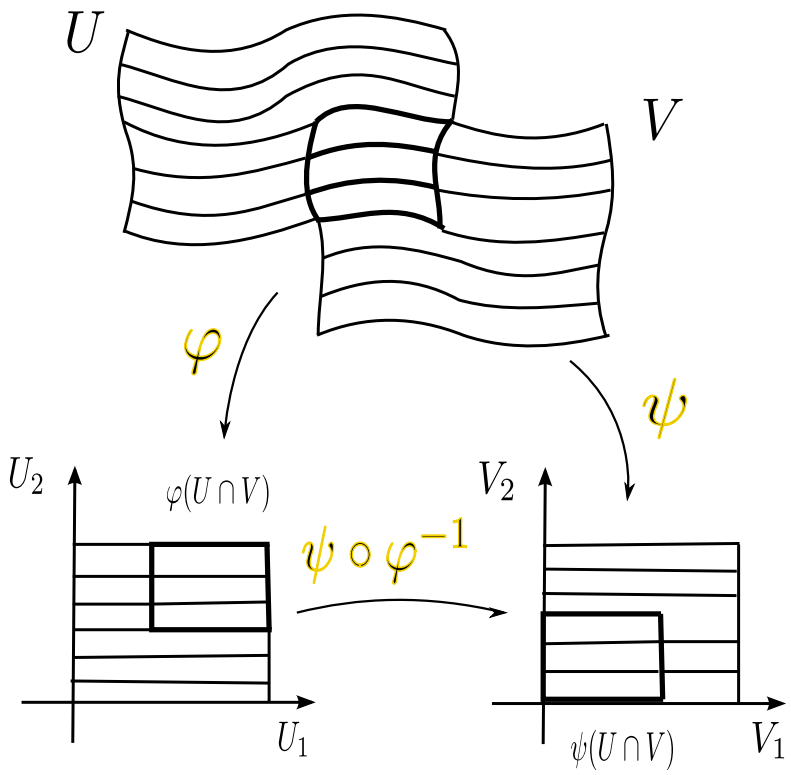

Figura 2.3: Foliación $\mathcal{F}$

2.3. Teoría ergódica

Hemos visto anteriormente como se genera la medida de Lebesgue a partir de una variedad Riemanniana de clase C^∞, ahora necesitamos saber la relación que puede tener una medida en general con un sistema dinámico f. Para las siguientes definiciones y resultados hemos consultado en su mayoría (Oliveira y Viana, 2014), (Barreira, 2012) y (Aoki y Hiraide, 1994).

2.3.1. Medida invariante

Definición 2.39. Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $f : M \to M$ una función medible. Decimos que μ es invariante por f si

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \text{ para todo conjunto medible } E \subset M.$$

En este caso se dice también que f preserva la medida μ.

Ejemplo 2.40. Definimos en $\mathbb{R}$ una relación de equivalencia $\sim$:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

Representemos por $[x]$ la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R}$ y denotemos por $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ el espacio de todas las clases de equivalencia. Este espacio será llamado *círculo unitario* y será denotado por $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, pues $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ puede ser identificado de manera natural con el círculo unitario en el plano complejo por la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & S^1 \\ & & [x] & \longmapsto & \phi([x]) = e^{2\pi x i} \end{array}$$

Dado $\theta \in \mathbb{R}$, definamos

$$\begin{array}{rccc} R_\theta & : & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ & & [x] & \longmapsto & R_\theta([x]) = [x] + [\theta] \end{array}$$

R_θ es llamado rotación de ángulo θ. Por definición se tiene que R_0 es la identidad y $R_\theta \circ R_\tau = R_{\theta+\tau}$ para todo $\theta, \tau \in \mathbb{R}$, además, toda rotación es invertible cuya inversa es $R_{-\theta}$. Sea $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ la proyección canónica definida por $\pi(x) = [x]$, podemos dotar a S^1 de una $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$, esto es, $\mathcal{B} = \{E \subset S^1 : \pi^{-1}(E) \subset \mathbb{R} \text{ es medible}\}$. Sea m la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, definimos la medida de Lebesgue μ en S^1

$$\mu(E) = m\left(\pi^{-1}(E) \cap [k, k+1)\right), \tag{2.2}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$. Desde que $\pi^{-1}(E) \cap [k, k+1) = (\pi^{-1}(E) \cap [0,1)) + k$ y la medida m es invariante por traslaciones, se tiene

$$m\left(\pi^{-1}(E) \cap [k, k+1)\right) = m\left(\pi^{-1}(E) \cap [0,1)\right)$$

entonces (2.2) no depende de k.

Afirmación 2.41. La medida μ definida en (2.2) es $R_\theta-$invariante

Demostración. Sea $E \subset S^1$ un conjunto medible, usando la definición de R_θ se tiene que

$$\pi^{-1}\left(R_\theta^{-1}(E)\right) = \pi^{-1}(E) - \theta. \tag{2.3}$$

Sea k la parte entera de θ, como $(\pi^{-1}(E) - \theta) \cap [0,1) = (\pi^{-1}(E) \cap [\theta, \theta+1)) - \theta$ y la medida m es invariante por traslaciones, entonces

$$\begin{aligned} &m\left((\pi^{-1}(E) - \theta) \cap [0,1)\right) = m\left(\pi^{-1}(E) \cap [\theta, \theta+1)\right) \\ &= m\left(\pi^{-1}(E) \cap [\theta, k+1)\right) + m\left(\pi^{-1}(E) \cap [k+1, \theta+1)\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

pero

$$\pi^{-1}(E) \cap [k+1, \theta+1) = \left(\pi^{-1}(E) \cap [k, \theta)\right) + 1$$

Entonces, por (2.4)

$$m\left(\pi^{-1}(E) \cap [\theta, k+1)\right) + m\left(\pi^{-1}(E) \cap [k, \theta)\right) = m\left(\pi^{-1}(E) \cap [k, k+1)\right)$$

Luego, por (2.3), obtenemos

$$\begin{aligned} \mu\left(R_\theta^{-1}(E)\right) &= m\left(\pi^{-1}\left(R_\theta^{-1}(E)\right) \cap [k, k+1)\right) \\ &= m\left((\pi^{-1}(E) - \theta) \cap [0,1)\right) \\ &= m\left(\pi^{-1}(E) \cap [k, k+1)\right) = \mu(E) \end{aligned}$$

□

Un conjunto medible $A \subset M$ tal que $f^{-1}(A) = A$ es llamado *conjunto invariante.*

Definición 2.42. Sea $f : M \to M$ una función medible que preserva una probabilidad μ en M. Decimos que una función medible $\psi : M \to \mathbb{R}$ es *invariante*, si $\psi \circ f = \psi$ en $\mu - ctp.$

Lema 2.43. *Sea $f : M \to M$ una función medible y μ una medida finita en M. Suponga que existe un álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos medibles de M tal que $\mathcal{A}$ genera la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$ de M y $\mu(f^{-1}(E)) = \mu(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$, entonces cumple para todo conjunto $E \in \mathcal{B}$, esto es, la medida μ es invariante por f*

Lema 2.44. *Si $\phi : M \to \mathbb{R}$ es una función medible y no constante en $\mu - ctp$, entonces existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y conjuntos medibles*

$$E = \{x \in M : \phi(x) > \alpha\} \text{ y } F = \{x \in M : \phi(x) \leq \alpha\}$$

con medida positiva, es decir $\mu(E) > 0$ y $\mu(F) > 0$.

Demostración. Sea ϕ una función no constante en $\mu - ctp$, entonces existen $N \subset M$ con $\mu(N) = 0$ y $x_1, x_2 \in M \backslash N$ tal que $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$. Tomando $\alpha = \phi(x_1)$, definimos

$$E = \{x \in M : \phi(x) > \alpha\} \text{ y } F = \{x \in M : \phi(x) \leq \alpha\}$$

Supongamos que, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ los conjuntos medibles $E_\alpha = \{x \in M : \phi(x) > \alpha\}$ o $F_\alpha = \{x \in M : \phi(x) \leq \alpha\}$ no tienen medida positiva.
Veamos el caso que $\mu(E_\alpha) = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Tenemos

$$M = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} E_\alpha$$

$$\Rightarrow \mu(M) = \mu\left(\bigcup_{\alpha \in \mathbb{Q}} E_\alpha\right) \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{Q}} \mu(E_\alpha) = 0 \Rightarrow \mu(M) = 0 \text{ lo cual es una contradicción.}$$

Análogamente el caso $\mu(F_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Concluímos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $E_\alpha = E$ y $F_\alpha = F$ tienen medida positiva.

□

Definición 2.45. Sea (M, τ) un espacio topológico y sea μ una medida en el $\sigma-$ algebra de Borel de M. El *soporte supp*(μ) de la medida μ es el conjunto formado por los puntos $x \in M$ tal que $\mu(V) > 0$ para cualquier vecindad de x.

2.3.2. Shift de Bernoulli

Sea $(X, \mathcal{C}, \nu)$ un espacio de probabilidad, donde $X = \{0, 1, 2, \cdots, m\}$ es un conjunto finito. Consideremos el espacio producto $\Sigma = X^{\mathbb{N}} = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in X\}$, el $\sigma-$álgebra producto $\mathcal{B} = \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ y la medida producto $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$ llamada *medida de Bernoulli*. $\mathcal{B}$ es la $\sigma-$álgebra generada por los cilindros

$$[m; A_m, \cdots A_n] = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_i \in A_i, \text{ para } m \leq i \leq n\}$$

donde $m \leq n$ y $A_i \in \mathcal{C}$, además

$$\mu([m; A_m, \cdots, A_n]) = \prod_{i=m}^{n} \nu(A_i)$$

Introduciremos una dinámica (σ, μ) llamada *shift de Bernoulli* definida por

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : & \sum & \longrightarrow & \sum \\ & & (x_n) & \longmapsto & \sigma((x_n)_n) = (x_{n+1})_n \end{array}$$

es decir $\sigma((x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$.

Afirmación 2.46. La dinámica σ es una función medible

Demostración. Sea $[m; A_m, \cdots, A_n] \subset \Sigma$ y $(x_i) \in \sigma^{-1}([m; A_m, \cdots, A_n])$ si y solo si

$\sigma((x_i)) = (x_{i+1}) \in [m; A_m, \cdots, A_n] \Leftrightarrow x_{i+1} \in A_i$, $m \leq i \leq n \Leftrightarrow (x_i) \in [m+1; A_m, \cdots, A_n]$

Luego $\sigma^{-1}([m; A_m, \cdots, A_n]) = [m+1; A_m, \cdots, A_n]$. Definimos

$$\mathcal{C}_0 = \left\{C \subset \Sigma : \sigma^{-1}(C) \in \mathcal{B}\right\}$$

Ver que, $\mathcal{C}_0$ es un $\sigma-$álgebra que contiene todos los cilindros y como $\mathcal{B}$ es el menor $\sigma-$álgebra que contiene dichos cilindros, entonces $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}_0$. Por tanto σ es una función medible. □

Afirmación 2.47. La medida de Bernoulli μ es $\sigma-$ invariante.

Demostración. Por la Afirmación 2.46, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \mu(\sigma^{-1}([m; A_m, \cdots, A_n])) & = & \mu([m+1; A_m, \cdots, A_n]) \\ & = & \nu(A_m) \cdots \nu(A_n) \\ & = & \mu([m; A_m, \cdots, A_n]) \end{array}$$

para todo $[m; A_m, \cdots, A_n]$. Siendo $\mathcal{A}$ la familia de las uniones finitas de cilindros disjuntos dos a dos, un álgebra que genera la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}$, entonces usando el Lema 2.43 se tiene que la medida μ es invariante por σ. □

Hemos visto algunos ejemplos de medidas invariantes, puesto que es una de las herramientas que necesitamos para nuestro trabajo, y en ese sentido sería conveniente saber en un plano mas general, en que casos se tiene la existencia de tales medidas. En el año 1945 el matemático y físico alemán Carl Friedrich Gauss observó que una cierta función en el intervalo que tiene un papel importante en la teoría de los números, admite una medida invariante que es equivalente a la medida de Lebesgue (Ver figura 2.4).

