



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

**Una introducción a las álgebras geométricas
euclidianas tridimensional**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Carlos Alberto ALCÁNTARA MICHUY

ASESOR

Edgar Diógenes VERA SARAVIA

Lima, Perú

2018



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Alcántara, C. (2018). *Una introducción a las álgebras geométricas euclidianas tridimensional*. Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

CÓDIGO ORCID DEL AUTOR:

CÓDIGO ORCID DEL ASESOR:

<https://orcid.org/0000-0002-3634-8549>

DNI DEL AUTOR:

10013384

GRUPO DE INVESTIGACIÓN:

INSTITUCIÓN QUE FINANCIA PARCIAL O TOTALMENTE LA INVESTIGACIÓN:

UBICACIÓN GEOGRÁFICA DONDE SE DESARROLLÓ LA INVESTIGACIÓN. DEBE INCLUIR LOCALIDADES Y COORDENADAS GEOGRÁFICAS.

Lima, Cercado de Lima 15081

Cercado de Lima 15081 Latitud : -12,056

Cercado de Lima 15081 Longitud : -77,0844

AÑO O RANGO DE AÑOS QUE LA INVESTIGACIÓN ABARCÓ:

2005 - 2018



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ...16:13... horas del Jueves 6 de diciembre de 2018, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (PRESIDENTE), Mg. Galindo Taza Chambi (MIEMBRO), Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «UNA INTRODUCCIÓN A LAS ÁLGEBRAS GEOMÉTRICAS EUCLIDEANAS TRIDIMENSIONAL», presentado por el señor Bachiller CARLOS ALBERTO ALCÁNTARA MICHUY, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

.....Diecisiete..... (17). Sobresaliente.

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya, manifestó que el señor Bachiller CARLOS ALBERTO ALCÁNTARA MICHUY, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las ...17:00... horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA
PRESIDENTE

MG. GALINDO TAZA CHAMBI
MIEMBRO

DR. EDGAR DIÓGENES VERA SARAVIA
MIEMBRO ASESOR

FICHA CATALOGRÁFICA

Carlos Alcántara Michuy

*Diseño de una base de datos en ambiente Window,
Lima 2018.*

*VIII, 72 p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado, Ma-
temática, 2018).*

*Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,
Facultad de Ciencias Matemáticas*

DEDICATORIA

Dedico este trabajo en primer lugar a Dios, Señor Todopoderoso, ya que permitió la publicación del mismo, En segundo lugar a mis amados padres e hijos, por su paciencia, su gran apoyo a lo largo de mi carrera y su gran comprensión. A la vez a mi asesor de tesis el Dr. Edgar Vera Saravia por su gran ayuda y amistad.

AGRADECIMIENTOS

- Agradezco la presencia de Dios por haberme permitido hacer realidad la culminación de mi trabajo de tesis.
- A mis padre y hermanos que siempre alentaron a culminar mi trabajo.
- A mis hijos Madeley, Carlos y Nataly que son mi razón de vivir.
- A mi asesor de tesis el Dr. Edgar Vera Seravia por su paciencia, dedicación y regalarme parte de su tiempo en las charlas académicas.
- Al cuerpo docente de la facultad de matemática por darme la oportunidad de estudiar y conocer muy buenos profesionales dedicados a su vocación.

RESUMEN

INTRODUCCIÓN A LAS ÁLGEBRAS GEOMÉTRICAS EUCLIDEANAS

Carlos Alcántara Michuy

Diciembre 2018

Asesor: **Dr. Edgar Vera Saravia**

Título obtenido: **Licenciado en Matemática Pura**

La tesis presenta el álgebra geométrica $AG(3)$ como un \mathbb{R} – *subespacio* vectorial del anillo de polinomios provisto de un producto de polinomios modificado por la condición de Dirac. El álgebra $AG(3)$ de elementos multivectoriales se descompone como suma directa de subálgebras asociativas los cuales veremos que poseen isomorfismos con las álgebras ya conocidas \mathbb{R} , \mathbb{R}^3 , \mathbb{C} y los cuaterniones de Hamilton \mathbb{H} . Las aplicaciones del $AG(3)$ son diversas, para las áreas de matemáticas como la física, veremos que las rotaciones y reflexiones de vectores sobre un plano y su proyección sobre el mismo se presentan de una forma más compacta en el $AG(3)$. A la vez el Álgebra Geométrica presenta una versión más generalizada y compacta de la derivada y los conceptos clásicos del cálculo como es la gradiente, el rotacional y la divergencia que se estudian por separados, serán unificadas con el concepto de la derivada geométrica, como se muestran en los teoremas de Stokes y la divergencia.

Palabras Clave:

- Álgebra Geométrica
- Multivectores
- Derivada geométrica.

ABSTRACT

INTRODUCTION TO THE EUCLIDEAN GEOMETRIC ALGEBRAS

Carlos Alcántara Michuy

December 2018

Adviser: **Dr. Edgar Vera Saravia**

Obtained Degree: **Mathematician**

The thesis presents the geometric algebra $AG(3)$ as a \mathbb{R} – *subspace* vector of the polynomial ring provided with a product of polynomials modified by Dirac’s condition. The $AG(3)$ algebra of multivector elements is decomposed as a direct sum of vector sub-spaces which have isomorphisms with the known algebras \mathbb{R} , \mathbb{R}^3 , \mathbb{C} and Hamilton’s quaternions \mathbb{H} . The applications of $AG(3)$ are diverse, for the areas of mathematics such as physics, but we will focus on the rotations and reflections of the vectors in the plane and their projection on a plane. In the $AG(3)$ a more generalized and compact version of the derivative is presented. and the classical concepts of calculus such as the rotational and divergence that are studied separately will be unified with the concept of the geometric derivative. As shown in Stokes’ theorem and divergence.

Key Words:

- Geometric algebra
- Multivectors
- Geometric derivative.

Índice general

Resumen	v
Capítulo 1	3
1. AG(3): El Álgebra Geométrica euclideana tridimensional	4
1.1. El álgebra no conmutativa $\mathbb{C}^{2 \times 2}$	4
1.2. El Álgebra Geométrica AG(3)	6
1.2.1. Resultados y conceptos adicionales	12
1.2.2. Producto interior y exterior de multivectores homogéneos	17
1.2.3. Propiedades de las Subálgebras del AG(3)	22
2. Ángulos entre dos vectores , reflexiones y rotaciones de vectores en el AG(3)	27
2.1. Definición de ángulos entre vectores.	28
2.1.1. Descomposición de un vector sobre otro vector.	33
2.1.2. Reflexiones y rotaciones de vectores en el AG(3).	34
2.1.3. Descomposición de un vector respecto a un plano en el AG(3).	37
3. Operadores en el AG(3)	41
3.0.1. El operador dual.	41
3.0.2. El Operador Inverso.	43
3.0.3. El Operador Reverso.	46
3.0.4. El Operador cruz.	50

4. Una extensión del cálculo a funciones con valores en $AG(3)$	53
4.0.1. Definición de integral y la derivada en el $AG(3)$	54
4.0.2. Operadores clásicos : Gradiente , divergencia y rotacional en el $AG(3)$	56
4.1. La Derivada Direccional y sus propiedades	67
4.1.1. Propiedades de la derivada direccional	68
5. Apéndice	76
5.1. Apéndice 1: El origen del enfoque moderno	76
5.1.1. Pruebas de las proposiciones del $AG(3)$	79
6. Extensión del álgebra $AG(3)$ al álgebra $AG(n)$.	83
6.1. Propiedades del producto interno y externo para vectores y r-vectores en el $AG(n)$	83
6.1.1. Construcción de espacios vectoriales en el $AG(n)$	93
6.1.2. Las matrices en el Álgebra Geométrica $AG/(n)$	95
Bibliografía	98

Introducción

El Álgebra Geométrica (AG) nació del esfuerzo al desarrollar una herramienta matemática para resolver problemas usando elementos geométricos. Los pioneros y más representativos que aportaron sobre esta teoría fueron : Hermann Grassmann (1809-1879), William Hamilton(1805-1865), William Clifford(1845-1879) y finalmente David Hestenes (1933-). Grassmann obtuvo el producto exterior y el producto interior genérico; Hamilton aportó sus Cuaterniones, los cuales como aplicación se tiene las rotaciones de vectores en 3 dimensiones, Clifford fusionó los trabajos de Grassmann y Hamilton para crear el Álgebra Geométrica, lamentablemente después de pocos meses falleció sin poder completar su trabajo, por último Hestenes retomó los trabajos anteriores y enfocó en mejorar los aspectos geométricos y computacionales a la fecha.

El Álgebra Geométrica tiene como punto de partida un espacio lineal finito, en la tesis se desarrollará a partir del espacio vectorial \mathbb{R}^3 en el cual a partir de nuevas operaciones otorgadas este generará el espacio lineal $AG(3)$.

El Álgebra Geométrica definida en el capítulo I, posee una estructura matemática amigable que contiene sub álgebras isomorfas al espacio \mathbb{R}^3 , a los reales \mathbb{R} , los números complejos \mathbb{C} y al conjunto de los Cuaterniones \mathbb{H} .

La tesis se divide en 6 capítulos.

En el capítulo 1 se define el Álgebra Geométrica $AG(3)$ como un \mathbb{R} -espacio vectorial de polinomios en las variables canónicas ,provisto del producto de polinomios modificado por la condición de Dirac. Esta es una defición alternativa de las notas del Dr. Vera [2]. De la definición de $AG(3)$ se obtienen propiedades importantes que se usarán en los capítulos restantes. De la definición se demuestra que el $AG(3)$ se expresa como una suma directa de álebras asociativas y de ahy se obtiene sub álgebras isomorfas a los cuaterniones, a los reales,

al espacio vectorial \mathbb{R}^3 , al conjunto de los números complejos, además presentaremos como caso particular el sub-álgebra bidimensional $AG(2)$. Además se presentará los operadores más usuales en el álgebra, como son el producto interior y el producto exterior, los cuales se definen del producto geométrico.

En el capítulo 2 se define el ángulo orientado entre vectores y la orientación del plano en relación a los vectores que forman el paralelogramo, además se presentará aplicaciones del $AG(3)$ en el plano y en el espacio \mathbb{R}^3 , como es el caso de la reflexión de un vector sobre una recta que pasa por el origen y la rotación de vectores en el plano, como en el espacio, a la vez se presentarán los vectores en forma polar, tal expresión será la fórmula generalizada de la identidad de Euler ($e^{i\pi} + 1 = 0$), donde i representará un bivector unitario contenido en un plano, el cual trabaja como operador de rotaciones, pues el producto de un vector por el bivector i rota un al vector un ángulo de 90 grados en el plano generado por el bivector i . Tambien el bivector i representa como cantidad un plano orientado.

En el capítulo 3 enriqueceremos aún más las operaciones del Álgebra Geométrica al definir operaciones como son el reverso, el inverso, el dual y producto cruz, aquí presentamos algunas de sus propiedades de los operadores como sus aplicaciones.

En el capítulo 4 se presentará una extensión del cálculo a funciones con valores en $AG(3)$. La derivada geométrica será definido de manera natural en una forma más generalizada y los conceptos de gradiente, divergencia y rotacional que se estudian de manera independiente en el cálculo vectorial tradicional esta vez serán unificados con la derivada geométrica, esto jugará un rol importante en la generalización del teorema fundamental del cálculo.

En el capítulo 5 es el apéndice, donde se detalla las demostraciones de las propiedades dejadas en algunos capítulos y a la vez se presenta una forma alternativa del Álgebra Geométrica a través de las matrices de Paulin.

En el capítulo 6 se extiende el Álgebra Geométrica $AG(3)$ a un álgebra de dimensión finita $AG(n)$, se detalla la demostración donde todo espacio vectorial de dimensión n genera un Álgebra Geométrica $AG(n)$ y viceversa. Es decir existe una relación bionívoca entre un espacio vectorial finito y el álgebra que esta desarrolla, a la vez de cada $r - vector$ simple podemos construir un espacio vectorial, como caso particular vemos que dado un vector a podemos construir el espacio vectorial formado por todos los vectores que viven en la recta contenida al vector a . En general de un $r - vector$ A podemos construir un espacio vectorial formado por todos los vectores que cumplen $a \uparrow A = 0$.

También en este capítulo veremos una forma compacta de ortonormalizar vectores el proceso conocido como ortogonalización de Gram Schmidt.

Capítulo 1

AG(3): El Álgebra Geométrica euclideana tridimensional

Haremos una breve introducción de como el álgebra de las matrices genera en un inicio el Álgebra Geométrica, luego trabajaremos un desarrollo alternativo el cual dejaremos de lado tales matrices. Es decir desarrollaremos el álgebra de matrices sin matrices como se refiere en la cita [2].

1.1. El álgebra no conmutativa $\mathbb{C}^{2 \times 2}$

Del álgebra $\mathbb{C}^{2 \times 2}$, como \mathbb{R} -espacio vectorial, contiene una subfamilia de matrices dadas por $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. las cuales veremos que poseen propiedades muy interesantes.

Las matrices $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ y σ_3 son llamadas matrices de Pauli y son respectivamente :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Proposición 1.1.1. *El álgebra de las matrices de Pauli.*

1. Las matrices σ_1, σ_2 y σ_3 , cumple la condición de Dirac.

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \sigma_0, \text{ donde } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

$\sigma_i \sigma_j$ indica el producto de matrices σ_i por σ_j . y δ_{ij} , es llamado la delta de Kroner, la cual se define por :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

2. La familia de ocho matrices es una base del espacio vectorial $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.

$$\Gamma = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1\sigma_2, \sigma_3\sigma_1, \sigma_2\sigma_3, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\},$$

Explicitamente tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Además la subfamilia de matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

es una base del espacio vectorial de $\mathbb{R}^{2 \times 2} \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

3. Cada elemento de $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ es una combinación lineal de los elementos de la base Γ explicitamente tenemos :

$$\mathbb{C}^{2 \times 2} = \left\{ a_0 \sigma_0 + \sum_{m=1}^3 \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq 3} a_{i_1 \dots i_m} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}; a_0, a_{i_1 \dots i_m} \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. El \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ contiene una copia isomorfa del \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^3 , que asocia su base canónica con las matrices σ_1, σ_2 y σ_3 respectivamente.

5. Se cumplen las identidades $(\sigma_i \sigma_j)(\sigma_i \sigma_j) = -\sigma_0$, esto permite demostrar que el álgebra $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ contiene una copia isomorfa del álgebra no conmutativa de los cuaterniones de Hamilton \mathbb{H} que asocia σ_0 con 1 y la familia $\{\sigma_1 \sigma_2, \sigma_3 \sigma_1, \sigma_2 \sigma_3\}$ con la base de los cuaterniones puros.

6. También se cumple la identidad $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) = -\sigma_0$.

La prueba se logra de manera directa gracias al producto de matrices.

Observación 1.1.2. De lo anterior, obtenemos las ideas que han motivado nuestro enfoque:

1. Identificando la matriz identidad σ_0 con el número real 1, podemos considerar

$$\mathbb{C}^{2 \times 2} = \left\{ a_0 + \sum_{m=1}^3 \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq 3} a_{i_1 \dots i_m} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_m}; a_0, a_{i_1 \dots i_m} \in \mathbb{R} \right\},$$

como un \mathbb{R} -subespacio vectorial del anillo de polinomios reales $\mathbb{R}[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$, en las variables σ_1, σ_2 y σ_3 .

2. En el presente trabajo desarrollamos una alternativa al Álgebra Geométrica desarrollada por Hestenes desde el año 1960. Encontrar, sin recurrir a representaciones matriciales, un modelo unificador para la fundamentación matemática de la física. [7]

1.2. El Álgebra Geométrica AG(3)

Nuestras estructuras matemáticas iniciales, **consideradas simplemente como \mathbb{R} -espacios vectoriales**, serán:

1. El espacio cartesiano tridimensional \mathbb{R}^3 .
2. El anillo de polinomios reales $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3]$, en las variables e_1, e_2 y e_3 .
3. El \mathbb{R} -subespacio vectorial de $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3]$

$$\{a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_{12} + a_5e_{31} + a_6e_{23} + a_7e_{123}; a_j \in \mathbb{R}\},$$

donde, para simplificar, estamos considerando :

$$e_{12} = e_1e_2, \quad e_{31} = e_3e_1, \quad e_{23} = e_2e_3 \quad \text{y} \quad e_{123} = e_1e_2e_3$$

Definición 1.2.1. El Álgebra Geométrica tridimensional será el **\mathbb{R} -espacio vectorial**

$$AG(3) = \{a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_{12} + a_5e_{31} + a_6e_{23} + a_7e_{123}; a_j \in \mathbb{R}\},$$

provisto de un producto, llamado **producto geométrico**, distributivo y asociativo (similar en este aspecto al producto de polinomios) **pero no conmutativo**, el cual los elementos e_i estan sujetos a las **condiciones de Dirac**.

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij} \text{ con } i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.1)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Observación 1.2.2. En el contexto de la definición anterior, al efectuar el producto geométrico, las condiciones de Dirac se explicitan en la siguiente tabla.

	1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{31}	e_{123}
1	1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{23}	e_{31}	e_{123}
e_1	e_1	1	e_{12}	$-e_{31}$	e_2	e_{123}	$-e_3$	e_{23}
e_2	e_2	$-e_{12}$	1	e_{23}	$-e_1$	e_3	e_{123}	e_{31}
e_3	e_3	e_{31}	$-e_{23}$	1	e_{123}	$-e_2$	e_1	e_{12}
e_{12}	e_{12}	$-e_2$	e_1	e_{123}	-1	$-e_{31}$	e_{23}	$-e_3$
e_{23}	e_{23}	e_{123}	$-e_3$	e_2	e_{31}	-1	$-e_{12}$	$-e_1$
e_{31}	e_{31}	e_3	e_{123}	$-e_1$	$-e_{23}$	e_{12}	-1	$-e_2$
e_{123}	e_{123}	e_{23}	e_{31}	e_{12}	$-e_3$	$-e_1$	$-e_2$	-1

Definición 1.2.3. De m -vectores y m -vectores simples.

- Fijado m , con $1 \leq m \leq 3$, y e_{i_m} son vectores; $i_m \in \{1, 2, 3\}$. Un multivector de grado m será llamado m -vector si puede expresarse de la siguiente manera :

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq 3} a_{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \dots e_{i_m}$$

- Cada uno de los sumandos $a_{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \dots e_{i_m}$ es llamado m -vector simple. Todo m -vector puede ser descompuesto como suma finita de m -vectores simples.

Ejemplo 1.2.1.

El vector a es 1-vector y lo podemos expresar como $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$, cada sumando es un 1-vector simple.

La expresión $\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{31} + \beta_3 e_{23}$ se llamado un 2-vector o bivector, y cada uno de los sumandos es un 2-vector simple.

- Los **0-vectores**, como a_0 , serán los escalares.
- Los elementos de $AG(3)$ serán llamados **multivectores**.
- $AG_j(3)$ será llamada el j -espacio vectorial de $AG(3)$.

Donde j del 0 al 3 se tiene :

- $AG_0(3) \cong \mathbb{R}$
- $AG_1(3) = \{a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, a_i \in \mathbb{R}\}$
- $AG_2(3) = \{b_1 e_{12} + b_2 e_{31} + b_3 e_{23}, b_i \in \mathbb{R}\}$
- $AG_3(3) = \{\lambda e_{123}, \lambda \in \mathbb{R}\}$

Se observa que el $AG(3)$ es la suma directa de los j -espacios vectoriales, los cuales demostraremos que son disjuntos.

Es decir $AG(3) = \bigoplus_{j=0}^3 AG_j(3)$

- Los $AG_m(3)$ son \mathbb{R} -subespacios vectoriales de dimensión $\binom{3}{m}$, ($0 \leq m \leq 3$)

Ejemplo $AG_2(3)$ es un \mathbb{R} -subespacio vectorial de dimensión $\binom{3}{2} = 3$.

- Todo elemento M de $AG(3)$ se escribe de manera única como suma de j -vectores:

Definición 1.2.4. El operador **grado** en el $AG(3)$ se define por :

$$\langle \rangle_j : M \in AG(3) \mapsto \langle M \rangle_j \in AG_j(3)$$

$\langle M \rangle_j$ es llamada la j -proyección del multivector M al j -espacio $AG_j(3)$.

$AG_m(3) \equiv \langle AG(3) \rangle_m$, donde $0 \leq m \leq 3$, denotará la familia de m -vectores.

Un multivector A es llamado homogéneo de grado j si $A = \langle A \rangle_j$

Definición 1.2.5. El operador grado j ($\langle \rangle_j$) es un operador lineal es decir,

1. $\langle A + B \rangle_j = \langle A \rangle_j + \langle B \rangle_j$

2. $\langle \alpha A \rangle_j = \alpha \langle A \rangle_j = \langle A \rangle_j \alpha$ si $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Si $a = 2e_1 + e_3$ $b = e_1 + 2e_2$.

Denotamos $e_1e_2 = e_{12}$

$$ab = (2e_1 + e_3)(e_1 + 2e_2) = 2 + 4e_{12} + e_{31} + 2e_{32}$$

$$\langle ab \rangle_0 = 2, \quad \langle ab \rangle_1 = 0 \quad \text{y} \quad \langle ab \rangle_2 = 4e_{12} + e_{31} + 2e_{32}$$

Proposición 1.2.6. *Presentaremos algunos resultados importantes:*

1. *La condición de Dirac es equivalente a las condiciones de Grassmann-Clifford*

$$e_i e_i = 1 \text{ y } e_j e_i = -e_i e_j \text{ donde, } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

2. *De lo anterior es inmediato ver que el producto geométrico es no conmutativo.*

3. *El producto geométrico hereda las propiedades asociativa y distributiva del producto de polinomios.*

4. *El producto geométrico es cerrado en $AG(3)$; es decir,*

$$\text{Si } A \text{ y } B \in AG(3) \implies AB \in AG(3)$$

PRUEBA.- Si A y $B \in AG(3)$, podemos escribir $A = \sum_{i=0}^7 a_i e_i$ y $B = \sum_{i=0}^7 b_i e_i$

Donde denotamos:

$$e_0 = 1, \quad e_4 = e_1 e_2, \quad e_5 = e_3 e_1, \quad e_6 = e_2 e_3 \quad \text{y} \quad e_7 = e_1 e_2 e_3,$$

Cada sumando de un multivector es el producto de los e_i , si al desarrollar el producto AB de forma distributiva y encontramos el producto de 3 o menos vectores e_i podemos ayudarnos con la tabla 1.2, si la cantidad de productos e_i es 4 entonces los 4 vectores son linealmente dependientes es decir por lo menos un vector será combinación lineal de los otros tres, lo cual gracias nuevamente a la tabla este se reduce. Así $AB \in AG(3)$

Detallamos los coeficientes del producto $AB = \sum_{i=0}^7 c_i e_i$.

$$c_0 = a_0 b_0 - a_7 b_7,$$

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 - a_2b_4 + a_3b_6 + a_4b_2 - a_5b_7 - a_6b_3 - a_7b_5, \\
c_2 &= a_0b_2 + a_1b_4 + a_2b_0 - a_3b_5 - a_4b_1 + a_5b_3 - a_6b_7 - a_7b_6, \\
c_3 &= a_0b_3 - a_1b_5 + a_2b_6 + a_3b_0 - a_4b_7 - a_5b_1 - a_6b_2 - a_7b_4 \\
c_4 &= a_0b_4 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_7 + a_4b_0 - a_5b_6 + a_6b_5 + a_7b_3, \\
c_5 &= a_0b_5 - a_1b_3 - a_2b_7 - a_3b_1 + a_4b_6 + a_5b_0 - a_6b_4 - a_7b_2, \\
c_6 &= a_0b_6 + a_1b_7 + a_2b_3 - a_3b_2 - a_4b_5 + a_5b_4 + a_6b_0 + a_7b_1, \\
c_7 &= a_0b_7 + a_1b_6 - a_2b_5 + a_3b_4 + a_4b_3 - a_5b_2 + a_6b_1 + a_7b_0.
\end{aligned}$$

Algunos casos particulares del producto de multivectores:

1. Sea $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ y $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$, vectores, de la tabla tenemos:

$$ab = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12} + (a_3b_1 - a_1b_3)e_{31} + (a_2b_3 - a_3b_2)e_{23} \text{ y}$$

$$ba = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)e_{12} - (a_3b_1 - a_1b_3)e_{31} - (a_2b_3 - a_3b_2)e_{23}.$$

Si sumamos y restamos tales elementos obtenemos :

$$ab + ba = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$ab - ba = 2[(a_1b_2 - a_2b_1)e_{12} + (a_3b_1 - a_1b_3)e_{31} + (a_2b_3 - a_3b_2)e_{23}]$$

Donde la suma $ab + ba$ es un escalar y $ab - ba$ es un bivector.

2. Sea el bivector $B = \beta_1e_{12} + \beta_2e_{31} + \beta_3e_{23}$ y el vector $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$,

Usando la tabla tenemos :

$$aB = (a_3\beta_2 - a_2\beta_1)e_1 + (a_1\beta_1 - a_3\beta_3)e_2 + (a_2\beta_3 - a_1\beta_2)e_3 + (a_1\beta_3 + a_2\beta_2 + a_3\beta_1)e_{123}$$

$$Ba = (a_2\beta_1 - a_3\beta_2)e_1 + (a_3\beta_3 - a_1\beta_1)e_2 + (a_1\beta_2 - a_2\beta_3)e_3 + (a_1\beta_3 + a_2\beta_2 + a_3\beta_1)e_{123}$$

Donde :

$$\begin{aligned}
\langle aB \rangle_3 &= \langle Ba \rangle_3, \quad \langle aB \rangle_1 = -\langle Ba \rangle_1 \\
\frac{aB+Ba}{2} &= (a_1\beta_3 + a_2\beta_2 + a_3\beta_1)e_{123} \in AG_3(3) \\
\frac{aB-Ba}{2} &= (a_3\beta_2 - a_2\beta_1)e_1 + (a_1\beta_1 - a_3\beta_3)e_2 + (a_2\beta_3 - a_1\beta_2)e_3 \in AG_1(3) \\
\langle aB \rangle_1 &= \frac{aB-Ba}{2}, \quad \langle aB \rangle_3 = \frac{aB+Ba}{2}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Del producto de un vector consigo mismo se tiene el siguiente colorario.

Corolario 1.2.7. *De lo anterior, usando la tabla ó la 3-condición de Dirac, resulta:*

1. $AG(3)$ es un álgebra asociativa, distributiva y no conmutativa.

2. Dado el vector $a = \sum_{i=1}^3 a_i e_i$, se tiene :

$$a^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \geq 0 \quad (1.4)$$

3. Dado el bivector $B = b_{12}e_1e_2 + b_{13}e_1e_3 + b_{23}e_2e_3 \in AG_2(3)$ se tiene :

$$B^2 = - \sum_{i<j} b_{ij}^2 \leq 0 \quad (1.5)$$

4. Dado el trivector $T = ce_1e_2e_3 \in AG_3(3)$ se tiene :

$$T^2 = -c^2 \leq 0 \quad (1.6)$$

5. Las variables e_i **son raíces cuadradas de 1.** ($e_i^2 = 1$)

6. Los productos $e_i e_j$ con $i \neq j$ **son raíces cuadradas de -1** es decir : $(e_i e_j)^2 = -1$

7. El producto $e_1 e_2 e_3$ **es raíz cuadrada de -1** $(e_1 e_2 e_3)^2 = -1$

8. $Me_{123} = e_{123}M$, $\forall M \in AG(3)$; es decir, todo multivector conmuta con e_{123} .

El ítem 2 del corolario establece un resultado muy importante: Aquí es bueno dar una interpretación geométrica a cada r – vector, los 1-vectores o vectores se pueden representar como flechas orientadas, los 2-vectores o bivectores se representan como planos orientados, y los trivectores como cubos orientados, sus relaciones entre ellas se pueden ver al rebisar [7]

Proposición 1.2.8. *El producto geométrico de $AG(3)$ induce la métrica euclídeana del \mathbb{R}^3 .*

Observación 1.2.9. *Otros resultados importantes:*

1. El ítem 6 indica que los bivectores canónicos e_{ij} no son escalares, ni vectores. Estos bivectores serán representados geoméricamente como paralelogramos orientados, ortogonales dos a dos, cuyos lados son los vectores e_i y e_j . como indica la figura 1

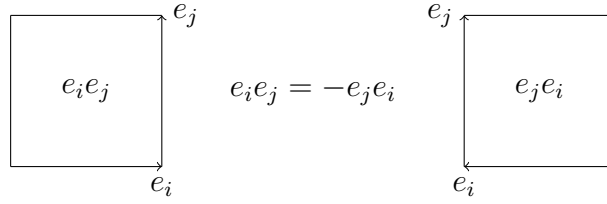


Figura 1.1: Representación de la orientación del bivector $e_i e_j$

2. Los bivectores canónicos e_{12} ; e_{31} ; e_{23} del $AG(3)$ son tomados en ese orden por cuestiones históricas. A la vez matematizan las direcciones que establecen “el criterio de la mano derecha”.
3. El elemento e_{123} es llamado trivector canónico y se representa geoméricamente por el cubo unitario orientado (en concordancia con el criterio anterior).

1.2.1. Resultados y conceptos adicionales

1. La familia $\{1, e_{123}\}$ es linealmente independiente.

PRUEBA.-

Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Con $\alpha + \beta e_{123} = 0$

$\alpha = -\beta e_{123}$; $0 \leq \alpha^2 = (-\beta e_{123})^2 = \beta^2 e_{123}^2 = -\beta^2 \leq 0$, Tomando los extremos llegamos a que : $\alpha = \beta = 0$.

2. Si $A \in AG(3)$ tal que $A = \sum_{i=0}^7 a_i e_i = 0$, entonces $a_i = 0$ para cada $a_i \in \mathbb{R}$.

Donde los : e_4, e_5, e_6 y e_7 son las expresiones son establecidas por : $e_1 e_2, e_3 e_1, e_2 e_3$ y $e_1 e_2 e_3$ respectivamente.

PRUEBA.-

Multiplicando e_1 por izquierda y derecha al multivector nulo A .

Obtenemos $e_1 A e_1 = a_0 + a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3 - a_4 e_{12} - a_5 e_{13} + a_6 e_{23} + a_7 e_{123} = 0$,

sumando la expresión con el multivector A y dividiendo por 2 tenemos el multivector

B . ; $B = a_0 + a_1 e_1 + a_6 e_{23} + a_7 e_{123} = 0$

multiplicando e_2 por izquierda y derecha al multivector B

$$\text{Obtenemos } e_2 B e_2 = a_0 - a_1 e_1 - a_6 e_{23} + a_7 e_{123} = 0,$$

sumando la última expresión con el multivector B y dividiendo por 2 obtenemos :

$$a_0 + a_7 e_{123} = 0 \text{ y del ítem 1 obtenemos : } a_0 = a_7 = 0.$$

La expresión inicial queda reducida en: $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4 + a_5 e_5 + a_6 e_6 = 0$

Multiplicando la expresión por el vector e_1 por ambos extremos y sumando con el resultado reducido se obtiene : $a_1 + a_6 e_7$ y del ítem 1 , $a_1 = a_6 = 0$ Completamos la prueba multiplicando por el vector e_2 , por ambos lados al multivector obtenido.

3. La siguiente familia es una \mathbb{R} -base de $AG(3)$:

$$\{1, e_1, e_2, e_3, e_1 e_2, e_1 e_3, e_2 e_3, e_1 e_2 e_3\}.$$

Del ítem 1 y 2 se tiene la prueba.

