Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Físicas
Escuela Profesional de Física

Estudio de las discontinuidades de Balmer de las estrellas supergigantes tempranas

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

AUTOR

Rogger Alberto MERCADO IBAÑEZ

ASESORES

Jean ZOREC
María Luisa AGUILAR (Coasesora)

Lima, Perú

1986



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Mercado, R. (1986). *Estudio de la discontinuidades de Balmer de las estrellas supergigantes tempranas*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Escuela Profesional de Física]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

A DORA Y ROGGER MIS PADRES, EL QUE HAYAN VIVIDO ME HA PERMITIDO LA PRESENTE TESIS; Y A JOSE ANDRES, MI HIJO, QUIEN MOTIVO LA FUERZA PARA SEGUIR.

ESTUDIO DE LAS DISCONTINUIDADES DE BALMER DE LAS ESTRELLAS SUPERGIGANTES TEMPRANAS

PROGRAMA

1.0 INTRODUCCION.

CAPITULO I

2.0 Propiedades generales de las supergigantes tempranas.

CAPITULO II

3.0 Las Discontinuidades de Balmer.

3.1 Definición de una Discontinuidad de Balmer.

3.2 Breve interpretación teórica de las discontinuidades de Balmer.

CAPITULO III

4.0 Determinación de las discontinuidades de Balmer de las Estrellas Supergigantes.

4.1 Datos Observacionales.

4.2 Cálculo del Exceso de Color E(B-V).

4.3 Cálculo de las Discontinuidades Empíricas y Resultados.

CAPITULO IV

5.0 Discontinuidades de Balmer Teóricas.

5.1 Modelos de Atmósferas Utilizados.

5.2 Cálculo de las discontinuidades Teóricas y Resultados.

CAPITULO V

6.0 Comparación de las Discontinuidades de Balmer Teóricas con las Observadas.

6.1 Introducción.

6.2 Cálculo de la Temperatura Efectiva de un Estrella.

6.2.1 Cálculo de la Temperatura Efectiva Aproximada.

6.2.2 Diámetros Angulares.

6.2.3 Iteración de la Temperatura Efectiva y Resultados.

6.3 Cálculo de la Luminosidad Bolométrica.

6.3.1 Cálculo de las Distancias Estelares.

6.3.2 Luminosidades Bolométricas: Resultados.

6.4 Cálculo de la Gravedad Superficial.

6.4.1 Cálculo de los Radios Estelares.

6.4.2 Determinación de las Masas Estelares.

6.4.3 Corrección de las Masas Estelares por Pérdida de Masa. Resultados.

6.4.4 Gravedades Superficiales: Resultados.

6.5 Comparación de las Discontinuidades Teóricas y Observadas.

6.5.1 Interpolación de las Discontinuidades Teóricas: Resultados.

6.5.2 Comparación y Discusión.

CAPITULO VI

7.0 La Rotación diferencial de las estrellas: Introducción.

7.1 Criterios de Estabilidad y Leyes de Rotación Probables.

7.2 Generalidades sobre las Deformaciones Estelares Producidas por la Rotación Diferencial.

7.3 El Teorema de Von Zeipel.

7.4 Generalidades sobre las Implicaciones de la Rotación Diferencial sobre las Observaciones.

CAPITULO VII

8.0 Cálculo de las Discontinuidades de Balmer de una Estrella deformada por la Rotación Diferencial.

8.1 Introducción.

8.2 Cálculo de la Gravedad Efectiva en un Punto de la Superficie de una Estrella deformada por la Rotación Diferencial.

8.3 Cálculo de la Temperatura Efectiva Local.

8.4 Cálculo de la Discontinuidad de Balmer integrada.

8.4.1 Planteo del Problema.

8.4.2 Cálculo de μ_n, g_n, s_n.

8.4.3 Cálculo de la Discontinuidad de Balmer.

8.4.4 Discusión.

AGRADECIMIENTO

La presente Tesis es un corolario del Convenio firmado entre la Universidad Nacional Mayor de San - Marcos (UNMSM) y la Unión Astronómica Internacional (UAI), para factibilizar en la Facultad de Ciencias Físicas el Programa de Profesores Visitantes de la UAI. Este convenio se firmó debido a los esfuerzos desplegados por la profesora principal de la FCF astrónoma María Luisa Aguilar, hoy Directora del Programa en Perú, para logar que la UNMSM ganará en 1983 la sede del Programa, compitiendo en méritos con países de todo el mundo.

No lejanos están los días en que el Dr. Jorge Sahade, actual Presidente de la UAI, iniciará una tarde de Agosto de 1984 el primer curso del programa: "Astronomía General". Así, curso a curso, fuimos adquiriendo conocimiento y aprendiendo de la experiencia. Los astrónomos

suspendiendo sus investigaciones llegaron a Perú a trabajar bajo las mismas condiciones que cualquier profesor de la UNMSM con la finalidad de formar astrónomos. Por ésto y mucho más, a nuestros profesores Dres. Jorge Sahado, Juan Carlos Cersosimo, Roberto Mendez, Horacio Dottori, Jean Zorec, José Luis Sersic y Josip Kleczek mi más sincero agradecimiento por sus esfuerzos, a veces no bien restribuidos, en enseñarnos la ciencia astronómica y, más aún, reconocido por la enseñanza que nos dá su ejemplo.

El Dr. Jean Zorec investigador del Institut D' Astrophysique de la Universidad de París, quien nos enseñó los fundamentos de la teoría de las atmósferas estelares, es Director de la presente Tesis. El Dr. Zorec y especialmente la Dra. Aguilar me ayudaron y aconsejaron acertadamente para avanzar con rápidez y precisión, tal es así que los resultados finales de éste trabajos salieron a luz pocos días antes de la partida del Dr. Zorec. Por ello expreso mi más cordial gratitud a mis profesores Dra. Aguilar y Dr. Zorec asesores de mi tesis, quienes me han conferido la gran responsabilidad y el elevado honor, que comparto con mis profesores y colegas, de ser quien presente y defienda la primera Tesis en Astrofísica que haya sido elaborada y sustentada en la UNMSM-Decana de América y en el Perú.

A mis profesores de la primera Facultad de Ciencias Físicas que me brindarón sus conocimientos y confianza, los físicos Angel Garay, Victor Peña, Mateo Márquez, Herbert Rufer y otros, a ellos quiero expresar mi gratitud por la ayuda y estímulos que siempre me han ofrecido.

Mi reconocimiento a los miembros del Seminario de Astronomía y Astrofísica de la Facultad de Ciencias Físicas de la UNMSM, dirigido por la Dra. Aguilar, quienes de muchas maneras han contribuido a la realización del presente trabajo. Con ellos compartimos la alegría del aprendizaje y los sinsabores de las no pocas dificultades.

Estoy en deuda también con quién desde algún lugar de la Argentina nos envió parte de un catálogo de flujos en el ultravioleta, que urgentemente necesitabamos para continuar los calculos de éste trabajo, copiado integramente a mano. Ese manuscrito lo estoy conservando como una ofrenda a la solidaridad entre los miembros de la comunidad astronómica internacional.

Por último y no con menos calor, deseo expresar mi gratitud a todos aquellos que me han aconsejado en muchas formas y que con su ayuda hicieron posible la culminación del presente trabajo. A mi esposa María Elena, reconocido por su comprensión al cuidar integra-

mente a José Andrés en los días de más arduo trabajo en esta tesis.

Rogger Mercado Ibañez.

ESTUDIO DE LAS DISCONTINUIDADES DE BALMER DE LAS ESTRELLAS SUPERGIGANTES TEMPRANAS

1.0 INTRODUCCION

Este estudio tiene por objeto comparar las discontinuidades de Balmer observadas de las estrellas supergigantes tempranas, con las discontinuidades predichas por los modelos clásicos de atmosferas estelares en equilibrio termodinámico local y basadas en los principios del equilibrio radiactivo y del equilibrio hidrostático.

En éste estudio se usarán 30 estrellas supergigantes cuyos tipos espectrales están en el intervalo 09 - A2 y de clases de luminosidad entre II (Gigantes brillantes) hasta Ia (Supergigantes brillantes).

La importancia del estudio de las discontinuidades de Balmer reside en el hecho que este parámetro es un excelente indicador de la temperatura efectiva. Esta a su vez es sinónimo de flujo bolométrico (erg-cm^{-2}-seg^{-1})

irradiado por una estrella. La discontinuidad de Balmer es además un parámetro espectral, que casi no depende de la absorción interestelar, cuya magnitud es frecuentemente mal conocida.

También la discontinuidad de Balmer es usada en el sistema de clasificación BCD, para determinar cuantitativamente el tipo espectral de una estrella.

En publicaciones recientes (Divan 1982, Remie y Lamers 1982) se ha observado, que los modelos clásicos mencionados de atmósferas estelares no predicen correctamente las discontinuidades de Balmer de las estrellas supergigantes de tipos espectrales tempranos. Las comparaciones entre los datos de observación y la teoría, se realizan por medio de la temperatura efectiva y la gravedad superficial de las estrellas, determinados con métodos semiempíricos.

Nuestro propósito es estudiar éstas discrepancias en función del tipo espectral, que depende principalmente de la temperatura efectiva de la estrella y en función de la clase de luminosidad que depende de manera preponderante de la gravedad superficial de las estrellas, siendo esta una función del estado de evolución. Uno de los objetivos principales de éste estudio reside precisamente en el hecho de ver si existe una relación de

la discrepancia mencionada entre la teoría y las observaciones con el estado evolutivo de una estrella, dado que por el contrario los modelos de atmósferas estelares predicen características espectrales de las estrellas enanas, que concuerdan razonablemente con las observaciones.

Los datos observacionales que se utilizarán en este trabajo son los flujos en el rango del ultravioleta lejano o espacial de longitudes de onda entre 1360 - 2740 Å obtenidos por el satélite europeo TD-1 (Jamar et al. 1976, Macaut-Hercot et al. 1978) y los flujos visibles y del infrarojo cercano dados por Johnson y Mitchell (1975) que han sido obtenidos a partir de datos fotométricos en el sistema a banda angosta de 13 colores.

Por otro lado, los modelos de atmósferas estelares que se utilizarán en las comparaciones con las observaciones, son los modelos en equilibrio termodinámico local, equilibrio radia tivo e hidrostático calculados por Kurucz (1979). Sabiendo que las discontinuidades de Balmer son determinadas a partir del espectro continuo, los efectos de desvío al equilibrio termodinámico local son pequeños. Esto hace que no tengamos que profundizar este estudio usando modelos en no-ETL donde por otro lado, el efecto de las líneas espectrales sobre la dis-

tribución global de energía no se ha tenido en cuenta.

La contribución principal de este trabajo, reside en el hecho que se dá una serie de parámetros fundamentales de un número importante de estrellas supergigantes y que se controla la calidad del ajuste de los cálculos teóricos con las observaciones en función, del tipo espectral y del estado de evolución de la estrella en su fase de supergigante.

En los capítulos finales de este trabajo trataremos de ver si se puede dar una explicación a las discrepancias mencionadas arriba, en función de las deformaciones que las estrellas pueden tener, si ellas rotan en forma diferencial. Mencionaremos que el momento angular es un parámetro fundamental de la estructura de una estrella, que en los modelos clásicos de atmósferas estelares no se tiene en cuenta. Sin embargo, el momento angular, por intermedio de la rotación diferencial, puede introducir deformaciones en la estructura de una estrella que producen eventualmente efectos sobre los parámetros observacionales. En este trabajo queremos explorar someramente estos efectos sobre las discontinuidades de Balmer para el caso particular de las supergigantes.

TABLA Nº 1.1

Estrellas supergigantes del Programa. Códigos, nombre, tipo espectral, luminosidad, velocidad.

#	HD	BS	Nombre	T.Esp.	L	VeSen i
1	2905	130	15 K Cas	B 1	I a	62
2	24398	1203	44 ζ Per	B 1	I b	72
3	30614	1542	9 α Cam	O 9.5	I a	95
4	34085	1713	19 β Ori	B 8	I a	42
5	36486	1852	34 δ Ori	O 9.5	I	148
6	37128	1903	46 ε Ori	B O	I a	85
7	37742	1948	50 ζ Ori	O 9.5	I b	127
8	38771	2004	53 κ Ori	B 0.5	I a	81
9	41117	2135	62 χ^2 Ori	B 2	I a	29
10	44743	2294	2 β CMa	B 1	II-III	36
11	46300	2385	13 Mon	A O	I b	17
12	51309	2596	20 ι CMa	B 3	II	26
13	52089	2618	21 ε CMa	B 2	II	60
14	53138	2653	24 o^2 CMa	B 3	I a	77
15	53244	2657	23 γ' CMa	B 8	II	27
16	57061	2782	30 τ CMa	O 9	I	120
17	58350	2827	31 η CMa	B 5	I a	57
18	62623	2996	3 Pup	A 2	I ab	68
19	87737	3975	30 η Leo	A O	I b	18
20	91316	4133	47 ρ Leo	B 1	I ab	69
21	157246	6462	γ' Ara	B 1	I b	353
22	164353	6714	67 Oph	B 5	I b	17
23	165024	6743	θ Ara	B 2	I b	139
24	166937	6812	13 μ Sgr	B 9	I a	88
25	173948	7074	λ Pav	B 2	II-III	217
26	197345	7924	50 α Cyg	A 2	I a	21
27	198478	7977	55 Cyg	B 3	I a	32
28	202850	8143	67 σ Cyg	B 9	I ab	29
29	206165	8279	9 Cep	B 2	I b	35
30	212593	8541	4 Lac	B 9	I	29

2.0 PROPIEDADES GENERALES DE LAS SUPERGIGANTES TEMPRANAS

Las supergigantes brillantes son estrellas luminosas con magnitud visual absoluta cerca de -7.0 para las estrellas Ia y cerca de -6.0 para estrellas Ib. Debido a que las líneas de absorción de éstos objetos son líneas finas, las supergigantes son facilmentes reconocibles por medio de espectros de moderada dispersión. Hay evidencias de que la composición de estas supergigantes, es similar a la del Sol.

El uso de un modelo de atmósfera de dos partes, consistente de fotósfera y (envoltura) manto es de muchísima importancia para entender los espectros de las supergigantes. La fotósfera, lugar de origen del espectro continuo, puede ser bien representado para la mayoría de las regiones espectrales por un modelo clásico de atmós-

fera compuesto de capas planas paralelas de gas en equilibrio hidrostático, radiativo y estadístico. Sin embargo las líneas conspícuas en el espectro se forman en la parte de la atmósfera situada fuera de la fotósfera que es el manto. En el manto son vistos los efectos del depositado de la energía no-radiativo ocurriendo movimientos a gran escala incluyendo flujos. Por esto los modelos de atmósferas basados en las restricciones clásicas del equilibrio radiativo e hidrostático sólo tienen cierta validez para representar el manto. Los breves cambios observados en los perfiles de líneas fuertes y la aparición esporádica de desplazamientos de los máximos de las líneas de absorción hace parecer probable que la estructura del manto sea no homogénea, lo cual viene a ser una característica en el manto de las supergigantes.

En el manto, las condiciones físicas son consecuencia de la energía no radiativa depositada allí y del paso de la radiación desde la fotósfera. En el caso de las supergigantes tempranas se ve facilmente por medio de las líneas de resonancia ultravioleta. La evidencia encontrada sugiere temperaturas electrónicas mayores que la temperatura efectiva de la estrella, flujos y no homogeneidad.

Los estimados de las temperaturas electrónicas en las regiones externas del manto pueden ser obtenidos detectando excesos de emisión libre-libre en el infrarojo cercano al cual es radiada desde las regiones externas del manto.

En promedio las supergigantes, están más distantes que las estrellas con igual magnitud aparente de la secuencia principal. De donde se tiene que la mayoría de las supergigantes tiene una significativa dependencia en longitud de onda con la extinción interestelar.

Por lo tanto, un paso preliminar importante cuando determinamos la temperatura efectiva de supergigantes haciendo uso del flujo integrado emitido en la superficie de la estrella, es determinar con exactitud la extinción interestelar a lo largo de la línea de la visual para cada supergigante.

Algunas supergigantes muestran H_{α} como una débil línea de emisión, la que es formada alrededor de 1.5 R_{*} (Hutchins, 1968b). En consecuencia existe la posibilidad de que la distribución de energía aparente de las estrellas puede ser modificado por emisión continua en el continuo de Balmer y Paschen del Hidrógeno y también por emisión de un continuo libre-libre. Puede entonces ser necesario corregir el flujo continuo observado debido

a la presencia de éste exceso de radiación, que enrojece el color intrínseco de lo predicho por el modelo.

Se tiene tres tipos de desviaciones de las formas espectrales predichas por medio de modelos de atmósferas.

1. Depresión de absorción debido a la yuxtaposición de Fe III y Cr III y otras líneas similares. La depresión alrededor de 1900 Å se debe principalmente a las líneas de Fe III, la de cerca a 2250 Å, mejor visible en las estrellas AO Ia, se debe al Cr III.

2. Una considerable emisión continua cerca a 3700 Å es evidente para todas las estrellas. Probablemente es debido al continuo de Balmer del hidrógeno.

3. Un exceso infrarojo expandido aproximadamente por 5000 Å en tipos B3 y tempranas. El exceso infrarojo se detecta por los 20000 Å.

Un color basado en los flujos entre los 1600 y 4000 Å es una buena medida de la temperatura efectiva de las estrellas brillantes. En esas longitudes de onda el flujo observado es ajustado muy bien por la distribución de flujo del modelo. El tamaño aparente de la discontinuidad de Balmer no es un buen criterio para determinar las temperaturas efectivas de las supergigantes brillantes debido a que la emisión desde el manto reduce la

discontinuidad de Balmer en absorción formado en la fotósfera (Underhill, 1982).

La temperatura efectiva de las supergigantes brillantes son significativamente menores que la temperatura efectiva de las estrellas de la secuencia principal del mismo subtipo, ya que para las supergigantes las líneas de clasificación están formadas principalmente en el manto donde el supercalentamiento es resultado de la energía no radia tiva depositada allí, y en el caso de las estrellas de la secuencia principal el supercalentamiento de las capas inferiores del manto es pequeño. El hecho de que los colores visibles intrínsecos de las supergigantes tempranas sea rojo en relación a los colores visibles intrínsecos de las estrellas de la secuencia principal del mismo subtipo, puede entonces ser entendido en términos de la diferencia de temperaturas efectivas. La temperatura efectiva de las supergigantes Ia y Ib del mismo subtipo son casi las mismas.

Las velocidades radiales en las supergigantes se determinan a partir de las líneas de absorción en el rango espectral visible. La velocidad radial del gas donde se forman los núcleos de la absorción de las líneas H_{α} es mayor que 140 $km\text{-}s^{-1}$ más negativas que las mostradas por el gas donde se forman los centros de las líneas

con números cuánticos altos mayores que n:7. La serie de Balmer en las supergigantes B Ia se extiende hasta n:22 (Underhill, 1970). Las líneas H_α, H_β y H_γ tienden a mostrar velocidades radiales más negativas que las de los miembros altos de la serie de Balmer.

Hay evidencias a partir del especto visible que en los mantos de las supergigantes se generan flujos radia tivos. Generalmente la velocidad de flujo indicados por los desplazamientos de los máximos centrales de absorción no es mayor de 140 $km\text{-}s^{-1}$. La velocidad de flujo observado se incrementa conforme la temperatura efectiva de la estrella aumenta.

Como resultado de las observaciones de los satélites se tiene entre otros que las supergigantes son deficientes en luz ultravioleta en relación a las estrellas de la secuencia principal de igual brillo en la región visible (igual subtipo). Debido a que las líneas conspicuas de la absorción ultravioleta de las supergigantes son fuertes, y sus grandes depresiones, algunas veces alcanzan el 100% de la absorción, deducimos que esas líneas son formadas en las zonas superiores de la atmósfera de las estrellas lejos de la fotósfera donde se forman el espectro continuo y las líneas débiles de ordenes inferiores. Las líneas ultravioleta fuertes llevan entonces información acerca del estado físico del manto,

mientras que las muchas líneas débiles del espectro ultravioleta nos dan información acerca de las condiciones en la fotósfera y las partes internas del manto.

En el rango espectral visible, uno de los efectos que hace el espectro de las supergigantes diferente del espectro de las estrellas de la secuencia principal del mismo subtipo, es la forma de las líneas de absorción HI y HeI que están ensanchadas por efecto Stark. El incremento de la densidad electrónica causa las alas de las líneas HI y HeI al incrementar en prominencia en relación al centro de las líneas conforme la luminosidad de la estrella decrece. En el caso de las supergigantes estos ensanchamientos son los mínimos.

Los perfiles de las líneas de resonancia ultravioleta en los espectros de las supergigantes demuestran que la presencia de componentes de líneas de emisión no es muy común. Cuando se ve la emisión, ella es generalmente débil en comparación con la intensidad de la absorción.

Cuando los flujos observados obtenidos a partir de la fotometría de 13 colores (Johnson y Mitchel, 1975) calibrados por medio de factores fotométricos (Hayes y Latham, 1975) y corregidos por la extinsión interestelar se plotean versus la longitud de onda; se comparan con la distribución del flujo según modelos, se encuentra

que muchas de las supergigantes tienen un exceso infrarojo. El exceso infrarojo en una longitud de onda λ se define como la diferencia entre el flujo observado en λ y corregido por la extinsión interestelar, y la cantidad $(\theta^2/4)\pi F_\lambda$ (modelo) la cual representa el flujo estelar donde θ es el diámetro angular y F_λ es el flujo monocromático en la longitud de onda λ (Kurucz, 1979).

Para temperaturas efectivas de supergigantes tempranas en el rango de 25000 a 18000 ^{o}K se tiene que las temperaturas electrónicas en la región que está emitiendo el exceso infrarojo es del orden de la temperatura efectiva de la estrella o algo más grandes. Las supergigantes Ib tienen un exceso infrarojo más pequeño en comparación con las supergigantes Ia. Se cree que el exceso infrarojo de una supergigante resulta de la emisión libre-libre por electrones en la vecindad de iones hidróge-no en el volumen de gas circundante a la supergigantes (Pecker 1963, 1972). La temperatura electrónica en la parte del manto que radía el exceso infrarojo es cerca de 22000 ^{o}K para las supergigantes de todas las temperaturas efectivas.

3.0 LAS DISCONTINUIDADES DE BALMER

3.1 DEFINICION DE UNA DISCONTINUIDAD DE BALMER

La discontinuidad de Balmer observada se debe a la discontinuidad de la sección eficáz de la absorción continua del átomo de hidrógeno. Esta discontinuidad se produce en el límite de la serie de Balmer, es decir en el límite de las absorciones que parten del nivel n = 2 del átomo de hidrógeno. La longitud de onda teórica es λ = 3648 Å. En un espectro estelar ésta discontinuidad aparece sin embargo en longitudes de onda que pueden ser diferentes según la gravedad superficial de una estrella. En efecto a cada gravedad corresponderá una cierta densidad o presión del gas superficial de una estrella. Esta presión provoca el "borrado" de los niveles superiores del átomo de hidrógeno por lo cual la transición al continuo a partir del nivel n = 2 puede

involucrar energías ligeramente menores de hasta $\Delta\lambda$ = 75 Å con respecto a la longitud de onda teórica λ = 3648 Å, es decir la discontinuidad de Balmer puede estar ubicada en λ = 3720 Å.

Observacionalmente la discontinuidad de Balmer se define en λ = 3700 Å por la diferencia de los logaritmos decimales de los flujos dada por la relación.

$$D = \log \left(\frac{f^{o}_{3700^{+}}}{f^{o}_{3700^{-}}} \right) \qquad (3\text{-}1)$$

donde $f^{o}_{3700^{\pm}}$ son los flujos desenrrojecidos o corregidos de la absorción interestelar y extrapolados a λ = 3700 Å, donde el flujo correpondiente al continuo de Paschen está dado por $f^{o}_{3700^{+}}$ y el flujo del correspondiente continuo de Balmer por $f^{o}_{3700^{-}}$. La discontinuidad D se mide en dex.

La definición de la discontinuidad de Balmer observacional dada por la expresión (1) ha sido introducida por Chalonge y Divan (1952).

3.2 BREVE INTERPRETACION TEORICA DE LA DISCONTINUIDAD DE BALMER

Los modelos de atmósferas estelares calculados hasta el presente estań basados en dos principios físicos fundamentales. Estos principios expresan por un lado,

la condición del equilibrio mecánico de la atmósfera y por otro, la condición de su equilibrio térmico. Para ello la atmósfera estelar debe encontrarse en equilibrio hidrostático y en equilibrio radiativo.

La estructura térmica de la atmósfera se obtiene entonces de la ecuación que expresa el equilibrio radiativo.

$$\int_0^\infty \chi_\nu (J_\nu - S_\nu)\, d\nu = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

donde χ_ν es el coeficiente de absorción másico (cm^2/gr), J_ν es la intensidad media de radiación y S_ν es la función fuente. La ecuación escrita expresa la necesidad que en cada punto de la atmósfera donde la energía es transportada por radiación, la cantidad de energía absorbida debe ser igual a la cantidad de energía emitida. En una atmósfera de capas planas paralelas, la condición del equilibrio radiativo conduce a la condición de que el flujo radiativo es constante con la profundidad óptica. El flujo radiativo constante se acostumbra medir en unidades de temperatura. La temperatura resultante lleva el nombre de temperatura efectiva (Teff) y está definida por

$$F = \int_0^\infty F_\nu\, d\nu = \frac{\sigma}{\pi} Teff^4 \qquad (3\text{-}3)$$

donde F_ν es el flujo radiativo monocromatico ($erg\text{-}seg^{-1}\text{-}Strad^{-1}\text{-}H_z^{-1}$) en la frecuencia ν y σ la cons-

tante de Stefan-Boltzmann.

Por otro lado, la estructura en densidad de una atmósfera es obtenida a partir de la condición del equilibrio hidrostático; la ecuación que expresa éste equilibrio es:

$$\frac{d\,p}{d\,r} = -\,g\,\rho \qquad (3\text{-}4)$$

donde P es la presión total del medio (gas y radiación), g es la gravedad superficial y ρ es la densidad del material.

El transporte radiativo de energía se describe por intermedio de la ecuación del transporte, que en el caso de una geometría en capas plano-paralelas de la atmósfera, tiene la siguiente forma:

$$\mu\,\frac{d\,I}{d\,\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \qquad (3\text{-}5)$$

donde $I_\nu = I_\nu\,(\tau_\nu\,,\,\mu\,)$ es la intensidad específica de radiación, μ es el coseno del ángulo que forma un haz de rayos con la dirección de la visual del observador, ν es la frecuencia de la radiación estudiada, S_ν es la función fuente de energía definida como la relación entre el coeficiente de emisión y el coeficiente de absorción y τ_ν es la profundidad óptica que mide la canti-

dad de caminos libres medios existentes entre el borde de la atmósfera y el punto interior de la atmósfera donde se analizan las propiedades físicas de ésta.

De la solución formal de la ecuación del transporte se obtiene que el flujo observado de la radiación en una frecuencia dada corresponde al valor de la función fuente en la profundidad óptica $\tau_\nu = 2/3$. Esta relación - se conoce con el nombre de relación de Barbier. Tenemos entonces que el flujo observado esta dado por

$$F_\nu \ (\tau_\nu = 0) \simeq S_\nu \ (\tau_\nu = 2/3) \qquad (3\text{-}6)$$

La relación de Barbier puede ser usada para dar una interpretación simple de la discontinuidad de Balmer.

Como hemos visto en la sección 3.1 la discontinuidad de Balmer está dada por:

$$D = \log \left(\frac{F_{3700^+}}{F_{3700^-}}\right) \qquad (3\text{-}7)$$

Es decir la relación entre el flujo radiativo calculado en $\lambda = 3700$ Å antes y después de la discontinuidad de la absorción continua del átomo de hidrógeno. El flujo F_{3700^+} corresponde al continuo de Paschen y F_{3700^-} pertenece al continuo de Balmer.

Usando la relación de Barbier tenemos entonces:

(3-8)

$$D \simeq \log \left[\frac{S_{3700}\left[\tau_{3700}{}^{+} = 2/3\right]}{S_{3700}\left[\tau_{3700}{}^{-} = 2/3\right]} \right]$$

es decir se trata de una relación entre flujos radiativos que provienen de profundidades ópticas en λ = 3700 Å que caracterizan dos profundidades geométricas en la atmósfera estelar. La discontinuidad de Balmer es así una función de la relación entre las temperaturas de esos dos puntos geométricos, conocidos con el nombre de "profundidades de formación" de los flujos respectivos en λ = 3700 Å.

Suponiendo que la atmósfera se encuentra en equilibrio termodinámico local (poblaciones de niveles atómicos determinados por la estadística de Boltzmann, distribución de las velocidades de las partículas dadas por la ley de Maxwell; la ionización descrita por la ley de Saha y la función fuente dada por la ley de Kirchhoff-Planck), es decir:

(3-9)

$$S_\nu = B_\nu (T)$$

Donde B_ν es la función de Planck, tenemos, despreciando las transiciones inducidas:

(3-10)

$$D \simeq \frac{hc}{\lambda_{\pm} K} \left[\frac{1}{T^{-}} - \frac{1}{T^{+}} \right] \log e$$

donde $\lambda_{\pm} = 3700$ Å, $T^{+} = T\ (\tau_{3700^{+}} = 2/3)$, $T^{-} = T\ (\tau_{3700^{-}} = 2/3)$, h es la constante de Planck, c la velocidad de la luz y k la constante de Boltzmann.

Resolviendo la ecuación del equilibrio radiativo- y considerando que el coeficiente de absorción es gris por zonas del espectro continuo, se puede demostrar que existe la siguiente relación entre las temperaturas T^{+} y T^{-} (Zorec 1986b): (3-11)

$$\frac{1}{T^{-}} - \frac{1}{T^{+}} = \frac{Ln\ 2}{T_{eff}} \left[\frac{1}{1 + \frac{hc}{\lambda_{\pm} K\ T_{eff}}} \right]$$

Esto significa que

(3-12)

$$D = D\ (T_{eff})$$

Es decir la discontinuidad de Balmer es esencialmente un indicador de la temperatura efectiva de la estrella. Vemos también que la discontinuidad de Balmer es una función monótoma de T_{eff}^{-1}. Puede verse facilmente que D decrece para un parámetro T_{eff} que aumenta.

En ésta aproximación, al considerar que los coeficientes de absorción son grises ó constantes por interva-

los de longitudes de onda correspondientes a cada espectro continuo, hemos desacoplado el problema de la estructura térmica de la estrella, de su estructura en densidad. Si no se efectúa ésta aproximación, entonces la discontinuidad de Balmer resulta, por intemedio de las profundidades ópticas $\tau_{\pm}$ donde:

$$\tau_{\pm} = -\int_{o}^{\infty} \chi_{\pm}\, \rho \cdot dz \simeq \overline{\chi}_{\pm} \cdot \overline{\rho(z)} \cdot \Delta z \qquad (3\text{-}13)$$

también una función de la densidad en los puntos $\Delta z_{\pm}$. En (13) $\chi_{\pm}$ son los coeficientes de absorción másicos (cm^2/gr) promediados en $\Delta z_{\pm}$, $\overline{\rho}$ es una densidad promedio en la profundidad Δz. Pero sabiendo que la densidad está regida por la ecuación del equilibrio hidrostático donde el parámetro fundamental es g (gravedad superficial de la estrella), se tendrá en un caso general que

$$D = D\,(T_{eff},\ \log g) \qquad (3\text{-}14)$$

Sin embargo debemos insistir que la dependencia de la discontinuidad de Balmer con la gravedad superficial es de menor importancia que su dependencia con la temperatura efectiva.

En las estrellas sin rotación, cuyas atmósferas están en equilibrio radiativo y en equilibrio hidrostático, basta un sólo valor de la temperatura efectiva,

y de la gravedad para producir el espectro sintético emitido, así como en particular el valor de su discontinuidad de Balmer. En una atmósfera en rotación, necesitamos aún tener en cuenta la distribución de su gravedad superficial que por el teorema de Von Zeipel condiciona el flujo local en cada punto de la superficie estelar y determina así una distribución dada de la temperatura efectiva en función de la latitud. La discontinuidad de Balmer observada de una estrella será entonces necesariamente una función de esta distribución de temperaturas efectivas, dado que observacionalmente la superficie estelar no se puede resolver en partes individuales, como por ejemplo puede hacerce en el caso del Sol.

