UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Existencia, unicidad y regularidad p-maximal de la solución de un modelo parabólico semilineal

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Leyter POTENCIANO MACHADO

ASESOR

Víctor Rafael CABANILLAS ZANNINI

Lima - Perú

2012

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Escuela Académico Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMATICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemática, siendo las....16.00.. horas del día miércoles 18 de Enero 2012, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Calificador de Tesis: Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña (Presidente), Dr. José Raúl Luyo Sánchez (Miembro) y Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini (Miembro Asesor), para la sustentación de tesis titulado "Existencia, Unicidad y Regularidad p-maximal de la Solución de un Modelo Parabólico Semilineal", presentado por el Señor Bachiller, Leyter POTENCIANO MACHADO, para optar el Titulo Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de: ....Sobresaliente.............. (18).

A continuación el Presidente del Jurado Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña, manifestó que el bachiller Leyter Potenciano Machado, en vista de haber aprobado la sustentación de tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las......17.00..... horas se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta, en tres (3) copias originales.

Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña
Presidente

Dr. José Raúl Luyo Sánchez
Miembro

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini
Miembro Asesor

EXISTENCIA, UNICIDAD Y REGULARIDAD p-MAXIMAL DE LA SOLUCIÓN DE UN MODELO PARABÓLICO SEMILINEAL

Leyter Potenciano Machado

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:

....

Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña.
Presidente del Jurado

....

Dr. José Raúl Luyo Sánchez.
Miembro del Jurado

....

Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini.
Miembro asesor

Lima - Perú
Enero - 2012

FICHA CATALOGRÁFICA

LEYTER POTENCIANO MACHADO

Existencia, Unicidad y Regularidad p-maximal de la Solución de un Modelo Parabólico Semilineal, (Lima) 2012.

vii, 91 p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2012).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática. UNMSM/FdeCM II. Título (Serie).

Dedicatoria

A mis familia.

Agradecimientos

La lista de personas a las que deseo agradecer es inmensa. Todos y todas de una u otra forma han contribuido tanto a mi formación académica como personal.

Primeramente quiero agradecer a mi querida familia, a mis padres, hermanos y hermanas, por todo el apoyo constante desde que tengo uso de razón.

También quiero agradecer muy especialmente a mi director de tesis y amigo: Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini. Por todos los años de apoyo constante durante los últimos años de la carrera. Por tomarse el colosal trabajo de dirigir esta tesis y por las infinitas reuniones para discutir los diversos proyectos de investigación que realizamos previos a este trabajo.

Quiero hacer una mención especial y en memoria a mi querido profesor: Dr. Izaguirre. Por las huellas que dejó en mi formación matemática y personal. Descanse en paz.

Además quiero agradecer al Jurado Evaluador de esta tesis por el trabajo de ser lectores y por sus valiosas observaciones y comentarios, lo cuales permitieron mejorar la presentación de este trabajo.

Finalmente, y no por ello menos importante, quiero agradecer a todos los miembros de la Facultad de Matemáticas, profesorado y personal administrativo porque han hecho estos años de carrera uno de los mejores.

Leyter Potenciano Machado

RESUMEN

EXISTENCIA, UNICIDAD Y REGULARIDAD p-MAXIMAL DE LA SOLUCIÓN DE UN MODELO PARABÓLICO SEMILINEAL

LEYTER POTENCIANO MACHADO

Enero - 2012

Orientador: Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini
Título obtenido: Licenciado en Matemática

....

En este trabajo estudiamos tres aspectos relacionados a una ecuación parabólica semilineal: existencia, unicidad y regularidad de sus soluciones, en espacios de Sobolev adecuados. Nuestro trabajo está basado en [3].

Empezamos estudiando el caso lineal. En este caso, la herramienta principal que empleamos es el método de Faedo-Galerkin. Para el caso semilineal usamos un argumento de punto fijo de Banach.

Finalmente mostramos algunos ejemplos usando los resultados obtenidos.

PALABRAS CLAVES: Espacios de Sobolev, método de Faedo-Galerkin, Teorema de Lax-Milgram, Teorema del punto fijo de Banach.

ABSTRACT

EXISTENCE, UNIQUENESS AND p- MAXIMAL REGULARITY OF THE SOLUTIONS OF A SEMILINEAR PARABOLIC MODEL

LEYTER POTENCIANO MACHADO

January - 2012

Advisor: Víctor Rafael Cabanillas Zannini, Ph. D.
Obtained Professional Title: Licenciate in Mathematics.

. . . .

In this work, we study three aspects related to a semilinear parabolic equation: existence, uniqueness and regularity of its solutions on suitables Sobolev spaces. Our work is based on [3].

We start by studying the linear case. In this case, the main tool that we will employ is the Faedo-Galerkin method. To the semilinear case, we use a Banach fixed-point argument.

Finally, we give some examples by using the previous results.

KEYWORDS: Sobolev space, Faedo-Galerkin method, Lax-Milgram theorem, Banach fixed-point theorem.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo trataremos algunos resultados básicos para el estudio de la presente tesis. Recordaremos algunas propiedades de operadores lineales, algunas nociones de cálculo en espacios de Banach, Teorema del valor medio en estos espacios, operadores de proyección en espacios de Hilbert y finalmente algunas inmersiones de Sobolev. Las demostraciones de estos resultados pueden ser encontrados en [1], [2], [4], [5], [6], [7], [8] y [9].

1.1 Operadores lineales

A lo largo de esta tesis, a menos que se diga lo contario, denotaremos por X e Y unos espacios vectoriales normados sobre un campo escalar $\mathbb{K}$. Usualmente este campo será el de los números reales $\mathbb{R}$.

Definición 1.1: *Una función $f : X \to Y$ es llamada* lineal *si*

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \ , \ \forall \ u, v \in X \ , \ \forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

La función f con esta propiedad también es denominada operador lineal ó transformación lineal. Además, si $Y = \mathbb{R}$, entonces f es denominada funcional lineal. Ahora veamos algunos ejemplos de operadores lineales.

Ejemplo 1.2: *Sean $X = C([0,1])$, $Y = \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ es un operador lineal definido por*

$$f(x) = \int_0^1 x(s)ds.$$

Ejemplo 1.3 (Transformada de Laplace)**:** *Sean X el conjunto de todas las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}_+$, $Y = \mathbb{R}$. Sea $L : X \to Y$ el operador lineal definido por*

$$(Lx)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-st) dt.$$

Ejemplo 1.4 (Transformada de Fourier)**:** *Sean $Y = \mathbb{R}$, X el conjunto de todas las funciones continuas y acotadas en $\mathbb{R}_+$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty.$$

Definimos el operador lineal $F : X \to Y$ como

$$(Fx)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-2\pi i s t) dt.$$

Debido a la linealidad de estos operadores, la continuidad de los mismos se reduce a la continuidad puntual, más precisamente tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.5. *Sean X, Y espacios vectoriales normados, el operador lineal $f : X \to Y$ es continuo en X si y solo si es continuo en $x_0 = 0$.*

Definición 1.6: *Sean X, Y espacios vectoriales normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es* acotado *si*

$$\sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y < \infty.$$

Ejemplo 1.7: *En el ejemplo 1.2*, el operador f es acotado en el espacio $X = C([0,1])$ *dotado con la norma*

$$\|x\|_{C([0,1])} = \|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|\,.$$

En efecto, sea $x \in X$ tal que $\|x\|_\infty \leqslant 1$, entonces

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 x(s) ds \right| \leqslant \int_0^1 |x(s)|\, ds \leqslant \int_0^1 \sup_{s \in [0,1]} |x(s)|\, ds = \|x\|_\infty \leqslant 1.$$

Por lo tanto

$$\sup_{\|x\|_\infty \leqslant 1} |f(x)| \;\leqslant\; 1.$$

¿Existe alguna relación entre acotación y continuidad?. Supongamos que un operador lineal $T : X \to Y$ es acotado, entonces para todo $x \in X$ con $x \neq 0$ se tiene $\dfrac{x}{\|x\|_X} = 1$, luego de la definición de acotación obtenemos

$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y \leqslant \sup_{\|x'\|_X \leqslant 1} \|Tx'\|_Y$$

es decir:

$$\|T(x)\|_Y \leqslant \sup_{\|x'\|_X \leqslant 1} \|Tx'\|_Y \|x\| \ , \ \forall\, x \in X. \tag{1.1}$$

Ahora sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \to 0$ en X, entonces de (1.1)

$$\|T(x_n)\|_Y \leqslant \sup_{\|x'\|_X \leqslant 1} \|Tx'\|_Y \|x_n\| \to 0.$$

Por lo tanto T es continua en cero, luego T es continua en X. Hemos probado que acotación implica continuidad, el recíproco también es cierto.

Teorema 1.8. *Sean X, Y espacios vectoriales normados, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si y solo si es acotado.*

Estos resultados inducen la siguiente definición

Definición 1.9: *Sean X, Y espacios vectoriales normados, si $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, definimos la* norma *de T como*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Tx\|_Y \,.$$

De esta definición y como lo vimos en (1.1), se tiene

$$\|Tx\|_Y \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X \ , \ \forall\, x \in X.$$

Además $\left(\mathcal{L}(X,Y), \|\ \ \|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right)$ es un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$. ¿ Bajo qué condiciones este espacio será de Banach?.

Teorema 1.10. *Sean X un espacio vectorial normado, Y un espacio de Banach. Entonces $\left(\mathcal{L}(X,Y), \|\ \ \|_{\mathcal{L}(X,Y)}\right)$ es un espacio de Banach.*

Por lo tanto, si tomamos el espacio de Banach $Y = \mathbb{R}$, el espacio dual $\mathcal{L}(X,\mathbb{R}) = X'$ es un espacio de Banach.

Teorema 1.11 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sea X un espacio vectorial sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$, $p : X \to \mathbb{R}$ una función que verifica*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x)\ ,\ \forall\, x \in X,\ \lambda \geqslant 0,$$

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)\ ,\ \forall\, x, y \in X.$$

Además sea $G \subseteq X$ un subespacio vectorial y un operador lineal $g : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) \leqslant p(x)\ ,\ \forall\, x \in G.$$

Entonces existe un operador lineal sobre X que extiende al operador g, i.e.,

$$g(x) = p(x)\ ,\ \forall\, x \in G,$$

$$f(x) \leqslant p(x)\ ,\ \forall\, x \in X.$$

Supongamos que un subespacio vectorial G de X es denso. Entonces la extensión a X de operadores definidos en G puede hacerse vía límites. Sin embargo, en la mayoría de casos no se tiene esta condición, es por ello que el Teorema de Hahn-Banach es muy útil para extender operadores lineales desde espacios no necesariamente densos. Sean X un espacio vectorial, $A \subseteq X$ un subespacio vectorial y sea el conjunto

$$A^{\perp} = \{f \in X'\ ;\ f(x) = 0\ \ \forall\, x \in A\}\,.$$

Observemos que $0 \in A^{\perp}$, por lo tanto $A^{\perp} \neq \phi$. Este subespacio vectorial de X' juega un rol importante en el tratamiento de densidades, para ello veamos el siguiente corolario del Teorema de Hahn-Banach.

Corolario 1.12. *Sean X un espacio vectorial, $A \subseteq X$ un subespacio vectorial tal que $\overline{A} \neq X$, entonces existe $f \in X'$ tal que*

$$f \neq 0 \quad y \quad \langle f, x\rangle_{X'\times X} = 0\ \ \forall\, x \in A.$$

Replanteando este resultado con la notación de $A^{\perp}$, tenemos

$$\overline{A} \neq X \qquad \text{entonces} \qquad A^{\perp} \neq \{0\}\,.$$

Por lo tanto, contrareciprocamente obtenemos

$$A^{\perp} = \{0\} \qquad \text{entonces} \qquad \overline{A} = X.$$

Concluimos que para demostrar que un subespacio A es denso en X, es suficiente probar que $A^{\perp} = \{0\}$.

Teorema 1.13 (Teorema de Acotación Uniforme)**.** *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio vectorial normado, I un conjunto de índices no necesariamente numerable, $\{T_i\}_{i\in I}$*

una colección de operadores lineales y continuos de X en Y tal que

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\|_Y < \infty \ , \ \forall\, x \in X.$$

Entonces

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty,$$

i.e., existe $c > 0$ tal que

$$\|T_i x\|_Y \leqslant c\,\|x\|_X \ , \ \forall\, x \in X,\ i \in I.$$

Corolario 1.14. *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio vectorial normado, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ una sucesión de operadores lineales y continuos tal que*

$$\textit{Para cada } x \in X \ , \ T_n x \to Tx.$$

Entonces

$$T \in \mathcal{L}(X,Y),$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty,$$

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}\,.$$

Teorema 1.15 (Teorema de la Aplicación Abierta)**.** *Sean X, Y espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, además de ser sobreyectivo. Entonces T es una aplicación abierta, i.e., para todo $E \subseteq X$ conjunto abierto, $T(E) \subseteq Y$ también es un conjunto abierto.*

Corolario 1.16. *Sean X, Y espacios de Banach, $T : X \to Y$ un operador lineal continuo y biyectivo, entonces el operador lineal inverso $T^{-1} : Y \to X$ es continuo.*

Corolario 1.17. *Sean $(X, \|\ \|_1)$, $(X, \|\ \|_2)$ espacios de Banach, supongamos que existe $c_1 > 0$ tal que*

$$\|x\|_2 \leqslant c_1 \|x\|_1 \ , \ \forall\, x \in X$$

Entonces existe $c_2 > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leqslant c_2 \|x\|_2 \ , \ \forall\, x \in X$$

Este corolario muestra que dos normas son equivalentes en espacios de Banach si una de ellas acota a la otra.
Si X, Y son espacios vectoriales normados y una función $T : X \to Y$, se define la gráfica de T como el conjunto

$$G(T) = \{(x,y) \in X \times Y \ ;\ y = Tx\}$$

Si T es continuo entonces $G(T)$ es cerrado en $X \times Y$, más lo recíproco no es cierto, salvo algunas condiciones.

Teorema 1.18 (Teorema del Gráfico Cerrado)**.** *Sean X, Y espacios de Banach, $T : X \to Y$ un operador lineal tal que la gráfica $G(T)$ es cerrada en $X \times Y$, entonces T es continuo.*

1.2 La derivada de Fréchet y el Teorema del Valor Medio

Definición 1.19: *Sean X, Y espacios vectoriales normados, sea $D \subseteq X$ un conjunto abierto y una función $F : D \to Y$. Si existe un operador lineal y acotado $A : X \to Y$ tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0 \tag{1.2}$$

entonces se dice que la función F es diferenciable en el sentido de Fréchet en el punto $x \in D$. *Más aún el operador lineal A, es llamado la derivada de Fréchet de la función F en el punto x y es denotado por $A = F'(x)$.*

En el caso particular que X sea un espacio vectorial normado de dimensión finita, $D \subseteq X$ es un subconjunto abierto para mostrar que una función $F : D \to Y$ es diferenciable en $x \in D$ bastará con mostrar que existe un operador lineal A cumpliendo (1.2), sin necesidad de mostrar que es acotado, ya que por ser X de dimensión finita todo operador lineal $A : X \to Y$ es continuo, i.e., acotado.

Teorema 1.20. *Si una función $F : D \to Y$ es diferenciable en $x \in D$ entonces el operador lineal $A = F'(x)$ cumpliendo (1.2) es único.*

Teorema 1.21 (Regla de la Cadena)**.** *Sean las funciones $F : D_X \subseteq X \to Y$, $G : D_Y \to Z$ tal que F es diferenciable en x y G es diferenciable en $F(x)$, entonces $G \circ F$ es diferenciable en x y además*

$$(G \circ F)'(x) = G(F'(x)) \circ F'(x)$$

El Teorema del Valor Medio que conocemos en $\mathbb{R}^n$ no tiene un análogo cuando estamos en espacios de Banach más generales, por ello enunciamos tres versiones de este teorema.

Teorema 1.22 (Teorema del Valor Medio I)**.** *Sean $F : D_X \to Y$, $a, b \in D_X$ tal que*

$$[a, b] = \{a + t(b - a)\ ;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subseteq D_X$$

Además supongamos que f es diferenciable en (a, b). Entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b - a)$$

Teorema 1.23 (Teorema del Valor Medio II). *Sea $F : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to Y$ una función tal que para cada $x \in (a, b)$ existen $F'(x)$ y $M > 0$ satisfaciendo*

$$\|F'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R},Y)} \leqslant M$$

Entonces

$$\|F(b) - F(a)\|_Y \leqslant M\,(b - a)$$

Teorema 1.24 (Teorema del Valor Medio III). *Sea $F : D \subseteq X \to Y$ una función tal que*

$$S = \{ta + (1 - t)b\ ;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subseteq D$$

Además supongamos que para todo $x \in S$ existe $F'(x)$, entonces

$$\|F(b) - F(a)\|_Y \leqslant \|b - a\|_X \sup_{x \in S} \|F'(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$$

1.3 Operador proyección en espacios de Hilbert

Por teoría de Álgebra lineal, todo espacio vectorial normado Z de dimensión finita se puede descomponer como suma directa de subespacios $Z = X \oplus Y$, entonces para todo $z \in Z$ existen únicos $x \in X$, $y \in Y$ tal que

$$z = x + y.$$

Esto nos permite definir el operador lineal $T_X : Z \to X$ como

$$T_X z = x \quad , \quad x \in X\ ,\ y \in Y$$

Pero qué sucede si el espacio vectorial Z es de dimensión infinita: ¿ Tendrá alguna descomposición como suma directa de subespacios? ¿cómo podemos definir la proyección sobre un subconjunto en este caso?.