Proposición 1.2.10. *Los $AG_i(3)$, son espacios vectoriales disjuntos, para cada i distinto.*

1. *La familia de j -vectores $AG_j(3)$ son \mathbb{R} -subespacios vectoriales del $AG(3)$.*

2. *$i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$ con $i \neq j$, $\implies AG_i(3) \cap AG_j(3) = \emptyset$.*

(el vector nulo es el único elemento común de dos j -espacios vectoriales).

3. *Para $A_j \in AG_j(3)$ se cumple que $\langle A_j \rangle_k = 0$ Si $j \neq k$.*

PRUEBA.- El ítem 3 indica que el j -vector A_j , no tiene k -vectores como sumando componentes, supongamos lo contrario, que el multivector A_j tiene como sumando componente el multivector A_k es decir : $A_j = \sum_{i=1}^j A_i + A_k$ donde $A_i \in AG_i(3)$ y $A_k \in AG_k(3)$ no nulo, por tal $A_j \sum_{i=1}^j A_i = A_k$, como $AG_j(3)$ es un subespacio vectorial tenemos que: $A_k \in \langle AG(3) \rangle_j \cap \langle AG(3) \rangle_k \neq \emptyset$, esto se contradice ya que tales subespacios son disjuntos.

Corolario 1.2.11. *De la definición 1.2.3 y de la proposición anterior tenemos :*

1. *De lo anterior tenemos los isomorfismos como espacios vectoriales.*

$$AG_0(3) \cong \mathbb{R} \quad \text{y} \quad AG_3(3) \cong \mathbb{R} e_{123}$$

*En particular se tiene que **todo trivector es múltiplo de e_{123} .***

2. Existe un isomorfismo natural, como \mathbb{R} -espacios vectoriales entre :

$$AG_1(3) \cong \mathbb{R}^3$$

En lo que sigue identificaremos estos dos \mathbb{R} -espacios vectoriales.

3. $AG_0(3) \oplus AG_2(3)$ es una subálgebra no conmutativa de $AG(3)$. Del ítem 6 del Corolario 1.2.7, identificando $\{e_1e_2, e_3e_1, e_2e_3\}$ con la base de cuaterniones hamiltonianos, se tiene el siguiente isomorfismo natural como subálgebras no conmutativas

$$\mathbb{H} \cong AG_0(3) \oplus AG_2(3).$$

En lo que sigue identificaremos estas dos \mathbb{R} -álgebras no conmutativas. El cual será llamado el álgebra par de $AG(3)$.

4. Las identificaciones realizadas nos permiten escribir las siguientes identidades, como \mathbb{R} -espacios vectoriales,

$$AG(3) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}e_{123} \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3e_{123}) \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}e_{123}.$$

5. También se tiene que $AG_0(3) \oplus AG_3(3)$ es una subálgebra conmutativa de $AG(3)$, del ítem 7 y del Corolario 1.2.7 existe un isomorfismo natural, como subálgebras conmutativas

$$\mathbb{C} \cong AG_0(3) \oplus AG_3(3)$$

Identificando estas dos \mathbb{R} -álgebras conmutativas se puede considerar

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset AG(3), \quad \mathbb{R}^3 \subset AG(3) \text{ y también } \mathbb{H} \subset AG(3).$$

6. De todo lo anterior y la proposición 1.1.1 resulta un isomorfismo natural entre las \mathbb{R} -álgebras $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ y $AG(3)$.

7. Como los $AG_j(3)$, $j = 0, 1, 2, 3$ son \mathbb{R} -subespacios vectoriales de $AG(3)$, de dimensiones 1, 3, 3 y 1 respectivamente, y $AG(3)$ es la suma directa de los subespacios $AG_j(3)$ entonces

$$\dim(AG(3)) = \sum_{j=0}^3 \dim(AG_j(3)) = 8.$$

Definición 1.2.12. *Subálgebra par de $AG(3)$*

1. Llamaremos **subálgebra par** de $AG(3)$ a la combinación lineal de multivectores pares, denotado y definido por :

$$AG^+(3) = AG_0(3) \oplus AG_2(3),$$

También será llamada álgebra de los números complejos tridimensionales.

2. Llamaremos **subálgebra impar** de $AG(3)$ a la combinación lineal de multivectores impares, denotado y definido por :

$$AG^-(3) = AG_1(3) \oplus AG_3(3),$$

Lo hecho hasta ahora nos muestra que $AG(3)$ contiene como subespacio vectorial a \mathbb{R}^3 y como subálgebras a \mathbb{R} , \mathbb{C} y \mathbb{H} .

Definición 1.2.13. *Dados $a, b \in AG_1(3)$*

1. $a \downarrow b = \frac{1}{2}(ab + ba)$.

es llamado **producto interior** de a y b .

2. $a \uparrow b = \frac{1}{2}(ab - ba)$.

es llamado **producto exterior** de a y b .

3. $\|a\| = \sqrt{aa}$ es llamada **longitud** del 1-vector a .

4. $\|a \uparrow b\| = \sqrt{(a \uparrow b)(b \uparrow a)}$ es llamado **área** del 2-vector $a \uparrow b$.

5. $\{u_1, \dots, u_k\}$, $u_k \in AG_1(3)$ será una **familia ortonormal** si cumple la condición de Dirac dos a dos es decir : $u_i u_j + u_j u_i = 2\delta_{ij}$, $i, j \in \{1, \dots, k\}$.

6. a y b son ortogonales si y solo si $a \downarrow b = 0$.

7. a y b son paralelas si y solo si $a \uparrow b = 0$.

Corolario 1.2.14. Sean $a, b, c \in AG_1(3)$ con $a = \sum_{i=1}^3 a_i e_i$ y $b = \sum_{i=1}^3 b_i e_i$.

Tenemos los siguientes resultados.

1. $a \downarrow b = \langle ab \rangle_0 = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \in AG_0(3)$
2. $a \uparrow b = \langle ab \rangle_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (a_i b_j - a_j b_i) e_i e_j \in AG_2(3)$.
3. El producto interior es simétrico $a \downarrow b = b \downarrow a$
4. El producto interior es bilineal. $a \downarrow (b+c) = a \downarrow b + a \downarrow c$ y $(b+c) \downarrow a = b \downarrow a + c \downarrow a$
5. El producto exterior es antisimétrico $a \uparrow b = -b \uparrow a$
6. El producto exterior es bilineal $a \uparrow (b+c) = a \uparrow b + a \uparrow c$, $(b+c) \uparrow a = b \uparrow a + c \uparrow a$
7. El producto exterior es asociativo $a \uparrow (b \uparrow c) = (a \uparrow b) \uparrow c$
8. $ab = a \downarrow b + a \uparrow b$
9. $ab = ba$ si y solo si a es paralelo a b .
10. $ab = -ba$ si y solo si a es ortogonal a b .

PRUEBA.-

1. Del caso particular de la proposición 1.2.6 tenemos que la parte escalar de ab y ba son las mismas, esto se expresa por $\langle ab \rangle_0 = \langle ba \rangle_0$.

$$a \downarrow b = \frac{ab+ba}{2} = \frac{2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)}{2} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \in \mathbb{R}$$

$$a \downarrow b = \left\langle \frac{ab+ba}{2} \right\rangle_0 = \frac{\langle ab \rangle_0 + \langle ba \rangle_0}{2} = \frac{2\langle ab \rangle_0}{2} = \langle ab \rangle_0.$$

2. De la proposición 1.2.6 tenemos que la parte bivectorial de ab y ba son opuestas, esto se expresa por : $\langle ab \rangle_2 = -\langle ba \rangle_2$.

$$a \uparrow b = \frac{ab-ba}{2} = 2 \left[\frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1) e_{12} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_{31} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_{23}}{2} \right] \in AG_2(3)$$

$$a \uparrow b = \left\langle \frac{ab-ba}{2} \right\rangle_2 = \frac{\langle ab \rangle_2 - \langle ba \rangle_2}{2} = \frac{2\langle ab \rangle_2}{2} = \langle ab \rangle_2.$$

Del caso particular para el producto exterior de dos vectores tenemos :

$$a \uparrow b = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} e_{12} - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} e_{31} + \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} e_{23} \quad (1.7)$$

- De la descomposición del producto de ab por $ab = \frac{ab+ba}{2} + \frac{ab-ba}{2}$ y de la definición 1.2.13 tenemos la prueba del ítem 8.
- $ab = ba \Leftrightarrow \frac{1}{2}(ab - ba) = 0 \Leftrightarrow a \uparrow b = 0$, y por el ítem 8, $ab = a \downarrow b$. Multiplicando por izquierda por el vector a , obtenemos: $a^2b = aa \downarrow b$, $b = \alpha a$, donde $\alpha = (\frac{a \downarrow b}{a^2})$ y así tenemos la prueba del ítem 9.

1.2.2. Producto interior y exterior de multivectores homogéneos

A es un multivector homogéneo de grado k , si y solo si $A = \langle A \rangle_k$.

Extendemos las definiciones del producto interior y exterior para multivectores homogéneos. Tales definiciones se podrán ver [?]

Definición 1.2.15. Sean A_j y B_k multivectores homogéneos de grado j y k respectivamente.

1. Llamaremos $\|A_j\|$ la j -magnitud euclídeana del j -vector A_j y lo definimos por:

$$\|A_j\| = \sqrt{|A_j^2|}, \text{ del corolario 1.2.7 tenemos: } |A_j^2| = (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}} A_j^2.$$

2. Al extenderlo a todo $AG(3)$ definimos la **magnitud** euclídeana del multivector A por:

$$\|A\|^2 = \sum_{j=0}^3 \|A_j\|^2 = |A_0^2| + |A_1^2| + |A_2^2| + |A_3^2| = A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2.$$

3. $A_j \downarrow B_k = \langle A_j B_k \rangle_{|j-k|}$ si $j, k \neq 0$. y cero de otro modo.

4. $A_j \uparrow B_k = \langle A_j B_k \rangle_{j+k}$ si $j + k \leq 3$. y cero de otro modo.

5. El producto escalar " \cdot " para los j -vectores A_j, B_j , se define por: $A_j \cdot B_j = \langle A_j B_j \rangle_0$.

6. Diremos que los multivectores A_j y B_k son **ortogonales** si $A_j \downarrow B_k = 0$

7. Diremos que los multivectores A_j y B_k son **colineales** si $A_j \uparrow B_k = 0$

8. Para a vector y A_r un r -vector tenemos: $aA_r = a \downarrow A_r + a \uparrow A_r$.

El ítem 8 puede verse en un inicio como definición, pero tal resultado será probado en el apéndice cuando se defina los r -vectores simples en el álgebra AG_n . Otras propiedades adicionales pueden verse en el libro. [?]

Proposición 1.2.16. Para a, b, c, d, a_i vectores y los multivectores homogéneos A_r, B_s y C_t tenemos:

1. Si $s = 2$ se cumple

$$a \uparrow B_2 = \frac{aB_2 + B_2a}{2}, \quad a \downarrow B_2 = \frac{aB_2 - B_2a}{2}$$

2. $(a \uparrow b) \downarrow (c \uparrow d) = a \downarrow (b \downarrow (c \uparrow d))$.

3. Para a, b, c vectores linealmente independientes existe un $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que :

$$a \uparrow b \uparrow c = \alpha e_{123}.$$

Si $\alpha > 0$, $a \uparrow b \uparrow c$ y e_{123} tienen la misma orientación. Si $\alpha < 0$ la orientación es opuesta.

4. Si M es un multivector $e_{123}M = e_{123} \downarrow M = M \downarrow e_{123}$.

5. $(a_1 \uparrow a_2)(a_3 \uparrow a_4 \uparrow a_5) =$

$$(a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_3 \uparrow a_4 \uparrow a_5) = (a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_3 \uparrow a_4)a_5 - (a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_4 \uparrow a_5)a_3 + (a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_3 \uparrow a_5)a_4.$$

6. $c \downarrow (a \uparrow b) = (c \downarrow a)b - (c \downarrow b)a$

7. $A_r \uparrow e_{123} = 0$, para $r > 0$.

8. $(A_r B_s)C_t = A_r(B_s C_t)$.

9. $A_r \downarrow B_s = (-1)^{r(s-1)} B_s A_r$ para $r \leq s$.

10. $A_r \uparrow B_s = (-1)^{rs} B_s \uparrow A_r$.

11. $A_r \downarrow (B_s \downarrow C_t) = (A_r \uparrow B_s) \downarrow C_t$ para $r + s \leq t$, con $r, s > 0$.

12. $A_r \downarrow (B_s \downarrow C_t) = (A_r \downarrow B_s) \downarrow C_t$ para $r + t \leq s$.

13. $a \downarrow A_r = \frac{1}{2}(aA_r - (-1)^r A_r a) \in \langle AG(3) \rangle_{r-1}$.

14. $a \uparrow A_r = \frac{1}{2}(aA_r + (-1)^r A_r a) \in \langle AG(3) \rangle_{r+1}$ para $r + 1 \leq 3$.

15. Si $A \in AG(3)$ tenemos : $aA = a \downarrow A + a \uparrow A$.

PRUEBA.-

1. Del ítem 3 y 4 en la definición 1.2.15 y de la ecuación 1.3 tenemos :

$$a \downarrow B_2 = \langle aB_2 \rangle_1 = \frac{aB_2 - B_2a}{2}, \quad a \uparrow B_2 = \langle aB_2 \rangle_3 = \frac{aB_2 + B_2a}{2}.$$

2. Sea $B = c \uparrow d$ entonces probemos $(a \uparrow b)B = a \downarrow (b \downarrow B)$.

$$(a \uparrow b)B = \langle a \uparrow bB \rangle_0 = \langle (\frac{ab-ba}{2})B \rangle_0 = \frac{1}{2}(\langle abB - baB \rangle_0) = \frac{1}{2}(\langle abB \rangle_0 - \langle baB \rangle_0)$$

Del la expresión 2.1.15 y al expresar el vector b por componentes $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ obtenemos : $\langle aBb \rangle_0 = \langle baB \rangle_0$. Al remplazar obtenemos :

$$(a \uparrow b)B = \frac{1}{2}(\langle abB \rangle_0 - \langle aBb \rangle_0) = \frac{1}{2}(\langle abB - aBb \rangle_0) = \langle a(\frac{bB-Bb}{2}) \rangle_0 = \langle ab \downarrow B \rangle_0 = a \downarrow (b \downarrow B).$$

3. De la expresión 2.1.15

$$a \uparrow b \uparrow c = a \uparrow (b \uparrow c) \in AG_3(3)$$

Todo elemento de $AG_3(3)$ es un múltiplo de e_{123}

4. Si $M = M_k$ es un k vector homogéneo. Para $k = 0$, cumple directamente.

Para $k = 1$, M_1 es un vector. Si $M_1 = e_i$, con $i \in \{1, 2, 3\}$

$e_{123}e_i = e_1e_2e_3e_i = (-1)^2e_ie_{123}$, esto es válido pues $e_ie_j = -e_je_i$ si $i \neq j$, con $j \in \{1, 2, 3\}$. Entonces para todo vector a , se cumple $e_{123}a = ae_{123}$.

Para $k = 2$ $M_2 = e_ie_j$, con $i \neq j$, con $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$e_{123}e_ie_j = (-1)^2(-1)^2e_ie_je_{123} = e_ie_je_{123}$. De la misma forma cumple para $k = 3$

Para M multivector $e_{123}M = e_{123} \sum_{i=0}^3 M_k = \sum_{i=0}^3 e_{123}M_k = \sum_{i=0}^3 M_k e_{123} = Me_{123}$.

5. Sea $B = a_1 \uparrow a_2 = \beta_1e_{12} + \beta_2e_{31} + \beta_3e_{23}$

Además todo trivector es múltiplo de e_{123} , $a_3 \uparrow a_4 \uparrow a_5 = \alpha e_{123}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_3 \uparrow a_4 \uparrow a_5) = B \downarrow (\alpha e_{123}) = \langle \alpha B e_{123} \rangle_1 = \alpha \langle (\beta_1e_{12} + \beta_2e_{31} + \beta_3e_{23})e_{123} \rangle_1.$$

Al multiplicar el multivector e_{123} a cada componente y tomando la parte vectorial, se obtiene :

$$(a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_3 \uparrow a_4 \uparrow a_5) = -\alpha\beta_1e_3 - \alpha\beta_2e_2 - \alpha\beta_3e_1 \quad (1.8)$$

De otro lado :

$$B \downarrow (a_3 \uparrow a_4)a_5 = \langle (\beta_1e_{12} + \beta_2e_{31} + \beta_3e_{23})(a_3 \uparrow a_4) \rangle_0 a_5$$

Representamos el vector a_3 y a_4 como suma de sus componentes.

$$a_3 = a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 \text{ y } a_4 = a_{41}e_1 + a_{42}e_2 + a_{43}e_3$$

Del producto

$$a_3 \uparrow a_4 = \langle a_3 a_4 \rangle_2 = (a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})e_{12} + (a_{33}a_{41} - a_{31}a_{43})e_{31} + (a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42})e_{23}.$$

Tomando la parte escalar en el producto y teniendo en cuenta que $e_{ij}^2 = -1$ para $i \neq j$.

$$B \downarrow (a_3 \uparrow a_4)a_5 = [-\beta_1(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41}) - \beta_2(a_{33}a_{41} - a_{31}a_{43}) - \beta_3(a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42})]a_5.$$

De forma análoga obtenemos :

$$B \downarrow (a_3 \uparrow a_5)a_4 = [-\beta_1(a_{31}a_{52} - a_{32}a_{51}) - \beta_2(a_{33}a_{51} - a_{31}a_{53}) - \beta_3(a_{32}a_{53} - a_{33}a_{52})]a_4.$$

$$B \downarrow (a_4 \uparrow a_5)a_3 = [-\beta_1(a_{41}a_{52} - a_{42}a_{51}) - \beta_2(a_{43}a_{51} - a_{41}a_{53}) - \beta_3(a_{42}a_{53} - a_{43}a_{52})]a_3.$$

Multiplicando por los vectores $a_5 = a_{51}e_1 + a_{52}e_2 + a_{53}e_3$, a_3 y a_4 .

Haciendo las operaciones para obtener:

$$B \downarrow (a_3 \uparrow a_4)a_5 - B \downarrow (a_3 \uparrow a_5)a_4 + B \downarrow (a_4 \uparrow a_5)a_3 \quad (1.9)$$

Obteniendo la primera componente del vector 1.9.

$$\{[-\beta_1(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41}) - \beta_2(a_{33}a_{41} - a_{31}a_{43}) - \beta_3(a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42})]a_{51} - [-\beta_1(a_{31}a_{52} - a_{32}a_{51}) - \beta_2(a_{33}a_{51} - a_{31}a_{53}) - \beta_3(a_{32}a_{53} - a_{33}a_{52})]a_{41} + [-\beta_1(a_{41}a_{52} - a_{42}a_{51}) - \beta_2(a_{43}a_{51} - a_{41}a_{53}) - \beta_3(a_{42}a_{53} - a_{43}a_{52})]a_{31} + \dots$$

Factorizando los $-\beta_j$, luego haciendo las operaciones, observamos que β_1 y β_2 se eliminan.

$$= \{-\beta_1[(a_{31}a_{42} - a_{32}a_{41})a_{51} - (a_{31}a_{52} - a_{32}a_{51})a_{41} + (a_{41}a_{52} - a_{42}a_{51})a_{31}] - \beta_2[(a_{33}a_{41} - a_{31}a_{43})a_{51} - (a_{33}a_{51} - a_{31}a_{53})a_{41} + (a_{43}a_{51} - a_{41}a_{53})a_{31}] - \beta_3[(a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42})a_{51} - (a_{32}a_{53} - a_{33}a_{52})a_{41} + (a_{42}a_{53} - a_{43}a_{52})a_{31}]\}e_1 + \dots$$

$$-\beta_3[(a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42})a_{51} - (a_{32}a_{53} - a_{33}a_{52})a_{41} + (a_{42}a_{53} - a_{43}a_{52})a_{31}]e_1 + \dots =$$

$$-\beta_3 \begin{bmatrix} a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{32} & a_{42} & a_{43} \\ a_{33} & a_{43} & a_{53} \end{bmatrix} e_1 + \dots$$

La ecuación 1.9 queda simplificada por :

$$-\beta_3 \begin{bmatrix} a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{32} & a_{42} & a_{43} \\ a_{33} & a_{43} & a_{53} \end{bmatrix} e_1 - \beta_2 \begin{bmatrix} a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{32} & a_{42} & a_{43} \\ a_{33} & a_{43} & a_{53} \end{bmatrix} e_2 - \beta_1 \begin{bmatrix} a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{32} & a_{42} & a_{43} \\ a_{33} & a_{43} & a_{53} \end{bmatrix} e_3$$

donde :

$$\alpha = [(a_{32}a_{43} - a_{33}a_{42})a_{51} - (a_{32}a_{53} - a_{33}a_{52})a_{41} + (a_{42}a_{53} - a_{43}a_{52})a_{31}] = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{32} & a_{42} & a_{43} \\ a_{33} & a_{43} & a_{53} \end{bmatrix}$$

Por ende tenemos :

$$B \downarrow (a_3 \uparrow a_4)a_5 - B \downarrow (a_3 \uparrow a_5)a_4 + B \downarrow (a_4 \uparrow a_5)a_3 = -\alpha\beta_1 e_3 - \alpha\beta_2 e_2 - \alpha\beta_3 e_1$$

Por la ecuación 1.8 tenemos el resultado.

6. Del ítem 8 de 1.2.14 se tiene $ab = 2b \downarrow a - ba$

$$\begin{aligned} c(a \uparrow b) &= \frac{1}{2}c(ab - ba) = \frac{1}{2}((ca)b - (cb)a) = \frac{1}{2}((2a \downarrow c - ac)b - (2b \downarrow c - bc)a) = \\ &(a \downarrow c)b - (b \downarrow c)a - \frac{1}{2}(acb - bca) = (a \downarrow c)b - (b \downarrow c)a - \frac{1}{2}(a(cb) - b(ca)) = \\ &(a \downarrow c)b - (b \downarrow c)a - \frac{1}{2}(a(2b \downarrow c - bc) - b(2a \downarrow c - ac)) = 2(a \downarrow c)b - 2(b \downarrow c)a + \frac{1}{2}(ab - ba)c \end{aligned}$$

Tomando los extremos.

$$c(a \uparrow b) = 2(a \downarrow c)b - 2(b \downarrow c)a + (a \uparrow b)c \text{ y de aquí.}$$

$$\frac{1}{2}[c(a \uparrow b) - (a \uparrow b)c] = (a \downarrow c)b - (b \downarrow c)a = (c \downarrow a)b - (c \downarrow b)a$$

Como la segunda expresión es un vector tenemos :

$$\frac{1}{2}[c(a \uparrow b) - (a \uparrow b)c] = c \downarrow (a \uparrow b).$$

Lo que prueba $c \downarrow (a \uparrow b) = (a \downarrow c)b - (b \downarrow c)a = (c \downarrow a)b - (c \downarrow b)a$

Corolario 1.2.17. *Si $b \uparrow c \neq 0$ y $a \downarrow (b \uparrow c) = 0$ entonces el vector a es ortogonal a los vectores b y c .*

PRUEBA.-

Por la proposición 1.2.16 del ítem 6 Se tiene que :

$0 = a \downarrow (b \uparrow c) = (a \downarrow b)c - (a \downarrow c)b \iff (a \downarrow b)c = (a \downarrow c)b$, multiplicando por derecha e izquierda por b , $(a \downarrow b)cb = (a \downarrow c)b^2$ y $(a \downarrow b)bc = (a \downarrow c)b^2$, de donde :

$(a \downarrow b)bc - (a \downarrow b)cb = 0 \iff (a \downarrow b)\left(\frac{bc-cb}{2}\right) \iff (a \downarrow b)(b \uparrow c) = 0$, de la hipótesis $b \uparrow c \neq 0$ se tiene $a \downarrow b = 0$. Por tal a y b son ortogonales.

De manera similar se obtiene que los vectores a y c son ortogonales, esto se logra al multiplicar la expresión $(a \downarrow b)c = (a \downarrow c)b$ por el vector c por izquierda y derecha.

1.2.3. Propiedades de las Subálgebras del $AG(3)$

De la definición 1.2.12 el álgebra par de $AG(3)$ está dado por :

$$AG(3)^+ = \langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 e_{12} + \alpha_3 e_{31} + \alpha_4 e_{23}, \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

1. $\{1, e_{12}, e_{31}, e_{23}\}$ es una base para el $AG(3)^+$ como espacio vectorial.
2. $e_{12}e_{31}=e_{23}$, $e_{23}e_{12}=e_{31}$, $e_{31}e_{23}=e_{12}$
3. $e_{12}e_{31}e_{23} = -1$
4. $AG(3)^+$ es un álgebra cerrada.
5. $\{1, e_{123}\}$ es una base para $\langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_3$.
6. $\langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_3$ es cerrada.
7. $\langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_3$ es un álgebra conmutativa.
8. El álgebra $\langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_3$ es isomorfo a los complejos \mathbb{C}

PRUEBA.-

1. Probemos que $\{1, e_{ij}\}$ es l.i.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta e_{ij} = 0$

$\alpha = -\beta e_{ij}$, $\alpha^2 = (-\beta e_{ij})^2 = -\beta^2 \leq 0$ entonces $\alpha = \beta = 0$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 e_{12} + \alpha_3 e_{31} + \alpha_4 e_{23} = 0$, multiplicamos la expresión por e_1 por derecha e izquierda, se obtiene.

$\alpha_1 - \alpha_2 e_{12} - \alpha_3 e_{31} + \alpha_4 e_{23} = 0$, sumando ambos resultados $\alpha_1 + \alpha_4 e_{23} = 0$,

$\alpha_1 = \alpha_4 = 0$, reemplazando $\alpha_2 e_{12} + \alpha_3 e_{31} = 0$, multiplicando por e_2 por derecha e izquierda $-\alpha_2 e_{12} + \alpha_3 e_{31} = 0$ sumando $\alpha_3 e_{31} = 0$, donde $\alpha_3 = 0$ y por tal $\alpha_2 = 0$

es así que $\{1, e_{12}, e_{31}, e_{23}\}$ es l.i.

Las demás pruebas son directas haciendo uso de la tabla 1.2.

Subálgebra bidimensional $AG[u, v]$

Sean $u, v \in AG_1(3)$ con $u^2 = v^2 = 1$ y $uv = -vu$ se define por $AG[u, v]$ al subálgebra bidimensional de $AG(3)$ generada por los vectores u y v explícitamente.

$$AG[u, v] \equiv \{\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 uv / \alpha_i \in \mathbb{R}\},$$

El Álgebra Geométrica $AG[u, v]$ hereda las propiedades del $AG(3)$ como subálgebra.

Proposición 1.2.18. *Propiedades del $AG[u, v]$ como subálgebra de $AG(3)$.*

1. $(uv)^2 = -1$
2. $\{1, u, v, uv\}$ es una base el espacio vectorial $AG[u, v]$, el cual llamamos base canónica de $AG[u, v]$.
3. $AG[u, v]$ es cerrado.
4. Para los vectores usuales e_1, e_2 y e_3 , tenemos los isomorfismos siguientes.

$$AG[e_1, e_2] \simeq AG[e_3, e_1] \simeq AG[e_2, e_3]$$

5. Los números complejos \mathbb{C} es isomorfo a una subálgebra de $AG[u, v]$.

6. \mathbb{R}^2 es isomorfo a una subálgebra de $AG[u, v]$.

7. $AG[u, v] \cong \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{C}$

PRUEBA.-

1. $(uv)^2 = (uv)(uv) = u(-uv)v = -1$

2. Sea $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que :

$\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 uv = 0$, multiplicando por u , por izquierda y derecha en forma simultánea se obtiene : $\alpha_0 + \alpha_1 u - \alpha_2 v - \alpha_3 uv = 0$, sumando con la primera expresión, $\alpha_0 + \alpha_1 u = 0$, como u es vector y para que la igualdad sea válida $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, reemplazando en la primera expresión y multiplicando por v , tenemos $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, por tal es l.i.

3. Sea $A, B \in AG[u, v]$ tal que $A = \alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 uv$ y $B = \beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 uv$
Multiplicando componente por componente y utilizando el hecho de $u^2 = v^2 = 1$ y $uv = -vu$, se tiene que tal producto $AB \in AG(3)$.

Definición 1.2.1. Sea i_π el bivector unitario ,llamaremos i_π -plano al espacio vectorial definido por :

$$i_\pi = \{a \in AG_1(3) \text{ tal que } a \uparrow i_\pi = 0\}$$

Proposición 1.2.19. Propiedades de vectores pertenecientes en el i_π -plano.

Sean los vectores linealmente independiente $a, b, c \in i_\pi$ -plano, se tiene: .

1. $i_\pi a = -a i_\pi$

2. $a \uparrow b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) i_\pi$

3. $a \uparrow b = [a \downarrow (i_\pi b)] i_\pi$

4. $a \uparrow b \uparrow c = 0$

$$5. a = (a \downarrow u)u + [a \downarrow (ui_\pi)] i_\pi u$$

$$6. \frac{a \uparrow b}{\|a \uparrow b\|} = \pm i_\pi. \text{ Todo bivector en el } i_\pi\text{-plano es múltiplo del bivector } i_\pi.$$

7. Si los vectores a, b, c, d son coplanares entonces se cumple :

$$\frac{a \uparrow b}{\|a \uparrow b\|} = \pm \frac{c \uparrow d}{\|c \uparrow d\|}.$$

PRUEBA.-

1. La prueba de 1 es directa de la definición del producto exterior y del hecho que $a \uparrow i_\pi = 0$.

2. Como i_π es un bivector, entonces sean u, v vectores ortonormales que cumplan $i_\pi = u \uparrow v$ y $i_\pi^2 = -1$.

Como $a, b \in i_\pi$ -plano.

$$a(u \uparrow v) = a \uparrow (u \uparrow v) + a \downarrow (u \uparrow v) = a \downarrow (u \uparrow v)$$

De la propiedad 6 de 1.2.16 se tiene.

$$a(u \uparrow v) = a \downarrow uv - a \downarrow vu. \text{ Multiplacando por } (u \uparrow v) \text{ se tiene } ((u \uparrow v)^2 = -1)$$

$-a = a \downarrow uv(u \uparrow v) - a \downarrow vu(u \uparrow v)$. Del producto geométrico de un vector y un bivector tenemos :

$$-a = a \downarrow uv \downarrow (u \uparrow v) - a \downarrow vu \downarrow (u \uparrow v). \text{ Del ítem 6 de la proposición 2.1.15}$$

$$-a = a \downarrow u[v \downarrow uv - v \downarrow vu] - a \downarrow v[u \downarrow uv - u \downarrow vu] ;$$

$a = a \downarrow v[u \downarrow uv - u \downarrow vu] - a \downarrow u[v \downarrow uv - v \downarrow vu]$, como u, v son ortonormales, la expresión se reduce a :

$$a = a \downarrow uu + a \downarrow vv \tag{1.10}$$

De manera similar obtenemos el vector $b = b \downarrow vv + b \downarrow uu$.

Ahora el producto exterior es : $a \uparrow b = [(a \downarrow u)(b \downarrow v) - (a \downarrow v)(b \downarrow u)]u \uparrow v$.

Tomando los escalares

$$a_1 = a \downarrow u, \quad a_2 = a \downarrow v, \quad b_1 = b \downarrow u, \quad b_2 = b \downarrow v. \text{ Se tiene lo pedido.}$$

La expresión 1.10 nos indica que el vector a puede expresarse como combinación lineal de dos vectores ortonormales pertenecientes al plano.

3. Del producto exterior $a \uparrow b = \left(\frac{ab-ba}{2}\right)(-i_\pi^2) = \left(\frac{ab(-i_\pi)+bai_\pi}{2}\right)i_\pi = \left(\frac{a(i_\pi b)-b(i_\pi a)}{2}\right)i_\pi = \left(\frac{a(i_\pi b)+(i_\pi b)a}{2}\right)i_\pi = a \downarrow (i_\pi b)i_\pi$. Se uso el hecho de $i_\pi^2 = -1$ y $i_\pi a = -i_\pi a$.