En el caso de las estrellas supergigantes, el desacuerdo existente entre las discontinuidades de Balmer observadas y las discontinuidades predichas por la teoría de atmósferas estelares en equilibrio radiativo y equilibrio hidrostático, presentan en ciertos casos desacuerdos importantes. Nos ha parecido interesante estudiar la variación de la discontinuidad de Balmer en función de las modificaciones que acarrea la rotación y en particular la rotación diferencial. Como las discontinuidades de Balmer observadas en los casos discordantes con la teoría, son más pequeñas que las predichas por la teoría para la misma temperatura efectiva, la

relación obtenida anteriormente donde:

(3-15)

$$D \sim \frac{1}{T_{eff}}$$

inspira nuestra interpretación. En efecto según ésta relación, vemos que la discontinuidad de Balmer es una función decreciente con la temperatura efectiva; por su parte la rotación diferencial introduce una fuerte variación de la temperatura efectiva en función de su latitud. En particular, la temperatura efectiva en los polos es más grande que en el ecuador estelar. Sabiendo que las estrellas supergigantes tienen valores pequeños del parámetro Ve. Sen i donde Ve es la velocidad lineal de rotación en el ecuador e i es el ángulo de inclinación del eje de rotación con respecto a la línea de la visual del observador, podemos suponer que i es pequeño en las supergigantes. Siendo pequeña la inclinación i, tenemos entonces la posibilidad de observar zonas de la estrella donde la temperatura efectiva tiene valores más grandes que contribuyen con valores más pequeños de la discontinuidad de Balmer. Así el fenómeno de la rotación diferencial podría eventualmente explicar parcialmente la existencia de discontinuidades de Balmer, demasiado pequeñas en algunas supergigantes con respecto

a los valores predichos por la teoría clásica de las atmósferas estelares sin rotación.

4.0 DETERMINACION DE LAS DISCONTINUIDADES DE BALMER DE LAS ESTRELLAS SUPERGIGANTES

4.1 DATOS OBSERVACIONALES

Para calcular las discontinuidades de Balmer a partir de los flujos observados de las estrellas se utiliza la expresión dada en el capítulo 3.1.

$$D = \log \left[\frac{f^{o}_{3700^{+}}}{f^{o}_{3700^{-}}} \right] \qquad (4\text{-}1)$$

De la expresión (1) se vè que necesitamos conocer los flujos desenrojecidos de las estrellas en la longitud de onda de la definición $\lambda = 3700$ Å.

Dado de que no es posible utilizar magnitudes observadas justamente en la $\lambda = 3700$ Å, utilizamos las observaciones en el sistema fotométrico de 13 colores

que comprende el rango espectral $\lambda\lambda$ 3371 - 11084 Å (Johnson y Mitchell, 1975). De la calibración absoluta de las magnitudes observadas en cada una de las 13 longitudes de onda del sistema se obtienen los flujos monocromáticos observados en cada λ del sistema. Para ello se utiliza la relación deducida a partir de la ley de Pogson

$$\Delta m = m_{\lambda}^{obs} - m_{\lambda}^{o} = -2.5 \log \left[\frac{F_{\lambda}^{obs}}{F_{\lambda}^{o}} \right] \qquad (4\text{-}2)$$

donde:

$$F_{\lambda}^{0bs} = F_{\lambda}^{o} \times 10^{-0.4 m_{\lambda}^{obs}} \qquad (4\text{-}3)$$

y F_{λ}^{o} es la energía por unidad de área y por unidad de tiempo que produce la sensación $m_{\lambda}^{o} = 0$. Esta calibración se basa en el flujo medido para la estrella α Lyr en la longitud de onda 5556 A (Hayes y Latham, 1975):

$$F_{5556}^{o} (\alpha \text{ Lyr}) = (3.45\text{-}3.50) \times 10^{-9} \text{ ergio-cm}^{-2}.\text{s}^{-1}\text{-Å}^{-1}$$

Los flujos observados a partir de las calibraciones absolutas de las magnitudes observadas en el sistema fotométrico de 13 colores son los calculados en una computadora grande utilizando el programa Fortran IV dado por Johnson y Mitchell, 1975.

Para interpolar el valor del flujo observado desenrojecido en la longitud de onda de la definición 3700

$\mathring{A}$, tanto para el flujo en el continuo de Paschen $f^{o}_{3700^{+}}$ como para el flujo en el continuo de Balmer $f^{o}_{3700^{-}}$, hemos convertido los flujos listados por la computadora a unidades ergio-cm^{-2}-seg^{-1}-$\mathring{A}^{-1}$ y corregido también por un factor. Estos flujos deben ser también corrgidos de la extinsión del medio interestelar por lo que debe considerarse la absorción del Medio Interestelar (MIE) calculando el exceso de color para modificar o corregir los flujos como se explica más adelante.

Para el cálculo del flujo observado en todo el espectro se usan en éste trabajo los flujos medidos en el ultravioleta por el satélite europeo TD-1, en el intervalo 1360 - 2740 $\mathring{A}$.

4.2 CALCULO DEL EXCESO DE COLOR E (B-V)

Los flujos de radiación emitidos por las estrellas recorren hasta llegar a nosotros, grandes distancias interactuando en el camino con la materia existente en el medio interestelar la cual puede dispersar, absorver ó reflejar parte de la radiación incidente por lo que la energía que se detecta y mide por unidad de área y unidad de tiempo no es cualitativa ni cuantitativamente la misma que la que fué emitida en la superficie de la estrella.

Debido a la extinción mencionada, los flujos estelares medidos por medio de satélites en el rango ultravioleta y por telescopios en los rangos visibles e infrarojo del espectro electromagnético, deben ser corregidos de la absorción del medio interestelar, agregándose la fracción de radiación que fue extinguida por el MIE. Esta fracción no es medida directamente sino que debe ser estimada en función de los parámetros fundamentales, la absorción mono-cromática A_λ y/o el exceso de color E (B-V).

Para una longitud de onda λ se define la absorción monocromática A_λ, como la diferencia de dos magnitudes del brillo estelar, la magnitud aparente afectada por la absorción del medio interestelar es decir enrojecida y la magnitud absoluta que se considera no estar afectada por la extinsión del MIE es decir desenrojecida, lo cual se expresa con la siguiente relación

(4-4)

$$A_\lambda = m(\lambda) - m_o(\lambda)$$

donde el índice "o" indica para todos los casos que el valor medido ha sido corregido de la absorción del medio interestelar.

Ahora observando en dos longitudes de onda tenemos que la absorción monocromática para cada caso es

$$A(\lambda_1) = m(\lambda_1) - m_o(\lambda_1) \qquad (4\text{-}5)$$

$$A(\lambda_2) = m(\lambda_2) - m_o(\lambda_2) \qquad (4\text{-}6)$$

haciendo la diferencia de las dos observaciones se tiene que:

$$A(\lambda_2) - A(\lambda_1) = \left[m(\lambda_2) - m(\lambda_1)\right] - \left[m_o(\lambda_2) - m_o(\lambda_1)\right] \qquad (4\text{-}7)$$

donde $m(\lambda_2) - m(\lambda_1)$ son los índices de color. El exceso de color se define entonces como la diferencia de las dos absorciones monocromáticas lo cual se escribe

$$E(\lambda_2-\lambda_1) = \left[m(\lambda_2) - m(\lambda_1)\right] - \left[m_o(\lambda_2) - m_o(\lambda_1)\right] \qquad (4\text{-}8)$$

En el supuesto caso de que el medio interestelar no afectase a los flujos estelares, el exceso de color será cero pues se cumpliría la igualdad.

$$m(\lambda_i) = m_o(\lambda i) \qquad (4\text{-}9)$$

y la absorción; dada por la ecuación (4) sería nula; mientras que si la extinción tiende a valores grandes, el exceso de color por definición tenderá también hacia valores grandes y positivos es decir que el flujo estará más enrojecido.

Las magnitudes monocromáticas del brillo estelar están definidas de acuerdo a la respuesta del ojo humano

a los estímulos luminosos, por la Ley de Pogson (1850)

$$m_\lambda = -2.5 \log F_\lambda^{obs} + C \qquad (4\text{-}10)$$

donde F_λ^{obs} es el flujo luminoso observado en la longitud de onda λ y c es la constante que establece una correspondencia entre el sistema de clasificación de Hiparco y el actual.

Para el caso en que la extinción interestelar sea nula, los flujos medidos serán. flujos desenrojecidos, que corresponderán a magnitudes aparentes desenrojecidas m_λ^o

$$m_\lambda^o = - 2.5 \log F_\lambda^o + c \qquad (4.11)$$

donde F_λ^o es el flujo desenrojecido.

Haciendo la diferencia entre las magnitudes enrojecida y no enrojecida se tiene el logaritmo del cociente de los flujos

$$m_\lambda - m_\lambda^o = - 2.5 \log \left(\frac{F_\lambda^{obs}}{F_\lambda^o} \right) \qquad (4\text{-}12)$$

de donde reescribiendo para el flujo corregido se tiene la expresión

$$F_\lambda^o = F_\lambda^{obs} \cdot 10^{0.4\,(m_\lambda - m_\lambda^o)} \qquad (4\text{-}13)$$

por lo visto en líneas anteriores, la diferencia de dos

magnitudes es una absorción monocromática, entonces se tiene que

$$m_\lambda - m^o_\lambda = A_\lambda \qquad (4\text{-}14)$$

obteniéndose una expresión que permte calcular el flujo corregido en función de la absorción monocromática A_λ

$$F^o_\lambda = F^{obs}_\lambda \times 10^{0.4.A_\lambda} \qquad (4\text{-}15)$$

Observacionalmente percibimos una absorción dada por el exceso de color $E\ (\lambda_2 - \lambda_1)$

$$A_{\lambda_1} = R\ (\lambda_1)\ E\ (\lambda_2 - \lambda_1) \qquad (4\text{-}16)$$

donde el parámetro $R\ (\lambda)$ está en función del medio interestelar y es diferente para cada región del espacio. Citemos que Hilner y Johnson (1956) midieron en el sistema UBV

$$R = A_V\ /E\ (B\text{-}V) = 3 + 0.3 \qquad (4\text{-}17)$$

En nuestro caso consideramos que

$$A\ (\lambda_1) = K\ (\lambda_1)\ E\ (\lambda_2 - \lambda_1) \qquad (4\text{-}18)$$

por lo que el flujo corregido de la absorción del medio interestelar se calcula finalmente por la expresión

$$F^o_\lambda = F^{obs}_\lambda \times 10^{0.4\ K_\lambda E\ (\lambda_2 - \lambda_1)} \qquad (4\text{-}19)$$

En el sistema fotométrico UBV se tiene que el flujo co-

rregido es

$$F_{\lambda}^{o} = F_{\lambda}^{obs} \cdot 10^{0.4\ K_{\lambda} \cdot E\ (B-V)} \qquad (4\text{-}20)$$

donde los K_{λ} están dados por Savage y Mathis (1979), Tabla A.1.

De lo expuesto hasta aquí se deduce que se requiere calcular un buen valor del exceso de color E(B-V) para obtener los flujos estelares corregidos de la absorción del medio interestelar.

1. Exceso de Color $E(B-V)_{UBV}$

En el sistema fotométrico a banda ancha denominado UBV por Johnson y Morgan (1951) establecido para las regiones espectrales centradas en las longitudes de onda: λ_U = 3650 Å para la región ultravioleta, λ_B= 4400 Å para la región visible (azul) y λ_V = 5480 Å para la región visible, se tienen las siguientes magnitudes aparentes $m(\lambda_U) = U$, $m(\lambda_B) = B$, $m(\lambda_y) = V$ respectivamente.

Como se vió en los párrafos precedentes, el exceso de color está definido por la diferencia de dos absorciones monocromáticas. En el sistema UBV se tiene para la región visible que el exceso de color es

$$E\ (B-V) = A_B - A_V \qquad (4\text{-}21)$$

donde la absorción monocromática en la longitud de onda de B es

$$A_B = B - B_o \qquad (4 - 22)$$

y la absorción monocromática en la longitud de onda de V es

$$A_V = V - V_o \qquad (4-23)$$

por lo tanto el exceso de color está dado por la diferencia de los índices de color enrojecido e intrínseco respectivamente

$$E\ (B - V) = (B - V) - (B - V)_o \qquad (4-24)$$

El índice de color (B - V) observado de cada estrella se obtiene directamente de las observaciones mientras que el índice de color intrínseco es obtenido por medio de calibraciones realizadas con estrellas cercanas que se las considera muy poco afectadas por la absorción del medio interestelar.

Para las estrellas de nuestro programa, el exceso de color en el sistema fotométrico UBV se ha tomado directamente del Ultraviolet Bright Star Spectrophotometric Catalogue y del Supplement to the Ultraviolet Bright Star Spectrophotometric Catalogue; Jamar, Macau-Hercot (1976); Macau-Hercot, Jamar et al. (1978). Estos excesos

de color $E(B - V)_{UBV}$ se presentan en la Tabla 4.1.

2. Cálculo del Exceso de Color $E(B-V)_Q$

Para establecer un sistema fotométrico se necesitan al menos tres magnitudes por decir m_1, m_2, m_3 que se corresponden con las longitudes de onda $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ respectivamente. Los excesos de color considerando estas tres magnitudes serán los siguientes

$$E(\lambda_1 - \lambda_2) = (m_1 - m_2) - (m_1 - m_2)_o \qquad (4\text{-}25)$$

y

$$E(\lambda_2 - \lambda_3) = (m_2 - m_3) - (m_2 - m_3)_o \qquad (4\text{-}26)$$

Haciendo el cociente de los excesos de color se tiene que

$$\frac{E(\lambda_1 - \lambda_2)}{E(\lambda_2 - \lambda_3)} = \frac{(m_1 - m_2) - (m_1 - m_2)_o}{(m_2 - m_3) - (m_2 - m_3)_o} \qquad (4\text{-}27)$$

En la fotométria UBV, Johnson y Morgan (1953) determinaron que el cociente de los excesos de color considerando las tres regiones espectrales U,B y V es:

$$\frac{E\,(U - B)}{E\,(B - V)} = 0.72 \qquad (4\text{-}28)$$

con lo que es posible calcular a partir de (27) y (28) un parámetro Q para las líneas de enrojecimiento y que

está definido en el trabajo citado por la ecuación:

$$Q = (U - B) - 0.72\ (B-V) \qquad (4\text{-}29)$$

De las observaciones realizadas para estrellas próximas que se consideran no están afectadas por la extinción del medio interestelar, se conoce que el índice de color intrínseco en función del parametro Q es

$$(B - V)^{o}_{Q} = 0.337\ Q - 0.009 \qquad (4\text{-}30)$$

Con el índice de color corregido en función del parámetro Q que se obtiene de la expresión (30) se calcula un exceso de color en función del parámetro Q utilizando la siguiente relación

$$E(B - V)_{Q} = (B - V) - (B-V)^{o}_{Q} \qquad (4\text{-}31)$$

Los excesos de color obtenidos de la ecuación (31) para las supergigantes de nuestro programa se presentan en la tabla 4.1.

3. Cálculo del Exceso de Color $E(B - V)_{2200}$

Al analizar la distribución de energía (flujos en función de la longitud de onda) en el rango espectral de ultravioleta lejano, observamos que alrededor de la longitud de onda 2200 Å existe una depresión cuya profundidad varía para cada estrella. Esta depresión representa la absorción de la radiación por el medio interestelar

debida principalmente a las nubes de polvo cósmico, compuestos probablemente por granos microscópicos formados por grafitos o carbonos.

Utilizaremos para nuestro análisis los flujos obtenidos por el satélite europeo TD-1 en el rango $\lambda\lambda$1360-2740 Å con una resolución de 36 Å (Jamar et al., 1976; Macau-Hercot et al., 1978).

Como ejemplo mostramos en la figura 4.1 la distribución espectral de energía de la estrella HD 166937 de nuestro programa, tomada del Atlas realizado en base a los datos del sátelite europeo IUE en el rango espectral $\lambda\lambda$1150-3200 Å con una resolución de 7 Å (Heck et al., 1984). En esta figura se observa claramente una gran depresión de absorción alrededor de 2200 Å.

Realizar el "llenado" de la depresión en 2200 Å significa corregir el flujo observado alrededor de esta banda, lo que nos lleva a calcular un exceso de color $E(B-V)_{2200}$.

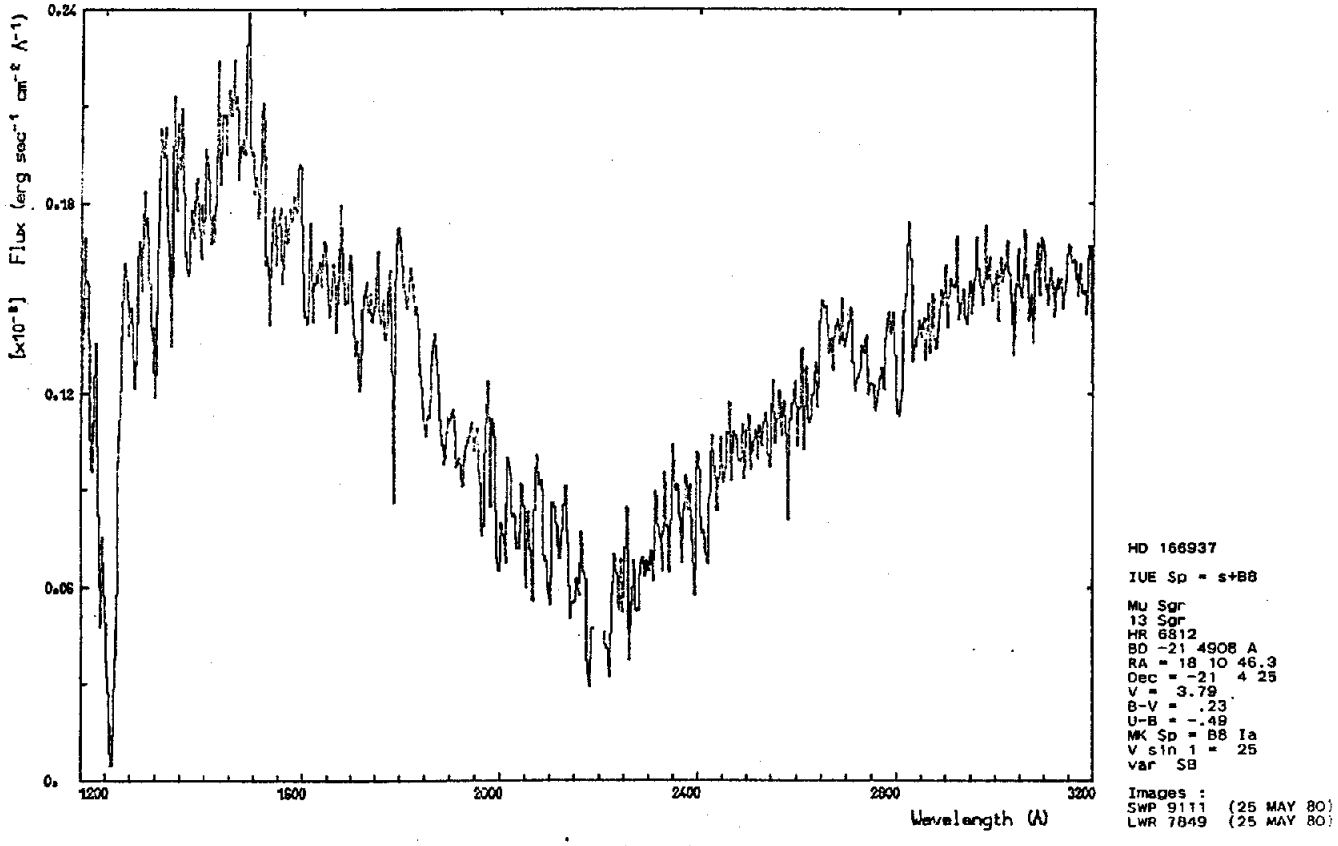
Para determinar el exceso de color en la banda de 2200 Å procedemos con el método que a continuación se indica.

La Figura 4.2 muestra la distribución espectral de la estrella HD 2905 el rango ultravioleta donde están

DISTRIBUCION ESPECTRAL DE ENERGIA DE LA ESTRELLA

HD 166937

Fig. 4.1



indicados los flujos para tres longitudes de onda λ_1 = 1670 Å, λ_2 = 2200 y λ_3 = 2500 Å que se corresponden con los flujos observados f (λ_1) f (λ_2) y f (λ_3) respectivamente (TD - 1). Para la longitud de onda 2200 Å se calcula el flujo suponiendo que no existe extinsión interestelar. Este valor es obtenido interpolando el flujo para 2200 Å, $\bar{f}_{2200}$, en la línea recta que une los flujos en las longitudes de onda 1670 Å y 2500 Å respectivamente.

El paso siguiente es definir la diferencia de magnitudes para los flujos calculados y observados en 2200 Å como un índice Δm_{2200}

$$\Delta m_{2200} = - 2.5 \log \frac{\bar{f}_{2200}}{f^{obs}_{2200}} \qquad (4\text{-}32)$$

Con el índice que sale de (32) se calcula un exceso de color aproximado usando la expresión que a continuación se presenta

$$E(B - V)^{ap} = 0.328 \Delta m_{2200} + 0.040 \qquad (4\text{-}33)$$

Finalmente se reemplaza el exceso de color aproximado que sale de (33) en la ecuación siguiente

$$E\ (B - V)_{2200} = 1.189\ E\ (B - V)^{ap} - 0.025 \qquad (4\text{-}34)$$

lo que nos da el exceso de color corregido en la banda de 2200 Å cuyos valores para las estrellas de nuestro

programa se presentan en la tabla 4.1.

4. Cálculo del Exceso de Color $E(B - V)_{\gamma}$

Usando los datos del catálogo de estrellas brillantes en el intervalo 1360 - 2740 Å se ha obtenido el ancho equivalente de la banda de absorción interestelar en 2200 Å, confirmandose que existe una buena correlación entre el ancho equivalente de la banda de 2200 y el exceso de color. Los anchos equivalentes son calculados a partir del parámetro γ derivados para cada estrella por Gurtler et al. (1981) quienes usaron los excesos de color listados por Jamar et. al. (1976).

La determinación del exceso de color a partir del parámetro γ se realiza utilizando la calibración realizada por Zorec y Briot (1985) dada por la siguiente ecuación

$$E(B - V) = - 0.634\,\gamma + 0.020 \qquad (4\text{-}35)$$

Los excesos de color $E(B - V)_{\gamma}$ para las estrellas comunes del programa de Gurtler y el nuestro obtenidos por aplicación de (35) se presentan en la Tabla 4.1.

5. Exceso de Color $E(B - V)_{BC}$

Analizando la absorción en el infrarojo desde $\lambda_1 = 2.2\,\mu$ hasta $\lambda_2 = 18\,\mu$, Barlow y Cohen (1977) determi-

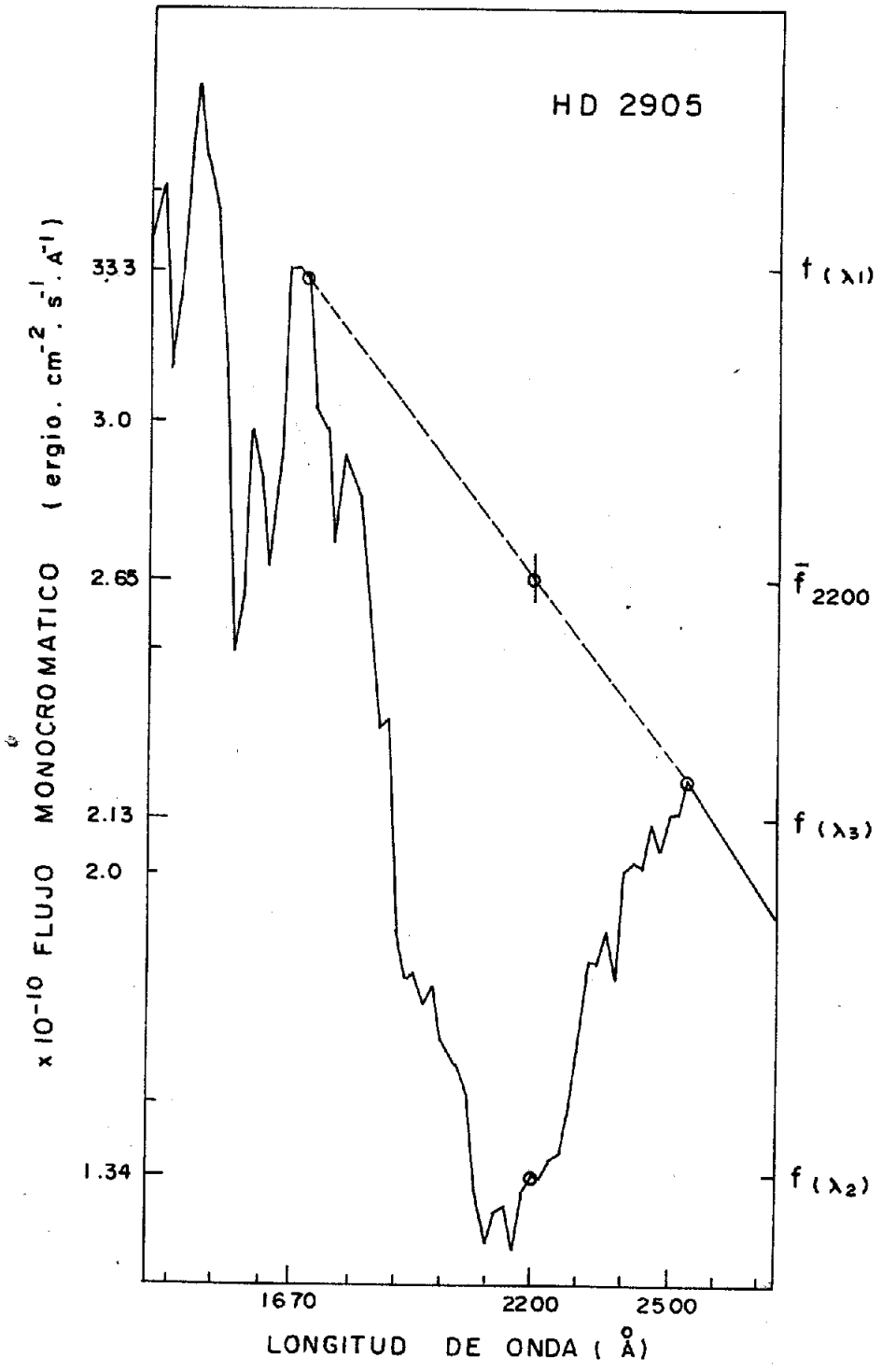


Fig. Nº 4.2: Distribución espectral de energía de HD 2905 Cálculo del exceso de color alrededor de la banda de 2200 Å.

naron los valores del exceso de color en esta región espectral. Para las estrellas comunes entre el programa de Barlow y Cohen y el nuestro, los excesos de color que estos autores han obtenido se presentan en la Tabla 4.1.

6. Exceso de Color $E(B - V)_{Zo}$

Los excesos de color obtenidos por Zorec (1986) son resultado de un promedio de al menos cinco determinaciones independientes.

Los excesos de color $E(B - V)_Z$ para las estrellas comunes entre el programa de Zorec y el nuestro se presentan en la Tabla 4.1.

Exceso de Color Promedio $\langle E(B - V) \rangle$ Adoptado

Para cada estrella de nuestro programa se presentan los excesos de color obtenidos por los métodos descritos para los casos en que fue posible aplicarlos. Se presenta también en la Tabla 4.1 los excesos de color promedio adoptados para el presente trabajo, la desviación estandar y el error.

TABLA Nº 4.1

Excesos de color obtenidos por diferentes métodos, exceso de color promedio adoptado, la dispersión y el error para las estrellas de nuestro programa.

#	HD	UBV	Q	δ	2200	B-C	Δo	E(B-V)	σ_n	ϵ
1	2905	0.33			0.297	0.310		0.312	0.014	0.008
2	24398			0.309	0.339	0.319		0.322	0.012	0.007
3	30614	0.30	0.343	0.298	0.293			0.309	0.020	0.010
4	34085	-0.02			0.001	0.029		0.003	0.020	0.011
5	36486			0.032	0.061	0.071		0.055	0.016	0.095
6	37128	0.05			0.054	0.061		0.055	0.004	0.003
7	37742	0.06	0.092	0.048	0.066	0.071		0.067	0.014	0.006
8	38771	0.05	0.145		0.052	0.061	0.043	0.070	0.037	0.017
9	41117	0.45	0.589	0.515	0.524	0.419		0.499	0.059	0.026
10	44743	0.03	0.025		0.083		0.018	0.039	0.025	0.013
11	46300	0.02	0.128		0.026			0.058	0.049	0.028
12	51309	0.11	0.170		0.111		0.113	0.126	0.025	0.013
13	52089	0.00	0.062		0.069		0.033	0.041	0.027	0.136
14	53138	0.05			0.049	0.061	0.062	0.056	0.006	0.003
15	53244	-0.01	0.034		0.055		0.017	0.024	0.023	0.012
16	57061	0.12	0.144	0.079	0.098			0.110	0.024	0.012
17	58350	0.00			0.015	0.035	0.042	0.023	0.016	0.008
18	62623	0.13	0.250		0.099			0.160	0.065	0.037
19	87737	-0.01	0.077		-0.009	0.019	0.009	0.017	0.032	0.014
20	91316	0.05			0.053	0.061		0.055	0.005	0.003
21	157246	0.08	0.155		0.116			0.117	0.030	0.017
22	164353	0.11	0.253	0.214	0.227	0.161		0.193	0.051	0.023
23	165024	0.07	0.184	0.123	0.155			0.133	0.042	0.021
24	166937	0.22	0.441	0.445	0.369	0.300		0.355	0.086	0.038
25	173948	0.08	0.132	0.095	0.144			0.113	0.026	0.013
26	197345	0.04			-0.077	0.061		0.008	0.061	0.035
27	198478	0.55		0.506	0.491	0.539		0.521	0.024	0.012
28	202850	0.10		0.200	0.092	0.190	0.160	0.148	0.045	0.002
29	206165	0.47		0.473	0.429		0.434	0.452	0.020	0.010
30	212593	0.09		0.179	0.141	0.161		0.143	0.033	0.016

4.3 CALCULOS DE LAS DISCONTINUIDADES DE BALMER, EMPIRICAS Y RESULTADOS

El cálculo del flujo monocromático desenrojecido F^{o}_{λ} en la longitud de onda para la que se define la discontinuidad de Balmer: λ 3700 Å se realiza en dos etapas. En la primera se calcula el flujo desenrojecido F^{o}_{3700} para la región ultravioleta del espectro y en la segunda se calcula para la región rojo-azul. Para esto se elige dos intervalos de longitudes de onda en el sistema fotométrico de 13 colores. Se considera un intervalo UV para los flujos corregidos en las longitudes de onda:

UV :

$$\lambda_1 = 3371 \text{ Å}$$
$$\lambda_2 = 3536 \text{ Å}$$
$$\lambda_3 = 3751 \text{ Å}$$

y otro intervalo en la región rojo-azul para flujos desenrojecidos en las longitudes de onda:

RB :

$$\lambda_4 = 4030 \text{ Å}$$
$$\lambda_5 = 4571 \text{ Å}$$
$$\lambda_6 = 5183 \text{ Å}$$
$$\lambda_7 = 5827 \text{ Å}$$
$$\lambda_8 = 6356 \text{ Å}$$

Para cada una de las longitudes de onda de los dos intervalos se determina el flujo monocromático desenroje-

cido de cada estrella del programa con la siguiente expresión (20) del capítulo 4.2.

$$F_{\lambda}^{o} = F_{\lambda}^{obs} \cdot C \cdot 10^{0.4.K_{\lambda}E\ (B_V)} \qquad (4\text{-}36)$$

donde F_{λ}^{obs} es el flujo monocromático obtenido de la calibración absoluta de las magnitudes observadas en el sistema fotométrico de 13 colores por Johnson y Mitchell (1975), C = 977.3 es un factor de corrección que incluye la transformación a unidades ($erg\text{-}cm^{-2}\text{-}seg^{-1}\text{-}A^{-1}$) y K_{λ} son los parámetros de absorción del medio interestelar calculados por Savage y Mathis (1979). Para la fotometría de 13 colores los parámetros K_{λ} están tabulados en la Tabla 4.2.

TABLA Nº 4.2

Parámetros de la absorción del medio interestelar para la fotometría de 13 colores. Savage y Mathis (1979).

Filtro	$\lambda(\mathring{A})$	K_λ
33	3371	5.03
35	3536	4.81
37	3751	4.62
40	4030	4.38
45	4571	3.94
52	5183	3.39
59	5827	2.92
63	6356	2.64
72	7241	2.19
80	8000	1.86
86	8584	1.64
99	9831	1.27
11	11084	1.04

Con los flujos monocromáticos desenrojecidos F^o_λ calculados con la expresión (36) para cada longitud de onda de los dos intervalos considerados, se tiene la gráfica del flujo monocromático desenrojecido en función

de la longitud de onda tal como se le representa en el esquema de la figura 4.3.