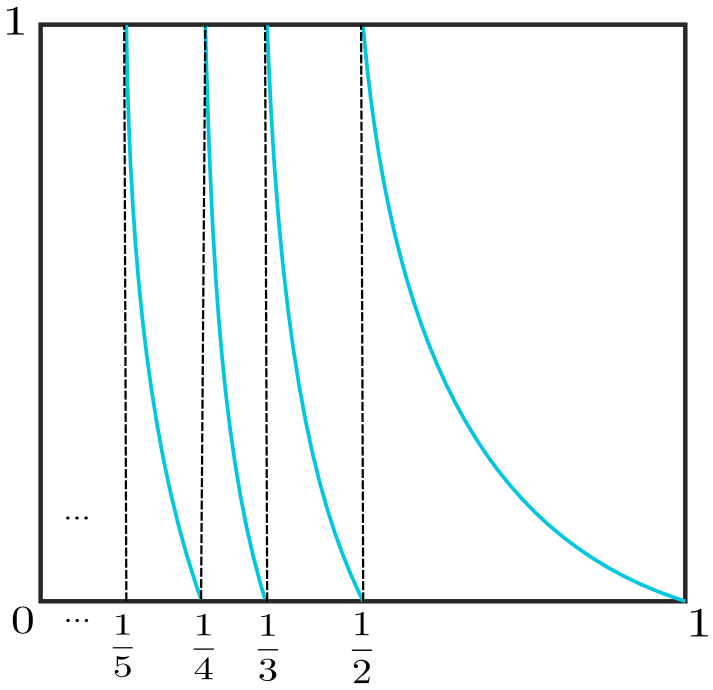

Figura 2.4: Función de Gauss $G(x) = \dfrac{1}{x} - \left[\dfrac{1}{x}\right],\ G(0) = 0$

Teorema 2.48 (Existencia de medidas invariantes)**.** *Sea $f : M \to M$ una transformación continua en un espacio métrico compacto. Entonces existe por lo menos una medida μ de probabilidad en M que es invariante por f.*

Teorema 2.49 (Recurrencia de Poincaré)**.** *Sea $f : M \to M$ una función medible y μ una medida finita invariante por f. Sea $E \subset M$ un conjunto medible con $\mu(E) > 0$. Entonces, para $\mu - ctp$ en E existen infinitos valores de n para los cuales $f^n(x)$ también está en E.*

Sea $E \subset M$ un conjunto medible con medida positiva y $x \in M$. El conjunto de los iterados de x que visitan E es

$$P = \left\{ i \geq 0 : f^i(x) \in E \right\}$$

El Teorema 2.49 nos indica que en $\mu - ctp$ en E, el conjunto P es infinito. Llamamos *tiempo medio de visita* de x a E al valor de

$$\tau(E, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \# \left\{ 0 \leq i < n : f^i(x) \in E \right\} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_E(f^i(x)) \tag{2.5}$$

Teorema 2.50 (*Teorema ergódico de Birkhoff*)**.** *Sea $f : M \to M$ una función medible y μ una medida finita f- invariante en M. Si $\varphi \in L^1(M, \mu)$ entonces*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$$

existe en $\mu - ctp$. Además

i) $\widetilde{\varphi}$ es f- invariante en $\mu - ctp$.

ii) $\widetilde{\varphi} \in L^1(M, \mu)$ y

$$\int_M \widetilde{\varphi}(x) d\mu = \int_M \varphi(x) d\mu$$

La función $\widetilde{\varphi}$ es llamado *media temporal*. El teorema ergódico de Birkhoff nos garantiza que (2.5) existe en $\mu - ctp$ en M.

Sea $f : M \to M$ una función biyectiva y $\varphi \in C^0(M, \mathbb{R})$, definimos

$$\varphi^+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \quad y \quad \varphi^-(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{-k}(x))$$

2.3.3. Medidas ergódicas

Definición 2.51. Sea $f : M \to M$ una función medible. Decimos que una medida invariante μ es *ergódica*, si $A \subset M$ es invariante en $\mu - ctp$ entonces $\mu(A) = 0$ o $\mu(A^c) = 0$.

Proposición 2.52. *Todo shift de Bernoulli (σ, μ) es ergódico*

Demostración. Ver demostración en (Oliveira y Viana, 2014). □

Ejemplo 2.53. Sea X un conjunto y consideremos la $\sigma-$álgebra $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ conjunto de partes de X. Dado cualquier $p \in X$, consideremos la función $\delta_p : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ definida por

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad p \in A \\ 0, & \text{si} \quad p \notin A \end{cases}$$

Veamos que δ_p es una medida. En efecto, es fácil ver que $\delta_p(\emptyset) = 0$, ahora tomemos $B_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dos a dos, por definición de δ_p obtenemos

$$\delta_p\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_p(B_j)$$

Esta medida δ_p es llamada *medida de Dirac* en el punto p. Sea $(X, \mathcal{B})$ un espacio medible y $f : X \to X$ una función medible. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \mu_p & : & \mathcal{B} & \longrightarrow & [0, +\infty] \\ & & B & \longmapsto & \mu_p(B) = \dfrac{1}{k}\left(\delta_p(B) + \delta_{f(p)}(B) + \cdots + \delta_{f^{k-1}(p)}(B)\right) \end{array} \tag{2.6}$$

donde $p \in M$ es un punto periódico de periodo k.

Afirmación 2.54. μ_p es una medida.

Demostración. i) $\mu_p(\emptyset) = \dfrac{1}{k}\left(\delta_p(\emptyset) + \delta_{f(p)}(\emptyset) + \cdots + \delta_{f^{k-1}(p)}(\emptyset)\right) = 0.$

ii) Sea $B_j \in \mathcal{B}$ disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu_p\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \frac{1}{k}\left(\delta_p\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) + \delta_{f(p)}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) + \cdots + \delta_{f^{k-1}(p)}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right)\right)$$

como δ_p es una medida, obtenemos

$$\mu_p\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}\left(\delta_p(B_j) + \delta_{f(p)}(B_j) + \cdots + \delta_{f^{k-1}(p)}(B_j)\right)\right] = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_p(B_j)$$

□

Afirmación 2.55. μ_p es $f-$invariante

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}$, entonces

$$\mu_p\left(f^{-1}(B)\right) = \frac{1}{k}\left(\delta_p(f^{-1}(B)) + \delta_{f(p)}(f^{-1}(B)) + \cdots + \delta_{f^{k-1}(p)}(f^{-1}(B))\right) \tag{2.7}$$

como $p \in M$ es periódico de periodo k, se tiene que $\delta_{f^{k-1}(p)}(f^{-1}(B)) = \delta_{f^k(p)}(B) = \delta_p(B)$,

$$\delta_{f^{k-2}(p)}((f^{-1}(B)) = \delta_{f^{k-1}(p)}(B),\ \cdots,\ \delta_{f(p)}(f^{-1}(B)) = \delta_{f^2(p)}(B),\ \delta_p(f^{-1}(B)) = \delta_{f(p)}(B)$$

luego por (2.7), obtenemos

$$\mu_p\left(f^{-1}(B)\right) = \frac{1}{k}\left(\delta_p(B) + \delta_{f(p)}(B) + \cdots + \delta_{f^{k-1}(p)}(B)\right) = \mu_p(B)$$

□

Afirmación 2.56. μ_p es ergódica.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{B}$ un conjunto $f-$invariante en $\mu_p - ctp$, entonces existe $N \subset X$ con $\mu_p(N) = 0$ tal que $f^{-1}(A) = A$ en $X - N$. Como $p \in X$, entonces $p \in A$ o $p \in A^c$.

i) Si $p \in A$ entonces $f(p) \in A, \cdots, f^{k-1}(p) \in A$, pues $p \notin N$. Por (2.6)

$$\mu_p(A) = \frac{1}{k}\left(\delta_p(A) + \delta_{f(p)}(A) \cdots + \delta_{f^{k-1}(p)}(A)\right) = 1$$

ii) Si $p \in A^c$, entonces $f^j(p) \notin A$ para todo $0 < j < k$. En efecto, supongamos que existe algún $0 < j < k$ tal que $f^j(p) \in A$. Como p es periódico de periodo k, entonces $f^{k-j}(f^j(p)) = f^k(p) = p \in A$ lo cual es una contradicción. Luego, por (2.6)

$$\mu_p(A) = \frac{1}{k}\left(\delta_p(A) + \delta_{f(p)}(A) \cdots + \delta_{f^{k-1}(p)}(A)\right) = 0$$

□

Proposición 2.57. *Sea $f : M \to M$ una función medible y μ una medida finita $f-$ invariante. Entonces μ es ergódica si y solo si toda función $\phi : M \to \mathbb{R}$ integrable e invariante en $\mu - ctp$, es constante en $\mu - ctp$.*

Demostración. Supongamos que μ es ergódica. Sean ϕ una función integrable e invariante en $\mu - ctp$ y $k \in \mathbb{R}$. Definimos

$$I_k = \{x \in M : \phi(x) \leq k\} = \phi^{-1}((-\infty, k])$$

Desde que ϕ es invariante en $\mu - ctp$ y μ es ergódica, entonces $\mu(I_k) = 0$ o $\mu(I_k^c) = 0$. Ahora definamos la siguiente función

$$\begin{array}{rccc} p & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & k & \longmapsto & p(k) = \mu(I_k). \end{array}$$

Afirmación 2.58. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(I_k) = 0$, si $k < \alpha$ y $\mu(I_k^c) = 0$, si $\alpha \leq k$.

Demostración. Supongamos que $\mu(I_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{R}$, entonces

$$M = \bigcup_{k \in \mathbb{Q}} I_k \Rightarrow \mu(M) = 0$$

lo cual es una contradicción, luego existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(I_\beta) = 1$. Como p es creciente podemos definir

$$\alpha = \text{ínf}\,\{k \in \mathbb{R} : \mu(I_k) = 1\}$$

Si $k < \alpha$, entonces $I_k \subset I_\alpha \Rightarrow \mu(I_k) \leq \mu(I_\alpha)$, de aquí $\mu(I_k) = 0$. Si $\alpha \leq k$, entonces $I_\alpha \subset I_k \Rightarrow \mu(I_\alpha) \leq \mu(I_k)$, de aquí $\mu(I_k) = 1 \Rightarrow \mu(I_k^c) = 0$. Análogamente, si suponemos que $\mu(I_k) = 1$ para todo $k \in \mathbb{R}$. □

Por la Afirmación 2.58 definimos

$$E = \bigcup_{k<\alpha} I_k \quad y \quad F = \bigcup_{\alpha \leq k} I_k^c$$

Si $x \in M \backslash (E \cup F)$, entonces $x \in E^c$ y $x \in F^c$ esto es, $\phi(x) > k$ para todo $k < \alpha$ y $\phi(x) \leq k$ para todo $\alpha \leq k$. Luego

$$\alpha - \frac{1}{n} < \phi(x) \leq \alpha\,, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \phi(x) = \alpha$$

Por lo tanto ϕ es constante en $\mu - ctp$. Recíprocamente, supongamos que toda función $\phi : M \to \mathbb{R}$ integrable e invariante en $\mu - ctp$, es constante en $\mu - ctp$. Sea $A \subset M$ un subconjunto invariante en $\mu - ctp$. Por el Teorema 2.50 obtenemos

$$\tau(A, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(f^k(x)) \tag{2.8}$$

existe en $\mu - ctp$. Además $\tau(A, .)$ es integrable e invariante en $\mu - ctp$, entonces por la hipótesis tenemos que $\tau(A, .)$ es constante en $\mu - ctp$. Luego por (ii) del Teorema 2.50 se tiene que

$$\int_M \tau(A, x) d\mu = \int_M \chi_A(x) d\mu \Rightarrow \tau(A, x) = \frac{\mu(A)}{\mu(M)} \ en\ \mu - ctp \tag{2.9}$$

Por otro lado, como A es invariante en $\mu - ctp$ y por (2.8) se tiene que $\tau(A, x) = 1$, si $x \in A \cap (M \backslash N)$ o $\tau(A, x) = 0$, si $x \in A^c \cap (M \backslash N)$ donde $N \subset M$ con $\mu(N) = 0$. Luego, por (2.9) tenemos que

$$\mu(A) = 0 \ o\ \mu(A) = \mu(M) \Rightarrow \mu(A) = 0 \ o\ \mu(A^c) = 0$$

□

Proposición 2.59. *Sea μ una medida de probabilidad invariante de una función medible $f : M \to M$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) Para todo conjunto medible $B \subset M$, se tiene $\tau(B, x) = \mu(B)$ para $\mu - ctp$

b) Para todo conjunto medible $B \subset M$ la función $\tau(B, .)$ es constante un $\mu - ctp$.

c) Para toda función integrable $\varphi : M \to \mathbb{R}$, se tiene $\widetilde{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu$ para $\mu - ctp$.

d) Para toda función integrable $\varphi : M \to \mathbb{R}$ la media temporal $\widetilde{\varphi} : M \to \mathbb{R}$ es constante en $\mu - ctp$.

e) Para toda función integrable invariante $\psi : M \to \mathbb{R}$, se tiene $\psi(x) = \int \psi d\mu$ en $\mu - ctp$.

f) Toda función integrable invariante $\psi : M \to \mathbb{R}$ es constante en $\mu - ctp$.

g) Para todo subconjunto invariante A, se tiene $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

Probaremos a continuación la equivalencia entre (c) y (g), ya que nos servirá para demostrar futuros resultados, las demás equivalencias pueden ver su demostración en (Oliveira y Viana, 2014).

Demostración. Sea A un subconjunto invariante, entonces en $\mu - ctp$ se cumple

$$\tau(A, x) = \int \chi_A d\mu = \mu(A)$$

Por el Teorema 2.50, tenemos

$$\tau(A, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x))$$

existe en $\mu - ctp$. Como A es invariante, entonces $\tau(A, x) = 1$ en $\mu - ctp$ en A o $\tau(A, x) = 0$ en $\mu - ctp$ en A^c, así $\mu(A) = 1$ o $\mu(A) = 0$.
Recíprocamente, supongamos que μ es ergódica. Sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una función integrable, por el Teorema 2.50 la función $\widetilde{\varphi} \in L^1(M, \mu)$ es $f - invariante$ en $\mu - ctp$, además

$$\int_M \widetilde{\varphi} = \int_M \varphi d\mu$$

Usando la Proposición 2.57 se tiene que $\widetilde{\varphi}$ es constante en $\mu - ctp$. Luego

$$\widetilde{\varphi}(x) = c \Rightarrow \int_M \widetilde{\varphi} = c\mu(M)$$

Como μ es una medida de probabilidad, entonces $\widetilde{\varphi} = \int_M \widetilde{\varphi} = \int_M \varphi$ en $\mu - ctp$. □

A continuación veremos otra caracterización para mostrar ergodicidad usando el operador $U_f(\varphi) = \varphi \circ f$.

