UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Estabilidad exponencial para una viga de componentes viscoso con mecanismo friccional

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Leonardo Henry ALEJANDRO AGUILAR

ASESOR

Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima - Perú

2017

Estabilidad Exponencial para una Viga de Componentes Viscoso con Mecanismo Friccional.

Leonardo Henry Alejandro Aguilar

Tesis de Licenciatura presentada al Programa de Pregrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas - Escuela Profesional de Matemática, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios para Optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Asesor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Lima - Perú

14 de Julio del 2017

Estabilidad Exponencial para una Viga de Componentes Viscoso con Mecanismo Friccional.

Leonardo Henry Alejandro Aguilar

Tesis de Licenciatura sometida al Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas - Escuela Profesional de Matemática, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos necesarios para Optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

Presidente, Dr. Alfonso Pérez Salvatierra - UNMSM

Asesor, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa - UNMSM

Mg. Claudio Balcázar Huapaya - UNMSM

Lima - Perú

14 de Julio del 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Leonardo Henry Alejandro Aguilar.

Estabilidad Exponencial para una Viga de Componentes Viscoso con Mecanismo Friccional.

Asesor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Tesis de Licenciatura - UNMSM / Programa de Pregrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas - Escuela Profesional de Matemática, 2017.

I. Programa de Pregrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas - Escuela Profesional de Matemática.

II. Título:

   1) Preliminares
   2) Modelo Matemático
   3) Estabilidad Exponencial

III. UNMSM - Lima - Perú - 14 de Julio del 2017

Dedicado a todos los peruanos
que muestran su talento, esfuerzo y
perseverancia en beneficio de su país.

Agradecimientos

A lo largo de estos años, compartí momentos buenos y agradables con muchas personas. Agradezco :

• A mis padres Ana y Juan, que siempre lucharon por mi educación. También agradezco a mis hermanos por el apoyo y comprensión.

• A mi novia Lucia, por su compañía, compreensión y confianza.

• A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, por las lecciones que aprendí en ella.

• Al Profesor Eugenio Cabanillas Lapa, un asesor con eficiencia y confianza.

• A los Profesores de la Escuela Profesional de Matemática, por contribuir en la formación de los alumnos durante el Pregrado.

• A mis Colegas de Pregrado, en especial a todos mis amigos cercanos.

• A los Trabajadores Técnicos y Administrativos de la Escuela Profesional de Matemática, por sus labores eficientes dentro de la facultad.

• Por fin, agradezco a todos los que directamente o indirectamente me dieron su apoyo.

Resumen

En esta Tesis de Licenciatura consideramos el problema de transmisión para una viga compuesta por tres componentes diferentes: una de ellas es un material de tipo viscoelástico, la otra es un material de tipo elástico (sin mecanismo disipativo) y la última es un material de tipo elástico inserido de un mecanismo de amortiguamiento friccional.
Se estudia la buena colocación del problema y el comportamiento asintótico de las oscilaciones de este material. La conclusión es: **si la componente viscoelástica no está en el medio de la viga, entonces la solución del modelo tiene decaimiento exponencial.**
Nuestra principal herramienta para tratar este problema es la Teoría de Semigrupos. Para demostrar la existencia y unicidad de la solución del problema, usamos los Teoremas de Hille - Yosida y Lumer - Phillips. Además, en el estudio de la estabilidad exponencial usamos el Teorema de Pruss.

Palabras claves: Problema de transmisión, material elástico, material viscoelástico, comportamiento asintótico, estabilidad exponencial.

Abstract

In this thesis we consider the problem of transmission of a beam composed of three different components: one is a material of viscoelastic type, the other is a material of elastic type (without dissipative mechanism) and the last one is a material of elastic type inserted with a friction damping mechanism.

The asymptotic behavior of the oscillations of this material is studied. The conclusion is: if the viscoelastic component is not in the middle of the beam, then the solution of the model has exponential decay.

Our main tool to deal with this problem is Semigroup Theory. To demonstrate the existence and uniqueness of the solution of the problem, we use Hille-Yosida and Lumer Phillips Theorems. In addition, to demonstrate exponential stability, we use Pruss Theorem.

Keywords: Transmission problem, elastic material, viscoelastic material, asymptotic behavior, exponential stability.

Índice general

Introducción

La ecuación de la onda con amortiguamiento friccional localizada fue estudiada por diversos autores y ahora es bien conocido que el semigrupo definido por esta ecuación es exponencialmente estáble sin importar el tamaño ni la localización del subintervalo donde el mecanismo de amortiguamiento es eficaz. Ver por ejemplo $[8, 15, 16, 20, 22, 23, 27, 28, 32]$ para citar algunos.

K. Liu y Z. Liu en $[19]$, demostraron un resultado semejante con la ecuación de la viga de Euler-Bernoulli con amortiguamiento Kelvin-Voigt localizada. Es decir, que no importa el tamaño ni la posición en que el mecanismo de amortiguamiento es eficaz, el semigrupo definido por la solución del modelo es siempre exponencialmente estáble. Bajo la luz de este resultado, se puede intuir que la ecuación de la onda con disipación localizada de tipo Kelvin-Voigt también es exponencialmente estáble, es decir, el semigrupo definido por la solución de la ecuación de la onda con amortiguamiento Kelvin-Voigt localizada es también exponencialmente estáble. Pero eso no es verdad, como se probó en $[19]$. Es decir, amortiguamiento Kelvin-Voigt localizada no produce estabilidad exponencial para la ecuación de la onda.

En esta tesis, estudiamos el problema de transmisión con viscoelasticidad localizada de tipo Kelvin-Voigt, es decir, consideramos una viga compuesta por tres componentes diferentes: una de ellas es de tipo viscoelástico, la otra es una parte elástica, sin mecanismo disipativo, y finalmente la tercera componente es de tipo elástico inserido de un mecanismo de amortiguamiento friccional. Nuestro trabajo consiste en mostrar que la posición de sus componentes desempeña un papel importante en el estudio de la estabilización, cuyo resultado principal establece: **si la parte viscosa no está en el medio de la viga, entonces la solución del modelo tiene decaimiento exponencial.**

Nuestra principal herramienta para estudiar este problema es la Teoría de Semigrupos. Para mostrar la buena colocación del problema, usamos los Teoremas de Hille - Yosida y Lumer - Phillips. Además, en el estudio del comportamiento asintótico, usando el Teorema de Pruss, se demuestra que el semigrupo definido por la solución del modelo, es exponencialmente estáble.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Análisis Funcional y Espacios de Sobolev.

Análisis Funcional

En esta sección, todos los espacios vectoriales están definidos sobre un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. *Sean* X , Y *espacios de Banach y* $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ *un operador lineal con domínio* $D(A)$.

1. A *es* **acotado,** *si existe una constante* $C \geq 0$ *tal que* $\|A\,u\|_Y \leq C\,\|u\|_X$, $\forall\, u \in D(A)$. *Caso contrário,* A *es* **no acotado***.*
2. A *es* **densamente definido,** *si* $\overline{D(A)} = X$.
3. A *es* **cerrado,** *si su gráfico* $G(A) = \{(u, A\,u) \in X \times Y : u \in D(A)\}$, *es un subespacio cerrado de* $X \times Y$, *donde* $X \times Y$ *es un espacio de Banach con la norma* $\|\cdot\|_{X\times Y} = \left(\|\cdot\|_X^2 + \|\cdot\|_Y^2\right)^{1/2}$.

Sean X e Y espacios normados. Se representa por $\mathcal{L}(X, Y) = \{A : X \longrightarrow Y \ / \ A$ es lineal y acotado $\}$. $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio normado con la norma definida por

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|A\,u\|_Y \,.$$

Además, si Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio de Banach.
Se denotará por $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$.

Teorema 1.1 (Teorema de la Aplicación Abierta). *Sean* X , Y *espacios de Banach y* $A : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal, acotado y sobreyectivo. Entonces existe un* $r > 0$ *tal que* $B_Y(0; r) \subset A(B_X(0; 1))$.

Demostración. Ver [5]. □

Corolario 1.1. *Sean* X , Y *espacios de Banach y* $A : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal, acotado y biyectivo. Entonces* A^{-1} *es acotado.*

Demostración. Ver [5]. □

Teorema 1.2 (**Teorema del Gráfico Cerrado**). *Sean* X , Y *espacios de Banach y* $A : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal. Si* A *es cerrado, entonces es acotado.*

Demostración. Ver [5]. □

Teorema 1.3 (**Operador Cerrado**). *Sean* X , Y *espacios normados y* $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ *un operador lineal acotado.*

1. *Si* $D(A)$ *es un subconjunto cerrado de* X , *entonces* A *es cerrado.*

2. *Si* A *es cerrado e* Y *es un espacio de Banach, entonces* $D(A)$ *es un subconjunto cerrado de* X .

Demostración. Ver [18]. □

Teorema 1.4 (**Teorema de la Acotación Uniforme**). *Sean* X *un espacio de Banach,* Y *un espacio normado y* $(A_i)_{i\in I}$ *una familia (no necesariamente contable) en* $\mathcal{L}(X,Y)$. *Suponga que*

$$\sup_{i\in I} \|A_i\, u\|_Y < \infty \, , \; \forall\, u \in X \, .$$

Entonces

$$\sup_{i\in I} \|A_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty \, .$$

Demostración. Ver [13]. □

Teorema 1.5. *Sean* X *un espacio normado e* Y *un subespacio de* X . *Entonces*

1. *Si* X *es reflexivo, entonces* X *es completo.*

2. *Sea* X *es un espacio de Banach. Entonces,* Y *es completo, si y sólo si,* Y *es cerrado en* X .

3. *Si el espacio dual* X' *es separable, entonces* X *es separable.*

4. *Si* Y *tiene dimensión finita, entonces es completo, reflexivo y cerrado en* X .

Demostración. Ver [18]. □

Teorema 1.6. *Sean* H *un espacio de Hilbert e* Y *un subespacio de* H . *Entonces:*

1. H *es reflexivo.*

2. *Si* H *es separable, entonces* Y *es separable.*

3. *Si* Y *es cerrado en* H , *entonces* $Y = \left(Y^{\perp}\right)^{\perp}$ *y* $H = Y \oplus Y^{\perp}$.

4. Y *es denso en* H , *si y sólo si,* $Y^{\perp} = \{0\}$.

Demostración. Ver [18]. □

Proposición 1.1. *Sean* X *un espacio de Banach,* Y *un subespacio de* X *y* $0 < r < 1$. *Si* $\overline{Y} \neq X$, *entonces existe un* $y_0 \in X$ *tal que* $\|y_0\| = 1$ *y* $\|y - y_0\| \geq r$, $\forall\, y \in \overline{Y}$.

Demostración. Ver [25]. □

Teorema 1.7. *Sean* X *un espacio de Banach y* $A \in \mathcal{L}(X)$ *.*
Si $\|A\| < 1$ *, entonces* $(I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ *y* $(I - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} A^i$ *.*

Demostración. Ver [18]. □

Definición 1.2. *Sean* X *un espacio de Banach complejo y* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal.*

1. *El conjunto resolvente de* A *,* $\varrho(A)$ *, es el conjunto*

$$\varrho(A) := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \ / \ (\lambda I - A) \text{ es invertible y } (\lambda I - A)^{-1} \text{ es un operador acotado con domínio denso en } X \Big\} \ .$$

   Además, para cada $\lambda \in \varrho(A)$ *, el operador lineal* $R(\lambda\,;\,A) := (\lambda I - A)^{-1}$ *es llamado resolvente de* A *.*

2. *El espectro de* A *,* $\sigma(A)$ *, es el conjunto* $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A)$ *.*

Proposición 1.2 (Domínio de $R(\lambda, A)$ **).** *Sean* X *un espacio de Banach complejo,* $A : X \longrightarrow X$ *un operador lineal y* $\lambda \in \varrho(A)$ *. Si* A *es acotado o cerrado, entonces* $D(R(\lambda, A)) = X$ *.*

Demostración. Ver [18]. □

Teorema 1.8 (Representación del Resolvente). *Sean* X *un espacio de Banach complejo y* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal. Si* $\mu \in \varrho(A)$ *y* $|\lambda - \mu| = \|R(\mu, A)\|^{-1}$ *, entonces* $\lambda \in \varrho(A)$ *y* $R(\lambda, A) = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu - A)^i \, R(\mu, A)^{i+1}$ *.*

Demostración. Ver [25]. □

Corolario 1.2 (Resolvente y Espectro). *Sean* X *un espacio de Banach complejo y* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal. Entonces*

1. $\varrho(A)$ *es abierto en* X *y* $R(\lambda, A)$ *es una función contínua en* $\varrho(A)$ *.*

2. *Si* A *es acotado, entonces* $\sigma(A)$ *es un conjunto compacto no vacio y* $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |z| \leq \|A\|\}$ *.*

Demostración. Ver [25]. □

Teorema 1.9 (Ecuación resolvente y Commutatividad). *Sean* X *un espacio de Banach complejo,* $A\,,\,S \in \mathcal{L}(X)$ *y* $\lambda\,,\,\mu \in \varrho(A)$ *. Entonces*

1. *Ecuación resolvente:* $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu)\, R(\lambda, A)\, R(\mu, A)$ *.*

2. *Si* $S\,A = A\,S$ *entonces* $R(\lambda, A)\, S = S\, R(\lambda, A)$ *.*

3. $R(\lambda, A)\, R(\mu, A) = R(\mu, A)\, R(\lambda, A)$.

Demostración. Ver [18]. □

Teorema 1.10. *Sean* X *un espacio de Banach complejo,* $A \in \mathcal{L}(X)$ *y* $\mu \in \varrho(A)$. *Entonces*

1. $R(\lambda, A)$ *es analítica en* $\varrho(A)$.
2. $\|R(\mu, A)\| \geq \dfrac{1}{d(\mu)}$, *donde* $d(\mu) = dist(\mu, \varrho(A)) := \inf\limits_{\lambda \in \varrho(A)} \|\mu - \lambda\|$.
   Además, $\|R(\mu, A)\| \longrightarrow \infty$ *cuando* $d(\mu) \longrightarrow 0$.

Definición 1.3. *Sean* X *un espacio de Banach complejo y* $A \in \mathcal{L}(X)$.
El rádio espectral de A , $R_\sigma(A)$, *es el número real* $R_\sigma(A) = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

Proposición 1.3. *Sean* X *un espacio de Banach complejo y* $A \in \mathcal{L}(X)$.
Entonces $R_\sigma(A) = \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}$.

Demostración. Ver [18]. □

Teorema 1.11 (Teorema de Representación de Riesz). *Sean* $(H, \langle \cdot\,, \cdot \rangle_H)$ *un espacio de Hilbert y* $f \in H'$. *Entonces existe un único* $v_f \in H$ *tal que* $f(u) = \langle u, v_f \rangle_H$, *para todo* $u \in H$. *Además,* $\|f\|_{H'} = \|v_f\|$.
Por otro lado, para cada $v \in H$, *la aplicación* $g_v(u) = \langle u, v \rangle_H$, *para todo* $u \in H$ *pertenece a* H' . *Además,* $\|g_v\|_{H'} = \|v\|$.

Demostración. Ver [34]. □

Definición 1.4. *Sean* X *un espacio normado,* $B(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ *y* $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *aplicaciones.*

1. $B(\cdot, \cdot)$ *es una* **forma sesquilineal,** *si para todo* $u, v, w \in X$ *y para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, *se verifican*
   a) $B(\alpha\, u + \beta\, w, v) = \alpha\, B(u, v) + \beta\, B(w, v)$
   b) $B(u, \alpha\, v + \beta\, w) = \overline{\alpha}\, B(u, v) + \overline{\beta}\, B(u, w)$.
2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *entonces* $B(\cdot, \cdot)$ *es llamada* **forma bilineal**.
3. f *es llamada* **antilineal,** *si* $f(\alpha\, u + v) = \overline{\alpha}\, f(u) + f(v)$, $\forall\, u, v \in X$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$.

Observaciones 1.1. *Si* f *es antilineal y* $g \in X'$, *entonces* $\overline{f} \in X'$ *y* $\overline{g}$ *es antilineal, donde* X *es un espacio normado complejo.*

Definición 1.5. *Sean* X *un espacio normado y* $B(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ *una forma sesquilineal.*

1. $B(\cdot, \cdot)$ *es* **contínua o acotada,** *si existe* $M > 0$ *tal que* $|B(u, v)| \leq M\, \|u\|\, \|v\|$,
   para todo $u, v \in X$.
2. $B(\cdot, \cdot)$ *es* **coerciva,** *si existe* $c > 0$ *tal que* $B(u, u) \geq c\, \|u\|^2$, *para todo* $u \in X$.

Teorema 1.12 (**Teorema de Lax-Milgram**). *Sean* H *un espacio de Hilbert y* $B(\cdot,\cdot)$ *una forma sesquilineal, contínua y coerciva. Entonces existe un único isomorfismo de espacios de Hilbert* $T : H \longrightarrow H$ *tal que* $B(u,v) = \langle u, T\,v\rangle_H$, *para todo* $u, v \in H$.

Demostración. Ver [34]. $\square$

Corolario 1.3 (**Caso real**). *Sean* H *un espacio de Hilbert real y* $B(\cdot,\cdot)$ *una forma bilineal, contínua y coerciva. Si* $f \in H'$, *entonces existe una única* $u \in H$ *tal que* $B(u,v) = f(v)$, *para todo* $v \in H$.

Demostración. Ver [5]. $\square$

Corolario 1.4 (**Caso complejo**). *Sean* H *un espacio de Hilbert complejo y* $B(\cdot,\cdot)$ *una forma sesquilineal, contínua y coerciva. Si* $f : H \longrightarrow \mathbb{C}$ *es una aplicación antilineal, entonces existe una única* $u \in H$ *tal que* $B(u,v) = f(v)$, *para todo* $v \in H$.

Demostración. Ver [34]. $\square$

Espacios de Sobolev : Inmersiones.

Notaciones:

$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\}$.

$\hookrightarrow$: inmersión contínua.

$\overset{c}{\hookrightarrow}$: inmersión contínua y compacta.

Teorema 1.13 (**Du - Bois - Raymond**). *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto y* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
Si $\displaystyle\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dx = 0\,,\ \forall\,\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, *entonces* $u = 0$ *casi siempre en* Ω .

Demostración. Ver [7]. $\square$

Teorema 1.14 (**Desigualdad de Poincaré**). *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado y* $1 \leq p < +\infty$. *Entonces existe una constante* $C > 0$, *que depende de* Ω *y* p , *tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|\nabla\,u\|_{L^p(\Omega)}\,,\ \forall\,u \in W_0^{1,p}(\Omega)\,.$$

Demostración. Ver [5]. $\square$

Teorema 1.15 (**Regularidad Elíptica**). *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto regular,* L *un operador diferencial elíptico de orden* $2\,m$, $m \in \mathbb{N}$ *y* $f \in L^2(\Omega)$.
Si v *es solución de* $L\,u = f$ *en el sentido distribucional, entonces* $v \in H^{2\,m}(\Omega)$.

Demostración. Ver [1]. $\square$

Corolario 1.5. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto regular y* $f \in L^2(\Omega)$.
Si v *es solución de* $\begin{cases} -\Delta\,u = f & em \quad \Omega \\ u = 0 & em \quad \partial\Omega \end{cases}$, *entonces*
$v \in H^2(\Omega)$ *y* $\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)}$, *donde* $C > 0$.

Demostración. Ver [1]. $\square$

Teorema 1.16 (**Inmersión Contínua**). *Se tiene los siguientes casos:*

1. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ *y* $1 \leq p < +\infty$. *Se verifican:*

   a) *Si* $m\,p < n$ *y* $p \leq q \leq \dfrac{n\,p}{n - m\,p}$, *entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.

   b) *Si* $m\,p = n$ *y* $p \leq q < +\infty$, *entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$.

   c) *Si* $m\,p > n$ *y* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k + 1$, k *es un entero no negativo, entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, *donde*

      1) $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ *si* $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$,

      2) $0 < \lambda < 1$ *si* $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$.

2. **Caso:** $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ *y* $1 \leq p < +\infty$. *Se verifican:*

   a) *Si* $p = 1$, *entonces* $W^{m,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_b^{m-1}(\mathbb{R})$.

   b) *Si* $1 < p < +\infty$ *y* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$, *entonces* $W^{m,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\mathbb{R})$.

3. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ *y* $p = +\infty$. *Entonces* $W^{m,+\infty}(\mathbb{R}^n)$ *es isomorfo a* $C^{m-1,1}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Ver [24]. □

Teorema 1.17 (**Inmersión Contínua**). *Se tiene los siguientes casos:*

1. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 2$, $m \in \mathbb{N}$ *y* $1 \leq p < +\infty$. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado de clase* C^m . *Se verifican:*

   a) *Si* $m\,p < n$ *y* $1 \leq q \leq \dfrac{n\,p}{n - m\,p}$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

   b) *Si* $m\,p = n$ *y* $1 \leq q < +\infty$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

   c) *Si* $m\,p > n$ *y* $k < m - \dfrac{n}{p} \leq k + 1$, k *es un entero no negativo, entonces* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$, *donde*

      1) $0 < \lambda \leq m - k - \dfrac{n}{p}$ *si* $m - k - \dfrac{n}{p} < 1$,

      2) $0 < \lambda < 1$ *si* $m - k - \dfrac{n}{p} = 1$.