En la figura 4.3, la discontinuidad de la función $F^{o}_{\lambda} = F(\lambda)$ representa la discontinuidad de Balmer. Para calcular ésta discontinuidad según la definición (1) del capítulo 3.1 se computa en ambos intervalos UV y RB, el valor del flujo monocromático desenrojecido en la longitud de onda de la definición 3700 Å.

En primer lugar, para el intervalo UV, se determina la ecuación la recta definida por los tres puntos de la función en éste intervalo:

$$\log F^{o}_{\lambda} = A^{JM}_{UV} \cdot \log \lambda + B^{JM}_{UV} \qquad (4\text{-}37)$$

donde A^{JM}_{UV} es la pendiente de la recta, B^{JM}_{UV} una constante que representa la intersección con el eje de las ordenadas, el super-índice JM representa para todos los casos que los valores han sido obtenidos a partir de la fotometría de 13 colores de Johnson y Mitchell y el sub-índice UV representa los valores calculados para la región ultravioleta del espectro. Utilizando la ecuación (37) interpolamos el valor de $\log F_{3700}$.

En segundo lugar, se calcula para el segundo intervalo la ecuación de la recta definida por los cinco puntos de la función en ésta región:

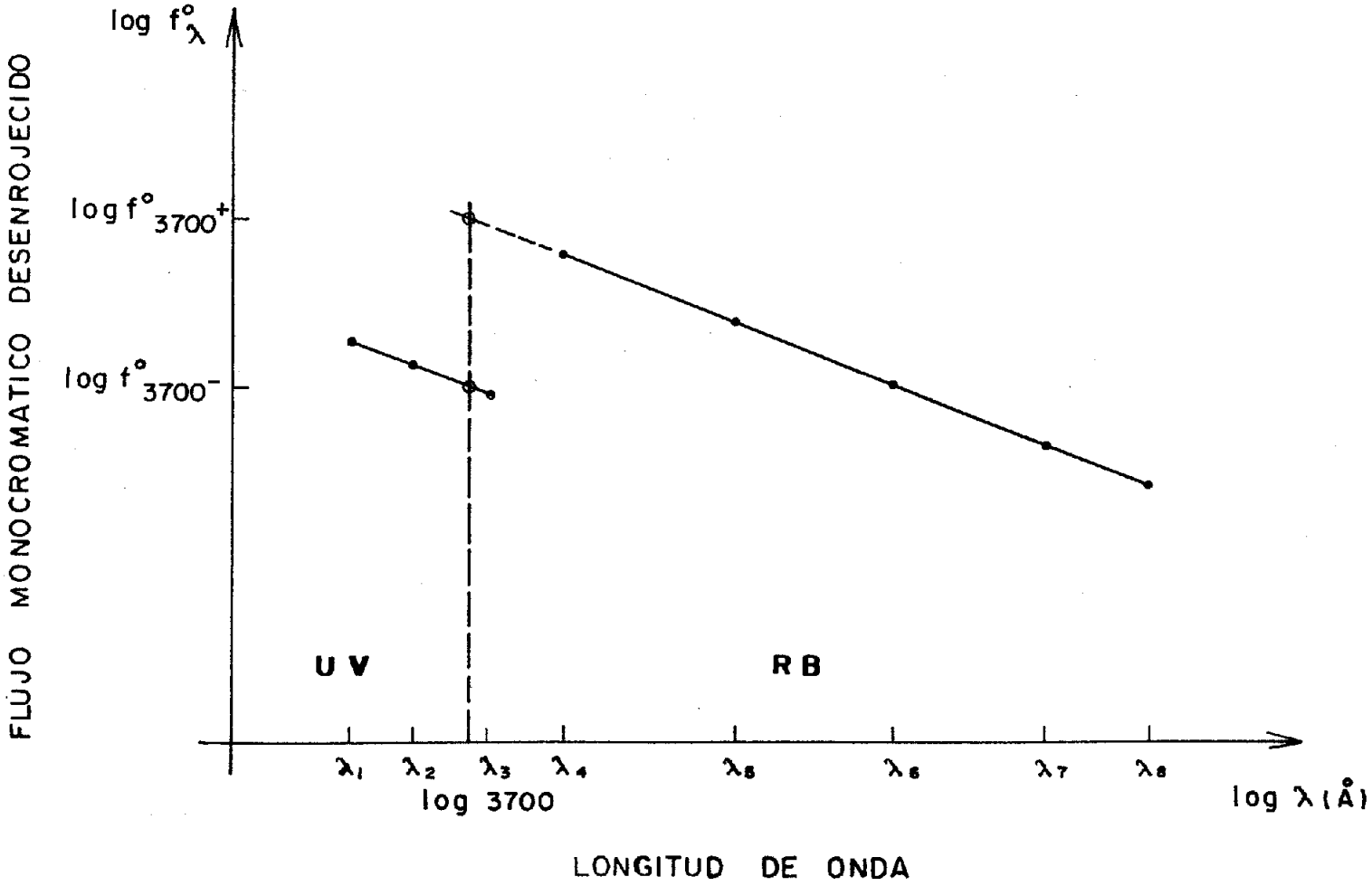


Fig. Nº 4.3: Representación esquemático de la discontinuidad de Balmer observada en la distribución espectral de energía de una estrella.

$$\log F^{o}_{\lambda} = A^{JM}_{RB} \cdot \log \lambda + B^{JM}_{RB} \qquad (4\text{-}38)$$

donde el sub-índice RB significa que los valores de los parámetros A^{JM}_{RB} y B^{JM}_{RB} están determinados para la región rojo-azul del espectro. Utilizando, la ecuación (38) extrapolamos el valor de log F^{o}_{3700} +.

Los valores de log F^{o}_{3700} - y log F^{o}_{3700} + obtenidos con las ecuaciones (37) y (38) para cada una de las estrellas de nuestro programa, así como el valor de la discontinuidad de Balmer D^{JM} (dex) calculadas por la definición:

$$D^{JM} = \log F^{o}_{3700^{+}} - \log F^{o}_{3700^{-}} \qquad (4\text{-}39)$$

se presentan en la Tabla 4.3.

TABLA Nº 4.3

Valores de la discontinuidad de Balmer D^{JM} (dex) de las estrellas de nuestro programa.

#	HD	log $F^{o}_{3700^{+}}$	log $F^{o}_{3700^{-}}$	D^{JM}(dex)
1	2905	-9.1618	-9.2252	0.063
2	24398	-8.6145	-8.7015	0.087
3	30614	-9.1570	-9.2177	0.061
4	34085	-8.0354	-8.1646	0.129
5	36486	-8.6342	-8.7106	0.076
6	37128	-8.4685	-8.5350	0.067
7	37742	-8.4483	-8.5143	0.066
8	38771	-8.5959	-8.6868	0.091
9	41117	-9.0761	-9.1464	0.070
10	44743	-8.5688	-8.6752	0.106
11	46300	-9.7082	-9.9891	0.281
12	51309	-9.4718	-9.6143	0.143
13	52089	-8.3534	-8.4825	0.129
14	53138	-8.9983	-9.1279	0.130
15	53244	-9.5249	-9.7618	0.237
16	57061	-9.4371	-9.5286	0.092
17	58350	-8.8854	-9.0169	0.132
18	62623	-9.4180	-9.7119	0.294
19	87737	-9.3617	-9.6363	0.275
20	91316	-9.3339	-9.4162	0.082
21	157246	-9.0166	-9.1092	0.093
22	164353	-9.2409	-9.3886	0.148
23	165024	-9.1425	-9.2665	0.124
24	166937	-9.0245	-9.3147	0.290
25	173948	-9.4143	-9.5325	0.118
26	197345	-8.5470	-8.7857	0.239
27	198478	-9.1948	-9.3004	0.106
28	202850	-9.4598	-9.6487	0.189
29	206165	-9.2353	-9.3483	0.113
30	212593	-9.6185	-9.8229	0.204

5.0 DISCONTINUIDADES DE BALMER TEORICAS

5.1 MODELOS DE ATMOSFERAS ESTELARES UTILIZADOS

Los modelos de atmósferas estelares que hemos utilizado en este trabajo han sido calculados por Kurucz (1979). Estos modelos responden a los principios de la modelización clásica, es decir, son modelos de atmósferas plano-paralelas en equilibrio hidrostático y en equilibrio radiativo. Estos modelos han sido obtenidos suponiendo la existencia del equilibrio termodinámico local (ETL) para el cálculo de las propiedades microscópicas del gas y se ha considerado el bloqueo debido a las líneas espectrales. Para ello se ha utilizado alrededor de 30000 líneas espectrales.

La aproximación del ETL no es adecuada para el cálculo de perfiles de líneas, pero en este trabajo sólo se trabajará con el espectro continuo donde esa aproxima-

ción es justificada.

En la aproximación del ETL se supone que la función fuente en la ecuación del transporte está dada por la función de Planck:

$$S_\nu(\tau) = B_\nu(Te) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\left[e^{h\nu/KTe}-1\right]^{-1} \qquad (5\text{-}1)$$

donde ν es la frecuencia de la radiación, τ_ν la profundidad óptica en la frecuencia ν y Te la temperatura electrónica. Se supone además que las poblaciones de los niveles atómicos están dados por las relaciones de Boltzmann.

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} \cdot e^{-h\nu nm/KTe} \qquad (5.2)$$

donde N_n es la cantidad de átomos por centímetro cúbico en el estado de energía n, g_n es el peso estadístico del nivel n y $h\nu$ nm es la energía de la transición entre el estado n y el estado m. En la aproximación del ETL se supone además que existe la microrreversibilidad de los procesos y que la distribución de las velocidades de las partículas está dada por la relación de Maxwell, así como el balance de ionización por la ecuación de Saha.

$$\frac{N_{r+1}}{N_r} Ne = \frac{2\,U_{r+1}\,(Te)}{U_r\,(Te)} \cdot \left[\frac{2\pi\, m\, K\, Te}{h^2}\right]^{3/2} e^{-\Phi_r/KTe} \qquad (5\text{-}3)$$

donde N_r dá el número de átomos de una cierta especie en el estado de ionización r, U_r es la función de partición y Φ_r es el potencial de ionización de un átomo r-veces ionizado.

La aproximación del ETL lleva ese nombre dado que se desacoplan las propiedades microscópicas de la materia de las influencias sobre éstas del campo de radiación. En cada punto de la atmósfera éstas propiedades están dadas por la condiciones clásicas del equilibrio termodinámico. Las condiciones del equilibrio termodinámico no son sin embargo impuestas al campo de radiación pués se permite que la intensidad específica del campo de radiación sea diferente de la función de Planck:

$$I_\nu\,(\tau_\nu) \neq B_\nu\,(Te) \qquad (5\text{-}4)$$

El equilibrio radiativo define el equilibrio térmico de la atmósfera para el caso donde el transporte de la energía se produce por radiación. Esta condición es la que determina además la temperatura Te para cada profundidad óptica. Ella se escribe de la siguiente manera:

$$\int_0^\infty X_\nu\,(J_\nu - S_\nu)\,d\nu = 0 \qquad (5\text{-}5)$$

donde X_ν es la opacidad de la atmósfera, J_ν es la intensidad media de radiación y S_ν es la función fuente definida como sigue

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} \qquad (5\text{-}6)$$

donde η_ν es el coeficiente de emisión. En ETL se tiene además

$$\frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} = B_\nu\ (Te) \qquad (5\text{-}7)$$

que se denomina relación de Kirchhoff-Planck.

La condición del equilibrio radiativo implica además que en una atmósfera plano-paralela el flujo integrado sobre todas las frecuencias es una constante. Esa constante es una "integral" de la modelización y se le simboliza o parametriza por intermedio de la temperatura efectiva definida como sigue

$$\int_o^\infty F_\nu \, d\nu = F = \frac{\sigma}{\pi} Teff^4 \qquad (5\text{-}8)$$

donde F_ν es el flujo astrofísico en la frecuencia ν, σ es la constante de Stefan-Boltzmann y Teff es la temperatura efectiva.

El equilibrio hidrostático es la condición del equilibrio mecánico de la atmósfera. Esta condición se escribe.

$$\frac{d\,P}{d\,r} = - \rho\, g \qquad (5\text{-}9)$$

donde P es la presión total del medio (gas y radiación), r es el radio vector, ρ es la densidad de gas y g es la gravedad superficial

$$g = G\,\frac{M}{R^2} \qquad (5\text{-}10)$$

donde M es la masa de la estrella, R el radio de la estrella y G la constante de la gravedad.

Conociendo la temperatura en cada punto podemos determinar la densidad por intermedio de la ecuación diferencial del equilibrio hidrostático.

5.2 CALCULO DE LAS DISCONTINUIDADES TEORICAS Y RESULTADOS

Las discontinuidades de Balmer otenidas con los modelos se han calculado usando los mismos procedimientos que en el caso del cálculo de las discontinuidades de Balmer estelares. Estas discontinuidades están tabuladas en la Tabla 5.1 en función de la temperatura efectiva Teff (^{o}K) y la gravedad superficial log g (c.g.s.).

En la Tabla Nº 5.1 se observa que las discontinuidades de Balmer varían de una manera mucho más importante con la temperatura efectiva que con la gravedad superfi-

cial. Por esta razón se usa la discontinuidad de Balmer como indicador de la temperatura efectiva de una estrella ó como ocurre en el sistema de clasificación BCD, del tipo espectral de la estrella.

TABLA Nº 5.1

Discontinuidades de Balmer D (dex) obtenidos a partir de los modelos de Kurucz (1979).

Teff (ºK)	log g (c.g.s)						
	5.0	4.5	4.0	3.5	3.0	2.5	2.0
9500		0.510	0.540	0.560	0.568	0.562	0.529
10000		0.499	0.519	0.527	0.526	0.509	0.467
11000		0.455	0.459	0.457	0.442	0.413	0.362
12000		0.400	0.398	0.389	0.371	0.342	0.291
13000		0.350	0.347	0.337	0.319	0.292	0.236
14000		0.310	0.306	0.298	0.280	0.252	0.191
15000		0.278	0.274	0.264	0.250	0.217	0.147
16000		0.252	0.250	0.244	0.228	0.193	0.101
17000		0.230	0.226	0.218	0.203	0.164	0.047
18000		0.211	0.207	0.198	0.180	0.135	
20000		0.178	0.170	0.161	0.138	0.077	
22500		0.143	0.136	0.121	0.091		
25000	0.120	0.114	0.106	0.089	0.055		
30000	0.080	0.075	0.065	0.042			
35000	0.049	0.043	0.029	0.007			
40000	0.027	0.023	0.015				
45000	0.021	0.017					
50000	0.016	0.013					

6.0 COMPARACION DE LAS DISCONTINUIDADES DE BALMER TEORICAS CON LAS OBSERVADAS

6.1 INTRODUCCION

Para poder comparar las discontinuidades de Balmer obtenidas a partir de los flujos observados de las estrellas y convenientemente corregidos de la absorción del medio interestelar, con las discontinuidades de Balmer teóricas, debemos determinar la temperatura efectiva de las estrellas y la gravedad superficial de las mismas. Como hemos visto en la Tabla Nº 5.1 del capítulo precedente, las discontinuidades de Balmer presentan una variación poco pronunciada en un intervalo importante de valores de la gravedad. Esto puede no ocurrir sin embargo en el caso de las supergigantes donde las gravedades superficiales son bajas y donde, tal como se muestra en la figura Nº 6.1, la variación de las discontinui-

dades puede ser considerable. Por ésta razón debemos proceder a una estimación de la gravedad superficial de las estrellas de nuestro programa.

6.2 CALCULO DE LA TEMPERATURA EFECTIVA DE UNA ESTRELLA

La temperatura efectiva define el flujo total (integrado sobre todas las longitudes de onda) emitido por toda la superficie de una estrella. Por definición tenemos

$$F(O) = \int_o^\infty F_\lambda (O)\, d\lambda = \frac{\sigma}{\pi} Teff^4 \qquad (6\text{-}1)$$

donde $F_\lambda (O)$ es el flujo astrofísico saliente de una estrella en la longitud de onda λ con unidades (ergio. $cm^{-2}.seg^{-1})/\pi$, σ es la constante de Stefan-Boltzmann y Teff la temperatura efectiva.

Para determinar F(O), haremos además la relación siguiente entre el flujo integrado y corregido de la absorción interestelar y el flujo emitido por la estrella

$$f^o = \left[\frac{R}{d}\right]^2 \cdot \pi \cdot F(O) \qquad (6\text{-}2)$$

donde f^o es el flujo bolométrico observado y corregido de la absorción del medio interestelar, R el radio de la estrella y d su distancia.

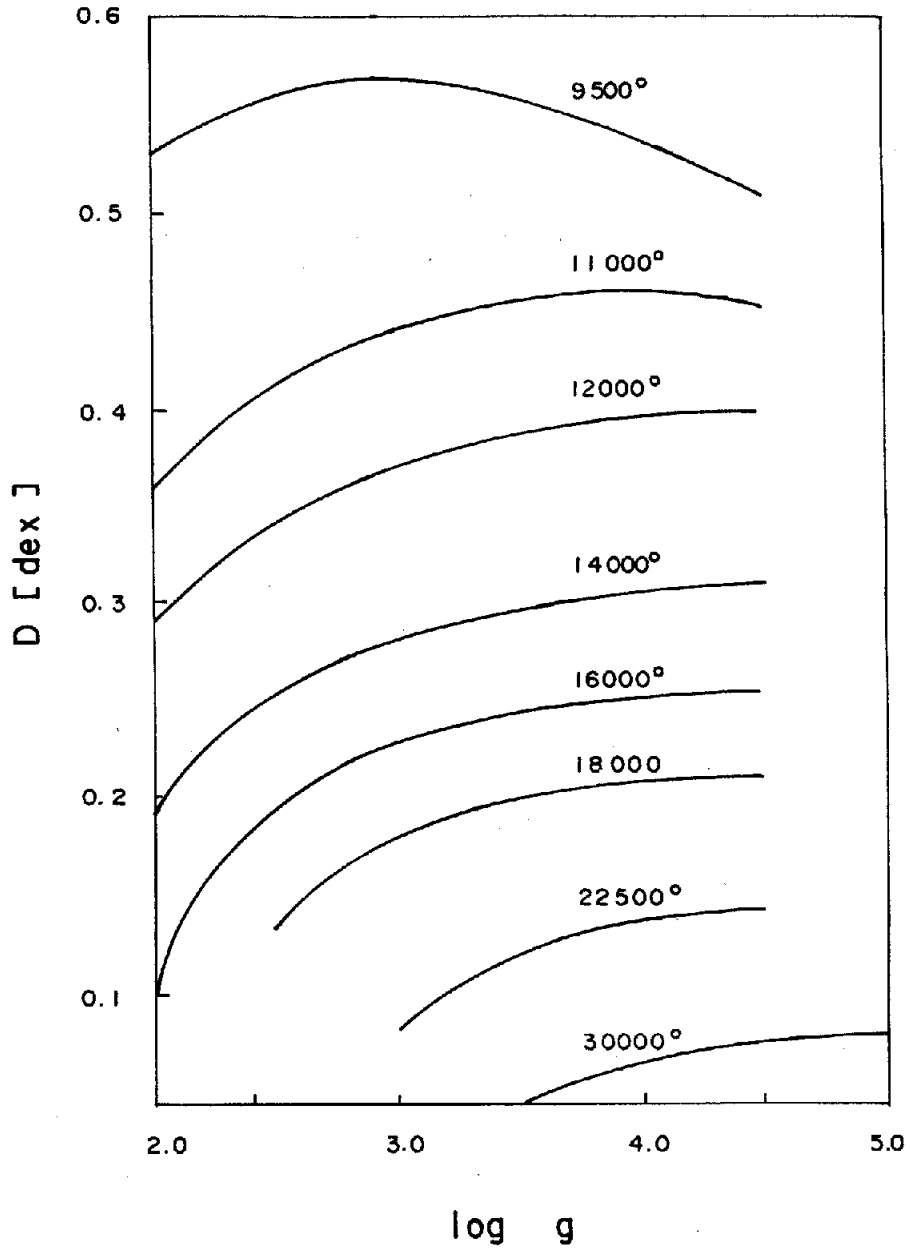


Fig. Nº 6.1: Variación de la discontinuidad de Balmer teórica en función de la gravedad superficial para deferentes temperaturas.

La relación (2) puede escribirse en función del diámetro angular de la estrella Θ, de la siguiente manera:

$$f^{o} = \frac{\Theta^2}{4} \cdot \pi \cdot F(O) \qquad (6\text{-}3)$$

Para el cálculo de f^{o} debemos tener presente que sólo un itervalo limitado de longitudes de onda es accesible a la observación. En nuestro caso particular ese rango está dado por $\lambda\lambda$ 1380 - 11084 Å. Entre 1360 Å a 2740 Å los flujos han sido obtenidos por el satélite europeo TD-1 y los flujos entre 3371 Å y 11084 Å han sido calculados a partir de la fotometría a banda angosta de 13 colores.

Para determinar f^{o} usaremos la siguiente aproximación

$$f^{o} = \int_{o}^{\infty} f^{o}_{\lambda} \cdot d\lambda = \int_{1380}^{11084} f^{o}_{\lambda}\, d\lambda + \int_{\Delta\lambda_{NO\ OBS.}} f^{o}_{\lambda}\, d\lambda$$

$$f^{o} = \int_{1380}^{11084} f^{o}_{\lambda}\, d\lambda \cdot \left[1 + \int_{\Delta\lambda_{NO\ OBS.}} f^{o}_{\lambda}\, d\lambda \Big/ \int_{1380}^{11084} f^{o}_{\lambda}\, d\lambda \right]$$

$$f^{o} = \int_{1380}^{11084} f^{o}_{\lambda}\, d\lambda \cdot [1 + q] \qquad (6\text{-}4)$$

El factor de "relleno" q se ha estimado usando los modelos de atmósferas estelares de Kurucz (1979) de la siguiente manera:

(6-5)

$$q = \frac{\int_{\Delta\lambda\ \text{NO OBS.}} f_\lambda^\circ \, d\lambda}{\int_{1380}^{11084} f_\lambda^\circ \, d\lambda} = \frac{\int_{\Delta\lambda\ \text{NO OBS.}} F_\lambda(0)}{\int_{1380}^{11084} F_\lambda(0)} \cong \frac{\int_{\Delta\lambda\ \text{NO OBS.}} F_\lambda^{\text{MODELO}}(0)\, d\lambda}{\int_{1380}^{11084} F_\lambda^{\text{MODELO}}(0)\, d\lambda}$$

El factor de completación o de relleno, q, está tabulado en la Tabla Nº 6.1 en función de la temperatura efectiva y de la gravedad. Como la variación del factor q con respecto a la gravedad es insignificante para valores de la temperatura efectiva comprendidos entre 10000-30000 grados Kelvin, tal como se muestra en la figura Nº 6.2, hemos adoptado un valor medio del factor q. Los valores promedio del factor q (q) también se presentan en la Tabla Nº 6.1 en función de la temperatura efectiva y de la gravedad y tiene un dependencia lineal con Teff (Fig. Nº 6.3).

Dado que en la relación (4) sólo se conocen las cantidades f_λ° debemos iterar el valor de q para determi-

nar la temperatura efectiva usando para ello las relaciones (1), (3) y (4), e iterar también el valor del diámetro angular Θ de la estrella.

6.2.1 Cálculo de la Temperatura Efectiva Aproximada

Para obtener una primera estimación de la temperatura efectiva de un estrella, comparamos las distribuciones de energía de las estrellas observadas (y que han sido corregidas de la absorción del medio interestelar) entre 5827 Å y 8000 Å, con las distribuciones dadas por los modelos. La región de formación del espectro continuo en este intervalo de longitudes de onda tiene una temperatura que es aproximadamente igual a la temperatura efectiva de la estrella.

Los flujos en el intervalo de longitudes de onda mencionado han sido representados analíticamente con la expresión

$$\log f_{\lambda}^{o} = A_{RR}^{JM} \cdot \log\lambda + B_{RR}^{JM} \qquad (6\text{-}6)$$

donde JM indica que se han usado los flujos obtenidos por Johnson y Mitchell (1975).

De la misma manera se han obtenido relaciones semejantes a (6) para los flujos calculados por Kurucz (1979).

TABLA Nº 6.1

Factor de completación o de relleno q (Teff, log g) para el cálculo del flujo bolométrico (modelos de Kurucz, 1979).

Teff [ºK]	log g [c.g.s]	q	$\bar{q}$
10000	4.5	0.0941	0.1001
	4.0	0.0989	
	3.5	0.1025	
	3.0	0.1050	
15000	4.5	0.2870	0.2837
	4.0	0.2887	
	3.5	0.2853	
	3.0	0.2739	
20000	4.5	0.6000	0.5645
	4.0	0.5873	
	3.5	0.5601	
	3.0	0.5106	
25000	4.5	0.9011	0.8241
	4.0	0.8657	
	3.5	0.8083	
	3.0	0.7212	
30000	4.5	1.1598	1.0775
	4.0	1.1008	
	3.5	1.0492	
	3.0	1.000	
35000	4.5	1.5063	1.7106
	4.0	1.5510	
	3.5	1.7174	
	3.0	2.0675	

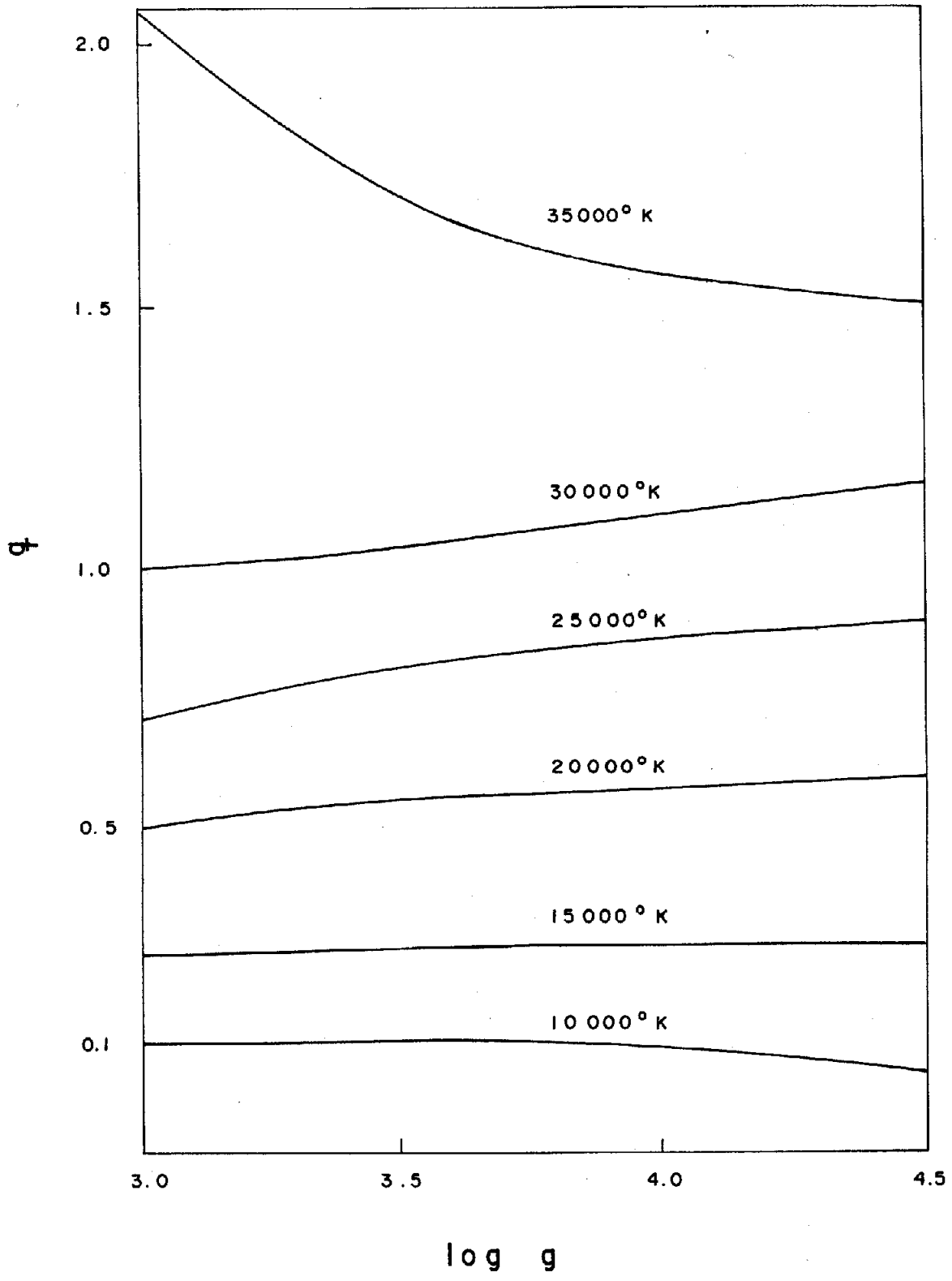


Fig. Nº 6.2: Factor de completación q en función de la gravedad superficial para diferentes temperaturas.

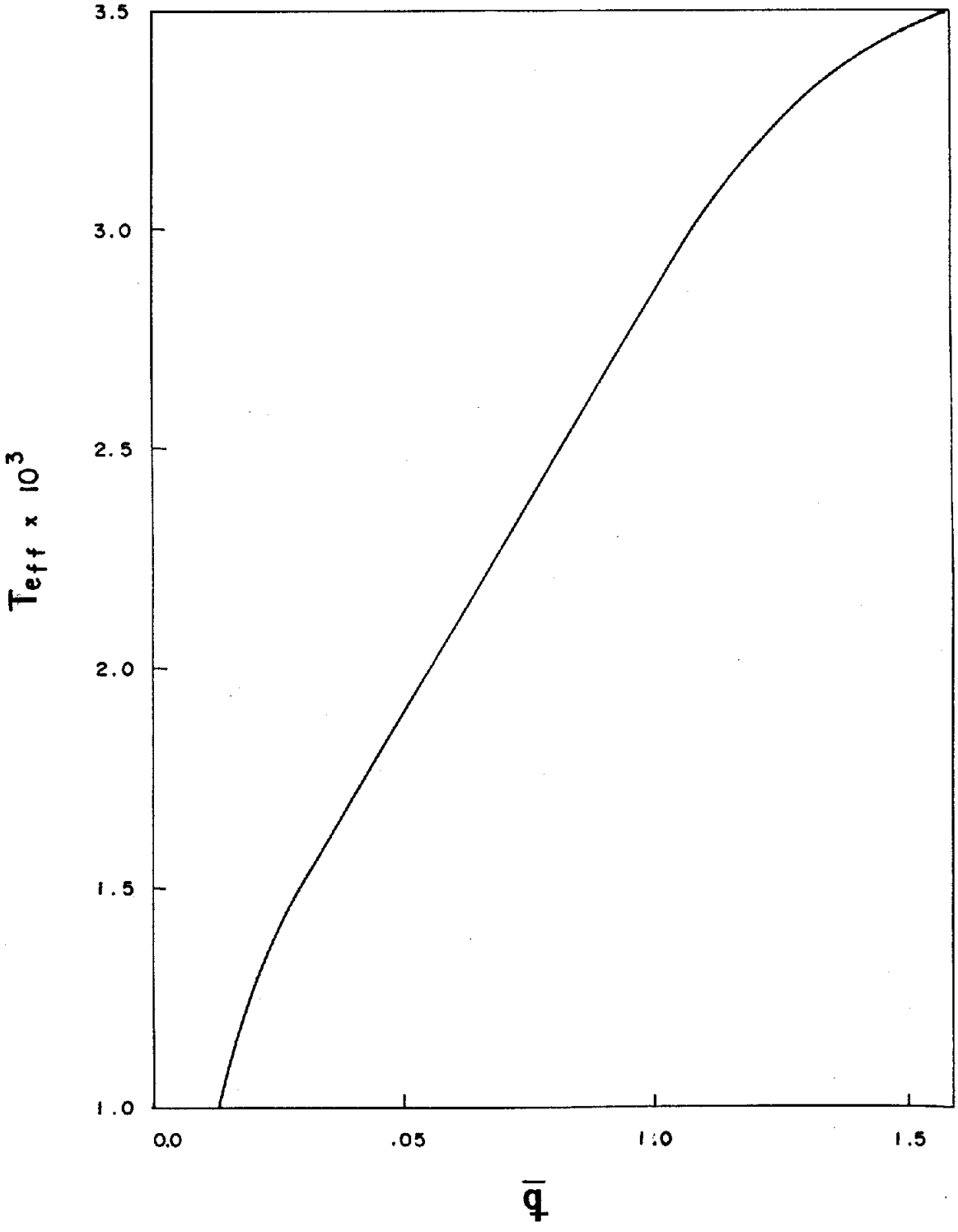


Fig. Nº 6.3: Dependencia del factor q promedio en función de la temperatura efectiva.

$$\log F_{\lambda}(O) = A^{K}_{RR} \cdot \log \lambda + B^{K}_{RR} \qquad (6\text{-}7)$$

Los valores de A^{JM}_{RR} y B^{JM}_{RR} de las estrellas del programa están dados en la Tabla Nº 6.2. Por su parte, los valores de A^{K}_{RR} y B^{K}_{RR} para diferentes temperaturas efectivas y gravedades superficiales se presentan en la Tabla Nº 6.3.