Proposición 2.60. *Sea μ una medida de probabilidad invariante de una función medible $f : M \to M$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) (f, μ) es ergódica.

b) Para cualquiere par de conjuntos medibles A y B se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mu(f^{-i}(A)\cap B)=\mu(A).\mu(B)$$

c) Para cualquier par de funciones $\varphi\in L^p(\mu)$ y $\psi\in L^q(\mu)$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int(U_f^i(\varphi))\psi d\mu=\int\varphi d\mu\int\psi d\mu$$

Corolário 2.61. *Sea $f:M\to M$ una función medible y μ una medida de probabilidad invariante, entonces μ es ergódica si y solo si, existe $p\in[1,+\infty]$ tal que toda función invariante $\varphi\in L^p(\mu)$ es constante en $\mu-ctp$.*

Demostración. Supongamos que μ es una medida ergódica. Sean $\varphi\in L^p(\mu)$ $f-$invariante y $\psi\equiv 1\in L^q(\mu)$ con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces por (c) de la Proposición 2.60 obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int\varphi.\psi d\mu=\int\varphi d\mu \tag{2.10}$$

Por la desigualdad de Holder $\varphi.\psi\in L^1(\mu)$, y usando la Proposición 2.59 se tiene que $\varphi.\psi$ es constante en $\mu-ctp$, además $\varphi=\widetilde{\varphi}=\int\varphi$. Reemplazando en (2.10)

$$c=\int\varphi d\mu=\varphi\ \Rightarrow\ \varphi=c\ en\ \mu-ctp$$

Recíprocamente, sea $A\subset M$ un conjunto $f-$invariante. Como $\chi_A\in L^p(\mu)$, entonces χ_A es constante en $\mu-ctp$. Por tanto, existe $N\subset M$ con $\mu(N)=0$ tal que

$$\chi_A(x)=1,\ \forall\, x\in M\backslash N\ \ o\ \ \chi_A(x)=0,\ \forall\, x\in M\backslash N$$

entonces

$$\mu(A)=\int_M\chi_A d\mu=1\ \ o\ \ \mu(A)=\int_M\chi_A d\mu=0$$

□

Sea A una matriz de $n\times n$ con entradas enteras y determinante diferente de cero. La matriz A induce una función $f:\mathbb{T}^n\to\mathbb{T}^n$, $f\circ\pi=\pi\circ A$

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n\\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi\\ \mathbb{T}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{T}^n\end{array}$$

La función f así definida es llamada *endomorfismo en el toro*. También podemos denotar aquella función por f_A tal que $f_A([x]) = [A(x)]$. Observemos que

$$Si \ \ |detA| = 1, \ \ entonces \ \ f_A \ \ es \ invertible \tag{2.11}$$

En efecto, desde que π y A son sobreyectivas, entonces f_A es sobreyectiva. Ahora supongamos que $f_A([x]) = f_A([y])$, entonces

$$[A(x)] = [A(y)] \Rightarrow A(x) \sim A(y) \Rightarrow A(x-y) \in \mathbb{Z}^n \tag{2.12}$$

Se sabe que $I.detA = adj(A).A$, donde $adj(A)$: la adjunta de la matriz A y I : matriz identidad. En (2.12), se tiene

$$adj(A)(A(x-y)) \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow I.det(A)(x-y) \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow x-y \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow [x] = [y]$$

En este caso, definimos $f_A^{-1} = f_{A^{-1}} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ por $f_A^{-1}([x]) = [A^{-1}(x)]$. Se cumple que

$$(f_A^{-1} \circ f_A)([x]) = f_A^{-1}(f_A([x])) = f_A^{-1}([A(x)]) = [A^{-1}(A(x))] = [x] = id_{\mathbb{T}^n}([x])$$

para todo $[x] \in \mathbb{T}^n$, análogamente $f_A \circ f_A^{-1} = id_{\mathbb{T}^n}$. Además, como π, A y A^{-1} son diferenciables, entonces f_A y f_A^{-1} son diferenciables.

Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Definimos la medida de Lebesgue m en el toro $\mathbb{T}^n$ por

$$m([B]) = \lambda(B)$$

para cada conjunto medible $B \subset [0,1]^n$, donde $[B] = \{[x] : x \in B\}$

Proposición 2.62. *f_A preserva la medida de Lebesgue.*

Demostración. Por el Teorema 2.34 obtenemos que f_A es un difeomorfismo local de clase C^∞, cada $[x] \in \mathbb{T}^n$ tiene un número $k = |detA|$ de pre−imagenes vía f_A. Para cada $r > 0$ suficientemente pequeño y $[x] \in \mathbb{T}^n$, se tiene

$$f_A^{-1}(B([x], r)) = B_1 \cup \cdots \cup B_k$$

donde B_i son componentes conexas y

$$S_i : B([x], r) \to B_i$$

es un difeomorfismo. Entonces $f_A \circ S_i = id$ en $B([x], r)$, además por la regla de la cadena

$$d_{S_i([y])} f_A . d_{[y]} S_i = I \Rightarrow A . d_{[y]} S_i = I \Rightarrow d_{[y]} S_i = A^{-1}$$

para cada $[y] \in B([x], r)$, $i = 1, \cdots, k$. Haciendo un cambio de variable, obtenemos

$$m(f_A^{-1}(B([x], r)) = \sum_{i=1}^{k} m(B_i) = \sum_{i=1}^{k} m(S_i(B([x], r))) = \sum_{i=1}^{k} \int_{S_i(B([x],r))} dm$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{B([x],r)} |det\, d_{[y]} S_i| dm = |detA^{-1}| \sum_{i=1}^{k} m(B([x], r)) = m(B([x], r))$$

Como la familia de abiertos $B([x], r)$, $[x] \in \mathbb{T}^n$ y $r > 0$ suficientemente pequeño genera el $\sigma-$álgebra de Borel de $\mathbb{T}^n$, entonces m es f_A-invariante. □

Teorema 2.63. *El sistema (f_A, m) es ergódico si y solo si, ningún autovalor de la matriz A es raiz de la unidad.*

Demostración. Supongamos que ningún autovalor de A es raiz de la unidad. La familia de funciones $\varphi_k : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi_k([x]) = e^{2\pi i \langle k, x \rangle}$ forma una base ortonormal llamada *la base de Hilbert* en $L^2(m)$. Sea $\varphi \in L^2(m)$ una función f_A-invariante, entonces existe una única sucesión de números complejos $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ tal que

$$\varphi([x]) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{2\pi i \langle k, x \rangle}, \quad ||\varphi||_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |c_k|^2 < \infty \tag{2.13}$$

Entonces

$$\varphi(f_A([x])) = \varphi([A(x)]) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{2\pi i \langle k, A(x) \rangle} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k e^{2\pi i \langle A^*(k), x \rangle} \tag{2.14}$$

donde A^* es la adjunta de A. Como φ es f_A-invariante, entonces por (2.13), (2.14) y haciendo el cambio de variable $k = A^*(j)$ obtenemos

$$c_k = c_{A^*(k)}, \ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n \tag{2.15}$$

Afirmación 2.64. La trayectoria de todo $k \neq 0$ por A^* es infinita.

Demostración. Supongamos que para algún $k \neq 0$ su trayectoria por A^* es finita, entonces existen $l, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$ tal que $A^{(l+m)*}(k) = A^{l*}(k)$, entonces A^* tiene un autovalor λ tal que $\lambda^m = 1$ lo cual es una contradicción, pues A y A^* tienen los mismos autovalores. □

Afirmación 2.65. Sea A una matriz cuadrada de dimensión d con coecientes racionales y sea λ un autovalor racional. Entonces, existe un autovector con coeficientes enteros, es decir, existe $v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ tal que $A(v) = \lambda v$.

Demostración. Sea λ un autovalor racional de A, tenemos que

$$Ax = \lambda x$$

es un sistema de d ecuaciones lineales con coeficientes racionales, entonces admite una solución racional $w = \left(\frac{x_1}{y_1}, \cdots, \frac{x_d}{y_d}\right) \in \mathbb{Q}^d \setminus \{0\}$. Tomando $v = cw$, donde $c = y_1 \cdots y_d$ obtenemos el resultado. □

Supongamos que para algún $\alpha \neq 0$ se tenga que $c_\alpha \neq 0$, entonces $|c_\alpha|^2 > 0$. Por la Afirmación 2.64 se tiene que $\left\{|c_{A^{j*}(\alpha)}|^2 : j \in \mathbb{Z}\right\} \subset \{|c_k|^2\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ es una subsucesión, donde $c_\alpha = c_{A^{j*}(\alpha)}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Luego, por (2.13) obtenemos

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_\alpha|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_{A^{j*}(\alpha)}|^2 < \infty \Rightarrow |c_\alpha|^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} < \infty$$

lo cual es una contradicción. Entonces $\varphi = c_0$, por el Corolario 2.61 se tiene que (f_A, m) es ergódica. Recíprocamente, supongamos que existe un λ autovalor de A que es raiz de la unidad, entonces λ también es un autovalor de A^*, por tanto, existe $m \geq 1$ tal que 1 es autovalor de A^{m*}. Por la Afirmación 2.65 y el hecho que A^{m*} tiene coeficientes enteros, existe $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ tal que $A^{m*}(k) = k$. Definimos $\varphi \in L^2(m)$ por

$$\varphi([x]) = \sum_{j=0}^{m-1} e^{2\pi i\langle x, A^{j*}(k)\rangle} = \sum_{j=0}^{m-1} e^{2\pi i\langle A^j(x), k\rangle}$$

Entonces, φ es f_A- invariante y no constante. En efecto, sea $[x] \in \mathbb{T}^n$, entonces

$$\varphi(f_A([x])) = \varphi([A(x)]) = \sum_{j=0}^{m-1} e^{2\pi i\langle A^{j+1}(x), k\rangle}$$

Como $A^{m*}(k) = k$, entonces $\varphi(f_A([x])) = \varphi([x])$. Supongamos que φ es constante, entonces $\varphi([x]) = \varphi([y])$ para todo $[x] \neq [y]$, en particular para $y = x + \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}$ se tiene

$$\sum_{j=0}^{m-1} e^{2\pi i\langle x, A^{j*}(k)\rangle} = \sum_{j=0}^{m-1} e^{2\pi i\langle x+\alpha, A^{j*}(k)\rangle}$$

Entonces

$$\sum_{j=0}^{m-1} \left(1 - e^{2\pi i\langle \alpha, A^{j*}(k)\rangle}\right) . e^{2\pi i\langle x, A^{j*}(k)\rangle} = 0 \tag{2.16}$$

Como $\{\varphi_k : k \in \mathbb{Z}^n\}$ forma una base y por (2.16) obtenemos

$$e^{2\pi i\langle \alpha, A^{j*}(k)\rangle} = 1 \Rightarrow \langle \alpha, A^{j*}(k)\rangle = 0,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{Q}^n \setminus \{0\}\,;\ j = 0, \cdots, m-1$$

Tomando $\alpha = ce_i$ donde $\{e_i\}$ es la base canónica en $\mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ concluimos que $k = 0$ lo cual es una contradicción, entonces φ es no constante. □

Hemos visto algunos ejemplos de sistemas dinámicos ergódicos con respecto a una medida μ que no necesariamente es la de Lebesgue, y el último ejemplo del endomorfismo del toro f_A que es ergódico con respecto a la medida de Lebesgue si ningún autovalor de la matriz A es raiz de la unidad. En nuestro teorema principal trabajaremos en una variedad Riemanniana M compacta de clase C^∞, ello implica que existe la medida de Lebesgue en M, ahora bien, surge un inconveniente, pues como ya mencionamos necesitamos probar ergodicidad y uno de los requisitos es que la medida sea invariante, esto se conseguirá si el sistema $f : M \to M$ cumple que, $|det_\omega(d_x f)| = 1$ donde ω es la forma de volumen como ya hemos visto. De aquí podemos observar que no todos los sistemas preservan la medida de Lebesgue, por tal razón daremos la propiedad que nuestro sistema sea *conservativo*, es decir, preserve la medida de Lebesgue generada. Mas aún, como usaremos las caracterizaciones de ergodicidad, y para ello se necesita de medidas finitas, entonces deseamos que nuestra medida de Lebesgue en M sea finita, esto se obtiene gracias a que M es compacta.

Capítulo 3

Pesadilla de Fubini

Por el teorema de Fubini se deduce que cualquier conjunto medible E de medida total en el cuadrado unitario $[0,1] \times [0,1]$ intersecta a casi todo segmento horizontal del cuadrado unitario en infinitos puntos. En este capítulo construiremos un conjunto E de medida positiva en el cuadrado $(0,1) \times (0,1]$ y una foliación cuyas hojas intercecta al conjunto E en a lo más un punto. Este ejemplo patológico es denominado *la pesadilla de Fubini* y fue desarrollado por Milnor en (Milnor, 1997), y nos servirá como motivación para comprender algunas hipótesis que necesitamos para demostrar nuestro resultado principal.