2. **Caso:** $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ *y* $1 \leq p < +\infty$. *Sea* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalo abierto acotado. Se verifican:*

   a) *Si* $p = 1$, *entonces* $W^{m,1}(I) \hookrightarrow C^{m-1}(\overline{I})$.

   b) *Si* $1 < p < +\infty$ *y* $0 < \lambda \leq 1 - \dfrac{1}{p}$, *entonces* $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\overline{I})$.

3. **Caso:** $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ *y* $p = +\infty$. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado de clase* C^m . *Entonces* $W^{m,+\infty}(\Omega)$ *es isomorfo a* $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

Demostración. Ver [24]. □

Corolario 1.6. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado y* $m \in \mathbb{N}$.
Entonces $W_0^{m,+\infty}(\Omega)$ *es isomorfo a* $C^{m-1,1}(\overline{\Omega})$.

Demostración. Ver [24]. □

Definición 1.6. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto y* $M \subset \mathbb{R}^n$. *Se dice que* M *está* **fuertemente incluído en** Ω , *denotado por* $M \subset\subset \Omega$, *si* $\overline{M} \subset \Omega$ *y* $\overline{M}$ *es compacto.*

Teorema 1.18 (Fréchet - Kolmogorov). *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto y* $\mathcal{F} \subset L^p(\Omega)$ *acotado, donde* $1 \leq p < +\infty$. *Supongamos que*

1. $\forall \epsilon > 0\,,\ \exists \Lambda \subset\subset \Omega\ :\ \|f\|_{L^p(\Omega\backslash\Lambda)} < \epsilon\,,\ \forall f \in \mathcal{F}$.
2. $\forall \epsilon > 0$ *y* $\forall \Lambda \subset\subset \Omega$, *existe* $\delta > 0$ *con* $\delta < dist(\Lambda, \mathbb{R}^n \backslash \Omega)$ *tal que* $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega\backslash\Lambda)} < \epsilon\,,\ \forall f \in \mathcal{F}$ *y* $\forall h \in \mathbb{R}^n$ *con* $|h| < \delta$.

Entonces $\mathcal{F}$ *es relativamente compacto en* $L^p(\Omega)$, *es decir,* $\overline{\mathcal{F}}$ *es compacto en* $L^p(\Omega)$.

Demostración. Ver [5]. □

Teorema 1.19 (Rellich - Kondrachov). *Sean* $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ *y* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado de clase* C^1 . *Se verifican:*

1. *Si* $p < n$ *y* $1 \leq q < \dfrac{n\,p}{n-p}$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.
2. *Si* $p = n$ *y* $1 \leq q < +\infty$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.
3. *Si* $n < p \leq +\infty$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega})$.

Demostración. Ver [5] □

Corolario 1.7. *Sean* n , $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ *y* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado de clase* C^m . *Se verifican:*

1. *Si* $p < n$ *y* $1 \leq q < \dfrac{n\,p}{n-p}$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m-1,q}(\Omega)$.
2. *Si* $p = n$ *y* $1 \leq q < +\infty$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m-1,q}(\Omega)$.
3. *Si* $n < p \leq +\infty$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^{m-1}(\overline{\Omega})$.

Demostración. Ver [24] □

Corolario 1.8. *Sean* n , $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ *y* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado. Se verifican:*

1. *Si* Ω *es de clase* C^{m+1} , *entonces* $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,p}(\Omega)$.
2. $W_0^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W_0^{m,p}(\Omega)$.

Demostración. Ver [24] □

Teorema 1.20 (Inmersión Compacta). *Sean* n , $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < +\infty$ *y* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado de clase* C^m . *Se verifican:*

1. *Si* $m\,p < n$ *y* $1 \le q < \dfrac{n\,p}{n - m\,p}$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.

2. *Si* $m\,p = n$ *y* $1 \le q < +\infty$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$.

3. *Si* $m\,p > n$ *y* $k < m - \dfrac{n}{p} \le k + 1$, k *es un entero no negativo, entonces* $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega})$.

Demostración. Ver [24] □

1.2. Semigrupos : Definiciones y Teoremas.

En esta sección, todos los espacios vectoriales están definidos sobre un cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 1.7. *Sea* X *un Espacio de Banach. Una familia de operadores lineales y acotados* $\{S(t)\}_{t\ge 0} \subset \mathcal{L}(X)$ *es llamado un* **semigrupo** *en* X , *si*

1. $S(0) = I$, *donde* I *es el operador identidad de* $\mathcal{L}(X)$.

2. $S(t+s) = S(t)\,S(s)$, $\forall\, t, s \ge 0$.

Definición 1.8. *Sea* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ *un semigrupo en* X .
El operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *definido por*

1. $\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in X : \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\,u - u}{t} \quad \textit{existe} \right\}$

2. $A\,u = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\,u - u}{t}$, $\forall\, u \in \mathcal{D}(A)$,

es llamado el **generador infinitesimal** *del semigrupo* $\{S(t)\}_{t\ge 0}$.

Observaciones 1.2.

1. $\mathcal{D}(A) = \{u \in X : A\,u \in X\}$.

2. $S(t) = e^{t\,A}$, $\forall\, t \ge 0$ *es un semigrupo en* X *con generador infinitesimal* A, *donde* $A \in \mathcal{L}(X)$.

Semigrupos Uniformemente Contínuos.

Definición 1.9. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ *un semigrupo en* X .
$\{S(t)\}_{t\ge 0}$ *es llamado* **uniformemente contínuo,** *si* $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \|S(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Proposición 1.4. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ *un semigrupo en* X .
$\{S(t)\}_{t\ge 0}$ *es uniformemente contínuo, si y sólo si,* $\lim\limits_{t \longrightarrow r} \|S(t) - S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Demostración. Ver [30]. □

Teorema 1.21. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\ge 0}$, $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ *semigrupos en* X .
Si $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{T(t) - I}{t} = A = \lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{S(t) - I}{t}$, *entonces* $T(t) = S(t)$, $\forall\, t \ge 0$.

Teorema 1.22. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo en* X *.*
$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es uniformemente contínuo, si y sólo si,* $S(t) = e^{t\,A}$ *,* $\forall\, t \geq 0$ *, para algún* $A \in \mathcal{L}(X)$ *.*

Demostración. Ver [25]. □

Corolario 1.9. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo uniformemente contínuo. Entonces*

1. *Existe una* $\omega \geq 0$ *tal que* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega\, t}$ *,* $\forall\, t \geq 0$.

2. *La aplicación* $t \longmapsto S(t)$ *es diferenciable en* $[0, +\infty[$ *y* $\dfrac{d}{dt}\, S(t) = A\, S(t) = S(t)\, A$ *.*

Demostración. Ver [30]. □

Semigrupos de clase C_0 ó C_0- Semigrupos.

Definición 1.10. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo en* X *.*

1. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es llamado* **de clase** C_0 *ó* C_0- **semigrupo,** *si* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} S(t)\, u = u$ *,* $\forall\, u \in X$ *.*

2. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es llamado* **fuertemente contínuo,** *si* $\lim\limits_{t\longrightarrow r} S(t)\, u = S(r)\, u$ *,* $\forall\, u \in X$ *.*

Proposición 1.5. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo en* X *.*

1. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es un* C_0- *semigrupo, si y sólo si, es fuertemente contínuo.*

2. *Si* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es uniformemente contínuo, entonces es un* C_0- *semigrupo.*

Demostración. Ver [30]. □

Teorema 1.23. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo. Entonces*

1. $\lim\limits_{t\longrightarrow +\infty} \dfrac{ln\, \|S(t)\|}{t} = \inf\limits_{t>0} \dfrac{ln\, \|S(t)\|}{t} := \omega_0$ *.*

2. *Para cada* $\omega > \omega_0$ *, existe una constante* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\| \leq M\, e^{\omega\, t}$ *,* $\forall\, t \geq 0$ *.*

Demostración. Ver [25]. □

Corolario 1.10. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo.*
Entonces existen constantes $\omega \geq 0$ *y* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\| \leq M\, e^{\omega\, t}$ *,* $\forall\, t \geq 0$ *.*

Demostración. Ver [30]. □

Corolario 1.11. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo.*
Entonces para cada $u \in X$ *, la aplicación* $t \longmapsto S(t)\, u$ *es contínua en* $[0, +\infty[$ *.*

Demostración. Ver [30]. □

Definición 1.11. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo.*
$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es llamado* **uniformemente acotado,** *si existe una constante* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\| \leq M$ *,* $\forall\, t \geq 0$ *.*
Si $M = 1$ *, es llamado un* C_0- **semigrupo de contracciones***.*

Teorema 1.24. *Sean X un Espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Entonces*

1. $\forall\, u \in X$, *se tiene* $\lim\limits_{h\longrightarrow 0} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} S(r)\,u\,dr = S(t)\,u$.

2. $\forall\, u \in X$, *se tiene* $\displaystyle\int_0^t S(r)\,u\,dr \in \mathcal{D}(A)$ *y* $A\left(\displaystyle\int_0^t S(r)\,u\,dr\right) = S(t)\,u - u$.

3. $\forall\, u \in \mathcal{D}(A)$, *se tiene* $S(t)\,u \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, t \geq 0$ *y* $\dfrac{d}{dt} S(t)\,u = A\,S(t)\,u = S(t)\,A\,u$.

4. $\forall\, u \in \mathcal{D}(A)$, *se tiene* $S(t)\,u - S(s)\,u = \displaystyle\int_s^t S(r)\,A\,u\,dr = \int_s^t A\,S(r)\,u\,dr$.

Demostración. Ver [30]. □

Corolario 1.12. *Sean X un Espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Entonces $\mathcal{D}(A)$ es denso en X y A es un operador lineal cerrado.*

Demostración. Ver [30]. □

Teorema 1.25. *Sean X un Espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ C_0- semigrupos con generadores infinitesimales A, B respectivamente.*
Si $A = B$, entonces $S(t) = T(t)$, $\forall\, t \geq 0$.

Demostración. Ver [30]. □

Definición 1.12. *Sean X un Espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Se denotan por $A^0 = I$ y $A^1 = A$.*
Supongamos que A^{n-1} esté bien definido, entonces se define A^n como

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(A^n) &= \left\{u \in X : u \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \quad y \quad A^{n-1}\,u \in \mathcal{D}(A)\right\},\\ A^n\,u &= A\,(A^{n-1}\,u),\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A^n).\end{aligned}$$

Proposición 1.6. *Sean X un Espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Entonces*

1. *$\mathcal{D}(A^n)$ es un subespacio vectorial de X y A^n es un operador lineal.*

2. *Para cada $u \in \mathcal{D}(A^n)$, se tienen* $S(t)\,u \in \mathcal{D}(A^n)$, $\forall\, t \geq 0$ *y*
$\dfrac{d^n}{dt^n} S(t)\,u = A^n\,S(t)\,u = S(t)\,A^n\,u$.

3. **Fórmula de Taylor:** *Si* $u \in \mathcal{D}(A^n)$, *entonces*
$S(t)\,u = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} S^k\,S(t_0)\,u + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^t (t-r)^{n-1}\,A^n\,S(r)\,u\,dr$.

4. $\cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ *es denso en* X.

Demostración. Ver [25]. □

Proposición 1.7. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A. *Si* $\|S(t)\| \leq M$, $\forall\, t \geq 0$ *entonces*
$\|A\,u\|^2 \leq 4\,M^2\,\|A^2\,u\|\,\|u\|$, $\forall u \in \mathcal{D}(A^2)$.

Demostración. Ver [30]. □

Proposición 1.8. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal cerrado. El funcional* $\|\cdot\|_n : \mathcal{D}(A^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\|u\|_n = \sum_{k=0}^{n} \|A^k\,u\|$ *es una norma sobre* $\mathcal{D}(A^n)$, *la cual torna* $\mathcal{D}(A^n)$ *en un Espacio de Banach.*

Demostración. Ver [25]. □

Definición 1.13. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal cerrado. La norma* $\|\cdot\|_n : \mathcal{D}(A^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\|u\|_n = \sum_{k=0}^{n} \|A^k\,u\|$ *es llamada* **norma del gráfico**.

Proposición 1.9. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A. *Entonces, para cada* $u \in \mathcal{D}(A^n)$, *se tiene*
$S(t)\,u \in C^{n-k}([0,+\infty[\,;\,\mathcal{D}(A^k))$, $\forall\, k = 0, 1, ..., n$, *con la norma del gráfico.*

Demostración. Ver [25]. □

El Teorema de Hille - Yosida

Definición 1.14. *Sean* X *un Espacio de Banach,* X^* *su dual y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal.*
Se denota el valor de $u^* \in X^*$ *en* $u \in X$, *por* $\langle u, u^* \rangle_{X \times X^*}$.
Para cada $u \in X$, *se define el conjunto dualidad* $F(u) \subset X^*$, *como*

$$F(u) = \left\{ u^* \in X^* : \langle u, u^* \rangle_{X \times X^*} = \|u\|^2 = \|u^*\|^2 \right\} .$$

A *es llamado* **disipativo,** *si para cada* $u \in \mathcal{D}(A)$, *se tiene*

$$Re\,\langle A\,u, u^* \rangle_{X \times X^*} \leq 0 \,,\ \forall\, u^* \in F(u) \,.$$

Observaciones 1.3. *Si* $X = H$ *es un Espacio de Hilbert, entonces por el Teorema de Representación de Riesz, se obtiene:*
A *es* **disipativo,** *si y sólo si,* $Re\,\langle A\,u, u \rangle_H \leq 0$, $\forall\, u \in \mathcal{D}(A)$.

Teorema 1.26. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal.*
A *es disipativo, si y sólo si,* $\|(\lambda\, I - A)\,u\| \geq \lambda\,\|u\|$, $\forall\, u \in \mathcal{D}(A)$, $\forall\, \lambda > 0$.

Demostración. Ver [30]. □

Teorema 1.27. *Sean* H *un Espacio de Hilbert y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A .
$\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es un* C_0- *semigrupo de contracciones, si y sólo si,* A *es disipativo.*

Demostración. Ver [26]. $\square$

Lema 1.1. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal. Si existe una sucesión* $\{A_m\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{L}(X)$ *tales que*

1. $A_m\, u \longrightarrow A\, u$ *en* X , $\forall\, u \in \mathcal{D}(A)$.
2. $\left\{e^{t\, A_m}\right\}_{m\geq 1} \longrightarrow S(t)$ *en* $\mathcal{L}(X)$, $\forall\, t > 0$.

Entonces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A .

Demostración. Ver [26]. $\square$

Lema 1.2. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal no acotado. Supongamos que*

1. A *es cerrado y* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. $\mathbb{R}^+ \subset \varrho(A)$ *y* $\|R(\lambda\, ;\, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$, $\forall\, \lambda > 0$, *donde* $R(\lambda\, ;\, A) = (\lambda\, I - A)^{-1}$.

Entonces $\lim\limits_{\lambda\longrightarrow +\infty} \lambda\, R(\lambda\, ;\, A)\, u = u$, $\forall\, u \in X$.

Demostración. Ver [30]. $\square$

Definición 1.15. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal. Para cada* $\lambda > 0$, *se define* **la Aproximación de Yosida de** A , *como la aplicación lineal acotada* $A_\lambda : X \longrightarrow X$ *tal que* $A_\lambda := \lambda\, A\, R(\lambda\, ; A) = \lambda^2\, R(\lambda\, ; A) - \lambda\, I$.

Lema 1.3. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal no acotado. Si* A *satisface las condiciones del lema anterior, entonces*

$$\lim_{\lambda\longrightarrow +\infty} A_\lambda\, u = A\, u\, ,\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)\, .$$

Demostración. Ver [30]. $\square$

Lema 1.4. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal no acotado. Si* A *satisface las condiciones del lema anterior, entonces*
$e^{t\, A_\lambda}$, $t \geq 0$ *es un semigrupo de contracciones, uniformemente contínuo, tal que*

$$\|e^{t\, A_\lambda}\, u - e^{t\, A_\mu}\, u\| \leq t\, \|A_\lambda\, u - A_\mu\, u\|\, ,\ \forall\, \lambda\, ,\, \mu > 0\, .$$

Demostración. Ver [30]. $\square$

Teorema 1.28 (Hille - Yosida). *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal no acotado.*
A *es el generador infinitesimal de un* C_0- *semigrupo de contracciones, si y sólo si,*

1. A *es cerrado y* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.
2. $\mathbb{R}^+ \subset \varrho(A)$ *y* $\|R(\lambda\, ;\, A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$, $\forall\, \lambda > 0$.

Demostración. Ver [30]. □

Corolario 1.13. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo de contracciones con generador infinitesimal* A *. Entonces*

$$S(t)\,u = \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} e^{t\,A_\lambda}\,u\,,\ \forall\, u \in X\,.$$

Demostración. Ver [30]. □

Corolario 1.14. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo de contracciones con generador infinitesimal* A *. Entonces*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda > 0\} \subset \varrho(A) \quad \text{y para tal} \quad \lambda \quad \text{se tiene} \quad \|R(\lambda\,;\,A)\| \leq \frac{1}{Re\,\lambda}\,.$$

Demostración. Ver [30]. □

Corolario 1.15. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal.* A *es el generador infinitesimal de un* C_0- *semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *, satisfaciendo* $\|S(t)\| \leq e^{\omega\,t}\,,\ \forall\, t \geq 0\,,$ *si y sólo si,*

1. A *es cerrado y* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ *.*

2. $\{\lambda \in \mathbb{C} : Im\,\lambda = 0\,,\ \lambda > \omega\} \subset \varrho(A)$ *y para tal* λ *se tiene* $\|R(\lambda\,;\,A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda - \omega}\,.$

Demostración. Ver [30]. □

Proposición 1.10. *Sean* X *un Espacio de Banach,* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal,* $B \in \mathcal{L}(X)$ *y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo.*
Si A *es el gerador infinitesimal de* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *y* $A\,B = B\,A$*, entonces* $(A+B)$ *es el generador infinitesimal del* C_0- *semigrupo* $\left\{S(t)\,e^{B\,t}\right\}_{t\geq 0}$ *.*

Demostración. Ver [26]. □

El Teorema de Lumer - Phillips

Teorema 1.29 (Lumer - Phillips). *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal, densamente definido.*

1. *Si* A *es disipativo y existe un* $\lambda_0 > 0$ *tal que* $Im\,(\lambda_0\,I - A) = X$ *, entonces* A *es generador infinitesimal de un* C_0- *semigrupo de contracciones.*

2. *Si* A *es generador infinitesimal de un* C_0- *semigrupo de contracciones, entonces* A *es disipativo y* $Im\,(\lambda\,I - A) = X\,,\ \forall\,\lambda > 0\,.$

Demostración. Ver [26]. □

Corolario 1.16. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal, cerrado y densamente definido.*
Si A *y* A^* *son disipativos, entonces* A *es generador infinitesimal de un* C_0- *semigrupo de contracciones.*

Demostración. Ver [26]. □

Lema 1.5. *Sean* X *un Espacio de Banach,* $B \in \mathcal{L}(X)$ *y* $A \in \mathcal{L}(X)$ *con inversa acotada. Si* $\|B\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$, *entonces* $(A+B)$ *es lineal, acotado e invertible.*

Demostración. Ver [26]. □

Teorema 1.30. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal, densamente definido y disipativo.*
Si $0 \in \varrho(A)$, *entonces* A *es generador infinitesimal de un* C_0- *semigrupo de contracciones.*

Demostración. Ver [26]. □

Teorema 1.31. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal disipativo con* $Im\,(I - A) = X$.
Si X *es reflexivo, entonces* $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Demostración. Ver [30]. □

El Teorema de Stone

Definición 1.16. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(X)$ *una familia de operadores lineales acotados.*

1. $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *es llamado un* **grupo** *en* X , *si*

   a) $S(0) = I$, *donde* I *es el operador identidad de* $\mathcal{L}(X)$.

   b) $S(t+s) = S(t)\,S(s)$, $\forall\, t\,,\, s \in \mathbb{R}$.

2. $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *es llamado un* C_0- **grupo** *o un* **grupo de clase** C_0 , *si es un grupo en* X *y* $\lim\limits_{t\longrightarrow 0} S(t)\,u = u\,,\ \forall\, u \in X$.

Definición 1.17. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *un grupo en* X .
El operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *definido por*

1. $\mathcal{D}(A) = \left\{ u \in X : \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\,u - u}{t} \quad \textit{existe} \right\}$,

2. $A\,u = \lim\limits_{t\longrightarrow 0} \dfrac{S(t)\,u - u}{t}\,,\ \forall\, u \in \mathcal{D}(A)\,,$

es llamado **generador infinitesimal** *del grupo* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$.