Como se observa en la Tabla Nº 6.3 las pendientes A^{K}_{RR} practicamente casi no dependen de la gravedad (log g) y tampoco los valores de B^{K}_{RR}. Para cada temperatura efectiva hemos adoptado entonces un valor medio de esas cantidades, las cuales se presentan en la Tabla Nº 6.4.

El valor aproximado de la temperatura efectiva de cada estrella ha sido determinado entonces interpolando en la Tabla Nº 6.4 el valor de la temperatura efectiva para la cual se cumple la igualdad de las pendientes

$$A^{JM}_{RR} = A^{K}_{RR} \qquad (6\text{-}8)$$

6.2.2 Diámetros Angulares

Para tener una buena determinación de la temperatura efectiva a partir de las relaciones (1), (3) y (4) debemos conocer también el valor del diámetro angular de la estrella. De la relación (3) tenemos que el diámetro angular es

TABLA Nº 6.2

Valores de los parámetros A_{RR}^{JM} y B_{RR}^{JM} calculados a partir de los flujos de las estrellas del programa estimados de la fotometría de Johnson y Mitchell.

#	HD	A_{RR}^{JM}	B_{RR}^{JM}
1	2905	-3.5583	3.6028
2	24398	-3.5922	4.2599
3	30614	-3.6632	3.9341
4	34085	-2.9419	2.5091
5	36486	-3.7464	4.7486
6	37128	-3.5847	4.3533
7	37742	-3.6463	4.5763
8	38771	-3.5350	4.0413
9	41117	-3.7321	4.3120
10	44743	-3.6973	4.6378
11	46300	-3.0688	1.3138
12	51309	-3.3600	2.5340
13	52089	-3.6354	4.6041
14	53138	-3.2851	2.7139
15	53244	-3.3294	2.3987
16	57061	-3.6069	3.4334
17	58350	-3.0795	2.1365
18	62623	-2.8904	0.9907
19	87737	-3.0064	1.4255
20	91316	-3.5203	3.2694
21	157246	-3.6916	4.1847
22	164353	-3.5886	3.6500
23	165024	-3.5946	3.7121
24	166937	-3.3146	2.8743
25	173948	-3.8199	4.2674
26	197345	-2.6662	1.0389
27	198478	-3.4262	3.1208
28	202850	-3.2142	2.1080
29	206165	-3.5703	3.5982
30	212593	-3.1726	1.7878

TABLA Nº 6.3

Valores de los parámetros A^K_{RR} y B^K_{RR} calculados a partir de los modelos de Kurucz (1979).

T_{eff} [ºK]	log g [c.g.s]									
	4.5		4.0		3.5		3.0		2.5	
	A^K_{RR}	B^K_{RR}	A^K_{RR}	B^K_{RR}	A^K_{RR}	B^K_{RR}	A^K_{RR}	B^K_{RR}	A^K_{RR}	B^K_{RR}
9500	-3.0743	18.7551	-3.0997	18.8508	-3.1180	18.9186	-3.1277	18.9535	-3.1247	18.9414
10000	-3.1470	19.0760	-3.1639	19.1387	-3.1732	19.1733	-3.1744	19.1761	-3.1619	19.1297
11000	-3.2433	19.5189	-3.2488	19.5398	-3.2476	19.5353	-3.2366	19.4946	-3.2143	19.4114
12000	-3.3041	19.8169	-3.3033	19.8151	-3.2971	19.7929	-3.2834	19.7424	-3.2601	19.6550
13000	-3.3497	20.0496	-3.3471	20.0412	-3.3399	20.0151	-3.3276	19.9700	-3.3052	19.8866
14000	-3.3895	20.2531	-3.3870	20.2449	-3.3800	20.9198	-3.3690	20.1802	-3.3480	20.1029
15000	-3.4261	20.4389	-3.4239	20.4321	-3.4185	20.4134	-3.4084	20.3784	-3.3843	20.2908
16000	-3.4605	20.6125	-3.4595	20.6104	-3.4546	20.5945	-3.4458	20.5657	-3.4262	20.4974
17000	-3.4927	20.7744	-3.4905	20.7680	-3.4888	20.7659	-3.4810	20.7423	-3.4596	20.6701
18000	-3.5231	20.9275	-3.5233	20.9314	-3.5203	20.9249	-3.5136	20.9081	-3.4852	20.8122
20000	-3.5784	21.2078	-3.5804	21.2209	-3.5787	21.2226	-3.5670	21.1918	-3.5081	20.9850
22500	-3.6392	21.5215	-3.6395	21.5315	-3.6326	21.5181	-3.6056	21.4332		
25000	-3.6857	21.7761	-3.6818	21.7733	-3.6691	21.7387	-3.6428	21.6598		
30000	-3.7654	22.2215	-3.7663	22.2405	-3.7428	22.1724				
35000	-3.8195	22.5584	-3.7845	22.4375	-3.7127	22.1639				
40000	-3.8101	22.6081	-3.7832	22.5031						
45000	-3.8213	22.7030								
50000	-3.8308	22.7843								

TABLA Nº 6.4

Valores promedio de los parámetros A^K_{RR} y B^K_{RR} obtenidos de la Tabla Nº 6.3 en función de la temperatura efectiva.

Teff (ºK)	A^K_{RR}	B^K_{RR}
9500	-3.1089	18.8839
10000	-3.1641	19.1390
11000	-3.2381	19.5000
12000	-3.2896	19.7645
13000	-3.3339	19.9925
14000	-3.3747	20.2002
15000	-3.4122	20.3907
16000	-3.4493	20.5761
17000	-3.4825	20.7441
18000	-3.5131	20.9008
20000	-3.5625	21.1656
22500	-3.6292	21.5011
25000	-3.6736	21.7453
30000	-3.7605	22.2137
35000	-3.7862	22.4353
40000	-3.8070	22.5954
45000	-3.8272	22.7265
50000	-3.8370	22.8078

$$\theta^2 = \frac{4\ f^{\circ}}{\pi\ F\ (0)} \qquad (6\text{-}9)$$

pero esta relación puede ser usada sólo si se conoce f° lo cual supone conocer Teff para determinar el buen valor del factor q.

Para determinar θ podemos sin embargo utilizar la aproximación

$$\theta^2 \cong \theta^2_{RR} = \frac{4\ f^{\circ}_{RR}}{\pi\ F_{RR}} \qquad (6\text{-}10)$$

donde RR indica que se han usado flujos sólo en el intervalo:
$\lambda\lambda$ 5827-8000 Å. Así el radio de una estrella corresponderá a la zona donde la temperatura es aproximadamente igual a Teff (ver comentarios del parágrafo Nº 6.2.1). De las relaciones (6) y (7) en (10) se vé inmediatamente que

$$\theta^2_{RR} = \frac{4}{\pi}\ 10^{(B^{JM}_{RR} - B^{K}_{RR})} \cdot \left[\frac{A^{K}_{RR} + 1}{A^{JM}_{RR} + 1}\right] \cdot 5827^{(A^{JM}_{RR} - A^{K}_{RR})} \left[\frac{1.3729^{(A^{JM}_{RR}+1)} - 1}{1.3729^{(A^{K}_{RR}+1)} - 1}\right] \qquad (6\text{-}11)$$

Como la relación (11) depende de A^{K}_{RR} y B^{K}_{RR}, significa que el valor de θ_{RR} también debe ser iterado en función de valores mejorados de la temperatura efectiva.

6.2.3 Iteración de la Temperatura Efectiva y Resultados

Para el valor aproximado de la temperatura efectiva que se obtiene de la interpolación condicionada por (8), nuevamente interpolamos ahora en la Tabla Nº 6.5 un valor aproximado de q y luego se calcula un valor aproximado de Θ_{RR} utilizando la expresión (11). El valor mejorado de Teff se obtiene entonces con la relación

$$Teff = \left[\frac{4\ f^{o}}{\sigma \cdot \Theta_{RR}^{2}} \right]^{1/4} \qquad (6\text{-}12)$$

El ciclo puede repetirse así hasta obtener un valor convergente de Teff y de Θ_{RR}. En la Tabla Nº 6.6 se dan los valores de f_{Δ}^{o} , Teff, Θ_{RR} q, P y N de las estrellas del programa. La nomenclatura f_{Δ}^{o} representa (Tabla A.3):

$$f_{\Delta}^{o} = \int_{1360}^{11084} f_{\lambda}^{o} \cdot d\lambda \qquad (6\text{-}13)$$

y N es el número de iteraciones realizada en cada caso. El proceso de iteración se ha parado en cada caso para diferencias de Teff $\leq$ 5 ºK. El factor P indica el porcentaje de flujo que se ha agregado usando los modelos.

En la Tabla Nº 6.7 damos alguna comparaciones de

determinaciones de temperaturas efectivas obtenidas en éste trabajo y las calculadas por Underhill et al. (1979) y Remie y Lamers (1982). En esta Tabla se vé que nuestras determinaciones son concordantes con las obtenidas por otros autores utilizando métodos similares a los nuestros.

En la Tabla Nº 6.8 se procede a una comparación análoga de diámetros angulares.

6.3 CALCULO DE LA LUMINOSIDAD BOLOMETRICA

6.3.1 Cálculo de las Distancias Estelares

La determinación de las distancias estelares se realiza a partir de la Ley de Pogson (1850):

$$m_\lambda = -2.5 \log f_\lambda + \mathfrak{c} + A_\lambda \qquad (6\text{-}14)$$

donde estamos considerando la absorción monocromática del medio interestelar para calcular las distancias con precisión pues de no considerar la absorción monocromática las estrellas parecerían estar más lejos de lo que realmente están.

Considerando a la estrella como un emisor puntual, tenemos que la luminosidad (erg-seg^{-1}) a una distancia d está dado por la relación

TABLA Nº 6.5

Temperatura efectiva en función de los parámetros A^K_{RR} y B^K_{RR} y del factor de completación q.

Teff(ºK)	A^K_{RR}	B^K_{RR}	q
9500	-3.1089	18.8839	0.0877
10000	-3.1641	19.1390	0.1001
11000	-3.2381	19.5000	0.1279
12000	-3.2896	19.7645	0.1599
13000	-3.3339	19.9925	0.1964
14000	-3.3747	20.2002	0.2376
15000	-3.4122	20.3907	0.2837
16000	-3.4493	20.5761	0.3310
17000	-3.4825	20.7441	0.3827
18000	-3.5131	20.9008	0.4388
20000	-3.5625	21.1656	0.5645
22500	-3.6292	21.5011	0.6893
25000	-3.6736	21.7453	0.8241
30000	-3.7605	22.2137	1.0775
35000	-3.7862	22.4353	1.7106
40000	-3.8070	22.5954	2.5529
45000	-3.8272	22.7265	3.6342
50000	-3.8370	22.8078	

TABLA Nº 6.6

Flujos (erg-cm^{-2}-seg^{-1}), temperatuaras efectivas Diámetros angulares (arc seg) de las estrellas del programa, Factor de completación y porcentanje del flujo agregado con los modelos. Número de iteraciones realizadas.

#	HD	$f^{o}_{\Delta}x10^{-6}$	Teff(ºK)	$\Theta x10^{-3}$	q	P%	N
1	2905	4.918	19029	0.406	0.5164	34	9
2	24398	18.009	20235	0.713	0.5769	37	9
3	30614	6.694	25332	0.300	0.8424	46	9
4	34085	33.476	11197	2.685	0.1344	12	12
5	36486	23.200	27100	0.500	0.9362	48	10
6	37128	29.774	22727	0.753	0.7021	41	10
7	37742	35.067	25847	0.664	0.8704	47	13
8	38771	22.094	22675	0.653	0.6992	41	12
9	41117	5.580	19509	0.421	0.5348	35	14
10	44743	22.759	23927	0.607	0.7680	43	12
11	46300	0.518	9496	0.456	0.0876	8	8
12	51309	1.694	15623	0.335	0.3135	24	11
13	52089	29.335	21119	0.847	0.6222	38	11
14	53138	4.376	14624	0.603	0.2667	21	11
15	53244	1.162	13113	0.376	0.2012	17	7
16	57061	4.230	28799	0.193	1.0207	51	15
17	58350	5.447	12757	0.856	0.1878	16	12
18	62623	0.948	8390	0.779	0.0577	5	10
19	87737	1.137	9391	0.690	0.0849	8	12
20	91316	3.081	18775	0.333	0.4891	33	10
21	157246	8.293	23686	0.373	0.7550	43	13
22	164353	2.743	15029	0.455	0.2851	22	13
23	165024	4.948	20122	0.377	0.5709	36	11
24	166937	4.319	13718	0.670	0.2263	18	10
25	173948	3.224	23558	0.234	0.7463	43	18
26	197345	7.452	8275	2.243	0.0543	5	12
27	198478	2.968	14013	0.535	0.2382	19	10
28	202850	1.010	10154	0.561	0.1046	9	9
29	206165	2.921	15197	0.461	0.2933	23	12
30	212593	0.730	10401	0.456	0.1116	10	8

TABLA Nº 6.7

Comparación de temperaturas efectivas (ºK) obtenidas por diferentes autores.

HD	Teff (M)	Teff (UDPD)	Teff (RL)
2905	19209	20100	21577
24398	20235	19870	19907
30614	25332	25000	26303
36486	27100	31080	27606
37128	22727	25090	26424
37742	25847	27580	25586
38771	22675	-	23121
44743	23927	-	24717
52089	21119	-	20989
57061	28799	-	33497
87737	9391	9400	-
91316	18775	20300	20277
157246	23686	-	20606
197345	8275	8640	-

TABLA Nº 6.8

Comparación de diámetros angulares $\theta \times 10^{-3}$ (arc seg) obtenidos por diferentes autores.

HD	$\ominus$ (M)	$\ominus$ (UDPD)	$\ominus$ (RL)
2905	0.406	0.390	0.343
24398	0.713	0.702	0.673
30614	0.300	0.292	0.260
36486	0.500	0.426	0.454
37128	0.753	0.708	0.632
37742	0.664	0.527	0.532
38771	0.653	-	0.585
44743	0.607	-	0.562
52089	0.847	-	0.790
57061	0.193	-	0.162
87737	0.690	0.690	-
91316	0.333	0.318	0.293
157246	0.373	-	0.374
197345	2.243	2.107	-

$$L_\lambda = 4\pi\, d^2 .\, f_\lambda \qquad (6\text{-}15)$$

donde f_λ es el flujo monocromático observado en la longitud de onda .

Combinando las ecuaciones (14) y (15) tendremos la expresión de la magnitud estelar aparente en función de la luminosidad monocromática L_λ y de la distancia a la estrella d:

$$m_\lambda = - 2.5 \log (L_\lambda / 4\pi d^2) + c + A_\lambda \qquad (6\text{-}16)$$

Ahora referimos los flujos a una distancia de 10 parsec, distancia a la que los flujos estelares se consideran no estar afectados por la absorción del medio interestelar para así obtener las magnitudes absolutas monocromáticas dados por

$$M_\lambda = - 2.5 \log (L_\lambda / 400\pi) + c + A_\lambda \qquad (6\text{-}17)$$

Restando las magnitudes aparentes y absolutas (16) - (17), deducimos la distancia a la estrella dada por la expresión:

$$d = 10^{0.2\ (m_\lambda - M_\lambda + 5 - A_\lambda)} \qquad (6\text{-}18)$$

En el sistema fotométrico UBV la expresión de la distancia toma la forma siguiente:

$$d = 10^{0.2\ (V - M_V + 5 - A_V)} \qquad (6\text{-}19)$$

donde V es la magnitud visual aparente, M_V es la magnitud visual absoluta y A_V es la absorción monocromática en el sistema UBV definido por la expresión

$$A_V = R.E\ (B - V) \qquad (6\text{-}20)$$

donde R es una constante que depende de la dirección en que se observa. Aproximadamente R esta dado por la ecuación

$$R = 3.20 + 0.21\ (B - V)_o \qquad (6\text{-}21)$$

presentada por Schmidt-Kaler (1965). Hilner y Johnson (1956) midieron $R = 3 \pm 0.3$. En el presente trabajo adoptamos el valor de $R = 3.1$, por lo tanto, calculamos la distancia a las estrellas con la expresión

$$d\ (\text{parsec}) = 10^{0.2(V-M_V+5-3.1E(B-V))} \qquad (6\text{-}22)$$

donde las magnitudes aparentes V que se presentan en la Tabla A.4, son las listadas en el catálogo y suplemento de estrellas brillantes de Jamar et al. (1976) y Macaut-Hercot et al. (1978) respectivamente y las magnitudes absolutas M_V que se presentan en la Tabla A.2 son las obtenidas por el sistema BCD de París por Chalange y Divan (1973) y las obtenidas por Divan (1986), comunicación privada.

Las distancias calculadas por el método que acabamos

de describir se presentan en la Tabla Nº 6.9 bajo la columna titulada Me.

Las distancias estelares que se adoptarán para el presente trabajo resultarán de un promedio ponderado de las distancias obtenidas por diferentes autores.

En primer lugar tenemos las distancias obtenidas por Underhill, Divan et al. (1979) calculadas con las magnitudes absolutas del sistema BCD, que se presentan en la Tabla Nº 6.9 bajo la columna U-D. En segundo lugar, utilizaremos también las distancias obtenidas por Zorec (1986) que se presentan en la Tabla Nº 6.9 bajo la columna Zo que fueron obtenidas como un promedio de al menos cinco determinaciones independientes.

Asimismo, también tenemos las contribuciones en cuanto a distancias, las calculadas por los autores que a continuación se presentan, las cuales están tabuladas en la Tabla Nº 6.9 bajo las columnas correspondientes a sus iniciales:

An : Andrews (1968)

All : Allen (1973)

Le 1 : Lesh (1968)

Le 2 : Lesh (1972)

Hü : Humphreys (1970)

De : Deutschmann (1976)

Sa : Savage et al. (1977)

BC : Barlow y Cohen (1977)

Para el caso de las estrellas HD 62623 y HD 173948 en que sólo se disponía de dos valores de las distancias, se realizó una estimación adicional utilizando las magnitudes absolutas en el sistema MK tabuladas por Schimidt-Kaler (1965) en función del tipo espectral y la clase de luminosidad de la estrella. Para la primera estrella se encontró una magnitud absoluta de -6.7 y para la segunda $M_V = -4.2$.

Con éstas magnitudes absolutas y utilizando el valor de R dado por la expresión:

$$R = 3.20 + 0.21\ (B - V)_o \qquad (6\text{-}23)$$

se calculan las distancias estelares que se presentan en la Tabla Nº 6.9 bajo la columna MK, utilizando la expresión (22).

El valor de la distancia adoptada para cada estrella del programa será el que resulte del promedio ponderado de las distancias calculadas por los diferentes autores arriba citados, a las cuales se les ha asignado un peso estadístico propio.

A las distancias calculadas por el autor del presente trabajo, utilizando las magnitudes absolutas del sistema BCD se les asigna un peso estadístico igual a 2.0. Por otro lado, las distancias calculadas por J. Zorec con un promedio de al menos cinco determinaciones independientes tienen un peso estadístico de 1.75; mientras que las distancias obtenidas por Underhill, Divan et al. están afectadas por un peso estadístico igual a 1.50.

Finalmente a las distancias calculadas por los otros autores citados se les ha asignado un peso estadístico de 1.0.

Con éstas consideraciones se ha calculado la distancia promedio ponderado que se adopta en el presente trabajo y que se presentan en la Tabla Nº 6.9 bajo la columna $\langle d \rangle$ [Parsec] .

6.3.2 Luminosidades Bolométricas. Resultados

En el capítulo Nº 6.2.3. hemos ya determinado los flujos integrados corregidos de la absorción del medio interestelar; así también en el capítulo Nº 6.3.1 se calcularon las distancias de las estrellas adoptandose un promedio ponderado de las diferentes estimaciones.

Ahora con el conocimiento de las distancias y el

TABLA Nº 6.9

Distancias obtenidas por diferentes autores y distancia promedio adoptada ⟨d⟩ (parsec).

#	HD	UD	Zo	An	All	Le 1	Le 2	Hu	De	Sa	BC	Me	MK	⟨d⟩
1	2905			1337		1952				1009	1010			1102
2	24398	363		313		322		320		394	320			341
3	30614	1175		1820		920				1164		1278		1265
4	34085	228		302							470	338		325
5	36486	345		261		463			344	384	460			374
6	37128	470		436		463				409	450	423		441
7	37742	350		430		463				352	460	308		379
8	38771		631			567				520	420	324		483
9	41117	1300		1361		1492		1040			1380	1715		1420
10	44743	149	195			203				206		196		188
11	46300				924			850				695		791
12	51309	685	481			481			510			863		633
13	52089	153	176				187			188		130		162
14	53138	843	925				1018			1009	980			942
15	53244	144	126			121			113					128
16	57061	1076					1116			933				1047
17	58350	608	800				762			759	650	820		742
18	62623				911			1130					1066	1036
19	87737		480		634						560	463		515
20	91316			682		1000				959	970	1138		981
21	157246	583					718			689				652
22	164353			689		772				762	690	472		643
23	165024	461			767		762			745				659
24	166937	1081		1219							1600	1349		1298
25	173948				545		398						410	451
26	197345				473						610	442		492
27	198478	1072		1225		1164					970	1475		1218
28	202850		690	1148							950	1381		1055
29	206165	708	598	664		830						809		720
30	212593	608		1164							1020	1768		1206

flujo, es posible calcular la luminosidad de las estrellas de nuestro programa.

Suponiendo que el campo de radiación es isotrópico y homogéneo, integramos el flujo saliente $\mathcal{F}$ sobre toda la superficie de una estrella esférica de radio R y obtendremos la energía que emerge por la superficie de la estrella en la unidad de tiempo, la que es llamado luminosidad bolométrica

$$L_{\mathcal{S}} = 4.\pi.R^2.\mathcal{F}\ \left[\text{ergios.s}^{-1}\right] \qquad (6\text{-}24)$$

donde $\mathcal{F}$ es el flujo saliente en la superficie de la estrella y R el radio estelar. La luminosidad obtenida es equivalente a la potencia de la estrella.

Si conocemos la distancia d y el flujo medido a esa distancia integramos para una superficie esférica de radio igual a d para obtener la misma luminosidad bolométrica

$$L_{\mathcal{S}} = 4.\pi.d^2.f \qquad (6.25)$$

luego, para los flujos estelares medidos en la Tierra y corregidos de la absorción del medio interestelar obtenemos :

$$L = 4.\pi.d^2.f^{o} \qquad (6\text{-}26)$$

donde d es la distancia a la estrella y f^{o} es el flujo bolométrico desenrojecido de la estrella.

La luminosidad estelar suele expresarse en unidades de la Luminosidad solar cuyo valor es

$$L_{\odot} = 3.9 \times 10^{33} \quad [\text{ergio-s}^{-1}] \qquad (6\text{-}27)$$

reescribiendo, tenemos que la luminosidad de la estrella en unidades de luminosidad solar es

$$\frac{L}{L_{\odot}} = \frac{4.\pi.d^{2}.f^{o}}{L_{\odot}} = 3.127 \times 10^{4}.d^{2}.f^{o} \left[\frac{\text{erg}}{\text{s}}\right] \qquad (6\text{-}28)$$

donde la distancia está expresada en parsec y el flujo en $\text{ergio.cm}^{2}.\text{s}^{-1}$

El flujo f^{o} en la ecuación (28) es el flujo integrado sobre todas las longitudes de onda del espectro, mientras que las integrales de los flujos desenrojecidos calculados en el capítulo Nº 6.2.3 contienen sólo las contribuciones de los flujos medidos en el intervalo $\lambda\lambda(1360 - 11084)$ Å del espectro.

Para los intervalos donde no se tienen datos observacionales, el flujo se ha estimado como una fracción del flujo integrado y ha sido calculado en el capítulo Nº 6.2 como un factor de completación q propio de cada una de las estrellas. Por lo tanto los flujos desenroje-

cidos de la Tabla Nº 6.6 deben ser corregidos multiplicando por

$$(1 + q) \qquad (6\text{-}29)$$

lo que implica que los flujos sean incrementados en un porcentaje

$$P = (1 + \frac{1}{q})^{-1} \times 100 \qquad (6\text{-}30)$$

Los valores de q y P están listados tambień en la Tabla Nº 6.6. Así entonces, la ecuación (28) queda corregida por la ecuación (29) como sigue

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 3.127 \times 10^{4}. \; d^{2}. \; f^{o}_{\Delta}. \; (1+q) \left[\frac{\text{ergios}}{\text{seg}}\right] \qquad (6\text{-}31)$$

reescribiendo (31) tenemos

$$\log (L/L_{\odot}) = 4.495 + \log (d^{2}.f^{o}_{\Delta}.(1 + q)) \qquad (6\text{-}32)$$

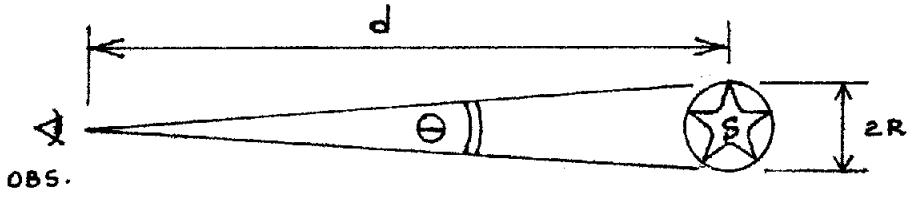
con la que se calcula la luminosidad de las estrellas del programa, presentado en la Tabla Nº 6.10.

6.4 CALCULO DE LA GRAVEDAD SUPERFICIAL

6.4.1 Cálculo de los Radios Estelares

En los capítulos precedentes demostramos que las estrellas supergigantes de nuestro programa se encuentran en promedio a distancias en el orden de los

2000 años luz, haciendo en consecuencia que sus diámetros angulares estén en el orden de unas 1/10000 de segundos de arco. Bajo éstas condiciones es muy lícito para el cálculo de los radios estelares hacer uso de la aproximación siguiente:



$$2\,R = \Theta \,.\, d \qquad (6\text{-}33)$$

donde R es el radio de la estrella, Θ es el diámetro angular, un ángulo muy pequeño subtendido por la líneas de la visual sobre el diámetro de la estrella cuyos valores para las supergigantes de nuestro programa están listados en la Tabla Nº 6.6 y d es la distancia adoptada de la estrella tabulada en la Tabla Nº 6.9.

Usualmente los radios estelares se presentan en unidades de radios solares, por lo que de (33) se tiene la expresión

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \frac{\Theta_{RR} \,.\, d}{2 \,.\, R_{\odot}} \qquad (6\text{-}34)$$

donde $R_{\odot}$ es el radio del Sol cuyo valor es

$$R_{\odot} = 6.9598 \times 10^{10} \text{ (cm)} = 2.25557 \times 10^{-8} \text{ (pc)} \quad (6\text{-}35)$$

y el sub-índice RR indica que los diámetros angulares han sido obtenidos usando los flujos en el intervalo $\lambda\lambda$5827-8000 Å del espectro.

Reescribiendo la expresión (34) tenemos

$$\log (R/R_{\odot}) = 7.346 + \log \Theta_{RR} + \log d \quad (6\text{-}36)$$

en ambas ecuaciones (35) y (36) los diámetros angulares están expresados en radianes y los radios y distancias de las estrellas supergigantes de nuestro programa en parsec.

Utilizando la expresión (34), con los diámetros angulares de la Tabla Nº 6.6 y las distancias de la Tabla Nº 6.9 calculamos los radios estelares que se presentan en la Tabla Nº 6.11. La ecuación (36) sirve para computar más adelante la gravedad superficial de la estrella.

6.4.2 Determinación de las Masas Estelares

La determinación de las masas de las estrellas se hace utilizando los diagramas de evolución estelar log $(L/L_{\odot})$ vs log Teff graficados a partir de los valores calculados por Becker (1981) y por Brunisch y Truran (1982) para estrellas con diferentes masas iniciales

y bajos índices de metalicidad. Estos diagramas representan el camino evolutivo de las estrellas para un determinado valor inicial de la masa relativa $M/M_{\odot}$ y han sido calculados por intermedio de modelos donde la pérdida de masa no ha sido considerada. Asimismo, las curvas indican los estados de evolución a medida que las estrellas van consumiendo su combustible nuclear.

Las curvas de evolución utilizados en este trabajo son los que corresponden a masas estelares iniciales de 3, 5, 7, 9, 15, 30 y 40 masas solares y para estrellas con una composición química inicial de 70% Hidrógeno, 28% Helio y 2% de elementos pesados (metales), simbolizados por X, Y, Z respectivamente. Estas curvas se muestran en la Figura Nº 6.4 donde hemos marcado la posición correspondiente al par de parámetros fundamentales L y Teff de cada una de las estrellas de nuestro programa, estimandose prolijamente la posición más probable de cada punto entre las curvas. Para determinar a cuantas masas solares corresponde cada punto del diagrama, se le hace corresponder a cada punto una curva de evolución intermedia que pase por dicho punto. A partir de los estados evolutivos marcados en el diagrama que representan las mismas condiciones físicas en las estrellas, se establece una correspondencia entre los puntos homólogos de las curvas del diagrama. Estos puntos homólogos

representan para todas las curvas el mismo estado de evolución estelar tal como el punto edad cero en la secuencia principal (ZAMS) que indica el nacimiento de la estrella en la secuencia principal.

Como los puntos homólogos no son suficientes para estimar con adecuada precisión una curva intermedia que contenga al punto que representa la masa de la estrella, se ha dividido la curva en intervalos iguales señalados por los puntos a, b, c, d, e, f, g, h, i. Consideramos que aproximadamente éstos puntos son tambien homólogos entre las curvas. Así entonces podemos calcular por geometría a cuantas masas solares corresponde la curva de evolución interpolada que pasa por cada punto y, en consecuencia el valor de la masa de la estrella. Las masas resultantes se presentan en la Tabla Nº 6.10.

6.4.3 Corrección de la Masa por Efectos de la Pérdida de la Masa

El fenómeno de pérdida de masa está presente en todos los tipos de estrellas que pueblan el diagrama HR. Este fenóneno es particularmente importante en las estrellas supergigantes tempranas cuyas masas son superiores a $15M_{\odot}$ (Lamers et. al. 1976). Los efectos de la pérdida de masa sobre la evolución de las estrellas

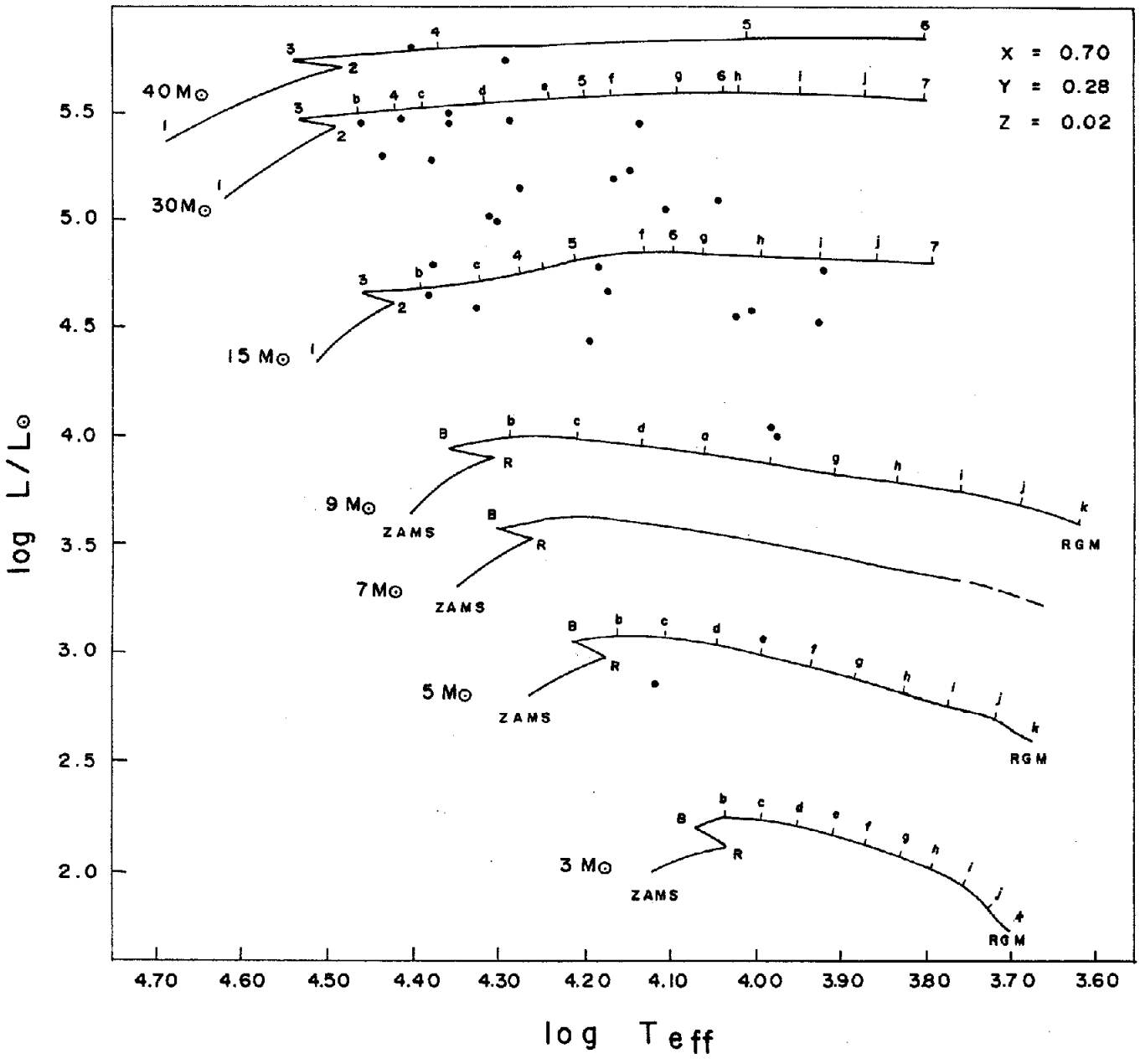


Fig. Nº 6.4

Caminos Evolutivos de Estrellas según Modelos sin Pérdida de Masa

TABLA Nº 6.10

Temperatura efectiva (ºK), Luminosidad Bolométrica y Masa de las estrellas del programa en unidades solares.