Teorema 1.25 (Proyección sobre un convexo cerrado). *Sean H un espacio de Hilbert, $K \subseteq H$ un subconjunto convexo cerrado y no vacío. Entonces para todo $f \in H$ existe un único $u \in K$ tal que*

$$u \in K$$

$$(f - u, v - u) \leqslant 0 \quad , \quad \forall\ v \in K$$

Gracias a este teorema podemos definir la proyección sobre un conjunto convexo cerrado no vacío en un espacio de Hilbert. Así, definimos $P_K : H \to K$ como

$$P_K f = u$$

Se demuestra que P_K es un operador lineal, además continuo gracias al siguiente teorema.

Teorema 1.26. *Sean los espacios H, K con las condiciones del teorema anterior, entonces se verifica*

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leqslant \|f_1 - f_2\| \quad , \quad \forall\, f_1, f_2 \in H$$

i.e.,

$$\|P_K\|_{\mathcal{L}(H,V)} = 1$$

Corolario 1.27. *Sean H un espacio de Hilbert, $M \subseteq H$ un subespacio vectorial. Para cada $f \in H$, $u = P_K f$ se caracteriza por*

$$u \in M$$

$$(f - u, v) = 0 \quad , \quad \forall\, v \in M$$

Gracias a este corolario podemos escribir $H = M \oplus M^{\perp}$. El siguiente teorema resume las propiedades del operador proyección $P_K : H \to K$.

Teorema 1.28. *Sean H espacio de Hilbert y $K \subseteq H$ un subespacio cerrado, entonces el operador proyección $P_K : H \to K$ posee las siguientes propiedades*

- $(f - P_K f, u) = 0 \quad , \quad \forall\, f \in H, u \in K$
- $(P_K f_1, f_2) = (f_1, P_K f_2) \quad , \quad \forall\, f_1, f_2 \in H$
- $P_K^2 = P$, *i.e.,* P_K *es idempotente*
- $P_K u = u \quad , \quad \forall\, u \in K$
- $\|f\|_H^2 = \|P_K f\|_H^2 + \|f - P_K f\|_H^2$

La importancia de estos resultados radica en la utilidad en las respectivas acotaciones del método de Faedo-Galerkin que cerremos en capítulos posteriores.

1.4 Espacios de Sobolev e inmersiones

No todas las funciones $f \in L^p(\Omega)$ poseen derivadas que también pertenezcan a $L^p(\Omega)$, esta propiedad es de mucha importancia ya que en los sistemas que analizaremos nos toparemos, haremos uso de este tipo de propiedades. Es sabido que toda función $f \in L^p(\Omega)$ tiene su representación distribucional $T_f : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ y es en el espacio de las distribuciones en la cual existen las derivadas parciales de todos los órdenes, es por ello la necesidad de definir los espacios de Sobolev como lo haremos a continuación. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $m \in \mathbb{N}$. El conjunto

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\,;D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ en el sentido distribucional, } 0 \leqslant |\alpha| \leqslant m\}$$

dotado con la norma

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_p^p\right)^{1/p} \quad , \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty \\ \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha u\|_\infty \end{aligned}$$

es un espacio de Banach, denominado espacio de Sobolev.
Como sabemos el espacio $L^p(\Omega)$ es denso en el espacio de las funciones de prueba $\mathcal{D}(\Omega)$, esto no se cumple para el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, es por ello que definimos el conjunto

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$$

Si $p = 2$, se denotan estos espacios como $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$ y $W_0^{m,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$. En particular, cuando $m = 1$ se tiene la caracterización del espacio $W^{1,p}(\Omega)$ como

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega)\,; \text{existe } v \in L^p(\Omega) \text{ con} \int_\Omega u\varphi' = -\int_\Omega v\varphi \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\right\}$$

Veamos algunos resultados de inmersiones de estos espacios, con $1 \leqslant p < \infty$ y $n \geqslant 2$.

Teorema 1.29. *Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $mp < n$ entonces se tiene la inmersión continua*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

donde q satisface

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$$

Corolario 1.30. *Si $mp < n$ y $p \leqslant q \leqslant \dfrac{np}{n-mp}$ entonces se tiene la inmersión continua*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$$

Corolario 1.31. *Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $kp < n$ entonces se tiene la inmersión continua*

$$W^{m+k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{m,q_k}(\mathbb{R}^n)\ ,\ \forall\, m \in \mathbb{N}$$

donde q_k satisface

$$\frac{1}{q_k} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$$

Teorema 1.32. *Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $mp = n$ entonces*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)\ ,\ p \leqslant q < \infty$$

Ahora enunciaremos las inmersiones de Sobolev cuando $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado.

Teorema 1.33. *Para $n \geqslant 2$ se tiene*

- *Si $mp < n$ entonces se tiene la inmersión continua*

  $$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

  donde q satisface

  $$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$$

- *Si $mp = n$ entonces se tiene la inmersión continua*

  $$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ ,\ p \leqslant q < \infty$$

- *Si $mp > n$, $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < m - \dfrac{n}{p} \leqslant k+1$ entonces*

  $$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$$

  donde

  $$\begin{aligned} &0 < \lambda < m - k - \frac{n}{p} \quad si \quad m - k - \frac{n}{p} < 1 \\ &0 < \lambda < 1 \quad si \quad m - k - \frac{n}{p} = 1 \end{aligned}$$

Teorema 1.34. *Sea I un conjunto abierto limitado de $\mathbb{R}$, entonces se tiene las inmersiones continuas*

- $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}(\overline{I}) \quad , \quad 0 < \lambda \leqslant 1 - \dfrac{1}{p}\ ,\ \ 1 < p < \infty$
- $W^{m,1}(I) \hookrightarrow C_b^{m-1}(\overline{I})$
- $W^{m,+\infty}(I) \hookrightarrow C^{m-1,1}(\overline{I})$

Teorema 1.35 (Rellich-Kondrachov)**.** *Sean $n \geqslant 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y limitado de $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene las inmersiones compactas*

- $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \ , \quad 1 \leqslant q < \dfrac{np}{n-p} \quad si \quad p < n.$

- $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \ , \quad 1 \leqslant q < \infty \quad si \quad p = n.$

- $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\overline{\Omega}) \quad si \quad p > n.$

Corolario 1.36. *Sean $n \geqslant 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y limitado de $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene las inmersiones compactas*

- $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega) \ , \quad 1 \leqslant q < \dfrac{np}{n-p} \quad si \quad p < n.$

- $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,q}(\Omega) \ , \quad 1 \leqslant q < \infty \quad si \quad p = n.$

- $W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^m(\overline{\Omega}) \quad si \quad p > n.$

Corolario 1.37. *Sean $n \geqslant 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y limitado de $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene la inmersión compacta*

$$W^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{m,p}(\Omega) \ , \quad 1 \leqslant p < \infty$$

Corolario 1.38. *Sean $n \geqslant 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y limitado de $\mathbb{R}^n$ sin ninguna restricción sobre su frontera, entonces se tiene la inmersión compacta*

$$W_0^{m+1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W_0^{m,p}(\Omega)$$

Teorema 1.39. *Sean $n \geqslant 2$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y limitado de $\mathbb{R}^n$, entonces se tiene las inmersiones compactas*

- $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \ , \quad 1 \leqslant q < \dfrac{np}{n-mp} \quad si \quad mp < n.$

- $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \ , \quad 1 \leqslant q < \infty \quad si \quad mp = n.$

- $W^{m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^k(\overline{\Omega}) \quad si \quad mp > n \quad donde \quad k < m - \dfrac{n}{p} \leqslant k+1 \ , k \in \mathbb{N}.$

Teorema 1.40. *Sea $I \in \mathbb{R}$ un conjunto abierto y limitado, entonces se tiene las inmersiones compactas*

- $W^{1,p}(I) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{I}) \ , 1 < p \leqslant \infty.$

- $W^{1,1}(I) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(I) \ , \ 1 \leqslant q < \infty.$

1.5 El espacio $L^p(0,T;X)$

En el estudio de ecuaciones diferenciales parciales que involucran una variable temporal, nos encontramos con funciones que toman valores en espacios de Banach, por ello es conveniente definir una adecuada norma para manejar adecuadamente las convergencias. Así, análoga a la teoría de los espacios L^p, definiremos los espacios L^p- vectoriales. Sean X un espacio de Banach y $1 \leqslant p < \infty$, $0 < T < \infty$; entonces el espacio

$$L^p(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \to X \ ; \ u \text{ es medible y } \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty \right\}$$

dotado con

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}$$

es un espacio de Banach. Además, para cada $m \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$C^m([0,T]\,;X) = \left\{ u : [0,T] \to X \ ; \ u^{(k)} \in C([0,T]\,;X) \ , \ k = 1,2,3,\ldots,m \right\}$$

dotado con

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \sum_{k=0}^{m} \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\| u^{(k)}(t) \right\|_X$$

es un espacio de Banach. Muchas de las propiedades que mostraremos a continuación son análogas a las de los espacios L^p.

Teorema 1.41. *Se cumple lo siguiente*

- *El conjunto de las funciones simples (combinaciones lieales de funciones características) $u : [0,T] \to X$ es denso en $L^p(0,T;X)$.*
- *Se tiene la inmersión densa y continua*

$$C([0,T]\,;X) \hookrightarrow L^p(0,T;X)$$

- *Si X es un espacio de Hilbert, entonces $L^2(0,T;X)$ también es un espacio de Hilbert con producto interno*

$$\langle u,v \rangle_{L^2(0,T;X)\times L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle u,v \rangle_{X\times X} dt \ \ , \ \ \forall\, u,v \in L^2(0,T;X)$$

- *Si $1 \leqslant p < \infty$ y X es separable entonces $L^p(0,T;X)$ también es separable.*
- *Si $X \hookrightarrow Y$ inmersión continua entonces*

$$L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^q(0,T;X) \ , \ 1 \leqslant p \leqslant r \leqslant \infty$$

Para nuestro estudio será de suma importancia el conocimiento de resultados en el dual de estos espacios, $(L^p(0,T;X))'$, ya que las convergencias que haremos para las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales serán en el sentido débil.
Sean $u \in L^p(0,T;X)$, $v \in L^q(0,T;X')$ con $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ entonces se cumple la desigualdad

$$\int_0^T \left|\langle v(t),u(t)\rangle_{X'\times X}\right| dt \leqslant \left(\int_0^T \|v(t)\|_{X'}^q dt\right)^{1/q}\left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p\, dt\right)^{1/p}$$

Teorema 1.42. *Si X es un espacio de Banach separable entonces*

- *A cada $v \in L^q(0,T;X')$ corresponde un único funcional $\overline{v} \in (L^p(0,T;X))'$ tal que*

$$\langle \overline{v},u\rangle_{(L^p(0,T;X))'\times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t),u(t)\rangle_{X'\times X} dt\ ,\ u \in L^p(0,T;X) \tag{1.3}$$

- *También para cada $\overline{v} \in (L^p(0,T;X))'$ corresponde un único $v \in L^q(0,T;X')$ cumpliendo (1.3), además*

$$\|\overline{v}\|_{(L^p(0,T;X))'} = \|v\|_{L^q(0,T;X')} \tag{1.4}$$

- *El espacio de Banach $L^p(0,T;X)$ es reflexivo y separable.*

Definamos el operador lineal $j : L^q(0,T;X') \to (L^p(0,T;X))'$ como

$$j(v) = \overline{v}\ ,\ v \in L^q(0,T;X')$$

Entonces por las propiedades del teorema anterior, j es un isomorfismo isométrico de $L^q(0,T;X')$ en $(L^p(0,T;X))'$, es por ello que tenemos una identificación de estos espacios

$$(L^p(0,T;X))' \equiv L^q(0,T;X')$$

por lo tanto las ecuaciones (1.3) y (1.4) se reescriben como

$$\langle v,u\rangle_{(L^p(0,T;X))'\times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t),u(t)\rangle_{X'\times X} dt\ ,\ u \in L^p(0,T;X)$$

y

$$\|v\|_{(L^p(0,T;X))'} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_{X'}^q\, dt\right)^{1/q}$$

Si X fuese un espacio de Hilbert, entonces $X' \equiv X$ por lo tanto

$$(L^p(0,T;X))' \equiv L^q(0,T;X') \equiv L^q(0,T;X)$$

En particular si $p = 2$, $q = 2$ se tiene

$$L^2(0,T;X) \equiv \left(L^2(0,T;X)\right)' \equiv L^2(0,T;X')$$

es por ello que el espacio dual $(L^2(0,T;X))'$ se trata indistintamente con el espacio $L^2(0,T;X)$. Ahora veamos algunos resultados que relacionan los límites, productos internos e integrales.

Teorema 1.43. *Sea X espacio de Banach separable, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$, entonces se cumple*

(a) Si $u \in L^p(0,T;X)$ entonces

$$\left\langle \overline{v}, \int_0^t u(s)ds \right\rangle_{X' \times X} = \int_0^t \langle \overline{v}, u(s) \rangle_{X' \times X} ds \ , \ \forall \, \overline{v} \in X' \ , \ 0 \leqslant t \leqslant T$$

(b) Si $u \in L^p(0,T;X')$ entonces

$$\left\langle \int_0^t u(s)ds, v \right\rangle_{X' \times X} = \int_0^t \langle u(s), v \rangle_{X' \times X} ds \ , \ \forall \, v \in X \ , \ 0 < t \leqslant T$$

(c) Si

$$u_n \to u \quad en \quad L^p(0,T;X)$$

entonces

$$\int_0^t u_n(s)ds \to \int_0^t u(s)ds \quad en \quad X \quad , \quad \forall \ \ 0 < t \leqslant T$$

(d) Si

$$u_n \to u \quad en \quad L^p(0,T;X)$$
$$v_n \rightharpoonup v \quad en \quad L^q(0,T;X')$$

entonces

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s) \rangle_{X' \times X} ds \to \int_0^t \langle v(s), u(s) \rangle_{X' \times X} ds$$

(e) Si

$$u_n \rightharpoonup u \quad en \quad L^p(0,T;X)$$
$$v_n \to v \quad en \quad L^q(0,T;X')$$

entonces

$$\int_0^t \langle v_n(s), u_n(s) \rangle_{X' \times X} ds \to \int_0^t \langle v(s), u(s) \rangle_{X' \times X} ds$$

1.6 Integral de Lebesgue y convergencias

En esta sección enunciaremos el famoso Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, el cual a groso modo nos indica las condiciones necesarias para el intercambio de límites bajo una integral.

Teorema 1.44 (Teorema de la Convergencia Monótona)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto medible, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medible de A en $\mathbb{R}$ tal que*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \ldots \leqslant f_n(x) \leqslant \ldots \quad , \quad \forall\, x \in A, n \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$$

Teorema 1.45 (Lema de Fatou)**.** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones mebibles no negativas de A en $\mathbb{R}$, i.e.,*

$$f_n(x) \geqslant 0 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, x \in A$$

Entonces

$$\int_A \left(\liminf_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx$$

Teorema 1.46 (Teorema de la Convergencia Dominada)**.** *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones mebibles no negativas de A en $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ función medible tal que*

$$f_n \to f \quad , \quad c.t.p. \text{ en } A$$

Además supongamos que existe $g \in L^1(A)$ tal que

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \quad , \quad \forall\, x \in A, n \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx = \int_A \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx.$$

Teorema 1.47. *Para $n \geqslant 2$ se tiene*

- *Si $mp < n$ entonces se tiene la inmersión continua*

  $$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

  donde q satisface

  $$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}.$$

- *Si* $mp = n$ *entonces se tiene la inmersión continua*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ ,\ p \leqslant q < \infty.$$

- *Si* $mp > n$, $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $k < m - \dfrac{n}{p} \leqslant k+1$ *entonces*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$$

donde

$$\begin{aligned} &0 < \lambda < m - k - \frac{n}{p} \quad \text{si} \quad m - k - \frac{n}{p} < 1, \\ &0 < \lambda < 1 \quad \text{si} \quad m - k - \frac{n}{p} = 1. \end{aligned}$$

Capítulo

2

Existencia, unicidad y dependencia continua de una ecuación parabólica lineal

Cuando tratamos una ecuación parabólica lineal, la primera asociación que hacemos es la conocida ecuación del calor

$$u' - \Delta u = 0 \tag{2.1}$$

a la cual podemos asociar condiciones en frontera de tipo Dirichlet, Neumanm ó de Robinson (mixtas). Se puede resolver esta ecuación por series de Fourier o Transformada de Laplace, métodos que nos muestran cual es la cara de la solución, por lo cual podemos analizar regularidad y dependencia continua con respecto a los datos iniciales. Pero si no fuese posible, al menos de manera directa aplicar los métodos clásicos ya conocidos, surge una pregunta natural: ¿cómo analizamos la existencia, unicidad y regularidad de soluciones?. Es debido a ello que atacaremos este problema desde el punto de vista variacional. El operador $-\Delta$ es lineal, ¿será continuo?, ¿cuál es el dominio adecuado para que esto ocurra?. En este capítulo abordaremos el problema (2.1) de manera abstracta usando el método de Faedo-Galerkin.

2.1 Operador generado por una forma bilineal

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y acotado, $T > 0$. Primeramente estudiaremos la siguiente ecuación parabólica lineal.

$$\begin{cases} u' + Au = f & , \quad \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & , \quad \text{en } \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

donde donde A es un operador lineal que definiremos a continuación.