Definición 1.18. *Sea* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *un* C_0- *grupo con generador infinitesimal* A . *Se definen*

$$S_-(t) = S(-t) \quad y \quad S_+(t) = S(t)\,,\ \forall\, t \geq 0\,.$$

Proposición 1.11. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $A : \mathcal{D}(A) \subset X \longrightarrow X$ *un operador lineal.*

1. *Si* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *es un* C_0- *grupo con generador infinitesimal* A , *entonces* $\{S_-(t)\}_{t\geq 0}$ *y* $\{S_+(t)\}_{t\geq 0}$ *son* C_0- *semigrupos con generadores infinitesimales* $-A$ *y* A *respectivamente.*

2. *Recíprocamente; si* $\{S_1(t)\}_{t\geq 0}$ *y* $\{S_2(t)\}_{t\geq 0}$ *son* C_0- *semigrupos con generadores infinitesimales* $-A$ *y* A *respectivamente, entonces* $S_1(t) = S_2(t)^{-1}$, $\forall\, t \geq 0$ *y* $S(t) = \begin{cases} S_1(-t)\,, & t < 0 \\ S_2(t)\,, & t \geq 0 \end{cases}$ *es un* C_0- *grupo con generador infinitesimal* A .

Demostración. Ver [25]. □

Proposición 1.12. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A *. Entonces*

1. *Si existe un* $t_0 > 0$ *tal que* $S(t_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, *entonces* $S(t)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, $\forall\, t \geq 0$.
2. $\left\{T(t) := S(t)^{-1}\right\}_{t\geq 0}$ *es un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* $-A$.
3. $Z(t) = \begin{cases} S(-t)^{-1}\,, & t < 0 \\ S(t) \quad , & t \geq 0 \end{cases}$ *es un* C_0- *grupo con generador infinitesimal* A .

Demostración. Ver [25]. □

Definición 1.19. *Sean* H *un Espacio de Hilbert,* $B \in \mathcal{L}(H)$, $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *un grupo en* H *y* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ *un operador lineal.*

1. $A \subset A^*$, *si* $\langle A\,u, v\rangle_H = \langle u, A\,v\rangle_H$, $\forall\, u, v \in \mathcal{D}(A)$.
2. A *es llamado* **simétrico,** *si* $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ *y* $A \subset A^*$.
3. A *es llamado* **autoadjunto,** *si* $A = A^*$.
4. B *es llamado* **unitário,** *si* $B^* = B^{-1}$.
5. $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *es llamado un* **grupo unitário** *en* H , *si* $S(t)^* = S(t)^{-1}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.32 (Stone). *Sean* H *un Espacio de Hilbert y* $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ *un operador lineal.*
A *es el generador infinitesimal de un* C_0- *grupo unitário, si y sólo si,* $i\,A$ *es autoadjunto.*

Demostración. Ver [26]. □

1.3. El Problema de Cauchy Abstrato.

Sean X un Espacio de Banach, $A:\mathcal{D}(A)\subset X\longrightarrow X$ un operador lineal, $x_0\in X$ y $f:[0,T\rangle\longrightarrow X$ una aplicación.

Definición 1.20. *El Problema de Cauchy Abstracto es una ecuación de evolución abstracta del tipo*

$$\begin{cases} u'(t) = A\,u(t) + f(t)\,, \quad t>0 \\ u(0) = x_0\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

Definición 1.21. *Una aplicación $u:[0,T\rangle\longrightarrow X$ es una solución clásica de (1,1) sobre $[0,T\rangle$, si u es contínua sobre $[0,T\rangle$ y contínuamente diferenciable sobre $\langle 0,T\rangle$, $u(t)\in\mathcal{D}(A)$ en $\langle 0,T\rangle$ y u satisface (1,1) en $[0,T\rangle$.*

Definición 1.22. *Sean $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A y $f\in L^1(0,T;X)$. La aplicación $u\in C([0,T];X)$ dada por*

$$u(t) = S(t)\,x_0 + \int_0^t S(t-s)\,f(s)\,ds\,, \quad 0\leq t\leq T$$

es llamada Solución Integral del Problema (1,1) sobre $[0,T]$.

Teorema 1.33. *Sean $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A, $f\in L^1(0,T;X)$ contínua en $\langle 0,T]$ y*

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)\,f(s)\,ds\,, \quad 0\leq t\leq T\,.$$

Entonces, para cada $x_0\in\mathcal{D}(A)$, el problema (1,1) posee una solución u sobre $[0,T\rangle$, si una de las siguientes condiciones es satisfecha

1. *v es contínuamente diferenciable sobre $\langle 0,T\rangle$.*
2. *$v(t)\in\mathcal{D}(A)$ para $0<t<T$ y $A\,v(t)$ es contínua sobre $\langle 0,T\rangle$.*

Recíprocamente, si para algún $x_0\in\mathcal{D}(A)$, el problema (1,1) posee una solución u sobre $[0,T\rangle$, entonces v satisface 1. y 2..

Demostración. Ver [30]. □

1.4. Estabilidad Exponencial.

En esta sección vamos a presentar algunos resultados sobre estabilidad exponencial y decaimiento de tipo polinomial de C_0- semigrupos definidos sobre Espacios de Hilbert.

Definición 1.23. *Sean X un Espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A.*
Decimos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es **Exponencialmente Estáble,** *si existen constantes $\mu > 0$ y $M \geq 1$ tal que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M\, e^{-\mu\, t}$, $\forall\, t \geq 0$.*

Definición 1.24. *Sean X un Espacio de Banach y $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow X$ un operador lineal. La* **Cota Superior del Espectro** *de T, denotado por $\omega_\sigma(T)$, es el valor*

$$\omega_\sigma(T) := \sup\{Re\, \lambda : \lambda \in \sigma(T)\}\,.$$

Definición 1.25. *Sean X un Espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. El* **Tipo del Semigrupo generado por** *A, denotado por $\omega_0(A)$, es el valor*

$$\omega_0(A) := \lim_{t\longrightarrow +\infty} \frac{ln\, \|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{ln\, \|S(t)\|}{t}\,.$$

Proposición 1.13. *Sean X un Espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Entonces*

1. $\omega_0(t\, A) = t\, \omega_0(A)\,, \ \forall\, t > 0\,.$
2. $\forall\, \epsilon > 0\,,$ *existe* $M_\epsilon \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\epsilon\, e^{(\omega_0(A)+\epsilon)\, t}\,, \ \forall\, t > 0\,.$

Demostración. Ver [26]. □

Proposición 1.14. *Sean X un Espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo de contracciones con generador infinitesimal A.*
Si $\omega_0(A) = 0$, entonces $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1\,, \ \forall\, t > 0\,.$

Demostración. Ver [26]. □

Lema 1.6. *Sean X un Espacio de Banach y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. Entonces*

1. $\omega_\sigma(A) \leq \omega_0(A)\,.$
2. $R_\sigma(S(t)) = e^{\omega_0(A)\, t}\,, \ \forall\, t > 0\,.$

Demostración. Ver [26]. □

Teorema 1.34. *Sean X un Espacio de Banach, $f \in C([0,1]; X)$ y $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0- semigrupo con generador infinitesimal A. La ecuación*

$$\begin{cases} u'(t) = A\, u(t) + f(t) \quad \text{en} \quad [0,1] \\ u(0) = u(1) \end{cases}$$

posee una única solución periódica de período 1, si y sólo si, $1 \in \varrho(S(1))$.

Demostración. Ver [26]. □

Teorema 1.35. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A. *Entonces*

$$1 \in \varrho(S(1))\,, \quad \textit{si y sólo si,} \quad \begin{cases} 2\,k\,\pi\,i \in \varrho(A)\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z} \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \|(2\,k\,\pi\,i\,I - A)^{-1}\| < \infty\,. \end{cases}$$

Demostración. Ver [26]. □

Corolario 1.17. *Sean* X *un Espacio de Banach,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A. *Entonces*

$$e^{\lambda\,t} \in \varrho(S(t))\,, \quad \textit{si y sólo si,} \quad \begin{cases} \left(\lambda + \dfrac{2\,k\,\pi\,i}{t}\right) \in \varrho(A) \\ \left\| \left(\left(\lambda + \dfrac{2\,k\,\pi\,i}{t}\right) I - A \right)^{-1} \right\| < \infty\,, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

Demostración. Ver [26]. □

Lema 1.7. *Sean* X *un Espacio de Banach,* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A.
Si $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} < e^{\lambda\,t}$, $\forall\, t \geq N$, *entonces* $e^{\lambda} \in \varrho(S(1))$.

Demostración. Ver [26]. □

Teorema 1.36. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A. *Entonces*

$$\omega_0(A) = \operatorname{ínf}\left\{\mu \in \mathbb{R} : \|(\lambda\,I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty\,,\ \forall\, Re\,\lambda \geq \mu\right\}\,.$$

Demostración. Ver [26]. □

Corolario 1.18. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A.
Si $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda \geq 0\} \subset \varrho(A)$ *y* $\|(\lambda\,I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$, $\forall\, Re\,\lambda \geq 0$, *entonces existe* $\epsilon > 0$ *tal que* $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda \geq -\epsilon\} \subset \varrho(A)$ *y* $\|(\lambda\,I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$, $\forall\, Re\,\lambda \geq -\epsilon$.

Demostración. Ver [26]. □

Corolario 1.19. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A.
Si $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re\,\lambda \geq 0\} \subset \varrho(A)$ *y* $\|(\lambda\,I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$, $\forall\, Re\,\lambda \geq 0$, *entonces el semigrupo* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *es exponencialmente estáble.*

Demostración. Ver [26]. □

Definición 1.26. *Sean* X *un Espacio de Banach y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A. *Decimos que* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *tiene la* **Propiedad de Crecimento Determinado por el Espectro,** *si* $\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$.

Proposición 1.15. *Sean* H *un Espacio de Hilbert y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo con generador infinitesimal* A *. Entonces*
$\omega_0(A) = \omega_\sigma(A)$, *si y sólo si,* $\forall\, \epsilon > 0$, *existe* $M_\epsilon > 0$ *tal que*

$$\|(\lambda\, I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M_\epsilon\,,\ \forall\, Re\,\lambda \geq \omega_\sigma(A) + \epsilon\,.$$

Demostración. Ver [26]. □

Teorema 1.37 (**Gearhart).** *Sea* $(\mathcal{S}(t))_{t\,\geq\,0}$ *un* C_0- *semigrupo de contracciones sobre un Espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$, *generado por* $\mathcal{A}$ *.*
El semigrupo $(\mathcal{S}(t))_{t\,\geq\,0}$ *es exponencialmente estáble, si y sólo si,*

$$i\,\mathbb{R}\,\subset\,\varrho(\mathcal{A}) \quad y \quad \limsup_{|\alpha|\longrightarrow+\infty} \left\|(i\,\alpha\, I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty\,.$$

Demostración. Ver [12]. □

Teorema 1.38 (**Pruss - Huang - Renardy).** *Sea* $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo sobre un Espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$, *generado por* $\mathcal{A}$ *.*
El semigrupo $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ *es exponencialmente estáble, si y sólo si,*

$$i\,\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}) \quad y \quad \left\|(i\,\lambda\, I - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq C\,, \quad \forall\,\lambda\,\in\,\mathbb{R}\,.$$

Demostración. Ver [31]. □

Observaciones 1.4. *Se observa que existen dos maneras equivalentes de obter estabilidad exponencial para* C_0- *semigrupos de contracciones sobre Espacios de Hilbert. Una prueba de esa equivalencia puede ser encontrada en Liu - Zheng* [22] *.*
No siempre un semigrupo es exponencialmente estáble. En este caso, debemos buscar otra forma de estabilizar el sistema, como por ejemplo, determinar el decaimiento polinomial de soluciones.

1.5. Estabilidad Polinomial

Los primeros autores en obtener resultados sobre estabilidad polinonial para C_0- semigrupos de contracciones fueron Liu - Rao y J. Pruss. Ellos dieron condiciones suficientes sobre el operador resolvente para obtener decaimiento polinomial de soluciones.

Teorema 1.39 **(Liu - Rao).** *Sea $\mathcal{A}$ el generador infinitesimal de un C_0- semigrupo uniformemente acotado $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $i\,\mathbb{R}\subset \varrho(\mathcal{A})$.*
Suponga que $\dfrac{1}{|\lambda|^{\alpha}}\left\|(i\,\lambda\, I-\mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leq C\,,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\,,$ donde α es un número real positivo.
Entonces, para cada $k\in\mathbb{N}\,,$ existe una constante $C_k>0$ tal que

$$\|S(t)\,w\|_{\mathcal{H}}\leq C_k\left(\frac{ln(t)}{t}\right)^{k/\alpha} ln(t)\,\|w\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A}^k)}\,.$$

Observaciones 1.5. *En el teorema de* **Liu - Rao***, la presencia del logaritmo ln en el numerador atrasa el decaimiento polinomial. Esa deficiencia fue superada en el siguiente teorema:*

Teorema 1.40 **(Borichev - Tomilov).** *Sea $\mathcal{A}$ el generador infinitesimal de un C_0- semigrupo acotado $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ sobre un Espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que $i\,\mathbb{R}\subset\varrho(\mathcal{A})$. Entonces*
$\dfrac{1}{|\lambda|^{\alpha}}\left\|(i\,\lambda\, I-\mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leq C\,,\ \forall\,\lambda\in\mathbb{R}\,,$ *si y sólo si,* $\left\|\mathcal{S}(t)\,\mathcal{A}^{-1}\right\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}\leq \dfrac{C}{t^{1/\alpha}}\,,$
donde α es un número real positivo.

Demostración. Ver [3]. $\square$

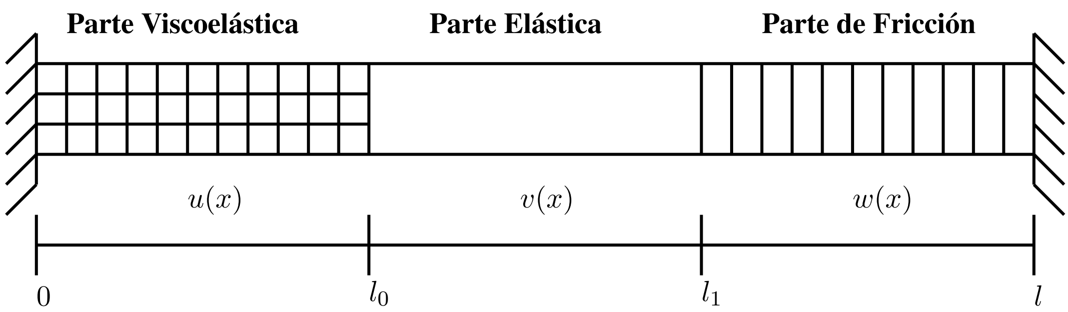
Capítulo 2

Modelo Matemático

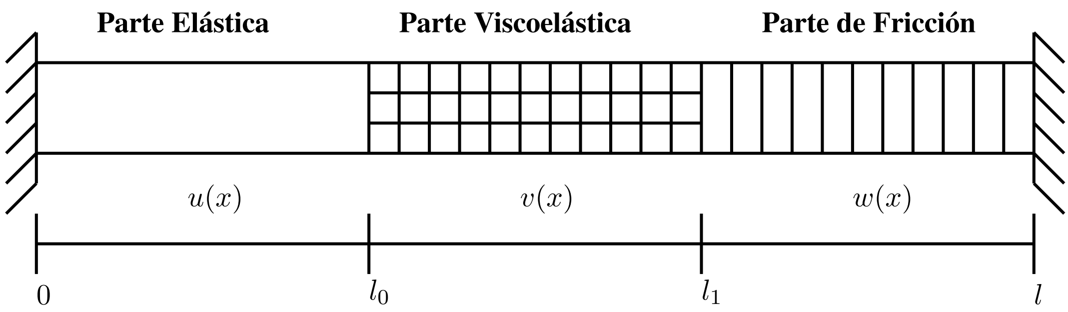
Introducción

Se consideran los siguientes modelos:

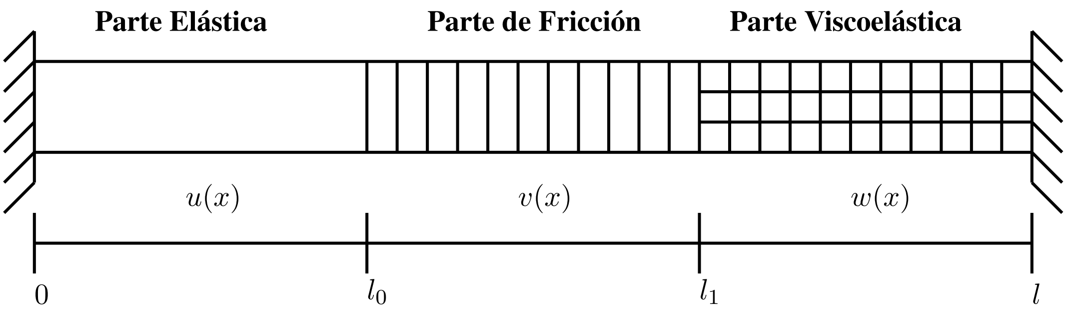
EL MODELO VEF



EL MODELO EVF



EL MODELO EFV



El desplazamiento longitudinal ν es dividido en tres partes:

$$\nu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \in \,]0, l_0[\\ v(x) & \text{si} \quad x \in \,]l_0, l_1[\\ w(x) & \text{si} \quad x \in \,]l_1, l[\, , \end{cases}$$

donde cada componente u, v y w representan el desplazamiento de la primera, segunda y tercera componente de la viga respectivamente. Existen seis combinaciones posibles del material: Dos posibilidades ocurren cuando la parte elástica está en el medio de la viga **(VEF , FEV)**, otras dos posibilidades cuando la parte viscosa está en el medio de la viga **(EVF , FVE)**, y finalmente, otras dos posibilidades cuando la parte elástica con el mecanismo friccional está en el medio de la viga **(VFE , EFV)**.

Observe que, realizando el cambio de variable $s = l - x$, **éstas seis posibilidades pueden ser reducidos a tres.** En efecto, sin pérdida de generalidad, asuma que $l_0 = l_1 - l_0 = l - l_1$. Luego, basta ver que el intervalo $(0, l_0)$ es transformado en el intervalo (l_1, l) , el intervalo (l_0, l_1) queda fijo y el intervalo (l_1, l) es transformado en el intervalo $(0, l_0)$.
Así, es suficiente estudiar los siguientes modelos : **VEF , EVF** y **EFV**.

El modelo VEF es dado por:

$$\rho_1 \, u_{tt} - \kappa_1 \, u_{xx} - \kappa_0 \, u_{xxt} = 0 \quad en \quad]0, l_0[\times]0, +\infty[\tag{2.1}$$

$$\rho_2 \, v_{tt} - \kappa_2 \, v_{xx} = 0 \quad en \quad]l_0, l_1[\times]0, +\infty[\tag{2.2}$$

$$\rho_3 \, w_{tt} - \kappa_3 \, w_{xx} + \gamma \, w_t = 0 \quad en \quad]l_1, l[\times]0, +\infty[\, , \tag{2.3}$$

donde κ_0 , κ_1 , κ_2 y κ_3 son las constantes positivas elásticas, $\gamma > 0$ y ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 representan las funciones de densidad de masa.

Las condiciones de transmisión son dadas por:

$$\begin{aligned} &u(l_0, t) = v(l_0, t) \, , \quad \kappa_1 \, u_x(l_0, t) + \kappa_0 \, u_{xt}(l_0, t) = \kappa_2 \, v_x(l_0, t) \, , \qquad t \geq 0 \, , \\ &v(l_1, t) = w(l_1, t) \, , \quad \kappa_2 \, v_x(l_1, t) = \kappa_3 \, w_x(l_1, t) \, , \qquad t \geq 0 \, . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Las condiciones de contorno:

$$u(0,t) = 0\,, \quad w(l,t) = 0\,, \quad t \geq 0\,. \tag{2.5}$$

Las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x,0) = u_0(x) \quad &, \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad en \quad]0,l_0[\;, \\ v(x,0) = v_0(x) \quad &, \quad v_t(x,0) = v_1(x) \quad en \quad]l_0,l_1[\;, \\ w(x,0) = w_0(x) \quad &, \quad w_t(x,0) = w_1(x) \quad en \quad]l_1,l[\;. \end{aligned} \tag{2.6}$$

El modelo EVF es dado por:

$$\rho_1\, u_{tt} - \kappa_1\, u_{xx} \;=\; 0 \quad en \quad]0,l_0[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.7}$$

$$\rho_2\, v_{tt} - \kappa_2\, v_{xx} - \kappa_0\, v_{xxt} \;=\; 0 \quad en \quad]l_0,l_1[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.8}$$

$$\rho_3\, w_{tt} - \kappa_3\, w_{xx} + \gamma\, w_t \;=\; 0 \quad en \quad]l_1,l[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.9}$$

donde κ_0 , κ_1 , κ_2 y κ_3 son las constantes positivas elásticas, $\gamma > 0$ y ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 representan las funciones de densidad de masa.