#	HD	log Teff	log $L/L_{\odot}$	$M/M_{\odot}$
1	2905	4.284	5.452	27.60
2	24398	4.306	5.014	20.20
3	30614	4.404	5.790	40.00
4	34085	4.049	5.098	20.18
5	36486	4.433	5.293	25.90
6	37128	4.357	5.489	29.38
7	37742	4.412	5.469	29.40
8	38771	4.356	5.438	28.00
9	41117	4.290	5.732	36.80
10	44743	4.379	4.648	14.61
11	46300	3.978	4.042	10.10
12	51309	4.194	4.445	12.66
13	52089	4.325	4.592	13.89
14	53138	4.165	5.187	22.00
15	53244	4.118	2.854	4.78
16	57061	4.459	5.467	29.38
17	58350	4.106	5.047	19.14
18	62623	3.924	4.527	13.29
19	87737	3.973	4.010	9.92
20	91316	4.274	5.140	22.35
21	157246	4.375	5.287	25.60
22	164353	4.177	4.659	13.95
23	165024	4.304	5.024	20.10
24	166937	4.137	5.446	27.15
25	173948	4.372	4.554	16.52
26	197345	3.918	4.774	14.72
27	198478	4.147	5.232	22.75
28	202850	4.007	4.589	13.55
29	206165	4.182	4.787	14.72
30	212593	4.017	4.567	13.31

han sido estudiados por diversos autores. En este trabajo utilizaremos los resultados de Brunish y Truran (1982). Sin embargo ningún resultado que concierne la pérdida de masa puede ser considerado definitivo, dado que en todos ellos la tasa de pérdida de masa está dada por una expresión heurística y estacionaria, mientras que las observaciones muestran que se trata de un fenómeno variable.

Las masas obtenidas en éste trabajo se han interpolado con modelos donde la pérdida de masa es cero ($\dot{M} = 0$). Al corregirlos por pérdida de masa tendremos entonces un límite inferior en la estimación de la masa. Las masas otenidas a partir de modelos donde $\dot{M} \neq 0$ son más grandes; sin embargo, todos los modelos calculados hasta el presente tienen tasas de pérdida de masa parametrizadas y el verdadero parámetro correspondiente a una estrella dada es desconocido.

En el trabajo de Brunish y Truran (1982) se ha utilizado la siguiente representación de la tasa de pérdida de masa

$$\dot{M} \sim \frac{L}{V_s} \qquad (6\text{-}37)$$

donde L es la luminosidad de la estrella y V_s es la velocidad de escape a la atracción gravitatoria de la estre-

lla. La constante de proporcionalidad es una función de la temperatura efectiva de la estrella y de la clase de luminosidad.

En nuestro trabajo hemos utilizado la cantidad de masa promedio perdida por una estrella en función de su masa original, calculada por los autores mencionados.

De los datos publicados hemos obtenido la expresión analítica siguiente que ajusta esos valores (Zorec, 1986b)

$$\log (\Delta M/M_{\odot}) = 3.60 \log (M/M_{\odot}) - 4.73 \quad (6\text{-}38)$$

Así todos los valores de masas obtenidos a partir de caminos evolutivos sin pérdida de masa, han sido corregidos usando

$$(M/M_{\odot})^{*} = (M/M_{\odot})_{o} - \Delta M/M_{\odot} \quad (6\text{-}39)$$

donde el sub-índice "o" indica masa obtenida de diagramas evolutivos donde la pérdida de masa no ha sido considerada y $\Delta M/M_{\odot}$ es calculado con la expresión (38). Esta corrección sólo tiene en cuenta ordenes de magnitud y en ningún caso puede considerarse como exacta ó definitiva. En la Tabla siguiente reproducimos algunos valores característicos de $M/M_{\odot}$:

$M/M_{\odot}$	$\Delta M/M_{\odot}$
10	0.07
15	0.32
20	0.90
30	3.89
40	11.00

Citemos que según los resultados de Brunish y Truran (1982), la mayor cantidad de masa es perdida durante la permanencia de una estrella en la secuencia principal.

Las masas estelares determinadas en el capítulo Nº 6.4.2 se deben corregir entonces con la expresión analítica (39) obteniendose así un límite inferior en la estimación de la masa de las estrellas de nuestro programa. Estos valores se presentan en la Tabla Nº 6.11.

6.4.4 Gravedades Superficiales. Resultados

Calcularemos la gravedad superficial de las estrellas supergigantes de nuestro programa con la ecuación (10) dada en el capítulo Nº 5.1.

$$g = G \frac{M}{R^2} \qquad (6\text{-}40)$$

donde M es la masa de la estrella, R el radio estelar y G la constante de la gravedad cuyo valor es

$$G = 6.668 \times 10^{-8} \quad \text{dina-cm}^2\text{-gr}^{-2}$$

Reescribiendo la ecuación (40) en función de la gravedad superficial del Sol y tomando logaritmo se tiene

$$\log g = \log g_{\odot} + \log\left[\frac{M}{M_{\odot}}\right]^{*} - 2 \log\left[\frac{R}{R_{\odot}}\right] \quad (6\text{-}41)$$

donde

$$g_{\odot} = 2.739 \times 10^{4} \quad [\text{cm-seg}^{-2}]$$

$$M_{\odot} = 6.959 \times 10^{10} \quad [\text{gr}]$$

son respectivamente la gravedad superficial y la masa solar. Las masas estelares corregidas por pérdida de masa, marcados con un superíndice asterisco, así como los radios de éstas estrellas son las que están listadas en la Tabla Nº 6.11. Reemplazando estos valores en la ecuación (41) obtenemos la gravedad superficial de las supergigantes del programa que se presentan también en la Tabla Nº 6.11, lo cual nos sirve como uno de los parámetros para la interpolación de las discontinuidades de Balmer en la Tabla Nº 5.1.

TABLA Nº 6.11

Masas estelares corregidas por pérdida de masa, radios de las estrellas en unidades solares y gravedad superficial (c.g.s).

#	HD	$(M/M_{\odot})$*	$R/R_{\odot}$	log g
1	2905	24.73	48.05	2.47
2	24398	19.27	26.15	2.89
3	30614	29.10	40.76	2.68
4	34085	19.25	93.82	1.78
5	36486	23.62	20.11	3.20
6	37128	25.79	35.69	2.74
7	37742	25.80	27.07	2.98
8	38771	24.98	33.89	2.78
9	41117	28.73	64.33	2.28
10	44743	14.32	12.27	3.42
11	46300	10.02	38.78	2.26
12	51309	12.49	22.79	2.82
13	52089	13.65	14.76	3.23
14	53138	20.73	61.09	2.18
15	53244	4.77	5.18	3.69
16	57061	25.79	21.74	3.17
17	58350	18.37	68.31	2.03
18	62623	13.08	86.80	1.68
19	87737	9.85	38.21	2.27
20	91316	21.01	35.12	2.67
21	157246	23.41	26.12	2.97
22	164353	13.70	31.49	2.58
23	165024	19.18	26.73	2.87
24	166937	24.45	93.51	1.88
25	173948	16.07	11.36	3.53
26	197345	14.42	118.64	1.45
27	198478	21.32	70.06	2.08
28	202850	13.33	63.68	1.95
29	206165	14.42	35.70	2.49
30	212593	13.10	59.15	2.01

6.5 COMPARACIONES DE LAS DISCONTINUIDADES TEORICAS Y OBSERVADAS

6.5.1 Interpolación de las Discontinuidades Teóricas: Resultados

Las discontinuidades de Balmer que fueron obtenidos a partir de los modelos clásicos de atmósferas estelares están tabuladas en la Tabla Nº 5.1 en función de la temperatura efectiva y de la gravedad superficial de la estrella. Los parámetros temperatura efectiva y gravedad superficial de las estrellas de nuestro programa calculados en los capítulos precedentes, sirven para realizar una doble interpolación entre los datos de la Tabla Nº 5.1 para así determinar la discontinuidad de Balmer teórica de cada estrella. La temperatura efectiva y la gravedad superficial de cada estrella del programa están tabuladas en las Tablas Nº 6.6 y 6.11 respectivamente. Las discontinuidades de Balmer teóricas interpoladas se miden en dex y se presentan en la Tabla Nº 6.12.

6.5.2 Comparación y Discusión

Al iniciar el presente trabajo expresamos que nuestro propósito es estudiar las discrepancias que aparecen al comparar las discontinuidades de Balmer obtenidas a partir de los datos observacionales de los flujos

calculados con la fotometría de 13 colores, con las discontinuidades de Balmer que resultan de la teoría de atmósferas estelares para modelos en equilibrio radiativo y equilibrio hidrostático, en función del tipo espectral que depende principalmente de la temperatura efectiva.

Para el estudio de las discrepancias mencionadas, el criterio de comparación adoptado es la diferencia de la discontinuidad de Balmer observacional menos la teórica.

$$\Delta D\ (dex) = D^{obs}\ (dex) - D^{teo}\ (dex) \qquad (6\text{-}42)$$

Las discrepancias entre la discontinuidades de Balmer observacionales y teóricas según el criterio adoptado, se muestran en la Tabla Nº 6.12. En esta Tabla se observa que las discontinuidades de Balmer observacionales son más pequeñas que las discontinuidades de Balmer teóricas y que en al menos el 30% de éstas discrepancias son bastante grandes.

Al relacionar las discrepancias mencionadas con la temperatura efectiva se encuentra la distribución que se muestra en la figura Nº 6.5. En ésta gráfica se observa que existe una correlación bien definida entre las discrepancias de las discontinuidades de Balmer y la temperatura efectiva y al parecer ésta correlación

es una función de tipo parabólico. En la misma gráfica se ve también que existe una cierta dispersión de valores de las discrepancias alrededor de la discrepancia de magnitud cero ($\Delta D = 0$). Esta dispersión no es muy influyente pues está dentro de un intervalo tolerable de dispersión pues su ancho: 4×10^{-2} (dex) es menor que el ancho de dispersión promedio de toda la distribución en la gráfica.

No hemos encontrado en los resultados del presente trabajo, una relación apreciable en la gráfica de la figura Nº 6.5 entre las discrepancias de las discontinuidades de Balmer observacionales y teóricas con el estado evolutivo de las estrellas.

TALBLA Nº 6.12

Comparación de las discontinuidades de Balmer observacionales con las teóricas y la diferencia: $\Delta D = D^{obs} - D^{teo}$

#	HD	D^{obs}(dex)	D^{teo}(dex)	Δ D(dex)
1	2905	0.063	0.097	-0.034
2	24398	0.087	0.128	-0.041
3	30614	0.061	0.032	0.029
4	34085	0.129	0.326	-0.197
5	36486	0.076	0.058	0.018
6	37128	0.067	0.072	-0.005
7	37742	0.066	0.049	0.017
8	38771	0.091	0.075	0.016
9	41117	0.070	0.076	-0.006
10	44743	0.106	0.098	0.008
11	46300	0.281	0.546	-0.265
12	51309	0.143	0.224	-0.081
13	52089	0.129	0.129	0.000
14	53138	0.130	0.188	-0.058
15	53244	0.237	0.336	-0.099
16	57061	0.092	0.040	0.052
17	58350	0.132	0.253	-0.121
18	62623	0.294	0.373:	-0.079
19	87737	0.275	0.534:	-0.259
20	91316	0.082	0.130	-0.048
21	157246	0.093	0.072	0.021
22	164353	0.148	0.222	-0.074
23	165024	0.124	0.130	-0.006
24	166937	0.290	0.189	0.101
25	173948	0.118	0.109	0.009
26	197345	0.239	0.337:	-0.098
27	198478	0.106	0.200	-0.094
28	202250	0.189	0.446	-0.257
29	206165	0.113	0.211	-0.098
30	212593	0.204	0.426	-0.222

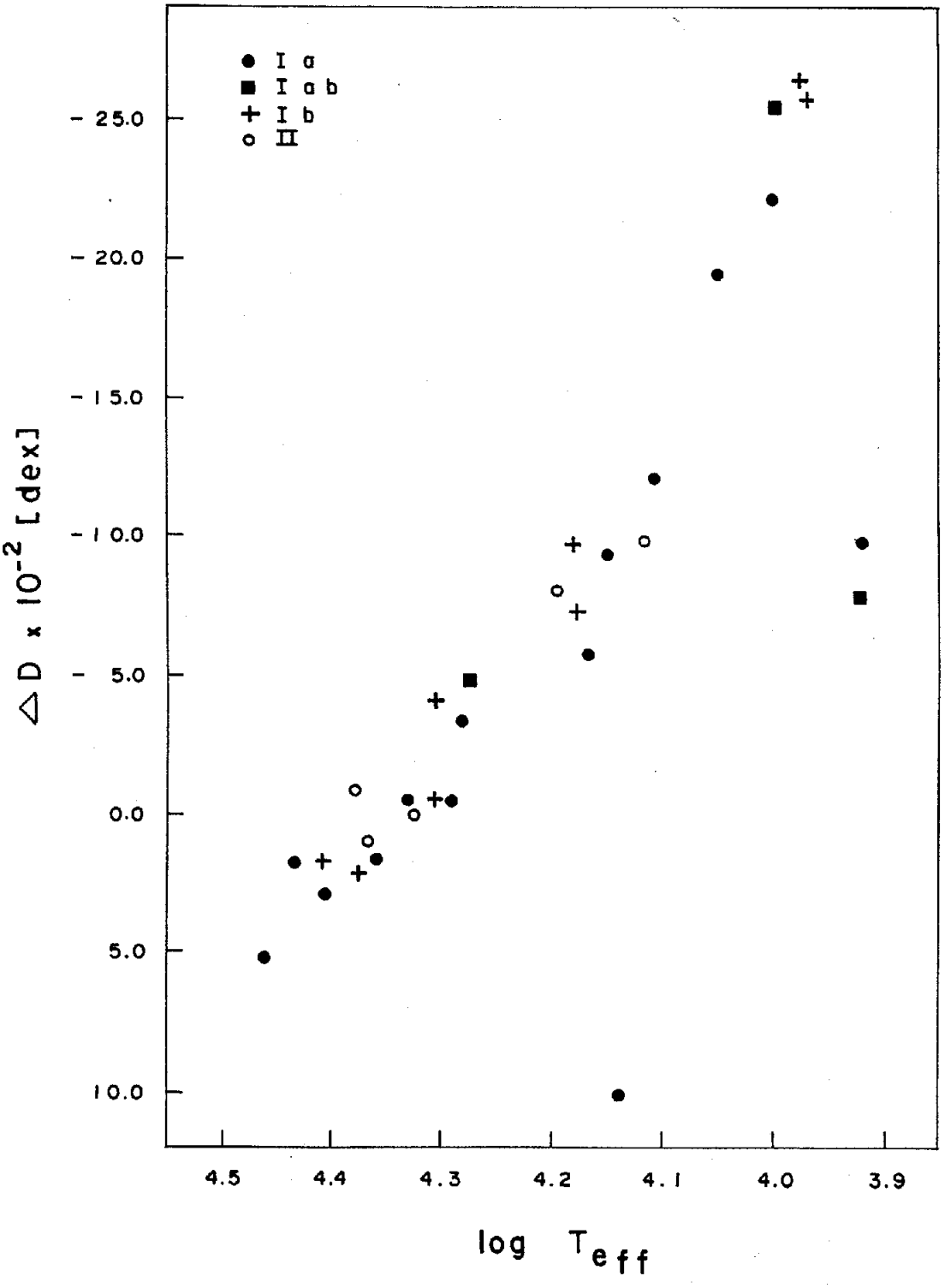


Fig. Nº 6.5: Discrepancias de las discontinuidades de Balmer observadas y teóricas en función de la temperatura efectiva de las estrellas.

7.0 LA ROTACION DIFERENCIAL DE LAS ESTRELLAS

INTRODUCCION

En los capítulos precedentes hemos estudiado la discontinuidad de Balmer de las estrellas supergigantes. Los resultados obtenidos muestran que existen en algunos objetos algunas discrepancias entre los datos de observación y las predicciones teóricas provenientes de modelos de atmósfera estelares en equilibrio radiativo y equilibrio hidrostático. Esto podría significar que los principios físicos básicos de equilibrios radiativo e hidrostático pueden ser insuficientes para explicar las discontinuidades de Balmer de las estrellas supergigantes. En los casos discordantes, las discontinuidades observadas son más pequeñas que las discontinuidades predichas por la teoría para los mismos parámetros de temperatura efectiva y gravedad superficial:

$$D_{obs}(T_{eff}, \log g) \lesssim D_{teoría}(T_{eff}, \log g) \qquad (7\text{-}1)$$

Sabiendo que la rotación diferencial, introduce importantes inhomogeneidades de gravedad y temperatura superficial, investigaremos en este trabajo las consecuencias que acarrean esas inhomogeneidades sobre el valor observado de la discontinuidades de Balmer de las estrellas supergigantes.

En trabajos anteriores (Zorec 1986 a,b) se ha demostrado que la rotación diferencial de las estrellas enanas y gigantes era un fenómeno altamente probable. Sabiendo igualmente que las estrellas supergigantes poseen pérdidas de masa superficiales importantes ($\dot{M} \simeq 10^{-6}$ a 10^{-9} $M_{\odot}$ año^{-1}), una redistribución del momento angular puede tener lugar en la estrella dado que la pérdida de masa también implica una pérdida de momento angular en las capas estelares externas. En el fenómeno de la rotación diferencial no interesa sin embargo solamente una ley de rotación sino que por el hecho de poder existir una rotación diferencial la estrella puede almacenar una energía cinética de rotación muy superior al límite que establece una rotación crítica de cuerpo rígido. En una rotación rígida, la velocidad lineal de rotación en el ecuador no debe superar la velocidad de escape gravitatoria, dado que ello provocará una disgregación de la estrella

e inestabilidad dinámica del objeto. La rotación crítica de cuerpo rígido representa solamente una cantidad de energía cinética de rotación, que no supera el 1.6% de la energía potencial gravitatoria. En una estrella con rotación diferencial, donde el momento angular se encuentra fuertemente concentrado hacia el centro estelar, se pueden almacenar energías de rotación 10 veces grandes, sin que ello implique que la rotación en el ecuador iguale a la velocidad de escape. Sin embargo tales almacenamientos de energía cinética implican fuertes deformaciones de las estrellas que resumiremos en los parágrafos siguientes y cuyas consecuencias pueden ser interesantes para tratar de explicar las discordancias observadas entre las discontinuidades de Balmer observadas y teóricas.

7.1 CRITERIOS DE ESTABILIDAD Y LEYES PROBABLES DE ROTACION

Las leyes de rotación no rígida deben obedecer una serie de limitaciones o criterios que aseguran que la estrella puede tener una rotación estacionaria o permanente durante un lapso importante de tiempo y que aseguraran además la estabilidad dinámica del objeto.

Las condiciones que describen un campo rotacional estable han sido obtenidas por Goldreich y Schubert (1967)

y Friche (1968), que se conocen con el nombre de criterio de estabilidad GSF. Estos criterios establecen las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\Omega(\tilde{\omega},z)\cdot\tilde{\omega}^2\right) \qquad (7\text{-}2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}}\left(\Omega(\tilde{\omega},z)\cdot\tilde{\omega}^2\right) \qquad (7\text{-}3)$$

donde $\Omega(\tilde{\omega}, z)$ es la velocidad angular de rotación, $\tilde{\omega}$ es la distancia al eje de rotación y z es la coordenada cilíndrica perpendicular al plano ecuatorial de la estrella. Sabiendo que $\Omega.\tilde{\omega}^2$ es el momento angular por unidad de masa. De la primera de las relaciones se concluye que la rotación diferencial en un objeto estable tendrá una simetría cilíndrica, es decir la estrella rotará diferencialmente según cilindros coaxiales. Resolviendo la segunda ecuación, vemos que la velocidad angular tendrá una variación del tipo

$$\Omega \geq \tilde{\omega}^{-2} \qquad (7\text{-}4)$$

lo que implica que los cilindros más próximos al eje de rotación tendrán velocidades angulares más grandes que los cilindros con radios $\tilde{\omega} \sim$ Re, donde Re es el radio ecuatorial de la estrella.

En las estrellas tempranas, donde el núcleo es convectivo y la envoltura radiativa se requieren además

dos condiciones particulares. El núcleo convectivo debe conservar el carácter isotrópico de la convección. Esto impone que

$$\partial (\Omega \cdot \tilde{\omega}^2) / \partial \tilde{\omega} = \text{cte en } \tilde{\omega} \to o \qquad (7\text{-}5)$$

Las pérdidas radiativas en la superficie de la estrella tenderán a uniformizar el momento angular (Jeans 1926) y ello estable que

$$\partial (\Omega \cdot \tilde{\omega}^2) / \partial \tilde{\omega} \to o \text{ en } \tilde{\omega} \to Re \qquad (7\text{-}6)$$

Se puede demostrar (Morle 1968) que la ley de rotación que obedece al conjunto de condiciones impuestas arriba, tiene la forma:

$$\Omega(\tilde{\omega}) \cdot \tilde{\omega}^2 = (J/M) \cdot a(b) \cdot \frac{m}{(1+b.m)} \qquad (7.7)$$

donde J es el momento angular total de la estrella, M es la masa total, m es la fracción de masa integrada hasta el radio $\tilde{\omega}$

$$m = (m)\tilde{\omega} = \frac{4\pi}{M} \int_o^{\tilde{\omega}} \int_o^{z(\tilde{\omega}')} \rho(\tilde{\omega}', z)\, \tilde{\omega}'\, dz\, d\tilde{\omega}' \qquad (7\text{-}8)$$

donde ρ es la densidad y

$$a(b) = \frac{b^2}{b - L_N (1+b)} \qquad (7\text{-}9)$$

siendo b una constante arbitraria.

En este trabajo investigaremos sólo el caso donde

$$b = -0.454 \qquad (7\text{-}10)$$

y que corresponde físicamente a la rotación de una estrella que se ha condensado a partir de una nube conservando el momento angular por cilindros coaxiales (Stoechley, 1965).

7.2 GENERALIDADES SOBRE LAS DEFORMACIONES ESTELARES PRODUCIDAS POR LA ROTACION DIFERENCIAL

En primer lugar, la rotación por intermedio de la fuerza centrífuga tiende a compensar la atracción gravitatoria. Como la producción de energía en el núcleo estelar por reacciones nucleares depende principalmente del peso de las capas estelares, la rotación al compensar la atracción gravitatoria producirá el efecto de un peso inferior y la estrella tendrá la tendencia de comportarse como un objeto de masa más pequeña. Como la luminosidad de la estrella depende principalmente de su masa, se deduce entonces que cuanto mayor sea la energía cinética de rotación de la estrella, tanto menor será su luminosidad.

La evolución de una estrella también es una función

de la masa. Cuanto mayor es la masa estelar tanto más violentos y más rápidos son las reacciones nucleares. Esto acarrea entonces una evolución más rápida. Una estrella que rota, tendrá, sin embargo, como consecuencia del efecto de compensación del peso por la rotación, una evolución más lenta pues su masa efectiva que provoca el peso es inferior.

Se sabe además que las estrellas menos masivas tienen densidades centrales más elevadas que las estrellas más masivas (Cox y Giuli, 1968). Una estrella que rota tendrá entonces un núcleo mucho más denso que una estrella de igual masa pero sin rotación. Esta variación de densidad produce por su parte modificaciones geométricas importantes de las estrellas en rotación. Estas modificaciones son muy interesantes en el caso de la rotación diferencial donde la cantidad de momento angular puede ser particularmente grande. Por los criterios de estabilidad hemos visto que la velocidad angular en el ecuador estelar no puede ser elevada. Esto implica que tampoco la fuerza centrífuga en el ecuador será importante, lo cual lleva como consecuencia que el radio ecuatorial sufrirá sólo deformaciones muy pequeñas. Sin embargo como el momento angular producirá un aumento de densidad en la parte central de la estrella, el volumen necesario para contener la masa de la estrella conservando además el momento

angular total, será necesariamente más pequeño. Esto conduce entonces a una reducción del radio polar de la estrella. Como el radio polar disminuye, la gravedad superficial en el polo es diferente a la gravedad superficial en el ecuador. Por el teorema de Von Zeipel, que reproducimos en el parágrafo siguiente, vemos entonces que también el flujo radiativo no será el mismo en el polo que en el ecuador. Conceptualmente esta variación del flujo radiativo se puede comprender de la siguiente manera: En las envolturas radiativas de las estrellas calientes, el flujo radiativo existe gracias a la existencia de un gradiente de temperaturas. El gradiente de temperaturas está dado sin embargo por un gradiente de presiones, el cual por la condición del equilibrio hidrostático, está condicionado por la gravedad. De esto se concluye que el flujo radiativo será proporcional a la gravedad. Al tener flujos diferentes, tendremos también temperaturas efectivas diferentes. Cada temperatura efectiva y gravedad efectiva local pueden entonces caracterizar un espectro de distribución de energía obtenido por la modelización clásica de atmósferas plano-paralelas en equilibrio radiativo e hidrostático. El espectro observado de la estrella será entonces la suma de espectros locales realizada sobre el hemisferio accesible a la observación. Este espectro será evidentemente una función del ángulo de inclinación del eje de rotación

de la estrella según la cual se proyecta la deformación geométrica global de la estrella que induce la rotación diferencial.

En la figura Nº 7.1 se reproducen algunas formas características de estrellas con rotación diferencial según la ley presentada más arriba. Cada forma geométrica está parametrizada según el parámetro de deformación t definido como sigue:

$$t = \frac{\text{energía cinética de rotación}}{\text{energía potencial gravitacional}} \qquad (7\text{-}11)$$

7.3 EL TEOREMA DE VON ZEIPEL

En las estrellas deformadas por la rotación diferencial debemos considerar los cambios que producen éstas deformaciones sobre la gravedad superficial de la estrella y los efectos que éstos cambios acarrean sobre el flujo emitido por la estrella. Para ello haremos uso del teorema de Von Zeipel, que afirma la existencia de una relación entre las variaciones de la luminosidad y la gravedad en la superficie estelar.

Vamos a considerar estrellas para las cuales las envolturas están en equilibrio radiativo en cualquier punto, entonces el vector de flujo radiativo $\mathcal{F}$ y la tasa

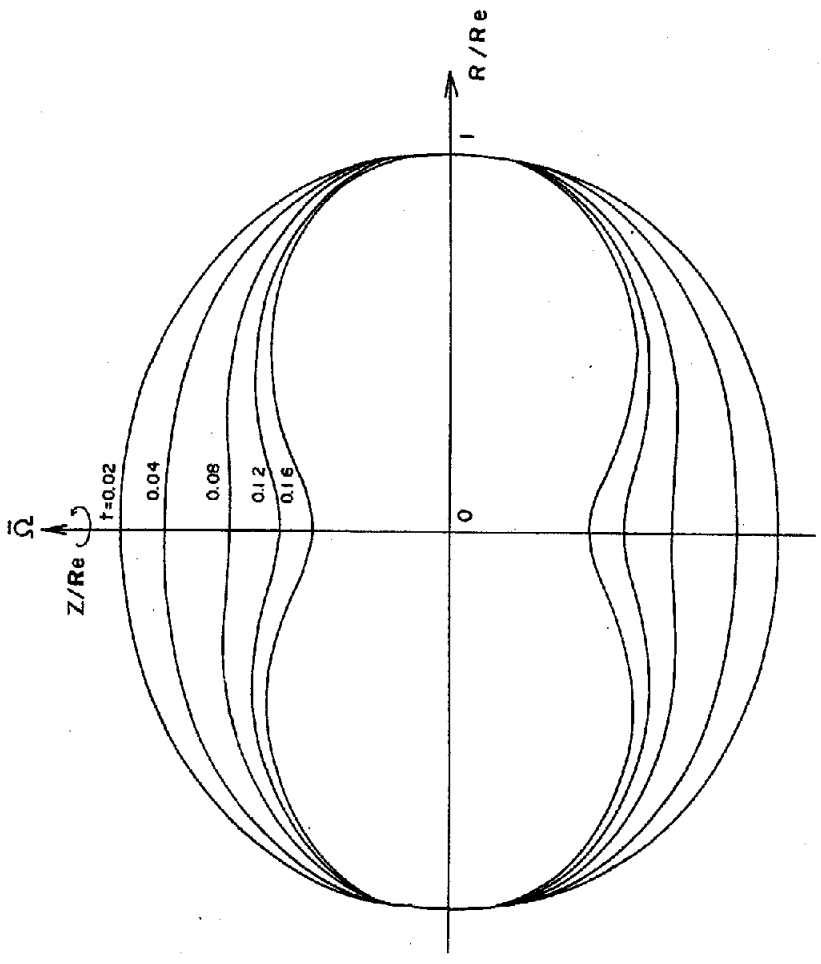


Fig Nº 7.1: Estrellas deformadas por la rotación diferencial en función del parámetro de deformación t.

de producción de energía E_{NUC} estan relacionados por

$$\text{div } \mathcal{F} = \rho E_{NUC} \qquad (7\text{-}12)$$

y, por la condición del equilibrio radiativo tenemos que el flujo radiativo es

$$\mathcal{F} = - \frac{4 a c T^3}{3 \kappa \rho} \text{ . grad } T \qquad (7\text{-}13)$$

donde a, c y κ son respectivamente, las constantes de de la presión, la velocidad de la luz y el coeficiente de opacidad promediada sobre todas las longitudes de onda. Suponemos tambien que la presión total P está relacionada con la densidad ρ y la temperatura T por la ecuación de estado

$$P = \frac{\mathcal{R}}{\bar{\mu}} \rho T + \frac{1}{3} a T^4 \qquad (7\text{-}14)$$

donde $\bar{\mu}$ es el peso molecular medio que en nuestro caso es constante y $\mathcal{R}$ es la constantes de los gases perfectos.

Suponemos ahora que las configuraciones están en el estado de rotación estacionario, y que su velociad angular Ω es sólo función de la distancia $\tilde{\omega}$ desde el eje de rotación. En vista de que éstas pseudo-barótropas poseen simetría axial, nos será conveniente usar coordenadas cilíndricas ($\tilde{\omega}$, φ , z). La condición del equilibrio mecánico ó hidrostático puede escribirse de la si-

siguiente manera

$$\frac{1}{\rho} \text{ grad } P = - \text{ grad } \Phi \qquad (7\text{-}15)$$

donde

$$\Phi(\tilde{\omega}, z) = V(\tilde{\omega}, z) - \int^{\tilde{\omega}} \Omega^2(\tilde{\omega}')\tilde{\omega}' \, d\tilde{\omega}' \qquad (7\text{-}16)$$

Además se tiene que el potencial gravitatorio está relacionado con la densidad por la ecuación de Poison

$$\nabla^2 V = 4\pi G \rho \qquad (7\text{-}17)$$

donde G es la constante de gravitación.