Sean $(V, ((\,,\,))\,\|\ \|)$ y $(H, (\,,\,)\,, |\ \ |)$ espacios de Hilbert reales con las siguientes condiciones

- $V \hookrightarrow H$, la inmersión de V en H es continua y densa, i.e., existe $c_1 > 0$ tal que

$$|u| \leqslant c_1 \|u\| \tag{2.3}$$

- $a(u,v)$ una forma bilineal y continua en $V \times V$, i.e., existe $c_2 > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leqslant c_2 \|u\| \, \|v\| \tag{2.4}$$

En estas condiciones definiremos el operador abstracto A generado por los espacios de Hilbert V y H. Sea $u \in V$, definimos la función $a_u : V \to \mathbb{R}$ como

$$a_u(v) = a(u,v)$$

Además definamos el conjunto

$$D(A) = \{u \in V \; ; \; a_u \text{ es continua en } V \text{con la topología inducida por } H\} \tag{2.5}$$

Consideremos $a_0 : V \to \mathbb{R}$, entonces $a_0(v) = a(0,v) = 0 \leqslant |v|$, así a_0 es continua en V con la topología inducida por H, luego $0 \in D(A)$, i.e., $D(A) \neq \phi$. Ahora sea $u \in D(A)$, $a_u : V \to \mathbb{R}$ es lineal y continua por la norma inducida por H, por el Teorema de Hahn-Banach existe una extensión $\hat{a}_u$ de a_u, lineal y continua en todo H. Por el Teorema de Representación de Riesz, existe un único $Au \in H$ tal que

$$\hat{a}_u(h) = (Au, h) \;\; , \;\; \forall \, h \in H$$

Por lo tanto

$$(Au, v) = \hat{a}_u(v) = a_u(v) = a(u,v) \;\; , \;\; \forall \, v \in V$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} &\text{Para cada } u \in D(A), \text{ existe un único } Au \in H \text{ tal que} \\ &a(u,v) = (Au, v) \;\; , \;\; \forall \, v \in V \end{aligned} \tag{2.6}$$

Definimos el conjunto

$$M = \{u \in V \; ; \; \text{existe } f \in H \text{ con } \; a(u,v) = (f,v) \; \text{ para todo } \; v \in V\} \tag{2.7}$$

Ahora mostraremos que $D(A)$ y M se tratan del mismo conjunto. En efecto, sea $u \in D(A)$, de (2.6) existe $Au \in H$ tal que

$$a(u, v) = (Au, v) \ \ , \ \ \forall\, v \in V$$

tomamos $f = Au$ se tiene que $u \in M$, por tanto $D(A) \subseteq M$.
Ahora sea $u \in M$, de (2.7) existe $f \in H$ satisfaciendo

$$a(u, v) = (f, v) \ \ , \ \ \forall\, v \in V$$

así tenemos

$$|a_u(v)| = |a(u, v)| = |(f, v)| \leqslant |f|\,|v|$$

por tanto a_u es continua en V con la topología inducida por H, luego $u \in D(A)$, i.e., $M \subseteq D(A)$. Concluimos que $D(A) = M$, como queriamos mostrar.
Luego de (2.5) y (2.7) obtenemos

$$D(A) = \{u \in V; \text{existe } f = Au \text{ con } a(u, v) = (f, v) = (Au, v) \ \ \forall\, v \in V\} \tag{2.8}$$

Es claro que este conjunto es un subespacio lineal de H. Así podemos considerar el operador $A : D(A) \to H$ definido por (2.6), en este sentido diremos que el operador A es generado por la terna $\{V, H, a(u, v)\}$. En adelante , supondremos que V, H y $a(u, v)$ se encuentran en las condiciones (2.3) y (2.4), además el operador A será generado por la terna $\{V, H, a(u, v)\}$.
Ahora veamos algunas propiedades del operador A.

Definición 2.1: *Se dice que la forma bilineal $a(u, v)$ es* coerciva *si existe $\alpha > 0$ tal que*

$$|a(v, v)| \geqslant \alpha \|v\|^2 \ \ , \ \ \forall\, v \in V \tag{2.9}$$

Teorema 2.2. *Si la forma bilineal $a(u, v)$ verifica las condiciones (2.3), (2.4) y (2.9), entonces para cada $f \in H$ existe un único $u \in D(A)$ tal que $Au = f$.*

Demostración. **Existencia**. Debemos demostrar que existe $u \in D(A)$ tal que $Au - f = 0$, por ser V denso en H esto es equivalente a

$$\text{Existe } u \in V \text{ tal que } (Au - f, v) = 0\ , \ \text{ para todo } v \in V$$

Desde que $a(u, v) = (Au, v)$ resolveremos el problema

$$\text{Existe } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = (f, v)\ , \ \text{ para todo } v \in V \tag{2.10}$$

Sea $u \in V$, entonces la aplicación $a_u : V \to \mathbb{R}$ definido por $a_u(v) = a(u, v)$ es lineal y continua en V, por el Teorema de Representación de Riesz existe $Au \in V$ tal que

$$a(u,v) = a_u(v) = ((Au,v)) \quad , \quad \forall\, v \in V$$

Por lo tanto $A \in \mathcal{L}(V)$. Así tenemos que existe $A \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$a(u,v) = ((Au,v)) \quad , \quad \forall\, v \in V \tag{2.11}$$

Análogamente la aplicación $v \to (f,v)$ es lineal y continua en V, por el Teorema de Representación de Riesz existe $Tf \in V$ tal que

$$(f,v) = ((Tf,v)) \quad , \quad \forall\, v \in V \tag{2.12}$$

se observa que $T \in \mathcal{L}(H,V)$. De las igualdades (2.11) y (2.12) demostrar (2.10) es equivalente a

$$\text{Existe } u \in V \text{ tal que } ((Au,v)) = ((Tf,v)) \text{ , para todo } v \in V$$

Nuevamente por la densidad de V en H, esto es equivalente a

$$\text{Existe } u \in V \text{ tal que } Au = Tf \tag{2.13}$$

Para esto a continuación mostraremos que A es un isomorfismo de V en V.

- **Inyectividad**. Supongamos que $Av = 0$, de (2.11) y (2.9) tenemos

  $$0 = ((0,v)) = ((Av,v)) = a(v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2 \geqslant 0$$

  Por tanto $\alpha\|v\|^2$=0, i.e., v=0.

- **Sobreyectividad**. Dividamos esta parte de la prueba en dos etapas, la pimera será mostrar que $A(V)$ es cerrado en V, seguidamente que $A(V)$ es denso en V.
  $A(V)$ cerrado en V. En efecto, sea $(A(v_n)) \subseteq A(V)$ con $(v_n) \subseteq V$ tal que

  $$A(v_n) \to w \text{ en } V$$

  luego por la coercividad de $a(u,v)$ tenemos

  $$\begin{aligned} \alpha\|v_n - v_m\|^2 &\leqslant |a(v_n - v_m, v_n - v_m)| = |((A(v_n - v_m), v_n - v_m))| \\ &\leqslant \|A(v_n - v_m)\|\,\|v_n - v_m\| = \|A(v_n) - A(v_m)\|\,\|v_n - v_m\| \end{aligned}$$

  De esta desigualdad

  $$\|v_n - v_m\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\,\|A(v_n) - A(v_m)\| \tag{2.14}$$

Por ser $(A(v_n))$ sucesión convergente en V, entonces es una sucesión de Cauchy en V, de la desigualdad (2.14), (v_n) también es una sucesión de Cauchy en V, por ser este un espacio de Hilbert existe $v \in V$ tal que

$$v_n \to v \text{ en } V$$

Por ser A continuo

$$A(v_n) \to A(v) \text{ en } V$$

Por unicidad de límites $A(v) = w$, así $w \in A(V)$, i.e., $A(V)$ es cerrado en V.
A continuación para probar que $A(V)$ es denso en V, será suficiente mostrar que $A(V)^\perp = 0$ en V. En efecto, sea $w \in A(V)^\perp$ entonces

$$((Av, w)) = 0 \ , \ \forall \ v \in V$$

en particular tomando $v = w$, tenemos

$$0 = ((Aw, w)) = a(w, w) \geqslant \alpha \|w\|^2 \geqslant 0$$

i.e., $w = 0$, por tanto $A(V)^\perp = 0$, así $A(V)$ es denso en V. Luego por la cerradura y densidad de $A(V)$ en V se tiene

$$A(V) = \overline{A(V)}^V = V$$

por lo tanto A es sobreyectiva.
Entonces el operador A es una biyección de V en V, así existe A^{-1} lineal y por el Teorema de la Aplicación Abierta también continua. De (2.13), tomamos

$$u = A^{-1}Tf \tag{2.15}$$

Luego $Au = A(A^{-1}Tf) = Tf$, así por (2.13) queda probada la existencia.

Unicidad. Sea $w \in V$ tal que $Aw = Tf = Au$, por tanto $A(w - u) = 0$, por inyectividad $w = u$. □

Como corolario de este teorema veamos el siguiente resultado conocido como el Teorema de Lax-Milgram.

Corolario 2.3. *Sea $L \in \mathcal{L}(V)$ lineal y continua en V. Entonces existe un único $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in V$.*

Inicialmente supusimos que la inmersión $V \hookrightarrow H$ es densa y continua, seguidamente definimos el conjunto $D(A)$ caracterizado por (2.8) con lo cual obtuvimos el operador A

generado por la terna $\{V, H, a(u,v)\}$. La coercividad de la forma bilineal $a(u,v)$ repercute directamente en las propiedades del operador A, veamos algunas de ellas.

Teorema 2.4. *Supongamos que $a(u,v)$ verifica la condición de coercividad (2.9), entonces $D(A)$ es denso en H y A es un operador cerrado de H.*

Demostración. Para demostrar que $D(A)$ es denso en H, será suficiente mostrar que $D(A)^{\perp} = 0$ en H. En efecto sea $h \in D(A)^{\perp}$ entonces

$$(h, u) = 0 \ , \ \forall\, u \in D(A) \tag{2.16}$$

Por el Teorema 2.2, existe un único $u_0 \in D(A)$ tal que

$$Au_0 = h \tag{2.17}$$

En (2.16) tomando en particular $u = u_0$, tenemos

$$0 = (h, u_0) = (Au_0, u_0) = a(u_0, u_0) = |a(u_0, u_0)| \geqslant \alpha \|u_0\|^2 \geqslant 0$$

Luego $u_0 = 0$, de (2.17) se tiene que $h = 0$, por tanto $D(A)^{\perp} = 0$, i.e., $D(A)$ es denso en H. Ahora veamos que A es una operador cerrado. En efecto, sea $(u_n) \subseteq D(A)$; $u, h \in H$ tal que

$$u_n \to u \ \text{ en } H \quad \text{y} \quad Au_n \to h \ \text{ en } H$$

Como $A^{-1} \in \mathcal{L}(V),\ T \in \mathcal{L}(H, V)$ entonces $A^{-1}T \in \mathcal{L}(H, V)$, de (2.15)

$$u_n = A^{-1}T(Au_n) \to A^{-1}T(h) \ \text{ en } V$$

por la inmersión continua de V en H

$$u_n = A^{-1}T(Au_n) \to A^{-1}T(h) \ \text{ en } H$$

por unicidad de límites se tiene que $A^{-1}T(h) = u$, i.e., $u \in D(A)$ y $Au = h$. Luego A es un operador cerrado en H. □

Teorema 2.5. *Si $V \subset H$ estrictamente, $a(u,v)$ forma bilineal coerciva, entonces el operador A generado por la terna $\{V, H, a(u,v)\}$ es no limitado en H.*

Demostración. Supongamos que A es limitado en H, entonces existe $c > 0$ tal que

$$|A(u)| \leqslant c\,|u| \ \ , \ \forall\, u \in D(A) \tag{2.18}$$

Por ser $a(u,v)$ coerciva, de (2.18) tenenos

$$\alpha\,\|u\|^2 \leqslant |a(u,u)| = |(Au, u)| \leqslant |Au|\,|u| \leqslant c\,|u|^2$$

Sea $c_1 = \sqrt{\dfrac{c}{\alpha}}$, entonces

$$\|u\| \leqslant c_1 \, |u| \ , \ \forall \, u \in D(A) \tag{2.19}$$

Por la inmersión de V en H, existe $c_2 > 0$ tal que

$$|u| \leqslant c_2 \, \|u\| \ , \ \forall \, u \in V \tag{2.20}$$

De (2.19) y (2.20) se tiene que las normas $\| \ \|$ y $| \ |$ son equivalentes en $D(A)$. Sea $v \in H$, por Teorema 2.4, existe $(v_n) \subseteq D(A)$ tal que $v_n \to v$ en H. Por la equivalencia de normas, tenemos $v_n \to v$ en V. Por ser V completo, $v \in V$, i.e., $H \subseteq V$, como $V \subseteq H$ se tiene que $V = H$, lo cual es una contradicción pues la inclusión de V en H es estricta. Luego A es no limitado en H. $\square$

2.2 Existencia, unicidad y dependencia continua. Método de Faedo-Galerkin

Para el tratamiento de la ecuación parabólica abstracta (2.2), haremos algunas observaciones para su mejor entendimiento, sobre todo por los espacios a tratar.

Observación 2.6: *Tenemos que la inmersión $V \hookrightarrow H$ es densa y continua, por lo tanto $H' \hookrightarrow V'$, además por ser H un espacio de Hilbert y por el Teorema de Representación de Riesz podemos identificar $H = H'$, luego tenemos las siguientes inmersiones densas y continuas*

$$V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V' \quad \text{i.e.,} \quad V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

lo cual se denomina triplete de evolución.

Observación 2.7: *Sea $v \in V$, en la ecuación (2.2), haciendo producto interno en H tenemos*

$$(u'(t) + Au(t) - f(t), v) = 0 \ , \ \forall \, v \in V$$

Por el Teorema de Representación de Riesz podemos considerar

$$\langle u'(t) + Au(t) - f(t), v \rangle_{V' \times V} = (u'(t) + Au(t) - f(t), v) = 0 \ , \ \forall \, v \in V$$

La solución será tomada en este sentido: $u'(t) + Au(t) - f(t) = 0$ en V', c.t.p. $t \in [0, T]$.

Observación 2.8: *u' será la derivada en el sentido generalizado, i.e.,*

$$\frac{d}{dt} \langle u'(t), v \rangle_{V' \times V} = (u'(t), v) \ , \ \forall \, v \in V \ \ c.t.p. \ \ t \in [0, T]$$

Observación 2.9: *En el Teorema 2.5, vimos que el operador generado por la terna* $\{V, H, a(u,v)\}$ *es no limitado en* H*, de (2.6) tenemos*

$$\textit{Para cada } u \in D(A), \textit{ existe } Au \in H \textit{ tal que } a(u,v) = (Au, v) \ , \textit{ para todo } v \in V$$

Así el operador $A : D(A) \to V \subseteq V'$*, luego por la observación 2.6, para cada* $u \in D(A)$*,* $Au \in V'$ *definido por*

$$\langle Au, v\rangle_{V'\times V} = a(u,v) \ , \ \forall\, v \in V$$

De (2.4), tomando $v \in V$ *con* $\|v\| \leqslant 1$*, se sigue que*

$$\left|\langle Au, v\rangle_{V'\times V}\right| = |a(u,v)| \leqslant c_2 \|u\| \|v\| \leqslant c_2 \|u\|$$

Entonces

$$\|Au\|_{V'} = \sup_{\|v\|\leqslant 1} \left|\langle Au, v\rangle_{V'\times V}\right| \leqslant c_2 \|u\| \tag{2.21}$$

Por ello se puede considerar el operador continuo $A : V \to V'$*, además si se restringe el dominio de este operador a* $D(A)$ *tenemos el operador generado por la terna* $\{V, H, a(u,v)\}$*,* $A : D(A) \subseteq V \to H$*.*

Observación 2.10: *Análogamente consideramos* $f : [0,T] \to V \subseteq V'$*, por el Teorema de Respresentación de Riesz*

$$\langle f(t), v\rangle_{V'\times V} = (f(t), v) \ , \ \forall\, v \in V \ \textit{c.t.p.} \ \ t \in [0,T]$$

Ahora pasemos a la demostración de la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución u del sistema (2.2), para ello usaremos el método de Faedo-Galerkin. Supongamos que se cumplen las condiciones (2.3), (2.4) y (2.9) para $\{V, H, a(u,v)\}$
Sea $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base del espacio de Banach V, sea

$$V_m = \text{gen}\{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\} \ , \ \dim(V_m) = m$$

Entonces cada subconjunto V_m es un subespacio vectorial de dimensión finita y cerrado en los espacios V, H y V'. Además por el Teorema de la Aplicación Abierta las normas $\| \ \|_V$, $\| \ \|_H$ y $\| \ \|_{V'}$ son equivalentes en V_m. También estan bien definidas el operador proyección $P_m = P_{V_m} : H \to V_m \subseteq H$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora veamos las restricciones del sistema (2.2) en cada subespacio de dimensión finita $V_m \subset V$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ la aplicación $a_m : V_m \times V_m \to \mathbb{R}$ definida por

$$a_m(u,v) = a(u,v) \ \ , \ \ \text{para todo } u, v \in V_m$$

es una forma bilineal, continua y coerciva por las suposiciones sobre la forma bilineal $a(u,v)$.