Las condiciones de transmisión son dadas por:

$$\begin{aligned} &u(l_0,t) = v(l_0,t)\,, \quad \kappa_1\, u_x(l_0,t) = \kappa_2\, v_x(l_0,t) + \kappa_0\, v_{xt}(l_0,t)\,, \qquad t \geq 0\,, \\ &v(l_1,t) = w(l_1,t)\,, \quad \kappa_2\, v_x(l_1,t) + \kappa_0\, v_{xt}(l_1,t) = \kappa_3\, w_x(l_1,t)\,, \qquad t \geq 0\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Las condiciones de contorno:

$$u(0,t) = 0\,, \quad w(l,t) = 0\,, \quad t \geq 0\,. \tag{2.11}$$

Las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x,0) = u_0(x) \quad &, \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad en \quad]0,l_0[\;, \\ v(x,0) = v_0(x) \quad &, \quad v_t(x,0) = v_1(x) \quad en \quad]l_0,l_1[\;, \\ w(x,0) = w_0(x) \quad &, \quad w_t(x,0) = w_1(x) \quad en \quad]l_1,l[\;. \end{aligned} \tag{2.12}$$

El modelo EFV es dado por:

$$\rho_1\, u_{tt} - \kappa_1\, u_{xx} \;=\; 0 \quad en \quad]0,l_0[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.13}$$

$$\rho_2\, v_{tt} - \kappa_2\, v_{xx} + \gamma\, v_t \;=\; 0 \quad en \quad]l_0,l_1[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.14}$$

$$\rho_3\, w_{tt} - \kappa_3\, w_{xx} - \kappa_0\, w_{xxt} \;=\; 0 \quad en \quad]l_1,l[\times]0,+\infty[\,, \tag{2.15}$$

donde κ_0 , κ_1 , κ_2 y κ_3 son las constantes positivas elásticas, $\gamma > 0$ y ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 representan las funciones de densidad de masa.

Las condiciones de transmisión son dadas por:

$$\begin{aligned} &u(l_0,t) = v(l_0,t)\,, \quad \kappa_1\, u_x(l_0,t) = \kappa_2\, v_x(l_0,t)\,, \qquad t \geq 0\,, \\ &v(l_1,t) = w(l_1,t)\,, \quad \kappa_2\, v_x(l_1,t) = \kappa_3\, w_x(l_1,t) + \kappa_0\, w_{xt}(l_1,t)\,, \qquad t \geq 0\,. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Las condiciones de contorno:

$$u(0,t) = 0\,, \quad w(l,t) = 0\,, \quad t \geq 0\,. \tag{2.17}$$

Las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} u(x,0) = u_0(x) \quad &, \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad en \quad]0,l_0[\ , \\ v(x,0) = v_0(x) \quad &, \quad v_t(x,0) = v_1(x) \quad en \quad]l_0,l_1[\ , \\ w(x,0) = w_0(x) \quad &, \quad w_t(x,0) = w_1(x) \quad en \quad]l_1,l[\ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

El objetivo de este capítulo es probar la existencia y unicidad de soluciones para los modelos $\mathbf{VEF}$, $\mathbf{EVF}$, $\mathbf{EFV}$ usando la Teoría de Semigrupos.

2.1. El Espacio de Fase.

En esta sección se definirá el Espacio de Fase apropiado donde actuará el semigrupo. Para estudiar los problemas de valor inicial y frontera $(2{,}1)-(2{,}6)$, $(2{,}7)-(2{,}12)$ y $(2{,}13)-(2{,}18)$ usando la teoría de semigrupos, se introducen las siguientes variables nuevas

$$U := u_t\ ,\ V := v_t\ ,\ W := w_t\,.$$

Ahora, vamos a transformar cada sistema $\mathbf{VEF}$, $\mathbf{EVF}$ y $\mathbf{EFV}$, en una ecuación de evolución de primer orden en la variable temporal.
Si $\Phi = (u,v,w,U,V,W)^t$, entonces los sistemas acoplados pueden ser reescritos como

El Sistema VEF:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= (U,V,W,u_{tt},v_{tt},w_{tt})^t \\ &= \left(U,V,W,\frac{\kappa_1}{\rho_1}u_{xx}+\frac{\kappa_0}{\rho_1}u_{xxt},\frac{\kappa_2}{\rho_2}v_{xx},\frac{\kappa_3}{\rho_3}w_{xx}-\frac{\gamma}{\rho_3}w_t\right)^t \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ \frac{\kappa_1}{\rho_1}(\cdot)_{xx} & 0 & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_1}(\cdot)_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_2}{\rho_2}(\cdot)_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\kappa_3}{\rho_3}(\cdot)_{xx} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_3}I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego, se define el operador lineal $\mathcal{A}_1 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que, para cada $\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, se tiene

$$\mathcal{A}_1\,\Phi = \left(U,V,W,\frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx}+\frac{\kappa_0}{\rho_1}\,U_{xx},\frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx},\frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx}-\frac{\gamma}{\rho_3}\,W\right)\,, \tag{2.19}$$

donde el domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ y el espacio de fase $\mathcal{H}$ serán definidos de forma apropiada después.

El Sistema EVF:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dt} &= (U, V, W, u_{tt}, v_{tt}, w_{tt})^t \\
&= \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}v_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_2}v_{xxt}, \frac{\kappa_3}{\rho_3}w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}w_t\right)^t \\
&= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
\frac{\kappa_1}{\rho_1}(.)_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\kappa_2}{\rho_2}(.)_{xx} & 0 & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_2}(.)_{xx} & 0 \\
0 & 0 & \frac{\kappa_3}{\rho_3}(.)_{xx} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_3}I
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego, se define el operador lineal $\mathcal{A}_2 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que, para cada $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$, se tiene

$$
\mathcal{A}_2\,\Phi = \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_2}\,V_{xx}, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}\,W\right), \tag{2.20}
$$

donde el domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ y el espacio de fase $\mathcal{H}$ serán definidos de forma apropiada después.

El Sistema EFV:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dt} &= (U, V, W, u_{tt}, v_{tt}, w_{tt})^t \\
&= \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}v_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_2}v_t, \frac{\kappa_3}{\rho_3}w_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_3}w_{xxt}\right)^t \\
&= \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
\frac{\kappa_1}{\rho_1}(.)_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\kappa_2}{\rho_2}(.)_{xx} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_2}I & 0 \\
0 & 0 & \frac{\kappa_3}{\rho_3}(.)_{xx} & 0 & 0 & \frac{\kappa_0}{\rho_3}(.)_{xx}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ U \\ V \\ W \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego, se define el operador lineal $\mathcal{A}_3 : \mathcal{D}(\mathcal{A}_3) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que, para cada $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_3)$, se tiene

$$
\mathcal{A}_3\,\Phi = \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_2}\,V, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_3}\,W_{xx}\right), \tag{2.21}
$$

donde el domínio $\mathcal{D}(\mathcal{A}_3)$ y el espacio de fase $\mathcal{H}$, serán definidos de forma apropiada a seguir.

Observación 2.1. *Con el fin de escoger el espacio de fase adecuado, se calculará la energía total de los sistemas* **VEF , EVF , EFV** *y se tomará el mayor espacio donde la energía total de los tres sistemas están bien definidas.*

Entonces, integrando por partes, se tiene que las energías asociadas a los sistemas están dadas por:

Para VEF :

$$E_1(t) = \frac{\rho_1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(0,l_0)} + \frac{\kappa_1}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,l_0)} + \frac{\rho_2}{2}\|v_t\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \frac{\kappa_2}{2}\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \frac{\rho_3}{2}\|w_t\|^2_{L^2(l_1,l)} + \frac{\kappa_3}{2}\|w_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\,, \quad y$$

$$\frac{dE_1(t)}{dt} = [(\kappa_1\, u_x(l_0) + \kappa_0\, u_{xt}(l_0))\, u_t(l_0) - \kappa_2\, v_x(l_0)\, v_t(l_0)] + [-\,(\kappa_1\, u_x(0) + \kappa_0\, u_{xt}(0))\, u_t(0) + \kappa_3\, w_x(l)\, w_t(l)] + [\kappa_2\, v_x(l_1)\, v_t(l_1) - \kappa_3\, w_x(l_1)\, w_t(l_1)] - \kappa_0\int_0^{l_0}|u_{xt}|^2 dx - \gamma\int_{l_1}^{l}|w_t|^2 dx\,.$$

Para EVF :

$$E_2(t) = \frac{\rho_1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(0,l_0)} + \frac{\kappa_1}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,l_0)} + \frac{\rho_2}{2}\|v_t\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \frac{\kappa_2}{2}\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \frac{\rho_3}{2}\|w_t\|^2_{L^2(l_1,l)} + \frac{\kappa_3}{2}\|w_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\,, \quad y$$

$$\frac{dE_2(t)}{dt} = [-\,(\kappa_2\, v_x(l_0) + \kappa_0\, v_{xt}(l_0))\, v_t(l_0) + \kappa_1\, u_x(l_0)\, u_t(l_0)] + [(\kappa_2\, v_x(l_1) + \kappa_0\, v_{xt}(l_1))\, v_t(l_1) - \kappa_3\, w_x(l_1)\, w_t(l_1)] + [-\kappa_1\, u_x(0)\, u_t(0) + \kappa_3\, w_x(l)\, w_t(l)] - \kappa_0\int_{l_0}^{l_1}|v_{xt}|^2 dx - \gamma\int_{l_1}^{l}|w_t|^2 dx\,.$$

Para EFV :

$$E_3(t) = \frac{\rho_1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(0,l_0)} + \frac{\kappa_1}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,l_0)} + \frac{\rho_2}{2}\|v_t\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \frac{\kappa_2}{2}\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \frac{\rho_3}{2}\|w_t\|^2_{L^2(l_1,l)} + \frac{\kappa_3}{2}\|w_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\,, \quad y$$

$$\frac{dE_3(t)}{dt} = [-\,(\kappa_3\, w_x(l_1) + \kappa_0\, w_{xt}(l_1))\, w_t(l_1) + \kappa_2\, v_x(l_1)\, v_t(l_1)] + [(\kappa_3\, w_x(l) + \kappa_0\, w_{xt}(l))\, w_t(l) - \kappa_1\, u_x(0)\, u_t(0)] + [\kappa_1\, u_x(l_0)\, u_t(l_0) - \kappa_2\, v_x(l_0)\, v_t(l_0)] - \kappa_0\int_{l_1}^{l}|w_{xt}|^2 dx - \gamma\int_{l_0}^{l_1}|v_t|^2 dx\,.$$

De la observación anterior, las energías están bien definidas si

$$u \in H^1(0,l_0)\,,\ v \in H^1(l_0,l_1)\,,\ w \in H^1(l_1,l) \quad \text{y}$$
$$U = u_t \in L^2(0,l_0)\,,\ V = v_t \in L^2(l_0,l_1)\,,\ W = w_t \in L^2(l_1,l)\,.$$

Antes de definir el Espacio de Fase, **se introducen las siguientes notaciones:**

$$\mathbb{H}^m = H^m(0,l_0) \times H^m(l_0,l_1) \times H^m(l_1,l) \quad , \quad m = 1,2$$
$$\mathbb{L}^2 = L^2(0,l_0) \times L^2(l_0,l_1) \times L^2(l_1,l)$$
$$\mathbb{H}^1_l = \{(u,v,w) \in \mathbb{H}^1 \,:\, u(0) = 0 = w(l),\ u(l_0) = v(l_0),\ v(l_1) = w(l_1)\}.$$

Definición 2.1. *Se define el Espacio de Fase como* $\mathcal{H} := \mathbb{H}^1_l \times \mathbb{L}^2\,.$

Ahora, podemos definir con precisión los domínios de los operadores lineales.

Para $(2{,}19)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = \{&\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : \mathcal{A}_1\,\Phi \in \mathcal{H}\,,\ \kappa_1\, u_x(l_0) + \kappa_0\, U_x(l_0) = \kappa_2\, v_x(l_0),\\
&\kappa_2\, v_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1)\}\\
= \{&\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : (U,V,W,\kappa_1\, u_{xx} + \kappa_0\, U_{xx}, v_{xx}, w_{xx}) \in \mathcal{H}\,,\\
&\kappa_1\, u_x(l_0) + \kappa_0\, U_x(l_0) = \kappa_2\, v_x(l_0),\ \kappa_2\, v_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1)\}\\
= \{&\Phi \in \mathcal{H} : (U,V,W) \in \mathbb{H}^1_l\,,\ (\kappa_1\, u + \kappa_0\, U, v, w) \in \mathbb{H}^2,\ \kappa_1\, u_x(l_0) + \kappa_0\, U_x(l_0) =\\
&\kappa_2\, v_x(l_0)\,,\ \kappa_2\, v_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1)\}\,. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Para $(2{,}20)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}_2) = \{&\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : \mathcal{A}_2\,\Phi \in \mathcal{H}\,,\ \kappa_1\, u_x(l_0) = \kappa_2\, v_x(l_0) + \kappa_0\, V_x(l_0),\\
&\kappa_2\, v_x(l_1) + \kappa_0\, V_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1)\}\,.\\
= \{&\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : (U,V,W,u_{xx}, \kappa_2\, v_{xx} + \kappa_0\, V_{xx}, w_{xx}) \in \mathcal{H}\,,\\
&\kappa_1\, u_x(l_0) = \kappa_2\, v_x(l_0) + \kappa_0\, V_x(l_0),\ \kappa_2\, v_x(l_1) + \kappa_0\, V_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1)\}\\
= \{&\Phi \in \mathcal{H} : (U,V,W) \in \mathbb{H}^1_l\,,\ (u, \kappa_2\, v + \kappa_0\, V, w) \in \mathbb{H}^2,\ \kappa_1\, u_x(l_0) = \kappa_2\, v_x(l_0) +\\
&\kappa_0\, V_x(l_0),\ \kappa_2\, v_x(l_1) + \kappa_0\, V_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1)\}\,. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Para $(2{,}21)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}_3) = \{&\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : \mathcal{A}_3\,\Phi \in \mathcal{H}\,,\ \kappa_1\, u_x(l_0) = \kappa_2\, v_x(l_0)\,,\\
&\kappa_2\, v_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1) + \kappa_0\, W_x(l_1)\}\\
= \{&\Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{H} : (U,V,W,u_{xx}, v_{xx}, \kappa_3\, w_{xx} + \kappa_0\, W_{xx}) \in \mathcal{H}\,,\\
&\kappa_1\, u_x(l_0) = \kappa_2\, v_x(l_0),\ \kappa_2\, v_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1) + \kappa_0\, W_x(l_1)\}\\
= \{&\Phi \in \mathcal{H} : (U,V,W) \in \mathbb{H}^1_l\,,\ (u, v, \kappa_3\, w + \kappa_0\, W) \in \mathbb{H}^2,\ \kappa_1\, u_x(l_0) = \kappa_2\, v_x(l_0)\,,\\
&\kappa_2\, v_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1) + \kappa_0\, W_x(l_1)\}\,. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

En resumen, los sistemas acoplados $(2{,}1) - (2{,}6)\,,\ (2{,}7) - (2{,}12)$ y $(2{,}13) - (2{,}18)$ son reducidos a los siguientes problemas de valor inicial:

$$\begin{aligned}
&\textbf{VEF :} \qquad \frac{d}{dt}\,\Phi(t) = \mathcal{A}_1\,\Phi(t)\,, \quad \forall\, t > 0\,, \quad \Phi(0) = \Phi_0\\
&\textbf{EVF :} \qquad \frac{d}{dt}\,\Phi(t) = \mathcal{A}_2\,\Phi(t)\,, \quad \forall\, t > 0\,, \quad \Phi(0) = \Phi_0\\
&\textbf{EFV :} \qquad \frac{d}{dt}\,\Phi(t) = \mathcal{A}_3\,\Phi(t)\,, \quad \forall\, t > 0\,, \quad \Phi(0) = \Phi_0\,,
\end{aligned}$$

donde $\Phi(t) = (u,v,w,U,V,W)$ y $\Phi(0) = (u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) \in \mathcal{H}\,.$

Ahora, dotaremos al Espacio de Fase $\mathcal{H}$ de una estructura de **Espacio de Hilbert**.
Antes se dará un lema importante.

Lema 2.1. *Si* $(u,v,w) \in \mathbb{H}^1_l\,,$ *entonces existe una constante* $C > 0\,,$ *que no depende de* $u\,,\ v$ *y* $w\,,$ *tales que*

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{L^2(0,l_0)} \le C\,\|u_x\|_{L^2(0,l_0)}\,, \quad \|w\|_{L^2(l_1,l)} \le C\,\|w_x\|_{L^2(l_1,l)} \quad \text{y}\\
&\|v\|_{L^2(l_0,l_1)} \le C\left(\|u_x\|_{L^2(0,l_0)} + \|v_x\|_{L^2(l_0,l_1)}\right)\,.
\end{aligned}$$

Demostración. Si $(u,v,w) \in \mathbb{H}^1_l$, entonces $u \in H^1(0,l_0)$, $v \in H^1(l_0,l_1)$, $w \in H^1(l_1,l)$ y $u(0) = 0 = w(l)$, $u(l_0) = v(l_0)$, $v(l_1) = w(l_1)$.
Por la desigualdad de Poincaré, existe una constante $C_1 > 0$ tales que $\|u\|_{L^2(0,l_0)} \le C_1 \|u_x\|_{L^2(0,l_0)}$ y $\|w\|_{L^2(l_1,l)} \le C_1 \|w_x\|_{L^2(l_1,l)}$.
Además, usando las inmersiones contínuas $H^1(l_0,l_1) \hookrightarrow C([l_0,l_1])$ y $L^2(l_0,l_1) \hookrightarrow L^1(l_0,l_1)$, se tiene

$$\begin{aligned}
|v(x)|^2 &= \left| v(l_0) + \int_{l_0}^{x} v_x(s)\, ds \right|^2 \le 2\left(|u(l_0)|^2 + \left(\int_{l_0}^{l_1} |v_x|\, dx \right)^2 \right) \\
&\le 2\left(\|u\|^2_{C([l_0,l_1])} + \left(\int_{l_0}^{l_1} |v_x|\, dx \right)^2 \right) \\
&\le C_2 \left(\|u\|^2_{H^1(l_0,l_1)} + \int_{l_0}^{l_1} |v_x|^2\, dx \right) \le C_3 \left(\|u_x\|^2_{L^2(0,l_0)} + \|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} \right) .
\end{aligned}$$

Así, se puede escoger una constante $C > 0$ tal que se tiene lo deseado. □

Teorema 2.1. $(\mathcal{H}, \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ *es un Espacio de Hilbert, donde la aplicación* $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que* $\langle Z_1, Z_2 \rangle_{\mathcal{H}} := \int_0^{l_0} \left(\kappa_1 (u_1)_x (\overline{u}_2)_x + \rho_1\, U_1\, \overline{U}_2 \right) dx + \int_{l_0}^{l_1} \left(\kappa_2 (v_1)_x (\overline{v}_2)_x + \rho_2\, V_1\, \overline{V}_2 \right) dx +$
$\int_{l_1}^{l} \left(\kappa_3 (w_1)_x (\overline{w}_2)_x + \rho_3\, W_1\, \overline{W}_2 \right) dx$, *para todo* $Z_1 = (u_1, v_1, w_1, U_1, V_1, W_1)$, $Z_2 = (u_2, v_2, w_2, U_2, V_2, W_2) \in \mathcal{H}$ *es un producto interno sobre* $\mathcal{H}$.