Ahora nuestro análisis concierne sólo las superficies químicamente homogéneas, pseudo-barótropas, isobáricas, isopícnicas e isotérmicas (i.,e., las superficies P = constante, ρ = constante, y T = constante) todas coincidentes con la superficie de nivel Φ constante que viene a ser una superficie equipotencial. Por esta razón, si tenemos en cuenta que

$$E_{NUC} = E_{NUC}(\rho, T) \qquad (7\text{-}18)$$

y

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\rho, T) \qquad (7\text{-}19)$$

la tasa de generación de energía y el coeficiente de opacidad depende solamente de Φ ; de las relaciones (13) y (15) se deduce que

$$\mathcal{F} = -\frac{4ac}{3}\frac{T^3}{\kappa\rho}\frac{dT}{d\Phi}\,\text{grad}\,\Phi \qquad (7\text{-}20)$$

ó

$$\mathcal{F} = f(\Phi)\cdot\text{grad}\,\Phi \qquad (7\text{-}21)$$

donde:

$$f(\Phi) = -\frac{4ac}{3}\frac{T^3}{\kappa\rho}\frac{dT}{d\Phi} \qquad (7\text{-}22)$$

$$g_{eff} = \text{grad}\,\Phi \qquad (7\text{-}23)$$

lo que significa que $f(\Phi)$ es constante sobre cada superficie de nivel y que además depende de la superficie de nivel escogida. Por consiguiente, dado que la superficie de una pseudo-barótropa es una superficie de nivel, podemos afirmar que:

> La variación de brillo sobre una superficie de nivel de una pseudo-barótropa corresponde exactamente a la variación de la gravedad efectiva.

7.4 GENERALIDADES SOBRE LAS VARIACIONES DE LOS PARAMETROS OBSERVACIONALES PRODUCIDOS POR LA ROTACION DIFERENCIAL

Presentaremos solamente las consecuencias que acarrea la rotación diferencial sobre la posición de una estrella en el diagram HR.

De los criterios de estabilidad hemos visto que el momento específico

$$j(\tilde{\omega}) = \Omega(\tilde{\omega}) \cdot \omega^2 \qquad (7\text{-}24)$$

debe ser una función creciente de ω^2. Cosideremos entonces casos de distribución de momento angular (ó de la velocidad angular de rotación). Esos dos casos se encuentran esquematizados en el diagrama de la figura Nº 7.2 y la diferencia esencial entre ambos es de presentar concentraciones de momento angular diferentes en el centro estelar. La distribución "A" presenta una concentración mayor que la distribución "B" para $\tilde{\omega} \longrightarrow 0$

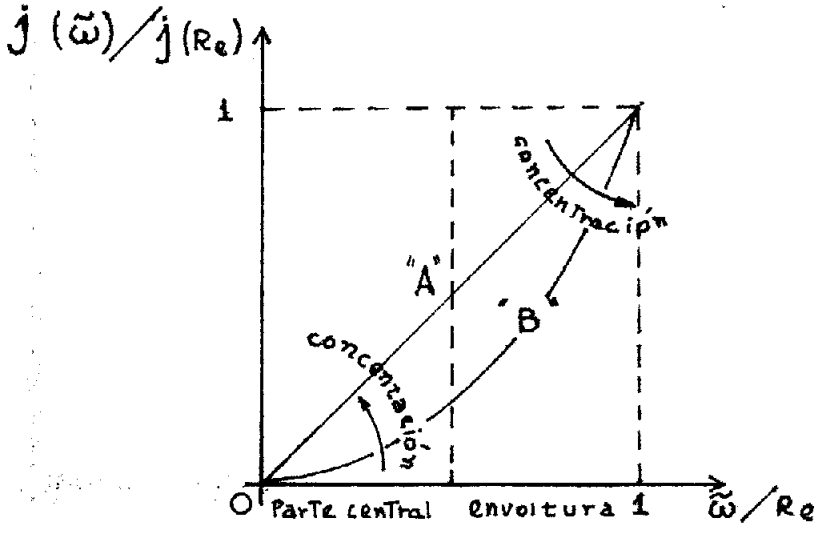


Fig. Nº 7.2: Leyes diferentes de distribución del momento angular de estrellas en rotación diferencial.

Las consecuencias de la distribución "A" y "B" sobre la posición de una estrella de masa dada en el diagrama HR, pueden inferirse de la relación siguiente:

$$L = \sigma \cdot S \cdot T_{eff}^4 \qquad (7\text{-}25)$$

donde L es la luminosidad de la estrella (erg.seg^{-1}), σ es la constante de Stefan-Boltzmann, S es el área de la superficie de la estrella y Teff es la temperatura efectiva promediada sobre toda la superficie estelar deformada por la rotación. Cuanto mayor será la concentración del momento angular hacia el centro de la estrella, tanto menor será la luminosidad. Esto se debe a que la producción de la energía en una estrella se dá en su núcleo y es éste el que "resiente" el fenómeno de la compensación del peso de la masa estelar de la rotación. Así entonces tendremos

$$L\ (\text{"A"}) < L\ (\text{"B"}) \qquad (7\text{-}26)$$

Por otro lado cuanto mayor sea la concentración de momento angular en las capas externas de la estrella, tanto mayor será el efecto sobre la variación del área de la estrella. En la figura Nº 7.2 se observa que la ley "B" determina una concentración de momento angular en las capas externas de la estrella que es superior a la concentración provocada por la ley "A". Esto produce que

$$S\ (\text{"A"}) < S\ (\text{"B"}) \qquad (7\text{-}27)$$

De ambas desigualdades tendremos así que

$$\Delta T_{eff}\ (\text{"A"}) < \Delta T_{eff}\ (\text{"B"}) \qquad (7\text{-}28)$$

Resumiendo podemos decir que la ley "A" producirá un desplazamiento de la estrella en el diagrama HR siguiendo la secuencia principal de rotación nula, mientras que la ley "B" no producirá grandes cambios en la luminosidad pero sí acarreará cambios considerables en la temperatura efectiva. En el diagrama HR que sigue, hemos esquematizado estos efectos: Figura Nº 7.3.

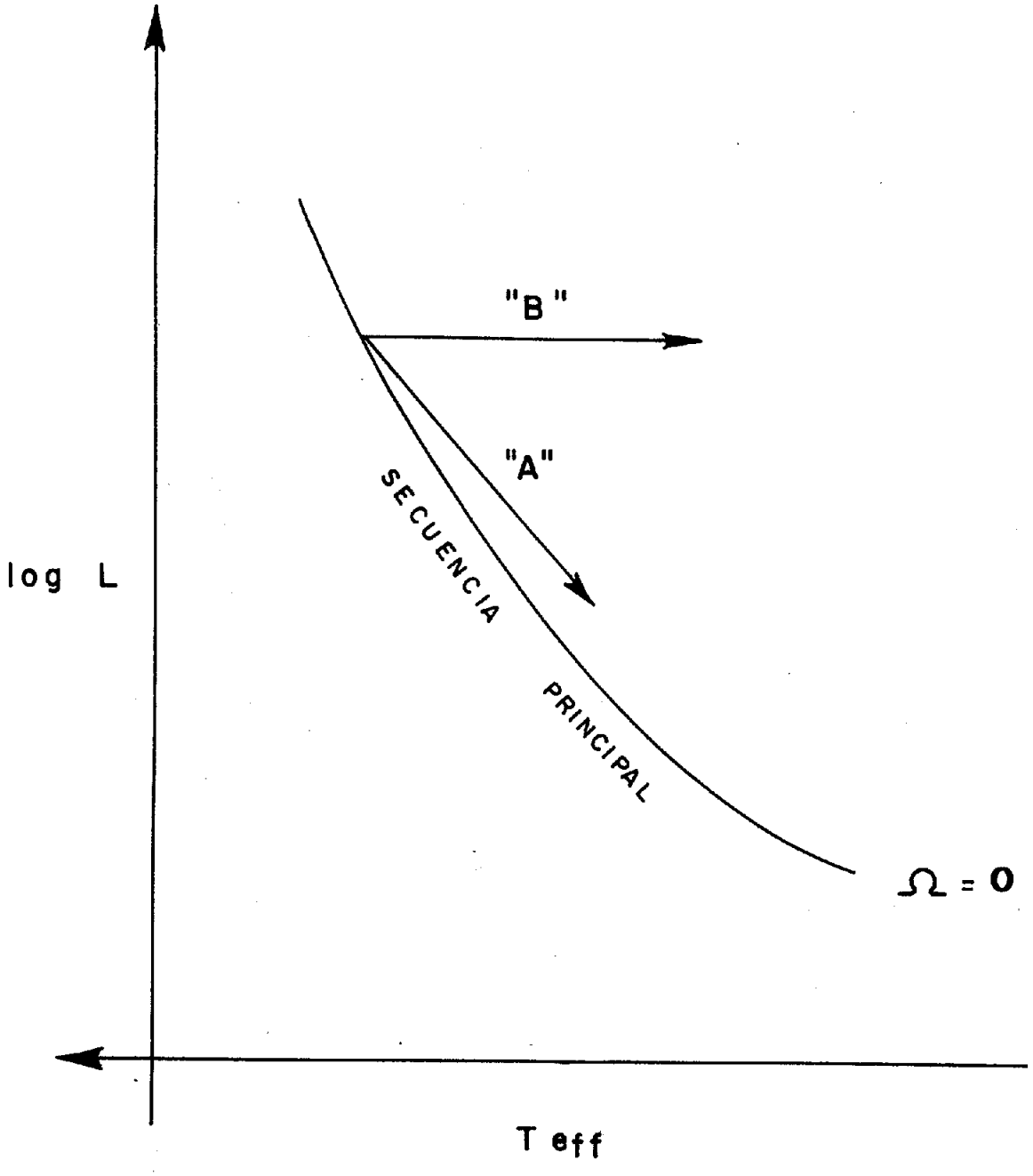


Fig. Nº 7.3: Diagrama HR para Estrellas en Rotación.

8.0 CALCULO DE LA DISCONTINUIDAD DE BALMER DE UNA ESTRELLA DEFORMADA POR LA ROTACION DIFERENCIAL

8.1 INTRODUCCION

Sabiendo que las estrellas supergigantes tienen en promedio parámetros de rotación VeSen i, donde Ve es una velocidad lineal promedio sobre el hemisferio observado é i es el ángulo de inclinación del eje de rotación con respecto a la línea de la visual del observador, vamos a suponer que las estrellas están vistas por su hemisferio polar. En efecto, el promedio de los parámetros VeSen i de las estrellas del programa es $\overline{\text{VeSen i}} \approx 60$ Km/seg, mientras que un orden de magnitud superior para Ve está dado por la velocidad de rotación crítica (rotación de cuerpo rígido) cuyo valor medio para éstas estrellas es Vcrit. $\simeq$ 250 Km/seg. De ésto se deduce que i $\cong 14^{o}$. En vista de que el ángulo i tiene

probablemente valores pequeños vamos a estimar los efectos de la rotación diferencial sobre la discontinuidad de Balmer para el caso límite donde i = 0 .

8.2 CALCULO DE LA GRAVEDAD EFECTIVA SUPERFICIAL DE UNA ESTRELLA DEFORMADA POR LA ROTACION DIFERENCIAL

Por el teorema de Von Zeipel, sabemos que el flujo radiativo en un punto dado de la superficie, de las estrellas calientes que tienen envolturas en equilibrio radiativo, es proporcional a la gravedad efectiva local. Debemos entonces proceder primeramente a la obtención de la expresión de la gravedad para tener en cuenta su variación en función de la latitud sobre el hemisferio proyectado en la dirección de observación polar.

En una estrella en rotación diferencial con una velocidad angular, que por los criterios de estabilidad mencionados en el capítulo precedente, debe ser función sólo de la coordenada ϖ = R Sen θ, donde R es el radio vector y θ es el ángulo azimutal tal como indica la figura 8.1.

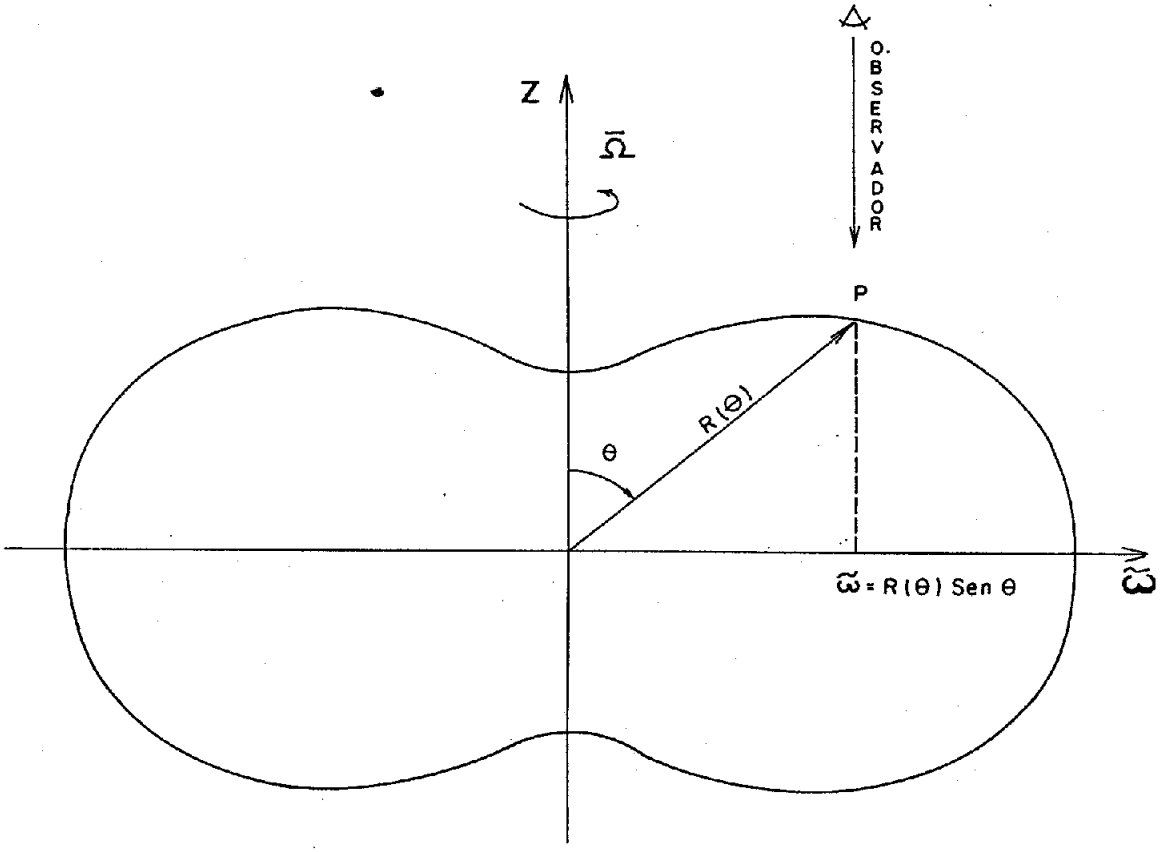


Fig. Nº 8.1: Elementos geométricos de una estrella en rotación diferencial cilíndrica.

La gravedad efectiva superficial puede calcularse a partir de una función de potencial de la siguiente manera:

$$\bar{g}\ (\bar{p}) \ = -\text{grad}\ \phi\ (\bar{p}) \qquad (8\text{-}1)$$

donde ϕ es el potencial en un punto $\bar{P}$ de la superficie estelar que viene dada por la expresión:

$$\phi\ (\bar{P}) = V\ (\bar{P}) + \int_0^{\tilde{\omega}} \Omega^2\ [\tilde{\omega}'] \cdot \tilde{\omega}' \cdot d\,\tilde{\omega}' \qquad (8\text{-}2)$$

En esta expresión tenemos $V\ (\bar{P})$ que es el pontencial gravitacional y la integral tiene en cuenta el efecto de la rotación diferencial según la ley de rotación angular:

$$\Omega = \Omega\ (\tilde{\omega}) \qquad (8\text{-}3)$$

Utilizando las coordenadas polares $R(\theta)$ y θ del punto $\bar{P}$, las componentes de $\bar{g}\ (\bar{P})$ pueden escribirse de la siguiente manera:

$$g_R = -\ \partial\, \Phi \,/\, \partial\, R \qquad (8\text{-}4)$$

$$g_\theta = -\ (1/R)\ \partial\, \Phi \,/\, \partial\, \theta \qquad (8\text{-}5)$$

El valor absoluto o módulo de la gravedad efectiva en el punto $\bar{P}$ será entonces:

$$\left\| \bar{g}\ (\bar{P}) \right\| = \left[g_R^2\ (\bar{P}) + g_\theta^2\ (\bar{P}) \right]^{1/2} \qquad (8\text{-}6)$$

Para el cálculo de la expresión (6) usaremos la aproximación llamada "aproximación de Roche" que consiste en suponer que el potencial gravitacional V $(\bar{P})$ está dado unicamente por el campo central, es decir despreciamos las contribuciones debidas a la deformación geométrica de la estrella. Así tendremos:

$$V\ (\bar{P}) = G\ \frac{M}{R(\bar{P})} \qquad (8\text{-}7)$$

donde G es la constante de la gravitación, M la masa de la estrella y R es el radiovector del punto $\bar{P}$. Los términos que se desprecian en (7) son del orden de 0 (R^{-2}) y que acarrean una subestimación de la gravedad cuyo valor depende del ángulo θ, pero que en promedio es del orden de alrededor del 10%.

De la expresión (2), aplicando (4) y (5) y teniendo en cuenta (7), obtenemos:

$$g_R = G\ \frac{M}{R^2} - R.\Omega^2.(\tilde{\omega})\ \mathrm{Sen}^2\ \theta \qquad (8\text{-}8)$$

$$g_\theta = -R.\Omega^2\ (\tilde{\omega}).\ \mathrm{Sen}\ \theta\ .\ \mathrm{Cos}\ \theta \qquad (8\text{-}9)$$

donde $R = R\ (\theta)$ y $\tilde{\omega} = R\ (\theta).\ \mathrm{Sen}\ \theta$. Introduciendo (8) y (9) en (6) y operando obtenemos:

$$g = \|\bar{g}\,(\bar{P})\| = g_o \cdot \left(\frac{Ro}{Re}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left[1 - 2\, r^3\, n\, \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2 \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\Omega_c}{\Omega_e}\right)^2 \cdot \mathrm{Sen}^2\,\theta \cdot \left(1 - \frac{r^3}{2} \cdot n \cdot \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^2 \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(\frac{\Omega_c}{\Omega_e}\right)^2 \right) \right]^{1/2} \qquad (8\text{-}10)$$

donde g_o es la gravedad superficial de una estrella de igual masa, pero sin rotación.

$$g_o = G\,\frac{M}{R_o^2} \qquad (8\text{-}11)$$

R_e es el radio ecuatorial de la estrella con rotación, R_o el radio de la estrella sin rotación y r es el radio-vector sin dimensiones dado por:

$$r = \frac{R\,(\theta)}{Re} \qquad (8\text{-}12)$$

El factor n es una cantidad sin dimensión definida, como sigue:

$$n = \frac{\Omega_e^2\, R_e^3}{G\,M} = \left(\frac{Ve}{V_{ec}}\right)^2 \qquad (8\text{-}13)$$

donde Ω_e es la velocidad angular ecuatorial (Ω_c es la velocidad angular central), V_{ec} es la velocidad lineal ecuatorial crítica, es decir, igual a la velocidad de

escape a la atracción gravitacional ecuatorial y Ve es la velocidad lineal ecuatorial.

Para la ley de rotación (7) del capítulo anterior y el valor (10) de la constante b dada en ese capítulo; la relación Ω_c/Ω_e es practicamente insensible a la variación del parámetro de deformación t y su valor promedio es:

$$\Omega_c / \Omega_e = 9.434 \qquad (8\text{-}14)$$

$$\text{ó} \quad \Omega_e / \Omega_c = 0.106 \simeq 0.11 \qquad (8\text{-}14)'$$

Por otro lado, la función $\Omega(\tilde{\omega})$ que ajusta la velocidad angular en función de para la distribución del momento angular especifico mencionado (adoptado en éste trabajo) es:

$$\frac{\Omega(\omega)}{\Omega_c} = \left[1 + A(\tilde{\omega}) / R_e)^B\right]^C \qquad (8\text{-}15)$$

donde:

$$A = 19.0713$$
$$B = 2.8583 \qquad (8\text{-}16)$$
$$C = -0.7483$$

La función (15) con las constantes (16) está representada en la figura 8.2.

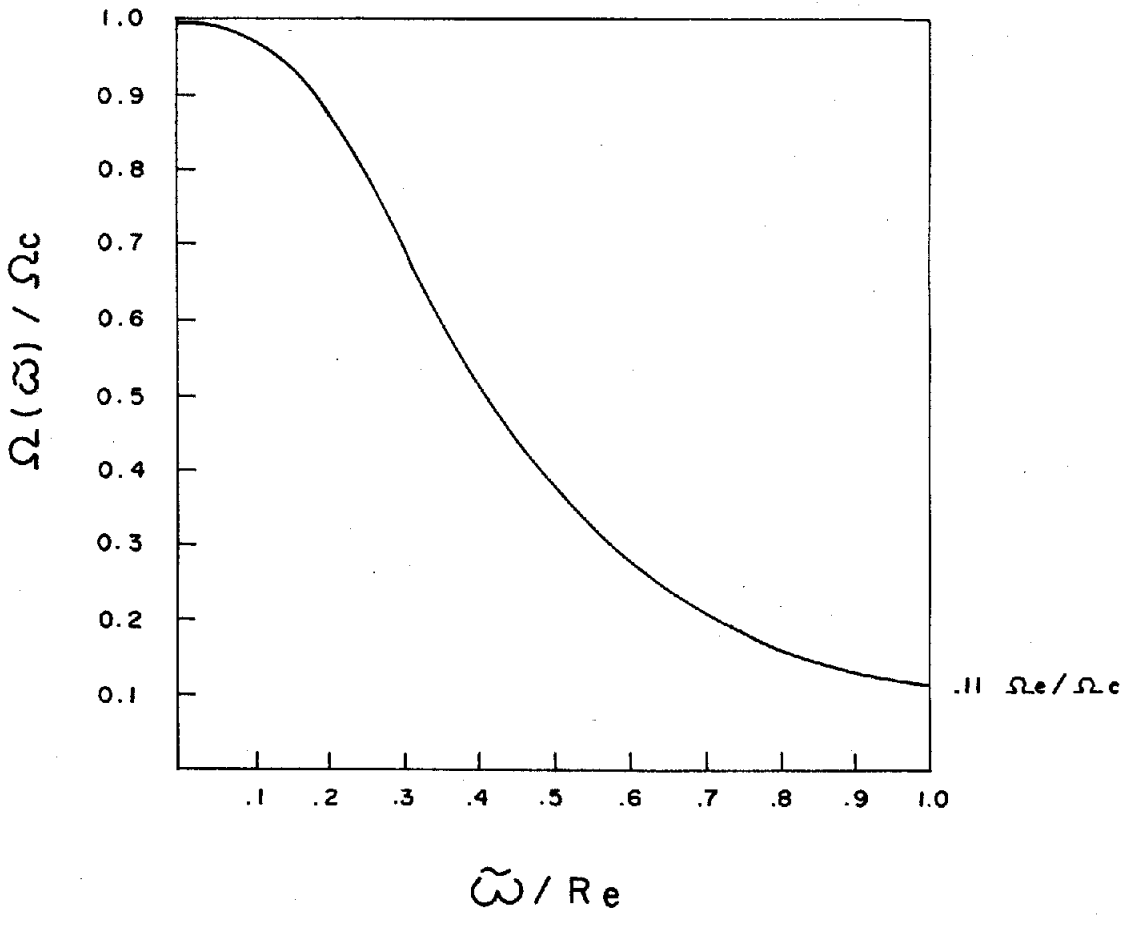


Fig. Nº 8.2: Ley de rotación $\Omega(\tilde{\omega}) / \Omega$

Para calcular el valor de g en (10) para cada punto de la superficie estelar en función de θ y para la equipotencial que contiene los puntos

$$R_p = R\ (\ \theta = 0\ ) \qquad (8\text{-}17)$$

$$R_e = R\ (\ \theta = \pi/2) \qquad (8\text{-}18)$$

es decir:

$$\Phi\ (R,\ \theta) = \Phi_o\ (R_e,\ R_p) = \text{cte} \qquad (8\text{-}19)$$

necesitamos conocer aún la solución

$$R = R\ (\ \theta\ ) \qquad (8\text{-}20)$$

que satisface (19) para todo valor de θ.

Para obtener la expresión de (20) escribimos:

$$R\ (\ \theta\ ) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_{2n}\ (\theta) \qquad (8\text{-}21)$$

donde los C_n son constantes a ajustar y P_{2n} son los polinomios pares de grado 2n de Legendre. Una excelente aproximación de primer orden de (21) está dado por:

$$R\ (\ \theta\ ) \simeq C_o + C_2 \cdot P_{2n}\ (\ \theta\ ) \qquad (8\text{-}22)$$

donde:

$$C_o = 1 - C_2 \qquad (8\text{-}23)$$

$$C_2 = 2/3 \left(1 - R_e / R_p \right) \qquad (8\text{-}24)$$

Asi obtenemos:

$$R(\theta) \simeq 1 - \left[1 - (R_e / R_p) \right] \mathrm{Sen}^2 \theta \qquad (8\text{-}25)$$

Dada la forma simple de $R(\theta)$ en (25) y sabiendo que ella no produce errores graves en la estimación de g por (10), la adoptamos para los cálculos que se realizarán en este trabajo.

La figura 7.1 del capítulo precedente reproduce cortes en el plano (z, $\tilde{\omega}$) de superficies equipotenciales dados por (25).

Estas curvas han sido obtenidas utilizando las relaciones R_e / R_p que salen de la tabla 8.1 de éste capítulo. En ésta tabla damos valores extraídos de Zorec (1986a). Estos valores son los siguientes: t parámetro de deformación definido en (11) del capítulo precedente, R_e/R_o relación del radio ecuatorial modificado al radio sin deformar, R_p/R_o relación del radio polar al radio sin deformar, g_p/g_e relación de la gravedad polar a la ecuatorial obtenidas por (10) y parámetro definido en (13). Estos valores están graficados en la figura 8.3

TABLA Nº 8.1

Parámetros de una estrella deformada por la rotación diferencial según la ley de distribución del momento angular especifico adoptada en éste trabajo. (Zorec).

t	R_e/R_o	R_p/R_e	g_p/g_e	n
0.02	1.007	0.860	1.302	0.023
0.04	1.013	0.747	1.655	0.047
0.06	1.018	0.655	2.081	0.072
0.08	1.023	0.578	2.590	0.099
0.10	1.028	0.511	3.203	0.127
0.12	1.033	0.454	3.925	0.158
0.14	1.038	0.402	4.713	0.190
0.16	1.044	0.356	5.566	0.223

Existe una relación entre el parámetro de deformación definido en el capítulo precedente Ec (7.11) y el momento angular total J. Este relación depende muy poco de la ley particular de rotación. El valor promedio de ésta relación obtenida a partir de cálculos realizados por Bodenheimer (1971) y para diferentes valores de la masa M en masas solares está dado en la tabla 8.2 y graficado en la figura 8.4.

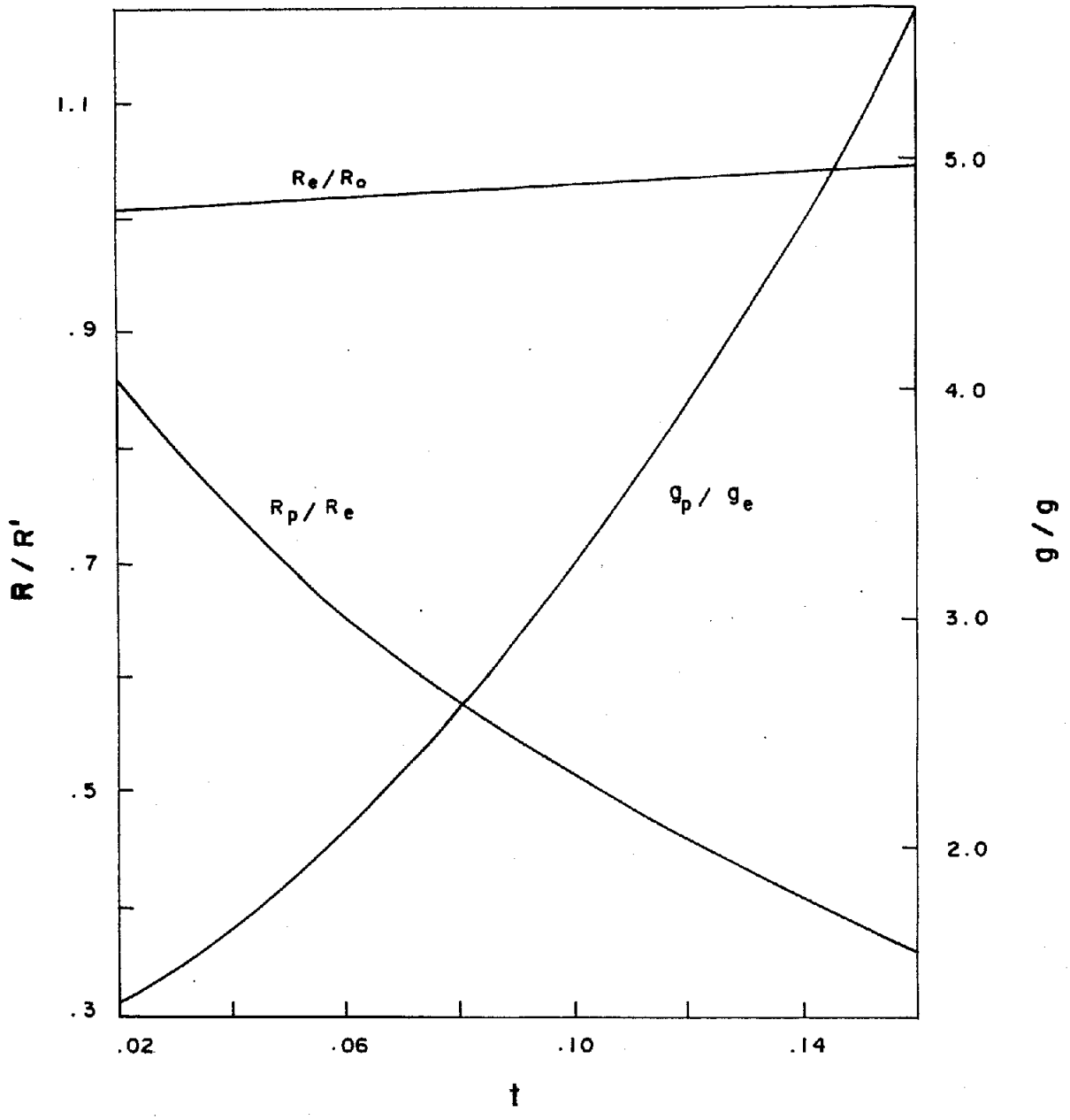


Fig. Nº 8.3: Funciones R_e/R_o, R_p/R_e y g_p/g_e

TABLA Nº 8.2

Momento angular total en función del parámetro de deformación t para diferentes masas estelares. Usamos unidades c.g.s para la relación J/M donde J: momento angular total y M: masa estelar.

t	Log (J/M) (cgs)			
	$M / M_\odot$			
	4	8	12	16
0.02	17.758	18.028	18.177	18.281
0.06	18.009	18.278	18.427	18.532
0.10	18.132	18.402	18.551	18.655
0.14	18.218	18.488	18.637	18.741

8.3 CALCULO DE LA TEMPERATURA EFECTIVA LOCAL

Como ya lo hemos mencionado antes, para calcular la discontinuidad de Balmer de una estrella deformada por la rotación diferencial, debemos conocer la distribución de la temperatura efectiva sobre la superficie de la estrella. Esta distribución puede ser calculada a partir del teorema de Von Zeipel que especifica que el flujo en un punto dado de la superficie estelar que se encuentra en equilibrio radiativo y en equilibrio hidros-

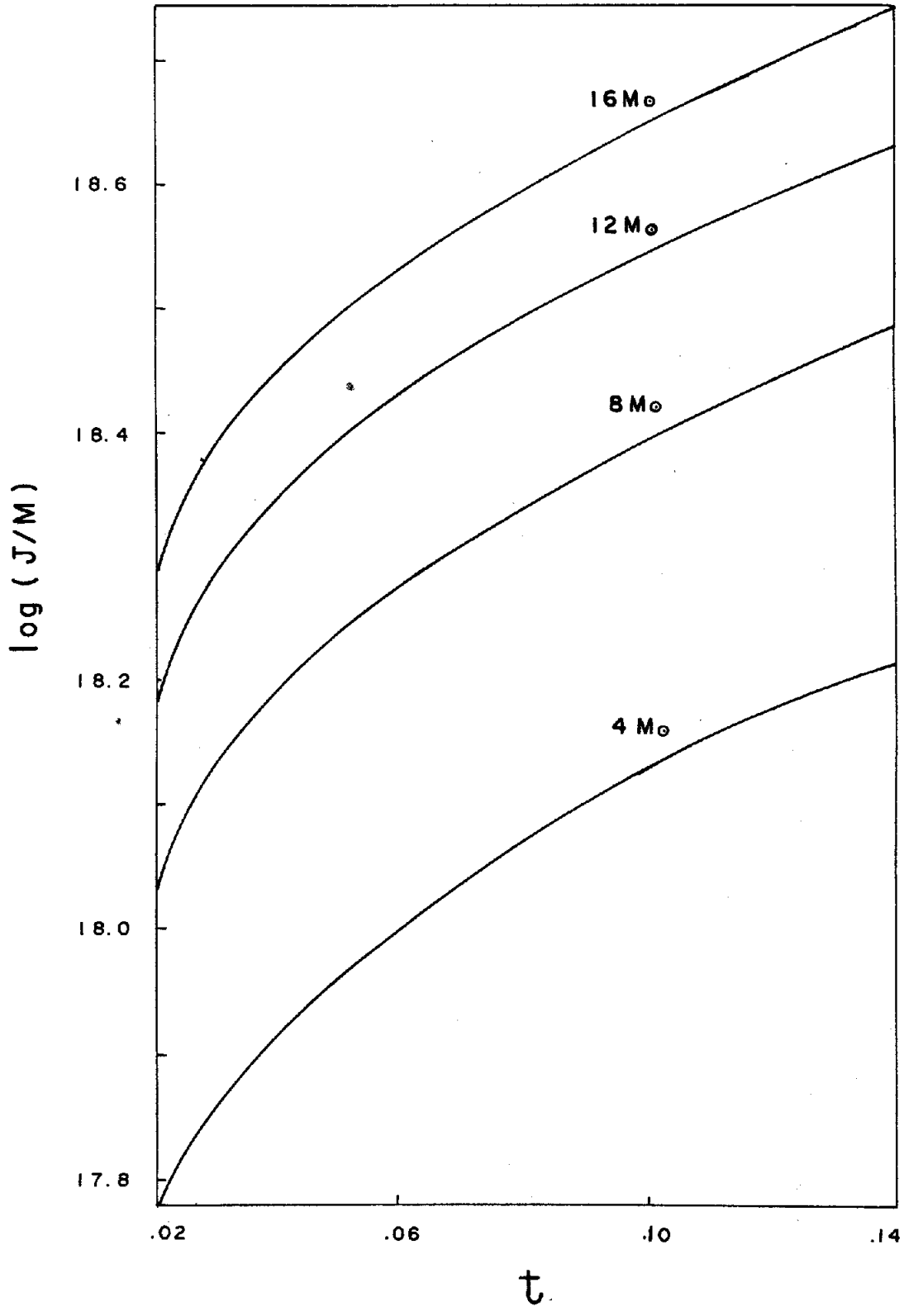


Fig. Nº 8.4: Momento angular específico en función del parámetro de deformación t.

tático , es proporcional a la gravedad efectiva en ese punto. Este resultado se escribe de la siguiente manera:

$$F(\bar{P}) = \mathfrak{C} \cdot g(\bar{P}) \qquad (8\text{-}26)$$

donde:

$$F(P) = \int_0^{\infty} F_\nu(\bar{P})\, d\nu \qquad (8\text{-}27)$$

siendo $F_\nu(\bar{P})$ el flujo radiativo emergente en el punto $\bar{P}$ y en la frecuencia ν (F_ν = erg. cm^{-2} . seg^{-1} . Hz^{-1}) $g(\bar{P})$ la gravedad efectiva en $\bar{P}$ dada por (10) y $\mathfrak{C}$ una constante que depende de la geometría de la estrella.