3.1. Pesadilla de Fubini

En esta sección veremos el ejemplo de Katok o pesadilla de Fubini. Aquí construímos un sistema que generará un conjunto de medida positiva en el cuadrado $(0,1) \times (0,1]$ que denotaremos por E, y una foliación $\mathcal{F}$ de dicho cuadrado, para luego analizar la relación que existen entre ambos. Finalmente, la foliación $\mathcal{F}$ dará origen a una aplicación a la que llamaremos holonomía para luego analizar su comportamiento.

3.1.1. Conjunto de medida total

Aquí vamos definir una función que va generar nuestro conjunto $E \subset (0,1) \times (0,1]$, para luego usar el teorema de Fubini y determinar su medida.

Sea $p \in (0,1)$, definimos la función f_p por

$$f_p(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{p}, & \text{si} \quad x \in I_0 = (0,p] \\ \dfrac{x-p}{1-p}, & \text{si} \quad x \in I_1 = (p,1] \end{cases}$$

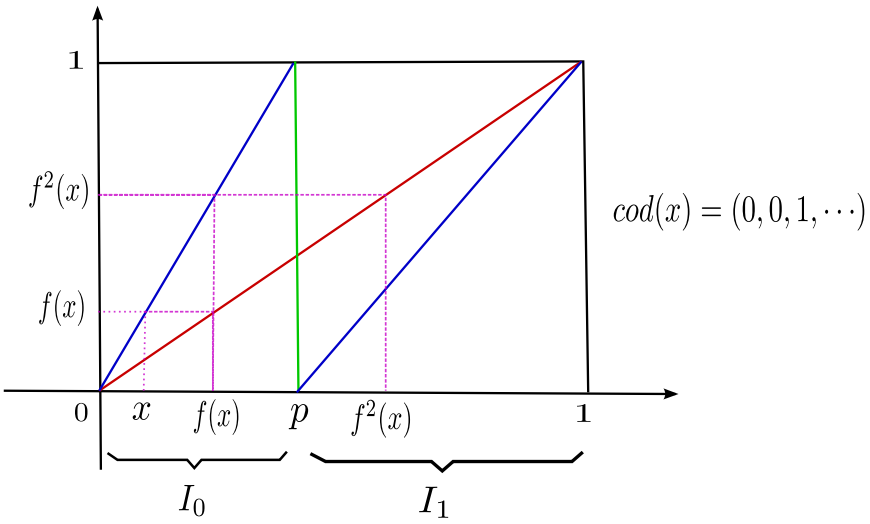

Figura 3.1: Gráfico de f_p

Afirmación 3.1. Para cada $p \in (0,1)$ la función f_p preserva la medida m_1 de Lebesgue en $[0,1]$.

Demostración. Sea $J \subset [0,1]$ un intervalo, entonces la pre-imagen $f_p^{-1}(J)$ consiste de un intervalo en I_0 de longitud $pm_1(J)$ y un intervalo en I_1 de longitud $(1-p)m_1(J)$. Entonces

$$m_1(f_p^{-1}(J)) = pm_1(J) + (1-p)m_1(J) = m_1(J)$$

para todo $J \subset [0,1]$.

Sea $B \subset [0,1]$, con $B = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ donde I_j, $j = 1, \cdots, n$ son intervalos disjuntos dos a dos. Luego

$$m_1(f_p^{-1}(B)) = m_1\left(\bigcup_{k=1}^{n} f_p^{-1}(I_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} m_1(f_p^{-1}(I_k)) = \sum_{k=1}^{n} m_1(I_k) = m_1(B)$$

Como la familia $\mathcal{A}$ de todos los subconjuntos de la forma $B = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ donde $I_1, \cdots, I_n$ son intervalos disjuntos dos a dos, es un álgebra de subconjuntos de $[0,1]$. Además $\mathcal{A}$ genera el $\sigma-$álgebra de Borel. Por el Lema 2.43 f_p preserva la medida de Lebesgue en $[0,1]$. $\square$

La órbita positiva de x es el conjunto $\left\{f_p^n(x) : n = 0, 1, 2, \cdots\right\}$. Podemos corresponder a cada $x \in (0, 1]$ un *código* que lo denotaremos por $cod(x)$ generado por la función f_p, que es una sucesión de ceros y unos de la siguiente manera:

$$cod(x) = (b_0, b_1, b_2, \cdots) \Leftrightarrow f_p^n(x) \in I_{b_n}$$

Ejemplo 3.2. Para $x = 1$: **Para** $x = p$:

$$f_p^0(1) = 1 \in I_{1=b_0} \qquad f_p^0(p) = p \in I_{0=b_0}$$
$$f_p(1) = \tfrac{1-p}{1-p} = 1 \in I_{1=b_1} \qquad f_p(p) = \tfrac{p}{p} = 1 \in I_{1=b_1}$$
$$\vdots \qquad f_p^2(p) = \tfrac{1-p}{1-p} = 1 \in I_{1=b_2}$$
$$\Rightarrow cod(x) = (1, 1, 1, \cdots) \qquad \vdots$$
$$\Rightarrow cod(x) = (0, 1, 1, \cdots)$$

Sea $cod(x) = (b_0, b_1, b_2, \cdots)$, para $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$f_p^n(x) \in I_{b_n} \Rightarrow f_p^{n+1}(x) = f_p^n(f_p(x)) \in I_{b_{n+1}} \Rightarrow cod(f_p(x)) = (b_1, b_2, b_3, \cdots)$$

Con estos códigos podemos definir la medida de Bernoulli en el espacio $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \sum$ por

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \sum & \longrightarrow & \sum \\ & cod(x) & \longmapsto & \sigma(cod(x)) = cod(f_p(x)). \end{array}$$

Los cilindros de $\sum$ son los conjuntos de la forma

$$[m; A_m, \cdots, A_n] = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} : x_i \in A_i, \, para \; m \leq i \leq n\}$$

donde $n, m \in \mathbb{N}$, $A_i \in P(\{0, 1\})$, $p(0) = p$ y $p(1) = 1 - p$. Ver también que la medida definida en la familia de los cilindros está dado por:

$$\mu([m; A_m, \cdots, A_n]) = \prod_{i=m}^{n} p(A_i)$$

donde $p(A_i)$: probabilidad de A_i.

Sabemos que la $\sigma-$ álgebra producto en $\sum$ es la $\sigma-$ álgebra $\mathcal{B}$ generada por la familia de todos los cilindros. Luego por el teorema ergódico de Birkhoff 2.50 obtenemos que

$$\tau\left([0; \{1\}], cod(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{[0,\{1\}]}(\sigma^k(cod(x))) \tag{3.1}$$

existe en $\mu - ctp$ en $\sum$.

Afirmación 3.3. Se cumple que $\tau([0;\{1\}], cod(x)) = 1-p$ en $\mu - ctp$.

Demostración. Por la Proposición 2.52 se tiene que, el shift (σ, μ) de Bernoulli es ergódico, luego usando la Proposición 2.59 obtenemos

$$\tau([0;\{1\}], cod(x)) = \int_{\sum} \chi_{[0;\{1\}]} d\mu = \int_{[0;\{1\}]} d\mu = \mu([0;\{1\}]) = p(1) = 1-p$$

□

Por (3.1) y la Afirmación 3.3, se tiene

$$1-p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{[0,\{1\}]}(\sigma^k(cod(x))) \tag{3.2}$$

existe en $\mu - ctp$ en $\sum$. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{[0,\{1\}]}(\sigma^k(cod(x))) = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi_{[0,\{1\}]}(cod(x)) + \cdots + \chi_{[0,\{1\}]}(\sigma^{n-1}(cod(x)))}{n}$$

Entonces, por (3.2)

$$1-p = \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}}{n} \tag{3.3}$$

existe en $\mu - ctp$ en $\sum$.

Observación 3.4. Para obtener (3.3) podemos hacer uso de la ley de los grandes números.

Para $p \in (0,1)$, definamos la función θ_p por

$$\begin{array}{rccl} \theta_p & : & (0,1] & \longrightarrow & \sum \\ & & x & \longmapsto & \theta_p(x) = cod(x). \end{array}$$

Afirmación 3.5. $m_1(\theta_p^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo conjunto medible $A \subset \sum$, donde m_1 es la medida de Lebesgue unidimensional. Es decir, θ_p preserva la medida.

Demostración. En efecto, desde que la $\sigma-$ álgebra en $\sum$ es generada por los cilindros $[i;\{0\}] = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_i = 0\}$ y $[i;\{1\}] = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_i = 1\}$ es suficiente probar el resultado para estos cilindros. Como f_p preserva medida, entonces

$$m_1(\theta_p^{-1}([i;\{0\}])) = m_1(f_p^{-i}((0,p]))) = m_1((0,p])) = p = \mu([i;\{0\}])$$

Además

$$m_1(\theta_p^{-1}([i;\{1\}])) = m_1(f_p^{-i}((p,1]))) = m_1((p,1])) = 1-p = \mu([i;\{1\}])$$

Luego, θ_p preserva la medida. □

Afirmación 3.6. $1-p = \lim_{n\to\infty} \dfrac{b_0+b_1+\cdots+b_{n-1}}{n}$ existe en $m_1 - ctp$.

Demostración. Por (3.3), existe $N \subset \sum$ con $\mu(N) = 0$ tal que

$$1-p = \lim_{n\to\infty} \frac{b_0+b_1+\cdots+b_{n-1}}{n}$$

existe para todo $cod(x) \in \sum \backslash N$. Por la Afirmación 3.5 tenemos $m_1(\theta_p^{-1}(N)) = \mu(N) = 0$. Luego

$$x \in (0,1]\backslash\theta_p^{-1}(N) \Leftrightarrow cod(x) \in \sum \backslash N$$

□

Ahora definimos el conjunto $E \subset (0,1)\times(0,1]$ por todos los pares (p,x) cuyo código de x por la dinámica f_p cumple (3.3), esto es

$$E = \left\{(p,x) : \lim_{n\to\infty} \frac{b_0+b_1+\cdots+b_{n-1}}{n} = 1-p\right\}$$

Sea $p \in (0,1)$ y tomemos $V_p = \{p\}\times(0,1]$ que podemos identificarlo por $(0,1]$. Por el teorema ergódico de Birkhoff 2.50 se tiene

$$\int_{[0,1]} \tau(E\cap V_p, x)dm_1 = \int_{[0,1]} \chi_{E\cap V_p} dm_1 = m_1(E\cap V_p)$$

Además

$$\tau(E\cap V_p, x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#\left\{j = 0,1,\cdots,n-1 : (p, f_p^j(x)) \in E\cap V_p\right\}$$

Si $(p,x) \in E$, entonces

$$(p, f_p^j(x)) \in E\cap V_p, \forall\, j = 0,1,\cdots,n-1 \Rightarrow m_1(E\cap V_p) = 1$$

Usando el teorema de Fubini para calcular la medida del conjunto E por rectas verticales, se tiene

$$m_2(E) = \int_{[0,1]} m_1(E\cap V_p)dp = 1$$

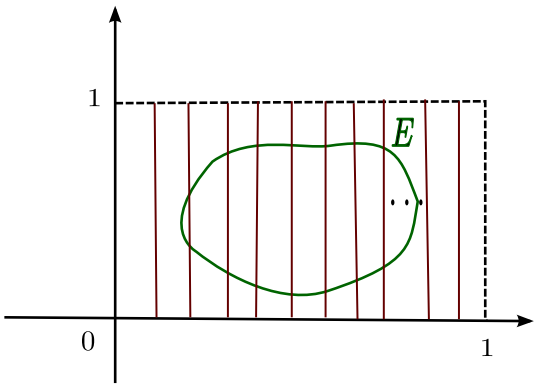

Figura 3.2: Medida de E *(rectas)*

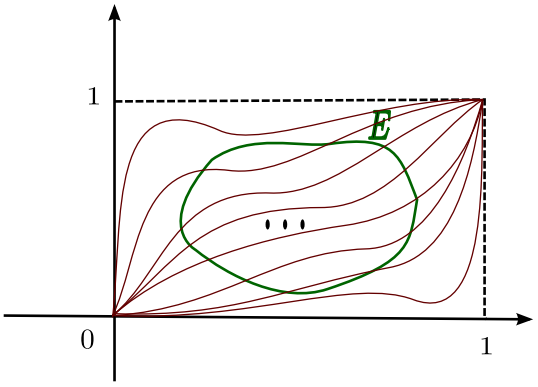

Figura 3.3: Medida de E *(curvas)*

3.1.2. Curvas analíticas

En esta parte construiremos la foliación $\mathcal{F}$ de $(0,1)\times(0,1]$, y expondremos su relación con el conjunto E como habíamos mencionado.

Sea $\beta \in (0,1]$ consideremos la expansión binaria de β es decir $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}}$.

Notación: $(b_0, b_1, b_2, \cdots)$: Expansión binaria de β.

Ejemplo 3.7. $\beta = \frac{1}{3} = 0,010101\cdots_{(2)} = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$, entonces la expansión binaria de β es $(0,1,0,1,\cdots)$.