Por lo tanto existe el operador $A_m : (V_m, \| \ \|_V) \to (V_m, \| \ \|_{V'})$ definido por

$$(A_m u, v) = a_m(u, v) = a(u, v) \quad , \quad \text{para todo } u, v \in V_m$$

Además denotemos

$$P_m u_0 = u_0^m \quad , \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}$$

y

$$P_m f(t) = f_m(t) \quad , \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}, t \in [0, T]$$

i.e.,

$$\|u_0^m\| = \|P_m u_0\| \leqslant \|u_0\| \ , \ \|f_m(t)\| = \|P_m f(t)\| \leqslant \|f(t)\| \quad , \quad \forall m \in \mathbb{N}, t \in [0, T]$$

Ahora consideremos la Ecuación Diferencial Ordinaria

$$\begin{cases} u_m'(t) + A_m u_m(t) = f_m(t) \quad , \quad t \in [0, T] \\ u_m(0) = u_0^m \end{cases} \tag{2.22}$$

Entonces gracias al teorema de existencia de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe una única solución $u_m \in C^1([0, T]\,; V_m)$ del sistema (2.22). A continuación haremos las estimativas a priori, de (2.22), haciendo el producto interno con $u_m(t)$, se tiene

$$(u_m'(t), u_m(t)) + (A_m u_m(t), u_m(t)) = (f_m(t), u_m(t))$$

$$(u_m'(t), u_m(t)) + a\,(u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t))$$

Luego

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,(u_m(t), u_m(t)) + a\,(u_m(t), u_m(t)) = \langle f(t), u_m(t)\rangle_{V' \times V} \tag{2.23}$$

Por la coercividad de la forma bilineal $a(u, v)$, de (2.9) se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,(u_m(t), u_m(t)) + \alpha\|u_m(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,(u_m(t), u_m(t)) + a\,(u_m(t), u_m(t))$$

De (2.23)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \alpha\,\|u_m(t)\|^2 \leqslant \langle f_m(t), u_m(t)\rangle_{V' \times V}$$

Recordemos que el operador $P_m : H \to V_m \subseteq H$ es lineal y continua, luego por el Teorema de Hahn-Banach existe una extensión $\overline{P}_m : V' \to V'$ lineal y continuo tal que

$$\left\|\overline{P}\right\| = \|P_m\| = 1 \tag{2.24}$$

Integrando la última desigualdad de 0 a T

$$|u_m(T)|^2 - |u_m(0)|^2 + 2\alpha \int_0^T \|u_m(t)\|^2 \, dt \leqslant \int_0^T 2\langle f_m(t), u_m(t)\rangle_{V'\times V} dt$$

Además de (2.24) obtenemos

$$\|f_m(t)\|_{V'} = \left\|\overline{P}_m f(t)\right\|_{V'} \leqslant \|f(t)\|_{V'} \quad , \quad \forall\, t \in [0,T]\,, m \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$|u_m(T)|^2 + 2\alpha \int_0^T \|u_m(t)\|^2 \, dt \leqslant |u_m(0)|^2 + \int_0^T 2\,|f(t)|_{V'} \|u_m(t)\| \, dt \tag{2.25}$$

Ahora usaremos la desigualdad

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad , \quad 2\,|x|\,|y| \leqslant \epsilon^{-1}\,|x|^2 + \epsilon\,|y|^2 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Como $\alpha > 0$, se tiene

$$2\,|f(t)|_{V'} \|u_m(t)\| \leqslant \alpha^{-1}\,|f(t)|_{V'}^2 + \alpha\,\|u_m(t)\|^2 \tag{2.26}$$

Reemplazando (2.26) en (2.25)

$$|u_m(T)|^2 + 2\alpha \int_0^T \|u_m(t)\|^2 \, dt \leqslant |u_m(0)|^2 + \alpha^{-1} \int_0^T |f(t)|_{V'}^2 \, dt + \alpha \int_0^T \|u_m(t)\|^2 \, dt$$

Luego

$$|u_m(T)|^2 + \alpha \int_0^T \|u_m(t)\|^2 \, dt \leqslant |u_m(0)|^2 + \alpha^{-1} \int_0^T |f(t)|_{V'}^2 \, dt$$

Entonces

$$\int_0^T \|u_m(t)\|^2 \, dt \leqslant \alpha^{-1}\,|u_m(0)|^2 + \alpha^{-2} \int_0^T |f(t)|_{V'}^2 \, dt \tag{2.27}$$

Además sabemos que

$$|u_0^m|^2 \leqslant |u_0|^2$$

Sea $k_1 = \max\{\alpha^{-1}, \alpha^{-2}\}$, en (2.27) tenemos

$$\int_0^T \|u_m(t)\|^2 \, dt \leqslant k_1 \left(|u_0|^2 + \int_0^T |f(t)|_{V'}^2 \, dt\right) \tag{2.28}$$

Además de la observación 2.7

$$u_m'(t) + A_m u_m(t) = f_m(t) \quad \text{en} \quad V'$$

Entonces por la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
|u_m'(t)|_{V'}^2 &= |f_m(t) - A_m u_m(t)|_{V\prime}^2 \\
&= |f_m(t)|_{V'}^2 + |A_m u_m(t)|_{V'}^2 + 2\,|f_m(t)|_{V'}^2\,|A_m u_m(t)|_{V'}^2 \\
&\leqslant |f_m(t)|_{V'}^2 + |A_m u_m(t)|_{V'}^2 + |f_m(t)|_{V'}^2 + |A_m u_m(t)|_{V'}^2 \\
&= 2\left(|A_m u_m(t)|_{V'}^2 + |f_m(t)|_{V'}^2\right)
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\frac{1}{2}\,|u_m'(t)|_{V'}^2 \leqslant |A_m u_m(t)|_{V'}^2 + |f_m(t)|_{V'}^2$$

Integrando de 0 a T

$$\frac{1}{2}\int_0^T |u_m'(t)|_{V'}^2\,dt \leqslant \int_0^T |A_m u_m(t)|_{V'}^2\,dt + \int_0^T |f_m(t)|_{V'}^2\,dt$$

De (2.21), (2.28) y el Teorema de Acotación Uniforme se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T |u_m'(t)|_{V'}^2\,dt &\leqslant c_2^2\int_0^T \|u_m(t)\|^2\,dt + \int_0^T |f(t)|_{V'}^2\,dt \\
&\leqslant c_2^2\left(k_1\left(|u_0|^2 + \int_0^T |f(t)|_{V\prime}^2\,dt\right)\right) + \int_0^T |f(t)|_{V\prime}^2\,dt \\
&= c_2^2 k_1\,|u_0|^2 + (c_2^2 k_1 + 1)\int_0^T |f(t)|_{V\prime}^2\,dt
\end{aligned}$$

Sea $k_2 = 2\,(c_2^2 k_1 + 1)$, entonces

$$\int_0^T |u_m'(t)|_{V'}^2\,dt \leqslant k_2\left(|u_0|^2 + \int_0^T |f(t)|_{V\prime}^2\,dt\right) \tag{2.29}$$

Sea $k = k_1 + k_2$, de (2.28) y (2.29) se tiene

$$\int_0^T \|u_m(t)\|^2\,dt + \int_0^T |u_m'(t)|_{V'}^2\,dt \leqslant k\left(|u_0|^2 + \int_0^T |f(t)|_{V\prime}^2\,dt\right)$$

i.e.,

$$\int_0^T \|u_m(t)\|^2\,dt + \int_0^T |u_m'(t)|_{V'}^2\,dt \leqslant k\left(|u_0|^2 + \int_0^T |f(t)|_{V\prime}^2\,dt\right) \tag{2.30}$$

Entonces

$$(u_m)\ \text{ es acotada en }\ L^2(0,T;V)$$

$$(u_m') \;\text{ es acotada en }\; L^2(0,T;V')$$

Por lo tanto existen

$$u \in L^2(0,T;V),\; v \in L^2(0,T;V')$$

tal que

$$u_m \rightharpoonup u \;\text{ en }\; L^2(0,T;V) \tag{2.31}$$

$$u_m' \rightharpoonup v \;\text{ en }\; L^2(0,T;V') \tag{2.32}$$

i.e.,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \langle v_1(t), u_m(t)\rangle_{V'\times V} dt = \int_0^T \langle v_1(t), u(t)\rangle_{V'\times V} \;\;,\;\; \forall\, v_1 \in L^2(0,T;V')$$

y

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \langle u_m'(t), v_2(t)\rangle_{V'\times V} dt = \int_0^T \langle v(t), v_2(t)\rangle_{V'\times V} \;\;,\;\; \forall\, v_2 \in L^2(0,T;V)$$

Ahora debemos verificar que $u' = v$ en V'. En efecto, sea $w \in V$, $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ función de prueba entonces por integración por partes y las convergencias débiles se tiene

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^T v(t)\varphi(t)dt, w \right\rangle_{V'\times V} &= \int_0^T \langle v(t)\varphi(t), w\rangle_{V'\times V} dt = \int_0^T \varphi(t)\langle v(t), w\rangle_{V'\times V} dt \\
&= \lim_{m\to\infty} \int_0^T \langle u_m'(t), \varphi(t)w\rangle_{V'\times V} = \lim_{m\to\infty} \int_0^T -\langle u_m(t), \varphi'(t)w\rangle_{V'\times V} \\
&= -\int_0^T \langle u(t), \varphi'(t)w\rangle_{V'\times V} dt = -\int_0^T \varphi'(t)\langle u(t), w\rangle_{V'\times V} dt \\
&= -\int_0^T \langle u(t)\varphi'(t), w\rangle_{V'\times V} dt = \left\langle -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt, w \right\rangle_{V'\times V} dt
\end{aligned}$$

Como $w \in V$ es fijo y arbitario, se tiene la igualdad

$$\int_0^T v(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T u(t)\varphi'(t)dt \;\;,\;\; \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

Entonces

$$u' = v \quad \text{y} \quad u \in W^{1,2}(0,T;V') \cap L^2(0,T;V)$$

Además de (2.31) se tiene

$$Au_m \rightharpoonup Au \;\text{ en }\; L^2(0,T;V') \tag{2.33}$$

i.e.,

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \langle Au_m(t), v(t)\rangle_{V'\times V} dt = \int_0^T \langle Au(t), v(t)\rangle_{V'\times V} dt \;\;,\;\; \forall\, v \in L^2(0,T;V)$$

Ahora veamos que

$$A_m u_m \rightharpoonup Au \;\text{ en }\; L^2(0,T;V')$$

i.e., debemos demostrar que

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T \langle A_m u_m(t), v(t)\rangle_{V'\times V} dt = \int_0^T \langle Au(t), v(t)\rangle_{V'\times V} dt \quad , \quad \forall\, v\in L^2(0,T;V)$$

En efecto, para verificar esto no podemos tomar inicialmente $v\in L^2(0,T;V)$ ya que para cada $m\in\mathbb{N}$ el operador A_m tiene por conjunto de llegada el subespacio vectorial de dimensión finita V_m.
Por ello sea $w\in V_n$ con $n\geqslant 1$ y $\varphi\in L^2(0,T)$, entonces para $m\geqslant n$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle A_m u_m(t), \varphi(t)w\rangle_{V'\times V} dt &= \int_0^T a_m(u_m(t), \varphi(t)w) dt = \int_0^T a(u_m(t), \varphi(t)w) dt\\ &= \int_0^T \langle Au_m(t), \varphi(t)w\rangle_{V'\times V} dt\end{aligned}$$

Por lo tanto de (2.33) se obtiene

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T \langle A_m u_m(t), \varphi(t)w\rangle_{V'\times V} = \int_0^T \langle Au(t), \varphi(t)w\rangle_{V'\times V}, \forall\, w\in V_n, \varphi\in L^2(0,T)$$

Además por ser la familia $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base del espacio V, entonces

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n} = V$$

De esta igualdad se verifica la igualdad de conjuntos

$$\left\{\varphi(\cdot)w\ ;\ \varphi\in L^2(0,T), w\in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n\right\} = L^2(0,T;V)$$

Por lo tanto se sigue que

$$A_m u_m \rightharpoonup Au \ \text{ en } \ L^2(0,T;V')$$

Ahora veamos que u es la solución del sistema (2.2). En efecto sea $v\in L^2(0,T;V)$, de (2.32) y (2.33) se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u', v\rangle_{V'\times V} dt &= \lim_{m\to\infty}\int_0^T \langle u_m', v\rangle_{V'\times V} dt = \lim_{m\to\infty}\int_0^T \langle f_m - A_m u_m, v\rangle_{V'\times V} dt\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(\int_0^T \langle f_m, v\rangle_{V'\times V} dt - \int_0^T \langle A_m u_m, v\rangle_{V'\times V} dt\right)\\ &= \lim_{m\to\infty}\int_0^T \langle f_m, v\rangle_{V'\times V} dt - \lim_{m\to\infty}\int_0^T \langle A_m u_m, v\rangle_{V'\times V} dt\\ &= \int_0^T \langle f, v\rangle_{V'\times V} dt - \int_0^T \langle Au, v\rangle_{V'\times V} dt = \int_0^T \langle f - Au, v\rangle_{V'\times V} dt\end{aligned}$$

Así
$$\int_0^T \langle u'(t) - f(t) + Au(t), v(t)\rangle_{V'\times V} dt = 0 \ , \ \forall \ v \in L^2(0,T;V)$$
Por lo tanto
$$u'(t) + Au(t) = f(t) \ , \ \text{en } V' \ \text{ c.t.p. } \ t \in [0,T]$$
i.e.,
$$u' + Au = f \tag{2.34}$$
Así tenemos demostrado la existencia de la solución del sistema (2.2), ahora verifiquemos la condición inicial $u(0) = u_0$. En efecto, de la propiedad de los operadores de proyección para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene
$$\begin{aligned} |u_0 - P_m u_0|^2 &= |P_m u_0|^2 - |u_0|^2 = (P_m u_0, P_m u_0) - |u_0|^2 \\ &= (u_0, P_m^2 u_0) - |u_0|^2 = (u_0, u_0) - |u_0|^2 = 0. \end{aligned}$$
Entonces
$$u_0^m \to u_0 \ \text{ en } \ H$$
Además de la observación 2.6, tenemos $H \hookrightarrow V'$, entonces
$$u_0^m \to u_0 \ \text{ en } V' \tag{2.35}$$
Ahora sea $w \in V$ y $\varphi \in C^1([0,T], \mathbb{R})$ con $\varphi(0) = 1, \ \varphi(T) = 0$, por integración por partes se tiene
$$\int_0^T \langle u(t), \varphi'(t)w\rangle_{V'\times V} dt = -\langle u(0), w\rangle_{V'\times V} - \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)w\rangle_{V'\times V} dt \tag{2.36}$$
Por (2.35) se tiene
$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u(t), \varphi'(t)w\rangle_{V'\times V} dt &= \lim_{m\to\infty} \int_0^T \langle u_m(t), \varphi'(t)w\rangle_{V'\times V} dt \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(-\langle u_m(0), w\rangle_{V'\times V} - \int_0^T \langle u_m'(t), \varphi(t)w\rangle_{V'\times V} \right) \\ &= -\lim_{m\to\infty} \langle u_0^m, w\rangle_{V'\times V} - \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)w\rangle_{V'\times V} dt \\ &= -\langle u_0, w\rangle_{V'\times V} - \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)w\rangle_{V'\times V} dt \end{aligned}$$
i.e.,
$$\int_0^T \langle u(t), \varphi'(t)w\rangle_{V'\times V} dt = -\langle u_0, w\rangle_{V'\times V} - \int_0^T \langle u'(t), \varphi(t)w\rangle_{V'\times V} dt \tag{2.37}$$
Finalmente de (2.36) y (2.37) se tiene
$$\langle u(0), w\rangle_{V'\times V} = -\langle u_0, w\rangle_{V'\times V} \ , \ \forall \ w \in V$$

Entonces $u(0) = u_0$, además de (2.34) hemos demostrado que u es solución del sistema (2.2). Ahora veamos la unicidad de la solución. Supongamos que u_1, u_2 es solución del sistema (2.2), entonces

$$\begin{cases} u_1' + Au_1 = f & , \ \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u_1(0) = u_0 & , \ \text{en } \Omega \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} u_2' + Au_1 = f & , \ \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u_2(0) = u_0 & , \ \text{en } \Omega \end{cases}$$

Sea $u = u_1 - u_2$, entonces u verifica

$$\begin{cases} u' + Au = 0 & , \ \text{en } \Omega \times (0,T) \\ u(0) = 0 & , \ \text{en } \Omega \end{cases} \tag{2.38}$$

Para demostrar la unicidad bastará con mostrar que el sistema (2.38), tiene por solución la nula. En efecto

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u(t), u(t)) = \langle u'(t), u(t)\rangle_{V' \times V}$$

Integrando de 0 a T, considerando que $u(0) = 0$, la forma bilineal $a(u,v)$ es coerciva de (2.38) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|u(T)|^2 &= \int_0^T \langle u'(t), u(t)\rangle_{V' \times V} dt = -\int_0^T \langle Au(t), u(t)\rangle_{V' \times V} dt \\ &= -\int_0^T a(u(t), u(t)) dt \leqslant -\alpha \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \end{aligned}$$

i.e.,

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2 + \alpha \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \leqslant 0$$

Luego

$$\int_0^T \|u(t)\|^2 dt = 0$$

Por lo tanto

$$u(t) = 0 \ \text{ c.t.p. } \ t \in [0,T]$$

así $u = 0$, entonces $u_1 = u_2$. Esto demuestra la unicidad de solución de (2.2).
Finalmente veamos la dependencia continua de la solución sobre los datos iniciales. Por (2.30),(2.31) y (2.32) se sigue que

$$\|u\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant \liminf_{m\to\infty} \|u_m\|_{L_2(0,T;V)} \leqslant k^{1/2}\left(|u_0|^2 + \int_0^T |f(t)|_{V'}^2 dt\right)^{1/2}$$

y

$$\|u'\|_{L_2(0,T;V')} \leqslant \liminf_{m\to\infty} \|u_m'\|_{L_2(0,T;V')} \leqslant k^{1/2}\left(|u_0|^2 + \int_0^T |f(t)|_{V'}^2 dt\right)^{1/2}$$

Sumando tenemos

$$\|u\|_{L_2(0,T;V)} + \|u'\|_{L_2(0,T;V')} \leqslant 2k^{1/2}\left(|u_0|^2 + \int_0^T |f(t)|_{V'}^2 \, dt\right)^{1/2}$$

Tomando $D = 2k^{1/2}$, obtenemos

$$\|u\|_{W_2^1(0,T;V,H)} \leqslant D\left(|u_0|^2 + \int_0^T |f(t)|_{V'}^2 \, dt\right)^{1/2}$$

Desigualdad que muestra la dependencia continua sobre los datos iniciales f, u_0. Resumimos todos los resultados obtenidos en el siguiente teorema.