Demostración. **Se probará que** $\langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ **es un producto interno sobre** $\mathcal{H}$.
Sean $Z_i = (u_i, v_i, w_i, U_i, V_i, W_i) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2, 3$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.
Es claro que $\langle \alpha\, Z_1 + Z_2, Z_3 \rangle_{\mathcal{H}} = \alpha \langle Z_1, Z_3 \rangle_{\mathcal{H}} + \langle Z_2, Z_3 \rangle_{\mathcal{H}}$.
Como

$$\begin{aligned}
\langle Z_1, Z_1 \rangle_{\mathcal{H}} = &\int_0^{l_0} \left(\kappa_1\ (u_1)_x\ (\overline{u}_1)_x + \rho_1\, U_1\, \overline{U}_1 \right) dx + \int_{l_0}^{l_1} \left(\kappa_2\ (v_1)_x\ (\overline{v}_1)_x + \rho_2\, V_1\, \overline{V}_1 \right) dx + \\
&\int_{l_1}^{l} \left(\kappa_3\ (w_1)_x\ (\overline{w}_1)_x + \rho_3\, W_1\, \overline{W}_1 \right) dx \\
= &\ \kappa_1 \|u_1\|^2_{L^2(0,l_0)} + \rho_1 \|U_1\|^2_{L^2(0,l_0)} + \kappa_2 \|v_1\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_2 \|V_1\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \kappa_3 \|w_1\|^2_{L^2(l_1,l)} \\
&+ \rho_3 \|W_1\|^2_{L^2(l_1,l)} ,
\end{aligned}$$

entonces

$$\langle Z_1, Z_1 \rangle_{\mathcal{H}} \ge 0 \quad \text{y} \quad \langle Z_1, Z_1 \rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Z_1 = 0 \quad \text{en} \quad \mathcal{H} .$$

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle Z_1, Z_2 \rangle_{\mathcal{H}} = &\int_0^{l_0} \left(\kappa_1\ (u_1)_x\ (\overline{u}_2)_x + \rho_1\, U_1\, \overline{U}_2 \right)\ dx + \int_{l_0}^{l_1} \left(\kappa_2\ (v_1)_x\ (\overline{v}_2)_x + \rho_2\, V_1\, \overline{V}_2 \right)\ dx + \\
&\int_{l_1}^{l} \left(\kappa_3\ (w_1)_x\ (\overline{w}_2)_x + \rho_3\, W_1\, \overline{W}_2 \right)\ dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{l_0} \overline{\left(\kappa_1\, (\overline{u}_1)_x\, (u_2)_x + \rho_1 \overline{U}_1\, U_2\right)}\, dx + \int_{l_0}^{l_1} \overline{\left(\kappa_2\, (\overline{v}_1)_x\, (v_2)_x + \rho_2 \overline{V}_1\, V_2\right)}\, dx + \\
&\quad \int_{l_1}^{l} \overline{\left(\kappa_3\, (\overline{w}_1)_x\, (w_2)_x + \rho_3 \overline{W}_1\, W_2\right)}\, dx \\
&= \overline{\int_0^{l_0} \left(\kappa_1\, (\overline{u}_1)_x\, (u_2)_x + \rho_1 \overline{U}_1\, U_2\right)\, dx} + \overline{\int_{l_0}^{l_1} \left(\kappa_2\, (\overline{v}_1)_x\, (v_2)_x + \rho_2 \overline{V}_1\, V_2\right)\, dx} + \\
&\quad \overline{\int_{l_1}^{l} \left(\kappa_3\, (\overline{w}_1)_x\, (w_2)_x + \rho_3 \overline{W}_1\, W_2\right)\, dx} \\
&= \overline{\langle Z_2, Z_1\rangle}_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Se probará que $(\mathcal{H}\,,\,\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ **es un Espacio de Banach.**
Sea $\{Z_m = (u_m, v_m, w_m, U_m, V_m, W_m)\}_{m\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}\,,\,\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$.
Entonces $u_m \in H^1(0, l_0)$, $v_m \in H^1(l_0, l_1)$, $w_m \in H^1(l_1, l)$, $U_m \in L^2(0, l_0)$, $V_m \in L^2(l_0, l_1)$, $W_m \in L^2(l_1, l)$, para todo $m \geq 1$, tal que

$$
u_m(0) = 0 = w_m(l)\,,\ u_m(l_0) = v_m(l_0)\,,\ v_m(l_1) = w_m(l_1)\,,\ \forall m \geq 1\,. \tag{2.25}
$$

Observe que,

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 \|U_m\|^2_{L^2(0,l_0)} \leq \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}}\,, \quad \rho_2 \|V_m\|^2_{L^2(l_0,l_1)} \leq \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}} \quad \text{y} \\
&\rho_3 \|W_m\|^2_{L^2(l_1,l)} \leq \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

Además, por el lema anterior, se puede escoger una constante $C > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
&\|u_m\|^2_{H^1(0,l_0)} = \|u_m\|^2_{L^2(0,l_0)} + \|(u_m)_x\|^2_{L^2(0,l_0)} \leq C\, \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}} \\
&\|v_m\|^2_{H^1(l_0,l_1)} = \|v_m\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \|(v_m)_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} \leq C\, \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}} \\
&\|w_m\|^2_{H^1(l_1,l)} = \|w_m\|^2_{L^2(l_1,l)} + \|(w_m)_x\|^2_{L^2(l_1,l)} \leq C\, \|Z_m\|^2_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Por $(2{,}26)$ y $(2{,}27)$, las sucesiones $\{u_m\}_{m\geq 1}$, $\{v_m\}_{m\geq 1}$, $\{w_m\}_{m\geq 1}$, $\{U_m\}_{m\geq 1}$, $\{V_m\}_{m\geq 1}$, $\{W_m\}_{m\geq 1}$ son sucesiones de Cauchy en $H^1(0, l_0)$, $H^1(l_0, l_1)$, $H^1(l_1, l)$, $L^2(0, l_0)$, $L^2(l_0, l_1)$, $L^2(l_1, l)$ respectivamente.
Entonces, existen únicos

$$
\begin{aligned}
&\widehat{u} \in H^1(0, l_0)\,,\ \widehat{v} \in H^1(l_0, l_1)\,,\ \widehat{w} \in H^1(l_1, l) \quad \text{y} \\
&\widehat{U} \in L^2(0, l_0)\,,\ \widehat{V} \in L^2(l_0, l_1)\,,\ \widehat{W} \in L^2(l_1, l)\,,
\end{aligned}
$$

tales que

$$
\begin{aligned}
&u_m \longrightarrow \widehat{u} \quad \text{en} \quad H^1(0, l_0)\,,\ v_m \longrightarrow \widehat{v} \quad \text{en} \quad H^1(l_0, l_1)\,,\ w_m \longrightarrow \widehat{w} \quad \text{en} \quad H^1(l_1, l) \quad \text{y} \\
&U_m \longrightarrow \widehat{U} \quad \text{en} \quad L^2(0, l_0)\,,\ V_m \longrightarrow \widehat{V} \quad \text{en} \quad L^2(l_0, l_1)\,,\ W_m \longrightarrow \widehat{W} \quad \text{en} \quad L^2(l_1, l)\,.
\end{aligned}
$$

Además, por $(2{,}25)$ y por la inmersión de Sobolev $(1{,}17)$, se tiene

$$
\widehat{u}(0) = 0 = \widehat{w}(l)\,,\ \widehat{u}(l_0) = \widehat{v}(l_0)\,,\ \widehat{v}(l_1) = \widehat{w}(l_1)\,.
$$

Entonces $\widehat{Z} = (\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}, \widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W}) \in \mathcal{H}$.
Luego,

$$\begin{aligned}\|Z_m - \widehat{Z}\|_{\mathcal{H}}^2 &= \kappa_1 \|\,(u_m - \widehat{u})_x\,\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \kappa_2 \|\,(v_m - \widehat{v})_x\,\|_{L^2(l_0,l_1)}^2 + \kappa_3 \|\,(w_m - \widehat{w})_x\,\|_{L^2(l_1,l)}^2 + \\ &\quad \rho_1 \|U_m - \widehat{U}\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \rho_2 \|V_m - \widehat{V}\|_{L^2(l_0,l_1)}^2 + \rho_3 \|W_m - \widehat{W}\|_{L^2(l_1,l)}^2 \\ &\leq \widehat{C}\,(\|u_m - \widehat{u}\|_{H^1(0,l_0)}^2 + \|v_m - \widehat{v}\|_{H^1(l_0,l_1)}^2 + \|w_m - \widehat{w}\|_{H^1(l_1,l)}^2 + \\ &\quad \|U_m - \widehat{U}\|_{L^2(0,l_0)}^2 + \|V_m - \widehat{V}\|_{L^2(l_0,l_1)}^2 + \|W_m - \widehat{W}\|_{L^2(l_1,l)}^2)\,,\end{aligned}$$

donde $\widehat{C} = max\,\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$.
Haciendo $m \longrightarrow +\infty$ se tiene $Z_m \longrightarrow \widehat{Z}$ en $(\mathcal{H}\,,\,\|\cdot\|_{\mathcal{H}})$. □

Observación 2.2. *La demostración del teorema anterior también prueba que* $\left(\mathbb{H}_l^1\,, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}_l^1}\right)$ *es un Espacio de Hilbert, donde la aplicación* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}_l^1} : \mathbb{H}_l^1 \times \mathbb{H}_l^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ *tal que*

$$\langle Y_1, Y_2\rangle_{\mathbb{H}_l^1} := \kappa_1 \int_0^{l_0} (u_1)_x\,(\overline{u}_2)_x\,dx + \kappa_2 \int_{l_0}^{l_1} (v_1)_x\,(\overline{v}_2)_x\,dx + \kappa_3 \int_{l_1}^{l} (w_1)_x\,(\overline{w}_2)_x\,dx\,, \quad (2.28)$$

para todo $Y_1 = (u_1, v_1, w_1)\,,\ Y_2 = (u_2, v_2, w_2) \in \mathbb{H}_l^1$ *es un producto interno sobre* $\mathbb{H}_l^1$.

2.2. Buena Colocación del Problema: Existencia y Unicidad.

El objetivo de esta sección es demostrar, usando la teoría de semigrupos, el Teorema de Existencia y Unicidad de Soluciones para los modelos **VEF , EVF** y **EFV** .
Para cada $i = 1,2,3$, el operador lineal $\mathcal{A}_i : \mathcal{D}(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es definido, para cada $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_i)$, por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1\,\Phi &= \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_1}\,U_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx}, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}\,W\right) \\ \mathcal{A}_2\,\Phi &= \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_2}\,V_{xx}, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}\,W\right) \\ \mathcal{A}_3\,\Phi &= \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\,u_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\,v_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_2}\,V, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\,w_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_3}\,W_{xx}\right)\,,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) =&\{\Phi \in \mathcal{H} :\ (U,V,W) \in \mathbb{H}_l^1,\ (\kappa_1\,u + \kappa_0\,U, v, w) \in \mathbb{H}^2,\ \kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0)\,, \\ &\kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\} \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_2) =&\{\Phi \in \mathcal{H} :\ (U,V,W) \in \mathbb{H}_l^1,\ (u, \kappa_2\,v + \kappa_0\,V, w) \in \mathbb{H}^2,\ \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0) + \kappa_0\,V_x(l_0)\,, \\ &\kappa_2\,v_x(l_1) + \kappa_0\,V_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\} \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_3) =&\{\Phi \in \mathcal{H} :\ (U,V,W) \in \mathbb{H}_l^1,\ (u, v, \kappa_3\,w + \kappa_0\,W) \in \mathbb{H}^2,\ \kappa_1\,u_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0)\,, \\ &\kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1) + \kappa_0\,W_x(l_1)\}\,.\end{aligned}$$

Lema 2.2. *Para cada* $i = 1,2,3$, *el domínio* $\mathcal{D}(\mathcal{A}_i)$ *es denso en* $\mathcal{H}$.

Demostración. **Para** $i = 1$.
Basta demostrar que $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)^{\perp} = \{0\}$.
Es claro que $\{0\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)^{\perp}$.
Sea $\widehat{\Phi} = (\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}, \widehat{U}, \widehat{V}, \widehat{W}) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)^{\perp}$.
Entonces

$$0 = \langle \widehat{\Phi}\,,\, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{l_0} \Big(\kappa_1\, \widehat{u}_x\, \overline{u}_x + \rho_1\, \widehat{U}\, \overline{U} \Big)\, dx + \int_{l_0}^{l_1} \Big(\kappa_2\, \widehat{v}_x\, \overline{v}_x + \rho_2\, \widehat{V}\, \overline{V} \Big)\, dx + \int_{l_1}^{l} \Big(\kappa_3\, \widehat{w}_x\, \overline{w}_x + \rho_3\, \widehat{W}\, \overline{W} \Big)\, dx\,,\ \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)\,. \tag{2.29}$$

Como $\Phi_1 = (0,0,0,U,0,0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, para todo $U \in C_0^{\infty}(0, l_0)$, entonces

$$0 = \langle \widehat{\Phi}\,,\, \Phi_1 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{l_0} \widehat{U}\, \overline{U}\, dx\,,\ \forall\, U \in C_0^{\infty}(0, l_0)\,.$$

Por el Lema de Du Bois Raymond, se tiene $\widehat{U} = 0$ en $L^2(0, l_0)$.
Análogamente, $\Phi_2 = (0,0,0,0,V,0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, para todo $V \in C_0^{\infty}(l_0, l_1)$ y
$\Phi_3 = (0,0,0,0,0,W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, para todo $W \in C_0^{\infty}(l_1, l)$. Entonces
$0 = \displaystyle\int_{l_0}^{l_1} \widehat{V}\, \overline{V}\, dx\,,\ \forall\, V \in C_0^{\infty}(l_0, l_1)$ y $0 = \displaystyle\int_{l_1}^{l} \widehat{W}\, \overline{W}\, dx\,,\ \forall\, W \in C_0^{\infty}(l_1, l)$.
Por el Lema de Du Bois Raymond, se tienen

$$\widehat{V} = 0 \quad \text{en} \quad L^2(l_0, l_1) \quad \text{y} \quad \widehat{W} = 0 \quad \text{en} \quad L^2(l_1, l)\,.$$

Por otro lado, $\Phi_4 = (u,0,0,0,0,0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, para todo $u \in C_0^{\infty}(0, l_0)$, entonces

$$0 = \langle \widehat{\Phi}\,,\, \Phi_4 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{l_0} \widehat{u}_x\, \overline{u}_x\, dx\,,\ \forall\, u \in C_0^{\infty}(0, l_0)\,.$$

Sea $u_1 \in C_0^{\infty}(0, l_0)$ cualquiera. Tome $u \in C_0^{\infty}(0, l_0)$ de modo que $u_x = u_1$.
Entonces $0 = \displaystyle\int_0^{l_0} \widehat{u}_x\, \overline{u_1}\, dx\,,\ \forall\, u_1 \in C_0^{\infty}(0, l_0)$.
Por el Lema de Du Bois Raymond, se tiene $\widehat{u} = 0$ en $H^1(0, l_0)$.
Análogamente,

$$\Phi_5 = (0,v,0,0,0,0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)\,,\ \forall\, v \in C_0^{\infty}(l_0, l_1) \quad \text{y}$$
$$\Phi_6 = (0,0,w,0,0,0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)\,,\ \forall\, w \in C_0^{\infty}(l_1, l)\,,$$

entonces $0 = \displaystyle\int_{l_0}^{l_1} \widehat{v}\, \overline{v_1}\, dx\,,\ \forall\, v_1 \in C_0^{\infty}(l_0, l_1)$ y $0 = \displaystyle\int_{l_1}^{l} \widehat{w}\, \overline{w_1}\, dx\,,\ \forall\, w_1 \in C_0^{\infty}(l_1, l)$.
Por el Lema de Du Bois Raymond, se obtienen

$$\widehat{v} = 0 \quad \text{en} \quad H^1(l_0, l_1) \quad \text{y} \quad \widehat{w} = 0 \quad \text{en} \quad H^1(l_1, l)\,.$$

Por lo tanto, de $(2{,}29)$ se tiene

$$\widehat{\Phi} = 0\,.$$

Procediendo de modo análogo, se obtienen que $\mathcal{D}(\mathcal{A}_2)$ y $\mathcal{D}(\mathcal{A}_3)$ son densos en $\mathcal{H}$. □

Lema 2.3. *Para cada* $i = 1, 2, 3$, *el operador lineal* $\mathcal{A}_i$ *es disipativo.*

Demostración. **Para** $\mathcal{A}_1$.
Sea $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$.
Entonces

$$\langle \mathcal{A}_1 \Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{l_0} \big(\kappa_1 U_x \overline{u}_x + (\kappa_1 u_{xx} + \kappa_0 U_{xx}) \overline{U} \big) \, dx + \int_{l_0}^{l_1} \big(\kappa_2 V_x \overline{v}_x + \kappa_2 v_{xx} \overline{V} \big) \, dx + \int_{l_1}^{l} \big(\kappa_3 W_x \overline{w}_x + (\kappa_3 w_{xx} - \gamma W) \overline{W} \big) \, dx$$

$$= \int_0^{l_0} \kappa_1 U_x \overline{u}_x \, dx + \int_{l_0}^{l_1} \kappa_2 V_x \overline{v}_x \, dx + \int_{l_1}^{l} \kappa_3 W_x \overline{w}_x \, dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 \, dx + \underbrace{\int_0^{l_0} (\kappa_1 u_{xx} + \kappa_0 U_{xx}) \overline{U} \, dx}_{(I_1)} + \underbrace{\int_{l_0}^{l_1} \kappa_2 v_{xx} \overline{V} \, dx}_{(I_2)} + \underbrace{\int_{l_1}^{l} \kappa_3 w_{xx} \overline{W} \, dx}_{(I_3)} .$$

Integrándose por partes en (I_1) , (I_2) , (I_3) y usando la condición de transmisión $u(0) = 0 = w(l)$, $V(l_0) = U(l_0)$, se obtiene

$$\langle \mathcal{A}_1 \Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^{l_0} \kappa_1 U_x \overline{u}_x \, dx + \int_{l_0}^{l_1} \kappa_2 V_x \overline{v}_x \, dx + \int_{l_1}^{l} \kappa_3 W_x \overline{w}_x \, dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 \, dx +$$
$$\left[\kappa_1 u_x(l_0) \overline{U}(l_0) - \int_0^{l_0} \kappa_1 u_x \overline{U}_x \, dx + \kappa_0 U_x(l_0) \overline{U}(l_0) - \kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2 \, dx \right] - \kappa_3 w_x(l_1) \overline{W}(l_1) +$$
$$\left[\kappa_2 v_x(l_1) \overline{V}(l_1) - \kappa_2 v_x(l_0) \overline{V}(l_0) - \int_{l_0}^{l_1} \kappa_2 v_x \overline{V}_x \, dx \right] - \int_{l_1}^{l} \kappa_3 w_x \overline{W}_x \, dx$$

$$= \underbrace{[\kappa_1 u_x(l_0) + \kappa_0 U_x(l_0) - \kappa_2 v_x(l_0)]}_{(II)} \overline{U}(l_0) + \underbrace{[\kappa_2 v_x(l_1) - \kappa_3 w_x(l_1)]}_{(III)} \overline{V}(l_1) - \kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2 \, dx$$
$$+ \kappa_1 \int_0^{l_0} \big(U_x \overline{u}_x - \overline{U}_x u_x \big) \, dx + \kappa_2 \int_{l_0}^{l_1} \big(V_x \overline{v}_x - \overline{V}_x v_x \big) \, dx + \kappa_3 \int_{l_1}^{l} \big(W_x \overline{w}_x - \overline{W}_x w_x \big) \, dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 \, dx .$$

Usando las condiciones de transmisión (2,4) , se tiene $(II) = (III) = 0$.
Entonces

$$\langle \mathcal{A}_1 \Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} = 2 \kappa_1 i \int_0^{l_0} Im\,(U_x \overline{u}_x) \, dx + 2 \kappa_2 i \int_{l_0}^{l_1} Im\,(V_x \overline{v}_x) \, dx + 2 \kappa_3 i \int_{l_1}^{l} Im\,(W_x \overline{w}_x) \, dx - \kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2 \, dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 \, dx .$$

Tomando la parte real, se obtiene

$$Re\, \langle \mathcal{A}_1 \Phi, \Phi \rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2 \, dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 \, dx \leq 0 , \quad \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) . \tag{2.30}$$

Procediendo de modo análogo para $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3$, se tienen

$$Re\,\langle \mathcal{A}_2\,\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa_0 \int_{l_0}^{l_1} |V_x|^2\,dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx \leq 0\,, \quad \forall\,\Phi \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_2)\,, \tag{2.31}$$

$$Re\,\langle \mathcal{A}_3\,\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} = -\gamma \int_{l_0}^{l_1} |V|^2\,dx - \kappa_0 \int_{l_1}^{l} |W_x|^2\,dx \leq 0\,, \quad \forall\,\Phi \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_3)\,. \tag{2.32}$$

Por tanto, los operadores son disipativos. □

Lema 2.4. *Para cada* $i = 1, 2, 3$, *se tiene* $0 \in \varrho(\mathcal{A}_i)$.