Como el flujo total se expresa por intermedio de la temperatura efectiva en la forma:

$$F(\bar{P}) = \sigma \cdot T_{eff}^4(\bar{P}) \qquad (8\text{-}28)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann. Por (26) y (28) vemos entonces que:

$$Teff(\bar{P}) = \left(\frac{\mathfrak{C}}{\sigma}\right)^{1/4} \cdot g^{1/4}(\bar{P}) \qquad (8\text{-}29)$$

Viendo que cada punto $\bar{P}$ estará caracterizado por los valores $g(\bar{P})$ y $Teff(\bar{P})$, a ese punto podemos asociar una discontinuidad de Balmer dada por los modelos clásicos de atmósferas plano-paralelas en equilibrio hidrostá-

tico y equilibrio radiativo. La discontinuidad observada será entonces un promedio ponderado de esas discontinuidades locales las cuales serán tratadas más adelante en este capítulo.

Promediando la temperatura efectiva dada por la relación (29) sobre toda la superficie de la estrella, se tiene:

$$\langle Teff \rangle_S = \left(\frac{\mathfrak{C}}{\sigma} \right)^{1/4} \cdot \langle g^{1/4} \rangle_S \qquad (8\text{-}30)$$

donde en (30) S indica la superficie total de la estrella. El mismo tipo de operación puede llevarse a cabo sólo sobre el hemisferio proyectado en la dirección de la visual del observador. Así tenemos:

$$\langle Teff \rangle_{H(i)} = \left(\frac{c}{\sigma} \right)^{1/4} \cdot \langle g^{1/4} \rangle_{H(i)} \qquad (8\text{-}31)$$

dando H(i) indica el hemisferio observado que depende del ángulo i de inclinación del eje de rotación estelar con la dirección del observador.

Se ha demostrado en Zorec (1986 a) que el efecto del ángulo i en el cálculo de $\langle Teff \rangle_{H(i)}$ es bastante pequeño. El efecto es grande sólo si el parametro de deformación es importante: $t \sim 0.14$ y la variación máxima de $\langle Teff \rangle_{H(i)}$ se da para $i \rightarrow \pi/2$ que corresponde

a una disminución de $\langle Teff \rangle_{H(i)}$ del orden del 10% con respecto a la temperatura $\langle Teff \rangle_s$. Esto justifica proceder a la siguiente simplificación:

$$\langle Teff \rangle_{H(i)} \simeq \langle Teff \rangle_s \qquad (8\text{-}32)$$

De (29), (31) y (32) obtenemos entonces:

$$Teff\ (\bar{P}) = \langle Teff \rangle_s \cdot \frac{g^{1/4}\ (\bar{P})}{\langle g^{1/4} \rangle_s} \qquad (8\text{-}33)$$

por las mismas razones que también hicimos $\langle g^{1/4} \rangle_s \simeq \langle g^{1/4} \rangle_{H(i=o)}$.

Las cantidades $\langle Teff \rangle_s$ y $\langle g^{1/4} \rangle_s$ en (33) pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\langle Teff \rangle_s = T_o \cdot f_T\ (M, \beta, t) \qquad (8\text{-}34)$$

$$\langle g^{1/4} \rangle_s = g_o^{1/4} \cdot f_G\ (\beta, t) \qquad (8\text{-}35)$$

donde T_o y g_o son respectivamente la temperatura efectiva y la gravedad superficial de una estrella sin deformar, pero de igual masa. En las funciones f_T y f_G, M es la masa de la estrella, β simboliza una ley particular de rotación $\Omega\ (\tilde{\omega})$ y t es el parámetro de deformación. Para la ley de rotación adoptada en éste trabajo (expresión (15) y constantes (16) de este capítulo) la tabla

8.3 reproduce los valores de f_T en función de M y de t. Esos valores así como los valores de f_G que no dependen de M y que presentamos en la tabla 8.4, han sido adoptados de Zorec (1986a).

TABLA Nº 8.3

Variación de la temperatura efectiva promediada sobre toda la superficie de la estrella $\langle Teff \rangle_s / T_o$ en función del parámetro de deformación t y de la masa M. (Zorec, 1986 a).

	f_T			
	M / $M_\odot$			
t	15	10	3	$\langle M \rangle \pm$ M
0.02	0.973	0.968	0.957	0.966 ± 0.008
0.04	0.934	0.925	0.902	0.920 ± 0.017
0.06	0.896	0.879	0.848	0.874 ± 0.024
0.08	0.854	0.832	0.793	0.826 ± 0.031
0.10	0.809	0.783	0.738	0.777 ± 0.036
0.12	0.768	0.741	0.693	0.734 ± 0.038
0.14	0.731	0.704	0.658	0.698 ± 0.037
0.16	0.695	0.669	0.623	0.662 ± 0.036

En la tabla 8.3 se da también el promedio de $\langle Teff_s \rangle$

$/T_o$ según las masas. Vemos que la dispersión de valores es bastante pequeña. Como nuestro propósito es unicamente de estimar algunos efectos globales, adoptaremos esos valores promediados sin hacer ninguna distinción dependiente de la masa.

TABLA Nº 8.4

Variación de la gravedad efectiva promediada sobre toda la superficie de la estrella en función del parámetro t. (Zorec, 1986 a).

t	$f_G(t)$
0.02	1.012
0.04	1.014
0.06	1.027
0.08	1.064
0.10	1.133
0.12	1.232
0.14	1.354
0.16	1.510

La figura 8.5 reproduce las funciones f_T y f_G.

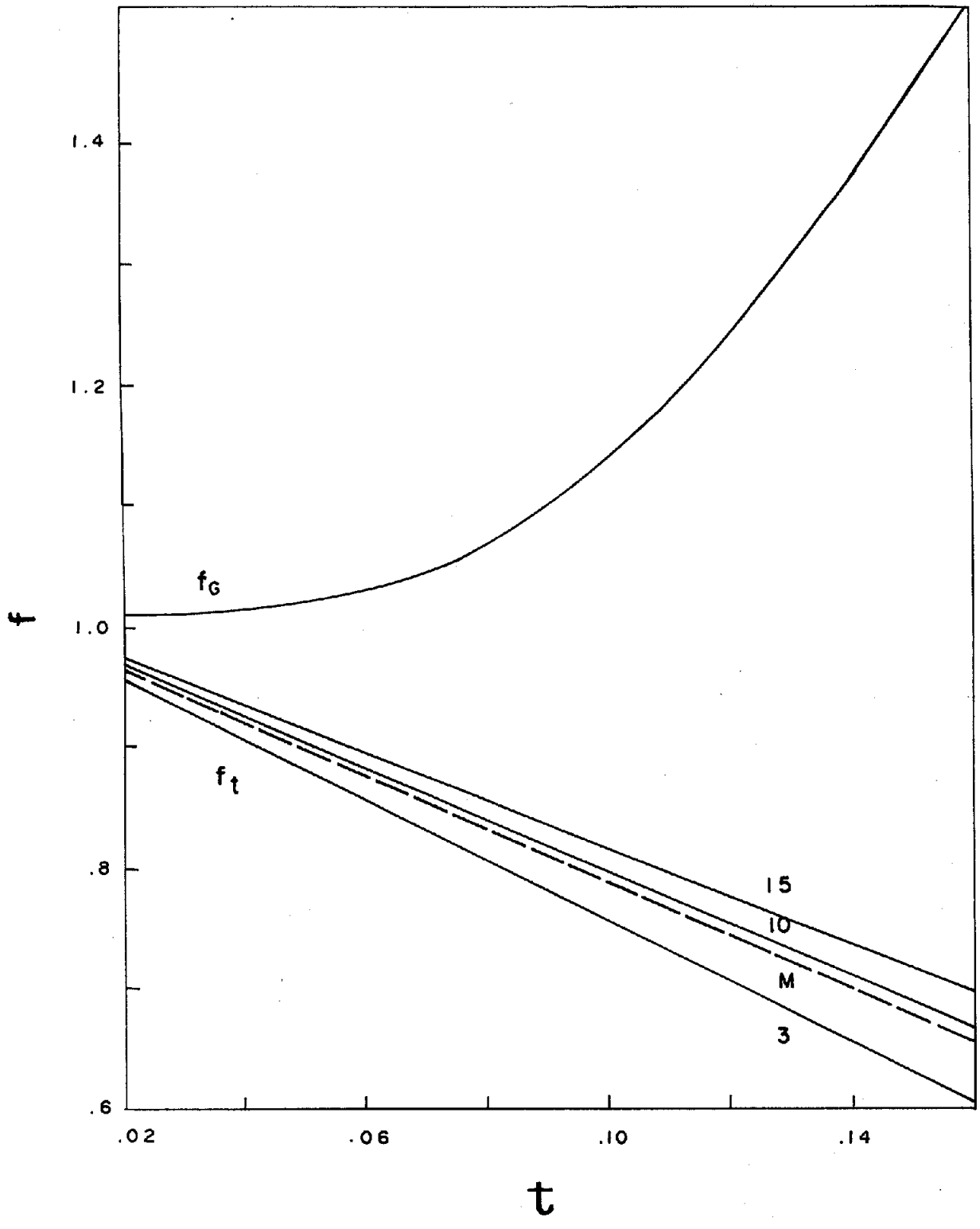


Fig. Nº 8.5: Parámetro de Deformación t

Funciones: $f_T = \frac{(Teff)_s}{T_o}$; $f_G = \frac{(g^{1/4})_s}{g_o^{1/4}}$

El hemisferio proyectado en la dirección del observador contribuye con una luminosidad bolométrica que también depende del ángulo i:

$$L_{H(i)} = L\ (i) \qquad (8\text{-}36)$$

Esta cantidad es utilizada, sin embargo, para el cálculo de la temperatura efectiva, suponiendo para ello que la estrella no rota. La temperatura efectiva que se obtiene debe asociarse entonces a la temperatura $\langle Teff \rangle_{H(i)}$ que aquí la hemos supuesto igual a $\langle Teff \rangle_s$. Esto implica que la temperatura efectiva obtenida a partir de los datos observacionales debe asociarse a $\langle Teff \rangle_{H(i)}$.

8.4 CALCULO DE LA DISCONTINUIDAD DE BALMER INTEGRADA

8.4.1 Planteo del Problema

Tal como lo hemos mencionado en la introducción de este capítulo, plantearemos sólo el caso de observación donde $i = 0$.

Sabiendo que la luminosidad bolométrica captada por el observador y emitida por la estrella en la dirección del observador está definida por:

$$f_{H(i)} = \frac{1}{d^2} \oint_{H(i)} I\ (\bar{P}, \mu) \cdot \mu\, ds \qquad (8\text{-}37)$$

donde d es la distancia a la estrella, I es la intensidad específica de la radiación en el punto $\bar{P}$ y en la dirección α = arc cos μ con respecto al observador y dS un elemento de área de la estrella.

De (37) vemos que d donde:

$$d\mathfrak{F} = \mu \cdot dS \qquad (8\text{-}38)$$

es el elemento de área proyectado sobre el fondo del cielo. La cantidad (38) se puede también escribir para el caso de i = 0 en la forma

$$d\mathfrak{S} = 2\pi \cdot \tilde{\omega}^2 \cdot d\ell \qquad (8\text{-}39)$$

donde $d\ell$ es un elemento de arco sobre la superficie estelar y medido sobre un corte máximo. La figura 8.6 reproduce los elementos geométricos necesarios para el cálculo de (37).

Por otro lado, adoptando la aproximación de difusión para I ($\bar{P}$, μ) que es además la aproximación que se utiliza para el flujo en la demostración del teorema de Von Zeipel,

$$I(\bar{P}, \mu) = I(\bar{P}, 1) \cdot (1 - u + u \cdot \mu) \qquad (8\text{-}40)$$

donde u $\cong$ 0.53 é I tanto en (40) como en (37) está inte-

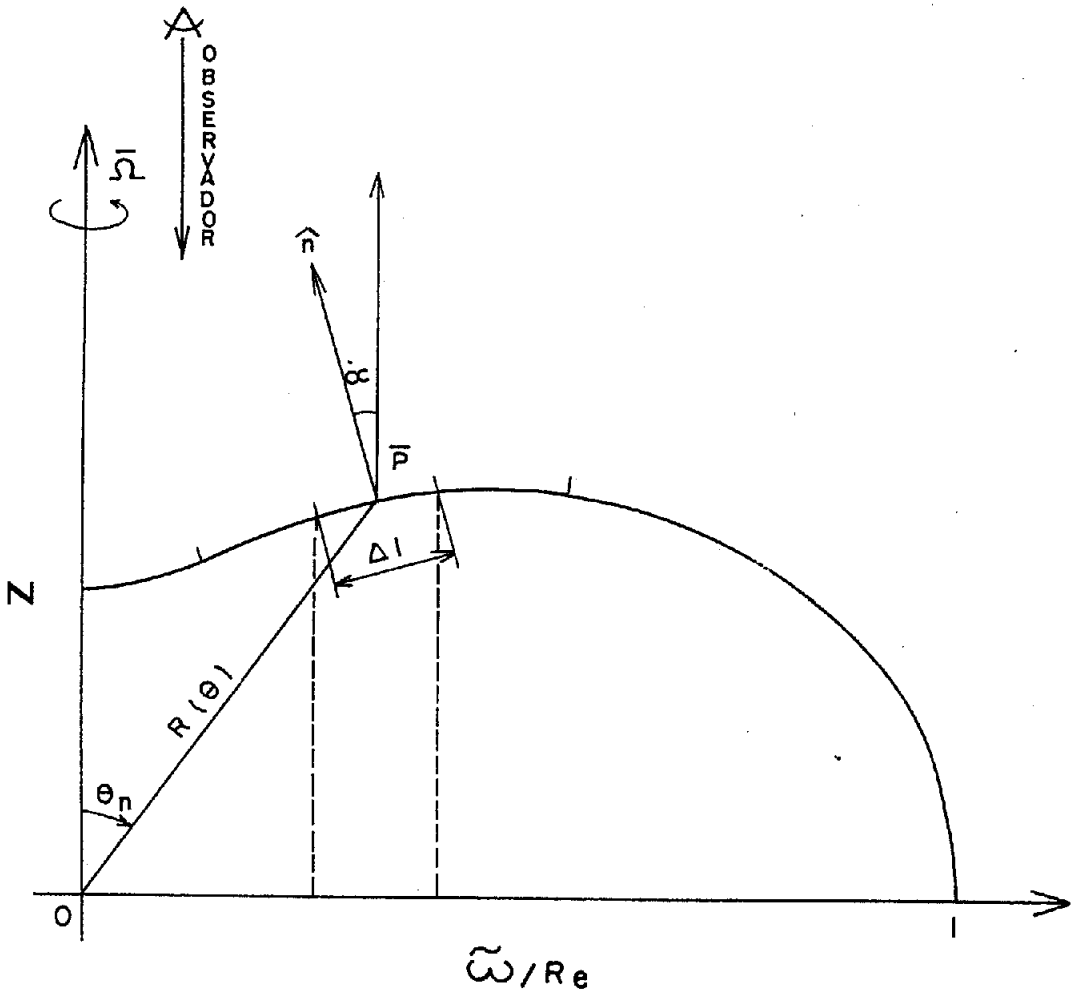


Fig. Nº 8.6: Elementos geométricos necesarios para el cálculo de la discontinuidad de Balmer en la dirección i = 0º.

grada sobre todas las frecuencias.

$$I(\vec{P}, \mu) = \int_0^{\infty} I_\nu(\vec{P}, \mu) \cdot d\nu \qquad (8\text{-}41)$$

obtenemos que el flujo astrofísico está dado por:

$$F(\vec{P}) = 2\pi \cdot \int_0^{1} I(\vec{P}, \mu) \cdot \mu \cdot d\mu \qquad (8\text{-}42)$$

De (42), (40) y (26) obtenemos entonces que:

$$I(\vec{P}, \mu = 1) = \text{cte.}\ g(\vec{P}) \qquad (8\text{-}43)$$

Si consideramos ahora a la estrella dividida en franjas de espesor Δl que por (39) deben ser Δl = cte donde suponemos g y Teff constantes, la discontinuidad resultante del hemisferio H(i=0) puede estimarse teniendo en cuenta (37), (40) y (43) con:

$$D(H(i=o)) = \frac{\sum D_n \cdot g_n \cdot (1-u+u \cdot \mu_n) \cdot S_n}{\sum g_N \cdot (1-u+u \cdot \mu_n) \cdot S_n} \qquad (8\text{-}44)$$

donde D_n es la discontinuidad característica de la franja n donde se tiene una gravedad efectiva g_n, una temperatura efectiva $(Teff)_n$ y cuya superficie proyectada según μ_n (orientación promedio) sobre el fondo del cielo es S_n.

8.4.2 Cálculo de μ_n, g_n, y S_n

El ángulo μ_n está definido por:

$$\mu_n = \cos \alpha_n \qquad (8\text{-}45)$$

donde α es el ángulo ente la normal $\hat{n}$ en el punto $\bar{P}$ y la dirección al observador que la simbolizamos con $\hat{i}$. Así tendremos:

$$\mu = \cos \alpha = | \hat{n} \cdot \hat{i} | \qquad (8\text{-}46)$$

Los valores de μ (es decir de los μ_n) se calculan para el punto medio de cada franja $\Delta \ell$. Ese punto medio corresponde al ángulo asimutal θ_n. Las franjas $\Delta \ell$ están definidas de manera tal que el arco de corte máximo de la superficie estelar entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$ sea igual a un número entero de elementos de arco $\Delta \ell$.

De la figura Nº 8.6 se vé que el ángulo α puede calcularse a partir de la relación:

$$\operatorname{tg} \alpha = d\eta / d\xi \qquad (8\text{-}47)$$

donde:

$$\eta(\gamma) = R(\gamma) \cdot \gamma \qquad (8\text{-}48)$$

$$\xi(\gamma) = R(\gamma) \cdot (1 - \gamma^2)^{1/2} \qquad (8\text{-}49)$$

$$\gamma = \operatorname{Cos} \theta \qquad (8\text{-}50)$$

Viendo que (47) puede reescribirse de la siguiente manera:

$$tg\ \alpha = \left(d\eta / d\gamma\right) / \left(d\xi / d\gamma\right) \qquad (8\text{-}51)$$

teniendo en cuenta (50) y (25) obtenemos por (51)

$$tg\,\alpha = \frac{(1-\gamma^2)^{1/2}}{\gamma^2}\left[\frac{Re/Rp + 3\gamma^2 \cdot (1-Re/Rp)}{-1 + 3(1-\gamma^2)(1-Re/Rp)}\right] \qquad (8\text{-}52)$$

De (52) tendremos la expresión que nos interesa:

$$\mu = (1 + tg^2\,\alpha)^{-1/2} \qquad (8\text{-}53)$$

La longitud del arco de superficie ℓ entre $\theta = o$ y $\theta = \pi/2$ ha sido obtenido utilizando (25) y la integral:

$$\ell = \int_o^{\pi/2} \left[(d\eta/d\theta)^2 + (d\xi/d\theta)^2\right]^{1/2} d\theta \qquad (8\text{-}54)$$

y los valores obtenidos en unidades de $R_e(t)$ donde R_e es el rado ecuatorial y t el parámetro de deformación, están dados en la tabla Nº 8.5.

TABLA Nº 8.5

Longitudes de arco ℓ (t).

t	ℓ (t)
0.02	1.469
0.07	1.339
0.14	1.286

Utilizando el teorema del coseno, hemos determinado el ancho angular $\Delta\theta$ de cada franja $\Delta\ell$. Suponiendo entonces:

$$\Delta \ell^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2\, R_1\, R_2 \cos \Delta\theta \qquad (8\text{-}55)$$

donde: $R_1 = R(\theta)$ (8-56)

$R_2 = R(\theta + \Delta\theta)$ (8-57)

y empleando (25) para R_1 y R_2, hemos iterado el valor de $\Delta\theta$ para cada valor de θ dado. De la misma manera se han obtenido los ángulos θ_n correspondientes a los puntos medios, es decir a $\Delta\ell/2$.

Los valores de los ángulos de los extremos para cada $\Delta\ell$, θ_n y los ángulos de los puntos medios de cada

Δl, $\theta_n^{(1/2)}$ están dados en la tabla Nº 8.6 y en la figura Nº 8.7 se ha esquematizado el significado de los θ_n y los $\theta_n^{(1/2)}$.

TABLA Nº 8.6

Angulos θ_n y $\theta_n^{(1/2)}$ para los parámetros de deformación t = 0.02, 0.07, 0.14. Los ángulos están en radianes.

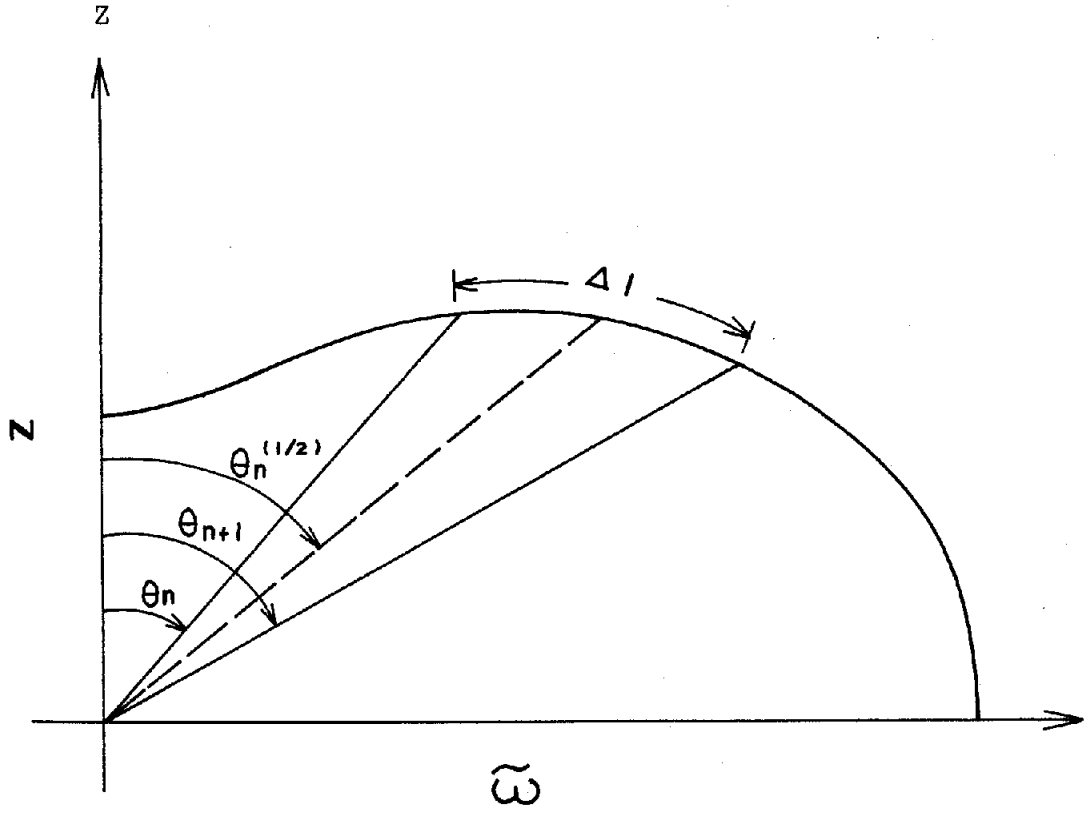
n	t					
	0.02		0.07		0.14	
	θ_n	$\theta^{(1/2)}$	θ_n	$\theta_n^{(1/2)}$	θ_n	$\theta_n^{(1/2)}$
0	0.0		0.0		0.0	
		0.0854		0.1080		0.1537
1	0.1706		0.2128		0.2832	
		0.2552		0.3125		0.3907
2	0.3392		0.4068		0.4846	
		0.4222		0.4958		0.5694
3	0.5044		0.5803		0.6480	
		0.5855		0.6611		0.7221
4	0.6656		0.7388		0.7932	
		0.7447		0.8140		0.8617
5	0.8230		0.8873		0.9287	
		0.9003		0.9589		0.9943

...///

6	0.9769		1.0294		1.0594	
		1.0527		1.0987		1.1237
7	1.1281		1.1675		1.1880	
		1.2028		1.2356		1.2520
8	1.2773		1.3035		1.3162	
		1.3512		1.3708		1.3803
9	1.4251		1.4383		1.4448	
		1.4987		1.5053		1.5092
10	1.5708		1.5708		1.5708	

Figura Nº 8.7

Angulos θ_n y $\theta_n^{(1/2)}$



Los valores de μ_n se han calculado para los ángulos $\theta_n^{(1/2)}$. Esos valores están reproducidos en la tabla Nº 8.7

TABLA Nº 8.7

Valores de μ_n para valores del parámetro de deformación t.

n	t		
	0.02	0.07	0.14
1	0.9983	0.9997	0.9673
2	0.9844	0.9998	0.9491
3	0.9541	0.9977	0.9826
4	0.9032	0.9786	1.0000
5	0.8282	0.9296	0.9816
6	0.7268	0.8431	0.9180
7	0.5990	0.7153	0.8019
8	0.4470	0.5468	0.6291
9	0.2758	0.3431	0.4022
10	0.0922	0.1153	0.1348

Por otro lado, los valores de g/g_o, también se han calculado en $\theta_n^{(1/2)}$. Esas cantidades están tabuladas

en la tabla Nº 8.8. Para g/g_o se ha utilizado la expresión (10).

TABLA Nº 8.8

Valores de g_{eff}/g_o para los $\theta_n^{(1/2)}$ y para t = 0.02, 0.07, 0.14.

n	t		
	0.02	0.07	0.14
1	1.3257	2.4791	5.3023
2	1.2639	2.1840	3.6968
3	1.1830	1.7055	2.4728
4	1.1353	1.3677	1.5849
5	1.0976	1.1947	1.1571
6	1.0596	1.0837	0.9776
7	1.0243	1.0006	0.8804
8	0.9953	0.9394	0.8160
9	0.9751	0.8991	0.7746
10	0.9647	0.8792	0.7542

Finalmente, el valor de cada elemento de área S_n de la superficie estelar proyectada sobre el fondo del cielo, ha sido obtenido de la siguiente manera:

$$S_n = \pi \left[R^2 (\theta_{n+1}) \cdot \text{Sen}^2 (\theta_{n+1}) - R^2 (\theta_n) \cdot \text{Sen}^2 \theta_n \right] \quad (8\text{-}58)$$

donde los θ_n son los de la tabla Nº 8.6 y los $R(\theta)$ están calculados con (25). De (58) se ve que:

$$\sum_{n=1}^{10} S_n = \pi \quad (8\text{-}59)$$

Los valores de S_n obtenidos por (58) están tabulados en la tabla Nº 8.9.

TABLA Nº 8.9

Valores de los elementos de superficie S_n para t = 0.02, 0.07 y 0.14.

n	t		
	0.02	0.07	0.14
1	0.0676	0.0563	0.0494
2	0.1990	0.1690	0.1434
3	0.3182	0.2809	0.2471
4	0.4149	0.3844	0.3544
5	0.4776	0.4651	0.4490
6	0.4956	0.5059	0.5104
7	0.4622	0.4919	0.5173
8	0.3766	0.4147	0.4524
9	0.2458	0.2773	0.3105
10	0.0843	0.0960	0.1076

De la relación (44) vemos que cada D_n (discontinuidad de Balmer correspondiente al elemento "n" de superficie de la estrella) contribuye con un peso definido por:

$$P_n \equiv \frac{g_n.(1 - u + u \,.\, \mu_n).\, S_n}{\sum g_n \,.\, (1 - u + u \,.\, \mu_n).S_n} \qquad (8\text{-}60)$$

Los valores de los pesos p_n obtenidos por (60) están dados en la tabla Nº 8.10.