Teorema 2.11. *Sean V, H espacios de Hilbert y $a(u, v)$ una forma bilineal en V, bajo las condiciones (2.3), (2.4) y (2.9), el operador $A : V \to V'$, entonces se verifica*

(a) Para todo $f \in L^2(0, T; V')$, $u_0 \in H$ existe una única solución

$$u \in W^{1,2}(0, T; V') \cap L^p(0, T; V)$$

del sistema (2.2).

(b) La solución depende continuamente de los datos iniciales f, u_0.

Por la observación 2.6, se tiene las inmersiones

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

Si tomamos $f \in L^2(0, T; V) \subseteq L^2(0, T; H)$, entonces $f \in L^2(0, T; V')$, ademas el operador $A : V \to H$ puede ser considerado por la observación 2.9 como $A : V \to V'$, con estas consideraciones tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.12. *Sean V, H espacios de Hilbert y $a(u, v)$ una forma bilineal en V, bajo las condiciones (2.3), (2.4) y (2.9), el operador $A : V \to H$, entonces se verifica*

(a) Para todo $f \in L^2(0, T; V)$, $u_0 \in H$ existe una única solución

$$u \in W^{1,2}(0, T; V') \cap L^p(0, T; V)$$

del sistema (2.2).

(b) La solución depende continuamente de los datos iniciales f, u_0.

Observación 2.13 (Sobre la condición de coercividad de $a(u,v)$)**:** *Para la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución del sistema (2.2) supusimos que la forma bilineal $a(u,v)$ sea además de continua, coerciva. Podemos reemplazar esta última condición por la siguiente : existen $\alpha > 0,\ \delta \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a(u,v) \geqslant \alpha \|u\|^2 - \delta |u|^2 \ ,\ \forall\ u \in V \tag{2.39}$$

Obsérvese que si $\delta = 0$ estamos en la condición (2.9), suponiendo el sistema (2.2), con la condición (2.39) y haciendo

$$u(t) = w(t)\exp(\delta t) \tag{2.40}$$

Haciendo los cálculos se obtiene

$$u'(t) = (w(t)\exp(\delta t))' = \delta w(t)\exp(\delta t) + w'(t)\exp(\delta t)$$

Reemplazando esta igualdad en (2.2) tenemos

$$\delta w(t)\exp(\delta t) + w'(t)\exp(\delta t) + A\left(w(t)\exp(\delta t)\right) = f(t)$$

Por la linealidad del operador A

$$\delta w(t)\exp(\delta t) + w'(t)\exp(\delta t) + \exp(\delta t)Aw(t) = f(t)$$

Luego

$$w'(t) + Aw(t) + \delta w(t) = \exp(-\delta t)f(t)$$

i.e.,

$$w'(t) + (A + \delta I)\, w(t) = \exp(-\delta t)f(t) \tag{2.41}$$

De (2.40), tenemos que

$$w(0) = u_0 \tag{2.42}$$

Entonces por (2.41) y (2.42) se obtiene el sistema

$$\begin{cases} w'(t) + (A+\delta I)\, w(t) = \exp(-\delta t)f(t) & ,\quad en\ \ \Omega \times (0,T) \\ w(0) = u_0 & ,\quad en\ \ \Omega \end{cases} \tag{2.43}$$

Definamos $a_1 : V \times V \to \mathbb{R}$ como

$$a_1(u,v) = a(u,v) + \delta(u,v)$$

Afirmamos que $a_1(u,v)$ es una forma bilineal, continua y coerciva en V. En efecto

- ***Bilinealidad***. *Se sigue de la bilinealidad tanto de $a(u,v)$ como del producto interno en H.*

- ***Continuidad***. *Por las condiciones (2.3) y (2.4) se tiene*

$$\begin{aligned} |a_1(u,v)| &= |a(u,v)+\delta(u,v)| \leqslant c_2 \|u\| \|v\| + |\delta| |u| |v| \\ &\leqslant c_2 \|u\| \|v\| + c_1^2 |\delta| \|u\| \|v\| = (c_2 + c_1^2 |\delta|) \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

- ***Coercividad***. *De (2.39)*, tenemos

$$a_1(u,u) = a(u,u) + \delta\,(u,u) \geqslant \alpha \|u\|^2 \ , \ \forall\, u \in V$$

Ahora sean $u \in D(A)$, $v \in V$ por (2.6) se tiene

$$a_1(u,v) = a(u,v) + \delta\,(u,v) = (Au,v) + (\delta u, v) = (Au + \delta u, v)$$

i.e.,

$$a_1(u,v) = ((A+\delta I)\,u, v) \ , \ \forall\, v \in V$$

Por lo tanto nuevamente por (2.6), obtenemos que el operador generado por la terna $\{V, H, a_1(u,v)\}$ es $A+\delta I$, entonces por teorema 2.11 el sistema (2.43) posee una única solución.
Concluimos que también existe solución del sistema (2.2), bajo la condición (2.39) sobre la forma bilineal $a(u,v)$.
Ahora veamos si también se obtiene dependencia continua. De (2.40)

$$w(t) = u(t) \exp(-\delta t)$$

entonces del sistema (2.43) y del teorema 2.11 existe un $k > 0$ tal que

$$\|u \exp(-\delta t)\|_{MR_p} \leqslant k \left(\|f \exp(-\delta t)\|_{L^2(0,T;V')} + |u_0| \right)$$

Sean $k_1 = \max\left\{k, k \max\limits_{t\in[0,T]} \exp(-\delta t)\right\}$, $t \in [0,T]$ *entonces*

$$\begin{aligned} \min_{t\in[0,T]} \|u\|_{MR_p} \exp(-\delta t) &\leqslant \|u \exp(-\delta t)\|_{MR_p} \\ &\leqslant k \left(\|f \exp(-\delta t)\|_{L^2(0,T;V')} + |u_0| \right) \\ &\leqslant k \max_{t\in[0,T]} \|f\|_{L^2(0,T;V')} \exp(-\delta t) + k\,|u_0| \\ &\leqslant k_1 \left(\|f\|_{L^2(0,T;V')} + |u_0| \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|u\|_{MR_p} \leqslant \left(\min_{t\in[0,T]} \exp(-\delta t) \right)^{-1} k_1 \left(\|f\|_{L^2(0,T;V')} + |u_0| \right)$$

desigualdad que demuestra la dependencia continua.

Resumimos los resultados en el siguiente corolario.

Corolario 2.14. *Sean* V, H *espacios de Hilbert y* $a(u,v)$ *forma bilineal en* V*, bajo las condiciones (2.3), (2.4) y (2.39), el operador* $A : V \to V'$*, entonces se verifica*

(a) Para todo $f \in L^2(0,T;V')$, $u_0 \in H$ *existe una única solución del sistema (2.2),*

$$u \in W^{1,2}(0,T;V') \cap L^p(0,T;V).$$

(b) La solución depende continuamente de los datos iniciales f, u_0.

Como aplicación de estos resultados resolvamos la siguiente ecuación lineal del calor con condiciones de Dirichlet

Ejemplo 2.15: *Sean* $\Omega \in \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto,* $T > 0$ *consideremos la ecuación*

$$\begin{cases} u' - \Delta u = f & , \quad en\ (0,T) \times \Omega \\ u = 0 & , \quad en\ \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & , \quad en\ \Omega \end{cases} \tag{2.44}$$

La primera condición inicial $u = 0$ *en* $\partial\Omega$ *nos sugiere tomar el espacio de Hilbert* $V = H_0^1(\Omega)$ *que por la desigualdad de Poincairé esta inmerso de manera continua en* $H = L^2(\Omega)$*. Aún nos falta saber de quien se trata* $a(u,v)$ *la forma bilineal, continua y coerciva adecuada para resolver el sistema (2.44).*
Para ello sea $v \in H_0^1(\Omega)$ *haciendo el producto interno en* $L^2(\Omega)$ *obtenemos*

$$(u' - \Delta u, v) = (f, v)$$

i.e.,

$$(u', v) + (-\Delta u, v) = (f, v)$$

Ahora supongmos que el sistema (2.44) se escribe en forma abstracta como

$$u' + Au = f$$

donde el operador A *es generado por la terna* $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$*, entonces por Green obtenemos*

$$a(u,v) = (Au, v)_{L^2(\Omega)} = (-\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega -\Delta u v = \int_\Omega \nabla u \nabla v \ , \ \forall\ u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Entonces la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *es definida por*

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \ \ , \ \ \forall\ u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Notemos que por tratarse del producto interno en $H_0^1(\Omega)$ *esta forma bilineal es continua y coerciva. Entonces* $A : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ *se trata del operador de Laplace* $A = -\Delta$*. Luego por el Teorema 2.11 se verifica que para todo* $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ *y* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *existe una única solución del sistema (2.44) satisfaciendo*

$$u \in W^{1,2}(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

Capítulo

3

L^p-regularidad maximal

En este capítulo introduciremos algunos espacios de Banach en los cuales habitarán los datos iniciales y la solución del sistema (2.2). Consideramos dos espacios de Hilbert V y H, y el operador $A : D(A) \subset V \to H$ lineal, cerrado y densamente definido en $D(A)$. En particular, el operador A generado por la terna $\{V, H, a(u,v)\}$ considerado en el capítulo 2 cumple estas condiciones.

3.1 Espacios de regularidad maximal. MR_p y Tr_p

Sea $T > 0$, denotamos por $MR_p\,(0,T;H,V)$ el espacio de regularidad maximal definido por

$$MR_p\,(0,T;H,V) = W^{1,p}\,(0,T;H) \cap L^p\,(0,T;V)$$

con la norma

$$\|u\|_{MR_p(0,T;H,V)} = \|u\|_{W^{1,p}(0,T;H)} + \|u\|_{L^p(0,T;V)}$$

Desde que los espacios $W^{1,p}\,(0,T;H)$ y $L^p\,(0,T;V)$ son espacios de Banach, se deduce que $\left(MR_p\,(0,T;H,V)\,, \|\ \ \|_{MR_p(0,T;H,V)}\right)$ también es un espacio de Banach.
Denotamos por $Tr_p\,(0,T;H,V)$ el espacio trazo definido por

$$Tr_p\,(0,T;H,V) = \{u(0)\ /\ u \in MR_p\,(0,T;H,V)\}$$

con la norma

$$\|u_0\|_{Tr_p(0,T;H,V)} = \text{ínf}\left\{\|u\|_{MR_p(0,T;H,V)}\ \ /\ u \in MR_p\,(0,T;H,V)\,, u(0) = u_0\right\}$$

Se verifica que $\left(Tr_p\left(0,T;H,V\right),\| \ \|_{Tr_p(0,T;H,V)}\right)$ también es un espacio de Banach. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} u'+Au=f & , \ \text{en} \ \ \Omega\times(0,T) \\ u(0)=0 & , \ \text{en} \ \ \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

Definición 3.1: *Decimos que el operador A tiene L^p-*regularidad maximal en $(0,T)$ *si para todo $f\in L^p\left(0,T;H\right)$ existe una única solución $u\in MR_p\left(0,T;H,V\right)$ del sistema (3.1).*

Observación 3.2: *La definición de $MR_p\left(0,T;H,V\right)$ y $Tr_p\left(0,T;H,V\right)$ es en general para espacios de Banach H,V arbitrarios y también reemplazando el intervalo $(0,T)$ por un intervalo arbitrario (a,b).*

Observación 3.3: *Si consideramos el operador A generado por $\{V,H,a(u,v)\}$, entonces por el Corolario del Teorema 2.11, A posee L^2-regularidad maximal en $MR_2(0,T;V',V)$. Además $Tr_2(V',V)=H$. En efecto, sea $u_0\in Tr_2(V',V)$ entonces existe $u\in MR_2(0,T;V',V)$ tal que*

$$u(0)=u_0$$

por definición $MR_2(0,T;V',V)=W^{1,2}(0,T;V')\cap L^2(0,T;V)$, entonces

$$u_0=u(0)\in V\subseteq H$$

i.e.,

$$Tr_2(V',V)\subseteq H \tag{3.2}$$

Veamos la otra inclusión, sea $u_0\in H$, tomemos $f\in L^2(0,T;V')$, por teorema 2.11 existe $u\in W^{1,2}(0,T;V')\cap L^2(0,T;V)=MR_2(0,T;V',V)$ satisfaciendo el sistema

$$\begin{cases} u'+Au=f & , \ en \ \ \Omega\times(0,T) \\ u(0)=u_0 & , \ en \ \ \Omega \end{cases}$$

por tanto $u_0=u(0)\in Tr_2(V',V)$, i.e.,

$$H\subseteq Tr_2(V',V) \tag{3.3}$$

finalmente de (3.2),(3.3), obtenemos $Tr_2(V',V)=H$, como se quería mostrar.

Los espacios $MR_p\left(0,T;H,V\right)$ y $Tr_p\left(0,T;H,V\right)$ también serán denotados por $MR_p\left(0,T\right)$, $MR_p\left(H,V\right),MR_p$ y $Tr_p\left(0,T\right),Tr_p\left(H,V\right),Tr_p$ respectivamente. Ahora mostraremos algunas propiedades de estos espacios.

Proposición 3.4. *(a) Para todo $T>0$, sea $t\in[0,T]$ entonces*

$$Tr_p=\{u(t)\ /\ u\in MR_p\left(0,T\right)\}$$

(b) $MR_p\,(0,T) \hookrightarrow C\,([0,T]\,;Tr_p)$

Demostración. (a). Sea $u \in MR_p\,(0,T)$, definimos la función

$$v(t) = \begin{cases} u(t) & 0 \leqslant t \leqslant T \\ u(2T-t) & T \leqslant t \leqslant 2T \end{cases}$$

Luego

$$\|v\|_{MR_p(0,2T)} \leqslant 2^{1/p}\,\|u\|_{MR_p(0,T)}$$

Por tanto $v \in MR_p(0,2T)$, entonces definimos la función $u_t \in MR_p(0,T)$ por

$$u_t(s) = v(t+s) \;\;,\;\; 0 \leqslant s, t \leqslant T$$

Tomemos $t \in [0,T]$, por la definición de Tr_p y de la función V se tiene

$$u(t) = v(t) = v(t+0) = u_t(0) \in Tr_p$$

Entonces

$$Tr_p \subseteq \{u(t)\ /\ u \in MR_p\,(0,T)\}$$

Análogamente se tiene la otra inclusión por tanto concluimos

$$Tr_p = \{u(t)\ /\ u \in MR_p\,(0,T)\}$$

(b). Sea $t \in [0,T]$, se cumple la desigualdad

$$\|u(t)\|_{Tr_p(0,T)} \leqslant \|u(t)\|_{Tr_p(0,2T)} \leqslant \|u\|_{MR_p(0,2T)} = 2\,\|u\|_{MR_p(0,T)}$$

Entonces

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{Tr_p(0,T)} \leqslant \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{Tr_p(0,2T)} \leqslant 2\,\|u\|_{MR_p(0,T)}$$

Por lo tanto

$$\|u\|_{C([0,T];Tr_p)} \leqslant 2\,\|u\|_{MR_p(0,T)} \tag{3.4}$$

Esto muestra la inmersión continua de $MR_p\,(0,T)$ en $C\,([0,T]\,;Tr_p)$. □

Teorema 3.5. *Supongamos que el operador A tiene L^p-regularidad maximal en $(0,T)$, entonces para todo $u_0 \in Tr_p$ existe una única solución $u \in MR_p(0,T)$ del sistema*

$$\begin{cases} u' + Au = 0 & , \;\text{en}\;\; \Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & , \;\text{en}\;\; \Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

Demostración. **Existencia**. Desde que $u_0 \in Tr_p$ entonces existe $v \in MR_p(0,T)$ tal que $v(0) = u_0$, luego $f = v' + Av \in L^p(0,T;H)$, además por hipótesis A tiene L^p-regularidad maximal en $(0,T)$, por definición existe una única solución $w \in MR_p(0,T)$ verificando

$$\begin{cases} w' + Aw = v' + Av & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ w(0) = 0 & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

Entonces

$$(v-w)' + A(v-w) = 0 \text{ en } \Omega \times (0,T)$$

Además

$$(v-w)(0) = v(0) - w(0) = u_0 - 0 = u_0 \text{ en } \Omega$$

Sea $u = v - w$, entonces u es solución del sistema (3.5).
Unicidad. Sean u_1, u_2 soluciones del sistema (3.5), si $u = u_1 - u_2$, entonces u verifica

$$\begin{cases} u' + Au = 0 & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ u(0) = 0 & , \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{3.6}$$

Es claro que la función identicamente nula también verifica (3.6), por unicidad de solución $u = 0$, i.e, $u_1 = u_2$. □

Teorema 3.6. *Supongamos que el operador A tiene L^p-regularidad maximal en $(0,T)$, entonces para todo $f \in L^p(0,T;H)$ y $u_0 \in Tr_p$ existe una única solución $u \in MR_p(0,T)$ del sistema*

$$\begin{cases} u' + Au = f & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & , \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

Demostración. **Existencia**. Sean $f \in L^p(0,T;H)$ y $u_0 \in Tr_p$, por hipótesis el operador A tiene L^p-regularidad maximal en $(0,T)$, entonces existe una única solución $u_1 \in MR_p(0,T)$ satisfaciendo

$$\begin{cases} u_1' + Au_1 = f & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ u_1(0) = 0 & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

Además por teorema 3.5, existe una única solución $u_2 \in MR_p(0,T)$ satisfaciendo

$$\begin{cases} u_2' + Au_2 = 0 & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ u_2(0) = u_0 & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

Sea $u = u_1 + u_2$, entonces en $\Omega \times (0,T)$ se tiene

$$\begin{aligned} u' + Au &= (u_1+u_2)' + A(u_1+u_2) = u_1' + u_2' + Au_1 + Au_2 \\ &= (u_1' + Au_1) + (u_2' + Au_2) = f + 0 = f \end{aligned}$$

y

$$u(0) = (u_1+u_2)(0) = u_1(0) + u_2(0) = 0 + u_0 = u_0$$

Por lo tanto existe $u \in MR_p(0,T)$ satisfaciendo (3.7).
Unicidad. Sean u_1, u_2 soluciones del sistema (3.7), si $u = u_1 - u_2$, entonces u verifica (3.6), la función identicamente nula también verifica (3.6), por unicidad de solución $u = 0$, i.e, $u_1 = u_2$. □

Ahora nos preguntamos si la propiedad de L^p-regularidad maximal independe de $T > 0$, es decir si el operador A tiene L^p-regularidad maximal en $(0,T)$, ¿tendrá L^p-regularidad maximal en $(0,T/2),(0,T/3),(0,T/100)$?, o en general en $(0,T')$ con $0 < T' < T$. Para responder a estas interrogantes, veamos previamente la siguiente proposición.