Definimos el conjunto Γ_β de todos los puntos (p,x) tales que, el código correspondiente a x por la dinámica de f_p coincida con la expansión binaria de β, esto es

$$\Gamma_\beta = \{(p,x) : cod(x) = (b_0, b_1, b_2, \cdots)\}$$

Analizemos algunos Γ_β:

Para $\beta = 1 = 0,111\cdots_{(2)}$ su expansión binaria es $(1,1,1,\cdots)$. Entonces

$$\Gamma_1 = \{(p,x) : cod(x) = (1,1,1,\cdots)\} = \{(p,1) : p \in (0,1)\}$$

Para $\beta = \frac{1}{2} = 0,0111\cdots_{(2)}$ su expansión binaria es $(0,1,1,\cdots)$. Entonces

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \{(p,x) : cod(x) = (0,1,1,\cdots)\} = \{(p,p) : p \in (0,1)\}$$

Para $\beta = \frac{1}{4} = 0,00111\cdots_{(2)}$ su expansión binaria es $(0,0,1,1,1,\cdots)$. Entonces

$$\Gamma_{\frac{1}{4}} = \{(p,x) : cod(x) = (0,0,1,1,1,\cdots)\} = \left\{(p,p^2) : p \in (0,1)\right\}$$

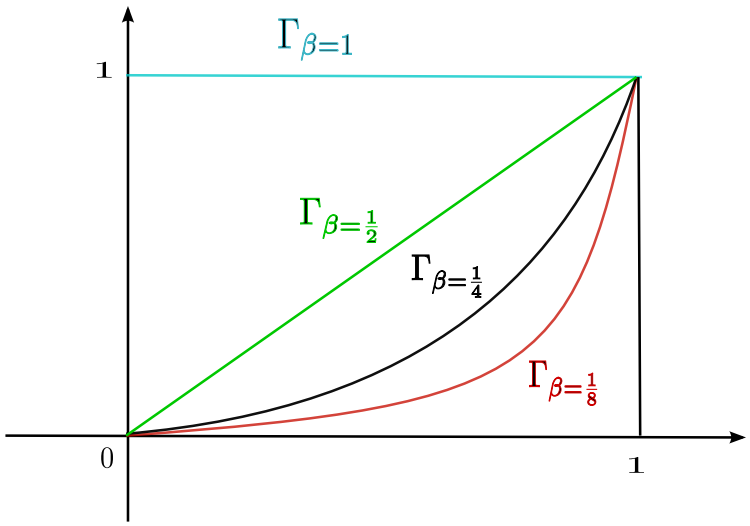

Figura 3.4: Conjunto Γ_β

Afirmación 3.8. Se cumple

i) $\Gamma_\beta \cap \Gamma_{\beta'} = \emptyset$ para todo $\beta \neq \beta'$.

ii) $\bigcup_{\beta\in(0,1]} \Gamma_\beta = (0,1) \times (0,1]$.

Demostración. i). Supongamos que $\Gamma_\beta \cap \Gamma_{\beta'} \neq \emptyset$ para $\beta \neq \beta'$, entonces existe $(p,x) \in \Gamma_\beta \cap \Gamma_{\beta'}$ tal que $cod(x) = (b_0, b_1, b_2, \cdots) = (b_0', b_1', b_2', \cdots)$, luego $\beta = \beta'$ lo cual es una contradicción.

ii). Sea $\beta \in (0,1]$, como $\Gamma_\beta \subset (0,1) \times (0,1]$ entonces $\bigcup_{\beta\in(0,1]} \Gamma_\beta \subset (0,1) \times (0,1]$. Recíprocamente, sea $(p,x) \in (0,1) \times (0,1]$ entonces $x \in (0,1]$. Definamos $cod(x) = (b_0, b_1, b_2, \cdots)$ por la dinámica de f_p, entonces $(p,x) \in \Gamma_\beta$ donde $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}}$. Luego $(0,1) \times (0,1] \subset \bigcup_{\beta\in(0,1]} \Gamma_\beta$. □

Afirmación 3.9. Si $\beta \in (0,1]$, entonces $card\,(\Gamma_\beta \cap E) \leq 1$.

Demostración. Sea $\beta \in (0,1]$, entonces $\Gamma_\beta \cap E = \emptyset$ o $\Gamma_\beta \cap E \neq \emptyset$. Supongamos que $\Gamma_\beta \cap E \neq \emptyset$. Sean $(p,x), (q,y) \in \Gamma_\beta \cap E$, entonces

$$cod(x) = (b_0, b_1, \cdots) \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}}{n} = 1 - p$$

Además

$$cod(y) = (b_0, b_1, \cdots) \text{ y } \lim_{n\to\infty} \frac{b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}}{n} = 1 - q$$

donde $(b_0, b_1, \cdots)$ es la expansión binaria de β. Luego $p = q$, debido a que los códigos de x e y conciden por la dinámica de f_p entonces $x = y$. Por lo tanto, la intersección entre Γ_β y E es a lo más en un punto. □

Proposición 3.10. *Dado $\beta \in (0,1]$ existe una función análitica $X(.,\beta) : (0,1) \to (0,1]$ tal que $\Gamma_\beta = graf\,(X(.,\beta))$.*

Demostración. Sea $\beta \in (0,1]$ y $(p,x) \in \Gamma_\beta$, entonces $cod(x) = (b_0, b_1, \cdots)$ por la dinámica de f_p, donde $(b_0, b_1, \cdots)$ es la expansión binaria de β.

Afirmación 3.11. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n = b_n p(0) + x_{n+1} p(b_n)$.

Demostración. Si $b_n = 0$, entonces $x_n = f_p^n(x) \in I_{0=b_n}$

$$x_{n+1} = f_p(x_n) = \frac{x_n}{p} \Rightarrow b_n p(0) + x_{n+1} p(b_n) = 0.p + \left(\frac{x_n}{p}\right).p = x_n$$

Si $b_n = 1$, entonces $x_n = f_p^n(x) \in I_{1=b_n}$

$$x_{n+1} = f_p(x_n) = \frac{x_n - p}{1-p} \Rightarrow b_n p(0) + x_{n+1} p(b_n) = 1.p + \left(\frac{x_n - p}{1-p}\right)(1-p) = x_n$$

□

Por la Afirmación (3.11) tenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0 p(0) + x_1 p(b_0) \\ x_1 &= b_1 p(0) + x_2 p(b_1) \\ x_2 &= b_2 p(0) + x_3 p(b_2) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Entonces, de (3.4) podemos ver que

$$x_0 = f_p^0(x) = x = p(0)\left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \prod_{j=0}^{n-1} p(b_j)\right)$$

Para β fijo, tomemos $F_n(p) = b_n \prod_{j=0}^{n-1} p(b_j)$. Haciendo $p(0) = p = \frac{1+t}{2}$, $p(1) = 1-p = \frac{1-t}{2}$ y $|t| \leq c < 1$, obtenemos

$$|F_n(p)| = \left| b_n \prod_{j=0}^{n-1} p(b_j) \right| \leq p(b_0)p(b_1)\cdots p(b_{n-1}) \leq \left(\frac{1+c}{2}\right)^n$$

para todo $0 < p < 1$ o en términos de t en $-1 < t < 1$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+c}{2}\right)^n$ es convergente, entonces por el teorema de la convergencia uniforme de Wierstrass la serie $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(p)$ converge uniformemente en $0<p<1$. Por tanto

$$X(p,\beta)=x=p(0)\left(b_0+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\prod_{j=0}^{n-1}p(b_j)\right)$$

es analítica en $0<p<1$. Además, por la construcción de $X(.,\beta)$ se sigue que $\Gamma_\beta = graf\,(X(.,\beta))$.

Finalmente, definimos la foliación de $(0,1)\times(0,1]$ por $\mathcal{F}=\{\Gamma_\beta\}_\beta$ donde ya vimos que, cada curva intersecta al conjunto E en a lo más un punto. □

3.1.3. Holonomía

A continuación veremos el comportamiento de una aplicación a la que llamaremos holonomía que depende de la foliación $\mathcal{F}=\{\Gamma_\beta\}_\beta$.

Dados dos segmentos verticales $V_p, V_q \subset (0,1)\times(0,1]$ definamos la *holonomía*

$$\begin{aligned} H_{p,q} \;:\; V_p &\longrightarrow V_q \\ z &\longmapsto H_{p,q}(z)=\Gamma_\beta\cap V_q. \end{aligned}$$

donde Γ_β es la hoja que pasa por z.

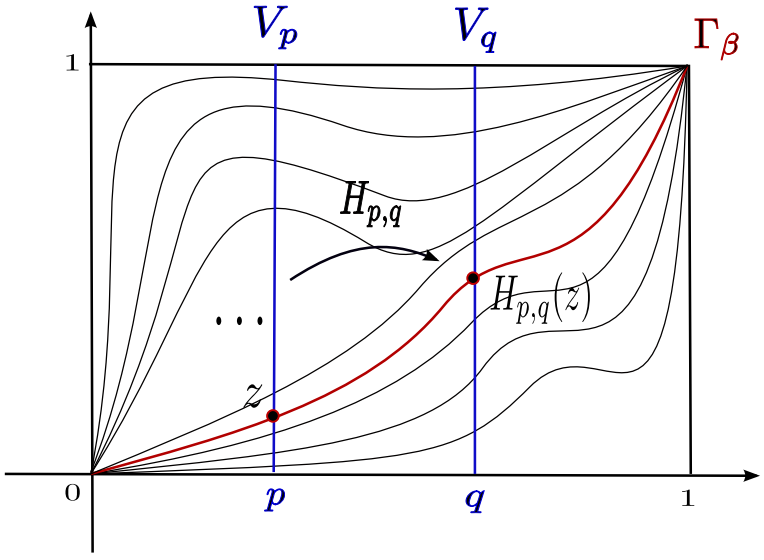

Figura 3.5: Holonomía $H_{p,q}$

Proposición 3.12. *Para* $0 < p \neq q < 1$ *tenemos* $m_1(E \cap V_p) = 1$*, pero*

$$m_1(H_{p,q}(E \cap V_p)) = 0$$

Demostración. Sean $0 < p \neq q < 1$, entonces $m_1(E \cap V_p) = 1$. Tomemos $w \in H_{p,q}(E \cap V_p)$ luego, existe $z \in E \cap V_p$ tal que $w = H_{p,q}(z)$. Como $w \in \Gamma_\beta \cap V_q$, entonces $w = (q, y)$ con $cod(y) = (b_0, b_1, \cdots)$ por la dinámica de f_q y $(b_0, b_1, \cdots)$ es la expansión binaria de β. Por otro lado, $z \in E \cap V_p$ entonces $z = (p, x)$ tal que $cod(x) = (b_0, b_1, \cdots)$ pues $z \in \Gamma_\beta$. Además

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_0 + b_1 + \cdots b_{n-1}}{n} = 1 - p \Rightarrow (q, y) \notin E \cap V_q$$

Esto quiere decir que, los elementos de $H_{p,q}(E \cap V_p)$ no están en $E \cap V_q$. Como el conjunto $E \cap V_q$ tiene media total, concluímos que $m_1(H_{p,q}(E \cap V_p)) = 0$. □

3.2. Dinámica uniformemente hiperbólica

En esta sección daremos el alcance de algunas definiciones y resultados sobre dinámica hiperbólica, el lector interesado puede consultar (Oliveira y Viana, 2014), (Katok y Hasselblatt, 1997), (Brin y Stuck, 2002), (Shub, 2013) y (Varão Filho, 2012). De aquí en adelante, trabajaremos en una variedad Riemanniana compacta M de clase C^∞.

Definición 3.13. Un $f : M \to M$ difeomorfismo de clase C^1 se dice que es *uniformemente hiperbólico*, si para cada $x \in M$ existen subespacios $E^s(x) \subset T_xM$ y $E^u(x) \subset T_xM$ que verifican:

i) $T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x)$.

ii) $df_x(E^s(x)) = E^s(f(x))$ y $df_x(E^u(x)) = E^u(f(x))$.

iii) Existen constantes $C > 0$ y $\lambda \in (0, 1)$ tal que

   a) $||df_x^n(v)|| \leq C\lambda^n||v||$, para todo $v \in E^s(x)$ y $n \geq 0$.

   b) $||df_x^{-n}(v)|| \leq C\lambda^n||v||$, para todo $v \in E^u(x)$ y $n \geq 0$.

donde $||\,.\,||$ es la norma inducida por la métrica Riemanniana en M, esto es $||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$, $v \in T_xM$.

Lo siguiente es un ejemplo de un difeomorfismo uniformemente hiperbólico lineal en la variedad $\mathbb{T}^2$ que es inducida por una transformación lineal y es llamada *Thom- Arnold map.*

Ejemplo 3.14. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculemos los autovalores y autoespacios

$$det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_s = \frac{3-\sqrt{5}}{2};\ \lambda_u = \frac{3+\sqrt{5}}{2},\ 0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$$

Entonces

$$E^s = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)x\right\};\ E^u = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)x\right\}$$

De aquí, se deduce que

$$\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u,\ A(E^s) = E^s\ y\ A(E^u) = E^u \tag{3.5}$$

Definamos $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ por

$$f \circ \pi = \pi \circ A \tag{3.6}$$

donde $\mathbb{T}^2 = \dfrac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$ es el toro $2-$ dimensional y $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ es la proyección canónica.

Afirmación 3.15. f es un difeomorfismo uniformemente hiperbólico.

Demostración. Por (2.11) tenemos que f es invertible cuya inversa $f^{-1} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es definido por $f^{-1} \circ \pi = \pi \circ A^{-1}$, entonces f es un difeomorfismo. Por el Teorema 2.34

$$d\pi_x : T_x\mathbb{R}^2 \to T_{[x]}\mathbb{T}^2$$

es un isomorfismo lineal. Por (3.5) tenemos

$$T_x\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u \Rightarrow T_{[x]}\mathbb{T}^2 = E^s_{[x]} \oplus E^u_{[x]}$$

donde $E^s_{[x]} = d\pi_x(E^s)$ y $E^u_{[x]} = d\pi_x(E^u)$.