4. De 2 o de 3 vemos que el producto exterior $a \uparrow b$ es un multiplo de i_π , es decir $a \uparrow b = \alpha i_\pi$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces $a \uparrow b \uparrow c = (\alpha i_\pi) \uparrow c = \alpha(c \uparrow i_\pi) = 0$, pues $c \in i_\pi$ -plano. Podemos decir que si tres vectores pertenecen a un plano entonces su producto exterior de ellos es nulo.

5. De la expresión 1.10 veamos que el vector $a \downarrow vv$ podemos expresarlo como :

$$a \downarrow vv = [a \downarrow (ui_\pi)]ui_\pi, \text{ esto es v\u00e1lido del hecho que } uv = i_\pi \longleftrightarrow v = ui_\pi.$$

$$\text{As\u00ed podemos expresar : } a = (a \downarrow u)u + [a \downarrow (ui_\pi)]i_\pi u.$$

6. Del \u00edtem 2 tenemos $a \uparrow b = \alpha i_\pi$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{Elevando al cuadrado } (a \uparrow b)^2 = \alpha^2 i_\pi^2; (a \uparrow b)(b \uparrow a) = \alpha^2; |\alpha| = \|a \uparrow b\|.$$

Si $a \uparrow b$ tiene la misma orientaci\u00f3n de i_π entonces $\alpha > 0$ caso contrario $\alpha < 0$.

El producto exterior de dos vectores en el i_π -plano es multiplo del bivector i_π .

7. De 1.10 tenemos que los vectores c, d pueden expresarse como combinacion lineal de los vectores a, b . Donde : $c = \alpha_1 a + \beta_1 b$; $d = \alpha_2 a + \beta_2 b$;, desarrollando el producto exterior.

$$c \uparrow d = (\alpha_1 a + \beta_1 b) \uparrow (\alpha_2 a + \beta_2 b) = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) a \uparrow b. \text{ Tomando las normas.}$$

$$\|c \uparrow d\| = |\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1| \|a \uparrow b\| \text{ ahora tenemos. } \frac{a \uparrow b}{\|a \uparrow b\|} = \pm \frac{c \uparrow d}{\|c \uparrow d\|}.$$

Si los vectores $u, v \in i_\pi$ -plano son l.i entonces podemos expresar :

$$i_\pi - \text{plano} = \{\alpha u + \beta v / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Tal que si $a \in i_\pi$ -plano $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ donde $a = \alpha u + \beta v$ con :

$$\alpha = \frac{(a \downarrow v)(u \downarrow v) - (a \downarrow u)v^2}{\|u \uparrow v\|}, \beta = \frac{(a \downarrow u)(v \downarrow u) - (a \downarrow v)u^2}{\|u \uparrow v\|}.$$

El bivector unitario i_π del i_π -plano puede ser relacionada con la f\u00f3rmula de Euler de la siguiente manera. Sea u, v dos vectores no opuestos unitarios en el i_π -plano y $\theta \in]-\pi, \pi[$ el \u00e1ngulo orientado de u hacia v , el producto geom\u00e9trico determina la relaci\u00f3n algebraico-geom\u00e9trica dado por:

$$uv = e^{\theta i_\pi} = \cos \theta + \sin \theta i_\pi.$$

Capítulo 2

Ángulos entre dos vectores , reflexiones y rotaciones de vectores en el AG(3)

En la última parte del capítulo 1, se vió las propiedades del bivector unitario i_π , este representa el bivector que genera el i_π -plano, ahora veremos que tal bivector puede ser visto como un operador de rotaciones para vectores pertenecientes al i_π -plano.

El bivector unitario i_π como operador rotacional de vectores en el i_π -plano.

Proposición 2.0.1. *Sea $c \in i_\pi$ -plano y sea $b = ci_\pi$ veamos que $b \in i_\pi$ -plano y a la vez tal vector es ortogonal al vector c .*

PRUEBA.- Del producto exterior de un vector por un bivector unitario :

$$b \uparrow i_\pi = \frac{bi_\pi + i_\pi b}{2} = \frac{(ci_\pi)i_\pi + i_\pi(ci_\pi)}{2} = 0. \text{ Lo último del hecho que } c \in i_\pi.$$

De la definición dos vectores son ortogonales si su producto interior es cero.

$$b \downarrow c = \frac{bc + cb}{2} = \frac{(ci_\pi)c + c(ci_\pi)}{2} = 0. \text{ Pues } ci_\pi = -i_\pi c.$$

Corolario 2.0.1. *Si $i_\pi = uv$, donde u, v son vectores ortogonales unitarios entonces se tiene.*

1. $u i_\pi = v$

2. $vi_\pi = -u$
3. $i_\pi u = -v$
4. $i_\pi v = u$
5. $(ui_\pi)i_\pi = -u$
6. $i_\pi^2 = -1$

Las demostraciones son directas de la definición del bivector i_π generador del i_π -plano. Al multiplicar i_π por derecha(izquierda) el vector canónico rota $\frac{\pi}{2}$ en sentido horario(antihorario), i_π^2 puede interpretarse como una doble rotación en sentido antihorario a través de un ángulo π , haciendo cambiar la dirección al vector opuesto, esto proporciona una interpretación geométrica de $i_\pi^2 = -1$, cuando i_π y -1 son ambos considerados como operadores sobre vectores.

Si $a \in i_\pi - \text{plano}$; $a = a_1u + a_2v$ al multiplicarse por i_π queda rotado un ángulo de 90 grados en el plano i_π

$$ai_\pi = (a_1u + a_2v)i_\pi = a_1ui_\pi + a_2vi_\pi = a_1v - a_2u.$$

$$i_\pi a = i_\pi(a_1u + a_2v) = a_1i_\pi u + a_2i_\pi v = -a_1v + a_2u.$$

Al sumar ambos resultados tenemos $ai_\pi + i_\pi a = 0$, a la vez $ai_\pi, (i_\pi a)$ es el vector rotado $\frac{\pi}{2}$ de u hacia v (v hacia u) en forma antihoraria(horario).

De los resultados anteriores una vez ya designado la orientación en el plano $i_\pi - \text{plano}$ por i_π , el producto geométrico de los vectores u, v unitarios ortogonales será : $uv = i_\pi$ ó $uv = -i_\pi$. Si consideramos $uv = i_\pi$ tenemos que $\{u, v\}$ es una base positiva para $AG[u, v]$, si la elección es $uv = -i_\pi$ la base será negativa.

2.1. Definición de ángulos entre vectores.

La definición de ángulo tradicionalmente hace uso de la orientación horario ó antihorario y hace presente la regla de la mano derecha, en el contexto del Álgebra Geométrica no se prescinde de ello, pues estará bien establecida en el orden en que se ubiquen los vectores.

Tomemos algunas consideraciones.

Dado el par u, v , de vectores unitarios en el i_π -plano, con $u + v \neq 0$, denotaremos con $\sphericalangle(u, v)$, el **ángulo orientado** de u hacia v , comprendido dentro del paralelogramo determinado por dichos vectores, y con $\mu(\sphericalangle(u, v))$ su medida en radianes variando en $]-\pi, \pi[$. Si la dirección tomada de u hacia v coincide con el sentido antihorario (horario) consideramos positivo (negativo) respectivamente.

Definición 2.1.1. *Igualdad de ángulo entre vectores.*

Dados los pares ordenados $(a, b), (u, v) \in S^1 \times S^1$, con $a + b \neq 0$ y $u + v \neq 0$, diremos que el ángulo de dos vectores son iguales si se cumple :

$$\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(u, v) \iff ab = uv$$

$$\sphericalangle(a, b) = -\sphericalangle(u, v) \iff ab = vu$$

Podemos extender la definición para vectores no unitarios, tomando el vector unitario contenido en ellos. Es decir para a, b vectores unitarios $\mu(\sphericalangle(a, b)) \equiv \mu(\sphericalangle(\frac{a}{\|a\|}, \frac{b}{\|b\|}))$

Ejemplo 2.1.1. *De la igualdad : $a(\frac{a+b}{|a+b|}) = (\frac{a+b}{|a+b|})b$, de la definición de ángulo entre vectores. tenemos que los ángulos son iguales : $(\frac{a+b}{|a+b|}, b)$ y $(a, \frac{a+b}{|a+b|})$, es decir que :*

$$\mu(\sphericalangle(a, \frac{a+b}{|a+b|})) = \mu(\sphericalangle(\frac{a+b}{|a+b|}, b)) = \frac{1}{2}\mu(\sphericalangle(a, b))$$

Los pares de vectores que forman un mismo ángulo forman una relación de equivalencia.

Proposición 2.1.2. *La relación “ \sim ” definida para pares de vectores por :*

$(u, v) \sim (a, b)$ si y solo si $uv = ab$, es una relación de equivalencia.

La prueba es directa.

Definición 2.1.3. *Dada la relación de equivalencia “ \sim ” entre pares de vectores se define el ángulo entre los vectores a y b que cumplen $a + b \neq 0$ por la clase de equivalencia.*

$$\sphericalangle(a, b) = \{(u, v) / (u, v) \sim (a, b)\}.$$

Tomamos la medida del ángulo orientado por $\mu(\sphericalangle(u, v)) = \mu(\sphericalangle(a, b))$. Definimos el seno y el coseno en el contexto del Álgebra Geométrica.

Definición 2.1.4. Sea a y b vectores l.i pertenecientes en el i_π -plano se define el seno y el coseno del ángulo tomado del vector a hacia b por :

$$\cos \theta = \frac{a \downarrow b}{\|a\| \|b\|}, \text{ y } \text{sen} \theta = -\frac{a \uparrow b}{\|a\| \|b\|} i_\pi.$$

De la definición tenemos que dos ángulos son iguales si y sólo si tienen los mismos senos y cosenos.

Representación polar del producto de vectores.

Para a, b vectores l.i con $\theta = \mu(\angle(a, b))$ el ángulo medido de a hacia b .

Del producto geométrico ab y de la definición del seno y coseno expresamos :

$$ab = a \downarrow b + a \uparrow b = \|a\| \|b\| \cos \theta + \|a\| \|b\| \text{sen} \theta i_\pi = \|a\| \|b\| (\cos \theta + \text{sen} \theta i_\pi)$$

Identificamos $e^{i_\pi \theta} \equiv \cos \theta + i_\pi \text{sen} \theta$, expresamos ab en su forma polar es decir:

$$ab = \|a\| \|b\| e^{i_\pi \theta}$$

El producto geométrico ab depende del módulo de los vectores y de la medida del ángulo que forman al medir de a hacia b .

Si los vectores a y b son vectores unitarios se tiene : $ab = e^{i_\pi \theta}$.

De manera similar podemos obtener el producto $ba = e^{-i_\pi \theta}$.

Si identificamos

$$e^{-i_\pi \theta} \equiv \cos \theta - i_\pi \text{sen} \theta.$$

Tal expresión es la fórmula generalizada de Euler. La expresión $e^{i_\pi \theta}$, es un elemento del $AG(3)$, el cual puede ser vista como un operador de rotaciones para vectores en el i_π -plano.

Proposición 2.1.5. Sean $\sigma_1, \sigma_2 \in \langle AG(3) \rangle_1$ ortonormales tal que $\sigma_1 \sigma_2 = i_\pi$ para $a, u, v \in i_\pi$ - plano vectores l.i tenemos los siguientes resultados:

1. $\alpha = \mu(\angle(\sigma_1, a)) \iff \cos \alpha \sigma_1 + \text{sen} \alpha \sigma_2 = \frac{a}{\|a\|}$
2. $uv = \|u\| \|v\| e^{\theta i_\pi}$ y $vu = \|v\| \|u\| e^{-\theta i_\pi}$ sí y solo sí $\theta = \mu(\angle(u, v)) \in]-\pi, \pi[$
3. Si u, v son vectores unitarios $uv = e^{\mu(\angle(u, v)) i_\pi}$, $v = u e^{\mu(\angle(u, v)) i_\pi}$ y $u = e^{\mu(\angle(u, v)) i_\pi} v$.

El multivector $e^{\mu(\angle(u, v)) i_\pi}$ puede verse como un operador de rotaciones para vectores en el plano.

4. $ue^{\alpha i_\pi} = e^{-\alpha i_\pi}u$ donde $\alpha = \mu(\angle(\sigma_1, u))$.
5. $e^{i_\pi\theta}e^{-i_\pi\theta} = 1$.
6. $(e^{i_\pi\theta})^2 = e^{2i_\pi\theta}$
7. El vector b es perpendicular al i_π -plano si y solo si $bi_\pi = i_\pi b$.

PRUEBA.-

1. Si $\alpha = \mu(\angle(\sigma_1, a))$. De la definición de seno y coseno tenemos :

$$\begin{aligned} \cos\alpha\sigma_1 + \operatorname{sen}\alpha\sigma_2 &= \frac{\sigma_1 \downarrow a}{\|\sigma_1\|\|a\|}\sigma_1 - \frac{\sigma_1 \uparrow a}{\|\sigma_1\|\|a\|}i_\pi\sigma_2 = \frac{1}{\|a\|}[\sigma_1 \downarrow a\sigma_1 - \sigma_1 \uparrow a i_\pi\sigma_2] \\ &= \frac{1}{2\|a\|}[(\sigma_1 a + a\sigma_1)\sigma_1 - (\sigma_1 a - a\sigma_1)\sigma_1] = \frac{1}{2\|a\|}[2a] = \frac{a}{\|a\|}. \end{aligned}$$

2. Utilizaremos el ítem 1 dos veces.

Si $\alpha = \mu(\angle(\sigma_1, u)) \in]-\pi, \pi[$, tenemos $\frac{u}{\|u\|} = \cos\alpha\sigma_1 + \operatorname{sen}\alpha\sigma_2$,

Multiplicando por σ_1 al vector $\frac{u}{\|u\|}$ por derecha e izquierda se tiene respectivamente:

$$\frac{u\sigma_1}{\|u\|} = \cos\alpha - i_\pi\operatorname{sen}\alpha = e^{-\alpha i_\pi}, \quad \frac{\sigma_1 u}{\|u\|} = \cos\alpha + i_\pi\operatorname{sen}\alpha = e^{\alpha i_\pi}.$$

Sea $v \in i_\pi$ -plano y $\beta = \mu(\angle(\sigma_1, v)) \in]-\pi, \pi[$

$$\frac{v}{\|v\|} = \cos\beta\sigma_1 + \operatorname{sen}\beta\sigma_2 \implies \frac{v\sigma_1}{\|v\|} = \cos\beta - i_\pi\operatorname{sen}\beta = e^{-\beta i_\pi} \quad \text{y} \quad \frac{\sigma_1 v}{\|v\|} = e^{\beta i_\pi}$$

De $\sigma_1^2 = 1$; $uv = u\sigma_1\sigma_1v = \|u\|\|v\|e^{-\alpha i_\pi}e^{\beta i_\pi} = \|u\|\|v\|e^{(\beta-\alpha)i_\pi} = \|u\|\|v\|e^{\theta i_\pi}$; análogamente se tiene : $vu = \|v\|\|u\|e^{-\theta i_\pi}$.

No afirmamos que $\theta = \beta - \alpha$ pues no es verdad necesariamente, sino la igualdad sedá en función de sus senos y cosenos.

3. La prueba del ítem 3, se obtiene multiplicando el resultado del ítem 2, por los vectores unitarios u, v .

4. Dado que $u \in i_\pi$ -plano , $ui_\pi = -i_\pi u$.

$$ue^{\alpha i_\pi} = u(\cos\alpha + i_\pi\operatorname{sen}\alpha) = u\cos\alpha + ui_\pi\operatorname{sen}\alpha = u\cos\alpha - i_\pi u\operatorname{sen}\alpha = (\cos\alpha - i_\pi\operatorname{sen}\alpha)u = e^{-\alpha i_\pi}u.$$

La expresión $e^{-i_\pi\theta}u = u e^{i_\pi\theta}$ expresa la rotación del vector u un ángulo θ en el sentido antihorario.

5. La prueba de 5 y 6 es directa al expresar el exponencial por senos y cosenos.

6. Si b es un vector perpendicular al plano, entonces será perpendicular con cualquier vector contenido en el plano, es decir b anticonmuta con cualquier vector del i_π -plano, en particular conmuta con σ_1 y σ_2 .

$$bi_\pi = b\sigma_1\sigma_2 = (-\sigma_1b)\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2b = i_\pi b.$$

Para el caso reciproco. Si $bi_\pi = i_\pi b$, ; $\frac{1}{2}(bi_\pi - i_\pi b) = 0$, $b \downarrow i_\pi = 0$. De la definición de multivectores ortogonales 1.2.15, b es ortogonal al bivector i_π , por ende al i_π -plano.

Proposición 2.1.6. Sean u, v vectores l.i pertenecientes al i_π -plano con $\theta = \mu(\angle(u, v))$.

Si $a \in i_\pi$ -plano entonces $a^\perp = ae^{i_\pi\theta}$ es el vector a rotado un ángulo θ en la medida de u a v .

PRUEBA.-

- Probemos primero que los vectores a^\perp y a tienen la misma longitud.

$$\|a^\perp\|^2 = a^\perp a^\perp = ae^{i_\pi\theta} ae^{i_\pi\theta} = a(e^{i_\pi\theta} a)e^{i_\pi\theta} = a(ae^{-i_\pi\theta})e^{i_\pi\theta} = a^2 = \|a\|^2.$$

- De $\frac{aa^\perp}{\|a\|\|a^\perp\|} = \frac{aae^{i_\pi\theta}}{\|a\|^2} = e^{i_\pi\theta} = \frac{uv}{\|u\|\|v\|}$, de la definición de ángulos entre vectores 2.1.1 se tiene : $\mu(\angle(a, a^\perp)) = \mu(\angle(u, v))$.

- Veamos que $a^\perp \in i_\pi$ -plano.

$$\begin{aligned} a^\perp i_\pi &= ae^{i_\pi\theta} i_\pi = a(\cos\theta + i_\pi \sin\theta) i_\pi = a(\cos\theta i_\pi + i_\pi^2 \sin\theta) = ai_\pi(\cos\theta + i_\pi \sin\theta) = \\ &= -i_\pi a(\cos\theta + i_\pi \sin\theta) = -i_\pi ae^{i_\pi\theta} = -i_\pi a^\perp. \end{aligned}$$

- Entonces diremos que el vector $a^\perp = ae^{i_\pi\theta}$ es el vector a rotado un ángulo θ en la medida de u hacia v .

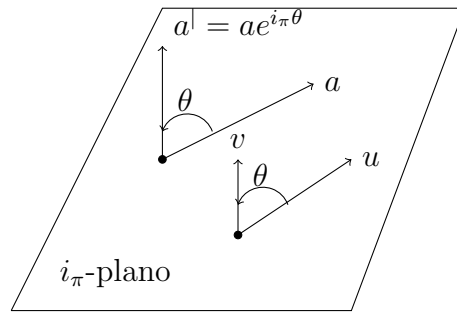


Figura 2.1: Rotación de un vector en el i_π -plano

Corolario 2.1.1. *Sea a un vector en el i_π -plano se tiene :*

$$a^| = ae^{\theta i_\pi} = e^{-\theta i_\pi} a = e^{-\frac{\theta}{2} i_\pi} a e^{\frac{\theta}{2} i_\pi}$$

.

Proposición 2.1.7. *Si b es un vector perpendicular al i_π -plano, entonces $bi = ib$.*

PRUEBA.- *Si b es un vector perpendicular al plano, entonces será perpendicular con cualquier vector contenido en el plano, el cual en el Álgebra Geométrica se resume que el vector b anticonmuta con cualquier vector del plano.*

Sea e_1 y e_2 los vectores ortonormales que forman el bivector i , $i = e_1 e_2$

$$bi = be_1 e_2 = (-e_1 b) e_2 = e_1 e_2 b = ib.$$

2.1.1. Descomposición de un vector sobre otro vector.

Sean a, b vectores linealmente independiente, con $b^2 = 1$ generadores del i_π -plano.

Descomponemos el vector a en dos vectores.

De $ab = a \downarrow b + a \uparrow b$, multiplicando por derecha el vector unitario b obtenemos :

$a = a \downarrow bb + a \uparrow bb$. Los vectores componentes cumplen ciertas propiedades.

Proposición 2.1.8. *Sean a, b vectores linealmente independiente entonces el vector a puede ser descompuestos en dos vectores a_{\parallel} y a_{\perp} , tal que:*

1. a_{\parallel} y a_{\perp} son vectores ortogonales.
2. a_{\parallel} es paralelo al vector b .
3. a_{\perp} es perpendicular al vector b .

PRUEBA.- Observamos que la proposición no exige que el vector b sea unitario.

1. Sea el vector $a = a \downarrow bb + a \uparrow bb$, consideremos : $a_{\parallel} = a \downarrow bb$ y $a_{\perp} = a \uparrow bb$

Probemos que tales vectores son ortogonales si su producto interior es cero.

$$a_{\parallel} \downarrow a_{\perp} = \frac{1}{2} [a_{\parallel} a_{\perp} + a_{\perp} a_{\parallel}] = \frac{1}{2} [a \downarrow bba \uparrow bb + a \uparrow bba \downarrow bb]$$

Teniendo en cuenta que $(a \uparrow b)b = -b(a \uparrow b)$ la expresión anterior es cero.

2. De $a_{\parallel} = a \downarrow bb$, es claro que a_{\parallel} es paralelo al vector b .

3. Para demostrar la perpendicularidad entre los vectores a_{\perp} y b veamos que tales vectores anticonmutan.

$$\begin{aligned} a_{\perp}b &= (a \uparrow bb)b = \left[\left(\frac{ab-ba}{2}\right)b\right] b = \left(\frac{ab^2-bab}{2}\right) b = \left(\frac{b^2a-bab}{2}\right) b = \left[b\left(\frac{ba-ab}{2}\right)\right] b = \left[-b\left(\frac{ab-ba}{2}\right)\right] b = \\ &= -ba \uparrow bb = -b(a \uparrow bb) = -ba_{\perp} \end{aligned}$$

Si los vectores no pertenecen al mismo plano, es posible proyectar uno de ellos al plano que contiene al otro vector y aplicar las propiedades dadas hasta aquí.

2.1.2. Reflexiones y rotaciones de vectores en el AG(3).

Las reflexiones de vectores tienen una forma sencilla y compacta de operar al hacer uso de su producto geométrico. Como lo muestra [9]

Definición 2.1.9. Sea m un vector fijo unitario y π_m el plano ortogonal a m .

Sea a un vector no nulo, se define y se denota la reflexión del vector a respecto al plano π_m por:

$$\rho_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \rho_m(a) = -mam$$

Expresamos dicha reflexión de la forma euclideana, descomponiendo el vector a en sus componentes ya conocidas.

Al descomponer el vector a en los vectores a_{\parallel} y a_{\perp} , donde el vector unitario m es paralelo al vector a_{\parallel} y perpendicular al vector a_{\perp} se tiene:

$$\begin{aligned} \rho_m(a) &= -mam = -m(a_{\parallel} + a_{\perp})m = -ma_{\parallel}m - ma_{\perp}m = -m(a_{\parallel}m) - m(a_{\perp}m) = \\ &= -m(ma_{\parallel}) - m(-ma_{\perp}) = -m^2a_{\parallel} + m^2a_{\perp} = -a_{\parallel} + a_{\perp}. \end{aligned}$$

Observación 2.0.1. En el caso que el vector a es perpendicular al π_m -plano, tenemos : $mam = a$, donde m , es el vector unitario perpendicular al π_m -plano.

Proposición 2.1.10. Toda reflexión es una isometría.

Sea π_m el plano ortogonal al vector unitario m y a un vector no nulo.

$$(\rho_m(a))^2 = \rho_m(a)\rho_m(a) = (-mam)(-mam) = m ammam = ma^2m = a^2$$

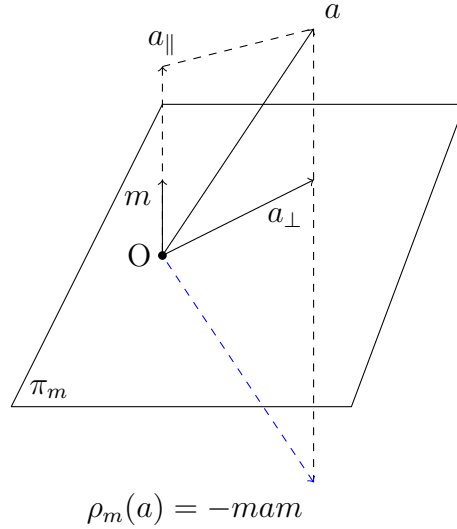


Figura 2.2: Reflexión del vector respecto al plano π_m

Proposición 2.1.11. $\rho_m^{-1} = \rho_m$, pues $\rho_m(\rho_m(a)) = \rho_m(-mam) = -m(-mam)m = a$

Una rotación está dada por una doble reflexión simultanea.

Definición 2.1.12. El giro orientado o rotación de un vector a es el ángulo orientado $2\theta \neq 0$ y está denotado y definido por una doble reflexión $\zeta_{2\theta}(a) = \rho_v(\rho_u(a))$, donde ρ_u y ρ_v son reflexiones simultaneas, donde u, v representan los vectores ortonormales a sus planos respectivos π_u, π_v y $\theta = \mu(\angle(u, v))$

Sea el i -plano generado por los vectores unitarios u y v . La rotación del vector a en el i_π -plano está dado por el vector a^{\parallel} , el cual puede expresarse como una doble reflexión $\rho_v(\rho_u(a))$, que indica que el vector a primero se refleja respecto al plano π_u , con u vector unitario perpendicular a dicho plano, para luego reflejarse respecto al plano π_v con vector unitario v perpendicular a dicho plano.

El ángulo que forman el vector a y su vector rotado a^{\parallel} es el doble del ángulo que forman los vectores u y v .

Teorema 2.1.13. Dado $u, v \in S^1$ linealmente independiente, donde $\theta \in]-\pi, \pi[$ es el ángulo entre ellos. Si $a \in i_\pi$ -plano entonces $\mu(\angle(a, a^{\parallel})) = 2\mu(\angle(u, v))$.

Recíprocamente, todo giro orientado a^{\parallel} se descompone de ese modo, sin unicidad de los vectores unitarios considerados.

PRUEBA.-

Sea π_u, π_v bivectores generadores de planos, u, v sus respectivos vectores unitarios perpendiculares a dichos planos y $\theta = \mu(\angle(u, v))$.

De la definición de la reflexión de vectores y la representación de los productos de vectores en su forma exponencial se tiene por : 2.1.5 $uv = e^{\theta i_\pi}$ y $vu = e^{-\theta i_\pi}$, por tal

$$\text{Si } a^{\parallel} = \rho_v(\rho_u(a)) = vuauv = (vu)a(uv) = e^{-\theta i_\pi} a e^{\theta i_\pi} = (e^{-\theta i_\pi} a) e^{\theta i_\pi} = (a e^{\theta i_\pi}) e^{\theta i_\pi} = a e^{2\theta i_\pi}$$

La última igualdad se dió por el ítem 4 de 2.1.5.

De la proposición 2.1.6 $a e^{\theta i_\pi}$ es el vector a rotado un ángulo θ medido de u hacia v , tal vector cae en el i_π -plano. El vector $a e^{2\theta i_\pi}$ será entonces la rotación del vector a un ángulo 2θ , medido de u hacia v y tal vector cae en i_π -plano.

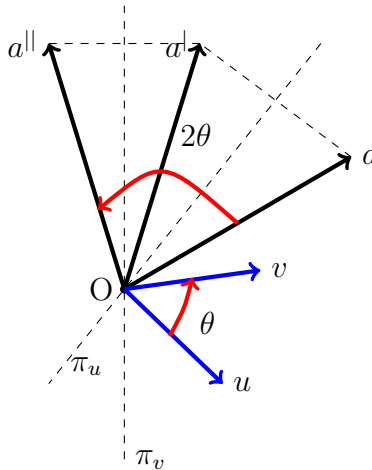


Figura 2.3: Rotación de un vector como una doble reflexión en el plano π_{uv}

Ejemplo 2.1.2. Si $\mu(\angle(u, v)) = 90$, $\rho_v(\rho_u(a)) = vuauv = -a$, multiplicando por derecha e izquierda por el vector unitario v tenemos las siguientes relaciones.

$$v(uau) = -av, \quad (uau)v = -va.$$

Podemos adelantar que todo bivector actúa como un operador de rotaciones de vectores contenidos en el mismo plano del bivector.

2.1.3. Descomposición de un vector respecto a un plano en el $AG(3)$.

Se vió que un bivector unitario genera un plano, ahora veremos que todo vector puede ser descompuesto en dos vectores ortogonales, donde uno de ellos se halla en un plano y el otro perpendicular a dicho plano.

Proposición 2.1.14. *Sea i un bivector unitario que genera el i -plano entonces todo vector a puede descomponerse en dos vectores $a = a_{\parallel} + a_{\perp}$ donde :*

1. $a_{\parallel} \in i$ -plano.

2. $a_{\perp} \perp b$, $\forall b \in -$ plano.

Los vectores a_{\parallel} y a_{\perp} son llamadas proyección y rejeción del i -plano respectivamente .

PRUEBA.- De la expresión $ai = a \downarrow i + a \uparrow i$, despejamos el vector a , multiplicando por derecha por i obtenemos : $ai^2 = a \downarrow ii + a \uparrow ii$.

Defino los vectores $a_{\parallel} = a \downarrow ii$ y $a_{\perp} = a \uparrow ii$.

Probar el ítem 1 equivale a probar que el vector a_{\parallel} anticonmuta con i .

1. Probemos $a_{\parallel} = a \downarrow ii \in i$ -Plano.

$$\begin{aligned} a_{\parallel}i &= (a \downarrow ii)i = \left[\frac{1}{2}(ai - ia)i\right] i = \left[\frac{1}{2}(ai^2 - iai)\right] i = \\ &\left[\frac{1}{2}(i^2a - iai)\right] i = -i \left[\frac{1}{2}(ai - ia)\right] i = -i(a \downarrow i)i = -i a_{\parallel}. \end{aligned}$$

2. Sea $b \in i$ - plano cualquiera probemos que a_{\perp} anticonmuta con b .

Observemos que el trivector $a \uparrow i$ en el $AG(3)$ es multiplo del trivector canónico $e_1e_2e_3$ por ende anticonmuta con cualquier multivector.

$$a_{\perp}b = (a \uparrow ii)b = (a \uparrow i)(ib) = (ib)(a \uparrow i) = (-bi)(a \uparrow i) = -b(a \uparrow ii) = -ba_{\perp}.$$

Se uso la condición $b \in i$ - plano de manera equivalente por : $bi = -ib$.

La prueba también es válida si el bivector i no es unitario, en tal caso se hace el uso del operador inverso, el cual se definirá más adelante como $i^{-1} = -\frac{i}{\|i\|}$.

Si B es un bivector generado por los vectores b y c tal bivector genera un B - plano. Expresamos el un vector a no perteneciente a dicho plano como combinación lineal de los vectores a y b .

De la forma como se halló a_{\parallel} y a_{\perp} el bivector canónico i será reemplazado por el bivector B .

$$a_{\parallel} = [a \downarrow (b \uparrow c)](b \uparrow c) =$$

Del ítem 6 de las propiedades vistas en 1.2.16 se tiene :

$$a_{\parallel} = [a \downarrow bc - a \downarrow cb](b \uparrow c) = a \downarrow b[c(b \uparrow c)] - a \downarrow c[b(b \uparrow c)]$$

$$a \downarrow b[c \downarrow (b \uparrow c)] - a \downarrow c[b \downarrow (b \uparrow c)] = a \downarrow b(c \downarrow bc - c \downarrow cb) - a \downarrow c(b \downarrow bc - b \downarrow cb).$$

Distribuyendo los productor internos y factorizando se tiene :

$$a_{\parallel} = (a \downarrow cb \downarrow c - a \downarrow bc^2)b + (a \downarrow bc \downarrow b - a \downarrow cb^2)c \quad (2.1)$$

Expresamos la componente a_{\perp} , del resultado anterior para el bivector B .