Proposición 3.7. *Supongamos que el operador A posee L^p-regularidad maximal en $(0,T)$, sea $T' \in (0,T)$, además sea $f \in L^p(0,T;H)$ con $f(t) = 0$ en $(0,T')$, si $u \in MR_p(0,T)$ solución del sistema (3.1) entonces $u = 0$ en $(0,T')$.*

Demostración. Definamos la función

$$g(t) = \begin{cases} f(t+T') & 0 \leqslant t \leqslant T - T' \\ 0 & T - T' \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^T |g(t)|^p\,dt &= \int_0^{T-T'} |g(t)|^p\,dt + \int_{T-T'}^T |g(t)|^p\,dt = \int_0^{T-T'} |f(t+T')|^p\,dt \\ &= \int_{T'}^T |f(t)|^p\,dt \leqslant \int_0^T |f(t)|^p\,dt < \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto $g \in L^p(0,T;H)$, por hipótesis A posee L^p-regularidad maximal en $(0,T)$, entonces existe una única solución $v \in MR_p(0,T)$ satisfaciendo

$$\begin{cases} v' + Av = g & , \quad \text{en } \ \Omega \times (0,T) \\ v(0) = 0 & , \quad \text{en } \ \Omega \end{cases}$$

Definamos la función

$$w(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant t \leqslant T' \\ v(t-T') & T' \leqslant t \leqslant T \end{cases}$$

Como $v \in MR_p(0,T)$, entonces $w \in MR_p(0,T)$, de la definición de w y f en $[0,T']$ tenemos

$$w'(t) + Aw(t) = 0 + A0 = 0 = f(t) \ \text{ en } \ [0,T']$$

Además en $[T',T]$ se tiene

$$w'(t) + Aw(t) = v'(t-T') + Av(t-T') = g(t-T') = f(t-T'+T') = f(t)$$

Entonces la función $w \in MR_p(0,T)$ cumple el sistema

$$\begin{cases} w' + Aw = f & , \text{ en } \ \Omega \times (0,T) \\ w(0) = 0 & , \text{ en } \ \Omega \end{cases}$$

Por tanto w es solución del sistema (3.1), por unicidad se tiene que $u = w$, luego por definición de w obtenemos $u = 0$ en $(0, T')$. □

Proposición 3.8 (Independencia de $T > 0$)**.** *Supongamos que el operador A tiene L^p-regularidad maximal en $(0,T)$, entonces también lo tiene en $(0,T')$ para todo $T' \in (0,T)$.*

Demostración. Sean $T' \in (0,T)$ y $f \in L^p(0,T';H)$, debemos demostrar que el sistema

$$\begin{cases} u' + Au = f & , \text{ en } \ \Omega \times (0,T') \\ u(0) = 0 & , \text{ en } \ \Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

posee una única solución $u \in MR_p(0,T')$. En efecto, definamos la función

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leqslant t \leqslant T' \\ 0 & T' < t \leqslant T \end{cases}$$

Es claro que $\widetilde{f} \in L^p(0,T;H)$, por hipótesis sobre el operador A existe una única solución $\widetilde{u} \in MR_p(0,T)$ del sistema

$$\begin{cases} v' + Av = \widetilde{f} & , \text{ en } \ \Omega \times (0,T) \\ v(0) = 0 & , \text{ en } \ \Omega \end{cases}$$

Sea $u = \widetilde{u}/_{[0,T']}$, entonces $u \in MR_p(0,T')$ es solución del sistema (3.8).
Ahora veamos que (3.8) posee solución única, sean u_1, u_2 solución de (3.8), sea $v = u_1 - u_2$, entonces v cumple el sistema

$$\begin{cases} v' + Av = 0 & , \text{ en } \ \Omega \times (0,T') \\ v(0) = 0 & , \text{ en } \ \Omega \end{cases}$$

Entonces por la proposición anterior

$$f(t) = 0 \text{ en } \ [0,T']$$

entonces $\widetilde{u} = 0$ en $(0,T')$, pero $u = \widetilde{u}/_{[0,T']}$, por tanto $u = 0$, i.e, $u_1 = u_2$, concluimos que el operador A posee L^p-regularidad maximal en $(0,T')$. □

Capítulo
4

Interpolación de espacios

En el capítulo 3 estudiamos espacios de regularidad maximal, en los cuales habitan las soluciones planteadas del problema parabólico semilineal. Como ya sabemos, un operador A, generado por la terna $\{V, H, a(u,v)\}$ define un dominio denotado por $D(A)$. El objetivo de este capítulo será mostrar que este operador restricto a este dominio $A : D(A) \to H$ también posee L^p-regularidad maximal. Para este fin, estudiamos algunos resultados de interpolación entre espacios de Banach.

Lema 4.1 (Interpolación de operadores lineales y continuos). *Sean X_1, X_2, Y_1, Y_2 espacios de Banach tal que*

$$Y_i \hookrightarrow X_i \quad , \quad i = 1, 2$$

Además sea $S \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ tal que $S_{|Y_1} \in \mathcal{L}(Y_1, Y_2)$, entonces

$$S_{|Tr_p(X_1,Y_1)} \in \mathcal{L}(Tr_p(X_1, Y_1), Tr_p(X_2, Y_2)) \quad , \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

y

$$\|S\|_{\mathcal{L}(Tr_p(X_1,Y_1),Tr_p(X_2,Y_2))} \leqslant \max\left\{\|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}, \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}\right\} \quad , \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

Mas aún si los operadores $S \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, $S_{|Y_1} \in \mathcal{L}(Y_1, Y_2)$ son invertibles entonces $S_{|Tr_p(X_1,Y_1)} \in \mathcal{L}(Tr_p(X_1, Y_1), Tr_p(X_2, Y_2))$ es invertible también.

Demostración. **Linealidad**. La linealidad de $S_{|Tr_p(X_1,Y_1)}$ se sigue desde que $S \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ y $S_{|Y_1} \in \mathcal{L}(Y_1, Y_2)$.

Continuidad. Sea $u_0 \in Tr_p(X_1, Y_1)$, debemos probar que existe $k > 0$ tal que

$$\|Su_0\|_{Tr_p(X_2,Y_2)} \leqslant k \|u_0\|_{Tr_p(X_1,Y_1)} . \tag{4.1}$$

Nótese que podemos suponer $u_0 \neq 0$, ya que 0 si cumple la desigualdad (4.1), luego

$$\|u_0\|_{Tr_p(X_1,Y_1)} > 0. \tag{4.2}$$

Por definición

$$\|u_0\|_{Tr_p(X_1,Y_1)} = \text{ínf}\left\{\|u\|_{MR_p(X_1,Y_1)} \;;\; u \in MR_p(X_1,Y_1), u(0) = u_0\right\} \tag{4.3}$$

entonces dado $\epsilon > 0$, de (4.2) se tiene que $\epsilon \|u_0\|_{Tr_p(X_1,Y_1)} > 0$. Luego de (4.3), existe $u \in MR_p(X_1,Y_1)$ con $u(0) = u_0$, tal que

$$\|u_0\|_{Tr_p(X_1,Y_1)} + \epsilon \|u_0\|_{Tr_p(X_1,Y_1)} \geqslant \|u_0\|_{MR_p(X_1,Y_1)}$$

i.e.,

$$\|u_0\|_{MR_p(X_1,Y_1)} \leqslant (1+\epsilon)\|u_0\|_{Tr_p(X_1,Y_1)} \tag{4.4}$$

Denotemos $v = Su$, veamos que $v \in MR_p(X_2,Y_2)$. En efecto

$$\begin{aligned}
\|v\|_{MR_p(X_2,Y_2)} &= \|v\|_{W^{1,p}(0,T;X_2)} + \|v\|_{L^p(0,T;Y_2)} \\
&= \|v\|_{L^p(0,T;X_2)} + \|v'\|_{L^p(0,T;X_2)} + \|v\|_{L^p(0,T;Y_2)} \\
&= \|Su\|_{L^p(0,T;X_2)} + \|Su'\|_{L^p(0,T;X_2)} + \|Su\|_{L^p(0,T;Y_2)} \\
&\leqslant \|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \|u\|_{L^p(0,T;X_1)} + \|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \|u'\|_{L^p(0,T;X_1)} + \\
&\quad + \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)} \|u\|_{L^p(0,T;Y_1)} \\
&= \|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \left(\|u\|_{L^p(0,T;X_1)} + \|u'\|_{L^p(0,T;X_1)}\right) + \\
&\quad + \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)} \|u\|_{L^p(0,T;Y_1)} \\
&= \|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)} \|u\|_{W^{1,p}(0,T;X_1)} + \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)} \|u\|_{L^p(0,T;Y_1)} \\
&\leqslant \text{máx}\left\{\|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}, \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}\right\} \|u\|_{MR_p(X_1,Y_1)}
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|v\|_{MR_p(X_2,Y_2)} \leqslant \text{máx}\left\{\|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}, \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}\right\} \|u\|_{MR_p(X_1,Y_1)} < \infty \tag{4.5}$$

Además $v(0) = Su(0) = Su_0 \in Tr_p(X_2,Y_2)$, entonces de (4.4) y (4.5) se tiene

$$\begin{aligned}
\|Su_0\|_{Tr_p(X_2,Y_2)} &\leqslant \|v\|_{MR_p(X_2,Y_2)} \\
&\leqslant \text{máx}\left\{\|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}, \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}\right\} \|u\|_{MR_p(X_1,Y_1)} \\
&\leqslant \text{máx}\left\{\|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}, \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}\right\} \left((1+\epsilon)\|u_0\|_{Tr_p(X_1,Y_1)}\right)
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, $\epsilon \to 0$ obtenemos

$$\|Su_0\|_{Tr_p(X_2,Y_2)} \leqslant \text{máx}\left\{\|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}, \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}\right\} \|u_0\|_{Tr_p(X_1,Y_1)} \tag{4.6}$$

Luego para verificar la desigualdad (4.1), tomamos

$$k = \text{máx}\left\{\|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}, \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}\right\} > 0$$

obtenemos

$$\|S\|_{\mathcal{L}(Tr_p(X_1,Y_1),Tr_p(X_2,Y_2))} \leqslant \text{máx}\left\{\|S\|_{\mathcal{L}(X_1,X_2)}, \|S\|_{\mathcal{L}(Y_1,Y_2)}\right\}$$

Ahora veamos la segunda parte de la demostración, para ello supongamos que los operadores $S \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ y $S_{|Y_1} \in \mathcal{L}(Y_1, Y_2)$ son invertibles, por demostrar que $S_{|Tr_p(X_1,Y_1)} \in \mathcal{L}(Tr_p(X_1, Y_1), Tr_p(X_2, Y_2))$ es invertible. En efecto

- **Inyectividad**. Sea $u_0 \in Tr_p(X_1, Y_1)$ tal que $Su_0 = 0$, entonces $u_0 = 0$ desde que $u_0 \in X_1$ y $S \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ es inyectiva.
- **Sobreyectividad**. Sea $v_0 \in Tr_p(X_2, Y_2)$, entonces $v_0 \in X_2 \cap Y_2$ y por hipótesis existe $u_0 \in X_1 \cap Y_1$ tal que
$$Su_0 = v_0$$
tomando la función constante $u \equiv u_0 \in MR_p(X_1, Y_1)$, $u(0) = u_0$, por lo tanto existe $u_0 \in Tr_p(X_1, Y_1)$ tal que $Su_0 = v_0$, i.e., $S_{|Tr_p(X_1,Y_1)}$ es sobreyectiva.

Así hemos demostrado que el operador $S : Tr_p(X_1, Y_1) \to Tr_p(X_2, Y_2)$ es una biyección. □

Observación 4.2: *El Lema 4.1, puede ser representado por el siguiente gráfico, donde si los operadores $S : X_1 \to X_2$ y $S_{|Y_1} : Y_1 \to Y_2$ son lineales y acotados, entonces S también es lineal y acotado en los espacios interpolados $Tr_p(X_1, Y_1)$ y $Tr_p(X_2, Y_2)$.*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "S"] & X_2 \\
Tr_p(X_1,Y_1) \arrow[u] \arrow[r, "S"] & Tr_p(X_2,Y_2) \arrow[u] \\
Y_1 \arrow[u] \arrow[r, "S"] & Y_2 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Lema 4.3. *Sean V, H espacios de Banach tal que $V \hookrightarrow H$, entonces se tiene*

$$Tr_p\left(L^p(0,T;H), L^p(0,T;V)\right) = L^p(0,T;Tr_p(H,V)) \quad , \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

Lema 4.4. *Un operador lineal $A : D(A) \to H$ es cerrado si y solo si el dominio $D(A)$ equipado con la norma del gráfico*

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_V + \|Au\|_H$$

es un espacio de Banach.

Demostración. Supongamos que A es cerrado, entonces por definición el conjunto

$$G(A) = \{(u, Au) \ ; \ u \in D(A)\} \subseteq V \times H$$

es un subconjunto cerrado del espacio de Banach $V \times H$, y por tanto también es un espacio de Banach. Ahora definamos el operador lineal $T : D(A) \to G(A)$ como

$$T(u) = (u, Au) \ , \ u \in D(A)$$

Además

- Si $T(u) = (0,0)$, entonces por definición de el operador T, $(u, Au) = (0,0)$, i.e, $u = 0$, por lo tanto T es inyectiva.
- Es claro que T es sobreyectiva, por la definición del conjunto $G(A)$.
- Sea $u \in D(A)$, entonces se tiene

  $$\|T(u)\|_{G(A)} = \|(u, Au)\|_{G(A)} = \|u\|_V + \|Au\|_H = \|u\|_{D(A)}$$

  por tanto T es una biyección isométrica y desde que $G(A)$ es un espacio de Banach, $D(A)$ también es una espacio de Banach.

Ahora supongamos que $D(A)$ con la norma del gráfico es un espacio de Banach, análogamente se muestra la biyección isométrica con el espacio $G(A) \subseteq V \times H$, en particular $G(A)$ es una subconjunto cerrado del espacio $V \times H$, i.e., el operador lineal A es cerrado. □

Ahora definamos el operador $A_1 : D(A_1) \to D(A)$ donde

$$D(A_1) = \{u \in D(A) \ ; \ A(u) \in D(A)\} \ , \ A_1(u) = A(u) \tag{4.7}$$

Primeramente veamos que $D(A_1)$ es un subespacio lineal de $D(A)$. En efecto, sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_1, u_2 \in D(A_1)$, por definición de este conjunto se tiene que

$$u_1, u_2 \in D(A) \ \text{ y } \ A(u_1), A(u_2) \in D(A)$$

entonces por ser $D(A)$ un espacio de Banach, obtenemos

$$u_1 + \lambda u_2 \in D(A) \ \text{ y } \ A(u_1) + \lambda A(u_2) \in D(A)$$

i.e., $u_1 + \lambda u_2 \in D(A)$, por lo tanto $D(A_1)$ es un subespacio lineal de $D(A)$.
Ahora veamos que el operador A_1 es al igual que el operador A, lineal y cerrado. En efecto

- **Linealidad**. Sean $u_1, u_2 \in D(A_1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $u_1 + \lambda u_2 \in D(A_1)$ y

$$A_1(u_1 + \lambda u_2) = A(u_1 + \lambda u_2) = A(u_1) + \lambda A(u_2) = A_1(u_1) + \lambda A_1(u_2)$$

- **Cerradura**. Sea $(u_n) \subseteq D(A_1)$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{y} \quad A_1 u_n \to v$$

  Luego por definición de $D(A_1)$, $(u_n) \subseteq D(A)$ y $(Au_n) \subseteq D(A)$, desde que el operador A es cerrado, se obtiene

$$u \in D(A) \quad \text{y} \quad A(u) = v \in D(A)$$

  por lo tanto el operador A_1 es también cerrado.

Si suponemos que $A : D(A) \to H$ posee L^p- regularidad maximal y restringimos este operador al conjunto $D(A_1)$, ¿será cierto que el operador A_1 hereda la L^p- regularidad maximal de A?, ¿bajo qué condiciones se cumplirá esto?, la respuesta la encontramos en el lema siguiente.