Demostración. **Para** $i = 1$: Se demostrará que $\mathcal{A}_1^{-1}$ existe y pertenece a $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Afirmación 1 : Para cada $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$, existe un único
$\tilde{\Phi} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W}) \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_1)$ tal que $\mathcal{A}_1\,\tilde{\Phi} = F$.
En efecto, sea $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}$.
Entonces

$$(f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{H}_l^1 \quad \text{y} \quad (f_4, f_5, f_6) \in \mathbb{L}^2\,. \tag{2.33}$$

La ecuación $\mathcal{A}_1\,\Phi = F$, en términos de sus componentes, está dada por

$$U = f_1 \in H^1(0, l_0) \tag{2.34}$$
$$V = f_2 \in H^1(l_0, l_1) \tag{2.35}$$
$$W = f_3 \in H^1(l_1, l) \tag{2.36}$$
$$\kappa_1\,u_{xx} + \kappa_0\,U_{xx} = \rho_1\,f_4 \in L^2(0, l_0) \tag{2.37}$$
$$\kappa_2\,v_{xx} = \rho_2\,f_5 \in L^2(l_0, l_1) \tag{2.38}$$
$$\kappa_3\,w_{xx} - \gamma\,W = \rho_3\,f_6 \in L^2(l_1, l)\,, \tag{2.39}$$

donde $\Phi = (u, v, w, U, V, W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = \{\Phi \in \mathcal{H} : (U, V, W) \in \mathbb{H}_l^1\,, (\kappa_1\,u + \kappa_0\,U, v, w) \in \mathbb{H}^2\,, \kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0)\,, \kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\}$.
Reemplazándose $(2{,}34)$, $(2{,}36)$ en $(2{,}37)$, $(2{,}39)$ respectivamente, se obtienen

$$\kappa_1\,u_{xx} + \kappa_0\,(f_1)_{xx} = \rho_1\,f_4 := g_1 \in L^2(0, l_0) \tag{2.40}$$
$$\kappa_2\,v_{xx} = \rho_2\,f_5 := g_2 \in L^2(l_0, l_1) \tag{2.41}$$
$$\kappa_3\,w_{xx} = \rho_3\,f_6 + \gamma\,f_3 := g_3 \in L^2(l_1, l)\,. \tag{2.42}$$

Ahora, el objetivo es demostrar que el sistema anterior posee una única solución $(u, v, w) \in \mathbb{H}_l^1$ tal que $(\kappa_1\,u + \kappa_0\,f_1, v, w) \in \mathbb{H}^2$. Para demostrar esto, se usará el Teorema de Lax-Milgram.
Se define la aplicación

$$B(.\,,\,.) : \mathbb{H}_l^1 \times \mathbb{H}_l^1 \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad B(Y_1, Y_2) := \langle Y_1, Y_2\rangle_{\mathbb{H}_l^1} = \kappa_1 \int_0^{l_0} (u_1)_x\,(\overline{u}_2)_x\,dx +$$
$$\kappa_2 \int_{l_0}^{l_1} (v_1)_x\,(\overline{v}_2)_x\,dx + \kappa_3 \int_{l_1}^{l} (w_1)_x\,(\overline{w}_2)_x\,dx\,,\ \forall\,Y_1 = (u_1, v_1, w_1), Y_2 = (u_2, v_2, w_2) \in \mathbb{H}_l^1\,.$$

Por la observación anterior, $B(.\,,\,.)$ es un producto interno sobre $\mathbb{H}_l^1$.
Entonces es claro que:

$B(.\,,\,.)$ **es una forma sesquilineal.**
$B(.\,,\,.)$ **es contínua :** $|B(Y_1,Y_2)| = |\langle Y_1,Y_2\rangle_{\mathbb{H}_l^1}| \leq \|Y_1\|_{\mathbb{H}_l^1}\,\|Y_2\|_{\mathbb{H}_l^1}\,,\ \forall\, Y_1,Y_2 \in \mathbb{H}_l^1\,.$
$B(.\,,\,.)$ **es coerciva :** $B(Y,Y) = \langle Y,Y\rangle_{\mathbb{H}_l^1} = \|Y\|^2_{\mathbb{H}_l^1}\,,\ \forall\, Y \in \mathbb{H}_l^1\,.$
Además, se define la aplicación

$$\varphi : \mathbb{H}_l^1 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } \varphi(Y) = -\int_0^{l_0} g_1\,\overline{u}\,dx - \int_{l_0}^{l_1} g_2\,\overline{v}\,dx - \int_{l_1}^{l} g_3\,\overline{w}\,dx\,,\ \forall\, Y=(u,v,w)\in\mathbb{H}_l^1\,.$$

Es claro que φ es antilineal.
Entonces por el Teorema de Lax-Milgram, existe una única $\widehat{Y} = (\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w}) \in \mathbb{H}_l^1$ tal que $B(\widehat{Y},Y) = \varphi(Y)\,,\ \forall\, Y=(u,v,w)\in\mathbb{H}_l^1\,.$
En particular,

$$\begin{cases} \kappa_1 \displaystyle\int_0^{l_0} \widehat{u}_x\,\overline{u}_x\,dx = -\int_0^{l_0} g_1\,\overline{u}\,dx\,, & \text{para} \quad u\in H^1(0,l_0),\ v=w=0 \\ \kappa_2 \displaystyle\int_{l_0}^{l_1} \widehat{v}_x\,\overline{v}_x\,dx = -\int_{l_0}^{l_1} g_2\,\overline{v}\,dx\,, & \text{para} \quad v\in H^1(l_0,l_1),\ u=w=0 \\ \kappa_3 \displaystyle\int_{l_1}^{l} \widehat{w}_x\,\overline{w}_x\,dx = -\int_{l_1}^{l} g_3\,\overline{w}\,dx\,, & \text{para} \quad w\in H^1(l_1,l),\ u=v=0\,. \end{cases} \tag{2.43}$$

Considerándose $u\in\mathcal{C}_0^\infty(0,l_0)\,,\ v\in\mathcal{C}_0^\infty(l_0,l_1)\,,\ w\in\mathcal{C}_0^\infty(l_1,l)$ en $(2{,}43)\,,$ y por la definición de derivada débil, se tiene

$$\begin{cases} \kappa_1\,\widehat{u}_{xx} = g_1 \in L^2(0,l_0)\,, \\ \kappa_2\,\widehat{v}_{xx} = g_2 \in L^2(l_0,l_1)\,, \\ \kappa_3\,\widehat{w}_{xx} = g_3 \in L^2(l_1,l)\,. \end{cases} \tag{2.44}$$

Luego, $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}) := \left(\widehat{u} - \dfrac{\kappa_0}{\kappa_1}\,f_1,\widehat{v},\widehat{w}\right) \in \mathbb{H}_l^1$ con $(\kappa_1\,\tilde{u} + \kappa_0\,f_1,\tilde{v},\tilde{w}) = (\widehat{u},\widehat{v},\widehat{w}) \in \mathbb{H}^2\,.$
Por lo tanto, $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w})$ es la única solución del sistema $(2{,}40)-(2{,}42)\,.$
Así, existe una única $\tilde{\Phi} := (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w},\tilde{U},\tilde{V},\tilde{W}) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ tal que $\mathcal{A}_1\,\tilde{\Phi} = F\,.$

Observación 2.3. *Aplicando Principio de la Regularidad Elíptica en* $(2{,}44)\,,$ *se obtienen*

$$\begin{aligned} \|\kappa_1\,\tilde{u} + \kappa_0\,f_1\|_{H^2(0,l_0)} = \|\kappa_1\,\widehat{u}\|_{H^2(0,l_0)} &\leq N\,\|g_1\|_{L^2(0,l_0)} \\ \|\kappa_2\,\tilde{v}\|_{H^2(l_0,l_1)} = \|\kappa_2\,\widehat{v}\|_{H^2(l_0,l_1)} &\leq N\,\|g_2\|_{L^2(l_0,l_1)} \\ \|\kappa_3\,\tilde{w}\|_{H^2(l_1,l)} = \|\kappa_3\,\widehat{w}\|_{H^2(l_1,l)} &\leq N\,\|g_3\|_{L^2(l_1,l)}\,, \end{aligned} \tag{2.45}$$

donde $N\geq 0$ *es una constante que no depende de* Φ *y* $F\,.$

Afirmación 2 : $\mathcal{A}_1^{-1}$ es acotado.
En efecto,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_1^{-1}\,F\|^2_{\mathcal{H}} = \|\Phi\|^2_{\mathcal{H}} = &\underbrace{\kappa_1\,\|u_x\|^2_{L^2(0,l_0)} + \kappa_2\,\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \kappa_3\,\|w_x\|^2_{L^2(l_1,l)}}_{(I)} + \\ &\underbrace{\rho_1\,\|U\|^2_{L^2(0,l_0)} + \rho_2\,\|V\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_3\,\|W\|^2_{L^2(l_1,l)}}_{(II)}\,. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Note que,

$$(I) = \frac{1}{\kappa_1}\,\|\kappa_1\,u_x + \kappa_0\,(f_1)_x - \kappa_0\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)} + \kappa_2\,\|\widehat{v}_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \kappa_3\,\|\widehat{w}_x\|^2_{L^2(l_1,l)}$$

$$\leq \frac{2}{\kappa_1}\Big(\|\kappa_1\,u_x + \kappa_0\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)} + \|\kappa_0\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}\Big) + \frac{1}{\kappa_2}\,\|\kappa_2\,\widehat{v}_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \frac{1}{\kappa_3}\,\|\kappa_3\,\widehat{w}_x\|^2_{L^2(l_1,l)}$$

$$\leq N_1\Big(\|\kappa_1\,\widehat{u}\|^2_{H^1(0,l_0)} + \|\kappa_2\,\widehat{v}\|^2_{H^1(l_0,l_1)} + \|\kappa_3\,\widehat{w}\|^2_{H^1(l_1,l)}\Big) + \frac{2\,\kappa_0^2}{\kappa_1}\,\|\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}$$

$$\underbrace{\leq}_{(2{,}45)} N_1\,N^2\,\Big(\|g_1\|^2_{L^2(0,l_0)} + \|g_2\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \|g_3\|^2_{L^2(l_1,l)}\Big) + \frac{2\,\kappa_0^2}{\kappa_1}\,\|\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}$$

$$= N_1\,N^2\Big(\|\rho_1\,f_4\|^2_{L^2(0,l_0)} + \|\rho_2\,f_5\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \|\rho_3\,f_6 + \gamma\,f_3\|^2_{L^2(l_1,l)}\Big) + \frac{2\,\kappa_0^2}{\kappa_1}\,\|\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)}$$

$$\leq N_2\Big(\|f_4\|^2_{L^2(0,l_0)} + \|f_5\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \|f_6\|^2_{L^2(l_1,l)} + \|\,(f_1)_x\,\|^2_{L^2(0,l_0)} + \|(f_3)_x\|^2_{L^2(l_1,l)}\Big)$$

$$\leq M_1\,\|F\|^2_{\mathcal{H}}\,, \tag{2.47}$$

donde $M_1 > 0$ es una constante que no depende de Φ y F.
Además, aplicando el Lema $2{,}1$ en (II), se tiene

$$(II) = \rho_1\,\|f_1\|^2_{L^2(0,l_0)} + \rho_2\,\|f_2\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_3\,\|f_3\|^2_{L^2(l_1,l)}$$

$$\leq \rho_1\,C^2\,\|(f_1)_x\|^2_{L^2(0,l_0)} + 2\,\rho_2\,C^2\Big(\|(f_1)_x\|^2_{L^2(0,l_0)} + \|(f_2)_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)}\Big) + \rho_3\,\|(f_3)_x\|^2_{L^2(l_1,l)}$$

$$\leq M_2\,\|F\|^2_{\mathcal{H}}\,, \tag{2.48}$$

donde $M_2 > 0$ es una constante que no depende de Φ y F.
Entonces, de $(2{,}46) - (2{,}48)$, se concluye que $\mathcal{A}_1^{-1}$ es acotado.
Luego, de las afirmaciones 1 y 2, se tiene que $\mathcal{A}_1^{-1} \in \mathcal{L}\,(\mathcal{H})$.
Así, $0 \in \varrho(\mathcal{A}_1)$.
Procediendo de modo análogo para $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{A}_3$, se obtienen $0 \in \varrho(\mathcal{A}_2)$ y $0 \in \varrho(\mathcal{A}_3)$. □

Teorema 2.2. *Para cada $i = 1, 2, 3$, el operador $\mathcal{A}_i$ genera un C_0- semigrupo $(\mathcal{S}_{\mathcal{A}_i}(t))_{t\geq 0}$ de contracciones sobre el Espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demostración. Basta aplicar el teorema $1{,}30$. □

Teorema 2.3. *Para cualquier $\Phi_0 = (u_0, v_0, w_0, u_1, v_1, w_1) \in \mathcal{H} = \mathbb{H}^1_l \times \mathbb{L}^2$ existe una única solución $\Phi = (u, v, w, u_t, v_t, w_t)$ de los modelos* **VEF, EVF** *y* **EFV**, *satisfaciendo*

$$\Phi \in C\,([0, +\infty[: \mathcal{H})\,.$$

Además, si $\Phi_0 \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_i)$ entonces $\Phi \in C^1\,([0, +\infty[: \mathcal{H}) \cap C\,([0, +\infty[: \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_i))$.

Demostración. Por el teorema anterior, para cada $i = 1, 2, 3$, $\mathcal{A}_i$ genera un C_0- semigrupo $(\mathcal{S}_{\mathcal{A}_i}(t))_{t\geq 0}$ de contracciones sobre $\mathcal{H}$.
Entonces, por el Teorema de Existencia y Unicidad, la aplicación $\Phi_i : [0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $\Phi_i(t) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}_i}(t)\,\Phi_0$ es la única solución del problema de valor inicial $\begin{cases} U_t = \mathcal{A}_i\,U \\ U(0) = \Phi_0 \end{cases}$ con la condición $\Phi_i \in C\,([0, +\infty[: \mathcal{H})$.
Además, si $\Phi_0 \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_i)$ entonces $\Phi_i \in C^1\,([0, +\infty[: \mathcal{H}) \cap C\,([0, +\infty[: \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_i))$. □

Observación 2.4. *Desde que usamos el Semigrupo asociado al problema para investigar la solubilidad de los problemas* $(2{,}1)-(2{,}18)$, *tenemos que buscar una relación entre la solución del semigrupo dado por* $\Phi_i(t)=\mathcal{S}_{\mathcal{A}_i}(t)\,\Phi_0$ *y solución del problema en estudio.*

Haremos el Análisis para el Modelo VEF .

1. Si $\Phi_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$, es decir, $(u_0,v_0,w_0) \in \mathbb{H}_l^1$, $(u_1,v_1,w_1) \in \mathbb{H}_l^1$ y $(\kappa_1\,u_0+\kappa_0\,u_1,v_0,w_0) \in \mathbb{H}^2$, entonces $\Phi_1 \in C^1([0,+\infty[: \mathcal{H}) \cap C([0,+\infty[: \mathcal{D}(\mathcal{A}_1))$ satisface en $\mathcal{H}$ el problema de valor inicial
$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}_1\,U(t) \\ U(0)=\Phi_0 \end{cases} \tag{2.49}$$
Así, $(u,v,w) \in C^1\left([0,+\infty[: \mathbb{H}_l^1\right) \cap C^2\left([0,+\infty[: \mathbb{L}^2\right)$ tal que verifica las condiciones de transmisión $(2{,}4)$ y $(\kappa_1\,u+\kappa_0\,u_t,v,w) \in \mathbb{H}^2$, es solución del problema **VEF** en $\mathbb{L}^2$. Además, las condiciones iniciales son satisfechas en el sentido fuerte y las condiciones de contorno son satisfechas en el sentido del trazo.

2. Si $\Phi_0 \in \mathcal{D}\left(\mathcal{A}_1^2\right)$, entonces (u,v,w) es una solución clásica del problema **VEF**.

3. Si $\Phi_0 \in \mathcal{H}$, entonces $\Phi_1(t)=\mathcal{S}_{\mathcal{A}_1}(t)\,\Phi_0$ es una solución integral del problema $(2{,}49)$. Así, (u,v,w) es una solución débil del problema **VEF**.

Capítulo 3

Estabilidad Exponencial en los Modelos VEF , EFV

En este capítulo, se demuestra la estabilidad exponencial del semigrupo asociado a la solución del problema de transmisión, desde que la parte viscosa no está en el medio de la viga.

Consideremos el modelo VEF .

Recuerde que el semigrupo asociado a la solución del problema de transmisión **VEF**, está dado por $(\mathcal{S}_{\mathcal{A}_1}(t))_{t\geq 0}$, donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = \{\Phi \in \mathcal{H} :\, & (U,V,W) \in \mathbb{H}^1_l \,,\, (\kappa_1\, u + \kappa_0\, U, v, w) \in \mathbb{H}^2 \,,\, \kappa_2\, v_x(l_1) = \kappa_3\, w_x(l_1)\,, \\
& \kappa_1\, u_x(l_0) + \kappa_0\, U_x(l_0) = \kappa_2\, v_x(l_0)\} \quad \text{y} \\
\mathcal{A}_1\, \Phi = & \left(U, V, W, \frac{\kappa_1}{\rho_1}\, u_{xx} + \frac{\kappa_0}{\rho_1}\, U_{xx}, \frac{\kappa_2}{\rho_2}\, v_{xx}, \frac{\kappa_3}{\rho_3}\, w_{xx} - \frac{\gamma}{\rho_3}\, W \right) \,,\ \forall\, \Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)\,.
\end{aligned}$$

El objetivo es demostrar la estabilidad exponencial del semigrupo asociado a la solución del problema de transmisión **VEF**.
Los argumentos de la demostración están basados en verificar las condiciones necesarias y suficientes del **Teorema de Pruss - Huang - Renardy.**
Antes se demostrarán algunos lemas útiles, que irán a desempeñar un papel importante.

Lema 3.1. *Sean* $\lambda \in \mathbb{R}\,,\ \Phi = (u,v,w,U,V,W) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ *y* $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) \in \mathcal{H}\,.$ *Si* $(i\,\lambda\, I - \mathcal{A}_1)\,\Phi = F$, *entonces*

$$\kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2\, dx + \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\, dx \leq \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{3.1}$$

Demostración. Por hipótesis,

$$i\,\lambda\,\Phi - \mathcal{A}_1\,\Phi = F\,. \tag{3.2}$$

Entonces, la ecuación espectral $(3{,}2)$ puede ser reescrita como

$$i\,\lambda\,u - U = f_1 \qquad en \qquad]0, l_0[\tag{3.3}$$

$$i\,\lambda\,\rho_1\,U - \kappa_1\,u_{xx} - \kappa_0\,U_{xx} = \rho_1\,f_4 \qquad en \qquad]0, l_0[\tag{3.4}$$

$$i\,\lambda\,v - V = f_2 \qquad en \qquad]l_0, l_1[\tag{3.5}$$

$$i\,\lambda\,\rho_2\,V - \kappa_2\,v_{xx} = \rho_2\,f_5 \qquad en \qquad]l_0, l_1[\tag{3.6}$$

$$i\,\lambda\,w - W = f_3 \qquad en \qquad]l_1, l[\tag{3.7}$$

$$i\,\lambda\,\rho_3\,W - \kappa_3\,w_{xx} + \gamma\,W = \rho_3\,f_6 \qquad en \qquad]l_1, l[\ , \tag{3.8}$$

con condiciones de transmisión

$$\begin{aligned} &u(l_0) = v(l_0)\,, \quad \kappa_1\,u_x(l_0) + \kappa_0\,U_x(l_0) = \kappa_2\,v_x(l_0)\,, \\ &v(l_1) = w(l_1)\,, \quad \kappa_2\,v_x(l_1) = \kappa_3\,w_x(l_1)\,, \end{aligned} \tag{3.9}$$

y condiciones de contorno $u(0) = 0\,,\ w(l) = 0\,.$
Por otro lado, recuerde que $\mathcal{A}_1$ es un operador disipativo y

$$Re\,\langle \mathcal{A}_1\,\Phi\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} = -\kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2\,dx - \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx \leq 0\,, \quad \forall\,\Phi \in \mathcal{D}\,(\mathcal{A}_1)\ . \tag{3.10}$$

Entonces, tomando producto interno en la ecuación $(3{,}2)$ por Φ , se obtiene

$$\langle F\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} = \langle i\,\lambda\,\Phi - \mathcal{A}_1\,\Phi\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}} = i\,\lambda\,\|\Phi\|^2_{\mathcal{H}} - \langle \mathcal{A}_1\,\Phi\,,\,\Phi\rangle_{\mathcal{H}}\,.$$

Ahora, tomando la parte real y usando $(3{,}10)$, se tiene

$$\kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2 dx + \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2 dx = -Re\langle \mathcal{A}_1\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} = Re\langle F, \Phi\rangle_{\mathcal{H}} \leq |\langle F, \Phi\rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|F\|_{\mathcal{H}}\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,.$$

Así,

$$\kappa_0 \int_0^{l_0} |U_x|^2\,dx + \gamma \int_{l_1}^{l} |W|^2\,dx \leq \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,.$$

□

Lema 3.2. *Sean* $\lambda \in \mathbb{R}\,,\ \kappa > 0\,,\ \gamma \geq 0$ *y* $F = (f\,,\,g) \in H^1(a,b) \times L^2(a,b)\,.$
Para cualquier solución fuerte $Z = (\psi\,,\,\Psi) \in H^1(a,b) \times L^2(a,b)$ *del sistema*

$$i\,\lambda\,\psi - \Psi = f \quad en \quad]a, b[\tag{3.11}$$

$$i\,\lambda\,\rho\,\Psi - \kappa\,\psi_{xx} + \gamma\,\Psi = g \quad en \quad]a, b[\ , \tag{3.12}$$

existe una constante $C > 0$, *que no depende de* Z , F *y* λ , *tal que*

$$|\psi_x(a)|^2 + |\Psi(a)|^2 + |\psi_x(b)|^2 + |\Psi(b)|^2 \leq C \int_a^b (|\Psi|^2 + |\psi_x|^2)\,dx + C\,\|Z\|\,\|F\|\,, \tag{3.13}$$

donde $\|Z\| = \left(\|\psi_x\|^2_{L^2(a,b)} + \|\Psi\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}$ *y* $\|F\| = \left(\|f_x\|^2_{L^2(a,b)} + \|g\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}$.
Además, para $\gamma = 0$, *se tienen*

$$\int_a^b (|\Psi|^2 + |\psi_x|^2)\,dx \leq C\,(|\psi_x(a)|^2 + |\Psi(a)|^2) + C\,\|Z\|\,\|F\| \quad y \tag{3.14}$$

$$\int_a^b (|\Psi|^2 + |\psi_x|^2)\,dx \leq C\,(|\psi_x(b)|^2 + |\Psi(b)|^2) + C\,\|Z\|\,\|F\|\,. \tag{3.15}$$

Demostración. De $(3{,}11)$, se tiene

$$\overline{i\,\lambda\,\psi_x} = \overline{\Psi}_x + \overline{f}_x\,. \tag{3.16}$$

Se demostrará la desigualdad $(3{,}13)$.