Sea $v \in T_{\bar{x}}\mathbb{T}^2$, entonces $\exists!\ u \in T_x\mathbb{R}^2$ tal que $d\pi_x(u) = v$, pero $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in E^s$ y $u_2 \in E^u$. Luego

$$v = d\pi_x(u) = d\pi_x(u_1) + d\pi_x(u_2)$$

donde $d\pi_x(u_1) \in E^s_{[x]}$ y $d\pi_x(u_2) \in E^u_{[x]}$. También, si $v \in E^s_{[x]} \cap E^u_{[x]}$, tenemos que $v = d\pi_x(v_1)$ y $v = d\pi_x(v_2)$ con $v_1 \in E^s$, $v_2 \in E^u$. Como $d\pi_x$ es un isomorfismo, obtenemos

$$d\pi_x^{-1}(v) = v_1 = v_2 \Rightarrow d\pi_x^{-1}(v) \in E^s \cap E^u \Rightarrow d\pi_x^{-1}(v) = 0 \Rightarrow v = \theta \Rightarrow E^s_{[x]} \cap E^u_{[x]} = \{\theta\}$$

Por (3.5) y (3.6) resulta que

$$df_{[x]}.d\pi_x = d\pi_{A(x)}.dA_x \Rightarrow df_{[x]}(d\pi_x(E^\sigma)) = d\pi_{A(x)}(dA_x(E^\sigma))$$

Entonces

$$df_{[x]}(E^\sigma_{[x]}) = E^\sigma_{[A(x)]} = E^\sigma_{f([x])}$$

para $\sigma = s, u$.

Afirmación 3.16. Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, existe una norma en $T_{[x]}\mathbb{T}^2$ inducida por el isomorfismo lineal $d\pi_x : \mathbb{R}^2 \to T_{[x]}\mathbb{T}^2$.

Demostración. En efecto, sea $v \in T_{[x]}\mathbb{T}^2$, entonces $\exists!\ u \in \mathbb{R}^2$ tal que $d\pi_x(u) = v$. Luego definimos una norma en $T_{[x]}\mathbb{T}^2$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rccl} ||\,.\,|| & : & T_{[x]}\mathbb{T}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & v & \longmapsto & ||v||_{[x]} = |u| \end{array}$$

donde $|\,.\,|$ es la norma euclidiana en $\mathbb{R}^2$

$N1:$ Sea $v \in T_{[x]}\mathbb{T}^2$ con $d\pi_x(u) = v$, entonces $||v||_{[x]} = 0 \Leftrightarrow |u| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow v = \theta$.

$N2:$ Sean $v_1, v_2 \in T_{[x]}\mathbb{T}^2$, entonces $||v_1+v_2||_{[x]} = |u_1+u_2| \leq |u_1|+|u_2| = ||v_1||_{[x]}+||v_2||_{[x]}$, donde $d\pi_x(u_1) = v_1$ y $d\pi_x(u_2) = v_2$

$N3:$ Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in T_{[x]}\mathbb{T}^2$ con $d\pi_x(u) = v$, entonces $||\alpha v||_{[x]} = |\alpha u| = |\alpha||u| = |\alpha|||v||_{[x]}$.

□

Finalmente, sean $v \in E^s_{[x]}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\exists!\, u \in E^s$ tal que $d\pi_x(u) = v$. Como $f^n \circ \pi = \pi \circ A^n$ se tiene que $df^n_{[x]}(v) = d\pi_{A^n(x)}(A^n(u))$. Por la Afirmación 3.16, obtenemos

$$||df^n_{[x]}(v)||_{f^n([x])} = ||d\pi_{A^n(x)}(A^n(u))||_{f^n([x])} = |A^n(u)| = \lambda_s^n|u| = \lambda_s^n||v||_{[x]}$$

Análogamente, sea $v \in E^u_{[x]}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\exists!\, u \in E^u$ con $d\pi_x(u) = v$ tal que

$$||df^{-n}_{[x]}(v)||_{f^{-n}([x])} = ||d\pi_{A^{-n}(x)}(A^{-n}(u))||_{f^{-n}([x])} = |A^{-n}(u)| = (1/\lambda_u^n)|u| = (1/\lambda_u^n)||v||_{[x]}$$

Tomando $\lambda = \text{máx}\left\{\lambda_s, \frac{1}{\lambda_u}\right\}$ y $C = 1$, concluímos que

$$||df^n_{[x]}(v)|| \leq C\lambda^n||v||,\ v \in E^s_{[x]}$$

$$||df^{-n}_{[x]}(v)|| \leq C\lambda^n||v||,\ v \in E^u_{[x]}$$

para todo $n \geq 0$. Por lo tanto, f es un difeomorfismo uniformemente hiperbólico. □

Observación 3.17. Toda matriz A de $n \times n$ con entradas enteras, $|det(A)| = 1$, y autovalores con módulo diferente de 1 induce un difeomorfismo uniformemente hiperbólico lineal y su demostración se procede de manera similar. Además, por el artículo (Franks, 1969) se tiene que, todo difeomorfismo uniformemente hiperbólico $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ es topológicamente conjugado a un difeomorfismo uniformemente hiperbólico lineal en $\mathbb{T}^n$.

Definición 3.18. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo de clase C^1 y $x \in M$. Se define el conjunto estable de x como

$$W^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0\}$$

y el conjunto inestable como

$$W^u(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \longrightarrow_{n\to-\infty} 0\}$$

donde d es la distancia intrínseca en M. Para $\varepsilon > 0$ definimos el conjunto estable e inestable local (de tamaño ε) como

$$W^s_\varepsilon(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, \forall n \geq 0\}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \left\{y \in M : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon, \forall n \geq 0\right\}$$

Observación 3.19. $f(W^s_\varepsilon(x)) \subset W^s_\varepsilon(f(x))$ y $f(W^u_\varepsilon(x)) \supset W^u_\varepsilon(f(x))$

En efecto, sea $a \in f(W^s_\varepsilon(x))$, existe $b \in W^s_\varepsilon(x)$ tal que $a = f(b)$ y $d(f^n(x), f^n(b)) < \varepsilon$ para todo $n \geq 0$. Luego

$$d(f^n(f(x)), f^n(a)) = d(f^{n+1}(x), f^{n+1}(b)) < \varepsilon, \ \forall n \geq 0 \Rightarrow a \in W^s_\varepsilon(f(x))$$

Sea $a \in W^u_\varepsilon(f(x))$, entonces $d(f^{-n}(f(x)), f^{-n}(a)) < \varepsilon$ para todo $n \geq 0$. Luego

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(f^{-1}(a))) = d(f^{-(n+1)}(f(x)), f^{-(n+1)}(a)) < \varepsilon, \ \forall n \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(a) \in W^u_\varepsilon(x)$$

Teorema 3.20 (*Teorema de la variedad estable*)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo uniformemente hiperbólico de clase C^r. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in M$ se verifica que:*

i) $W^s_\varepsilon(x)$ y $W^u_\varepsilon(x)$ son subvariedades de clase C^r con $T_xW^s_\varepsilon(x) = E^s(x)$ y $T_xW^u_\varepsilon(x) = E^u(x)$.

ii) $d(f^n(x), f^n(y)) < \lambda^n d(x,y)$ *para* $y \in W^s_\varepsilon(x)$, $n \geq 0$ *y*
$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \lambda^n d(x,y)$ *para* $y \in W^u_\varepsilon(x)$, $n \geq 0$

iii) $W^s(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(W^s_\varepsilon(f^n(x))$ *y* $W^u(x) = \bigcup_{n\geq 0} f^n(W^u_\varepsilon(f^{-n}(x))$, *donde* $W^s(x)$ *y* $W^u(x)$ *son subvariedades inmersas de clase* C^r *que varian continuamente (como subvariedades* C^r *y en subconjuntos compactos) con* x.

Observación 3.21. Del Teorema 3.20, se deduce que existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, si $x, y \in M$ con $d(x,y) < \delta$ entonces $W^s_\varepsilon(x)$ y $W^u_\varepsilon(y)$ se intersectan transversalmente en un único punto.

Para un difeomorfismo uniformemente hiperbólico, podemos definir los siguientes conjuntos

$$\mathcal{F}^s = \{W^s(x) : x \in M\} \text{ y } \mathcal{F}^u = \{W^u(x) : x \in M\}$$

Por el Teorema 3.20 $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ son foliaciones llamadas *foliación estable* e *inestable* respectivamente. Nos referimos a los elementos de $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ como hojas estables e inestables.

Ejemplo 3.22. Como vimos en el Ejemplo 3.14 la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ induce un difeomorfismo uniformemente hiperbólico f. La familia de todos los subespacios afines de $\mathbb{R}^2$ de la forma $x + E^s$, con $x \in \mathbb{R}^2$ define una partición $\mathcal{F}^s$ de $\mathbb{R}^2$ que es la foliación estable invariante por A, también todos los subespacios afines de $\mathbb{R}^2$ de la forma $x + E^u$, con $x \in \mathbb{R}^2$ define una partición $\mathcal{F}^u$ de $\mathbb{R}^2$ que es la foliación inestable invariante por A. Proyectando $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ vía la proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ obtenemos $\tilde{\mathcal{F}}^s$ y $\tilde{\mathcal{F}}^u$ particiones del toro, que son las foliaciones estables e inestables respectivamente, cuyas hojas estables e inestables estan dadas por

$$W^s(\pi(x)) = \pi\left(x + E^s\right) \quad y \quad W^u(\pi(x)) = \pi\left(x + E^u\right)$$

respectivamente. Además son invariantes por el difeomorfismo uniformemente hiperbólico lineal f.

Definición 3.23. Dada dos variedades U y V transversales a la foliación $\mathcal{F}$, definimos la aplicación *holonomia* $h : U \to V$ por $h(z) = L(z) \cap V$, donde $L(z) \in \mathcal{F}$ es la hoja que pasa por z.

Tomando $\mathcal{F}^s$ la foliación estable de tamaño ε, definimos la aplicación *holonomia estable* $h^s : U \to V$ por $h^s(z) = W^s_\varepsilon(z) \cap V$. Similarmente se define la aplicación *holonomia inestable* h^u.

Definición 3.24. Una foliación $\mathcal{F}$ es llamado

- *Absolutamente continua inferiormente*, si $vol_L << m_L$.
- *Absolutamente continua superiormente*, si $m_L << vol_L$.

Donde $L \in \mathcal{F}$, m_L : medida condicional de la medida volumen m, y vol_L : volumen de Riemann restricta a la hoja L.

Proposición 3.25. *Una foliación $\mathcal{F}$ es*

- *Absolutamente continua inferiormente si, para cada conjunto medible $Y \subset M$ tal que $m(Y) = 0$ entonces $vol_{\mathcal{F}}(Y) = 0$ en $m - ctp$.*
- *Absolutamente continua superiormente si, para cada conjunto medible $Y \subset M$ tal que $vol_{\mathcal{F}}(Y) = 0$ en $m - ctp$ entonces $m(Y) = 0$.*

Una foliación $\mathcal{F}$ es llamado absolutamente continua, si es inferiormente y superiormente absolutamente continua.

Observación 3.26. Hemos dado la definición de una foliación absolutamente continua, puesto que necesitamos trabajar con foliaciones que preserven la medida de Lebesgue. Recordemos en este capítulo 3 *Pesadilla de Fubini*, construímos una foliación $\mathcal{F} = \{\Gamma_\beta\}_\beta$ dada por curvas análiticas, dicha foliación no es absolutamente continua, por tal razón no deseamos trabajar con tales foliaciones.

Definición 3.27. Una foliación $\mathcal{F}$ es transversalmente absolutamente continua, si dado dos secciones transversales $\sum_1$ y $\sum_2$ de la foliación, entonces la aplicación holonomia $h : \sum_1 \to \sum_2$ es absolutamente continua.

Observación 3.28. La foliación $\mathcal{F} = \{\Gamma_\beta\}_\beta$ dada por curvas análiticas construído en este capítulo 3 *Pesadilla de Fubini* no es transversalmente absolutamente continua, por tal motivo no deseamos trabajar con este tipo de foliaciones.

Teorema 3.29. *La foliaciones estables e inestables $\mathcal{F}^s$ y $\mathcal{F}^u$ de un difeomorfismo uniformemente hiperbólico de clase C^2 son transversalmente absolutamente continuas.*

Demostración. Ver demostración en (Brin y Stuck, 2002). □

Proposición 3.30. *Si $\mathcal{F}$ es una foliación transversalmente absolutamente continua, entonces es absolutamente continua.*

Demostración. Ver demostración en (Brin y Stuck, 2002). □

Definición 3.31. Un conjunto $S \subset M$ es llamado $s-saturado$, si

$$p \in S \Rightarrow W^s(p) \subset S$$

es llamado $u-saturado$, si

$$p \in S \Rightarrow W^u(p) \subset S$$

y $us-saturado$, si es $u-saturado$ y $s-saturado$.

Capítulo 4

Argumento de Hopf

En este capítulo desarrollamos los pasos para demostrar la ergodicidad de un difeomorfismo uniformemente hiperbólico f de clase C^2 usando el Argumento de Hopf.