$a_{\perp} = (a \uparrow (b \uparrow c))(b \uparrow c) = (a \uparrow b \uparrow c)(b \uparrow c) = (b \uparrow c)(a \uparrow b \uparrow c)$. Utilizando el resultado del ítem 5 de las propiedades 1.2.16. tenemos :

$$a_{\perp} = (b \uparrow c) \uparrow (a \uparrow b \uparrow c) = (b \uparrow c) \uparrow (a \uparrow b)c - (b \uparrow c) \uparrow (b \uparrow c)a + (b \uparrow c) \uparrow (a \uparrow c)b.$$

Remplazando el vector a por $a_{\parallel} + a_{\perp}$ y el vector a_{\parallel} por 2.1 y despejando el vector a_{\perp} y teniendo en cuenta el cambio de variable para $a \downarrow b = \alpha$, $a \downarrow c = \gamma$ y $n \downarrow c = \beta$.v La ecuación 2.1 se expresa por :

$$a_{\parallel} = (\gamma\beta - \alpha c^2)b + (\alpha\beta - \gamma b^2)c. \quad (2.2)$$

Del ítem 2 del conjunto de propiedades 1.2.16 tenemos :

$$(b \uparrow c) \uparrow (a \uparrow b) = \gamma b^2 - \beta\alpha \text{ y } (b \uparrow c) \downarrow (a \uparrow c) = \gamma\beta - c^2\alpha.$$

Ahora exparamos a_{\perp} en función de lo hallado.

$$a_{\perp} = (\gamma b^2 - \beta\alpha)c - (\beta_2 - c_2 b_2)a + (\gamma\beta - c_2\alpha)b$$

Reemplazando $a = a_{\parallel} + a_{\perp}$ y de 2.2 y despejando a_{\perp} obtenemos :

$$a_{\perp} = \frac{[(\gamma\beta - c^2\alpha) - (\beta^2 - c^2b^2)(\gamma\beta - \alpha c^2)]}{1 + \beta_2 - c^2b^2}b + \frac{[\gamma b^2 - \beta\alpha - (\beta^2 - c^2b^2)(\alpha\beta - \gamma b^2)]}{1 + \beta_2 - c^2b^2}c$$

Proposición 2.1.15. Para un vector a y un bivector i se tiene :

1. $a \downarrow i \in i$ - plano.
2. $a \downarrow i$ es perpendicular al vector a .
3. a_{\parallel} es perpendicular al vector $a \downarrow i$.

PRUEBA.-

1. El vector $a \downarrow i \in i$ -plano , si el vector $a \downarrow i$ anticonmuta con i .

$$(a \downarrow i)i = \frac{1}{2}(ai - ia)i = \frac{1}{2}(i^2a - iai) = -\frac{1}{2}i(ai - ia) = -i(a \downarrow i).$$

2. El vector $a \downarrow i$ es perpendicular al vector a , si los vectores anticonmutan.

$$a(a \downarrow i) = \frac{1}{2}a(ai - ia) = \frac{1}{2}(ia^2 - aia) = -\frac{1}{2}(ai - ia)a = -(a \downarrow i)a$$

3. El vector $a_{\parallel}^{\perp} = a \downarrow i$; conmuta con el vector a_{\parallel} .

$$a_{\parallel}a_{\parallel}^{\perp} = (a \downarrow i)i(a \downarrow i) = (a \downarrow i)[i(a \downarrow i)] = -(a \downarrow i)[(a \downarrow i)i] = -a_{\parallel}^{\perp}a_{\parallel}.$$

En la última igualdad se uso el resultado del ítem 1.

Observe que si el vector a_{\parallel}^{\perp} es nulo, el vector a el ítem 1 y 2 corresponde al teorema de las tres perpediculares estudiado en la geometría euclideana.

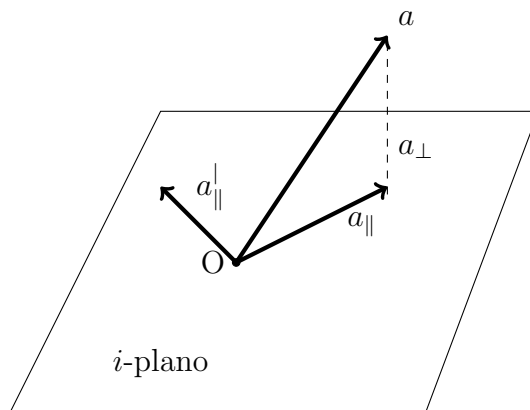


Figura 2.4: El teorema de las tres perpendiculares en el $AG(3)$

Recordamos que la expresión exponencial $e^{i\theta}$ trabajan como operador de rotaciones de vectores en el i - plano. Dado un vector en el $AG_1(3)$, podemos hacer rotar dicho vector, si lo

proyectamos en el i -plano, para luego el vector componente en dicho plano multiplicarlo por el $e^{i\theta}$.

De la definición de giro de un vector 2.1.12 podemos obtener el siguiente teorema.

Teorema 2.1.16. Dado $u, v \in S^1$ linealmente independiente, donde $\theta \in]-\pi, \pi[$ es el ángulo entre ellos. Entonces el vector rotación de a , está dado por:

$$\zeta_{2\theta}(a) = (vu)a(uv) = e^{-i\theta}ae^{i\theta} = a_{\parallel}e^{2i\theta} + a_{\perp}.$$

PRUEBA.-

Como u y v son vectores unitarios, del ítem 2 de la proposición 2.1.5 podemos expresar el producto de ellos como : $uv = e^{i\theta}, vu = e^{-i\theta}$.

A la vez descomponemos el vector a por medio de sus componentes conocidas : a_{\parallel}, a_{\perp} .

$$\zeta_{2\theta}(a) = (vu)a(uv) = e^{-i\theta}ae^{i\theta} = e^{-i\theta}(a_{\parallel} + a_{\perp})e^{i\theta} = (e^{-i\theta}a_{\parallel})e^{i\theta} + e^{-i\theta}(a_{\perp}e^{i\theta})$$

Del hecho que $a_{\parallel} \in i_{\pi}$ -plano y a_{\perp} es ortogonal a dicho plano tenemos por los ítems 3 y 7 de la proposición 2.1.5 la expresión : $\zeta_{2\theta}(a) = a_{\parallel}e^{i\theta}e^{i\theta} + e^{-i\theta}e^{i\theta}a_{\perp} = a_{\parallel}e^{2i\theta} + a_{\perp}$.

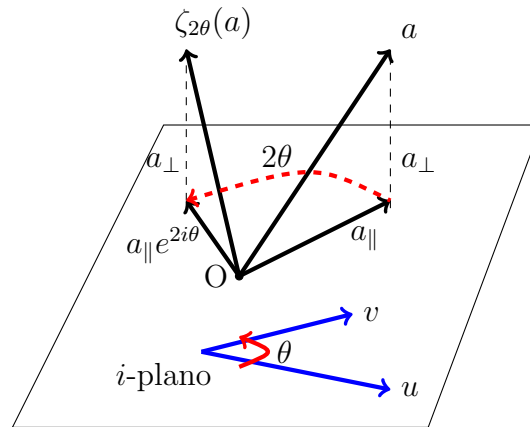


Figura 2.5: Rotación arbitraria de un vector en el $AG(3)$

Capítulo 3

Operadores en el AG(3)

En este capítulo veremos algunos operadores importantes del Álgebra Geométrica el cual facilitarán las manipulaciones algebraicas de los elementos del AG(3) los cuales llevarán consigo en su gran mayoría interpretaciones geométricas en tales relaciones.

3.0.1. El operador dual.

El operador dual " d " puede definirse como el isomorfismo existente entre las álgebras del espacio $AG(3)$ y $e_{123}AG(3)$, donde $e_{123}AG(3) \equiv \sum_{k=0}^3 e_{123}AG_k(3)$.

Definición 3.0.1. *La aplicación $d: A \in AG(3) \longrightarrow d(A) = e_{123}A$ es un isomorfismo y es llamado operador **dualidad geométrica**.*

La representación geométrica del dual de un multivector corresponde al multivector perpendicular asociado.

Proposición 3.0.2. *Si a es un vector y su multivector dual correspondiente $d(a) = ae_{123}$, entonces el vector a es ortogonal al plano generado por el bivector dual $d(a)$.*

PRUEBA.- Si b es un vector en plano generado por $d(a)$, entonces probaremos que a y b son ortogonales. Si $b \downarrow d(a) = 0$; $b \downarrow (e_{123}a) = 0$;

$$\frac{1}{2}(b(e_{123}a) + (e_{123}a)b) = 0$$

Como el trivector e_{123} conmuta con cualquier multivector, en particular con vectores tenemos : $e_{123}(ba + ab) = 0$, lo que implica que los vectores son ortogonales.

Para cada elemento e_i vector canónico observamos que su operador dual encierra la condición de la regla de la mano derecha que es muy utilizado en la física clásica, pero esta vez tal regla estaría ya formalizada.

Hallando el dual de cada elemento canónico.

- $d(e_1) = e_{123}e_1 = e_{23}$
- $d(e_2) = e_{123}e_2 = e_{31}$
- $d(e_3) = e_{123}e_3 = e_{12}$

Observamos que el vector e_1 es ortogonal al plano generado por el bivector e_{23} . Así también en los otros casos.

Proposición 3.0.3. *Propiedades del operador dual.*

Para $A, B \in AG(3)$; a, b vectores y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $d(\alpha A) = -\alpha d(A)$.
2. $d(A + B) = d(A) + d(B)$
3. $d(d(A)) = -A$
4. $e_{123} \langle AG(3) \rangle_k \equiv \langle AG(3) \rangle_{3-k}$
5. $d(A) \downarrow A = 0$
6. $(a \uparrow b)e_{123} = a \downarrow (be_{123})$
7. $(a \downarrow b)e_{123} = a \uparrow (be_{123})$

PRUEBA.-

1. $d(\alpha A) = \alpha e_{123}A = \alpha(e_{123}A) = \alpha d(A)$

2. De la definición del operador dual y la distributividad del álgebra.

$$3. d(d(A)) = d(Ae_{123}) = (Ae_{123})e_{123} = -A$$

4. Probemos que : $e_{123}A_k = e_{123} \downarrow A_k = \langle e_{123}A_k \rangle_{3-k} \in \langle AG(3) \rangle_{3-k}$.

$$\text{Si } A_{3-k} = -e_{123}e_{123}A_{3-k} = -e_{123}e_{123} \downarrow A_{3-k} = -e_{123} \langle e_{123}A_{3-k} \rangle_k \in e_{123} \langle AG(3) \rangle_k.$$

5. Probemos que se cumple para un j-vector es decir : $d(A_j) \downarrow A_j = 0$, luego por linealidad tendremos el resultado para el ítem 5. La expresión $e_{123}A_j$ es de grado $3 - j$, y de la definición del producto interno tenemos :

$$(e_{123}A_j) \downarrow A_j = \langle e_{123}A_j A_j \rangle_{|3-2j|} = \langle e_{123}A_j^2 \rangle_{|3-2j|} = A_j^2 \langle e_{123} \rangle_{|3-2j|} = 0$$

En la prueba se uso el hecho A_j^2 es un escalar, válido de 1.2.7.

Dos multivectores son ortogonales si su producto interior es cero, como caso particular $d(b \uparrow a)$ es ortogonal al plano generado por el bivector $a \uparrow b$.

$$6. (a \uparrow b)e_{123} = \frac{1}{2}(ab - ba)e_{123} = \frac{1}{2}(a(be_{123}) - (be_{123})a) = a \downarrow (be_{123})$$

$$7. (a \downarrow b)e_{123} = \frac{1}{2}(ab + ba)e_{123} = \frac{1}{2}(a(be_{123}) + (be_{123})a) = a \uparrow (be_{123})$$

3.0.2. El Operador Inverso.

A diferencia del álgebra vectorial tradicional donde no existe definición para la inversa de un vector, en el Álgebra Geométrica este operador bien definido facilitará las relaciones entre multivectores y consigo sus interpretaciones geométricas.

Definición 3.0.4. *Un multivector no nulo A tiene inversa si existe otro multivector denotado por A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$*

Dado la existencia de un operador inverso en el álgebra, podemos ahora hacer divisiones entre sus elementos.

Denotamos la división del multivector B entre el multivector A por izquierda o por derecha, de la siguiente manera : $A^{-1}B = \frac{1}{A}B$, $BA^{-1} = B\frac{1}{A}$, pero si B conmuta con A^{-1} lo denotamos por $\frac{B}{A}$.

No todos los multivectores poseen inversa.

Ejemplo 3.0.1. $1 + e_1$ no tiene inversa.

Pues si es el caso debería existir su inverso tal que $(1 + e_1)^{-1}(1 + e_1) = 1$

Al multiplicar por derecha por $1 - e_1$ obtenemos $1 - e_1 = 0$, lo cual es absurdo.

Proposición 3.0.5. *Propiedades del operador inverso.*

Sea a y b vectores no nulos entonces tenemos:

$$1. a^{-1} = \frac{a}{\|a\|^2}, \text{ Si } a \text{ es unitario, } a^{-1} = a.$$

$$2. (a \uparrow b)^{-1} = -\frac{a \uparrow b}{\|a \uparrow b\|^2}$$

$$3. (a \uparrow b \uparrow c)^{-1} = -\frac{a \uparrow b \uparrow c}{\|a \uparrow b \uparrow c\|^2}$$

La prueba es directa de la definición de la magnitud euclidiano de los j-vectores.

En el Álgebra Geométrica obtenemos de manera directa si 3 vectores no nulos son o no son linealmente independiente, esto será sí el producto exterior de los vectores es no nulo los vectores son linealmente independiente, caso contrario son linealmente dependiente.

Teorema 3.0.6. *Sea a_1, a_2, a_3 son linealmente independiente sí y solo sí $a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3 \neq 0$*

PRUEBA.- Probemos el hecho que los vectores son linealmente independiente.

Si $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$, multiplicamos la expresión producto exterior primero por a_2 , luego por a_3 en ese orden, para obtener:

$\alpha_1 a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3 = 0$ como $a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3 \neq 0$ existe su inverso $(a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3)^{-1}$ al hacer el producto geométrico $\alpha_1 = 0$, de manera similar llegamos a: $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Supongamos que $a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3 = 0$, multiplicamos por $a_1 \uparrow a_2$ y usando el item 4 de la proposición 1.2.16 tenemos:

$$(a_1 \uparrow a_2)(a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3) = (a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3) = \\ (a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_1 \uparrow a_2) a_3 - (a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_2 \uparrow a_3) a_1 + (a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_1 \uparrow a_3) a_2 = 0$$

Como los vectores a_1, a_2 y a_3 son linealmente independiente sus coeficientes son ceros.

$(a_1 \uparrow a_2) \downarrow (a_1 \uparrow a_2) = 0 \implies (a_1 \uparrow a_2)^2 = 0 \iff a_1 \uparrow a_2 = 0$, el cual es equivalente a decir que a_1 es paralelo a a_2 , contradicción pues los vectores son linealmente independiente.

Ahora veamos que cualquier producto exterior no nulo de vectores linealmente independiente puede ser expresado por el producto geométrico de vectores ortogonales dos a dos

,así vemos como el Álgebra Geométrica nos ofrece una versión más compacta del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt sobre vectores. Estudiemos el caso para 3 vectores, en el apéndice se dará una prueba para n vectores.

Teorema 3.0.7. *Sea A_k un multivector no nulo, tal que puede expresarse como el producto exterior de k vectores es decir $A_k = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_k$, con $k \in \{1, 2, 3\}$ entonces A_k puede reescribirse como el producto de vectores ortogonales dos a dos.*

Es decir existe $b_1, b_2, \dots, b_k \in \langle AG(3) \rangle_1$ tal que : $A_k = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_k = b_1 b_2 \dots b_k$ con $b_i b_j = -b_j b_i$, para $i \neq j$; $i, j \in \{1, 2, 3\}$

PRUEBA.-

La prueba lo desarrollamos por inducción sobre k

Es claro para $k = 1$.

Sea válido para $k = 2$ (Hipótesis inductiva) y probaremos la validez para $k = 3$.

Si es válido para $k = 2$ entonces existe b_1 y b_2 , ortogonales tales que $a_1 \uparrow a_2 = b_1 b_2$

Probemos ahora para el caso $k = 3$.

Tomemos el vector $b_3 = \{a_3 \uparrow (a_1 \uparrow a_2)\} (a_1 \uparrow a_2)^{-1}$, el vector b_3 así definido es el vector reyección con respecto al plano generado por el bivector $a_1 \uparrow a_2$ esto por 2.1.14.

El vector b_3 es no nulo, caso contrario $a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3 = 0$, se contradice con el supuesto de $A_k \neq 0$. Como b_3 es ortogonal al plano generado por $a_1 \uparrow a_2 = b_1 b_2$ por ende es ortogonal a los vectores b_1 , b_2 .

Además de $a_3 \uparrow (a_1 \uparrow a_2) = (a_1 \uparrow a_2) b_3$, reemplazando la hipótesis tenemos :

$a_3 \uparrow (a_1 \uparrow a_2) = b_1 b_2 b_3$, así tenemos : $A_k = a_1 \uparrow a_2 \uparrow a_3 = b_1 b_2 b_3$

Una definición equivalente a la definición 1.2.3 de un A_r -vector simple, puede expresarse así A_r -vector es simple sí y solo si A_r puede expresarse como el producto geométrico de r vectores ortogonales dos a dos.

Es decir existe $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \in \langle AG(3) \rangle_1$ tal que $A_r = a_1 a_2 \dots a_r$ con $a_i a_j = -a_j a_i$, $i \neq j$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$.

A la vez todo r -vector puede ser descompuesto como la suma de r -vectores simples. Como todo r -vector se puede expresar como el producto exterior de r vectores y del teorema anterior,

tal r -vector puede ser reescrito como el producto geométrico de r vectores ortogonales dos a dos.

Podemos obtener A_r vectores simples a partir de $A_{(3-r)}$ vectores simple, esto se logra de la dualidad.

Proposición 3.0.8. *(Complemento Ortogonal) Si A es un r -bloque ($r \leq 3$), entonces $d(A)$ es un $(3-r)$ -bloque.*

PRUEBA.- Si A_r es un r -bloque entonces $A_r e_{123} = A_r \downarrow e_{123} \in AG_{3-r}(3)$ como es un $(3-r)$ -vector podemos escribirse como el producto geométrico de $(3-r)$ vectores ortogonales dos a dos.

3.0.3. El Operador Reverso.

Un operador muy útil que hace que reviertan los vectores de su producto , es llamado la **reversión** y será definida de la forma siguiente:

Definición 3.0.9. *Si $a_1, a_2, \dots, a_r \in \langle AG(3) \rangle_1$ y el multivector $A_r = a_1 a_2 \dots a_r$, denotamos y definimos el reverso de A_r por $\widetilde{A}_r = a_r \dots a_2 a_1$.*

El reverso del vector a es el mismo vector, $\widetilde{a} = a$.

Proposición 3.0.10. *El reverso es un operador lineal.*

1. Sea A_r un r -vector simple, $\widetilde{A}_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} A_r$.
2. El operador reverso $\widetilde{}$ es lineal .

PRUEBA.-

1. La demostraciones lo haremos por inducción.

Para $k = 1$, de la definición $\widetilde{A}_1 = A_1 = (-1)^{\frac{1(1-1)}{2}} A_1$.

Hipótesis inductiva válido para k , $\widetilde{A}_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} A_k$.

Probemos para el caso $k + 1$, como A_{k+1} es un $(k + 1) - bloque$ entonces lo expresamos como el producto de $k + 1$ vectores ortogonales dos a dos. Es decir existe

$\{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\} \subseteq \langle AG(3) \rangle_1$ tal que $A_{k+1} = a_1 a_2 \dots a_{k+1}$ con $a_i a_j = -a_j a_i$, $i \neq j$
 Para $i, j \in \{1, 2, \dots, (k + 1)\}$ De la definición y de la hipótesis inductiva tenemos

$$\begin{aligned} : \widetilde{A}_{k+1} &= a_{k+1} a_k \dots a_2 a_1 = a_{k+1} (a_k \dots a_2 a_1) = a_{k+1} a_1 \widetilde{a_2 \dots a_k} = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} a_{k+1} a_1 a_2 \dots a_k \\ &= (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} (-1)^k a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} a_1 a_2 \dots a_{k+1} \end{aligned}$$

La última igualdad se dió pues

el vector a_{k+1} anticonmuta con los vectores a_1, a_2, \dots, a_k .

La proposición es válida para un r-vector, pues todo r-vector es la suma finita de r-vectores simples, entonces por linealidad tenemos el resultado.

2. El operador es lineal es decir si $A, B \in AG(3)$ cumple:

a) $\widetilde{(\alpha A)} = \alpha \widetilde{A}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\widetilde{(A + B)} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$.

c) $\widetilde{A} = A_0 + A_1 - A_2 - A_3$. Si $A = \sum_i^3 A_k / A_k$ son los k-vectores.

Como todo multivector es una suma finita de r-vectores, y cada r-vector es la suma finita de r-vectores simples, entonces si la prueba lo hacemos para r-vectores simples, por linealidad tendremos la prueba para multivectores.

Para la prueba de c) usamos la propiedad 3.0.10 en cada sumando de A .

El operador reversión nos permite obtener el inverso de un $r - vector$ y de esta manera podemos dividir multivectores entre multivectores en el Álgebra Geométrica y así obtener una mayor cantidad de operaciones entre sus elementos y con ellos sus interpretaciones geométricas.

Proposición 3.0.11. *Todo r-vector posee inversa, si A_r es un r-vector su inversa está dado*

por $A_r^{-1} = \frac{\widetilde{A}_r}{\|A_r\|^2}$

PRUEBA.- De la propiedad del reverso 3.0.10 y del ítem 1 en la definición 1.2.15 tenemos $\widetilde{A}_r A_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} A_r^2 = \|A_r\|^2$. De aquí $A_r^{-1} = \frac{\widetilde{A}_r}{\|A_r\|^2}$

Ejemplos : $a^{-1} = \frac{\widetilde{a}}{\|a\|^2} = \frac{a}{\|a\|^2}$, si a es unitario $a^{-1} = a$

$(a \uparrow b)^{-1} = \frac{\widetilde{a \uparrow b}}{\|a \uparrow b\|^2} = \frac{-a \uparrow b}{|(a \uparrow b)^2|} = \frac{-a \uparrow b}{-(a \uparrow b)^2} = \frac{a \uparrow b}{(a \uparrow b)^2}$

Si $B = a \uparrow b$ unitario tenemos $B^{-1} = -B$

La inversa del pseudoescalar unitario $e_{123}^{-1} = -e_{123}$

Podemos concluir que si $A \in AG(3)$ es un r -vector simple unitario se cumple $A^{-1} = \widetilde{A}$

Proposición 3.0.12. *Si $A \in AG(3)$ su magnitud puede expresarse de la formar:*

$$\|A\| = \sqrt{\langle \widetilde{A}A \rangle_0}$$

PRUEBA.- Si $A \in AG(3) = \bigoplus \langle AG(3) \rangle_j$ expresamos el multivector A como suma de r - vectores $A = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$ del ítem 2 de la proposición 3.0.10 tenemos : $\widetilde{A} = A_0 + A_1 - A_2 - A_3$.

Tomando la parte escalar del producto $\widetilde{A}A$.

$$\langle \widetilde{A}A \rangle_0 = \langle (A_0 + A_1 - A_2 - A_3)(A_0 + A_1 + A_2 + A_3) \rangle_0 = A_0^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2.$$

En el resultado se tomo en cuenta, que el producto escalar del producto de dos vectores homogeneos de diferentes grados es cero, es decir : $\langle A_r A_l \rangle_0 = 0$ si $r \neq l$ (Los detalles lo vemos en el apéndice), el resultado coincide con la definición de la magnitud del multivector A .

Proposición 3.0.13. *Propiedades del reverso. Si $A, B \in AG(3)$, $A_r \in \langle AG(3) \rangle_r$, $B_s \in$*

$\langle AG(3) \rangle_s$ y $a_i \in \langle AG(3) \rangle_1$ Tenemos:

1. $\langle \widetilde{A} \rangle_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \langle A \rangle_r = \widetilde{\langle A \rangle_r}$

2. $\widetilde{\widetilde{A}} = A$

3. Si A_r r -vector y B_s s -vector entonces $\widetilde{\widetilde{A_r B_s}} = \widetilde{B_s \widetilde{A_r}}$

4. $\widetilde{\widetilde{AB}} = \widetilde{B \widetilde{A}}$

$$5. \langle AB \rangle_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \langle \widetilde{B} \widetilde{A} \rangle_r$$

$$6. \widetilde{a_1 a_2 \dots a_r} = a_r a_{r-1} \dots a_1$$

PRUEBA.- De la proposición 3.0.10 $\widetilde{A}_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} A_r$

$$1. \langle \widetilde{A} \rangle_r = \left\langle \sum_{k=0}^3 \widetilde{A}_k \right\rangle_r = \left\langle \sum_{k=0}^3 (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} A_k \right\rangle_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} A_r = \widetilde{A}_r = \langle \widetilde{A} \rangle_r$$

$$2. \text{ Para } \widetilde{A}_k = (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} A_k, \text{ multiplicando por } (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

tenemos: $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \widetilde{A}_k = A_k$, de la proposición 3.0.10 para \widetilde{A}_k un k-vector y por el ítem 1. $\widetilde{\widetilde{A}}_k = A_k$ y de la linealidad tenemos válido la prueba.

3. La prueba lo desarrollamos por inducción.

caso 1. Si $A_r = a$ un 1-vector $\widetilde{aB}_s = (a \downarrow B_s + a \uparrow B_s) = \widetilde{a \downarrow B_s} + \widetilde{a \uparrow B_s} =$

$$(-1)^{\frac{(s-1)(s-2)}{2}} a \downarrow B_s + (-1)^{\frac{(s+1)s}{2}} a \uparrow B_s =$$

$$(-1)^{\frac{(s-1)(s-2)}{2}} (-1)^{(s-1)} B_s \downarrow a + (-1)^{\frac{(s+1)s}{2}} (-1)^s B_s \uparrow a = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} B_s \downarrow a + (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} B_s \uparrow a$$

$$= (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}} B_s a = \widetilde{B}_s a.$$

De la linealidad tenemos válido para B multivector.

$$\text{Pues } \widetilde{aB} = a \widetilde{\sum_{i=0}^3 B_s} = \sum_{i=0}^3 \widetilde{aB}_s = \sum_{i=0}^3 \widetilde{B}_s a = \sum_{i=0}^3 B_s a = \widetilde{B} a, \text{ en la prueba se uso el caso 1.}$$

$$\widetilde{aB} = \widetilde{B} a \tag{3.1}$$

Hipótesis inductiva consideramos válido para A_h un h-vector simple. $\widetilde{A_h B} = \widetilde{B} \widetilde{A_h}$

Ahora probamos la validez para A_{h+1} , h+1-vector simple

Es decir: sea $A_{h+1} = a_1 a_2 \dots a_{h+1}$, con $a_i a_j = -a_j a_i$

De la ecuación 3.1 y la hipótesis inductiva tenemos :

$$\widetilde{A_{h+1} B_s} = a_1 \widetilde{a_2 \dots a_{h+1} B_s} = a_1 (a_2 \dots a_{h+1} B_s) = a_2 \dots a_{h+1} B_s a_1 = \widetilde{B}_s \widetilde{a_2 \dots a_{h+1} a_1} =$$

$$\widetilde{B}_s a_{h+1} a_h \dots a_2 a_1 = \widetilde{B}_s \widetilde{A_{h+1}}$$

De la linealidad tenemos válido para A_h un r-vector.

4. Del ítem 3 y la linealidad tenemos la prueba.

5. Por el ítem 1 tenemos : $\langle \widetilde{\widetilde{B}} \widetilde{\widetilde{A}} \rangle_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \langle \widetilde{B} \widetilde{A} \rangle_r$, también del ítem 4 tenemos :

$$\langle \widetilde{\widetilde{B}} \widetilde{\widetilde{A}} \rangle_r = \langle \widetilde{\widetilde{A}} \widetilde{\widetilde{B}} \rangle_r = \langle AB \rangle_r. \text{ La última igualdad resulta del ítem 2.}$$

$$\text{Igualando ambos los resultados } \langle AB \rangle_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \langle \widetilde{B} \widetilde{A} \rangle_r$$

$$\text{Tomando } r = 0 \text{ y } A \text{ por } \widetilde{A} \text{ tenemos: } \langle \widetilde{\widetilde{A}} B \rangle_0 = \langle \widetilde{B} \widetilde{A} \rangle_0$$

6. Para cualquier conjunto de vectores a_1, a_2, \dots, a_r tenemos $\widetilde{\widetilde{a_1 a_2 \dots a_r}} = a_r \dots a_2 a_1$

La prueba lo hacemos por inducción

$$\text{Del ítem 4, es válido para 2 vectores, } \widetilde{\widetilde{a_1 a_2}} = \widetilde{a_2 a_1} = a_2 a_1$$

Consideramos válido para h vectores y probemos para h+1 vectores.

Del ítem 4 y de la hipótesis inductiva tenemos :

$$a_1 \widetilde{\widetilde{a_2 \dots a_h a_{h+1}}} = (\widetilde{\widetilde{a_1 a_2 \dots a_h}}) a_{h+1} = \widetilde{\widetilde{a_{h+1}}} (\widetilde{\widetilde{a_1 a_2 \dots a_h}}) = a_{h+1} a_h \dots a_2 a_1.$$

3.0.4. El Operador cruz.

El álgebra vectorial $a \times b$, según lo concebido por J. Willard Gibbs en 1884, sólo es válido en el espacio \mathbb{R}^3 , sin mención a una generalización, además Gibbs intentó generalizar los sistemas de Grassmann y Hamilton con su producto cruz, el desarrollo de la física en la actualidad ha demostrado que tal producto no generaliza tales sistemas, es más en el algunos aspectos el producto cruz produce incoherencias como lo pública Vaz. (Ver Apéndice) . El AG(3) corrige al definir el producto cruz como el dual de un bivector. Como se da en [9]

Definición 3.0.14. *El producto cruz en el AG(3).*

El producto cruz de aXb se define en AG(3) como el dual del bivector $b \uparrow a$ es decir:

$$a \times b = d(b \uparrow a) = e_{123} b \uparrow a = -e_{123} a \uparrow b (\iff a \uparrow b = e_{123} a \times b)$$

De las propiedades del dual 3.0.3, el producto cruz $a \times b$ es ortogonal al plano generado por $a \uparrow b$.

El producto geométrico para dos vectores puede ser descompuesto de la siguiente manera:

$$ab = a \downarrow b + a \uparrow b = a \downarrow b + e_{123} a \times b$$

Si $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$ y $b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$.

Tenemos el producto cruz como combinación lineal de los vectores canónicos.

$$a \times b = e_{123} b \uparrow a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} e_3 - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} e_2 + \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} e_1$$

Si seleccionamos los vectores $\{a, b, a \times b\}$ en ese orden tenemos un sistema que coincide con la regla de la mano derecha.