Multiplicando $(3{,}12)$ por $\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x$, y usando $(3{,}16)$, se obtiene

$$-\rho\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(\overline{i\lambda\psi_x}\right)\Psi - \kappa\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x\psi_{xx} + \gamma\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\Psi\overline{\psi}_x = \left(x-\frac{a+b}{2}\right)g\overline{\psi}_x$$

si y sólo si,

$$-\rho\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\Psi\overline{\Psi}_x - \kappa\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x\psi_{xx} = \left(x-\frac{a+b}{2}\right)g\overline{\psi}_x + \rho\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\Psi\overline{f}_x - \gamma\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\Psi\overline{\psi}_x\,.$$

Integrando y tomando la parte real,

$$-\rho Re\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\Psi\overline{\Psi}_x dx - \kappa Re\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x\psi_{xx}dx = Re\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)g\overline{\psi}_x dx + \rho Re\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\Psi\overline{f}_x dx - \gamma Re\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\Psi\overline{\psi}_x dx\,. \tag{3.17}$$

Como

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\Psi\overline{\Psi}_x dx = \left(x-\frac{a+b}{2}\right)|\Psi|^2\Big|_a^b - \int_a^b|\Psi|^2dx - \int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\overline{\Psi}\Psi_x dx\,,$$

entonces

$$Re\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\Psi\overline{\Psi}_x dx = \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(|\Psi(a)|^2+|\Psi(b)|^2\right) - \frac{1}{2}\int_a^b|\Psi|^2dx\,. \tag{3.18}$$

Además,

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x\psi_{xx}dx = \left(x-\frac{a+b}{2}\right)|\psi_x|^2\Big|_a^b - \int_a^b|\psi_x|^2dx - \int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\psi_x\overline{\psi}_{xx}dx\,,$$

entonces

$$Re\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\overline{\psi}_x\psi_{xx}dx = \left(\frac{b-a}{4}\right)\left(|\psi_x(a)|^2+|\psi_x(b)|^2\right) - \frac{1}{2}\int_a^b|\psi_x|^2dx\,. \tag{3.19}$$

Reemplazando $(3{,}18)$ y $(3{,}19)$ en $(3{,}17)$, y tomando módulo, se obtiene

$$\rho\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(|\Psi(a)|^2+|\Psi(b)|^2\right) + \kappa\left(\frac{b-a}{4}\right)\left(|\psi_x(a)|^2+|\psi_x(b)|^2\right) \leq \frac{\rho}{2}\int_a^b|\Psi|^2dx +$$

$$\frac{\kappa}{2}\int_a^b |\psi_x|^2 dx + \int_a^b \left|x - \frac{a+b}{2}\right| |g||\psi_x| dx + \rho\int_a^b \left|x - \frac{a+b}{2}\right| |\Psi||f_x| dx +$$
$$\gamma\int_a^b \left|x - \frac{a+b}{2}\right| |\Psi||\psi_x| dx\,. \tag{3.20}$$

Sean $C_1 = \left(\dfrac{b-a}{4}\right)\text{mín}\{\rho\,,\,\kappa\}$ y $C_2 = \text{máx}\{1\,,\,\rho\,,\,\kappa\,,\,\gamma\}\,.$
Como $\left|x - \dfrac{a+b}{2}\right| \le \dfrac{b-a}{2}\,,\ \forall x \in [a,b]\,,$ entonces en $(3{,}20)\,,$ se tiene

$$C_1\left(|\Psi(a)|^2 + |\Psi(b)|^2 + |\psi_x(a)|^2 + |\psi_x(b)|^2\right) \le C_2\int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx +$$
$$C_2\left(\frac{b-a}{2}\right)\int_a^b (|g|\,|\psi_x| + |\Psi|\,|f_x| + |\Psi|\,|\psi_x|) dx\,. \tag{3.21}$$

Observe que,

$$\int_a^b (|g|\,|\psi_x| + |\Psi|\,|f_x| + |\Psi|\,|\psi_x|)\,dx \le \|\Psi\|_{L^2(a,b)}\,\|\psi_x\|_{L^2(a,b)} + \|g\|_{L^2(a,b)}\,\|\psi_x\|_{L^2(a,b)} +$$
$$\|\Psi\|_{L^2(a,b)}\,\|f_x\|_{L^2(a,b)}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\|\Psi\|^2_{L^2(a,b)} + \|\psi_x\|^2_{L^2(a,b)}\right) + \left(\|g\|^2_{L^2(a,b)} + \|f_x\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}\left(\|\Psi\|^2_{L^2(a,b)} + \|\psi_x\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}$$
$$\le \frac{1}{2}\int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx + \|Z\|\,\|F\|\,. \tag{3.22}$$

Luego, usando la desigualdad $(3{,}22)$ en $(3{,}21)\,,$ se obtiene

$$\left(|\Psi(a)|^2 + |\Psi(b)|^2 + |\psi_x(a)|^2 + |\psi_x(b)|^2\right) \le \frac{C_2}{C_1}\left(1 + \frac{b-a}{4}\right)\int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx +$$
$$\frac{C_2\,(b-a)}{2\,C_1}\,\|Z\|\,\|F\| \le \widehat{C}_1\int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx + \widehat{C}_1\,\|Z\|\,\|F\|\,,$$

donde $\widehat{C}_1 = \text{máx}\left\{\dfrac{C_2}{C_1}\left(1 + \dfrac{b-a}{4}\right), \dfrac{C_2\,(b-a)}{2C_1}\right\}$ es una constante que no depende de $Z\,,\ F$ y $\lambda\,.$

Se demostrará la desigualdad $(3{,}14)\,.$
Multplicando $(3{,}12)$ por $(x-b)\,\overline{\psi}_x\,,$ y usando $(3{,}16)\,,$ se obtiene

$$-\rho\,(x-b)\left(\overline{i\,\lambda\,\psi_x}\right)\Psi - \kappa\,(x-b)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx} = (x-b)\,g\,\overline{\psi}_x\,,$$

si y sólo si, $\quad -\,\rho\,(x-b)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x - \kappa\,(x-b)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx} = (x-b)\,g\,\overline{\psi}_x + \rho\,(x-b)\,\Psi\,\overline{f}_x\,.$

Integrando y tomando la parte real,

$$-\rho\,Re\int_a^b (x-b)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x dx - \kappa\,Re\int_a^b (x-b)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx} dx = Re\int_a^b (x-b)\,g\,\overline{\psi}_x dx +$$
$$\rho\,Re\int_a^b (x-b)\,\Psi\,\overline{f}_x dx\,. \tag{3.23}$$

Como

$$\int_a^b (x-b)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x dx = (x-b)\,|\Psi|^2\Big|_a^b - \int_a^b |\Psi|^2 dx - \int_a^b (x-b)\,\overline{\Psi}\,\Psi_x dx\,,$$

entonces

$$Re\int_a^b (x-b)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)|\Psi(a)|^2 - \frac{1}{2}\int_a^b |\Psi|^2 dx\,. \tag{3.24}$$

Además,

$$\int_a^b (x-b)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx} dx = (x-b)\,|\psi_x|^2\Big|_a^b - \int_a^b |\psi_x|^2 dx - \int_a^b (x-b)\,\psi_x\,\overline{\psi}_{xx} dx\,,$$

entonces

$$Re\int_a^b (x-b)\,\overline{\psi}_x \psi_{xx} dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)|\psi_x(a)|^2 - \frac{1}{2}\int_a^b |\psi_x|^2 dx\,. \tag{3.25}$$

Reemplazando $(3{,}25)$ y $(3{,}24)$ en $(3{,}23)$, y tomando módulo, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{2}\int_a^b |\Psi|^2\, dx + \frac{\kappa}{2}\int_a^b |\psi_x|^2\, dx \le \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\rho\,|\Psi(a)|^2 + \kappa\,|\psi_x(a)|^2\right) + \\ \int_a^b \left(|x-b|\,|g|\,|\psi_x| + \rho\,|x-b|\,|\Psi|\,|f_x|\right) dx\,.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Sean $C_3 = \dfrac{1}{2}\,\text{mín}\{\rho\,,\,\kappa\}$ y $C_4 = (b-a)\,C_2$.
Como $|x-b| \le b-a\,,\,\forall\, x\in[a,b]$, entonces en $(3{,}26)$, se tiene

$$\begin{aligned}&\int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx \le \frac{C_4}{C_3}\left(|\Psi(a)|^2 + |\psi_x(a)|^2\right) + \frac{C_2}{C_3}\int_a^b (|g|\,|\psi_x| + |\Psi|\,|f_x|)dx \\ &\le \widehat{C}_2\left(|\Psi(a)|^2 + |\psi_x(a)|^2\right) + \widehat{C}_2\,\|g\|_{L^2(a,b)}\,\|\psi_x\|_{L^2(a,b)} + \|\Psi\|_{L^2(a,b)}\,\|f_x\|_{L^2(a,b)} \\ &\le \widehat{C}_2\left(|\Psi(a)|^2 + |\psi_x(a)|^2\right) + \widehat{C}_2\left(\|g\|^2_{L^2(a,b)} + \|f_x\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}\left(\|\Psi\|^2_{L^2(a,b)} + \|\psi_x\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2} \\ &\le \widehat{C}_2\left(|\Psi(a)|^2 + |\psi_x(a)|^2\right) + \widehat{C}_2\,\|Z\|\,\|F\|\,,\end{aligned}$$

donde $\widehat{C}_2 = \text{máx}\left\{\dfrac{C_4}{C_3}\,,\,\dfrac{C_2}{C_3}\right\}$ es una constante que no depende de $Z\,,F$ y λ .

Se demostrará la desigualdad $(3{,}15)$.

Multiplicando $(3{,}12)$ por $(x-a)\,\overline{\psi}_x$, usando $(3{,}16)$, integrando y tomando la parte real, se obtiene

$$\begin{aligned}-\rho\,Re\int_a^b (x-a)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x\, dx - \kappa\,Re\int_a^b (x-a)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx}\, dx = Re\int_a^b (x-a)\,g\,\overline{\psi}_x\, dx + \\ \rho\,Re\int_a^b (x-a)\,\Psi\,\overline{f}_x\, dx\,.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Observe que,

$$Re\int_a^b (x-a)\,\Psi\,\overline{\Psi}_x dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)|\Psi(b)|^2 - \frac{1}{2}\int_a^b |\Psi|^2 dx\,, \tag{3.28}$$

$$\text{y}\quad Re\int_a^b (x-a)\,\overline{\psi}_x\,\psi_{xx} dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)|\psi_x(b)|^2 - \frac{1}{2}\int_a^b |\psi_x|^2 dx\,. \tag{3.29}$$

Reemplazando $(3{,}29)$ y $(3{,}28)$ en $(3{,}27)$, y operando de modo análogo al caso anterior, se tiene

$$\int_a^b \left(|\Psi|^2 + |\psi_x|^2\right) dx \leq \widehat{C}_3\left(|\Psi(b)|^2 + |\psi_x(b)|^2\right) + \widehat{C}_3\,\|Z\|\,\|F\|\,,$$

donde $\widehat{C}_3$ es una constante que no depende de $Z\,, F$ y λ.
Luego, basándonos de los casos anteriores, basta tomar $C = \text{máx}\left\{\widehat{C}_1\,,\,\widehat{C}_2\,,\,\widehat{C}_3\right\}$. □

Ahora se demostrará el teorema central del capítulo.

Teorema 3.1. *Si la componente viscosa no está en el medio de la viga, entonces el semigrupo asociado a la solución del problema de transmisión decae exponencialmente, quando el tiempo va para infinito.*

Demostración. **Supongamos que la componente viscosa no está en el medio de la viga.**
Consideremos el modelo VEF .
Basados en el **Teorema de Pruss,** se tiene que demostrar que el eje imaginário está contenido en $\varrho(\mathcal{A}_1)$, y que el operador resolvente está uniformemente acotado sobre el eje imaginário.

Se demostrará que $i\,\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A}_1)$.
Desde que $\mathcal{A}_1$ es un operador cerrado y $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ tiene inmersión compacta sobre el Espacio Fase $\mathcal{H}$, entonces el espectro $\sigma(\mathcal{A}_1)$ sólo contiene valores propios.
Así, es suficiente probar que $\sigma(\mathcal{A}_1)$ no contiene ningún valor propio imaginário.
Se probará razonando por contradicción. Suponga que existe un valor propio imaginário $i\,\lambda_0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Entonces existe $0 \neq \Phi_0 = (u_0, v_0, w_0, U_0, V_0, W_0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ tal que

$$i\,\lambda_0\,\Phi_0 - \mathcal{A}_1\,\Phi_0 = 0\,. \tag{3.30}$$

Reescriviendo $(3{,}30)$, se tiene

$$i\,\lambda_0\,u_0 - U_0 = 0 \tag{3.31}$$
$$i\,\lambda_0\,\rho_1\,U_0 - \kappa_1\,(u_0)_{xx} - \kappa_0\,(U_0)_{xx} = 0 \tag{3.32}$$
$$i\,\lambda_0\,v_0 - V_0 = 0 \tag{3.33}$$
$$i\,\lambda_0\,\rho_2\,V_0 - \kappa_2\,(v_0)_{xx} = 0 \tag{3.34}$$
$$i\,\lambda_0\,w_0 - W_0 = 0 \tag{3.35}$$
$$i\,\lambda_0\,\rho_3\,W_0 - \kappa_3\,(w_0)_{xx} + \gamma\,W_0 = 0\,. \tag{3.36}$$

Usando el Lema $3{,}1$ y las relaciones $(3{,}31)$ y $(3{,}35)$, se obtiene

$$W_0 = U_0 = 0 = u_0 = w_0\,. \tag{3.37}$$

Por otro lado, de las relaciones (3,33) y (3,34), se tiene

$$-\lambda_0^2\,\rho_2\,v_0-\kappa_2\,(v_0)_{xx}=0\,. \tag{3.38}$$

Además, usando (3,37) en las condiciones de transmisión (3,9), se obtiene

$$v_0(l_0)=v_0(l_1)=0 \quad \text{y} \quad (v_0)_x(l_0)=(v_0)_x(l_1)=0\,. \tag{3.39}$$

Luego, considerando las relaciones (3,38) y (3,39) como un problema de valor inicial en $x=l_0$, se tiene $v_0=0$. Mas aún, de (3,33) se obtiene $V_0=0$.
Por lo tanto, $\Phi_0=0$, pero eso es una contradicción.
Así, $i\,\mathbb{R}\subset\varrho(\mathcal{A}_1)$.

Se demostrará que el operador resolvente está uniformemente acotado sobre el eje imaginário.

Desde que el operador resolvente es analítica, basta provar que dicho operador está uniformemente acotado para valores de λ sobre el eje imaginário y fuera de alguna bola cerrada cuyo radio no depende de Φ, F y λ.

Sean $F=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)\in\mathcal{H}$ y $i\,\lambda\in i\,\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$.
Se denota por $(i\,\lambda\,I-\mathcal{A}_1)^{-1}\,F:=\Phi=(u,v,w,U,V,W)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$.
Basta probar que $\|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2\leq M\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}$, para λ suficientemente grande, donde $M>0$ es una constante que no depende de Φ, F y λ.

En primer lugar, se probará que $\displaystyle\int_{l_1}^{l}\left(|w_x|^2+|W|^2\right)dx\;\leq\;M_1\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}$, para λ suficientemente grande, donde $M_1>0$ es una constante que no depende de Φ, F y λ.
De (3,7),

$$\overline{i\,\lambda\,w}=\overline{f_3}+\overline{W}\,. \tag{3.40}$$

Multiplicando la ecuación (3,8) por $\overline{w}$, y usando (3,40), se obtiene

$$-\rho_3\,W(\overline{i\,\lambda\,w})-\kappa_3\,w_{xx}\,\overline{w}+\frac{i\,\gamma}{\lambda}\,W(\overline{i\,\lambda\,w})=\rho_3\,f_6\,\overline{w}\,,\quad \text{si y sólo si,}$$
$$-\rho_3\,|W|^2-\rho_3\,W\,\overline{f}_3-\kappa_3\,w_{xx}\,\overline{w}+\frac{i\,\gamma}{\lambda}\,|W|^2+\frac{i\,\gamma}{\lambda}\,W\,\overline{f}_3=\rho_3\,f_6\,\overline{w}\,.$$

Integrando,

$$\begin{aligned}-\kappa_3\int_{l_1}^{l}w_{xx}\overline{w}dx=\rho_3\int_{l_1}^{l}f_6\overline{w}dx+\rho_3\int_{l_1}^{l}|W|^2dx+\rho_3\int_{l_1}^{l}W\overline{f}_3dx-\frac{i\gamma}{\lambda}\int_{l_1}^{l}|W|^2dx-\\ \frac{i\gamma}{\lambda}\int_{l_1}^{l}W\overline{f}_3dx\,.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Note que,

$$\int_{l_1}^{l}w_{xx}\,\overline{w}dx=-w_x(l_1)\,\overline{w}(l_1)-\int_{l_1}^{l}|w_x|^2dx\,. \tag{3.42}$$

Reemplazando $(3{,}42)$ en $(3{,}41)$, y tomando la parte real, se tiene

$$\kappa_3 \int_{l_1}^{l} |w_x|^2 dx = -\kappa_3\, Re\, w_x(l_1)\, \overline{w}(l_1) + \rho_3 \int_{l_1}^{l} |W|^2 dx + \rho_3\, Re \int_{l_1}^{l} f_6\, \overline{w} dx +$$
$$\rho_3\, Re \int_{l_1}^{l} W\, \overline{f}_3 dx - Re\, \frac{i\gamma}{\lambda} \int_{l_1}^{l} W\, \overline{f}_3 dx\,.$$

Tomando módulo y usando la desigualdad de Holder, se obtiene

$$\kappa_3 \int_{l_1}^{l} |w_x|^2 dx \leq \kappa_3 |w_x(l_1)||w(l_1)| + \rho_3 \int_{l_1}^{l} |W|^2 dx + \rho_3 \int_{l_1}^{l} |f_6||w| dx + \rho_3 \int_{l_1}^{l} |W||f_3| dx +$$
$$\frac{\gamma}{|\lambda|} \int_{l_1}^{l} |W||f_3| dx$$

$$\leq \underbrace{\left(\rho_3 \int_{l_1}^{l} |W|^2\, dx + \rho_3\, \|f_6\|_{L^2(l_1,l)}\, \|w\|_{L^2(l_1,l)} + \rho_3\, \|f_3\|_{L^2(l_1,l)}\, \|W\|_{L^2(l_1,l)}\right)}_{(I)} +$$
$$\kappa_3\, |w_x(l_1)|\, |w(l_1)| + \underbrace{\frac{\gamma}{|\lambda|}\, \|f_3\|_{L^2(l_1,l)}\, \|W\|_{L^2(l_1,l)}}_{(II)}\,. \tag{3.43}$$

Observaciones 3.1. *1. Desde que* (u, v, w), $(f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{H}_l^1$, *por el Lema* $2{,}1$, *existe una constante* $C > 0$, *que no depende de* Φ, F *y* λ, *tales que*

$$\|u\|_{L^2(0,l_0)}\,,\ \|v\|_{L^2(l_0,l_1)}\,,\ \|w\|_{L^2(l_1,l)} \leq C\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \quad y$$
$$\|f_1\|_{L^2(0,l_0)}\,,\ \|f_2\|_{L^2(l_0,l_1)}\,,\ \|f_3\|_{L^2(l_1,l)} \leq C\, \|F\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{3.44}$$

Además,

$$\rho_1\, \|U\|_{L^2(0,l_0)}^2\,,\ \rho_2\, \|V\|_{L^2(l_0,l_1)}^2\,,\ \rho_3\, \|W\|_{L^2(l_1,l)}^2 \leq \|\Phi\|_{\mathcal{H}}^2 \quad y$$
$$\rho_1\, \|f_4\|_{L^2(0,l_0)}^2\,,\ \rho_2\, \|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)}^2\,,\ \rho_3\, \|f_6\|_{L^2(l_1,l)}^2 \leq \|F\|_{\mathcal{H}}^2\,. \tag{3.45}$$

Entonces, del Lema $3{,}1$ *y de las desigualdades* $(3{,}44)$ *y* $(3{,}45)$, *se obtienen*

$$(I) \leq \widehat{C}_1\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}} \quad y$$
$$(II) \leq \frac{\widehat{C}_1}{|\lambda|}\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}}\,, \tag{3.46}$$

donde $\widehat{C}_1 > 0$ *es una constante que no depende de* Φ, F *y* λ.