Lema 4.5. *Sea $A : D(A) \to H$ un operador lineal y cerrado en H y A_1 el operador definido por (4.7), además supongamos que $A + \delta I$ es invertible y A posee L^p- regularidad maximal. Entonces A_1 también tiene L^p- regularidad maximal.*

Demostración. Por hipótesis el operador $A + \delta I : D(A) \to H$ es biyectivo, veamos que el operador $A + \delta I_{|D(A_1)} : D(A_1) \to D(A)$ es también biyectivo. En efecto
Inyectividad. Sea $u \in D(A_1)$ tal que $(A + \delta I)\, u = 0$, como $D(A_1) \subseteq D(A)$ entonces $u \in D(A)$, por lo tanto $u = 0$.
Sobreyectividad. Sea $v \in D(A) \subseteq H$, por hipótesis existe $u \in D(A)$ tal que $(A + \delta I)\, u = v$. Entonces tenemos

$$Au = v - \delta u \ \in D(A)$$

por lo tanto de (4.7), $u \in D(A_1)$, de aqui se sigue la sobreyectividad. Por lo tanto $A + \delta I_{|D(A_1)} : D(A_1) \to D(A)$ es biyectivo.
Además por hipótesis existe $k > 0$ tal que

$$\|(A + \delta I)\, u\|_H \leqslant k\, \|u\|_{D(A)} \ , \ \forall\, u \in D(A) \tag{4.8}$$

Ahora para demostrar que A_1 posee L^p- regularidad maximal, debemos mostrar que para todo $f \in L^p(0, T; D(A))$ el sistema

$$\begin{cases} u' + A_1 u = f & , \quad \text{en} \ \ \Omega \times (0, T) \\ u(0) = 0 & , \quad \text{en} \ \ \Omega \end{cases} \tag{4.9}$$

posee una única solución $u \in MR_p(0,T;D(A),D(A_1))$.
Para este fin , sea $f \in L^p(0,T;D(A))$ entonces

$$f(t) \in D(A) \quad , \quad \text{para todo } t \in (0,T)$$

luego de (4.8) se tiene

$$\|(A+\delta I)\,f\|^p_{L^p(0,T;H)} = \int_0^T |(A+\delta I)\,(f(t))|^p_H\,dt \leqslant k^p\,\|f\|^p_{L^p(0,T;D(A))}$$

i.e.,

$$\|(A+\delta I)\,f\|_{L^p(0,T;H)} \leqslant k\,\|f\|_{L^p(0,T;D(A))} < \infty$$

luego $(A+\delta I)f \in L^p(0,T;H)$, entonces por A poseer L^p- regularidad maximal existe una única solución $u \in MR_p(H,D(A))$ satisfaciendo el sistema

$$\begin{cases} u' + Au = (A+\delta I)f & , \quad \text{en } \ \Omega\times(0,T) \\ u(0) = 0 & , \quad \text{en } \ \Omega \end{cases}$$

Multiplicando por $(A+\delta I)^{-1}$ se tiene

$$(A+\delta I)^{-1}\,u' + (A+\delta I)^{-1}\,Au = f \tag{4.10}$$

Por otro lado de la continuidad de $(A+\delta I)^{-1}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left((A+\delta I)^{-1}\,u(t)\right)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(A+\delta I)^{-1}\,(u(t+h)) - (A+\delta I)^{-1}\,(u(t))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(A+\delta I)^{-1}\left(\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right) \\
&= (A+\delta I)^{-1}\left(\lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right) \\
&= (A+\delta I)^{-1}\,u'(t)
\end{aligned}$$

Luego

$$\left((A+\delta I)^{-1}\,u(t)\right)' = (A+\delta I)^{-1}\,u'(t) \quad , \quad \text{para todo } t \in (0,T)$$

i.e.,

$$\left((A+\delta I)^{-1}\,u\right)' = (A+\delta I)^{-1}\,u' \tag{4.11}$$

Ahora veamos que los operadores A y $(A+\delta I)^{-1}$ conmutan. En efecto

$$I = (A+\delta I)^{-1}\,(A+\delta I) = (A+\delta I)^{-1}\,A + (A+\delta I)^{-1}\,\delta I$$

i.e.,

$$(A+\delta I)^{-1}\,A = I - \delta\,(A+\delta I)^{-1}$$

Además

$$I = (A + \delta I)(A + \delta I)^{-1} = A(A + \delta I)^{-1} + \delta I (A + \delta I)^{-1}$$

i.e.,

$$A(A + \delta I)^{-1} = I - \delta (A + \delta I)^{-1}$$

Por lo tanto

$$(A + \delta I)^{-1} A = A (A + \delta I)^{-1} \tag{4.12}$$

Ahora sea

$$v = (A + \delta I)^{-1} u \tag{4.13}$$

entonces $v \in MR_p(0,T;D(A),D(A_1))$. En efecto de (4.11) se tiene

$$\begin{aligned}
\|v\|_{MR_p(D(A),D(A_1))} &= \|v\|_{W^{1,p}(0,T;D(A))} + \|v\|_{L^p(0,T;D(A_1))} \\
&= \|v\|_{L^p(0,T;D(A))} + \|v'\|_{L^p(0,T;D(A))} + \|v\|_{L^p(0,T;D(A_1))} \\
&= \left\|(A + \delta I)^{-1} u\right\|_{L^p(0,T;D(A))} + \left\|(A + \delta I)^{-1} u'\right\|_{L^p(0,T;D(A))} + \\
&\quad + \left\|(A + \delta I)^{-1} u\right\|_{L^p(0,T;D(A_1))} \\
&\leqslant \left\|(A + \delta I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(D(A),H)} \|u\|_{L^p(0,T;D(A))} + \\
&\quad + \left\|(A + \delta I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(D(A),H)} \|u'\|_{L^p(0,T;D(A))} \\
&\quad + \left\|(A + \delta I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(D(A_1),D(A))} \|u\|_{L^p(0,T;D(A_1))} \\
&= \left\|(A + \delta I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(D(A),H)} \|u\|_{W^{1,p}(0,T;D(A))} + \\
&\quad + \left\|(A + \delta I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(D(A_1),D(A))} \|u\|_{L^p(0,T;D(A_1))} \\
&\leqslant \left\|(A + \delta I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(D(A),H)} \|u\|_{MR_p(D(A),D(A_1))}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|v\|_{MR_p(0,T,D(A),D(A_1))} \leqslant \left\|(A + \delta I)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(D(A),H)} \|u\|_{MR_p(D(A),D(A_1))} < \infty$$

Por lo tanto $v \in MR_p(0,T,D(A),D(A_1))$, como se queria mostrar. Además de (4.10), (4.11) y (4.12) se tiene

$$f = (A + \delta I)^{-1} u' + (A + \delta I)^{-1} Au = \left((A + \delta I)^{-1} u\right) + A (A + \delta I)^{-1} u = v' + Av$$

i.e.,

$$v' + Av = f \tag{4.14}$$

De (4.13), se tiene

$$v(0) = v = (A + \delta I)^{-1} u(0) = v = (A + \delta I)^{-1} (0) = 0$$

Entonces $v \in MR_p(0,T,D(A),D(A_1))$ satisface el sistema

$$\begin{cases} v' + Av = f & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ v(0) = 0 & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

Por lo tanto se tiene la existencia de solución $v \in MR_p(0,T,D(A),D(A_1))$ del sistema (4.9), la unicidad de solución se sigue de la L^p- regularidad maximal del operador A.
Concluimos como queriamos demostrar que el operador $A_1 : D(A_1) \to D(A)$ tiene L^p- regularidad maximal. $\square$

Observación 4.6: *Sea $A : D(A) \to H$ operador lineal y cerrado, en (4.7) se definió el conjunto $D(A_1)$, con lo cual obtenemos el operador lineal y cerrado $A_1 : D(A_1) \to D(A)$, análogamente podemos definir el conjunto*

$$D(A_2) = \{u \in D(A_1) \; ; \; Au \in D(A_1)\} \quad , \quad A_2 u = A_1 u$$

Así, el operador $A_2 : D(A_2) \to D(A_1)$ también es lineal y cerrado. Por inducción para $k \geqslant 2$, podemos definir los operadores lineales y cerrados

$$A_k : D(A_k) \to D(A_{k-1})$$

donde

$$D(A_k) = \{u \in D(A_{k-1}) \; ; \; Au \in D(A_{k-1})\} \quad , \quad A_k u = Au$$

Ahora consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} D(A) & \xrightarrow{A} & H \\ \uparrow & & \uparrow \\ D(A_1) & \xrightarrow{A_1} & D(A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ D(A_2) & \xrightarrow{A_2} & D(A_1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ D(A_k) & \xrightarrow{A_k} & D(A_{k-1}) \end{array}$$

Si suponemos que el operador A tiene L^p- regularidad maximal y $A+\delta I$ es invertible, entonces por el lema 4.5 cada operador A_k del gráfico también posee L^p- regularidad maximal.

Vemos que las restricciones A_k del operador lineal y cerrado $A : D(A) \to H$ heredan la propiedad de L^p- regularidad maximal bajo ciertas condiciones según visto en el Lema 4.5, ahora veamos bajo que condiciones el operador $A_{|Tr_p(H,D(A))}$ poseerá L^p- regularidad maximal.

Teorema 4.7. *Sea $A : D(A) \to H$ operador lineal y cerrado en H, definimos*

$$D(A_{Tr_p}) = Tr_p(D(A), D(A_1)) \quad , \quad A_{Tr_p}u = Au$$

Además supongamos que A posee L^p- regularidad maximal y $A + \delta I$ es invertible, entonces A_{Tr_p} también posee L^p- regularidad maximal.

Demostración. Definamos el conjunto

$$MR_p^0(H, D(A)) = \{u \in MR_p(H, D(A)) \; ; \; u(0) = 0\}$$

$MR_p^0(H, D(A)) \neq \phi$, ya que la función identicamente nula pertenece a este conjunto. Además definimos $S : MR_p^0(H, D(A)) \to L^p(0, T; H)$ como

$$S(u) = Su = u' + Au \tag{4.15}$$

Ahora veamos que el operador S esta bien definido.

$$\begin{aligned}
&\|Su\|_{L^p(0,T;H)} = \\
&= \|u' + Au + \delta u - \delta u\|_{L^p(0,T;H)} = \|u' + (A + \delta I)u - \delta u\|_{L^p(0,T;H)} \\
&\leqslant \|u'\|_{L^p(0,T;H)} + \|(A + \delta I)u\|_{L^p(0,T;H)} + |\delta| \, \|u\|_{L^p(0,T;H)} \\
&\leqslant (1 + |\delta|) \left(\|u'\|_{L^p(0,T;H)} + \|u\|_{L^p(0,T;H)}\right) + \|A + \delta I\|_{\mathcal{L}(H,D(A))} \|u\|_{L^p(0,T;D(A))} \\
&\leqslant \left(1 + |\delta| + \|A + \delta I\|_{\mathcal{L}(H,D(A))}\right) \left(\|u'\|_{L^p(0,T;H)} + \|u\|_{L^p(0,T;H)} + \|u\|_{L^p(0,T;D(A))}\right) \\
&= \left(1 + |\delta| + \|A + \delta I\|_{\mathcal{L}(H,D(A))}\right) \left(\|u\|_{W^{1,p}(0,T;H)} + \|u\|_{L^p(0,T;D(A))}\right) \\
&\qquad = \qquad \left(1 + |\delta| + \|A + \delta I\|_{\mathcal{L}(H,D(A))}\right) \|u\|_{MR_p(0,T;H,D(A))}
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|Su\|_{L^p(0,T;H)} \leqslant \left(1 + |\delta| + \|A + \delta I\|_{\mathcal{L}(H,D(A))}\right) \|u\|_{MR_p(0,T;H,D(A))} < \infty$$

Esto muestra que S esta bien definido, además es lineal y continuo. Por hipótesis A tiene L^p- regularidad maximal entonces S es invertible. Ahora restringimos el operador S, $S_{|MR_p(D(A),D(A_1))} : MR_p(D(A), D(A_1)) \to L^p(0, T; D(A))$ y desde que por hipótesis A posee L^p- regularidad maximal y $A + \delta I$ es invertible, por lema 4.5 el operador $A_1 : D(A_1) \to D(A)$ posee L^p-regularidad maximal, por lo tanto $S_{|MR_p(D(A),D(A_1))}$ también es invertible.
Además por lema 4.3, se tiene las siguientes igualdades

$$Tr_p \left(L^p(0, T; D(A)), L^p(0, T; D(A_1))\right) = L^p \left(0, T; Tr_p(D(A), D(A_1))\right)$$

y

$$Tr_p\left(W^{1,p}(0,T;D(A)), W^{1,p}(0,T;D(A))\right) = W^{1,p}\left(0,T;Tr_p(H,D(A))\right)$$

Entonces obtenemos

$$Tr_p\left(MR_p(H,D(A)), MR_p(D(A),D(A_1))\right) = MR_p\left(Tr_p(H,D(A)), Tr_p(D(A),D(A_1))\right) \tag{4.16}$$

Considerando el diagrama, el primer y tercer operador por lo visto anteriormente son lineales continuos e invertibles

$$\begin{tikzcd}
MR_p^0(H,D(A)) \arrow[r, "S"] & L^p(0,T;H) \\
Tr_p\left(MR_p(H,D(A)), MR_p(D(A),D(A_1))\right) \arrow[u] \arrow[r, "S"] & Tr_p\left(L^p(0,T;H), L^p(0,T;D(A))\right) \arrow[u] \\
MR_p^0(D(A),D(A_1)) \arrow[u] \arrow[r, "S"] & L^p(0,T;D(A)) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

además se tiene las inmersiones

$$MR_p^0(D(A),D(A_1)) \hookrightarrow MR_p^0(H,D(A))$$

y desde que $D(A) \hookrightarrow H$

$$L^p(0,T;D(A)) \hookrightarrow L^p(0,T;H)$$

Luego por el lema 4.1, el operador intermedio es tambien lineal continuo e invertible, i.e., de (4.16) el operador

$$S : MR_p\left(0,T;Tr_p(H,D(A)), Tr_p(D(A),D(A_1))\right) \to L^p\left(0,T;Tr_p(H,D(A))\right)$$

es invertible, por lo tanto para todo $f \in L^p\left(0,T;Tr_p(H,D(A))\right)$ existe un único $u \in MR_p\left(0,T;Tr_p(H,D\right.$ tal que

$$Su = f$$

i.e., existe un único u satisfaciendo el sistema

$$\begin{cases} u' + Au = f & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ u(0) = 0 & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

Por lo tanto concluimos que el operador A_{Tr_p} posee L^p- regularidad maximal. $\square$

Observación 4.8 (Sobre el operador A_{Tr_p})**:** *¿De quién se trata realmente el operador A_{Tr_p}?,* *veamos que* A_{Tr_p} *es la restricción del operador* A *a el espacio* $Tr_p(H, D(A))$*. Sea*

$$E = \{u \in D(A)\ ;\ Au \in Tr_p(H, D(A))\}$$

Por probar que $Tr_p(D(A), D(A_1)) = E$*. En efecto, sea* $u_0 \in Tr_p(D(A), D(A_1))$*, entonces existe* $u \in MR_p(D(A), D(A_1))$ *tal que* $u(0) = u_0 \in D(A)$*.*
Definimos $v = (A + \delta I)u$ *entonces* $v \in MR_p(H, D(A))$*, además*

$$v(0) = (A + \delta I)u(0) = (A + \delta I)u_0 \in Tr_p(H, D(A))$$

y

$$Au_0 = (A + \delta I - \delta I)u_0 = (A + \delta I)u_0 - \delta u_0 \in Tr_p(H, D(A))$$

Así tenemos que $u_0 \in D(A)$ *y* $Au_0 \in Tr_p(H, D(A))$*, por lo tanto* $u_0 \in E$*, i.e.,*

$$Tr_p(D(A), D(A_1)) \subseteq E \tag{4.17}$$

Ahora sea $u_0 \in E$*, entonces* $u_0 \in D(A)$ *y* $Au_0 \in Tr_p(H, D(A))$*, de esta última pertenencia se tiene que existe* $u \in MR_p(H, D(A))$ *tal que* $u(0) = Au_0$*.*
Sea $v = \delta u_0 + u \in MR_p(H, D(A))$*, entonces* $(A + \delta I)^{-1}v \in MR_p(D(A), D(A_1))$ *y*

$$\begin{aligned} u_0 &= (A + \delta I)^{-1}(A + \delta I)u_0 &&= (A + \delta I)^{-1}(Au_0 + \delta u_0) \\ &= (A + \delta I)^{-1}(u(0) + \delta u_0) &&= (A + \delta I)^{-1}v(0)\ \in Tr_p(D(A), D(A_1)) \end{aligned}$$

Así $u_0 \in Tr_p(D(A), D(A_1))$*, entonces*

$$E \subseteq Tr_p(D(A), D(A_1)) \tag{4.18}$$

Finalmente de (4.17) y (4.18), $Tr_p(D(A), D(A_1)) = E$*, por lo tanto*

$$Tr_p(D(A), D(A_1)) = \{u \in D(A)\ ;\ Au \in Tr_p(H, D(A))\}$$

Observación 4.9: *Si el operador* A *posee* L^p*- regularidad maximal y* $A + \delta I$ *es invertible entonces por Teorema 4.7 cada operador del siguiente diagrama posee* L^p*- regularidad maximal,* *con* $k \geqslant 2$.

$$\begin{tikzcd}
D(A) \arrow[r, "A"] & H \\
Tr_p(D(A), D(A_1)) \arrow[u] \arrow[r, "A"] & Tr_p(H, D(A)) \arrow[u] \\
D(A_1) \arrow[u] \arrow[r, "A"] & D(A) \arrow[u] \\
D(A_k) \arrow[u] \arrow[r, "A"] & D(A_{k-1}) \arrow[u] \\
Tr_p(D(A_k), D(A_{k+1})) \arrow[u] \arrow[r, "A"] & Tr_p(D(A_{k-1}), D(A_k)) \arrow[u] \\
D(A_{k+1}) \arrow[u] \arrow[r, "A"] & D(A_k) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Si consideramos una forma bilineal continua y elíptica $a : V \times V \to \mathbb{R}$, ya sabemos que podemos asociar a esta el operador $A : V \to V'$, que gracias al corolario 2.14 posee L^2-regularidad maximal, ahora si consideramos el operador $A : D(A) \to H$, ¿poseerá este último operador L^2- regularidad maximal?. Para responder esta interrogante veamos el siguiente teorema.

Teorema 4.10. *Sea* $a : V \times V \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal continua y elíptica, sea* $A : D(A) \to H$ *el operador generado por la terna* $\{V, H, a(u, v)\}$*, entonces* A *posee* L^2*- regularidad maximal. En particular para todo* $f \in L^2(0, T; H)$*,* $u_0 \in V$ *existe una única solución* $u \in MR_p(0, T; H, D(A))$ *satisfaciendo*

$$\begin{cases} u' + Au = f & , \quad \text{en} \;\; \Omega \times (0, T) \\ u(0) = u_0 & , \quad \text{en} \;\; \Omega \end{cases}$$

Además se cumple la igualdad, $Tr_2(H, D(A)) = V$.