Ejemplo 3.0.2. *Veamos que lo dicho cumple para los vectores canónicos.*

- Para $\{e_1, e_2, e_1 \times e_2 = e_3\}$
- Para $\{e_1, e_3, e_1 \times e_3 = -e_2\}$
- Para $\{e_2, e_3, e_2 \times e_3 = e_1\}$

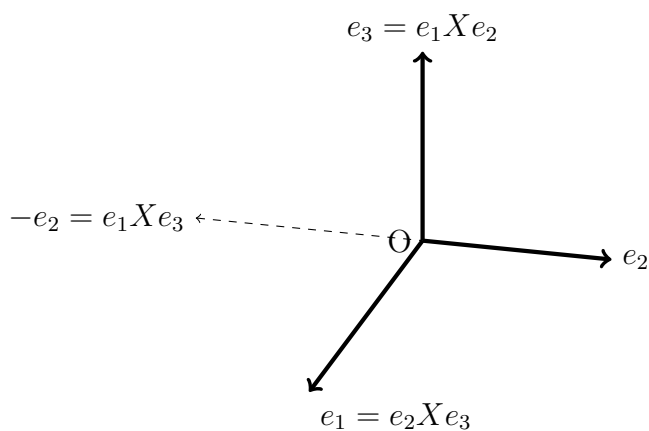


Figura 3.1: El sistema de coordenadas verifica el producto cruz para e_1, e_2 y e_3 .

Para a, b y c vectores linealmente independientes, decimos que el trivector $a \uparrow b \uparrow c$ tienen la misma orientación de e_{123} si $a \uparrow b \uparrow c = \alpha e_{123}$, $\alpha > 0$, en el ejemplo los tres sistemas dados tienen la misma orientación de e_{123} .

Proposición 3.0.15. *Propiedades del producto cruz.*

Sean a, b, c vectores linealmente independientes entonces se cumple :

1. Si a y b son ortogonales entonces el sistema $\{a, b, a \times b\}$ tienen la misma orientación de e_{123}
2. $a \uparrow b \uparrow c = a \uparrow (e_{123}b \times c) = a \downarrow (b \times c)e_{123}$
3. $|a \times b| = |a \wedge b|$
4. $a \downarrow (b \times c) = (a \times b) \downarrow c$

PRUEBA.-

1. Si a y b son ortogonales ($ab = -ba$)

$$ab(a \times b) = ab(d(b \uparrow a)) = ab(e_{123}b \uparrow a) = e_{123}(ab(b \uparrow a)) = \frac{e_{123}}{2}(ab(ba - ab)) = \frac{e_{123}}{2}(a^2b^2 - (ab)(ab)) = e_{123}a^2b^2.$$

En la última igualdad se usó la anticonmutatividad por ser ortogonales, como $a^2b^2 > 0$ entonces el sistema tiene la misma orientación de e_{123} .

2. $a \uparrow b \uparrow c = a \uparrow (b \uparrow c) = a \uparrow (e_{123}b \times c) = a \uparrow (b \times ce_{123}) = a \downarrow (b \times c)e_{123}$ la última igualdad se logra al aplicar el ítem 6 de la proposición 3.0.3, esto indica que el escalar $a \downarrow (b \times c)$ nos da la orientación de $a \uparrow b \uparrow c$. con respecto al trivector unitario e_{123} , si $a \downarrow (b \times c) > 0$ la orientación es positiva, caso contrario tendrá orientación negativa.

3. $|a \times b|^2 = (a \times b)^2 = (-e_{123}a \uparrow b)(-e_{123}a \uparrow b) = -(a \uparrow b)^2 = \|a \uparrow b\|^2$

La magnitud del producto cruz coincide con la magnitud del producto exterior.

4. De la definición del producto cruz y el producto interno

$$\begin{aligned} a \downarrow (b \times c) &= a \downarrow (-e_{123}b \uparrow c) = \frac{1}{2} [a(-e_{123}b \uparrow c) + (-e_{123}b \uparrow c)a] = -e_{123} \frac{1}{2} [a(b \uparrow c) + (b \uparrow c)a] \\ &= -e_{123}a \uparrow (b \uparrow c) = -e_{123}a \uparrow b \uparrow c. \end{aligned}$$

Al proceder en forma similar con la expresión $(a \times b) \downarrow c$ se obtiene $-e_{123}c \uparrow a \uparrow b$ al intercambiar anticonmutativamente los vectores por su producto exterior tenemos la igualdad.

Capítulo 4

Una extensión del cálculo a funciones con valores en $AG(3)$

En esta parte del trabajo presentamos el cálculo integral y diferencial en el contexto del Álgebra Geométrica $AG(3)$. El cálculo geométrico simplifica y unifica la estructura y notación de las matemáticas para la ciencia e ingeniería. En este capítulo veremos que la derivada geométrica será definido de manera natural en forma más generalizada y los conceptos de gradiente, divergencia y rotacional que se estudian de manera independiente en el cálculo vectorial tradicional esta vez serán unificadas con la derivada geométrica, esto a su vez juega un rol importante en la generalización del teorema fundamental del cálculo.

Los conceptos topológicos estudiado en \mathbb{R}^3 son los mismos en el $AG(3)$, tales como son los conjuntos abiertos, cerrados, puntos de acumulación, vecindades, límites, continuidad y otros, pero tendremos en cuenta que la norma $|||$ definida en $AG(3)$ es una extensión de la norma $||$ del \mathbb{R}^3 , el cual determina una única "distancia" $||A - B||$, para los multivectores $A, B \in AG(3)$.

Empecemos extendiendo las funciones a valores multivectoriales de la forma natural.

$$f : p \in \Omega \mapsto f(p) = \sum_I f_I(p) e_I \in AG(3) = \bigoplus_{m=0}^3 \langle AG(3) \rangle_m$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ es un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 y cada $f_I(p) \in \mathbb{R}$

Aquí debe entenderse que $f = \sum_I f_I()e_I$ evaluada en p , tiene la forma explícita.

$$f(p) = f_0(p) + f_1(p)e_1 + f_2(p)e_2 + f_3(p)e_3 + f_{12}(p)e_{12} \\ + f_{31}(p)e_{31} + f_{23}(p)e_{23} + f_{123}(p)e_{123}$$

El primer paso consiste en extender a f , de la manera obvia por medio de las funciones componente f_I , y a la vez redefinir los conceptos tradicionales de límite, continuidad, derivada, integrales etc, en el contexto del Álgebra Geométrica.

El segundo paso en nuestro proceso de generalización será obtener de modo natural el concepto tradicional de hamiltoniano usado comunmente en física en el estudio de la mecánica clásica.

Para ello establecemos :

- El flujo geométrico de funciones con valores multivectoriales como una generalización del concepto físico de flujo, reemplazando la integral de un producto interno por la integral de un producto geométrico.
- El hamiltoniano geométrico de funciones con valores multivectoriales como una generalización del concepto físico de hamiltoniano, reemplazando el cociente con la medida convencional por el cociente con la medida orientada (volumen orientado en el presente caso).

Comencemos precisando algunos conceptos en el contexto euclideo canónico:

4.0.1. Definición de integral y la derivada en el AG(3)

Definición 4.0.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto y $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow AG(3)/f \text{ es de clase } \mathcal{C}^\infty\}$ f es una función de valores multivectoriales, diremos que:

1. La función $f = \sum_I f_I()e_I$ es llamada \mathcal{C}^∞ si cada función coeficiente $f_I \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. $\mathcal{C}^\infty(\Omega, AG(3))$ denotará la familia de funciones multivectoriales \mathcal{C}^∞ .

2. Diremos que f es integrable en cada región $R \subset \Omega$, si cada función coeficiente f_I lo es y pondremos:

$$\int_R f = \sum_I \left(\int_R f_I \right) e_I \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, AG(3))$$

donde: $\int_R f_I = \int_A d\gamma(q) f_I(\gamma(q))$ con $\gamma : A \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \Omega$ ($k = 1, 2$) es una parametrización de R , de clase \mathcal{C}^∞ por partes, que preserva la orientación considerada.

Es importantes respetar el orden indicado en el último integrando.

Explicitamente tenemos

$$\begin{aligned} \int_R f = & \int_R f_0(p) + \int_R f_1(p)e_1 + \int_R f_2(p)e_2 + \int_R f_3(p)e_3 + \int_R f_{12}(p)e_{12} \\ & + \int_R f_{31}(p)e_{31} + \int_R f_{23}(p)e_{23} + \int_R f_{123}(p)e_{123} \end{aligned}$$

Las integrales en el contexto del $AG(3)$ podrán ser definidas en el sentido de la integral de Riemann. Hacemos la aclaración tomando como ejemplo la definición de la integral de superficie.

Sea f una función integrable en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, decimos que la integral de superficie de f sobre la frontera ó superficie de Ω , dado por $\sigma = \text{frontera}(\Omega)$, está dado por el limite y lo denotamos y definimos por:

$$\int_\sigma d\hat{\sigma} f(p) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \Delta\hat{\sigma}_j f(p_j)$$

$$\Delta\hat{\sigma}_j \rightarrow 0$$

La expresión varía del concepto standar por que los sumandos en la sumatoria son productos de áreas orientadas $\Delta\hat{\sigma}_j$ (Bivectores) para cada j que aproximan a la superficie σ . por multivectores $f(p_j) \cdot (\in AG(3))$

Definición 4.0.2. Operadores derivadas en el $AG(3)$

1. El operador derivada parcial.

$$\partial_j : f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, AG(3)) \mapsto \partial_j f = \sum_I (\partial_j f_I) e_I \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, AG(3))$$

donde $1 \leq j \leq 3$, es llamada **operador j-derivada parcial**, en el contexto que corresponda.

2. El operador derivada geométrica.

$$\nabla : f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, AG(3)) \mapsto \nabla f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, AG(3)), \quad \text{donde}$$

$$\nabla f(p) = e_1(\partial_1 f(p)) + e_2(\partial_2 f(p)) + e_3(\partial_3 f(p)) = \sum_{j=1}^3 e_j(\partial_j f(p))$$

∇ es llamada **operador derivada geométrica**.

Es importante tener en cuenta el orden considerado porque los productos se realizan en $AG(3)$.

La expresión ∇f , representa el producto geométrico del vector $\nabla = e_1\partial_1 + e_2\partial_2 + e_3\partial_3$ por el multivector $f = \sum_I f_I e_I$

Los resultados siguientes podemos obtener de manera directa de la definición de ∇

1. El operador ∇ es lineal.
2. El producto de $e_j\partial_j$ con $f_I e_I$, evaluado en p , es el resultado del producto geométrico $e_j(\partial_j f_I(p))e_I$ donde se debe respetar el orden indicado.

Del ítem 15 en la proposición 1.2.16 podemos descomponer el producto $\nabla f(p)$ de manera única por:

$$\nabla f(p) = \nabla \downarrow f(p) + \nabla \uparrow f(p)$$

4.0.2. Operadores clásicos : Gradiente , divergencia y rotacional en el $AG(3)$

Definición 4.0.3. Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \langle AG(3) \rangle_r$

1. Si $\varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar, la derivada φ en p será llamada **gradiente de φ** en p y lo denotamos por : $grad\varphi(p) = \nabla\varphi(p) = e_1\partial_1\varphi(p) + e_2\partial_2\varphi(p) + e_3\partial_3\varphi(p)$, de la definición del producto escalar se tiene $\nabla \downarrow \varphi(p) = 0$ por tal $grad\varphi(p) = \nabla \uparrow \varphi(p)$.
2. Si $V: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo vectorial, la derivada de V en p podrá ser descompuesto en parte escalar y en una 2-parte tal que la parte escalar será llamado **divergencia** del campo vectorial V en p .

El estudio de los conceptos de la divergencia, rotacional, gradiente y otros en el Álgebra Geométrica se presciende de un sistema de referencia, por lo tal el $AG(3)$ es una muy buena herramienta para estudiar los conceptos físico, pero para un primer estudio por ser una metodología práctica empecemos utilizando un sistema de referencia.

Explicitaremos la divergencia, expresando $V(p)$ con respecto a una base del \mathbb{R}^3 .

$$V(p) = v_1(p)e_1 + v_2(p)e_2 + v_3(p)e_3$$

$$\begin{aligned} \nabla V(p) &= e_1\partial_1(v_1(p)e_1 + v_2(p)e_2 + v_3(p)e_3) + e_2\partial_2(v_1(p)e_1 + v_2(p)e_2 + v_3(p)e_3) + \\ &e_3\partial_3(v_1(p)e_1 + v_2(p)e_2 + v_3(p)e_3) = \nabla \downarrow V(p) + \nabla \uparrow V(p) \end{aligned}$$

De este resultado podemos tener la definición de la divergencia para un campo vectorial.

$$divV(p) \equiv \nabla \downarrow V(p) = \partial_1v_1(p) + \partial_2v_2(p) + \partial_3v_3(p)$$

Definimos el **rotacional** del campo vectorial $V(p)$ como el opuesto del dual del bivector y lo denotaremos por $RotV(p)$.

$$\nabla \uparrow V(p) = (\partial_1v_2(p) - \partial_2v_1(p))e_{12} + (\partial_3v_1(p) - \partial_1v_3(p))e_{31} + (\partial_2v_3(p) - \partial_3v_2(p))e_{23}$$

Es decir $RotV(p) \equiv -e_{123}\nabla \uparrow V(p)$, ó expresado por el operador cruz $RotV(p) = \nabla \times V(p)$

$$\text{Por tal: } \nabla V(p) = \nabla \downarrow V(p) + \nabla \uparrow V(p) = divV(p) + e_{123}RotV(p)$$

Observamos que la derivada geométrica puede descomponerse en dos componentes donde una de ellas es la divergencia y la otra el operador rotacional.

Podemos obtener el operador derivada ∇ utilizando matrices, si consideramos el isomorfismo entre $AG(3)$ y el álgebra de matrices (Ver apéndice),de la representación con las matrices de Pauli tenemos :

$$\nabla = e_1\partial_1 + e_2\partial_2 + e_3\partial_3 \longleftrightarrow \sigma_1\partial_1 + \sigma_2\partial_2 + \sigma_3\partial_3 = \begin{pmatrix} \partial_3 & \partial_1 - i\partial_2 \\ \partial_1 + i\partial_2 & -\partial_3 \end{pmatrix}$$

Donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son la base de las matrices de Pauli.

El flujo geométrico y el operador hamiltoniano en el $AG(3)$

Para la definición que daremos a seguir usaremos las convenciones siguientes:

- Dado $p \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, K indicará un cubo orientado, de caras paralelas a los ejes coordenados, centrado en p y contenido en Ω .
- ∂K denotará su frontera de K orientada positivamente (idea de la normal exterior).
- γ indicará una parametrización de ∂K , de clase \mathcal{C}^∞ por partes, que preserve la orientación dada.
- $K = \|K\|e_{123}$ será el volumen orientado de K , donde $\|K\|$ es el volumen usual.

Definición 4.0.4. Dada $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, AG(3))$

1. El **flujo geométrico** de g que atraviesa ∂K está dado por :

$$\mathcal{F}_{\partial K} [g] = \int_{\partial K} d\gamma(q)g(\gamma(q)) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, AG(3))$$

Aquí usamos el ítem 2 de la definición 4.0.1 con $f() = d\gamma()g(\gamma())$ (el orden es importante porque el producto es en $AG(3)$), $d\gamma(q)$ es el bivector que aproxima a la frontera ∂K en el entorno de q .

2. El **hamiltoniano geométrico** de g en $p \in \Omega$ será

$$\mathcal{H} [g] (p) = \lim_{K \rightarrow p} \frac{1}{K} \mathcal{F}_{\partial K} [g] \in AG(3)$$

El siguiente resultado será de fundamental importancia para un proceso de extensión del cálculo euclideo al caso no-euclideo porque establece un modo algebraico equivalente de introducir el concepto de Hamiltoniano y explicita su relación con los conceptos tradicionales de divergencia y rotacional.

Teorema 4.0.5. *El Hamiltoniano geométrico coincide con la derivada geométrica*

$$\mathcal{H} [g] (p) = \sum_{j=1}^3 e_j \partial_j g(p) \equiv \nabla g(p) = \nabla \downarrow g(p) + e_{123} \nabla \times g(p)$$

Donde los productos indicados en la sumatoria son en $AG(3)$. Aquí usamos el producto cruzado en la definición 3.0.14

$$\nabla \uparrow g(p) = e_{123} \nabla \times g(p)$$

PRUEBA.- Empezamos hallando el flujo geométrico de g que atraviesa un cubo pequeño donde p es el centro de tal cubo.

Consideremos un pequeño cubo $K \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ donde Ω es un abierto en \mathbb{R}^3 , por comodidad de cálculo, consideramos los vértices del cubo paralelos a los ejes coordenados e_1, e_2, e_3 y sea Δ_x la magnitud de la arista del cubo.

Sabemos que el flujo de g ($\mathcal{F}_\sigma [g]$) que atraviesa el cubo (las caras del cubo σ) está dado por la suma de los flujos de cada una de sus caras es decir, la suma de 6 flujos.

$$\mathcal{F}_\sigma [g] = \int_\sigma d\gamma(q)g(\gamma(q)) = \sum_{i=1}^6 \int_{\sigma_i} d\gamma_i(q_i)g(\gamma_i(q_i)) \quad (4.1)$$

donde:

- σ es la frontera orientada positivamente de K y γ es una parametrización de σ .
- σ_i :Es la superficie de la i -cara del cubo orientado.(Bivector) $i = 1, 2, \dots, 6$
- $\gamma = \sum_{i=1}^6 \gamma_i$ es la parametrizacion de σ , donde γ_i es la parametrización positiva de la cara σ_i , con $q_i \in \sigma_i$ y $d\gamma_i(q_i)$ es el bivector que aproxima a la superficie σ_i en el entorno q_i .
- Tal bivector será expresado como su vector dual es decir:

$$d\gamma_i(q_i) = \|d\gamma_i(q_i)\| e_i e_{123}, \text{ Aquí } e_i \text{ es la normal saliente de la cara } \sigma_i.$$

$$K = \Delta_x^3 e_{123} \text{ es el cubo orientado.}$$

$$\Delta_x^3 = \|K\| \text{ es el volumen usual .}$$

Como tenemos caras opuestas en un cubo consideramos sus normales por:

$$e_4 = -e_1, \quad e_5 = -e_2, \quad e_6 = -e_3, \text{ las normales opuestas}$$

Al remplazar en 4.1 las consideraciones dadas tenemos:

$$\mathcal{F}_\sigma [g] = \sum_{i=1}^6 \int_{\sigma_i} \|d\gamma_i(q_i)\| e_i e_{123} g(\gamma_i(q_i)) = (\sum_{i=1}^6 \int_{\sigma_i} \|d\gamma_i(q_i)\| e_i g(\gamma_i(q_i))) e_{123} \cong (\sum_{i=1}^6 \Delta_x^2 e_i g(p_i)) e_{123}$$

La aproximación sedá al aplicar el Teorema del valor medio para integrales dobles y como p se tomó como el centro del cubo, consideremos $p_i = p + \frac{\Delta_x}{2} e_i$ como centro de la cara σ_i .

Ejemplo $p_1 = p + \frac{\Delta x}{2} e_1$. $p_4 = p + \frac{\Delta x}{2} e_4 = p - \frac{\Delta x}{2} e_1$

Como Δ_x^2 es constante en cada cara, factorizamos fuera del parentesis y desdoblamos la sumatoria.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\sigma [g] &= \Delta_x^2 \left(\sum_{i=1}^6 e_i g(p_i) \right) e_{123} = \\ \Delta_x^2 [e_1 g(p_1) + e_2 g(p_2) + e_3 g(p_3) - e_1 g(p_4) - e_2 g(p_5) - e_3 g(p_6)] e_{123} &= \\ \Delta_x^2 [e_1 (g(p_1) - g(p_4)) + e_2 (g(p_2) - g(p_5)) + e_3 (g(p_3) - g(p_6))] e_{123} &= \\ \Delta_x^3 \left[e_1 \left(\frac{g(p_1) - g(p_4)}{\Delta_x} \right) + e_2 \left(\frac{g(p_2) - g(p_5)}{\Delta_x} \right) + e_3 \left(\frac{g(p_3) - g(p_6)}{\Delta_x} \right) \right] e_{123} &= \\ K \left[e_1 \left(\frac{g(p + \frac{\Delta x}{2} e_1) - g(p - \frac{\Delta x}{2} e_1)}{\Delta_x} \right) + e_2 \left(\frac{g(p + \frac{\Delta x}{2} e_2) - g(p - \frac{\Delta x}{2} e_2)}{\Delta_x} \right) + e_3 \left(\frac{g(p + \frac{\Delta x}{2} e_3) - g(p - \frac{\Delta x}{2} e_3)}{\Delta_x} \right) \right] \end{aligned}$$

Multiplicando por el trivector K^{-1}

y tomando el límite cuando $\Delta_x \rightarrow 0$ (es equivalente a tomar cuando $K \rightarrow 0$) se tiene:

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}_\sigma [g]}{K} = e_1 \partial_1 g(p) + e_2 \partial_2 g(p) + e_3 \partial_3 g(p) = \sum_{j=1}^3 e_j \partial_j g(p) = \nabla g(p)$$

La expresión $\frac{\mathcal{F}_\sigma [g]}{K}$ es válida ya que K^{-1} conmuta con $\mathcal{F}_\sigma [g]$.

Del operador nabla ∇ considerado como un 1-vector tenemos la descomposición de manera única por: $\nabla g(p) = \nabla \downarrow g(p) + \nabla \uparrow g(p)$.

Lo visto hasta ahora nos muestra que la alternativa de generalización elegida exige desarrollar primero el cálculo integral y posteriormente el cálculo diferencial.

Ahora podemos representar **la derivada geométrica de g en p en \mathbb{R}^3** como el límite de una integral de superficie, es decir:

$$\lim_{k \rightarrow p} \frac{\mathcal{F}_\sigma [g]}{k} = \lim_{k \rightarrow p} \frac{1}{k} \int_\sigma d\hat{\sigma} g(p) = \lim_{k \rightarrow p} \frac{1}{k} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\Delta \hat{\sigma}_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \Delta \hat{\sigma}_j g(p_j) \right)$$

donde k es un entorno de p .

En la nomenclatura de la derivada geométrica es usual denotar ∂ por ∇ .

Si g es una función con argumentos escalares y valores multivectoriales la derivada geométrica coincide con la definición usual del cálculo, es decir:

$$\partial_t g(t) = \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}$$

Luego veremos algunos ejemplos donde la derivada puede ser vista como la aproximación de sumas, pero primero probemos un resultado muy útil para el cálculo, el llamado teorema fundamental del cálculo para el $AG(3)$, en el cual usaremos el hecho que la derivada puede expresarse como el hamiltoniano geométrico.

Teorema 4.0.6. *Teorema fundamental del cálculo en el Álgebra Geométrica AG(3)*

Sea $F:\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow AG(3)$ ($n = 1, 2, 3$) tal que sí existe ∇F en Ω con $\partial\Omega$ como la frontera de Ω entonces : $\int_{\Omega} d^n x \nabla F = \oint_{\partial\Omega} d^{n-1} x F$

Donde: $\oint_{\partial\Omega}$ indica la integral cerrada en torno de $\partial\Omega$.

PRUEBA.-

Como existe la integral $\int_{\Omega} d^n x \nabla F$ hacemos uso de su definición como límite de sumas de Riemann, es decir: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, tal que dado una partición de Ω en m partes ($\Omega = \sum_{i=1}^m \Omega_i$)

(Para $n=3$ Ω_i es un pequeño sólido en el espacio y $\Delta x_i \subseteq \Omega_i$, es un pequeño cubo que lo aproxima, donde consideramos x_i como su centro) Sea $\|\Delta x\| = \max \{\|\Delta x_i\| / i = 1, \dots, m\}$

Si $\|\Delta x\| < \delta_1$ y se cumple $\|\sum_{i=1}^m \Delta x_i \nabla F(x_i) - \int_{\Omega} d^n x \nabla F\| < \varepsilon$, cuando $m \rightarrow \infty$ la cual es resumida por :

$$\lim_{\|\Delta x_i\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m \Delta x_j \nabla F(x_j) = \int_{\Omega} d^n x \nabla F \quad (4.2)$$

Al expresar la derivada geométrica ∇F en x_i por medio del hamiltoniano consideramos un entorno K de x_i tal que $K \longrightarrow x_i$. Para nuestro caso sea $K = \Delta x_i$

$\nabla F(x_i) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow x_i} \frac{1}{\Delta x_i} \oint_{\partial\Omega_i} d^{n-1} x F(x_i)$ donde $\partial\Omega_i$ es la frontera del cubo orientado Δx_i positivamente. En la definición ∇F como límite tomemos $\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\|\Delta x\|^m}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que sí $\|\Delta x_i\| < \delta_2$ para cada i , se tiene : $\|\frac{1}{\Delta x_i} \oint_{\partial\Omega_i} d^{n-1} x F(x_i) - \nabla F(x_i)\| < \hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2\|\Delta x\|^m}$ donde $\partial\Omega_i$ es la frontera de Δx_i , $1 \leq i \leq m$ Aplicando sumatorias para ambos lados de la desigualdad, y utilizando la desigualdad triangular para multivectores ($\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$) tenemos :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{\Delta x_i} \oint_{\partial\Omega_i} d^{n-1} x F - \nabla F(x_i) \right) \right\| &\leq \sum_{i=1}^m \left\| \frac{1}{\Delta x_i} \oint_{\partial\Omega_i} d^{n-1} x F - \nabla F(x_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{2\|\Delta x\|^m} = \frac{\varepsilon}{2\|\Delta x\|} \leq \frac{\varepsilon}{2\|\Delta x_i\|} \end{aligned}$$

Distribuyendo la sumatoria en la primera expresión y multiplicando por $\|\Delta x_i\|$.

$$\left\| \Delta x_i \sum_{i=1}^m \frac{1}{\Delta x_i} \oint_{\partial\Omega_i} d^{n-1} x F(x_i) - \Delta x_i \sum_{i=1}^m \nabla F(x_i) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

El multivector Δx_i multiplica a cada uno de los sumandos y en el primer sumando se cancela.

$$\left\| \sum_{i=1}^m \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{d}^{n-1} \mathbf{x} F(x_i) - \sum_{i=1}^m \Delta x_i \nabla F(x_i) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow \left\| \sum_{i=1}^m \Delta x_i \nabla F(x_i) - \sum_{i=1}^m \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{d}^{n-1} \mathbf{x} F(x_i) \right\| < \varepsilon$$

Tomando $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$ para $m \rightarrow \infty$, de la definición de límite tenemos :

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \Delta x_i \nabla F(x_i) = \sum_{i=1}^m \oint_{\partial\Omega_i} \mathbf{d}^{n-1} \mathbf{x} F = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}^{n-1} \mathbf{x} F \quad (4.3)$$

De las ecuaciones 4.2 y 4.3 obtenemos la igualdad solicitada.

$$\oint_{\Omega} \mathbf{d}^n \mathbf{x} \nabla F = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}^{n-1} \mathbf{x} F$$

La igualdad en la ecuación 4.3 las fronteras de dos regiones adyacentes $\partial\Omega_i$ comparten una frontera común en el cual sus integrales son opuestas que al sumarlas se eliminan.

Visualizamos el caso para $n = 3$.

Hallando la integral sobre la frontera de Ω_k , $\int_{\partial\Omega_k} \mathbf{d}_x^2 F$; donde \mathbf{d}_x^2 es un bivector de magnitud $\|\mathbf{d}_x^2\|$, el cual lo expresamos por su vector dual n_1 ; $n_1 = \frac{\mathbf{d}_x^2}{\|\mathbf{d}_x^2\|} e_{123}$

$$e_{123} \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{d}_x^2 F = \int_{\partial\Omega_k} \mathbf{d}_x^2 e_{123} F = \int_{\partial\Omega_k} n_1 F$$

En forma similar hallamos la integral sobre la frontera $\partial\Omega_{(k-1)}$ y tenemos:

$$e_{123} \int_{\partial\Omega_{(k-1)}} \mathbf{d}_x^2 F = \int_{\partial\Omega_{(k-1)}} n_2 F, \text{ donde } n_2 \text{ es el vector unitario ortogonal a la frontera } \partial\Omega_{(k-1)}$$

como $n_2 = -n_1$, tenemos $\int_{\partial\Omega_k} \mathbf{d}_x^2 F + \int_{\partial\Omega_{(k-1)}} \mathbf{d}_x^2 F = 0$

Esto será en todas las fronteras interiores, por lo cual tenemos el resultado deseado.

Casos particulares del teorema fundamental del cálculo.

Los casos particulares del teorema fundamental tiene muchas formas diferentes el cual nosotros consideramos.

Para n=3 Sea $F:\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow AG(3)$ tal que si existe ∇F en Ω con $\partial\Omega$ como la frontera de Ω entonces :

$$\int_{\Omega} \mathbf{d}^3\mathbf{x} \nabla F = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}^2\mathbf{x} F \quad (4.4)$$

El trivector $\mathbf{d}^3\mathbf{x} = e_{123} \|\mathbf{d}^3\mathbf{x}\|$ y el bivector $\mathbf{d}^2\mathbf{x} = e_{123}n \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\|$, donde n es el vector ortogonal al bivector $\mathbf{d}^2\mathbf{x}$, reemplazando en la ecuación 4.4 eliminamos el pseudoescalar, por lo cual resulta.

$$\int_{\Omega} \|\mathbf{d}^3\mathbf{x}\| \nabla F = \oint_{\partial\Omega} n \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| F$$

Para un campo escalar $\varphi = \varphi(x)$ tenemos la fórmula del gradiente. $\int_{\Omega} \|\mathbf{d}^3\mathbf{x}\| \nabla \varphi = \oint_{\partial\Omega} n \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| \varphi$

La aplicación del teorema fundamental para funciones $F = V = V(x)$ con valores vectoriales llamaremos teorema de Gauss.

Si descomponemos $\nabla V = \nabla \downarrow V + e_{123} \nabla \times V$ y al reemplazarlo en el teorema fundamental del cálculo y separando como una parte escalar y una 2-parte, tenemos el teorema de la divergencia y el teorema del rotacional por separado respectivamente.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\mathbf{d}^3\mathbf{x}\| \nabla V &= \oint_{\partial\Omega} n \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| V \iff \\ \int_{\Omega} \|\mathbf{d}^3\mathbf{x}\| \nabla \downarrow V + e_{123} \int_{\Omega} \|\mathbf{d}^3\mathbf{x}\| \nabla \times V &= \oint_{\partial\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| n \downarrow V + e_{123} \oint_{\partial\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| n \times V \iff \\ \int_{\Omega} \|\mathbf{d}^3\mathbf{x}\| \nabla \downarrow V &= \oint_{\partial\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| n \downarrow V \quad y \quad \int_{\Omega} \|\mathbf{d}^3\mathbf{x}\| \nabla \times V = \oint_{\partial\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| n \times V \end{aligned}$$

Para n=2 Sea $F:\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow AG(3)$ tal que si existe ∇F en Ω (superficie en \mathbb{R}^2) con $\partial\Omega$ como la frontera de Ω entonces :

$$\int_{\Omega} \mathbf{d}^2\mathbf{x} \nabla F = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}^1\mathbf{x} F$$

Escribimos $\mathbf{d}^2\mathbf{x} = -e_{123}n \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\|$ y $\mathbf{d}^1\mathbf{x} = \mathbf{dx}$, donde n es el vector normal a la superficie tenemos $n \downarrow \nabla = 0$, para n unitario $\nabla = nn \nabla = nn \downarrow \nabla + nn \uparrow \nabla = nn \uparrow \nabla$ tomando extremos.

$\nabla = nn \uparrow \nabla = (ne_{123})n \times \nabla$ lo último de la definición del producto cruz.

$\mathbf{d}^2\mathbf{x} \nabla = \mathbf{d}^2\mathbf{x} (ne_{123})n \times \nabla = \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| n \times \nabla$ Reemplazando en el teorema fundamental

$\int_{\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| n \times \nabla F = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{dx} F$, tal fórmula es llamada teorema de Stokes.