TABLA Nº 8.10

Pesos p_n para t = 0.02, 0.07 y 0.14.

n	t		
	0.02	0.07	0.14
1	0.0308	0.0403	0.0670
2	0.0858	0.1065	0.1342
3	0.1264	0.1381	0.1575
4	0.1538	0.1500	0.1461
5	0.1639	0.1543	0.1338
6	0.1545	0.1450	0.1242
7	0.1283	0.1206	0.1060
8	0.0912	0.0854	0.0771
9	0.0508	0.0469	0.0427
10	0.0145	0.0129	0.0114

8.4.3 Cálculo de la Discontinuidad de Balmer

Para deducir las discontinuidades de Balmer resultantes de los hemisferios H(i=0) para diferentes valores de t (parámetro de deformación) debemos calcular aún las discontinuidades D_n con los cuales contribuye

cada elemento "n" de la superficie estelar. Para ello supondremos que cada elemento de superficie "n" está caracterizado por una temperatura efectiva $Teff^{(n)}$ y una gravedad efectiva log $g_{(n)}$ dados por:

$$Teff^{(n)} = \langle Teff \rangle_s \times F_T\ (t, \theta) \qquad (8\text{-}61)$$

$$\log g_{(n)} = \langle \log g \rangle_s + F_G\ (t, \theta) \qquad (8\text{-}62)$$

donde $\langle Teff \rangle_s$ y $\langle \log g \rangle_s$ son la temperatura efectiva y gravedad superficial de una estrella, obtenidos a partir de observaciones interpretadas con modelos de atmósferas donde la rotación no se ha tenido en cuenta. Es decir, son cantidades promedio de una estrella donde se ignoran los efectos de deformación producidos por la rotación diferencial. El valor de $F_T\ (t, \theta)$ está dado por (33):

$$F_T\ (t, \theta) = g(\bar{P})^{1/4} \Big/ \langle g^{1/4} \rangle_s \qquad (8\text{-}63)$$

y el valor de $F_G(t, \theta)$ ha sido estimado con:

$$F_G\ (t, \theta) = (g_n / g_o) \Big/ \sum a_n \times (g_n / g_o) \qquad (8\text{-}64)$$

donde:

$$a_n = S_n \Big/ \sum S_n \qquad (8\text{-}65)$$

Los valores de g_n/g_o salen de la tabla Nº 8.8 y los de S_n de la tabla Nº 8.9.

Las cantidades F_T y F_G para diferentes valores de t y para los θ_n están dados en la tabla Nº 8.11.

TABLA Nº 8.11

Valores de las funciones $F_T(t, \theta)$ y $F_G(t, \theta)$ para diferentes valores del parámetro t.

n	t					
	0.02		0.07		0.14	
	F_T	F_G	F_T	F_G	F_T	F_G
1	1.052	0.09	1.195	0.31	1.417	0.61
2	1.039	0.07	1.158	0.25	1.295	0.45
3	1.022	0.04	1.088	0.15	1.171	0.27
4	1.012	0.02	1.030	0.05	1.048	0.08
5	1.003	0.01	0.996	-0.01	0.969	-0.06
6	0.994	-0.01	0.972	-0.05	0.929	-0.13
7	0.986	-0.02	0.952	-0.08	0.905	-0.17
8	0.979	-0.04	0.938	-0.11	0.888	-0.21
9	0.974	-0.05	0.927	-0.13	0.876	-0.23
10	0.971	-0.05	0.922	-0.14	0.870	-0.24

En el presente trabajo se han aplicado éstos cálculos a tres tipos espectrales de supergigantes: B 1, B 5 y B 9. Las temperaturas efectivas $\langle \text{Teff} \rangle_s$ han

sido tomadas de las calibraciones de temperaturas efectivas según los tipos espectrales de supergigantes, dados por Barlow y Cohen (1977). Las gravedades $\langle \log g \rangle_s$ se han estimado con masas y radios de supergigantes de tipo I dados por Allen (1973).

Los valores de $\langle Teff \rangle_s$ y $\langle \log g \rangle_s$ están dados en la tabla Nº 8.12. En esta tabla también damos la discontinuidad de Balmer interpolada en la tabla Nº 5.1.

TABLA Nº 8.12

Temperaturas efectivas, gravedades superficiales y discontinuidades de Balmer de supergigantes en función de tipos espectrales.

Tipo Espectral	$\langle Teff \rangle_s$ (ºK)	$\langle \log g \rangle_s$ (cgs)	D(dex)
B 1	20000	3.29	0.151
B 5	13500	2.84	0.291
B 9	10800	2.58	0.436

Las discontinuidades de Balmer D_n interpoladas en la tabla Nº 5.1 para los valores de $Teff^{(n)}$ y $\log g_{(n)}$ dados por (61) y (62) respectivamente, están tabuladas en la tabla Nº 8.13.

TABLA Nº 8.13

Discontinuidades de Balmer D_n para diferentes valores del parámetro de deformación t y para los tipos espectrales de la Tabla Nº 8.12.

D_n(dex)									
Teff $_S$	20000 ºK			13500 ºK			10800 ºK		
Log g $_s$	3.29 (cgs)			2.84 (cgs)			2.58 (cgs)		
t / n	0.02	0.07	0.14	0.02	0.07	0.14	0.02	0.07	0.14
1	0.138	0.106	0.074	0.270	0.229	0.175	0.397	0.318	0.249
2	0.142	0.114	0.089	0.274	0.239	0.201	0.406	0.335	0.282
3	0.146	0.130	0.111	0.281	0.259	0.236	0.417	0.373	0.329
4	0.148	0.144	0.139	0.285	0.278	0.271	0.425	0.412	0.400
5	0.151	0.152	0.161	0.289	0.292	0.304	0.434	0.440	0.465
6	0.153	0.160	0.174	0.293	0.303	0.327	0.442	0.463	0.498
7	0.156	0.167	0.182	0.297	0.314	0.341	0.450	0.482	0.474
8	0.158	0.171	0.188	0.300	0.322	0.350	0.456	0.494	0.457
9	0.159	0.175	0.193	0.302	0.328	0.361	0.461	0.504	
10	0.161	0.177	0.195	0.303	0.331	0.366	0.464	0.508	

Los resultados obtenidos de D (H(i=0º)) aplicando la relación (44) y usando las tablas 8.10 y 8.13 para los tipos espectrales de la tabla 8.12 están dados en la tabla 8.14.

TABLA Nº 8.14

Discontinuidades de Balmer D (H(i=0º)) para diferentes valores del parámetro de deformación y para diferentes tipos espectrales.

t	B 1	B 5	B 9
0.00	0.151	0.291	0.436
0.02	0.151	0.289	0.434
0.07	0.149	0.286	0.427
0.14	0.142	0.279	0.401

8.4.4 Discusión

En la tabla Nº 8.14 vemos que existe el efecto que esperabamos, es decir que la discontinuidad de Balmer en una estrella en rotación diferencial es más pequeña que la correspondiente a una estrella de igual tipo espectral pero sin rotación. Observamos, sin embargo, que el efecto no parece ser muy grande aunque proporcionalmente éste sea mayor cuanto más pequeña sea la temperatura efectiva.

El hecho de que el efecto sea pequeño puede deberse a la superficie comparativamente pequeña de las zonas calientes que contribuyen con discontinuidades de Balmer pequeñas. Por otro lado, podría comprenderse que el efecto sea más pequeño cuanto más frío sea el tipo espectral si hacemos corresponder una masa más pequeña a un tipo espectral más frío. En efecto, como el parámetro de deformación t está dado por:

$$t = \frac{\text{energía cinética}}{\text{energía potencial}} \sim \frac{M}{M^2} \simeq \frac{1}{M} \qquad (8\text{-}66)$$

vemos que cuanto más pequeña sea la masa M de la estrella, más grande será t ó bien será más notoria una cierta deformación.

Señalemos, sin embargo, que una variación más precisa de la discontinuidad de Balmer con el parámetro de deformación se obtiene haciendo variar los flujos F_{3700^+} y F_{3700^-} que la definen:

$$D = \log (F_{3700^+} / F_{3700^-}) \qquad (8\text{-}67)$$

En este trabajo se ha promediado las discontinuidades de Balmer, sin embargo, no es evidente que ello corresponda al valor promediado de los flujos en $3700^{\pm}$. Lo que debe hacerse en realidad es:

$$D = \log \left[F_{3700^+}\left[H(i)\right] \Big/ F_{3700^-}\left[H(i)\right] \right] \qquad (8\text{-}68)$$

donde:

$$F_\lambda \left[H(i)\right] = \sum P_n \cdot F_\lambda \left[Teff^{(n)},\ \log g_{(n)}\right] \qquad (8\text{-}69)$$

siendo los p_n pesos que deben definirse convenientemente y que no necesariamente son los mismos que los definidos por (60). En la expresión (60) se tiene en cuenta que estamos promediando los D_n sobre los flujos, mientras que en (69) se promedian los flujos directamente.

TABLA Nº A.1

Parámetros de la absorción del medio interestelar en la región del ultravioleta espacial (Savage y Mathis, 1979).

λ (Å)	K_λ	λ (Å)	K_λ
1360	8.62	1980	8.48
1380	8.52	2000	8.62
1400	8.46	2020	8.75
1420	8.39	2040	8.89
1440	8.32	2060	9.03
1460	8.25	2080	9.17
1480	8.18	2100	9.33
1500	8.15	2120	9.40
1520	8.14	2140	9.48
1540	8.13	2160	9.56
1560	8.13	2180	9.63
1580	8.12	2200	9.60
1600	8.12	2220	9.46
1620	8.07	2240	9.31
1640	8.02	2260	9.16
1660	7.97	2280	9.01
1680	7.92	2300	8.87
1700	7.87	2320	8.69
1720	7.84	2340	8.52
1740	7.82	2360	8.34
1760	7.79	2380	8.16
1780	7.77	2400	8.00
1800	7.75	2420	7.84
1820	7.80	2440	7.71
1840	7.85	2460	7.57
1860	7.90	2480	7.43
1880	7.95	2500	7.29
1900	8.00	2520	7.20
1920	8.11	2540	7.11
1940	8.24	2740	6.20
1960	8.36		

TABLA Nº A.2

Magnitudes absolutas M_V obtenidas con el sistema BCD para algunas estrellas supergigantes del programa.

HD	M_V (BCD)
24398	-6.2
30614	-7.2
34085	-7.5
36486	-4.5
37128	-6.6
37742	-5.9
38771	-5.7
41117	-8.1
44743	-4.6
46300	-4.9
51309	-5.7
52089	-4.2
58350	-7.2
87737	-4.8
91316	-6.6
164353	-5.0
166937	-7.9
197345	-7.0
198478	-7.6
202850	-6.9
206165	-6.2
212593	-7.1

TABLA A.3

Integrales de flujos corregidos en los tres intervalos considerados y el flujo corregido total (ergio-cm^{-2}-seg^{-1}) x 10^{-6}.

#	HD	UV_{1380}^{2740}	$UV-JM_{2740}^{3371}$	JM_{3371}^{11084}	$f_{\Delta\ 1360}^{o\ 11084}$
1	2905	3.166	0.531	1.221	4.918
2	24398	11.870	1.904	4.235	18.009
3	30614	4.843	0.678	1.173	6.694
4	34085	10.670	4.256	18.550	33.476
5	36486	17.097	2.319	3.784	23.200
6	37128	20.430	3.473	5.871	29.774
7	37742	25.372	3.733	5.962	35.067
8	38771	15.398	2.366	4.330	22.094
9	41117	3.415	0.713	1.452	5.580
10	44743	16.044	2.384	4.331	22.759
11	46300	00.108	0.043	0.367	0.518
12	51309	0.917	0.201	0.576	1.694
13	52089	18.883	3.524	6.928	29.335
14	53138	2.095	0.565	1.716	4.376
15	53244	0.541	0.115	0.506	1.162
16	57061	3.256	0.371	0.603	4.230
17	58350	2.282	0.689	2.476	5.447
18	62623	0.093	0.064	0.791	0.948
19	87737	0.223	0.095	0.819	1.137
20	91316	1.900	0.369	0.812	3.081
21	157246	5.871	0.834	1.588	8.293
22	164353	1.433	0.320	0.990	2.743
23	165024	3.220	0.544	1.184	4.948
24	166937	2.153	0.486	1.680	4.319
25	173948	2.287	0.323	0.614	3.224
26	197345	0.686	0.538	6.228	7.452
27	198478	1.385	0.397	1.186	2.968
28	202850	0.232	0.112	0.666	1.010
29	206165	1.497	0.387	1.037	2.921
30	212593	0.195	0.079	0.456	0.730

CONCLUSIONES

1.- En el presente trabajo de Tesis se han utilizado solamente 30 estrellas supergigantes tempranas de tipo espectral comprendido en el intervalo O9 - A2, y de clases de luminosidad entre II (estrellas gigantes brillantes) hasta Ia (estrellas supergigantes brillantes).La lista de estrellas está en la Tabla N° 1.1.
Los modelos de atmosferas estelares están basados en que la atmosfera estelar de está en equilibrio termodinámico local (ETL), en equilibrio hidrostático y en equilibrio radiativo.

2.- El salto de la discontinuidad de Balmer aparece en el espectro estelar de absorción continua del átomo de hidrogeno y su longitud de onda teórica es λ = 3648 Å, normalmente es el límite de ionización del hidrogeno. Ella está representada en la Fig. N° 4.3. La discontinuidad de Balmer observacional se define en función de los flujos de energía, en la longitud de onda λ = 3700 Å; Chalonge y Divan (1952). En el presente trabajo, las discontinuidades de Balmer observadas, han sido calculadas con esta definición, Ec. 3-1. Esto significa calcular el flujo de radiación antes y después de la discontinuidad de la absorción continua del átomo de hidrogeno.

3.- Se han examinado los aportes teóricos que conducen a afirmar que la discontinuidad de Balmer es esencialmente un indicador de la temperatura efectiva de una estrella según la Ec. 3-11, es decir del flujo bolométrico irradiado por una estrella; Zorec (1986b). Los resultados obtenidos en este trabajo están en acuerdo con esta relación.

4.- Las discontinuidades de Balmer observadas, son calculadas en este trabajo, utilizando los flujos de energía en el rango ultravioleta lejano obtenidos por el satélite europeo TD-1 y los flujos de energía visibles y del infrarrojo cercano, convenientemente corregidos del exceso de color a causa de la extinción del medio interestelar. Están presentadas en la Tabla N° 4.3.

5.- Las discontinuidades de Balmer teóricas utilizadas En este trabajo, son las discontinuidades de Balmer predichas por los modelos clásicos de atmosferas estelares en ETL y basadas en los principios del equilibrio radiactivo y del equilibrio hidrostático, Kurucz (1979). Están tabuladas en la Tabla N° 5.1 en función de la temperatura efectiva y de la gravedad superficial. Se observa que las discontinuidades de Balmer varían de una manera mucho más importante con la temperatura efectiva que con la gravedad superficial de la

estrella. Esto confirma que la discontinuidad de Balmer es un indicador de la temperatura efectiva de una estrella.

6.- Por otro lado, en el sistema de clasificación espectral BCD (Barbier-Chalonge-Divan)(1973), la discontinuidad de Balmer es un indicador del tipo espectral de la estrella.

En el sistema BCD, no se necesita corregir por la extinción interestelar por lo que un análisis comparativo podría ser realizado en este sistema.

7.- Para poder comparar las discontinuidades de Balmer obtenidas a partir de los flujos de radiación de las estrellas convenientemente corregidas de la absorción del medio interestelar, con las discontinuidades de Balmer teóricas, es necesario calcular antes la temperatura efectiva (Tabla N° 6.6), y la gravedad superficial (Tabla N° 6.1) de las estrellas de nuestro programa.

Los valores que hemos obtenido son concordantes con los obtenidos por otros autores. La temperatura efectiva y la gravedad superficial, sirven para realizar una doble interpolación entre los datos de la tabla N° 5.1 y poder determinar así la discontinuidad de Balmer teórica de cada estrella, Tabla N° 6.12.

8.- El objetivo de esta Tesis, es comparar, las discontinuidades de Balmer teóricas con las discontinuidades de Balmer, calculadas tal como está indicado arriba.

La diferencia entre las discontinuidades de Balmer observadas (D_{obs}) y las teóricas (D_{teo}), $\Delta D = D_{obs}-D_{teo}$ de las estrellas de nuestro programa, son presentadas en la última columna de la Tabla N° 6.12. En esta tabla se observa que existen discrepancias entre las discontinuidades de Balmer observacionales y las teóricas. Se constata también que las discontinuidades de Balmer observacionales son más pequeñas que las discontinuidades de Balmer teóricas. Esto coincide con las previsiones teóricas iniciales.

9.- Obtenemos otro resultado importante al graficar las diferencias entre las discontinuidades de Balmer observadas y teóricas con la temperatura efectiva. Se obtiene la distribución mostrada en la Fig. N° 6.5. En esta grafica se observa que existe una correlación bien definida entre las diferencias de las discontinuidades de Balmer observada y teóricas con la temperatura efectiva.

Se observa también que existe un cierta dispersión de valores de las discrepancias alrededor de $\Delta D=0$.

10.- Así mismo, no se han encontrado, en los resultados del presente trabajo, una relación apreciable entre las diferencias de las discontinuidades de Balmer observacionales y teóricas con el estado evolutivo de las estrellas.

11.- En la segunda parte de éste trabajo, se ha investigado la influencia de la rotación diferencial de las estrellas sobre las discontinuidades de Balmer. En trabajos anteriores, Zorec (1986 a,b) se ha demostrado que la rotación diferencial de las estrellas enanas y gigantes era un fenómeno altamente probable.

La deformación de una estrella por la rotación diferencial en función del parámetro de deformación t, está representada en la Fig. N° 7.1.

Se trata aquí de poder determinar si las discrepancias de las discontinuidades de Balmer teórica y observacionales, encontradas arriba, se explican por la rotación diferencial cilíndrica de la supergigante; Zorec (1986 a,b).

Las discontinuidades de Balmer de una estrella en rotación son calculadas a partir de los flujos radiactivos, de la temperatura efectiva y de la gravedad superficial aplicada a estrellas en rotación.

En este trabajo se calcula la discontinuidad de Balmer para el ángulo de observación i=0, siendo i el

ángulo entre la línea visual y el ángulo de inclinación del eje de rotación, Fig. N° 8.1.

A partir de la literatura y de las demostraciones de Zorec (1986a) se obtiene la Ec. N° 8-44, con la cual hemos calculado la discontinuidad de Balmer para i=0. Utilizando los pesos obtenido por la Ec. 8-60 y las discontinuidades de Balmer para diferentes valores del parámetro de deformación t y para los tipos espectrales de la Tabla N° 8.12, se obtienen las discontinuidades de Balmer de la estrella en rotación diferencial.

Finalmente, las discontinuidades de Balmer obtenidas para diferentes valores del parámetro de deformación t de la estrella y para diferentes tipos espectrales son mostradas en la Tabla N° 8.14. Aquí vemos que existe el efecto que esperábamos, es decir que la discontinuidad de Balmer de una estrella en rotación diferencial es más pequeña que la correspondiente a una estrella de igual tipo pero sin rotación. Sin embargo, observamos que el efecto no parece muy grande aunque proporcionalmente éste sea mayor cuanto más pequeña sea la temperatura efectiva.

12.- Los errores en los diferentes valores calculados en este trabajo provienen en primer lugar de los dispositivos de obtención de datos, satélites y telescopios.

También las temperaturas efectivas calculadas aquí

contienen una fuente de error principalmente en el cálculo del exceso de color E(B-V).El error está indicado en la última columna de la Tabla 4.1. Hay que señalar que las temperaturas efectivas de las supergigantes B calculadas en este trabajo concuerdan con las temperaturas efectivas calculadas por otros autores tal como indicado en la Tabla N° 6.7.

En consecuencia, consideramos que no es muy necesario aquí hacer un análisis exhaustivo de determinación del intervalo de error de los valores utilizados pues, la buena correlación obtenida entre la temperatura efectiva y las diferencias entre las discontinuidades de Balmer teóricas y observacionales de las estrellas de nuestro programa, Fig. N° 6.5, no sería sensiblemente alterada.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALLEN, C. W.; 1973, Astrophysical Quantities (The Athlone Press).

ANDREWS, P.J.; 1968, Mem. Roy. Astr. Soc. 72, 35.

BARLOW, M.J.; y COHEN, M.; 1977, Astrophys. J. 213, 737.

BEECKMANS, F. y HUBERT-DELPLACE, A.M.; 1980, Astron. Astrophys. 86, 72.

BECKER, S.A.; 1981, Astrophys. J. Suppl. Series, 45, 475.

BODENHEIMER, P.; 1971, Astrophys. J. 167, 153.

BRUNISH, W.M. y TRURAN, J.M.; 1982, Astrophys. J. Suppl. Series, 49, 447.

CHALONGE, D. y DIVAN, L; 1952, Ann. Astrophys. 15, 201.

DEUTSCHMANN, W.A.; DAVIS, R.J. y SCHILD, R.E.; 1976, Astrophys. J. Suppl. Series. 30, 97.

DIVAN, L.; 1982 en "B-Stars with and without emision lines". eds, A. B. Underhill y V. Doazan, NASA-CNRS Monograph. Series, NASA SP-456.

DIVAN, L. ; 1986, Comunicación Privada.

GURTLER, J.; SCHIELICKE, R.; DORSCHNER, J. y FRIEDMANN, C.; 1982, A.N., 303, 105.

HECK, A.; EGRET, D,; JASCHEK, M. y JASCHEK, C.; 1984, IUE Low Dispersion Spectra Reference Atlas. Part 1, Normal Stars.

HUMPHREYS, R.M.: 1970, Astron, J. 75, 602.

JAMAR, C.; MACAU-HERCOT, D.; MONFILS, A.; THOMPSON, G.I.; HOUZIAUX, L. y WILSON, R.; 1976, Ultraviolet Bright-Stars Spectrophotometric Catalogue, ESA SR-27.

JOHNSON, H.L. y MORGAN, W.W.; 1953, Astrophys, J., 117, 313.

JOHNSON, H.L. y MITCHELL, R.I.; 1975, Rev. Mexicana, Astron. Astrof. 1, 299.

KURUCZ, R.L.; 1979, Astrophys. J. Suppl. Series, 40, 1.

LESH, J.R.; 1968, Astrophys. J. Suppl. Series, 16, 371.

LESH, J.R.; 1972, Astron. Astrophys. Suppl. Series, 5, 129.

MACAU-HERCOT, D.; JAMAR, C.; MONFILS, A.; THOMPSON, G.I.; HOUZIAUX, L. y WILSON, R.; 1978, Supplement to the Ultraviolet Bright-Stars Spectrophotometric Catalogue, ESA SR-28.

REMIE, H. y LAMERS, H.J.G.L.M.; 1982, Astron. Astrophys. 105, 85.

SAVAGE, B.D. y MATHIS, J.S.; 1979, Ann Rev. Astron. Astrophys. 17, 73.

SAVAGE, B.D.; BOHLIN, R.C.; DRAKE, J.F. y BUDICH, W.; 1977, Astrophys, J. 216, 291.

SCHMIDT-KALER, Th.; 1982, LANDOLT-BORNSTEIN, group VI, Vol. 2, Sulvol. b., Stars and Stars Clousters, eds. K. Schaifers y H.H. Voight, Springer-Verlag, Berlin.

Tassoul, J.L.; 1978, Theory of Rotating Stars (Princeton University Press).

UNDERHILL, A.B.; DIVAN, L.; PREVOT-BURNICHON, M.L.; y DOAZAN, V.; 1979, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 189, 601 y Microficha Mn 189/1.

UNDERHILL, A.B.: 1982, "B-Stars with and without emission lines", eds. A.B. Underhill y V. Doazan, NASA-CNRS Monograph. Series, NASA SP-456.

ZEIPEL, H.Von; 1924, Mon. Not. Roy. Astr. Soc. 84, 665.

ZOREC, J. y BRIOT, D.; 1985, Rev. Mexicana Astron. Astrof. 10, 317.

ZOREC, J.; 1986a, Tesis Universidad Paris VII.

ZOREC, J.; 1986b, Curso de Atmósferas Estelares UNMSM.

ZOREC, J.; Comunicación Privada.

* * * * *

INDICE DE MATERIAS

		Pág. Nº
	Dedicatoria.	
	Programa.	
	Agradecimientos.	
1.0	INTRODUCCION.	1
	CAPITULO I	
2.0	Propiedades Generales de las Supergigantes Tempranas.	6
	CAPITULO II	
3.0	Las Discontinuidades de Balmer.	
3.1	Definición de una Discontinuidad de Balmer.	14
3.2	Breve Interpretación Teórica de la Discontinuidad de Balmer.	15
	CAPITULO III	
4.1	Datos Observacionales.	25
4.2	Cálculo del Exceso de Color E(B-V).	27
4.2.1	Exceso de Color $E(B-V)_{UBV}$.	32
4.2.2	Cálculo del Exceso de Color $E(B-V)_{Q}$.	34
4.2.3	Cálculo del Exceso de Color $E(B-V)_{2200}$.	35
4.2.4	Cálculo del Exceso de Color E(B-V)	39
4.2.5	Exceso de Color $E(B-V)_{BC}$.	39

4.2.6	Exceso de Color $E(B-V)_{Zo}$	41
4.2.7	Exceso de Color Promedio Adoptado.	41
4.3	Cálculos de las discontinuidades de Balmer y Resultados.	43
	CAPITULO IV	
5.0	Discontinuidades de Balmer Teóricas.	
5.1	Modelos de atmósferas utilizados.	50
5.2	Cálculos de las Discontinuidades y Resultados.	54
	CAPITULO V	
6.0	Comparación de las Discontinuidades de Balmer Teóricas con las Observadas.	
6.1	Introducción.	57
6.2.0	Cálculo de la Temperatura Efectiva de una Estrella.	58
6.2.1	Cálculo de la Temperatura Efectiva Aproximada.	62
6.2.2	Diámetros Angulares.	66
6.2.3	Iteración de la Temperatura Efectiva y Resultados.	71
6.3.0	Cálculo de la Luminosidad Bolométrica.	
6.3.1	Cálculo de las Distancias Estelares.	72
6.3.2	Luminosidades Bolométricas. Resultados.	81
6.4.0	Cálculo de la Gravedad Superficial.	

6.4.1	Cálculo de los Radios Estelares.	85
6.4.2	Determinación de las Masas Estelares.	87
6.4.3	Corrección de la Masa por Efectos de la Pérdida de Masa.	89
6.4.4	Gravedades Superficiales. Resultados.	94
6.5.0	Comparación de las Discontinuidades Teóricas y Observadas.	
6.5.1	Interpolación de las Discontinuidades Teóricas. Resultados.	97
6.5.2	Comparación y Discusión.	97
	CAPITULO VI	
7.0	La Rotación Diferencial de las Estrellas. Introducción.	102
7.1	Criterios de Estabilidad y Leyes Probables de Rotación.	104
7.2	Generalidades sobre las Deformaciones Estelares Producidas por la Rotación - Diferencial.	107
7.3	El Teorema de Von Zeipel.	110
7.4	Generalidades sobre las Variaciones de los Parámetros Observacionales Producidos por la Rotación Diferencial.	114
	CAPITULO VII	
8.0	Cálculo de la Discontinuidad de Bal-	

mer de una Estrella Deformada por la Rotación Diferencial.

8.1 Introducción. 119

8.2 Cálculo de la Gravedad Efectiva Superficial de una Estrella Deformada por la Rotación Diferencial. 120

8.3 Cálculo de la Temperatura Efectiva Local. 131

8.4.0 Cálculo de la Discontinuidad de Balmer Integrada.

8.4.1 Planteo del Problema. 138

8.4.2 Cálculo de μ_n, g_n, S_n. 142

8.4.3 Cálculo de la Discontinuidad de Balmer. 151

8.4.4 Discusión. 156

Referencias Bibliográficas.

Indice de Materias.

Indice de Tablas.

Indice de Figuras.

* * * * *

INDICE DE TABLAS

TABLA Nº		Pág.Nº
1.1	Estrellas Supergigantes del Programa. Códigos y Nombres. Tipo Espectral, Luminosidad, Velocidad.	5
4.1	Excesos de color obtenidos por diferentes métodos, exceso de color promedio adoptado.	42
4.2	Parámetros de absorción del medio interestelar para la fotometría de 13 colores.	45
4.3	Valores de la discontinuidad de Balmer de las estrellas del Programa.	49
5.1	Discontinuidades de Balmer obtenidas a partir de los modelos de Kurucz.	56
6.1	Factor de completación o de relleno q(Teff, log g) para el cálculo del flujo bolométrico.	63
6.2	Valores de los parámetros A_{RR}^{JM} y B_{RR}^{JM} calculados a partir de los flujos de las estrellas del Programa, estimados de la fotometría de Johnson y Mitchel.	67
6.3	Valores de los parámetros A_{RR}^{K} y B_{RR}^{K} calculados a partir de los modelos	

	Kurucz.	68
6.4	Valores promedio de los parámetros A^K_{RR} y B^K_{RR} obtenidos de la Tabla Nº 6.3 en función de la temperatura efectiva.	69
6.5	Temperatura efectiva en función de los parámetros A^K_{RR} y B^K_{RR} y del factor de completación q.	73
6.6	Flujos, Temperaturas efectivas. Diámetros angulares de las estrellas del Programa. Factor de completación y porcentaje de flujo agregado con los modelos. Número de iteraciones.	74
6.7	Comparación de la temperatura efectiva obtenida por diferentes autores.	75
6.8	Comparación de diámetros angulares obtenidos por diferentes autores.	76
6.9	Distancias obtenidas por diferentes autores y distancia promedio adoptada.	82
6.10	Temperatura efectiva, luminosidad bolométrica y masa de las estrellas del programa en unidades solares.	91
s/n	Valores característicos de la pérdida de masa.	94
6.11	Masas estelares corregidas por pérdi-	

	da de masa, radios de los estrellas y gravedad superficial.	96
6.12	Comparación de las discontinuidades de Balmer observacionales con las teóricas y su diferencia.	100
8.1	Parámetros de una estrella deformada por la rotación diferencial según la ley de distribución del momento angular específico adoptada en éste trabajo.	129
8.2	Momento angular total en función del parámetro de deformación t para diferentes masas estelares.	131
8.3	Variación de la temperatura efectiva promediada sobre toda la superficie de la estrella en función del parámemetro de deformación t y de la masa M.	136
8.4	Variación de la gravedad efectiva promedida sobre toda la superficie de la estrella en función del parámetro de deformación t.	137
8.5	Longitudes de arco $\ell(t)$.	144
8.6	Angulos θ_n y $\theta_n^{(1/2)}$ para los parámetros de deformación t = 0.02; 0.07; 0.14.	145
8.7	Valores de μ_n para valores del parámetro de deformación t.	147
8.8	Valores de g/g_o para los $\theta_n^{(1/2)}$ y para t = 0.02; 0.07; 0.14.	148

8.9	Valores de los elementos de superficie S_n para t = 0.02; 0.07; 0.14.	150
8.10	Pesos P_n para t = 0.02; 0.07; 0.14.	151
8.11	Valores de las funciones F_T (t, θ) F_G (t, θ) para diferentes valores del parámetro t.	153
8.12	Temperaturas efectivas, gravedades superficiales y discontinuidades de Balmer de supergigantes en función de tipos espectrales.	154
8.13	Discontinuidades de Balmer D_n para diferentes valores del parámetro de deformación t y para los tipos espectrales de la Tabla Nº 8.12.	155
8.14	Discontinuidades de Balmer D(H(i=0)) para diferentes valores del parámetro de deformación y para diferentes tipos espectrales.	156
A.1	Parámetros de la absorción del medio interestelar en la región del ultravioleta espacial.	159
A.2	Magnitudes absolutas M_V obtenidas con el sistema BCD, para algunas estrellas supergigantes del Programa.	160
A.3	Integrales de flujos corregidos en los tres intervalos considerados	161

y flujo corregido total.

A.4 Magnitudes aparentes V de las supergigantes del Programa.

INDICE DE FIGURAS

Figura Nº		Pág Nº
4.1	Distribución de energía de HD 166937.	31
4.2	Distribución de energía de HD 2905.	40
4.3	Representación esquemática de la discontinuidad de Balmer observada en la distribución espectral de energía.	47
6.1	Variación de la discontinuidad de Balmer teórica en función de la gravedad superficial para diferentes temperaturas.	59
6.2	Factor de completación q en función de la gravedad superficial para diferentes temperaturas.	64
6.3	Dependencia del factor $\bar{q}$ promedio en función de la temperatura efectiva.	65
6.4	Caminos evolutivos de estrellas según modelos, sin pérdida de masa.	90
6.5	Discrepancias de las discontinuidades de Balmer observadas y teóricas en función de la temperatura efectiva de las estrellas.	101

7.1	Estrellas deformadas por la rotación diferencial en función del parámetro de deformación t.	111
7.2	Leyes diferentes de distribución del momento angular de estrellas en rotación diferencial.	115
7.3	Diagrama HR para estrellas en rotación.	118
8.1	Elementos geométricos de una estrella en rotación diferencial cilíndrica.	121
8.2	Ley de rotación. $\Omega(\tilde{\omega}) / \Omega_c$	126
8.3	Funciones Re/Ro, Rp/Re y g_p/g_e.	130
8.4	Momento angular en función del parámetro de deformación t.	132
8.5	Funciones f_T y f_G.	137A
8.6	Elementos geométricos necesarios para el cálculo de la discontinuidad de Balmer en la dirección i = 0 .	140
8.7	Angulos θ_n y $\theta_n^{(1/2)}$.	146A

* * * * *