4.1. Consecuencias del teorema ergódico de Birkhoff

En esta sección veremos una secuencia de resultados importantes que se deriva del teorema ergódico de Birkhoff. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo uniformemente hiperbólico de clase C^2 que preserva la medida de Lebesgue en M, donde M es una variedad Riemanniana compacta de clase C^∞.

Lema 4.1. *Sea $\varphi \in C^o(M, \mathbb{R})$ entonces φ^+ es constante en $\mathcal{F}^s$ en $m - ctp$ y φ^- es constante en $\mathcal{F}^u$ en $m - ctp$.*

Demostración. Sea $\varphi \in C^o(M, \mathbb{R}) \subset L^1(M, m)$ entonces $\varphi \in L^1(M, m)$, por el Teorema 2.50 existe un conjunto medible $N \subset M$ con $m(N) = 0$ tal que

$$\varphi^+(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \text{ y } \varphi^-(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{-k}(x))$$

existen para todo $x \in M\backslash N$.

Sean $x, y \in M\backslash N$ con $y \in W^s(x)$ y $\varepsilon > 0$, como φ es continua y M es compacto, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$p, q \in M,\ d(p, q) < \delta \ \Rightarrow\ |\varphi(p) - \varphi(q)| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Por otro lado, como $y \in W^s(x)$,entonces tomando $\delta > 0$ existe $m_o \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^m(x), f^m(y)) < \delta$ para todo $m \geq m_o$. Por (4.1) obtenemos

$$|\varphi(f^m(x)) - \varphi(f^m(y))| < \varepsilon, \ \ \forall\, m \geq m_0. \tag{4.2}$$

De (4.2) se tiene que

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y)))\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y))\right| = \sum_{k=0}^{m_o-1}\left|(\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y)))\right|$$

$$+ \sum_{k=m_o}^{n-1}\left|(\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y)))\right| < C + \varepsilon(n - m_o)$$

Entonces

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y)))\right| < \frac{C}{n} + \varepsilon\left(1 - \frac{m_o}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y)))\right| \leq \varepsilon \tag{4.3}$$

Luego, por (4.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
|\varphi^+(x) - \varphi^+(y)| &= \left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x)) - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(y))\right| \\
&= \left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y)))\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y)))\right| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto $\varphi^+(x) = \varphi^+(y)$ para todo $y \in W^s(x)$.

Ahora veamos que φ^- es constante en $\mathcal{F}^u$. En efecto, sean $x, y \in M\backslash N$ con $y \in W^u(x)$, entonces, para $\delta > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{-m}(x), f^{-m}(y)) < \delta$, para todo $m \geq m_0$. Por (4.1) obtenemos

$$\left|\varphi(f^{-m}(x)) - \varphi(f^{-m}(y))\right| < \varepsilon, \ \ \forall\, m \geq m_0 \tag{4.4}$$

De (4.4) se tiene que

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi(f^{-k}(x)) - \varphi(f^{-k}(y)))\right| \leq \sum_{k=0}^{m_o-1}\left|\varphi(f^{-k}(x)) - \varphi(f^{-k}(y))\right|$$

$$+ \sum_{k=m_o}^{n-1}\left|\varphi(f^{-k}(x)) - \varphi(f^{-k}(y))\right| < C + \varepsilon(n - m_o)$$

Entonces

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\varphi(f^{-k}(x))-\varphi(f^{-k}(y))\right)\right| < \frac{C}{n}+\varepsilon\left(1-\frac{m_o}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi(f^{-k}(x))-\varphi(f^{-k}(y)))\right| \leq \varepsilon \tag{4.5}$$

Luego, por (4.5) obtenemos

$$\begin{aligned}
|\varphi^-(x)-\varphi^-(y)| &= \left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^{-k}(x))-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^{-k}(y))\right| \\
&= \left|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi(f^{-k}(x))-\varphi(f^{-k}(y)))\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi(f^{-k}(x))-\varphi(f^{-k}(y)))\right| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto $\varphi^-(x) = \varphi^-(y)$ para todo $y \in W^u(x)$. □

Lema 4.2. *Sea $\varphi \in C^o(M,\mathbb{R})$, entonces $\varphi^+ = \varphi^-$ en $m-ctp$.*

Demostración. Definamos $A = \{x \in M : \varphi^+(x) > \varphi^-(x)\}$.

Afirmación 4.3. A es $f-$ invariante en $m-ctp$.

Demostración. En efecto, por el Teorema 2.50 existe $N \subset M$ con $m(N) = 0$ tal que, si $x \in M\backslash N$ y $x \in f^{-1}(A)$ entonces

$$\varphi^+(x) = \varphi^+(f(x)) > \varphi^-(f(x)) = \varphi^-(x) \Rightarrow x \in A \Rightarrow f^{-1}(A) \subset A. \tag{4.6}$$

Por otro lado, si $x \in M\backslash N$ y $x \in A$, entonces

$$\varphi^+(f(x)) = \varphi^+(x) > \varphi^-(x) = \varphi^-(f(x)) \Rightarrow f(x) \in A \Rightarrow A \subset f^{-1}(A). \tag{4.7}$$

Por (4.6) y (4.7), obtenemos $f^{-1}(A) = A$. □

Afirmación 4.4. $(\varphi.\chi_A)^+ = \varphi^+.\chi_A$ en $m-ctp$, donde $\chi_A : M \to \mathbb{R}$ es la función característica de A.

Demostración. En efecto, por la Afirmación 4.3 y por el Teorema 2.50, existe $N \subset M$ con $m(N) = 0$ tal que

$$(\varphi.\chi_A)^+(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\varphi.\chi_A)(f^k(x)) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(f^k(x)).\chi_A(f^k(x))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)).\chi_A(x) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) \right).\chi_A(x) = \varphi^+(x).\chi_A(x)$$

para todo $x \in M \backslash N$. □

Afirmación 4.5. $(\varphi.\chi_A)^- = \varphi^-.\chi_A$ en $m - ctp$, donde $\chi_A : M \to \mathbb{R}$ es la función característica de A.

Demostración. En efecto, por la Afirmación 4.3 y por el Teorema 2.50, existe $N \subset M$ con $m(N) = 0$ tal que

$$(\varphi.\chi_A)^-(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi.\chi_A)(f^{-k}(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{-k}(x)).\chi_A(f^{-k}(x))$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{-k}(x)).\chi_A(x) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^{-k}(x)) \right).\chi_A(x) = \varphi^-(x).\chi_A(x)$$

para todo $x \in M \backslash N$. □

Luego, por la Afirmación 4.4 y el Teorema 2.50 obtenemos

$$\int_A \varphi^+(x)dm = \int_M \varphi^+(x).\chi_A(x)dm = \int_M (\varphi.\chi_A)^+(x)dm = \int_M (\varphi.\chi_A)(x)dm$$

$$= \int_M (\varphi.\chi_A)^-(x)dm = \int_M \varphi^-(x).\chi_A(x)dm = \int_A \varphi^-(x)dm.$$

Afirmación 4.6. Si $\int_A (\varphi^+(x) - \varphi^-(x))dm = 0$, entonces $m(A) = 0$.

Demostración. En efecto, sea $A_k = \left\{ x \in A : \varphi^+(x) - \varphi^-(x) > \frac{1}{k} \right\}$ con $k \in \mathbb{N}$. Como $\frac{1}{k} < \varphi^+(x) - \varphi^-(x)$ para todo $x \in A_k$, entonces

$$0 \leq \frac{1}{k} m(A_k) \leq \int_{A_k} (\varphi^+(x) - \varphi^-(x))dm \leq \int_A (\varphi^+(x) - \varphi^-(x))dm = 0 \Rightarrow m(A_k) = 0$$

Además

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) = 0 \Rightarrow m(A) = 0$$

□

Análogamente, si $B = \{x \in M : \varphi^-(x) > \varphi^+(x)\} \Rightarrow m(B) = 0$. Finalmente, como

$$M = \left\{ x \in M : \varphi^+(x) > \varphi^-(x) \right\} \cup \left\{ x \in M : \varphi^+(x) = \varphi^-(x) \right\} \cup \left\{ x \in M : \varphi^-(x) > \varphi^+(x) \right\}$$

en $m - ctp$ y $m(M) > 0$, concluímos que $\varphi^+ = \varphi^-$ en $m - ctp$. □

Lema 4.7 (Argumento de Hopf)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo uniformemente hiperbólico de clase C^2 que preserva la medida de Lebesgue en M, donde M es una variedad Riemanniana de clase C^∞. Si $\varphi \in C^o(M, \mathbb{R})$ entonces φ^+ es constante en $m - ctp$.*

Demostración. Supongamos que φ^+ no es constante en $m-ctp$. Por los Lemas 2.44 y 4.2, existen en $m - ctp$

$$E = \{x \in M : \varphi^+(x) > \alpha\} \text{ y } F = \{x \in M : \varphi^-(x) \leq \alpha\}$$

con medida de Lebesgue positiva y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Afirmación 4.8. E es $f-$invariante.

Demostración. En efecto, por el Teorema 2.50 existe $N \subset M$ con $m(N) = 0$. Sea $x \in M\backslash N$ y $x \in f^{-1}(E)$ entonces $\varphi^+(x) = \varphi^+(f(x)) > \alpha$ asi $x \in E$, luego $f^{-1}(E) \subset E$. Recíprocamente, sea $x \in E$ y $x \in M\backslash N$ entonces $\varphi^+(f(x)) = \varphi^+(x) > \alpha$ asi $f(x) \in E$, luego $E \subset f^{-1}(E)$. En consecuencia $f^{-1}(E) = E$ en $m - ctp$. □

Afirmación 4.9. E es $s-$ saturado en $m - ctp$.

Demostración. Por el Lema 4.1 existe $N \subset M$ con $m(N) = 0$. Sea $p \in M\backslash N$ y $p \in E$, entonces

$$\varphi^+(q) = \varphi^+(p) > \alpha \text{ para todo } q \in W^s(p) \text{ y } q \in M\backslash N \Rightarrow W^s(p) \subset E \text{ en } m - ctp.$$

□

Afirmación 4.10. F es $f^{-1}-$invariante.

Demostración. En efecto, por el Teorema 2.50 existe $N \subset M$ con $m(N) = 0$. Sea $x \in M\backslash N$ y $x \in f(F)$ entonces existe $z \in F$ tal que $x = f(z)$. Como φ^- es $f^{-1}-$invariante, se tiene

$$\varphi^-(f(z)) = \varphi^-(f^{-1}(f(z))) = \varphi^-(z) \leq \alpha \Rightarrow x = f(z) \in F \Rightarrow f(F) \subset F$$

Recíprocamente, sea $x \in F$, desde que φ^- es $f^{-1}-$invariante se tiene

$$\varphi^-(f^{-1}(x)) = \varphi^-(x) \leq \alpha \Rightarrow f^{-1}(x) \in F \Rightarrow x = f(f^{-1}(x)) \in f(F) \Rightarrow F \subset f(F)$$

□

Afirmación 4.11. F es $u-$saturado en $m-$ctp.

Demostración. Por el Lema 4.1 existe $N \subset M$ con $m(N) = 0$. Sea $p \in M \backslash N$ y $p \in F$, entonces

$$\varphi^-(q) = \varphi^-(p) \leq \alpha \text{ para todo } q \in W^u(p) \text{ y } q \in M \backslash N \Rightarrow W^u(p) \subset F \text{ en } m - ctp.$$

□

Sea $y \in supp(m_F)$, por la Observación 3.21 existe un $\delta = \delta(\varepsilon_0) > 0$ tal que, para $d(p,q) < \delta$ entonces $W^s_{\varepsilon_0}(p)$ y $W^u_{\varepsilon_0}(q)$ se intersectan transversalmente en un único punto. Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño con $\varepsilon < \varepsilon_0$ y $2\varepsilon < \delta$; además, $p \in W^s_\varepsilon(y)$ y $q \in W^u_\varepsilon(y)$, entonces $W^u_{\varepsilon_0}(p) \cap W^s_{\varepsilon_0}(q) = \{I(p,q)\}$. Definimos

$$V = \{I(p,q) : p \in W^s_\varepsilon(y), q \in W^u_\varepsilon(y)\} = W^s_\varepsilon(y) \times W^u_\varepsilon(y)$$