Para un campo vectorial $F = V$ separamos la fórmula en una parte escalar y una 2-parte.

$$\int_{\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| n \times \nabla V = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}\mathbf{x} V \iff \int_{\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| (n \times \nabla) \downarrow V + \int_{\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| (n \times \nabla) \uparrow V =$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}\mathbf{x} \downarrow V + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}\mathbf{x} \uparrow V \iff \left(\int_{\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| (n \times \nabla) \downarrow V = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}\mathbf{x} \downarrow V \right) \uparrow \left(\int_{\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| (n \times \nabla) \uparrow V = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}\mathbf{x} \uparrow V \right)$$

Del ítem 4 de las propiedades del producto cruz proposición 3.0.15 obtenemos :

$$\int_{\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| n \downarrow (\nabla \times V) = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}\mathbf{x} \downarrow V \quad (4.5)$$

$$\int_{\Omega} \|\mathbf{d}^2\mathbf{x}\| (n \times \nabla) \times V = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}\mathbf{x} \mathbf{X} V \quad (4.6)$$

La expresión 4.6 es conocido en el álgebra vectorial como el teorema de Stokes, pero en el $AG(3)$ tenemos una expresión adicional 4.5.

Para $\mathbf{n}=\mathbf{1}$ Sea $F:\Omega \subseteq \mathbb{R}^1 \rightarrow AG(3)$ tal que si existe ∇F en Ω con $\partial\Omega$ como la frontera de Ω entonces :

$$\int_{\Omega} \mathbf{d}^1\mathbf{x} \nabla F = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}^0\mathbf{x} F$$

Sean los puntos extremos de Ω , a y b y escribimos $\mathbf{d}^1\mathbf{x} = \mathbf{d}\mathbf{x} = e |\mathbf{d}\mathbf{x}|$ y $\nabla = ee \downarrow \nabla$

luego $\mathbf{d}^1\mathbf{x} \nabla = |\mathbf{d}\mathbf{x}| e \downarrow \nabla = \mathbf{d}\mathbf{x} \downarrow \nabla$.

Remplazando en el teorema fundamental obtenemos :

$$\int_{\Omega} \mathbf{d}\mathbf{x} \downarrow \nabla = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{d}F = F(b) - F(a).$$

La derivada como una aproximación de sumas.

En la prueba del teorema 4.0.5 se aproximó la derivada como la suma de seis caras de un pequeño cubo descrito por los bivectores $\Delta \hat{\sigma}_j$ con centros en p_j . En el desarrollo de cálculos de derivadas podemos aproximar la derivada geométrica de g en p por:

$$\nabla g(p) \simeq \frac{1}{K} \sum_{j=1}^6 \Delta \hat{\sigma}_j g(p_j) = \sum_{j=1}^6 \left(\frac{1}{K} \Delta \hat{\sigma}_j \right) g(p_j),$$

Como todo bivector puede ser representado como el dual de un vector tenemos que:
 $\Delta \hat{\sigma}_j = e_{123} \Delta a_j$, donde el vector Δa_j es ortogonal al $\Delta \hat{\sigma}_j$ -plano, al reemplazar tenemos :

$$\nabla g(p) \simeq \sum_{j=1}^6 \left(\frac{1}{\|K\| e_{123}} e_{123} \Delta a_j \right) g(p_j) = \sum_{j=1}^6 \left(\frac{1}{\|K\|} \Delta a_j \right) g(p_j) = \frac{1}{\|K\|} \sum_{j=1}^6 \Delta a_j g(p_j) \quad (4.7)$$

Parte Par e Impar de la derivada geométrica

La expresión 4.7 muestra la derivada como una suma simple de seis productos similares y como la derivada ∇ se comporta como un vector, esta descompuesta de forma única por:

$$\nabla g(p) = \nabla \downarrow g(p) + \nabla \uparrow g(p)$$

Donde :

$$\nabla \downarrow g(p) \simeq \sum_{j=1}^6 \left(\frac{1}{K} \Delta \sigma_j \right) \downarrow g(p_j) = \frac{1}{\|K\|} \sum_{j=1}^6 \Delta a_j \downarrow g(p_j)$$

^

$$\nabla \uparrow g(p) \simeq \sum_{j=1}^6 \left(\frac{1}{K} \Delta \sigma_j \right) \uparrow g(p_j) = \frac{1}{\|K\|} \sum_{j=1}^6 \Delta a_j \uparrow g(p_j)$$

Si g es una función vectorial, obtengamos de forma explicita el rotacional. $\nabla \times g(p)$.

$$\text{Como } \nabla \times g(p) = -e_{123}(\nabla \uparrow g(p)) \simeq -e_{123} \frac{1}{\|K\|} \sum_{j=1}^6 \Delta a_j \uparrow g(p_j) = \frac{1}{\|K\|} \sum_{j=1}^6 \Delta a_j \times g(p_j)$$

Una expresión más familiar para el producto "×" se establece por:

$$\nabla \times g(p) = -e_{123}(\nabla \uparrow g(p)) \simeq -e_{123} \sum_{j=1}^6 \left(\frac{1}{e_{123} \|K\|} \Delta \hat{\sigma}_j \right) \uparrow g(p_j)$$

Descomponiendo el bivector por el vector $\Delta \hat{\sigma}_j \uparrow g(p_j)$ en el $AG(3)$ tenemos :

$$\nabla \times g(p) \cong \frac{-e_{123}}{\|K\|} \sum_{j=1}^6 \left[\frac{(\frac{\Delta \hat{\sigma}_j}{e_{123}})g(p_j) - g(p_j)(\frac{\Delta \hat{\sigma}_j}{e_{123}})}{2} \right] = \frac{1}{\|K\|} \sum_{j=1}^6 \left[\frac{-e_{123}(\frac{\Delta \hat{\sigma}_j}{e_{123}})g(p_j) + e_{123}g(p_j)(\frac{\Delta \hat{\sigma}_j}{e_{123}})}{2} \right]$$

Simplificando y de la definición del producto interno de un vector por un bivector tenemos:

$$\nabla \times g(p) = -\frac{1}{\|K\|} \sum_{j=1}^6 \Delta \hat{\sigma}_j \downarrow g(p_j) = \frac{1}{\|K\|} \sum_{j=1}^6 g(p_j) \downarrow \Delta \hat{\sigma}_j.$$

La expresión del producto cruz en el Álgebra Geométrica es libre de coordenadas, el producto interno del vector $g(p_j)$ por el bivector $\Delta \hat{\sigma}_j$ resulta un vector.

Como ejemplo aplicativo de la derivada geométrica, evaluemos la derivada del producto de funciones $\nabla(fg)$, luego desarrollamos las propiedades de una forma algebraica utilizando los conceptos de la derivada direccional, del diferencial y de la continuidad diferenciable.

Proposición 4.0.7. Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow AG(3)$ derivables en p , entonces el producto de funciones fg es derivable en p , y cumplen $\nabla(fg) = \overset{\bullet}{\nabla} f g + \overset{\bullet}{\nabla} f \overset{\bullet}{g}$

Los puntos negros \bullet arriba de cada función indican que tal función tiene que ser derivado primero, mientras que la otra permanecerá constante.

PRUEBA.- Consideremos la integral de $[f(p) - f(p_0)] [g(p) - g(p_0)] / e_{123}$ sobre la superficie σ de un pequeño volumen orientado K , donde p_0 es cualquier punto muy cerca a p .

$$\frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma}(f - f_0)(g - g_0) = \frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma} f g - \frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma} f g_0 - \frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma} f_0 g + \frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma} f_0 g_0 \quad (4.8)$$

Tomando límite a la expresión 4.8 cuando $K \rightarrow 0$ tenemos que la expresión $\frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma} f_0 g_0$ es cero, a la vez el límite cuando $K \rightarrow 0$ es también cero. Esto es válido, pues la arista del pequeño cubo $\|K\|$, donde $\ell^3 = \|K\|^3$, $\int_{\sigma} \|d\hat{\sigma}\| = 6\ell^2$ y de la continuidad de f y g ; $\|g - g_0\| \leq \ell$, $\|f - f_0\| \leq \ell$ Como $K \rightarrow 0$ también $\ell \rightarrow 0$ entonces :

$$\left\| \frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma}(f - f_0)(g - g_0) \right\| \leq \left\| \frac{1}{K} \right\| \int_{\sigma} \|d\hat{\sigma}(f - f_0)(g - g_0)\| \leq \frac{1}{\ell^3} 6\ell^2 \ell \ell = 6\ell$$

De la definición de límite se tiene : $\lim_{K \rightarrow 0} (\frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma}(f - f_0)(g - g_0)) = 0$

Ahora el límite de la ecuación 4.8 toma la forma:

$$\lim_{K \rightarrow 0} \left(\frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma} f g \right) = \lim_{K \rightarrow 0} \left(\frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma} f g_0 \right) + \lim_{K \rightarrow 0} \left(\frac{1}{K} \int_{\sigma} d\hat{\sigma} f_0 g \right)$$

Tomando la expresión tenemos : $\nabla(fg) = \overset{\bullet}{\nabla}f\overset{\bullet}{g} + \overset{\bullet\bullet}{\nabla}fg$

Ecuaciones de Maxwell

Gracias al Álgebra Geométrica las ecuaciones de Maxwell pueden ser reducidas a una única expresión mediante lo siguiente :

Definimos el operador multivectorial $D = \partial_t + \nabla$ y los multivectores F y J por :

$$F = E + e_{123}B \quad J = \rho - J$$

Donde E, B es el campo eléctrico y magnético respectivamente y ρ y J son las densidades de la carga y la corriente respectivamente. Las ecuaciones de Maxwell puede ser escrita en una sola ecuación por $DF = J$

Veamos.

$$\begin{aligned} (\partial_t + \nabla)(E + e_{123}B) &= \partial_t E + (\nabla \downarrow E + \nabla \uparrow E) + e_{123}\partial_t B + e_{123}(\nabla \downarrow B + \nabla \uparrow B) = \\ &= \nabla \downarrow E + (\partial_t E + e_{123}\nabla \uparrow B) + e_{123}\partial_t B + e_{123} \nabla x E + e_{123}\nabla \downarrow B \\ &= \nabla \downarrow E + (\partial_t E - \nabla x B) + e_{123}(\partial_t B + \nabla x E) + e_{123}\nabla \downarrow B = \rho - J \end{aligned}$$

Igualando las k-partes obtenemos.

$$\nabla \downarrow E = \rho$$

$$\nabla x B - \partial_t E = J$$

$$\partial_t B + \nabla x E = 0$$

$$\nabla \downarrow B = 0$$

Las cuales son las ecuaciones de Maxwell.

Los detalles sobre tales ecuaciones y comentarios pueden verse en [?]

4.1. La Derivada Direccional y sus propiedades

En esta parte del trabajo veremos algunas propiedades de las derivada direccional y la deriva, parte de esta demostración se puede ver [?]

Definición 4.1.1. Si $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow AG(3)$, (Ω abierto) función con valores multivectoriales y a vector, definimos la derivada de F en la dirección a en el punto $x \in \Omega$ por

$$a \downarrow \partial F(x) \equiv \frac{dF(x+a\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(x+a\tau) - F(x)}{\tau} \quad \text{Si tal límite existe.}$$

En particular para $a = e_i$ ($e_i^2 = 1$) tenemos la derivada parcial $e_i \downarrow \partial F \equiv \partial_i F$

Si definimos a G la función con argumentos escalar tal que $G(\tau) = F(x + a\tau)$ podemos observar que: $\frac{dG(0)}{d\tau} = a \downarrow \partial F$

$a \downarrow \partial F(x)$ también será llamada la a -derivada de F en x .

4.1.1. Propiedades de la derivada direccional

Tomemos a, b vectores $\lambda \in \mathbb{R}$ y $F, G : \mathbb{R}^3 \rightarrow AG(3)$ funciones derivables en a, b y A un multivector cualquiera.

Proposición 4.1.2. $(a + b) \downarrow \partial F = a \downarrow \partial F + b \downarrow \partial F$

PRUEBA.- De la definición de la derivada direccional tenemos:

$$\begin{aligned} (a+b) \downarrow \partial F(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + ta + tb) - F(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + ta + tb) - F(x + tb) + F(x + tb) - F(x)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + ta + tb) - F(x + tb)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + tb) - F(x)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} a \downarrow \partial F(x + tb) + b \downarrow \partial F(x) = a \downarrow \partial F(x) + b \downarrow \partial F(x). \end{aligned}$$

En la última igualdad se usó el caso de que la función $a \downarrow \partial F$ es continua en x . Pues en el contexto del Álgebra Geométrica también se tiene que si la función es derivable entonces es continua.

Proposición 4.1.3. Para λ escalar $(\lambda a) \downarrow \partial F = \lambda(a \downarrow \partial F)$

PRUEBA.- De la definición

$$(\lambda a) \downarrow \partial F = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + \lambda ta) - F(x)}{t} \text{ Si } \lambda = 0 \text{ se verifica rápidamente.}$$

Si $\lambda \neq 0$ multiplicando y dividiendo por λ

$$(\lambda a) \downarrow \partial F = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda \frac{F(x + a(\lambda t)) - F(x)}{\lambda t} = \lambda \lim_{t' \rightarrow 0} \frac{F(x + at') - F(x)}{t'} = \lambda(a \downarrow \partial F)$$

De lo anterior, para x fijo $a \downarrow \partial F$ es una función lineal con respecto a su dirección a .

Proposición 4.1.4. $a \in \mathbb{R}^3, A \in AG(3)$ $a \downarrow \partial A = 0$

PRUEBA.- Para $F(x) = A$ (A independiente de x), de la definición.

$$a \downarrow \partial F(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+ta) - F(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A-A}{t} = 0$$

Proposición 4.1.5. *Función identidad* $a \downarrow \partial x = a$

PRUEBA.- $F(x) = x$, de la definición se tiene

$$a \downarrow \partial F(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+ta) - F(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x+ta - x}{t} = a$$

Proposición 4.1.6. *Función producto escalar* $a_k \downarrow \partial_x(x \downarrow a) = a_k \downarrow a$

PRUEBA.- $F(x) = x \downarrow a$

$$a_k \downarrow \partial_x F(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+ta_k) - F(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x+ta_k) \downarrow a - x \downarrow a}{t} = a_k \downarrow a$$

Proposición 4.1.7. $a \downarrow \partial(F + G)(x) = a \downarrow \partial F(x) + a \downarrow \partial G(x)$

PRUEBA.- De la definición.

$$\begin{aligned} a \downarrow \partial(F + G)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + a(\lambda t)) + G(x + a(\lambda t)) - F(x) - G(x)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + a(\lambda t)) - F(x)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{G(x + a(\lambda t)) - G(x)}{t} = a \downarrow \partial F(x) + a \downarrow \partial G(x) \end{aligned}$$

Proposición 4.1.8. *Regla del producto.* $a \downarrow \partial(FG) = (a \downarrow \partial F)G + F(a \downarrow \partial G)$

PRUEBA.- De la definición.

$$\begin{aligned} a \downarrow \partial(FG)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x + at)G(x + at) - F(x)G(x)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(x + at)G(x + at) - F(x)G(x + at) + F(x)G(x + at) - F(x)G(x)}{t} \right\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(x + at) - F(x)}{t} G(x + at) + F(x) \frac{G(x + at) - G(x)}{t} \right\} = \\ &= (a \downarrow \partial F) \lim_{t \rightarrow 0} G(x + at) + F(a \downarrow \partial G) = (a \downarrow \partial F)G + F(a \downarrow \partial G) \end{aligned}$$

Proposición 4.1.9. *Función longitud de un vector, donde \hat{x} vector unitario.*

$$a \downarrow \partial |x| = \frac{a \downarrow x}{|x|} = a \downarrow \hat{x}$$

Usando la regla del producto para $x^2 = |x|^2$ tenemos:

$$a \downarrow \partial x^2 = (a \downarrow \partial x)x + x(a \downarrow \partial x) = ax + xa = 2a \downarrow x$$

$$a \downarrow \partial |x|^2 = (a \downarrow \partial |x|) |x| + |x| (a \downarrow \partial |x|) = 2|x| (a \downarrow \partial |x|)$$

$$\text{Igualando } |x| (a \downarrow \partial |x|) = a \downarrow x \implies a \downarrow \partial |x| = \frac{a \downarrow x}{|x|} = a \downarrow \hat{x}$$

Proposición 4.1.10. *Invariancia del grado.*

$$a \downarrow \partial \langle F \rangle_k = \langle a \downarrow \partial F \rangle_k$$

$a \downarrow \partial$ es llamado operador diferencial escalar.

$$\text{PRUEBA.- } a \downarrow \partial \langle F \rangle_k = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle F(x+at) \rangle_k - \langle F(x) \rangle_k}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{F(x+at) - F(x)}{t} \right\rangle_k = \langle a \downarrow \partial F \rangle_k$$

Proposición 4.1.11. *(Expansión de Taylor)*

Sea x, a vectores podemos aproximar

$$F(x+a) = \exp(a \downarrow \partial) F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a \downarrow \partial)^k}{k!} F(x)$$

PRUEBA.- En la prueba se toma en cuenta la validez de la expansión de Taylor de una función definida en \mathbb{R} infinitamente diferenciable en el intervalo $[0, 1]$.

Sea $G : \mathbb{R} \rightarrow AG(3)$ / $G(\tau) = F(x+a\tau)$

De la observación de la definición de la derivada direccional, tenemos:

$$\frac{dG(0)}{d\tau} = \frac{dF(x+a\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = a \downarrow \partial F$$

$$\implies \frac{d^2 G(0)}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \frac{dF(x+a\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = a \downarrow \partial \frac{dF(x+a\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = a \downarrow \partial (a \downarrow \partial F(x)) = (a \downarrow \partial)^2 F(x)$$

$$\text{Generalizando } \frac{d^k G(0)}{d\tau^k} = (a \downarrow \partial)^k F(x)$$

La expansión de Taylor para la función G es :

$$G(1) = G(0+1) = G(0) + \frac{dG(0)}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 G(0)}{d\tau^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k G(0)}{d\tau^k}$$

$$\implies G(1) = F(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a \downarrow \partial)^k}{k!} F(x) = \exp(a \downarrow \partial) F(x)$$

Proposición 4.1.12. *Regla de la Cadena para funciones escalares.*

Si $\lambda : x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow R$ y $F : \lambda(\Omega) \subseteq R \rightarrow AG(3)$ se cumple:

$$a \downarrow \partial F = (a \downarrow \partial \lambda) \frac{dF}{d\lambda}$$

PRUEBA.- Usando la expansión de Taylor en \mathbb{R}

$$F(\lambda + \tau \Delta \lambda) = F(\lambda) + \tau \Delta \lambda \frac{dF}{d\lambda} + \frac{\tau^2 (\Delta \lambda)^2}{2} \frac{d^2 F}{d\lambda^2} + \dots$$

Usando la expansión de Taylor de la proposición anterior.

$$\lambda(x + \tau a) = \lambda(x) + \tau a \downarrow \partial \lambda(x) + \frac{\tau^2 (a \downarrow \partial)^2}{2} \lambda(x) + \dots$$

Tomando en cuenta que τ es muy pequeño, podemos aproximar

$$F(\lambda + \tau \Delta \lambda) \simeq F(\lambda) + \tau \Delta \lambda \frac{dF}{d\lambda} \quad \text{y} \quad \lambda(x + \tau a) \simeq \lambda(x) + \tau a \downarrow \partial \lambda(x)$$

Ahora de la definición de la derivada direccional tenemos :

$$a \downarrow \partial F(\lambda(x)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(\lambda(x+\tau a)) - F(\lambda(x))}{\tau} \simeq \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(\lambda(x) + \tau a \downarrow \partial \lambda(x)) - F(\lambda(x))}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(\lambda(x) + \tau \{a \downarrow \partial \lambda(x)\}) \frac{dF}{d\lambda} - F(\lambda(x))}{\tau}$$

Eliminando y cancelando, tenemos:

$$a \downarrow \partial F(\lambda(x)) = a \downarrow \partial \lambda(x) \frac{dF}{d\lambda}$$

Proposición 4.1.13. *Regla de la Cadena I*

Si $x : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $F : x(I) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow AG(3)$ se cumple:

$$\frac{dF}{dt}(x(t)) = \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \downarrow \partial F(x) \Big|_{x=x(t)}$$

PRUEBA.- Usando la expansión de Taylor del caso \mathbb{R} .

$$x(t + \tau) = x(t) + \tau \frac{d}{dt} x(t) + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} x(t) + \dots$$

$$\frac{dF}{dt}(x(t)) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(x(t+\tau)) - F(x(t))}{\tau} \stackrel{\text{Taylor}}{=} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{F(x(t) + \tau \frac{d}{dt} x(t)) - F(x(t))}{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \downarrow \partial F(x) \Big|_{x=x(t)}$$

Proposición 4.1.14. *Regla de la cadena II*

Sea $f : x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $G : f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow AG$

Si $F(x) = G(f(x))$ entonces $a \downarrow \partial F(x) = a \downarrow \partial_x G(f(x))$

PRUEBA.- Usando la expansión de Taylor para la función f con argumentos en \mathbb{R}^3

$f(x + \tau a) = f(x) + \tau a \downarrow \partial f(x) + \frac{\tau^2}{2!} (a \downarrow \partial)^2 f(x) + \dots$ Así tenemos :

$$a \downarrow \partial_x G(f(x)) = \partial_\tau G(f(x + \tau a)) \big|_{\tau=0} = \partial_\tau G(f(x) + \tau a \downarrow \partial f(x)) \big|_{\tau=0} = (a \downarrow \partial f(x)) \downarrow \partial_{x'} G(x') \big|_{x'=f(x)}$$

Dado que la composición de funciones son evaluados en sus respectivos puntos, al suprimirlo la regla de la cadena toma la forma.

$$a \downarrow \partial F = a \downarrow \partial_x G(f(x)) = \underline{f}(a) \downarrow \partial G$$

Donde definimos : $\underline{f}(a) \equiv a \downarrow \partial_x f(x)$ como el diferencial de f en a .

Proposición 4.1.15. *Función dirección.* $a \downarrow \partial \hat{x} = \frac{a - a \downarrow \hat{x} \hat{x}}{|x|} = \frac{\hat{x} \hat{x} \uparrow a}{|x|}$ / $\hat{x} = \frac{x}{|x|^2}$

PRUEBA.- $a \downarrow \partial \hat{x} = a \downarrow \partial \frac{x}{|x|} = \frac{1}{|x|} a \downarrow \partial x + x(a \downarrow \partial \frac{1}{|x|}) = \frac{1}{|x|} a + x(a \downarrow \partial |x|) \frac{d \frac{1}{|x|}}{d|x|} =$

$$\frac{1}{|x|} a + x(a \downarrow \hat{x}) \frac{-1}{|x|^2} = \frac{a}{|x|} + \hat{x}(a \downarrow \hat{x}) \frac{-1}{|x|} = \frac{a}{|x|} - \hat{x}(a \downarrow \hat{x}) \frac{1}{|x|} \frac{a - \hat{x}(a \downarrow \hat{x})}{|x|} = \frac{\hat{x} \hat{x} a - \hat{x} \hat{x} \downarrow a}{|x|} = \frac{\hat{x} \hat{x} \uparrow a}{|x|}$$

Como en el cálculo diferencial escalar es necesario apelar a la definición del diferencial en término de límite para evaluar funciones elementales, las diferenciales para funciones más complejas pueden ser determinadas usando la linealidad del diferencial o la regla del producto.

En un inicio del capítulo 4 se definió la derivada geométrica con respecto a un vector como el límite de una integral de superficie, ahora veremos propiedades algebraicas relacionadas con la derivada direccional y su diferencial.

Denotemos la derivada $\nabla = \partial$ y lo expresamos en función de los e_j , $\nabla = \sum_{j=1}^3 e_j \partial_j$, el cual expresa el operador derivada ∂_x como un vector, por tal cumplirá las propiedades comunes de un vector, es decir cumple las propiedades básicas para ∂_x .

Proposición 4.1.16. *Propiedades básicas del ∂_x .*

- $\partial_x \uparrow e_{123} = 0 \Leftrightarrow \partial_x e_{123} = \partial_x \downarrow e_{123}$

$$2. \partial_x = \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow \partial_x$$

Donde los a^k forma un frame reciproco de los a_j ($a^k \downarrow a_j = \delta_j^k$) los detalles se verá en el apéndice , los a^k expresan las propiedades algebraicas de los vectores y $a_k \downarrow \partial_x$ como la derivada direccional, ya visto antes.

A la vez el producto interno del vector a por la derivada ∂_x , es igual al operador $a \downarrow \partial_x$ será lo mismo que la a – derivada del operador en x .

Definición 4.1.17. (Funciones continuamente diferenciable y diferencial de una función.)

F es continuamente diferenciable en $x \in \mathbb{R}^3$ si para cada $a \in \mathbb{R}^3$ (fijo), la función $a \downarrow \partial F$ es continua en una vecindad de x .

Entonces si F es continuamente diferenciable en x fijo, $a \downarrow \partial F(x)$ es una función lineal en la variable a , cual se llamará *diferencial de F* . Y lo denotamos por:

$$\underline{F}(x, a) = F_a(x) \equiv a \downarrow \partial F(x)$$

Suprimiendo x

$$\underline{F} = \underline{F}(a) = F_a \equiv a \downarrow \partial F$$

De la proposición 4.1.2 y 4.1.3 tenemos para x fijo.

$$1. \underline{F}(x, a + b) = (a + b) \downarrow \partial F(x) = a \downarrow \partial F(x) + b \downarrow \partial F(x)$$

$$2. \underline{F}(x, \lambda a) = (\lambda a) \downarrow \partial F(x) = \lambda(a \downarrow \partial F(x))$$

De manera resumida lo expresamos por :

$$\underline{F}(a + b) = \underline{F}(a) + \underline{F}(b) \wedge \underline{F}(\lambda a) = \lambda \underline{F}(a)$$

El cual indica que la función \underline{F} es una función lineal.

La función \underline{F} de dos variables x y a es también llamado *primera diferencial* o simplemente diferencial de F .

Podemos definir la diferencial de $F = F(x)$ en términos de la derivada ∂_x al hacer uso de:

$$\underline{F}(a) \equiv a \downarrow \partial F = \frac{1}{2}(a \partial F + \overset{\bullet}{\partial} a \overset{\bullet}{F})$$

Donde el punto arriba de la función, indica que solo F es diferenciado, cuando a es una función que dependa de x .

Proposición 4.1.18. Para a, x vectores $a \downarrow \partial_x x = \partial_x(x \downarrow a) = a$

PRUEBA.- Del ítem 2 de las propiedades básicas de 4.1.16 tenemos :

$$\partial_x(x \downarrow a) = \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow \partial_x(x \downarrow a) = \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow a = a$$

Como ∂_x trabaja como vector podemos tener la siguiente expresión :

$$\partial_a a \downarrow \partial_x = \partial_a(a \downarrow \partial_x) = \partial_x \quad (4.9)$$

Podemos usar esto para obtener la derivada de una función a partir de su diferencial.

$$\partial_x F(x) = \partial_a a \downarrow \partial_x F(x) = \partial_a \underline{F}(x)$$

Introducimos la notación $\underline{\partial}$ cuando derivamos con respecto al argumento diferencial \underline{F} . Ahora lo escribimos en forma compacta $\partial F = \underline{\partial F}$. Usamos el diferencial para hallar propiedades de la derivada.

Proposición 4.1.19. *Propiedades de la derivada.*

1. $\partial(F + G) = \partial F + \partial G$
2. $\partial(FG) = \underline{\partial FG} + \underline{\partial FG}$

PRUEBA.-

$$1. \partial(F + G) = \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow \partial_x(F + G) = \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow \partial_x F + a^k a_k \downarrow \partial_x G =$$

$$\sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow \partial_x F + \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow \partial_x G = \partial F + \partial G$$

2.

$$\partial(FG) = \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow \partial_x(FG) = \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow \partial_x(FG) = \sum_{k=1}^3 a^k (a_k \downarrow \partial F)G + a^k F(a_k \downarrow \partial G) =$$

$$\sum_{k=1}^3 a^k (a_k \downarrow \partial F)G + \sum_{k=1}^3 a^k F(a_k \downarrow \partial G) = \underline{\partial FG} + \underline{\partial FG}$$

Donde : $\underline{\partial FG} = \partial_y(F(x)G(y))|_{y=x}$ se deriva en G tomando F constante.

Algunas veces usamos los puntos en vez de las barras, es decir: $\partial(FG) = \overset{\bullet}{\partial}FG + \overset{\bullet}{\partial}F\overset{\bullet}{G}$

Proposición 4.1.20. *Regla de la cadena para una función compuesta.*

De 4.9 y la regla de la cadena 4.1.14. Sea F la función compuesta por : $F(x) = G(f(x))$

$$\partial_x F(x) = \partial_x G(f(x)) = \partial_a [a \downarrow \partial_x G(f(x))] = \partial_a [a \downarrow \partial_x f(x) \downarrow \partial G] = \partial_a [\underline{f}(a) \downarrow \partial_{x'} G(x')] /_{x'=f(x)}$$

Usamos la notación $\underline{f}(a) = a \downarrow \partial_x f(x)$

Proposición 4.1.21. *Derivadas de funciones elementales.*

1. $\partial \downarrow x = 3$ y $\partial \uparrow x = 0$ seguimos $\partial x = 3$

$$\text{PRUEBA.- } \partial x = \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow \partial_x x = \sum_{k=1}^3 a^k [a_k \downarrow \partial_x x] = \sum_{k=1}^3 a^k a_k = 3$$

2. $a \downarrow \partial x = a = \partial x \downarrow a$ donde $a \downarrow (\partial \uparrow x) = a \downarrow \partial x - \partial x \downarrow a = 0$

$$3. \partial x^2 = \sum_{k=1}^3 a^k [a_k \downarrow \partial_x x^2] = \sum_{k=1}^3 a^k 2a_k \downarrow x = 2 \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow x = 2x$$

$$4. \partial |x| = \sum_{k=1}^3 a^k [a_k \downarrow \partial_x |x|] = \sum_{k=1}^3 a^k \frac{a_k \downarrow x}{|x|} = \sum_{k=1}^3 a^k a_k \downarrow \hat{x} = \hat{x} = \frac{x}{|x|}$$

5. $\partial |x|^k = k |x|^{k-2} x$

PRUEBA.- Consideremos $f(x) = |x|$ y $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $G(y) = y^k$ $k \in Z_{+}$, de la regla de la cadena tenemos : $\partial_x G(f(x)) = \partial_a \underline{f}(a) \downarrow \partial_{x'} G(x') = \partial_a (\frac{a \downarrow x}{|x|} k |x|^{k-1}) = \partial_a (a \downarrow x) k |x|^{k-2} = x k |x|^{k-2}$

En la prueba se tomó en cuenta los resultados siguientes ya visto anteriormente.

$$\blacksquare \underline{f}(a) = a \downarrow \partial f(x, a) = \frac{a \downarrow x}{|x|}$$

$$\blacksquare \partial_{x'} G(x') = k |x|^{k-1}$$

$$\blacksquare a \downarrow \partial |x| = \frac{a \downarrow x}{|x|}$$

$$\blacksquare \partial_x (x \downarrow a) = a$$

6. $\partial \log |x| = \frac{x}{|x|^2} = x^{-1}$

Capítulo 5

Apéndice

5.1. Apéndice 1: El origen del enfoque moderno

El Álgebra Geométrica presenta una estructura de \mathbb{R} -espacio vectorial en el álgebra no-conmutativa de las matrices complejas 2×2 ($\mathbb{C}^{2 \times 2}$), mostrando para ello una base que posee propiedades parecida a la condición de Dirac. Consideremos las siguientes matrices complejas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Denotamos respectivamente por: $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ y σ_3 . σ_0 es la matriz identidad.