2. *Usando el Lema* $4{,}2$ *para* w *y* W, *y la inmersión de Sobolev* $H^1(l_1, l) \hookrightarrow C([l_1, l])$,

se puede escoger una constante $\widehat{C}_2 > 0$, *que no depende de* Φ , F *y* λ , *tal que*

$$
\begin{aligned}
|w_x(l_1)\, w(l_1)| &= \frac{1}{|\lambda|}\, |w_x(l_1)|\, |i\,\lambda\, w(l_1)| \underbrace{=}_{(3,7)} \frac{1}{|\lambda|}\, |w_x(l_1)|\, |f_3(l_1) + W(l_1)| \\
&\leq \frac{1}{|\lambda|}\, |w_x(l_1)|\, |W(l_1)| + \frac{1}{|\lambda|}\, |w_x(l_1)|\, |f_3(l_1)| \\
&\leq \frac{1}{2\,|\lambda|} \left(|w_x(l_1)|^2 + |W(l_1)|^2 \right) + \frac{1}{|\lambda|}\, \|w\|_{C([l_1,l])}\, \|f_3\|_{C([l_1,l])} \\
&\leq \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|} \int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2 \right) dx + \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|}\, \|w\|_{H^1(l_1,l)}\, \|f_3\|_{H^1(l_1,l)} \\
&\underbrace{\leq}_{(3,44)} \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|} \int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2 \right) dx + \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|}\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\underbrace{\leq}_{(3,1)} \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|} \int_{l_1}^{l} |w_x|^2\, dx + \frac{\widehat{C}_2}{|\lambda|}\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\, .\|_{\mathcal{H}}\, . \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

Luego, usando las desigualdades (3,46) y (3,47) en (3,43) , se tiene

$$
\int_{l_1}^{l} |w_x|^2\, dx \leq \frac{\widehat{C}_3}{|\lambda|} \int_{l_1}^{l} |w_x|^2\, dx + \frac{\widehat{C}_3}{|\lambda|}\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}} + \widehat{C}_3\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}}\, , \qquad (3.48)
$$

donde $\widehat{C}_3 > 0$ es una constante que no depende de Φ , F y λ .
Sea $i\,\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, \widehat{C}_3)$. Entonces, usando la desigualdad (3,48) y el Lema 3,1 , se obtiene

$$
\int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2 \right) dx \leq M_1\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}}\, , \qquad (3.49)
$$

donde $M_1 > 0$ es una constante que no depende de Φ , F y λ .

En segundo lugar, se probará que $\displaystyle\int_{l_0}^{l_1} \left(|v_x|^2 + |V|^2 \right) dx \ \leq\ M_2\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}}$, para $i\,\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, \widehat{C}_3)$, donde $M_2 > 0$ es una constante que no depende de Φ , F y λ .
Usando el Lema 3,2 , en el caso $\gamma = 0$ para v y V , existe una constante $\tilde{C} > 0$, que no depende de Φ , F y λ , tal que

$$
\begin{aligned}
\int_{l_0}^{l_1} \left(|v_x|^2 + |V|^2 \right) dx &\leq \tilde{C} \left(|v_x(l_1)|^2 + |V(l_1)|^2 \right) + \tilde{C} \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\underbrace{=}_{(3,9)} \tilde{C} \left(\frac{\kappa_3^2}{\kappa_2^2}\, |w_x(l_1)|^2 + |W(l_1)|^2 \right) + \tilde{C}\, \|\Phi\|_{\mathcal{H}}\, \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\leq \tilde{C}_1 \left(|w_x(l_1)|^2 + |W(l_1)|^2 \right) + \tilde{C}_1 \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}\, ,\ \tilde{C}_1 = \tilde{C}\, \text{máx}\{1\, ,\, \kappa_3^2/\kappa_2^2\} \\
&\underbrace{\leq}_{(3,13)} \tilde{C}_2 \int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2 \right) dx + \tilde{C}_2 \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\underbrace{\leq}_{(3,49)} M_2 \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}\, , \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

donde $M_2 > 0$ es una constante que no depende de Φ , F y λ .

En tercer lugar, se probará que $\displaystyle\int_0^{l_0} \left(|u_x|^2 + |U|^2\right) dx \leq M_3 \,\|\Phi\|_{\mathcal{H}} \,\|F\|_{\mathcal{H}}$, para λ suficientemente grande, donde $M_3 > 0$ es una constante que no depende de Φ , F y λ .
De las relaciones $(3{,}3)$, $(3{,}5)$ y $(3{,}7)$, se tiene

$$\overline{i\,\lambda\,u} = \overline{f}_1 + \overline{U} \quad , \quad \overline{i\,\lambda\,v} = \overline{f}_2 + \overline{V} \quad \text{e} \quad \overline{i\,\lambda\,w} = \overline{f}_3 + \overline{W} \,. \tag{3.51}$$

Multiplicando las ecuaciones $(3{,}4)$, $(3{,}6)$, $(3{,}8)$ por $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ respectivamente, y usando $(3{,}51)$, se obtienen

1. $-\rho_1 U\overline{(i\lambda u)} - \kappa_1 u_{xx}\overline{u} - \kappa_0 U_{xx}\overline{u} = \rho_1 f_4 \overline{u}$, si y sólo si,
   $-\rho_1 |U|^2 - \rho_1 U\overline{f}_1 - \overline{u}\,(\kappa_1 u_{xx} + \kappa_0 U_{xx}) = \rho_1 f_4 \overline{u}$.
2. $-\rho_2 V\overline{(i\lambda v)} - \kappa_2 v_{xx}\overline{v} = \rho_2 f_5 \overline{v}$, si y sólo si, $-\rho_2 |V|^2 - \rho_2 V\overline{f}_2 - \kappa_2 v_{xx}\overline{v} = \rho_2 f_5 \overline{v}$.
3. $\left(\dfrac{i\gamma}{\lambda} - \rho_3\right) W\overline{(i\lambda w)} - \kappa_3 w_{xx}\overline{w} = \rho_3 f_6 \overline{w}$, si y sólo si,
   $\left(\dfrac{i\gamma}{\lambda} - \rho_3\right) W\left(\overline{W} + \overline{f}_3\right) - \kappa_3 w_{xx}\overline{w} = \rho_3 f_6 \overline{w}$.

Integrando por partes,

1. $\kappa_1 \displaystyle\int_0^{l_0} |u_x|^2 dx + \kappa_0 \int_0^{l_0} \overline{u}_x U_x dx \;=\; \rho_1 \int_0^{l_0} f_4 \overline{u} dx + \rho_1 \int_0^{l_0} |U|^2 dx + \rho_1 \int_0^{l_0} U\overline{f}_1 dx +$ $\overline{u}(l_0)(\kappa_1 u_x(l_0) + \kappa_0 U_x(l_0))$. Como $U_x = i\lambda u_x - (f_1)_x$, entonces
   $(\kappa_1 + i\lambda\kappa_0) \displaystyle\int_0^{l_0} |u_x|^2 dx = \rho_1 \int_0^{l_0} |U|^2 dx + \rho_1 \int_0^{l_0} f_4 \overline{u} dx + \rho_1 \int_0^{l_0} U\overline{f}_1 dx +$
   $\kappa_0 \displaystyle\int_0^{l_0} \overline{u}_x (f_1)_x dx + \overline{u}(l_0)(\kappa_1 u_x(l_0) + \kappa_0 U_x(l_0))$.
2. $\kappa_2 \displaystyle\int_{l_0}^{l_1} |v_x|^2 dx = \rho_2 \int_{l_0}^{l_1} |V|^2 dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l_1} f_5 \overline{v} dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l_1} V\overline{f}_2 dx + \kappa_2 v_x(l_1)\overline{v}(l_1) -$ $\kappa_2 v_x(l_0)\overline{v}(l_0)$.
3. $\kappa_3 \displaystyle\int_{l_1}^{l} |w_x|^2 dx \;=\; \left(\rho_3 - \frac{i\gamma}{\lambda}\right) \int_{l_1}^{l} |W|^2 dx \,+\, \rho_3 \int_{l_1}^{l} f_6 \overline{w} dx \,+\, \left(\rho_3 - \frac{i\gamma}{\lambda}\right) \int_{l_1}^{l} W\overline{f}_3 dx \,-$ $\kappa_3 w_x(l_1)\overline{w}(l_1)$.

Sumando las igualdades, usando las condiciones de transmisión $(3{,}9)$ y después tomando la parte real, se tiene

$$\kappa_1 \int_0^{l_0} |u_x|^2 dx + \kappa_2 \int_{l_0}^{l_1} |v_x|^2 dx + \kappa_3 \int_{l_1}^{l} |w_x|^2 dx = \rho_1 \int_0^{l_0} |U|^2 dx + \rho_2 \int_{l_0}^{l_1} |V|^2 dx +$$
$$\rho_3 \int_{l_1}^{l} |W|^2 dx + Re\left(\rho_1 \int_{l_1}^{l} f_4 \overline{u} dx + \rho_2 \int_{l_1}^{l} f_5 \overline{v} dx + \rho_3 \int_{l_1}^{l} f_6 \overline{w} dx + \rho_1 \int_{l_0}^{l_1} U\overline{f}_1 dx + \right.$$
$$\left. \rho_2 \int_{l_0}^{l_1} V\overline{f}_2 dx + \rho_3 \int_{l_0}^{l_1} W\overline{f}_3 dx + \kappa_0 \int_0^{l_0} \overline{u}_x (f_1)_x dx - \frac{i\gamma}{\lambda} \int_{l_1}^{l} W\overline{f}_3 dx \right).$$

Tomando módulo y usando la desigualdad de Holder, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 \int_0^{l_0} |u_x|^2\,dx \leq\ & \underbrace{\Big(\kappa_2\,\|v_x\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \kappa_3\,\|w_x\|^2_{L^2(l_1,l)} + \rho_2\,\|V\|^2_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_3\,\|W\|^2_{L^2(l_1,l)}\Big)}_{III_1} + \\
& \underbrace{\big(\rho_1\,\|f_4\|_{L^2(0,l_0)}\,\|u\|_{L^2(0,l_0)} + \rho_2\,\|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)}\,\|v\|_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_3\,\|f_6\|_{L^2(l_1,l)}\,\|w\|_{L^2(l_1,l)}\big)}_{III_2} + \\
& \underbrace{\big(\rho_1\,\|U\|_{L^2(0,l_0)}\,\|f_1\|_{L^2(0,l_0)} + \rho_2\,\|V\|_{L^2(l_0,l_1)}\,\|f_2\|_{L^2(l_0,l_1)} + \rho_3\,\|W\|_{L^2(l_1,l)}\,\|f_3\|_{L^2(l_1,l)}\big)}_{III_3} \\
& + \underbrace{\left(\rho_1\,\|U\|^2_{L^2(0,l_0)} + \kappa_0\,\|u_x\|_{L^2(0,l_0)}\,\|(f_1)_x\|_{L^2(0,l_0)} + \frac{\gamma}{|\lambda|}\,\|W\|_{L^2(l_1,l)}\,\|f_3\|_{L^2(l_1,l)}\right)}_{III_4}.
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

Observaciones 3.2. *1. Usando* $(3{,}49)$ *y* $(3{,}50)$, *se tiene*

$$
III_1 \leq \underbrace{(\kappa_2\,M_2 + \kappa_3\,M_1 + \rho_2\,M_2 + \rho_3\,M_1)}_{N_1}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,, \tag{3.53}
$$

donde $N_1 > 0$ *es una constante que no depende de* Φ, F *y* λ.

2. *Usando* $(3{,}44)$ *y* $(3{,}45)$, *se tienen*

$$
\begin{aligned}
\rho_1\,\|U\|_{L^2(0,l_0)}\,\|f_1\|_{L^2(0,l_0)}\,,\ \rho_1\,\|f_4\|_{L^2(0,l_0)}\,\|u\|_{L^2(0,l_0)} &\leq \sqrt{\rho_1}\,C\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,,\\
\rho_2\,\|V\|_{L^2(l_0,l_1)}\,\|f_2\|_{L^2(l_0,l_1)}\,,\ \rho_2\,\|f_5\|_{L^2(l_0,l_1)}\,\|v\|_{L^2(l_0,l_1)} &\leq \sqrt{\rho_2}\,C\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,,\\
\rho_3\,\|W\|_{L^2(l_1,l)}\,\|f_3\|_{L^2(l_1,l)}\,,\ \rho_3\,\|f_6\|_{L^2(l_1,l)}\,\|w\|_{L^2(l_1,l)} &\leq \sqrt{\rho_3}\,C\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}
$$

Entonces, se puede escoger una constante $N_2 > 0$, *que no depende de* Φ, F *y* λ, *tal que*

$$
III_2 + III_3 \leq N_2\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{3.54}
$$

3. *Por la desigualdad de Poincaré y el Lema* $3{,}1$, *existe una constante* $\tilde{C}_3 > 0$ *que no depende de* Φ, F *y* λ, *tal que* $\rho_1\,\|U\|^2_{L^2(0,l_0)} \leq \tilde{C}_3\,\|U_x\|^2_{L^2(0,l_0)} \leq \dfrac{\tilde{C}_3}{\kappa_0}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}$. *Además,*

$$
\begin{aligned}
\kappa_0\,\|u_x\|_{L^2(0,l_0)}\,\|(f_1)_x\|_{L^2(0,l_0)} &\leq \frac{\kappa_0}{\kappa_1}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\\
\frac{\gamma}{|\lambda|}\,\|W\|_{L^2(l_1,l)}\,\|f_3\|_{L^2(l_1,l)} &\leq \frac{\gamma\,C}{\sqrt{\rho_3}\,|\lambda|}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,.
\end{aligned}
$$

Entonces, se puede escoger una constante $N_3 > 0$ *que no depende de* Φ, F *y* λ, *tal que*

$$
III_4 \leq N_3\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{N_3}{|\lambda|}\,\|\Phi\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}}\,. \tag{3.55}
$$

Luego, a partir de las desigualdades $(3{,}52) - (3{,}55)$, se obtiene

$$\int_0^{l_0} \left(|u_x|^2 + |U|^2\right) dx \leq N \, \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \, \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{N}{|\lambda|} \, \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \, \|F\|_{\mathcal{H}} \,, \tag{3.56}$$

donde $N > 0$ es una constante que no depende de Φ , F y λ .
Sea $R = \text{máx}\{\widehat{C}_3 \, , \, N\}$.
Si $i\,\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, R)$, entonces de las desigualdades $(3{,}49)$, $(3{,}50)$ y $(3{,}56)$, se obtienen

$$\int_0^{l_0} \left(|u_x|^2 + |U|^2\right) dx \leq M_3 \, \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \, \|F\|_{\mathcal{H}} \,,$$

$$\int_{l_0}^{l_1} \left(|v_x|^2 + |V|^2\right) dx \leq M_2 \, \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \, \|F\|_{\mathcal{H}} \,,$$

$$\int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2\right) dx \leq M_1 \, \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \, \|F\|_{\mathcal{H}} \,,$$

donde M_1 , M_2 , $M_3 > 0$ son constantes que no dependen de Φ , F y λ .
Entonces,

$$\begin{aligned} \| \, (i\,\lambda\, I - \mathcal{A}_1)^{-1} \, F = \Phi\|^2_{\mathcal{H}} \leq \kappa \left(\int_0^{l_0} \left(|u_x|^2 + |U|^2\right) dx + \int_{l_0}^{l_1} \left(|v_x|^2 + |V|^2\right) dx + \right. \\ \left. \int_{l_1}^{l} \left(|w_x|^2 + |W|^2\right) dx \right) \leq \underbrace{\kappa\,(M_1 + M_2 + M_3)}_{M} \, \|\Phi\|_{\mathcal{H}} \, \|F\|_{\mathcal{H}} \,, \end{aligned}$$

donde $\kappa = \text{máx}\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3\}$ y $M > 0$ es una constante que no depende de Φ , F y λ .
Así,

$$\| \, (i\,\lambda\, I - \mathcal{A}_1)^{-1} \, F\|_{\mathcal{H}} \leq M \, \|F\|_{\mathcal{H}} \, , \; \forall \, F \in \mathcal{H} \, , \; \forall \, |\lambda| > R \, .$$

$\square$

Procediendo de manera análoga como en el caso anterior, se puede probar que el semigrupo asociado al problema de transmisión **EFV** decae exponencialmente, cuando el tempo va para infinito.

Conclusiones

De esta tesis podemos concluir que, en la presencia de diferentes mecanismos disipativos actuando sobre una viga o una barra, el orden de las componentes es muy importante para la estabilidad exponencial. Este resultado se aplica para el Problema de Optimal Design, que consiste en encontrar la posición en que un mecanismo disipativo debe ser eficaz, para maximizar la tasa de decaimiento.

Finalmente, otra conclusión importante es, que la presencia de diversos mecanismos disipativos no mejora el decaimiento del modelo. Es importante considerar la posición dentro de la viga de este mecanismo.

Bibliografía

[1] **S. Agmon, H. Douglis and L. Nirenberg,** Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, Comm. Pure Appl. Math, 17, 35-92, 1964.

[2] **M. Alves, J. E. Muñoz Rivera, M. Sepúlveda, O. Vera Villagrán and M. Zegarra,** The asymptotic behavior of the linear transmission problem in viscoelasticity, Math. Nachr. In Press (2013). doi: 10.1002/mana.201200319

[3] **A. Borichev and Y. Tomilov,** Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups, Math. Ann., 347 (2009), pp. 455-478.

[4] **S. C. Brenner and L. R. Scott,** The Mathematical Theory of Finite Element Methods, Springer-Verlag, New York, 1994.

[5] **H. Brezis,** Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[6] **F. Brezzi and M. Fortin,** Mixed and hybrid finite element methods, Springer, 1991.

[7] **M. Cavalcanti and V. Cavalcanti,** Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, UEM / DMA, 2010.

[8] **G. Chen, S. A. Fulling, F. J. Narcowich and S. Sun,** Exponential decay of the energy of evolution equation with locally distributed damping, SIAM J. Appl. Math., 51 (1991), pp. 266-301.

[9] **P. G. Ciarlet,** The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[10] **P. Clement,** Approximation by finite element functions using local regularization, RAIRO Anal. Numer. R-2 (1975), pp. 77-84.

[11] **E. A. Coddington,** An Introduction to Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc (1961). New York.

[12] **L. Gearhart,** Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Spaces, Trans. AMS 236, 385 - 394, 1978.

[13] **C. W. Groetsch,** Elements of Applicable Functional Analysis, Marcel Dekker, New York and Basel, 1983.

[14] **F. L. Huang,** Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Ann. Differential Equations, 1 (1985), pp. 43-56.

[15] **V. Komornik and E. Zuazua,** A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, J. Comput. Appl. Math., 69 (1990), pp. 33-54.

[16] **V. Komornik,** Rapid boundary stabilization of the wave equation, SIAM J. Control Optim., 29 (1991), pp. 197-208.

[17] **S. Krenk,** Energy conservation in Newmark based time integration algorithms, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195 (2006), pp. 6110-6124.

[18] **E. Kreyszig** Introductory Functional Analysis with Applications, Jhon Wiley e Sons, 1978.

[19] **K. Liu and Z. Liu,** Exponential decay of the energy of the Euler Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping, SIAM J. Control Optim., 36 (1998), pp. 1086-1098.

[20] **W. Liu and G. Williams,** The exponential stability of the problem of transmission of the wave equation, Bull. Aust. Math. Soc., 57 (1998), pp. 305-327.

[21] **Z. Liu and B. Rao,** Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation, Z. Angew Math. Phys., 56 (2005), pp. 630-644.

[22] **Z. Liu and S. Zheng,** Semigroups associated with dissipative systems, In CRC Reseach Notes in Mathematics 398. Chapman and Hall. (1999).

[23] **L. F. Ho,** Exact controllability of the one-dimensional wave equation with locally distributed control, SIAM J. Control Optim., 28 (1990), pp. 733-748.

[24] **A. Medeiros and M. Miranda,** Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogeneos), UFRJ / IM, 2011.

[25] **A. Moreira Gomes,** Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução, UFRJ / IM, 2012.

[26] **J. Muñoz Rivera,** Estabilização de Semigrupos e Aplicações, Serie de Métodos Matemáticos, LNCC, 2008.

[27] **M. Nakao,** Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation, Israel J. Math., 95 (1996), pp. 25-42.

[28] **M. Nakao,** Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation, Math. Ann., 305 (1996), pp. 403-417.

[29] **N.M. Newmark,** A method of computation for structural dynamics, J. Engrg. Mech. Div., ASCE 85 (1959).

[30] **A. Pazy,** Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag (1983). New York.

[31] **J. Pruss,** On the spectrum of C_0-semigroups, Trans. AMS. 284 (1984), pp. 847-857.

[32] **R. Quintanilla,** Exponential decay in mixtures with localized dissipative term, Appl. Math. Lett., 18 (2005), pp. 1381-1388.

[33] **M. Renardy,** On the type of certain C_0-semigroups, Comm. Partial Differential Equations, 18 (1993), pp. 1299-1309.

[34] **K. Yosida,** Functional Analysis. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1971.