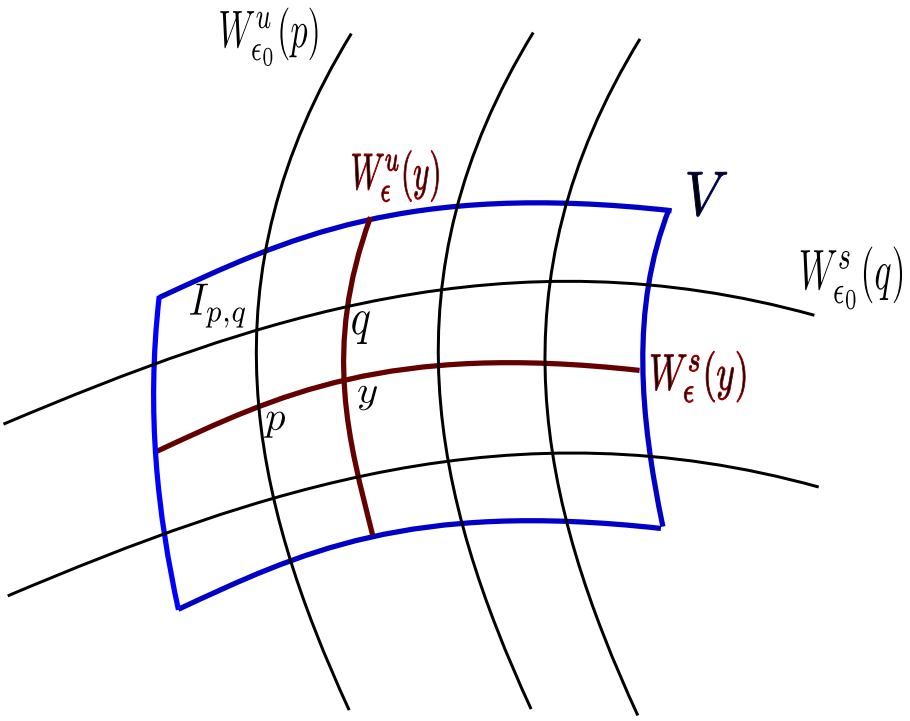

Figura 4.1: Rectángulo V

Entonces $V \cap F$ es una vecindad de y, luego $m(V \cap F) > 0$. Como $\mathcal{F}^s$ es absolutamente continua , existe $N \subset M$ con $m(N) = 0$ tal que $m_T(T \cap F) > 0$, donde $T = W^s(z) \cap V$ para algún $z \in M \backslash N$. Por otro lado, tomemos $x \in E$ y $W_V = W^s(x) \cap V$. Definimos la aplicación holonomía inestable en V

$$\begin{aligned} h^u \ : \ T &\longrightarrow W_V \\ p &\longmapsto h^u(p) = W^u(p) \cap W_V. \end{aligned}$$

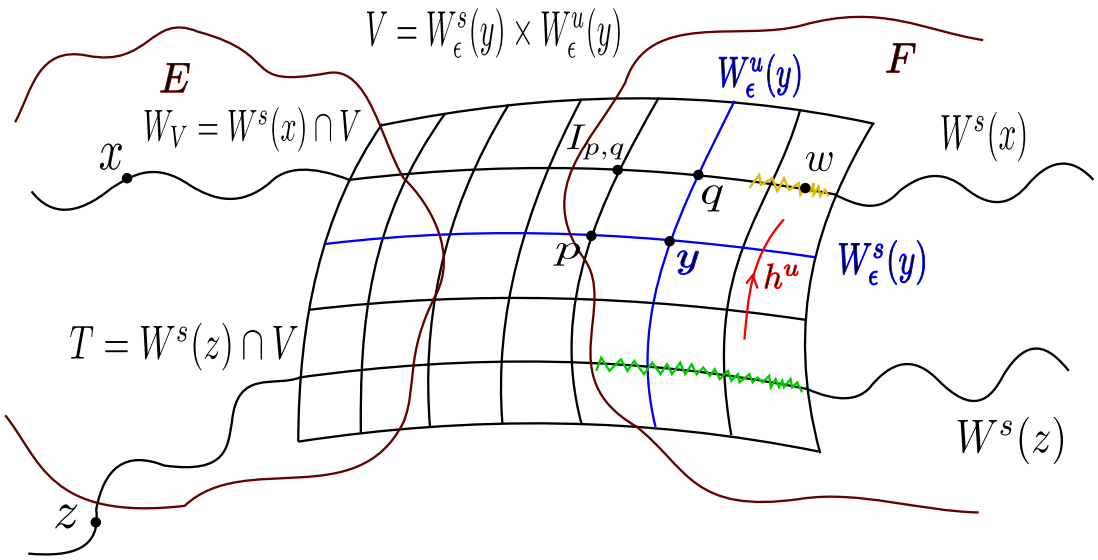

Figura 4.2: Holonomía h^u

Por el Teorema 3.29, $\mathcal{F}^u$ es transversalmente absolutamente continua, entonces h^u es absolutamente continua. Como $m_T(T \cap F) > 0$, entonces $m_{W_V}(h^u(T \cap F)) > 0$, lo cual es una contradicción. En efecto

Por el Lema 4.1, φ^+ es constante en $\mathcal{F}^s$ en $m-ctp$, además F es $u-saturado$ en $m-ctp$ entonces $h^u(T \cap F) \subset F$ en $m-ctp$. Luego, existe $w \in h^u(T \cap F)$ tal que

$$\alpha < \varphi^+(x) = \varphi^+(w) = \varphi^-(w) \leq \alpha$$

Por lo tanto, φ^+ es constante en $m-ctp$. Cabe indicar que, si trabajamos con el conjunto E, $supp(m_E)$ y el hecho que $\mathcal{F}^s$ es transversalmente absolutamente continua, obtenemos de manera similar que φ^- es constante en $m-ctp$. □

Teorema 4.12 (Argumento de Hopf)**.** *Si $f : M \to M$ es un difeomorfismo uniformemente hiperbólico de clase C^2 que preserva la medida de Lebesgue en M, donde M es una variedad Riemanniana compacta de clase C^∞, entonces la medida de Lebesgue m es ergódica.*

Demostración. Sea $\phi \in L^1(M, \mathbb{R})$ y $f-$ invariante. Sabemos que $L^1(M, \mathbb{R}) = \overline{C^o(M, \mathbb{R})}$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\phi_k \in C^o(M, \mathbb{R})$ tal que

$$d(\phi, \phi_k) < \frac{1}{k} \Rightarrow \int_M |\phi(x) - \phi_k(x)| dm < \frac{1}{k} \tag{4.8}$$

Desde que f es un difeomorfismo y haciendo $x = f^i(y)$ donde $i = 0, \cdots, n-1$, tenemos

$$\int_M |\phi(x) - \phi_k(x)| dm = \int_M |\phi(f^i(y)) - \phi_k(f^i(y))| dm = \int_M |\phi(y) - \phi_k(f^i(y))| dm$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_M \left|\phi(y) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\phi_k(f^i(y))\right| dm &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_M |\phi(y) - \phi_k(f^i(y))|dm \\ &= \int_M |\phi(x) - \phi_k(x)|dm\end{aligned} \tag{4.9}$$

Definamos $f_n = \left|\phi - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\phi_k \circ f^i)\right|$ es claro que f_n es una sucesión de funciones medibles tales que

* $|f_n| = \left|\phi - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\phi_k \circ f^i)\right| \leq |\phi| + R$, en $m - ctp$.
* $\lim_{n\to\infty} f_n = |\phi - \phi_k^+|$ en $m - ctp$.

Por el teorema de la convergencia dominada, obtenemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_M f_n(x)dm = \int_M |\phi(x) - \phi_k^+(x)|dm$$

Luego, por (4.8) y (4.9)

$$d(\phi_k^+, \phi) = \int_M |\phi(x) - \phi_k^+(x)|dm < \frac{1}{k} \tag{4.10}$$

Afirmación 4.13. Si $(\phi_k^+)_k$ es una sucesión de funciones constantes en $m-ctp$ y $\phi_k^+ \to \phi$ en $m - ctp$, entonces ϕ es constante en $m - ctp$

Demostración. En efecto, supongamos que ϕ no es constante en $m-ctp$. Como $\phi_k^+ \to \phi$ en $m-ctp$, entonces existe $N \subset M$ con $m(N) = 0$ y $x, y \in M\backslash N$, $x \neq y$ tal que $\phi(x) \neq \phi(y)$ y $\lim_{k\to\infty}\phi_k^+(x) = \phi(x)$ y $\lim_{k\to\infty}\phi_k^+(y) = \phi(y)$. Veamos el caso que $\phi(x) > \phi(y)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) > c > \phi(y)$. Para $\varepsilon = \phi(x) - c > 0$ existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\phi_k^+(x) - \phi(x)| < \phi(x) - c \Rightarrow c < \phi_k^+(x) \quad \forall\ k > k_1$$

También, para $\varepsilon = c - \phi(y) > 0$, existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\phi_k^+(y) - \phi(y)| < c - \phi(y) \Rightarrow \phi_k^+(y) < c \quad \forall\ k > k_2$$

Tomando $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ se tiene que $\phi_k^+(y) < \phi_k^+(x)$ para todo $k > k_0$ es decir ϕ_k^+ no es constante en $m - ctp$ para $k > k_0$, lo cual es una contradicción. Análogamente el caso $\phi(x) < \phi(y)$. Por lo tanto ϕ es contante en $m - ctp$. □

Sea $k \in \mathbb{N}$, por el Lema 4.7 se tiene que ϕ_k^+ es constante en $m - ctp$. Luego, por (4.10) y la Afirmación 4.13, concluímos que ϕ es constante en $m - ctp$. Finalmente, haciendo uso de la Proposición 2.57 tenemos que la medida de Lebesgue m es ergódica. □

Denotemos por $\mathrm{Diff}_m^r(M)$ como el conjunto de los difeomorfismos de clase C^r que preservan la medida de Lebesgue.

Definición 4.14. Un difeomorfismo de clase C^2 $f : M \to M$ que preserva la medida de Lebesgue es establemente ergódico en $\mathrm{Diff}_m^1(M)$, si existe un abierto $U \subset \mathrm{Diff}_m^1(M)$ con $f \in U$ tal que, para cada $g \in U$ de clase C^2 es ergódico.

4.2. Conclusión

Este trabajo sirve de motivación para continuar con el estudio de los sistemas dinámicos uniformemente hiperbólicos, así como extender el estudio a un conjunto más general como lo son los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos. Hasta 1994 los únicos ejemplos conocidos de difeomorfismos establemente ergódicos fueron los difeomorfismos uniformemente hiperbólicos, pero en el mismo año Grayson, Push, y Shub mostraron los primeros ejemplos con difeomorfismos parcialmente hiperbólicos (Grayson, Pugh, y Shub, 1994), cuyos ejemplos inspiraron la siguiente conjetura (Pugh y Shub, 1997):

Conjetura 4.15. *Ergodicidad estable es denso en el conjunto de los difeomorfismos parcialmente hiperbólicos de clase C^r que preservan la medida de Lebesgue, para todo $r > 1$.*

Bibliografía

Anosov, D. V. (1969). *Geodesic flows on closed riemann manifolds with negative curvature* (n.º 90). American Mathematical Society.

Anosov, D. V., y Sinai, Y. G. (1967). Certain smooth ergodic systems. *Uspehi Mat. Nauk*, *22*(5), 137.

Aoki, N., y Hiraide, K. (1994). Topological theory of dynamical systems: recent advances.

Avila, A., Viana, M., y Wilkinson, A. (2015). Absolute continuity, lyapunov exponents and rigidity i: geodesic flows. *Journal of the European Mathematical Society*, *17*(6), 1435–1462.

Barreira, L. (2012). *Ergodic theory, hyperbolic dynamics and dimension theory*. Springer Science & Business Media.

Bressaud, X., y Liverani, C. (2002). Anosov diffeomorphisms and coupling. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, *22*(1), 129–152.

Brin, M., y Stuck, G. (2002). *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press.

Camacho, C., y Neto, A. L. (2013). *Geometric theory of foliations*. Springer Science & Business Media.

Carrasco, P. D., Rodriguez-Hertz, F., Rodriguez-Hertz, J., y Ures, R. (2018). Partially hyperbolic dynamics in dimension three. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, *38*(8), 2801–2837.

Fernandez, P. (1976). Medida e integração, projeto euclides. *IMPA, Rio de Janeiro*.

Franks, J. (1969). Anosov diffeomorphisms on tori. *Transactions of the American Mathematical Society*, *145*, 117–124.

Grayson, M., Pugh, C., y Shub, M. (1994). Stably ergodic diffeomorphisms. *Annals of Mathematics*, *140*(2), 295–329.

Guillemin, V., y Pollack, A. (2010). *Differential topology* (Vol. 370). American Mathe-

matical Soc.

Hopf, E. (1939). *Statistik der geodätischen linien in mannigfaltigkeiten negativer krümmung*. Hirzel.

Hu, P.-C., y Yang, C.-C. (2013). *Differentiable and complex dynamics of several variables* (Vol. 483). Springer Science & Business Media.

Katok, A., y Hasselblatt, B. (1997). *Introduction to the modern theory of dynamical systems* (n.º 54). Cambridge university press.

Lee, J. M. (2013). Smooth manifolds. En *Introduction to smooth manifolds* (pp. 1–31). Springer, New York, NY.

Mañé, R. (2012). *Ergodic theory and differentiable dynamics* (Vol. 8). Springer Science & Business Media.

Milnor, J. (1997). Fubini foiled: Katok's paradoxical example in measure theory. *The Mathematical Intelligencer*, *19*(2), 30–32.

Oliveira, K., y Viana, M. (2014). Fundamentos da teoria ergódica. *Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática*.

Palis, J. J., y De Melo, W. (2012). *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*. Springer Science & Business Media.

Pugh, C., y Shub, M. (1997). Stably ergodic dynamical systems and partial hyperbolicity. *Journal of Complexity*, *13*(1), 125–179.

Pugh, C., Viana, M., y Wilkinson, A. (2007). Absolute continuity of foliations. *Preprint in M. Viana's personal webpage*.

Shub, M. (2013). *Global stability of dynamical systems*. Springer Science & Business Media.

Varão Filho, J. R. A. (2012). *Absolute continuity for diffeomorphisms with non-compact center leaves* (Tesis Doctoral no publicada). PhD thesis, IMPA.

Wilkinson, A. (2008). Smooth ergodic theory. *arXiv preprint arXiv:0804.0167*.

Zeraoulia, E. (2012). *Robust chaos and its applications* (Vol. 79). World Scientific.