Proposición 5.1.1. *Propiedades de las matrices $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ y σ_3 .*

- $\sigma_i^2 = \sigma_0$, para $i = 1, 2, 3$ La prueba es directa por multiplicación de matrices.
- $\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_1; \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2; \sigma_1\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_1$, el producto es anticonmutativo.
- $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^2 = -\sigma_0$
- $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)\sigma_j = \sigma_j(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$

La demostración es directa haciendo uso del producto de matrices.

Proposición 5.1.2. *El conjunto de matrices*

$$\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_1\sigma_2, \sigma_3\sigma_1, \sigma_2\sigma_3, \sigma_1\sigma_2\sigma_3\}$$

forma una base en el álgebra no conmutativa de las matrices complejas $\mathbb{C}^{2 \times 2}$.

PRUEBA.- Los elementos del conjunto son linealmente independiente. La demostración lo hacemos siguiendo los pasos:

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ constantes, con $a\sigma_0 + b\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 0 \rightarrow a = b = 0$

Denotamos $\sigma_{123} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$

$$a\sigma_0 = -b\sigma_{123} ; (a\sigma_0)^2 = (-b\sigma_{123})^2 ; a^2 = -b^2 ; \text{ donde } a = b = 0$$

2. Si $A = c_0\sigma_0 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 + c_4\sigma_{12} + c_5\sigma_{31} + c_6\sigma_{23} + c_7\sigma_{123} = 0 \rightarrow$

$$A = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 + c_4\sigma_{12} + c_5\sigma_{31} + c_6\sigma_{23} = 0$$

PRUEBA.- Para cualquier $c_i \in \mathbb{R}$

De la primera expresión multiplicamos por $\sigma_1 A \sigma_1$ obtenemos :

$$c_0\sigma_0 + c_1\sigma_1 - c_2\sigma_2 - c_3\sigma_3 - c_4\sigma_{12} - c_5\sigma_{31} + c_6\sigma_{23} + c_7\sigma_{123} = 0$$

Sumando con el multivector A y dividimos entre 2 obtenemos :

$$c_0\sigma_0 + c_1\sigma_1 + c_6\sigma_{23} + c_7\sigma_{123} = 0$$

Multiplicamos la última expresión por derecha e izquierda por σ_2 para obtener :

$$c_0\sigma_0 - c_1\sigma_1 - c_6\sigma_{23} + c_7\sigma_{123} = 0$$

Sumando estas dos últimas expresiones y dividimos entre 2 para obtener : $c_0 + c_7\sigma_{123} = 0$

y del ítem 1 tenemos que $c_0 = c_7 = 0$

3. Si $A = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 + c_4\sigma_{12} + c_5\sigma_{31} + c_6\sigma_{23} = 0 \rightarrow c_1 = c_6 = 0$

$$\text{PRUEBA.- } \sigma_1 A = c_1\sigma_0 + c_2\sigma_{12} + c_3\sigma_{13} + c_4\sigma_2 - c_5\sigma_3 + c_6\sigma_{123} = 0$$

$$A\sigma_1 = c_1\sigma_0 - c_2\sigma_{12} - c_3\sigma_{13} + c_5\sigma_3 + c_6\sigma_{123} = 0 ;$$

Sumando ambas expresiones. $\sigma_1 A + A\sigma_1 = 2c_1\sigma_0 + 2c_6\sigma_{123} = 0$, del ítem 1, $c_1 = c_6 = 0$

4. Si $A = c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 + c_4\sigma_{12} + c_5\sigma_{31} = 0 \rightarrow c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$

$$\text{PRUEBA.- } \sigma_2 A + A\sigma_2 = 2c_2\sigma_2 + 2c_5\sigma_{123} = 0, \text{ del ítem 1, tenemos } c_2 = c_5 = 0,$$

la expresión A se reduce a $c_3\sigma_3 + c_4\sigma_{12} = 0$, multiplicando σ_3 por derecha se obtiene ,

$$c_3 + c_4\sigma_{123} = 0 , \text{ y del ítem 1; } c_3 = c_4 = 0$$

Isomorfismo vectoriales entre subespacios de $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ y los espacios de $\mathbb{R}^3, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Proposición 5.1.3. *El \mathbb{R} -espacio vectorial $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ contiene una copia isomorfa del \mathbb{R} -espacio vectorial \mathbb{R}^3 , al asociar las matrices σ_1, σ_2 y σ_3 con elementos de una base canónica del \mathbb{R}^3 .*

1. Si $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base canónica de \mathbb{R}^3 y le asociamos con $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ de la siguiente manera.

$$\sigma_1 \longleftrightarrow e_1, \quad \sigma_2 \longleftrightarrow e_2, \quad \sigma_3 \longleftrightarrow e_3$$

2. Se cumple la identidad $\sigma_{123}\sigma_{123} = -\sigma_0$ y por lo tanto el álgebra $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ contiene una copia isomorfa del álgebra conmutativa usual \mathbb{C} , asociando σ_0 , con 1 e i con σ_{123} .

Proposición 5.1.4. *De la expresión $\sigma_{ij}\sigma_{ij} = -\sigma_0$, el álgebra $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ contiene una copia isomorfa del álgebra no conmutativa de los **cuaterniones de Hamilton** \mathbb{H} , al asociar σ_0 con 1 y la familia $\{\sigma_{ij}\}$ con la base de cuaterniones.*

PRUEBA.- Para $i \neq j$;

$$(\sigma_{ij})^2 = (\sigma_i\sigma_j)(\sigma_i\sigma_j) = \sigma_i(\sigma_j\sigma_i)\sigma_j = \sigma_i(-\sigma_i\sigma_j)\sigma_j = -(\sigma_i\sigma_i)(\sigma_j\sigma_j) = -\sigma_i^2\sigma_j^2 = -\sigma_0\sigma_0 = -\sigma_0$$

Las matrices σ_{21}, σ_{31} y σ_{32} cumplen el circuito cerrado.

$$\blacksquare (\sigma_{12})(\sigma_{31}) = \sigma_{23}$$

$$\blacksquare (\sigma_{31})(\sigma_{23}) = \sigma_{12}$$

$$\blacksquare (\sigma_{23})(\sigma_{12}) = \sigma_{31}$$

El álgebra de subconjunto $\{\alpha_0 + \alpha_1\sigma_{12} + \alpha_2\sigma_{31} + \alpha_3\sigma_{23}\}$ es isomorfo al álgebra de los cuaterniones, si q es un elemento del conjunto entonces tiene la representación en forma matricial por :

$$q = \begin{pmatrix} \alpha_0 - \alpha_3 i & -\alpha_2 + \alpha_1 i \\ \alpha_2 + \alpha_1 i & \alpha_0 + \alpha_3 i \end{pmatrix} \quad \text{donde } i \text{ es la unidad imaginaria conocida.}$$

La representación matricial de un elemento A cualquiera es de la forma : $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix}$

donde :

$$z_1 = (c_0 + c_3) + i(c_4 + c_7)$$

$$z_2 = (c_1 + c_5) + i(c_2 + c_6)$$

$$z_3 = (c_1 - c_5) - i(c_2 - c_6)$$

$$z_4 = (c_0 - c_3) - i(c_4 - c_7)$$

5.1.1. Pruebas de las proposiciones del $AG(3)$.

El Álgebra Geométrica $AG(3)$ es la suma de 4 sub-espacios vectoriales disjuntos del espacio vectorial $AG(3)$. Denotamos cada subespacios de $AG(3)$ por $\langle AG(3) \rangle_r$ con $r = 0, 1, 2, 3$.

PRUEBA.- En el capítulo 2 se vió que $dim(AG(3)) = \sum_{i=0}^3 dim(AG(3)_i) = 8$.

De los isomorfismos $AG(3)_0 \cong \mathbb{R}$ y $AG(3)_1 \cong \mathbb{R}^3$ tenemos que

$$dim(AG(3)_0) = 1 \quad y \quad dim(AG(3)_1) = 3$$

El espacio $AG_2(3)$ está definido por : $\langle AG(3) \rangle_2 = \{a_{12}e_{12} + a_{31}e_{31} + a_{23}e_{23}/a_{ij} \in \mathbb{R}\}$, el cual es un \mathbb{R} -subespacio vectorial de $AG(3)$ de dimensión 3, donde cada elemento es llamado ubivector.

PRUEBA.- Se observa que toda combinación lineal de elementos de $AG_2(3)$ es un elemento del subespacio. A la vez $\{e_{12}, e_{31}, e_{23}\}$ es una base del subespacio $AG_2(3)$

Si tenemos una combinación lineal tal que sí $a_{12}e_{12} + a_{31}e_{31} + a_{23}e_{23} = 0$

Multiplicando por derecha y por izquierda por e_1 , obtenemos : $-a_{12}e_{12} - a_{31}e_{31} + a_{23}e_{23} = 0$, sumando con la expresión anterior obtenemos $a_{23}e_{23} = 0 \rightarrow a_{23} = 0$ La expresión inicial se reduce a $a_{12}e_{12} + a_{31}e_{31} = 0$, multiplicando la última expresión por e_2 por izquierda y derecha, se obtiene : $-a_{12}e_{12} + a_{31}e_{31} = 0$, sumando estos últimos resultados llegamos ha : $a_{31}e_{31} = 0 \rightarrow a_{31} = 0; a_{12} = 0$, por tal $dim(AG(3)_2) = 3$

El \mathbb{R} subespacio vectorial $\langle AG(3) \rangle_3 = \{\alpha e_{123}/\alpha \in \mathbb{R}\}$ es de dimensión 1.

Comentario sobre el álgebra vectorial de Gibbs

A principios del siglo XX Gibbs intentó unificar los sistemas trabajados por Grassmann y Hamilton dando como resultado el álgebra vectorial que para la época obtuvo aplicaciones a problemas físicos, en particular al electromagnetismo, hasta hoy sabemos que el álgebra vectorial es el más usado pues los textos de física y matemática así lo demuestran, pero realmente tal sistema no generaliza los sistemas previos, más aún se ha hallado algunas incoherencias en tal sistema y problemas de interpretación en la física en el estudio de la mecánica cuántica, como lo comenta Vaz (9) sobre la formulación de la teoría de Schrodinger que fué hecha de la experiencia de Stern y Gerlach que hoy se sabe que es una teoría

incompleta y esto muestra una inadecuada aplicación a los conceptos clásicos de lo que surgen equívocas donde mayor se perciben es de un punto físico que matemático.

El sistema de Gibbs no generaliza el sistema de Grassmann.

Gibbs definió el producto cruz (\times) para vectores de la siguiente manera:

Dados los vectores v, u con coordenadas.

$v = (v_1, v_2, v_3)$ y $u = (u_1, u_2, u_3)$, se define el producto cruz \times para vectores por :

$$v \times u = (v_1, v_2, v_3) \times (u_1, u_2, u_3) = (v_2u_3 - v_3u_2, v_3u_1 - v_1u_3, v_1u_2 - v_2u_1) \quad (5.1)$$

El producto cruz de dos vectores resulta otro vector, de esta manera hizo un álgebra cerrada a la vez tal producto no goza de la asociatividad pues no siempre se cumple que $v \times (u \times w)$ sea igual a $(v \times u) \times w$.

Ejemplo 5.1.1. Tomemos $v = e_1, u = e_2$ y $w = e_2$ en la expresión 5.1, la cual resulta :
 $e_1 \times (e_2 \times e_2) = 0$ y $(e_1 \times e_2) \times e_2 = -1$

Una manera equivalente de definir el producto vectorial es tomando los vectores ortogonales, es decir :

$$e_1 = (1, 0, 0) , e_2 = (0, 1, 0) \text{ y } e_3 = (0, 0, 1)$$

De la expresión 5.1 el producto cruz de tales vectores está dado por :

$$e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0$$

$$e_1 \times e_2 = -e_2 \times e_1 = e_3$$

$$e_2 \times e_3 = -e_3 \times e_2 = e_1$$

$$e_3 \times e_1 = -e_1 \times e_3 = e_2$$

Veamos que tal sistema presenta algunas irregularidades.

Consideremos la aplicación lineal en \mathbb{R}^3 que lleva un vector a hacia $-a$, ($a \rightarrow -a$)

Si $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tal que $w = u \times v$

Tal que si : $v \rightarrow -v$ y $u \rightarrow -u$ entonces tenemos $w \rightarrow (-v) \times (-u) = w$

Como el vector w resulta del producto cruz, este no se altera al efectuar la operación opuesta, es por ello que tales vectores reciben el nombre de pseudovector. (En un contexto diferente a la dualidad)

La estructura desarrollada por Gibbs, no es cerrada, es más si consideramos la estructura de pseudovectores aún no resuelve el problema, pues el resultado se halla en su propia definición de Gibbs, se observa que un vector hace el papel al mismo tiempo de pseudovector. La solución de este problema se halla resuelto dentro de la estructura del Álgebra Geométrica.

Veamos que la definición correspondiente al producto cruz $a \times b$ presentada en 3.0.14 salva la situación comentada.

Sean $a = (a_1, a_2, a_3)$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$, el producto exterior esta dado por :

$$a \uparrow b = (b_1 a_2 - a_2 b_1) e_1 e_2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3 e_1 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 e_3.$$

De la definición del producto cruz definido en 3.0.14 tenemos :

$$a \times b = -e_{123} a \uparrow b = (a_2 b_3 - b_3 a_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3$$

Es justamente el vector definido en 5.1. Veamos que ocurre con el producto cruz en $AG(3)$, si es afectado por la operación opuesta. Teniendo en cuenta que :

$e_{123} \longrightarrow -e_{123}$, $\wedge e_i \longrightarrow -e_i$, el producto $a \times b$ afectado por la operación opuesta resulta :
 $a \times b = -e_{123} a \uparrow b \longrightarrow -[(-e_{123})(-a) \uparrow (-b)] = -(-e_{123} a \uparrow b) = -a \times b$

Esto indica que el producto vectorial $a \times b$ definido como $-e_{123} a \uparrow b$ resulta un vector , por lo cual tal definición es buena, a la vez se vio que la dualidad de un vector genera el plano ortogonal a dicho vector. hacer corresponder la dualidad del vector como el plano ortogonal a dicho vector.

Otro resultado que merece un comentario es el hecho que el sistema de Gibbs no generaliza el sistema de Hamilton.

Gibbs intentó incluir el sistema de los cuaterniones \mathbb{H} dentro del álgebra vectorial, para ello identificó los elementos de una base de cuaterniones dados por $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ (La base de los cuaterniones cumplen $\underline{i}^2 = \underline{j}^2 = \underline{k}^2 = -1$) con los vectores de una base canónica de \mathbb{R}^3 es decir: Si $\{i, j, k\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 y $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ base de los cuaterniones, lo identificó como:

$$\underline{i} \longleftrightarrow i ; \underline{j} \longleftrightarrow j ; \underline{k} \longleftrightarrow k$$

Para establecer la condición dentro del álgebra vectorial se tomó el producto escalar de vectores por $i.i = j.j = k.k = 1$ resultando tal producto con signo opuesto.

Se definió un cuaternión puro (sin parte escalar) $q_1 = \alpha_1 \underline{i} + \alpha_2 \underline{j} + \alpha_3 \underline{k}$ lo identificó por el vector $\vec{q}_1 = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$.

y se definió el producto para los cuaterniones puros de la forma siguiente: Sean q_1, q_2 dos cuaterniones puros (Sin parte escalar) su producto $q_1 q_2 = - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 + \vec{q}_1 \times \vec{q}_2$.

Es claro que esta expresión es solo válido para el producto de cuaterniones puros, de modo que no es posible tomar como definición del producto de cuaterniones dentro de \mathbb{R}^3 . El error se dá al identificar las unidades cuaternionicas con una base ortonormal.

Como vimos tales unidades cuaternionicas se identifican con los bivectores canónicos en el $AG(3)$ es decir : $\underline{i} \longleftrightarrow e_3 e_2, \underline{j} \longleftrightarrow e_3 e_1, \underline{k} \longleftrightarrow e_2 e_1$ y $1 \longleftrightarrow 1$.

Si multiplicamos $A, B \in \mathbb{H}$ tenemos $AB \in \mathbb{H}$ (\mathbb{H} es cerrado), Gracias a la identificación hecha decimos que \mathbb{H} es isomorfo a un subálgebra de $AG(3)$.

Cada cuaternión puro en el $AG(3)$ puede ser identificado como un elemento del $\langle AG(3) \rangle_2$ y a la vez del isomorfismo de la dualidad entre $\langle AG(3) \rangle_2 \longleftrightarrow \langle AG(3) \rangle_1$

Podemos representar dos cuaterniones puros por sus vectores. Es decir si q_1, q_2 cuaterniones puros puede ser representados $q_1 \longleftrightarrow \vec{q}_1, q_2 \longleftrightarrow \vec{q}_2$ (\vec{q}_i :vector)

De la dualidad expresamos $q_1 = e_{123} \vec{q}_1, q_2 = e_{123} \vec{q}_2$

Si : $q_1 = \alpha_1 e_{23} + \alpha_2 e_{31} + \alpha_3 e_{12}$, identificado con su vector $\vec{q}_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$

entonces $q_1 q_2 = e_{123} \vec{q}_1 e_{123} \vec{q}_2 = - \vec{q}_1 \vec{q}_2 = - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 - e_{123} (\vec{q}_1 \times \vec{q}_2)$ el cual es análogo a la fórmula de Gibbs, el cual se tomó en forma particular, pues un desarrollo más general lo cual es posible en el $AG(3)$ no encuentra un análogo en \mathbb{R}^3 .

Como vemos el Álgebra Geométrica sintetiza en un único esquema las estructuras de Hamilton y de Grassmann.

Capítulo 6

Extensión del álgebra $AG(3)$ al álgebra $AG(n)$.

El Álgebra Geométrica $AG(3)$ puede extenderse directamente a un Álgebra Geométrica de dimensión finita $AG(n)$, ($n \geq 3$). En el Álgebra Geométrica $AG(3)$ se definió como la suma directa de subconjuntos de espacios vectoriales disjuntos tal que en el subespacio de vectores cumple la condición de Dirac ($e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}/i, j \in \{1, 2, 3\}$), en álgebra $AG(n)$ se extiende de manera natural es decir es la suma directa de subconjuntos de espacios vectoriales disjuntos $AG_i(n) / i \in \{0, 1, \dots, n\}$, donde cada uno de ellos tendrá dimensión $\binom{n}{r}$, así el Álgebra Geométrica $AG(n)$ tendrá dimensión $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$, y su subespacio de vectores será de dimensión $\binom{n}{1} = n$ (el conjunto de vectores para \mathbb{R}^n) que cumple la condición de Dirac $e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}/i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

6.1. Propiedades del producto interno y externo para vectores y r-vectores en el $AG(n)$

Definición 6.1.1. $A_r \in AG(n)$ es un r -vector simple o un r -bloque, si A_r puede ser factorizado con a_r vectores ortogonales dos a dos. Es decir :

A_r es un r -vector simple si y solo sí :

$$\exists a_1, a_2, \dots, a_r \in \langle AG(n) \rangle_1 \text{ con } a_i a_j = -a_j a_i, \quad i \neq j \text{ talque } A_r = a_1 a_2 \dots a_r.$$

Definición 6.1.2. $A_r \in AG(n)$ es un r -vector ($r \leq n$) si se puede descomponer en una suma finita de r -vectores simples.

Proposición 6.1.3. Condición de linealidad.

Los vectores a_1, a_2, \dots, a_r ($r \leq n$) no nulos son linealmente independiente si y solo si

$$a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r \neq 0$$

PRUEBA.-

La demostración lo hacemos por contradicción, supongamos que :

$$a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_n = 0, \quad a_1 \uparrow (a_2 \uparrow \dots \uparrow a_n) = 0,$$

Si $a_2 \uparrow \dots \uparrow a_n \neq 0$, \implies por lo anterior a_2, a_3, \dots, a_n son l.i $\implies a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son l.d esto contradice la condición inicial de que los vectores son l.i.

Por tal $a_2 \uparrow \dots \uparrow a_n = 0$, $a_2 \uparrow (a_3 \uparrow \dots \uparrow a_n) = 0$.

Si $a_3 \uparrow \dots \uparrow a_n \neq 0$, \implies por lo anterior a_3, a_4, \dots, a_n son l.i $\implies a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son l.d nuevamente contradicción. por tal $a_3 \uparrow \dots \uparrow a_n = 0$

Podemos continuar el proceso hasta obtener $a_{n-1} \uparrow a_n = 0$, el cual nos dice que los vectores a_n y a_{n-1} son l.d y por tal $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son l.d, lo cual contradice la hipótesis inicial.

Sea el multivector $A = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r \neq 0$ entonces $a_k \uparrow A = 0$ ($1 \leq k \leq r$)

Supongamos que a_r puede expresarse como combinación linealmente de los otros vectores, es decir : $a_r = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_{r-1} \uparrow \left(\sum_{k=1}^{r-1} \alpha_k a_k \right)$, como cada vector a_i producto externo consigo mismo es cero, entonces cada término a_r es nulo y por ende $A = 0$, lo cual contradice la hipótesis. Esto indica que a_k no puede expresarse como combinación lineal de los otros vectores, es decir $\{a_k\}$ son linealmente independiente.

Proposición 6.1.4. El producto geométrico de un vector a por $(a_1 a_2 \dots a_r)$ donde $a, a_1, \dots, a_r \in \langle AG(n) \rangle_1$ resulta :

$$a(a_1 a_2 \dots a_r) = 2 \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \downarrow a_k a_1 a_2 \dots a_k^\vee \dots a_r + (-1)^r (a_1 a_2 \dots a_r) a.$$

Donde a_k^\vee indica que el multivector $a_1 a_2 \dots a_r$ se le a extraído el vector a_k .

PRUEBA.- Por inducción : De la definición del producto interno para dos vectores tenemos válidado que:

$$aa_1 = 2a \downarrow a_1 + (-1)^1 a_1 a$$

Consideremos válido para h vectores. (Hipótesis inductiva)

Demostramos la validez para el caso de $h + 1$ vectores. Haciendo uso de la hipótesis inductiva tenemos :

$$\begin{aligned} a(a_1 a_2 \dots a_h a_{h+1}) &= [a(a_1 a_2 \dots a_h)] a_{h+1} = \left[2 \sum_{k=1}^h (-1)^{k+1} a \downarrow a_k a_1 a_2 \dots a_k^\vee \dots a_h + (-1)^h (a_1 a_2 \dots a_h) a \right] a_{h+1} \\ &= 2 \sum_{k=1}^h (-1)^{k+1} a \downarrow a_k a_1 a_2 \dots a_k^\vee \dots a_h a_{h+1} + (-1)^h (a_1 a_2 \dots a_h) a a_{h+1}, \end{aligned}$$

Descomponemos el producto aa_{h+1} a la forma $2a \downarrow a_{h+1} + (-1)^1 a_{h+1} a$ y lo reemplazamos en el último sumando para obtener:

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{k=1}^h (-1)^{k+1} a \downarrow a_k a_1 a_2 \dots a_k^\vee \dots a_h a_{h+1} + 2(-1)^{h+1+1} (a_1 a_2 \dots a_h) a \downarrow a_{h+1} + (-1)^{h+1} (a_1 a_2 \dots a_h) a_{h+1} a \\ &= 2 \sum_{k=1}^{h+1} (-1)^{k+1} a \downarrow a_k a_1 a_2 \dots a_k^\vee \dots a_h a_{h+1} + (-1)^{h+1} (a_1 a_2 \dots a_h a_{h+1}) a \end{aligned}$$

La sumatoria absorbió el sumando central, con ello se completa la demostración.

Despejando la sumatoria en la expresión se obtiene :

$$a(a_1 a_2 \dots a_r) - (-1)^r (a_1 a_2 \dots a_r) a = 2 \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \downarrow a_k a_1 a_2 \dots a_k^\vee \dots a_r \quad (6.1)$$

Proposición 6.1.5. Si $a_1, a_2, \dots, a_r \in \langle AG(n) \rangle_1$ vectores ortogonales dos a dos se tiene:

$$a \downarrow (a_1 a_2 \dots a_r) = \frac{1}{2} [a(a_1 a_2 \dots a_r) - (-1)^r (a_1 a_2 \dots a_r) a]$$

PRUEBA.- Si los vectores anticonmutan tenemos : $a_i a_j = -a_j a_i$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$.

El multivector $a_1 a_2 \dots a_r$ es un r -vector simple. De la proposición 6.1.4 tenemos 6.1, en este caso los sumandos de la derecha son vectores simples de grado $r - 1$. Ahora tomando la $r-1$ parte \langle, \rangle_{r-1} de la expresión obtenemos :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (aa_1 a_2 \dots a_r - (-1)^r a_1 a_2 \dots a_r a) &= \left\langle \frac{1}{2} (aa_1 a_2 \dots a_r - (-1)^r a_1 a_2 \dots a_r a) \right\rangle_{r-1} = \\ \frac{1}{2} (\langle aa_1 a_2 \dots a_r \rangle_{r-1} - (-1)^r \langle a_1 a_2 \dots a_r a \rangle_{r-1}) &= \frac{1}{2} (a \downarrow (a_1 a_2 \dots a_r) - (-1)^r (a_1 a_2 \dots a_r) \downarrow a) = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(a \downarrow (a_1 a_2 \dots a_r) + (-1)^{r-1} (a_1 a_2 \dots a_r) \downarrow a) = \frac{1}{2}(a \downarrow (a_1 a_2 \dots a_r) + a \downarrow (a_1 a_2 \dots a_r)) =$$

$$a \downarrow (a_1 a_2 \dots a_r)$$

Tomando los extremos tenemos lo pedido.

La prueba se desarrollo para el caso de un r-vector simple $A_r = a_1 a_2 \dots a_r$, el hecho de la linealidad del producto interior nos dá la prueba para un A_r vector cualquiera.

$$\langle a A_r \rangle_{r-1} = a \downarrow A_r = \frac{1}{2}(a A_r - (-1)^r A_r a) \quad (6.2)$$

Está fórmula generaliza el producto exterior de un vector y un r-vector.

Proposición 6.1.6. *Sea a un 1- vector y A_r un r-vector. Entonces se cumple :*

$$a \uparrow A_r = \langle a A_r \rangle_{r+1} = \frac{1}{2}(a A_r + (-1)^r A_r a)$$

, el cual generaliza el producto exterior de vectores.

PRUEBA.- Empecemos la demostración para A_r un r-vector simple, luego de la linealidad del producto exterior tenemos lo pedido.

Sea A_r un r-vector simple, entonces puede ser factorizado por $\{a_k\}_{k=1,r}$ vectores no nulos que anticonmutan dos a dos, es decir $A_r = a_1 a_2 \dots a_r$.

Como los vectores son no nulos tenemos $a_k^{-1} a_k = 1$, a la vez $a_k^{-1} = |a_k|^{-2} a_k$.

Utilizando A_r en la proposición 6.1.5 se obtiene :

$$a \downarrow A_r = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \downarrow a_k a_1 a_2 \dots a_k^\vee \dots a_r = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \downarrow a_k a_k^{-1} a_k a_1 a_2 \dots a_k^\vee \dots a_r =$$

$$\sum_{k=1}^r a \downarrow a_k a_k^{-1} a_1 a_2 \dots a_k \dots a_r = \sum_{k=1}^r a \downarrow a_k a_k^{-1} A_r.$$

$$a A_r - a \downarrow A_r = a A_r - \sum_{k=1}^r a \downarrow a_k a_k^{-1} A_r = (a - \sum_{k=1}^r a \downarrow a_k a_k^{-1}) A_r = b A_r$$

donde $b = a - \sum_{k=1}^r a \downarrow a_k a_k^{-1}$.

Demostremos que b anticonmuta con cada a_j : $b a_j = -a_j b \quad j=1 \dots r$

$$\text{Pues } b \downarrow a_j = a \downarrow a_j - \left(\sum_{k=1}^r a \downarrow a_k a_k^{-1} \right) \downarrow a_j = a \downarrow a_j - \left(\sum_{k=1}^r a \downarrow a_k \frac{a_k}{|a_k|^2} \right) \downarrow a_j = 0$$

Esto es válido del hecho de : $a_k \downarrow a_j = 0$ para $k \neq j$ $b \downarrow a_j = a \downarrow a_j - a \downarrow a_j \frac{a_j}{|a_j|^2} \downarrow a_j = 0$

Por tal $b A_r$ es r+1-vector simple entonces $b A_r \in \langle AG(n) \rangle_{r+1}$.

$$bA_r = aA_r - a \downarrow A_r = \langle aA_r - a \downarrow A_r \rangle_{r+1} = \langle aA_r \rangle_{r+1} - \langle a \downarrow A_r \rangle_{r+1} = a \uparrow A_r.$$

$$a \uparrow A_r = aA_r - a \downarrow A_r = aA_r - \left(\frac{1}{2}(aA_r - (-1)^r A_r a)\right) = \frac{1}{2}(aA_r + (-1)^r A_r a)$$

Tomando los extremos tenemos lo pedido.

La prueba se desarrollo para un r-vector simple, de la linealidad del producto exterior se prueba para un A_r vector.

$$a \uparrow A_r = \langle aA_r \rangle_{r+1} = \frac{1}{2}(aA_r + (-1)^r A_r a) \quad (6.3)$$

Sumando los resultados 6.2+6.3 obtenemos el producto geométrico de un vector por un r-vector el cual se descompone en dos sumandos de grado r-1 y otro de grado r+1.

$$aA_r = a \downarrow A_r + a \uparrow A_r = \langle aA_r \rangle_{r-1} + \langle aA_r \rangle_{r+1} \quad (6.4)$$

Aplicamos la expresión 6.4 en la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 6.1.7. $a \downarrow (b \uparrow B_r) = (a \downarrow b)B_r - b \uparrow (a \downarrow B_r)$

PRUEBA.- De la definición de producto interior 1.2.15 ítem 3 y 6.4 tenemos :

$$a \downarrow (b \uparrow B_r) = \langle a(b \uparrow B_r) \rangle_r = \left\langle a \left(\frac{1}{2}(bB_r + (-1)^r B_r b) \right) \right\rangle_r = \frac{1}{2} \langle abB_r + (-1)^r aB_r b \rangle_r =$$

Tomando el grado r y remplazamos $ab = 2a \downarrow b - ba$ en la expresión.

$$a \downarrow bB_r + \frac{1}{2} \langle -baB_r + (-1)^r aB_r b \rangle_r = a \downarrow bB_r + \frac{1}{2} \langle -b(a \downarrow B_r + a \uparrow B_r) + (-1)^r (a \downarrow B_r + a \uparrow B_r)b \rangle_r =$$

$$a \downarrow bB_r - \frac{1}{2} \langle ba \downarrow B_r + (-1)^{r-1} a \downarrow B_r b \rangle_r - \frac{1}{2} \langle ba \uparrow B_r + (-1)^{r+1} a \uparrow B_r b \rangle_r = a \downarrow bB_r - b \uparrow (a \downarrow B_r)$$

Esto completa la prueba $ba \uparrow B_r + (-1)^{r+1} a \uparrow B_r b = 2 \langle b(a \uparrow B_r) \rangle_{r+2}$ es de grado r+2 y al tomar su r-parte resulta nulo su valor.

Definición 6.1.8. *Multivectores pares e impares del $AG(n)$.*

1. El multivector $A_+ \in AG(n)$ es llamado multivector par si $\langle A_+ \rangle_r = 0 \quad \forall r$ impar , de manera equivalente $A_+ = \sum_{k=0} \langle A_+ \rangle_{2k}$
2. El multivector A_- es llamado multivector impar si $\langle A_- \rangle_r = 0 \quad \forall r$ par, de manera equivalente $A_- = \sum_{k=0} \langle A_+ \rangle_{2k+1}$

Proposición 6.1.9. *Propiedades para A_+ y A_-*

1. $a \downarrow A_+ = \frac{1}{2}(aA_+ - A_+a)$
2. $a \uparrow A_+ = \frac{1}{2}(aA_+ + A_+a)$
3. $a \downarrow A_- = \frac{1}{2}(aA_- + A_-a)$
4. $a \uparrow A_- = \frac{1}{2}(aA_- - A_-a)$

PRUEBA.-

1. Expresamos el multivector $A_+ = \sum_{k=0} \langle A_+ \rangle_{2k}$

$$a \downarrow A_+ = a \downarrow \sum_{k=0} \langle A_+ \rangle_{2k} = \sum_{k=0} a \downarrow \langle A_+ \rangle_{2k} = \sum_{k=0} \frac{1}{2}(a \langle A_+ \rangle_{2k} - (-1)^{2k} \langle A_+ \rangle_{2k} a) =$$

$$\frac{1}{2}(a \sum_{k=0} \langle A_+ \rangle_{2k} - \sum_{k=0} \langle A_+ \rangle_{2k} a) = \frac{1}{2}(aA_+ - A_+a)$$
2. Expresamos el multivector $A_+ = \sum_{k=0} \langle A_+ \rangle_{2k}$

$$a \uparrow A_+ = a \uparrow \sum_{k=0} \langle A_+ \rangle_{2k} = \sum_{k=0} a \uparrow \langle A_+ \rangle_{2k} = \sum_{k=0} \frac{1}{2}(a \langle A_+ \rangle_{2k} + (-1)^{2k} \langle A_+ \rangle_{2k} a) =$$

$$\frac{1}{2}(a \sum_{k=0} \langle A_+ \rangle_{2k} + \sum_{k=0} \langle A_+ \rangle_{2k} a) = \frac{1}{2}(aA_+ + A_+a)$$

Definición 6.1.10. *Sea $A \in AG(n)$ no nulo definimos y denotamos el grado de A por:*

$$\text{grad}(A) \equiv n \text{ si y solo si } \langle A \rangle_n \neq 0 \text{ y } \langle A \rangle_r = 0 \forall r \geq n + 1$$

Obsevación: grad puede considerarse como una función de $AG(n)$ en Z^+ .

Proposición 6.1.11. $A_r = a_1 a_2 \dots a_r \rightarrow A_r = \sum_{i=0}^r \langle A_r \rangle_i \wedge \text{grad}(A_r) \leq r$

Proposición 6.1.12. *Sean los vectores no nulos $a_1, a_2, \dots, a_r \in \langle AG(n) \rangle_1$ se cumple :*

$$\langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_r = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r$$

PRUEBA.- La demostración lo hacemos por inducción.

De la definición del producto exterior para 2 vectores tenemos :

$$\langle a_1 a_2 \rangle_2 = a_1 \uparrow a_2$$

Consideremos válido para h vectores.

$$\langle a_1 a_2 \dots a_h \rangle_h = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_h$$

Probemos ahora para $h + 1$ vectores. Aplicando 6.1.11

$$a_1 a_2 \dots a_h a_{h+1} = (a_1 a_2 \dots a_h) a_{h+1} = \sum_{r=0}^h \langle a_1 a_2 \dots a_h \rangle_r a_{h+1} = \sum_{r=0}^{h-1} \langle a_1 a_2 \dots a_h \rangle_r a_{h+1} + \langle a_1 a_2 \dots a_h \rangle_h a_{h+1} \quad (6.5)$$

Como el grado de cada sumando cumple $\text{grad}(\langle a_1 a_2 \dots a_h \rangle_r a_{h+1}) \leq h$ para $1 \leq r \leq h - 1$. Si tomamos la parte \langle, \rangle_{h+1} de la ecuación 6.5, los multivectores sumandos se anulan. $\langle a_1 a_2 \dots a_h a_{h+1} \rangle_{h+1} = \langle \langle a_1 a_2 \dots a_h \rangle_h a_{h+1} \rangle_{h+1} = \langle a_1 a_2 \dots a_h \rangle_h \uparrow a_{h+1} = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_h \uparrow a_{h+1}$

Observación 6.1.0.1. De la proposición 6.1.12 Si $a_1 a_2 \dots a_r$ es un r -vector entonces

$$a_1 a_2 \dots a_r = a_1 \downarrow a_2 \dots \downarrow a_r$$

Proposición 6.1.13. Si $a_1, a_2, \dots, a_r \in \langle AG(n) \rangle_1$ se cumple :

$$a \downarrow (a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \downarrow a_k) (a_1 \uparrow \dots \uparrow a_k^\vee \dots \uparrow a_r)$$

PRUEBA.- Demostraremos la proposición para vectores ortogonales dos a dos, luego por la linealidad del producto interior tendremos lo pedido. De la observación 6.1.0.1 y de la expresión 6.1.4 tenemos :

$$a_1 \uparrow a_2 \dots \uparrow a_r = a_1 a_2 \dots a_r \quad y \quad a \downarrow (a_1 a_2 \dots a_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \downarrow a_k) a_1 a_2 \dots a_k^\vee \dots a_r$$

$$a \downarrow (a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \downarrow a_k) (a_1 \uparrow \dots \uparrow a_k^\vee \dots \uparrow a_r).$$

Si $\{a_k\}_{k=1, \dots, r}$ son vectores cualesquiera, expresamos el multivector $a_1 a_2 \dots a_r$ como la suma de sus k -partes.

$$a \downarrow (a_1 a_2 \dots a_r) = a \downarrow \left(\sum_{k=0}^r \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_k \right) = a \downarrow \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_r + a \downarrow \sum_{k=0}^{r-1} \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_k. \quad (6.6)$$

Como el $grad(\langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_k) \leq r - 1$, para $k \leq r - 1$

$\implies (a \downarrow (\langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_k)) \leq r - 2$, para $k \leq r - 1$, tomando la (r-1)-parte a la expresión 6.6, observamos que el último sumando se anula y la expresión se reduce a :

$$\langle a \downarrow (a_1 a_2 \dots a_r) \rangle_{r-1} = \langle a \downarrow \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_r \rangle_{r-1}$$

De la definición del producto interior y de la proposición 6.1.4 se obtiene :

$$a \downarrow \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_r = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} a \downarrow a_k \langle a_1 a_2 \dots a_k^\vee \dots a_r \rangle_{r-1}$$

Y de la proposición 6.1.12 llegamos a:

$$a \downarrow (a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r) = \sum_{k=1}^r (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) a_1 \uparrow \dots \uparrow a_k^\vee \dots \uparrow a_r$$

Un caso particular tenemos :

$$a \downarrow (a_1 \uparrow a_2) = a \downarrow a_1 a_2 - a \downarrow a_2 a_1$$

Proposición 6.1.14. Si A_r es un r -vector simple tal que si

$$A_r = a_1 a_2 \dots a_r \text{ con } a_i a_j = -a_j a_i \text{ si y solo si cumple } A_r = a_1 a_2 \dots a_r = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r$$

PRUEBA.- \implies Como A_r es un r -vector simple, en particular un r -vector entonces por la observación 6.1.0.1 se tiene lo pedido, es decir :

$$a_1 a_2 \dots a_r = \langle a_1 a_2 \dots a_r \rangle_r = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r$$

\Leftarrow Lo hacemos por inducción.

Para a_1 y a_2 que cumple $a_1 a_2 = -a_2 a_1$ es equivalente a $a_1 \downarrow a_2 = 0$ entonces $a_1 a_2 = a_1 \uparrow a_2$.

Consideremos válido para h vectores (H.i), es decir si:

$$a_1 a_2 \dots a_h = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_h \text{ se cumple : } a_i a_j = -a_j a_i \text{ (} 1 \leq i \neq j \leq h \text{)}$$

Demostramos válido para $h + 1$ vectores.

Sea $a_1 a_2 \dots a_h a_{h+1} = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_h \uparrow a_{h+1}$ demostraremos que el vector a_{h+1} anticonmuta con cada uno de los vectores a_i es decir : $a_{h+1} a_i = -a_i a_{h+1} \forall i 1 \leq i \leq h$. Multiplicando la expresión por a_1 y haciendo uso de 6.4 y de la ecuación 6.1.13 se obtiene :

$$a_1^2 a_2 \dots a_h a_{h+1} = a_1 (a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_{h+1}) = a_1 \downarrow (a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_{h+1})$$

$$= \sum_{j=1}^{h+1} (-1)^{j+1} (a_1 \downarrow a_j) (a_1 \uparrow \dots \uparrow a_j^\vee \dots \uparrow a_{h+1})$$

por la (H.i) $a_1 \downarrow a_j = 0$ para $2 \leq j \leq h$, por tal la expresión se reduce a :

$$a_1^2 a_2 \dots a_h a_{h+1} = (a_1 \downarrow a_1) (a_2 \uparrow \dots \uparrow a_{h+1}) + (-1)^{h+2} (a_1 \downarrow a_{h+1}) (a_1 \uparrow \dots \uparrow a_h) \quad (6.7)$$

Donde : $a_1^2 a_2 \dots a_h a_{h+1} \in \langle AG(n) \rangle_h$, tomando la h-parte y de la proposición 6.1.14

$$a_1^2 a_2 \dots a_h a_{h+1} = \langle a_1^2 a_2 \dots a_h a_{h+1} \rangle_h = a_1^2 a_2 \uparrow \dots \uparrow a_h \uparrow a_{h+1}$$

De este último resultado y de la expresión 6.7 tenemos que:

$(-1)^{h+2} (a_1 \downarrow a_{h+1}) (a_1 \uparrow \dots \uparrow a_h) = 0$, como $(a_1 \downarrow a_{h+1}) (a_1 \uparrow \dots \uparrow a_h)$ es no nulo, multiplicamos por su inverso y tenemos : $a_1 \downarrow a_{h+1} = 0 \iff a_1 a_{h+1} = -a_{h+1} a_1$

De manera similar si en vez de multiplicar en un inicio por el vector a_1 , se multiplica por a_i , hubieramos logrado que el vector a_{h+1} anticonmute con los h vectores es decir : $a_{h+1} a_i = -a_i a_{h+1}$, $1 \leq i \leq h$.

Proposición 6.1.15. Sea $A_r \in \langle AG(n) \rangle_r$, $B_s \in \langle AG(n) \rangle_s$ entonces

$$A_r B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2} + \dots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s} = \sum_{k=0}^m \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2k}$$

$$\text{donde } m = \frac{\{r + s - |r - s|\}}{2} = \text{mín} \{r, s\}$$

La proposición indica que el producto de dos multivectores homogeneos puede ser descompuesto en sumandos de multivectores homogeneos que se diferencia en múltiplos de 2, donde el de menor grado es el producto interior de ellos $\langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} = A_r \downarrow B_s$ y el de mayor grado es producto exterior de ellos $\langle A_r B_s \rangle_{|r+s|} = A_r \uparrow B_s$

PRUEBA.- La prueba lo desarrollamos por inducción sobre un r-vector simple A_r .

Si $r = 0$ ó $s = 0$ se cumple por la misma definición del producto interior. Veamos para $r, s \geq 1$

Procedemos por inducción sobre r . Si

$$r = 1 \implies A_1 = a \in \langle AG(n) \rangle_1 \implies a B_s = \langle a B_s \rangle_{s-1} + \langle a B_s \rangle_{s+1} \quad .$$

Supongamos válido para cualquier r-vector simple. (Hipótesis inductiva.)

Probaremos para A_{r+1} un r+1-vector simple. $A_{r+1} = a_1 a_2 \dots a_r a_{r+1}$; $a_i a_j = -a_j a_i$, con $i \neq j$

$$A_{r+1} B_s = A_r a_{r+1} B_s = A_r \langle a_{r+1} B_s \rangle_{s-1} + A_r \langle a_{r+1} B_s \rangle_{s+1} = \\ \sum_{k=0}^{\min\{r, s-1\}} \langle A_r \langle a_{r+1} B_s \rangle_{s-1} \rangle_{|r-(s-1)|+2k} + \sum_{k=0}^{\min\{r, s+1\}} \langle A_r \langle a_{r+1} B_s \rangle_{s+1} \rangle_{|r-(s+1)|+2k}$$

Para fijar ideas supongamos que $r < s$

Por tal :

$$A_{r+1} B_s = \sum_{k=0}^r \langle A_r \langle a_{r+1} B_s \rangle_{s-1} \rangle_{|r+1-s|+2k} + \sum_{k=0}^r \langle A_r \langle a_{r+1} B_s \rangle_{s+1} \rangle_{|r-(s+1)|+2k}$$

De $s > r$: $|r - (s + 1)| + 2k = |r + 1 - s| + 2(k + 1)$

$$A_{r+1} B_s = \sum_{k=0}^r \langle A_r \langle a_{r+1} B_s \rangle_{s-1} \rangle_{|r+1-s|+2k} + \sum_{k=0}^r \langle A_r \langle a_{r+1} B_s \rangle_{s+1} \rangle_{|r+1-s|+2(k+1)} = \sum_{k=0}^{r+1} \langle A_{r+1} B_s \rangle_{|r+1-s|+2k}$$

Si consideramos $m = \min\{r + 1, s\}$ tenemos : $A_{r+1} B_s = \sum_{k=0}^{r+1} \langle A_{r+1} B_s \rangle_{|r+1-s|+2k}$

Proposición 6.1.16. Sean A, B multivectores , a un vector que cumple $a \uparrow B = 0$ entonces se cumple

$$(a \uparrow A)B = a \downarrow (AB)$$

PRUEBA.- Haremos la prueba para A_r, B_s multivectores homogéneos.

$m = \min\{r, s\}$ Si $a \uparrow B_s = 0$ descomponemos el producto ,

$$a B_s = a \downarrow B_s = (-1)^{s-1} B_s \downarrow a = (-1)^{s-1} B_s a$$

De la proposición 6.1.15 descomponemos el producto $A_r B_s$, donde $m = \min\{r, s\}$

$$a \downarrow (A_r B_s) = a \downarrow \left(\sum_{k=0}^m \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2k} \right) = \sum_{k=0}^m a \downarrow \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2k} = \\ \sum_{k=0}^m \frac{1}{2} [a \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2k} - (-1)^{|r-s|} \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2k} a] = \frac{1}{2} [a(A_r B_s) - (-1)^{|r-s|} (A_r B_s) a] = \\ \frac{1}{2} [a(A_r B_s) - (-1)^{|r-s|} (A_r (-1)^{s-1} a B_s)] \stackrel{\text{Si } r \geq s}{=} \frac{1}{2} [a(A_r B_s) - (-1)^{r-s} (A_r (-1)^{s-1} a B_s)] = \\ \frac{1}{2} [a(A_r B_s) + (-1)^r A_r a B_s] = \frac{1}{2} [a A_r + (-1)^r A_r a] B_s = (a \wedge A_r) B_s.$$

Es suficiente probar para multivectores homogéneos pues por la linealidad del producto geométrico y del hecho que cualquier multivector es la suma finita de r-vectores, tendremos lo pedido.

6.1.1. Construcción de espacios vectoriales en el AG(n)

El Álgebra Geométrica nos permite construir espacios vectoriales V_r a partir de r -vectores simples no nulos y reciprocamente cada subespacio vectorial orientado V_r de un espacio vectorial V_n determina r -bloques unitarios con una dirección específica.

Proposición 6.1.17. *Si A un n – vector simple no nulo del $AG(n)$, podemos construir el conjunto de vectores $V_n = \{a / a \uparrow A = 0\}$ como un subálgebra de $\langle AG(n) \rangle_1$ tal conjunto es un espacio vectorial de dimensión n .*

PRUEBA.- Como A es un n – bloque no nulo, podemos expresar como el producto de n vectores anticonmutativo, y de la proposición 6.1.14

$$A = a_1 a_2 \dots a_n = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_n$$

Cada vector a_k del producto, es un elemento de V_n , ya que $a_k \uparrow A = 0$ para $k \in \{1, 2, \dots, n\}$
 Afirmo que $\{a_1, a_2 \dots a_n\}$ es una base del espacio vectorial V_n .

1. a_1, a_2, \dots, a_n son linealmente independiente.

PRUEBA.- Pues si a_n es una combinación lineal de los demás vectores ($a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_k$) tenemos que :

$$A = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_n = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_{n-1} \uparrow \left(\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k a_k \right) = 0$$

esto es una contradicción pues $A \neq 0$

2. Cualquier vector a es generado por $a_1, a_2 \dots a_n$.

PRUEBA.- La expresión $a \uparrow A = 0$, es equivalente a $aA = a \downarrow A$ multiplicando por $A^{-1} = a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$; $a = a \downarrow AA^{-1}$

De la proposición 6.1 desarrollamos el producto $a \downarrow A$ y añadimos $a_k^{-1} a_k$.

$a = \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a \downarrow a_k (a_k^{-1} a_k) a_1 a_2 \dots a_k \dots a_n \right) a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$ de la anticonmutatividad de a_k con los demás vectores tenemos.

$$a = \sum_{k=1}^n a \downarrow a_k^{-1} a_k \tag{6.8}$$

Revirtiendo el argumento anterior probemos que el espacio vectorial V_n determina un n - bloque, para ello veremos que dos bases de V_n son proporcionales o equivalentes.

Si $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ son bases de V_n , ahora expresamos cada elemento a_i como combinación lineal de la base $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, el cual toma la forma : $a_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k^i b_k$. y reemplazando en el n - vector.

$$a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_n = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^1 b_k \right) \uparrow \dots \uparrow \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k^n b_k \right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^1 \dots \alpha_k^n b_1 \uparrow \dots \uparrow b_n$$

De forma similar como se trabajó en $AG(3)$, aquí también podemos descomponer vectores en un espacio vectorial y su espacio ortogonal.

El n - bloque A facilita descomponer cualquier vector $b = b_{\parallel} + b_{\perp}$ en un elemento de V_n ($b_{\parallel} \in V_n$) y otro ortogonal al espacio V_n . ($b_{\perp} \perp V_n$)

Definido de la siguiente manera. $b_{\parallel} = b \downarrow AA^{-1}$, $b_{\perp} = b \uparrow AA^{-1}$

La prueba es la misma que se hizo en $AG(3)$ proposición 2.1.8, al considerar el multivector A , como un bivector.

Proposición 6.1.18. Sea A_r un r -bloque no nulo y V_r el espacio generado por A_r .

Si B_r es un r -vector no nulo / $B_r = b_1 \uparrow b_2 \uparrow \dots \uparrow b_r$ con $b_i \in V_r$

entonces existe $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $B_r = \alpha A_r$.

PRUEBA.- Como V_r es el espacio generado por A_r .

Entonces $V_r = \{v/v \uparrow A_r = 0\}$ Como cada $b_i \in V_r$ expresamos :

$b_i A_r = b_i \downarrow A_r$, $b_i = b_i \downarrow A_r^{-1} A_r$ del resultado 6.8 tenemos que :

$$b_i = \sum_{k=1}^r b_i \downarrow a_k^{-1} a_k \text{ donde } A_r = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r$$

Ahora expresamos cada b_i como combinación de los a_k en B_r

$$B_r = b_1 \uparrow b_2 \uparrow \dots \uparrow b_r = \left(\sum_{k=1}^r b_1 \downarrow a_k^{-1} a_k \right) \uparrow \dots \uparrow \left(\sum_{k=1}^r b_r \downarrow a_k^{-1} a_k \right) = \alpha a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r$$

Calculemos el valor de α para el caso particular $r = 2$. Sea $A_2 = e_1 e_2$

$$b_1 = b_1 \downarrow e_1 e_1 + b_1 \downarrow e_2 e_2 \text{ y } b_2 = b_2 \downarrow e_1 e_1 + b_2 \downarrow e_2 e_2$$

$$b_1 \uparrow b_2 = (b_1 \downarrow e_1 b_2 \downarrow e_2 - b_1 \downarrow e_2 b_2 \downarrow e_1) e_1 \uparrow e_2 = \alpha e_1 \uparrow e_2$$

El coeficiente α está dado por la determinante $\begin{vmatrix} b_1 \downarrow e_1 & b_2 \downarrow e_1 \\ b_1 \downarrow e_2 & b_2 \downarrow e_2 \end{vmatrix}$

Ahora para r-vectores tendremos que el coeficiente α dado por la determinante que relaciona la multiplicidad de los r-vectores.

$$b_1 \uparrow b_2 \uparrow \dots \uparrow b_r = \begin{vmatrix} b_1 \downarrow a_1 & b_2 \downarrow a_1 & \dots & b_r \downarrow a_1 \\ b_1 \downarrow a_2 & b_2 \downarrow a_2 & \dots & b_r \downarrow a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 \downarrow a_r & b_2 \downarrow a_r & \dots & b_r \downarrow a_r \end{vmatrix} a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_r$$

A la vez $\alpha \neq 0$, caso contrario tendríamos que $b_1 \uparrow b_2 \uparrow \dots \uparrow b_r = 0$ contradice la hipótesis.

Como caso particular tenemos para A_n un n-vector de $AG(n)$ puede expresarse por $A_n = \det(A_n)e_{12\dots n}$, donde $e_{12\dots n}$ es el pseudoescalar unitario del $AG(n)$, es decir cumple $e_{12\dots n}^2 = -1$, a la vez podemos despejar $\det(A_n) = A_n e_{12\dots n}^{-1}$, esto indica que podemos desarrollar toda la teoría de los determinantes utilizando elementos del álgebra relacionados simplemente por el producto geométrico.

La proposición indica que todos los r-vectores obtenidos a partir un espacio vectorial generado por un r-vector cualquiera todos ellos son equivalentes.

6.1.2. Las matrices en el Álgebra Geométrica $AG/(n)$

En el capítulo I vimos como las matrices de Pauli generan un espacio vectorial el cual es isomorfo al $AG(3)$, en esta parte del trabajo detallamos explícitamente que una matriz en el $AG(n)$ simplemente será expresado como el producto geométrico de vectores, hallaremos también la una versión en el $AG(n)$ del proceso de ortogonalización de vectores (Proceso de Gram-Schmidt) y como podemos solucionar ecuaciones vectoriales en un sistema. (Regla de Cramer)

Definición 6.1.19. *Llamamos REFERENCIAL al conjunto de vectores a_1, a_2, \dots, a_n cuyo producto exterior es no nulo. $a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_n$.*

De la condición de linealidad 6.1.3 $a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_n \neq 0$ si y solo si a_1, a_2, \dots, a_n son l.i.

Definición 6.1.20. Dado el referencial a_1, a_2, \dots, a_n el referencial a^1, a^2, \dots, a^n será llamado su REFERENCIAL RECIPROCO si se cumple $a^k \downarrow a_j = \delta_j^k$ delta de Kronecker.

Definición 6.1.21. Dado el referencial a_1, a_2, \dots, a_n el referencial a^1, a^2, \dots, a^n será un referencial ortogonal si a^i, a^j son ortogonales para cada $i \neq j$.

Teorema 6.1.22. Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

Dado un referencial a_1, a_2, \dots, a_n siempre es posible de obtener un referencial ortogonal.

PRUEBA.- Dado el referencial a_1, a_2, \dots, a_n construimos multivectores homogéneos con una secuencia de grados de la siguiente manera :

$$A_0 = 1, \quad A_1 = a_1, \quad A_2 = a_1 \uparrow a_2, \quad \dots, \quad A_n = a_1 \uparrow a_2 \uparrow \dots \uparrow a_n.$$

Afirmo que los vectores $c_k = \widetilde{A_{k-1}} A_k$, $k = 1, \dots, n$ son ortogonales dos a dos, donde \widetilde{A} es el operador reverso el multivector A .

Veamos que los vectores c_r, c_k ($1 \leq r, k \leq n$) anticonmutan para $k \neq r$

Sin pérdida de generalidad consideremos $r < k$; $c_r c_k = \widetilde{A_{r-1}} (A_r \widetilde{A_{k-1}}) A_k$ Como $r < k$, el espacio vectorial generado por A_r , es un subespacio del espacio generado por $\widetilde{A_{k-1}}$, por tal su producto geométrico coincide con su producto interno.

$$A_r \widetilde{A_{k-1}} = A_r \downarrow \widetilde{A_{k-1}} = (-1)^{r(k-2)} \widetilde{A_{k-1}} \downarrow A_r = (-1)^{r(k-2)} \widetilde{A_{k-1}} A_r$$

$$c_r c_k = (-1)^{r(k-2)} \widetilde{A_{r-1}} (\widetilde{A_{k-1}} A_r) A_k = A_r \downarrow \widetilde{A_{k-1}} = (-1)^{r(k-2)} \widetilde{A_{k-1}} \downarrow A_r = (-1)^{r(k-2)} \widetilde{A_{k-1}} A_r$$

$$c_r c_k = (-1)^{r(k-2)} \widetilde{A_{r-1}} (\widetilde{A_{k-1}} A_r) A_k$$

De la misma manera asociando $\widetilde{A_{r-1}}$ con $\widetilde{A_{k-1}}$ y A_r con A_k tenemos :

$$c_r c_k = (-1)^{r(k-2)+(r-1)(k-2)+r(k-1)} \widetilde{A_{k-1}} \widetilde{A_{r-1}} A_k A_r$$

por último $\widetilde{A_{r-1}} A_k$. Observamos que la expresión :

$$c_r c_k = (-1)^{r(k-2)+(r-1)(k-2)+r(k-1)+(r-1)(k-1)} \widetilde{A_{k-1}} A_k \widetilde{A_{r-1}} A_r = -c_k c_r$$

Dado que : $r(k-2) + (r-1)(k-2) + r(k-1) + (r-1)(k-1)$ es impar.

Del producto geométrico de los c_k .

$c_1 c_2 \dots c_k = A_k \|A_{k-1}\|^2 \dots \|A_2\|^2 \|A_1\|^2$, el resultado indica que el k-vector A_k se expresa como el producto exterior de k vectores ortogonales dos a dos.

Para facilitar los cálculos es de importancia conocer c_k como una combinación lineal de los vectores a_i .

De $c_k = \widetilde{A_{k-1}} \downarrow A_k = (a_{k-1} \uparrow \dots \uparrow a_1) \downarrow (a_1 \uparrow \dots \uparrow a_k)$, donde

$$c_k = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} (a_{k-1} \uparrow \dots \uparrow a_1) \downarrow (a_1 \uparrow \dots \overset{\vee}{a_i} \dots \uparrow a_k) a_i$$

Tomemos como caso particular $n = 2$.

Expresemos el 2-vector $a \wedge b$ como un 2-bloque. Sea $c_1 = a$ y $c_2 = a(a \uparrow b)$ se observa que c_1 y c_2 son ortogonales. Probamos ello :

$$\begin{aligned} c_1 c_2 &= a [a(a \uparrow b)] = a \left[a \left(\frac{ab - ba}{2} \right) \right] = \\ a \left(\frac{ba^2 - aba}{2} \right) &= a \left[\left(\frac{ba - ab}{2} \right) a \right] = -a \left[\left(\frac{ab - ba}{2} \right) a \right] = -[a(a \uparrow b)] a = -c_2 c_1. \end{aligned}$$

A la vez $a \uparrow b = \frac{1}{a^2} c_1 c_2$ Si a es unitario $a \uparrow b = c_1 c_2$.

Proposición 6.1.23. *Dado un referencial a_1, a_2, \dots, a_n siempre es posible obtener su referencial recíproco a^1, a^2, \dots, a^n . Es decir que cumpla $a^k \downarrow a_j = \delta_j^k$*

PRUEBA.- Si $A_n = a_1 \uparrow \dots \uparrow a_n = (-1)^{k-1} a_k \uparrow (a_1 \uparrow \dots \overset{\vee}{a_k} \dots \uparrow a_n)$, expresamos el delta de Kronecker de la siguiente manera :

$$\delta_j^k = a_j \uparrow \left[(-1)^{k-1} (a_1 \uparrow \dots \overset{\vee}{a_k} \dots \uparrow a_n) \right] A_n^{-1}$$

Gracias a la propiedad asociativa del álgebra obtenemos:

$$(A_r \uparrow B_s) \downarrow C_t = A_r \downarrow (B_s \downarrow C_t) \text{ para } r + s \leq t$$

Ahora expresamos $\delta_j^k = (a_j \uparrow B_{n-1}) A_n^{-1} = a_j \downarrow (B_{n-1} A_n^{-1})$

Observe que no existe el producto interior en ambos miembros de la igualdad ya que $a_j, B_{n-1} \in A_{n-1}$ - espacio, dado que $a_j \uparrow A_n^{-1} = 0$ y $B_{n-1} = (-1)^{k-1} a_1 \uparrow \dots \overset{\vee}{a_k} \dots \uparrow a_n$

por tal $\delta_j^k = a_j \downarrow ((-1)^{k-1} a_1 \uparrow \dots \overset{\vee}{a_k} \dots \uparrow a_n A_n^{-1}) = a_j \downarrow a^k$

donde $a^k = (-1)^{k-1} a_1 \uparrow \dots \overset{\vee}{a_k} \dots \uparrow a_n A_n^{-1}$.

Expresemos a^k como una combinación lineal de los vectores a_k .

De la definición inversa del r-vector $A_n^{-1} = \|A_n\|^{-2} \widetilde{A}_n = \frac{\widetilde{A}_n}{A_n \widetilde{A}_n} = \frac{a_n \uparrow \dots \uparrow a_1}{(a_1 \uparrow \dots \uparrow a_n) \downarrow (a_n \uparrow \dots \uparrow a_1)}$

Remplazando en la expresión a^k .

$$a^k = (-1)^{k-1} a_1 \uparrow \dots \overset{\vee}{a_k} \dots \uparrow a_n \frac{a_n \uparrow \dots \uparrow a_1}{(a_1 \uparrow \dots \uparrow a_n) \downarrow (a_n \uparrow \dots \uparrow a_1)} = \sum_{i=1}^k (-1)^{k+i} \frac{(a_1 \uparrow \dots \overset{\vee}{a_k} \dots \uparrow a_n) \downarrow (a_1 \uparrow \dots \overset{\vee}{a_i} \dots \uparrow a_k)}{(a_1 \uparrow \dots \uparrow a_n) \downarrow (a_n \uparrow \dots \uparrow a_1)} a_i$$

Bibliografía

- [1] Edgar Vera Saravia. *Notas Álgebra de Matrices sin Matrices 3D*
- [2] Hestenes and Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus*
- [3] Ablamawics-Sobczyk *Lectures on Clifford (Geometric) Algebras and Applications*; Birkhauser, 2004.
- [4] Bekken, O. *Una Historia Breve del Algebra*; Sociedad Matematica Peruana, 1983.
- [5] Dirac, P.A.M. *The Mathematical Foundations of Quantum Theory*; Academic Press, Inc., 1978.
- [6] Doran-Lasenby *Physical Applications of Geometric Algebra*; Lecture Course, Cambridge University.
- [7] Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics*; Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [8] Lounesto, P. *Clifford Algebras and Spinors*; Cambridge University Press, 2001.
- [9] Snigg, J. *A New Approach to Differential Geometry using Clifford's Geometry*; Springer Science+Business Media, LLC 2012.
- [10] Sobczyk, G. *The hyperbolic number plane*; The College Mathematics Journal, Vol. 26, No. 4, 1995.
- [11] Vaz Jr., J. *A álgebra geométrica do espaço euclideano e a teoria de Pauli*; Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 19 numero 2, 1997.

- [12] Vaz Jr., J. Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 22 numero 1, 2000. *A álgebra geométrica do espaço-tempo e a teoria da relatividade*; Revista Brasileira de Ensino de Física, Vol. 22 numero 1, 2000.