Demostración. Por el corolario 2.14, el operador $A : V \to V'$ asociado a la forma bilineal $a(u, v)$ posee L^2- regularidad maximal, además de la elipticidad de la forma bilineal y la observación 2.13, $a_1 : V \times V \to \mathbb{R}$ definido por

$$a_1(u, v) = a(u, v) + \delta(u, v) \quad , \quad u, v \, \in V$$

es una forma bilineal continua y coerciva cuyo operador asociado es $A + \delta I$, luego por el teorema 2.2 este operador es invertible.

Además por el teorema 4.7, el operador A restricto a $Tr_2(V', V)$ posee L^2- regularidad maximal y por la observación 3.3, $Tr_2(V', V) = H$.
Concluimos que el operador $A : D(A) \to H$ posee L^2- regularidad maximal ya que $A : V \to V'$ restricto a H es $A : D(A) \to H$, además $Tr_2(H, D(A)) = V$. $\square$

Ejemplo 4.11: *Nuevamente tomemos la ecuación del calor con condición de Dirichlet*

$$\begin{cases} u' - \Delta u = f & , \quad en \ (0,T) \times \Omega \\ u = 0 & , \quad en \ \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & , \quad en \ \Omega \end{cases}$$

La primera condición inicial $u = 0$ en $\partial\Omega$ nos sugiere tomar el espacio de Hilbert $V = H_0^1(\Omega)$ que por la desigualdad de Poincairé esta inmerso de manera continua en $H = L^2(\Omega)$. Aún nos falta saber de quien se trata $a(u, v)$ la forma bilineal, continua y coerciva adecuada para resolver el sistema (2.44). Para ello sea $v \in H_0^1(\Omega)$ haciendo el producto interno en $L^2(\Omega)$ obtenemos

$$(u' - \Delta u, v) = (f, v)$$

i.e.,

$$(u', v) + (-\Delta u, v) = (f, v)$$

Ahora supongmos que el sistema (2.44) se escribe en forma abstracta como

$$u' + Au = f$$

donde el operador A es generado por la terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u, v)\}$, entonces por Green obtenemos

$$a(u, v) = (Au, v)_{L^2(\Omega)} = (-\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega -\Delta uv = \int_\Omega \nabla u \nabla v \ , \ \forall \ u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Entonces la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ es definida por

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \quad , \quad \forall \ u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Todo esto fue hecho también en el ejemplo 2.15. *Entonces el operador $A = -\Delta$ es generado por la terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u, v)\}$. Además se verifica que para todo $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ y $u_0 \in L^2(\Omega)$ existe una única solución del sistema (2.44) satisfaciendo*

$$u \in W^{1,2}(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

Ahora con los resultados de este capítulo veamos que se puede tener aún mas regularidad.

Definamos el conjunto

$$D(A) = \Big\{ u \in H_0^1(\Omega)\ ;\ \Delta u \in L^2(\Omega) \Big\} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

Además por ser la forma bilineal coerciva, entonces es eliptica. Por lo tanto por teorema (4.10) para todo $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ *y* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *existe una única solución* u *de la ecuación del calor satisfaciendo*

$$u \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

De esta regularidad se sigue también que

$$u \in C([0,T]\,;H_0^1(\Omega)).$$

Capítulo

5

Ecuación Parabólica Abstracta Semilineal

En los capítulos anteriores estudiamos una ecuación parabólica abstracta lineal, probando existencia, unicidad dependencia continua sobre datos iniciales. Además introducimos los espacios de Banach $MR_p(0,T;H,V)$ y $Tr_p(0,T;H,V)$ en los cuales habitan las soluciones y datos iniciales, respectivamente. En este capítulo generalizamos estos resultados a una ecuaci—n semilineal. Análogo al capítulo anterior, consideramos los espacios de Hilbery $(V,((,)),\| \|), (H,(,),| \ |)$ con la siguiente condición $V \hookrightarrow H$, tales que V es denso en H con inmersión continua. Consideramos las funciones

$$A : Tr_p(H,V) \to \mathcal{L}(V,H) \qquad \text{y} \qquad F : Tr_p(H,V) \to H.$$

Consideremos la ecuación parabólica semilineal

$$\begin{cases} u' + A(u)u + F(u) = 0 & , \quad \mathbb{R}_0^+ \times \Omega \\ u(0) = u_0 & , \quad \text{en } \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

con $u_0 \in Tr_p(H,V)$. Estudiaremos bajo qué condiciones el problema parabólico semilineal (5.1) posee solución, si existiese tal solución ¿será global o local?, ¿cómo se puede usar el problema lineal resuelto en el capítulo anterior?. Veremos que el problema de existencia de solución del sistema semilineal (5.1) se reducirá a encontrar un punto fijo de cierta función, tal punto fijo será la solución de (5.1). Iniciamos enunciando el Teorema del punto fijo de Banach.

Teorema 5.1 (Teorema del Punto Fijo de Banach)**.** *Sea* $(X,\| \ \|)$ *espacio de Banach y* f :

$X \to X$ *una función contractiva, es decir existe* $0 < c < 1$ *tal que*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_X \leqslant c\,\|x_1 - x_2\|_X \quad \forall\, x_1, x_2 \in X$$

Entonces existe un único $x \in X$ *tal que* $f(x) = x$.

5.1 Aplicación del Teorema del Punto Fijo de Banach: existencia local de una solución

Supongamos que las funciones A y F son continuas y localmente lipschitzianas, además que $A(u_0)$ posee L^p- regularidad maximal. Entonces el sistema (5.1) posee una única solución local en $MR_p(H, V)$. En efecto, sea $T > 0$, consideremos el conjunto

$$\widetilde{M} = \{u \in MR_p(0, T; H, V)\ ;\ u(0) = u_0\}$$

Notamos que $\widetilde{M} \neq \phi$, ya que $u_0 \in \widetilde{M}$. Sea la función $R : \widetilde{M} \to L^p(0, T; H)$ definido por

$$Ru = R(u) = (A(u_0) - A(u))\,u - F(u)$$

Veamos la buena definición de la función R. Sea $u \in MR_p(0, T; H, V)$, entonces

- $A(u_0)u \in L^p(0, T; H)$. En efecto por hipótesis $A(u_0) : V \to H$ es lineal y continuo, i.e., existe $k_{u_0} > 0$ tal que
$$|A(u_0)v| \leqslant k_{u_0}\,\|v\|\ ,\ \forall\, v \in V \tag{5.2}$$
Como $u \in \widetilde{M}$, entonces $u \in L^p(0, T; V) \hookrightarrow L^p(0, T; H)$, por lo tanto de (5.2) se tiene
$$\|A(u_0)u\|^p_{L^p(0,T;H)} = \int_0^T |A(u_0)u(t)|^p\,dt \leqslant (k_{u_0})^p \int_0^T \|u(t)\|^p\,dt < \infty$$
Entonces se tiene que $A(u_0)u \in L^p(0, T; H)$.

- $A(u)u \in L^p(0, T; H)$. En efecto, sea $t \in [0, T]$, por hipótesis la función $A(u(t)) : V \to H$ es lineal y continuo, i.e., existe $k_{u(t)} > 0$ tal que
$$|A(u(t))v| \leqslant k_{u(t)}\,\|v\|\ \ ,\ \ \forall\, v \in V$$
Entonces
$$\|A(u(t))\|_{\mathcal{L}(V,H)} \leqslant k_{u(t)}$$
Por el Teorema de Acotación Uniforme, existe $k_2 > 0$ tal que
$$\|A(u(t))\|_{\mathcal{L}(V,H)} \leqslant k_2\ \ ,\ \ \forall\, t \in [0, T]$$

Por lo tanto se tiene

$$|A(u(t))v| \leqslant k_2 \|v\| \quad , \quad \forall\, v \in V$$

Finalmente se tiene

$$\|A(u)u\|^p_{L^p(0,T;H)} = \int_0^T |A(u(t))u(t)|^p \, dt \leqslant (k_2)^p \int_0^T \|u(t)\|^p \, dt < \infty$$

Por tanto se tiene que $A(u)u \in L^p(0,T;H)$.

- $F(u) \in L^p(0,T;H)$. En efecto, desde que $u \in MR_p(0,T;H,V)$, por definición de este espacio se tiene

$$u \in L^p(0,T;V) \quad , \quad u' \in L^p(0,T;H)$$

por lo tanto

$$u \in C([0,T]\,;H)$$

i.e., existe $k_3 > 0$ tal que

$$|F(u(t))| \leqslant k_3 \; , \; \forall\, t \in [0,T]$$

Entonces

$$|F(u)|^p_{L^p(0,T;H)} = \int_0^T |F(u(t))|^p \, dt \leqslant (k_3)^p \int_0^T 1dt = T(k_3)^p$$

Luego se tiene que $F(u) \in L^p(0,T;H)$.

De esta manera hemos mostrado que la función R esta bien definida. Por otro lado, por hipótesis $A(u_0)$ posee L^p- regularidad maximal, entonces por el teorema 3.6, para todo $f \in L^p(0,T;H)$ existe una única solución $u \in MR_p$ del sistema

$$\begin{cases} u' + A(u_0)u = f & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & , \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{5.3}$$

Entonces la función $S : L^p(0,T;H) \to \widetilde{M}$ dada por

$$Sf = S(f) = u$$

esta bien definida, donde u es solución del sistema (5.3).
Análogamente, por hipótesis $A(u_0)$ posee L^p-regularidad maximal, sea la función $S_0 : L^p(0,T;H) \to MR_p(0,T;H,V)$ definido por

$$S_0 f = S_0(f) = u$$

donde u es solución del sistema

$$\begin{cases} u' + A(u_0)u = f & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ u(0) = 0 & , \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{5.4}$$

Es claro que la función S_0 es lineal, veamos que también es continuo. En efecto sea $f \in L^p(0,T;H)$, por la dependencia continua de la solución u del sistema (5.4) existe $c_s > 0$ tal que

$$\|S_0 f\|_{MR_p(0,T)} = \|u\|_{MR_p(0,T)} \leqslant c_s(\|f\|_{L^p(0,T;H)} + \|0\|_{Tr_p})$$

De esta desigualdad se sigue la continuidad

$$\|S_0\|_{\mathcal{L}(L^p(0,T;H),MR_p(0,T))} \leqslant c_s \tag{5.5}$$

Lema 5.2. *La función $u \in MR_p(0,T;H,V)$ es solución del sistema semilineal (5.1) si y solo si $u \in \widetilde{M}$ y $SRu = u$, i.e., el problema de existencia de solución del sistema (5.1) se reduce a demostrar la existencia de un punto fijo de la función SR.*

Demostración. **Necesidad**. Supongamos que $u \in MR_p(0,T;H,V)$ es solución del sistema semilineal (5.1), entonces u verifica $u(0) = u_0$ y

$$u' + A(u)u + F(u) = 0 \tag{5.6}$$

Además

$$SRu = S(A(u_0)u - A(u)u - F(u)) \tag{5.7}$$

De (5.3), tomando $f = Ru = A(u_0)u - A(u)u - F(u)$, existe una única solución SRu del sistema

$$\begin{cases} v' + A(u_0)v = A(u_0)u - A(u)u - F(u) & , \quad \text{en } \Omega \times (0,T) \\ v(0) = u_0 & , \quad \text{en } \Omega \end{cases} \tag{5.8}$$

De (5.6) tenemos

$$u' + A(u)u + F(u) + A(u_0)u = A(u_0)u$$

i.e.,

$$u' + A(u_0)u = A(u_0)u - A(u)u - F(u)$$

Entonces u es solución del sistema (5.8), por unicidad de solución se tiene

$$SRu = S(A(u_0)u - A(u)u - F(u)) = u$$

Por lo tanto $u \in \widetilde{M}$ y $SRu = u$.
Suficiencia. Ahora supongamos que $u \in \widetilde{M}$ y $SRu = u$, entonces

$$u = SRu = S(A(u_0)u - A(u)u - F(u))$$

Por la definición de S, u es solución del sistema (5.8), entonces

$$u' + A(u_0)u = A(u_0)u - A(u)u - F(u)$$

i.e.,

$$u' + A(u)u + F(u) = 0$$

Además $u(0) = u_0$, por lo tanto u es solución del sistema (5.1). $\square$

La siguiente parte de la demostración será constructiva, definiremos un subconjunto cerrado de $\widetilde{M}$, el cual por ser cerrado será un espacio de Banach y verificaremos que la función SR restricta a este subconjunto es una contracción, finalmente por el Teorema del Punto Fijo de Banach y el Lema 5.2, el resultado quedará demostrado.

Como $u_0 \in Tr_p(0,T)$, por hipótesis A y F son funciones localmente lipschitzianas, i.e., existen $r > 0, L > 0$ tal que

$$\|A(v_0) - A(w_0)\|_{\mathcal{L}(V,H)} \leqslant L \|v_0 - w_0\|_{Tr_p(H,V)} \ , \ \forall \ v_0, w_0 \in B_r[u_0] \tag{5.9}$$

y

$$|F(v_0) - F(w_0)|_H \leqslant L \|v_0 - w_0\|_{Tr_p(H,V)} \ , \ \forall \ v_0, w_0 \in B_r[u_0] \tag{5.10}$$

Sea

$$r' = \text{mín}\left\{r, \frac{1}{4c_s L}\right\} \tag{5.11}$$

Además denotamos por $\tilde{u}$, solución del sistema

$$\begin{cases} u' + A(u_0)u = 0 & , \quad \text{en} \ \ \Omega \times (0,T) \\ u(0) = u_0 & , \quad \text{en} \ \ \Omega \end{cases} \tag{5.12}$$

la existencia de $\tilde{u}$, esta garantizada por el teorema 3.6. Ahora sea $\epsilon > 0$ tal que

$$\epsilon < \text{mín}\left\{1, \frac{r'}{6}\right\} = \text{mín}\left\{1, \frac{r}{6}, \frac{1}{24 c_s L}\right\} \tag{5.13}$$

y $T \in (0,1]$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}(t) - u_0\|_{Tr_p(0,T)} \leqslant \frac{r'}{3} \tag{5.14}$$

$$\|\tilde{u}\|_{L^p(0,T;V)} \leqslant \epsilon \tag{5.15}$$

$$T^{1/p} \leqslant \text{mín}\left\{\frac{\epsilon}{8c_s L}, \frac{\epsilon}{4c_s \|F(\tilde{u})\|_{C([0,T];H)}}\right\} \tag{5.16}$$

Considerando este nuevo $T > 0$, con las condiciones (5.14), (5.15) y (5.16), se define el subconjunto cerrado $M \subseteq \widetilde{M}$ como

$$M = \left\{u \in \widetilde{M} \ ; \ \|u - \tilde{u}\|_{MR_p(0,T)} \leqslant \epsilon\right\} \tag{5.17}$$

$M \neq \phi$, ya que $\widetilde{u} \in M$, por lo tanto M con la norma $\| \, \|_{MR_p(0,T)}$ es un espacio de Banach. Ahora veamos algunas desigualdades que nos servirán para acotaciones posteriores.
Sean $u \in M$, $t \in [0,T]$ entonces por (3.4) y (5.14) se tiene

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u_0\|_{Tr_p} &= \|u(t) - u_0 + \widetilde{u}(t) - \widetilde{u}(t)\|_{Tr_p} \\
&\leqslant \|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_{Tr_p} + \|\widetilde{u}(t) - u_0\|_{Tr_p} \\
&\leqslant 2\,\|u - \widetilde{u}\|_{MR_p} + \sup_{t\in[0,T]} \|\widetilde{u}(t) - u_0\|_{Tr_p} \\
&\leqslant 2\epsilon + \frac{r'}{3} \leqslant 2\left(\frac{r'}{6}\right) + \frac{r'}{3} = \frac{2r'}{3}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - u_0\|_{Tr_p} \leqslant \frac{2r'}{3} \tag{5.18}$$

Además de la definición del conjunto M y de (5.15)

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^p(0,T;V)} &= \|u - \widetilde{u} + \widetilde{u}\|_{L^p(0,T;V)} \\
&\leqslant \|u - \widetilde{u}\|_{L^p(0,T;V)} + \|\widetilde{u}\|_{L^p(0,T;V)} \\
&\leqslant \|u - \widetilde{u}\|_{MR_p} + \|\widetilde{u}\|_{L^p(0,T;V)} \leqslant \epsilon + \epsilon = 2\epsilon
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} \leqslant 2\epsilon \tag{5.19}$$

Ahora sea $u \in M$, entonces SRu es solución del sistema (5.8) y $\widetilde{u}$ es solución del sistema (5.12), entonces

$$\begin{cases} (SRu)' + A(u_0)(SRu) = A(u_0)u - A(u)u - F(u) & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ (SRu)(0) = u_0 & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} (\widetilde{u})' + A(u_0)(\widetilde{u}) = 0 & , \text{ en } \Omega \times (0,T) \\ (\widetilde{u})(0) = u_0 & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

Luego

$$\begin{aligned}
(SRu - \widetilde{u})' + A(u_0)(SRu - \widetilde{u}) &= (SRu)' - (\widetilde{u})' + A(u_0)(SRu) - A(u_0)(\widetilde{u}) \\
&= A(u_0)u - A(u)u - F(u) - A(u_0)(SRu) + \\
&\quad + A(u_0)(\widetilde{u}) + A(u_0)(SRu) - A(u_0)(\widetilde{u}) \\
&= A(u_0)u - A(u)u - F(u) = Ru
\end{aligned}$$

Entonces

$$(SRu - \widetilde{u})' + A(u_0)(SRu - \widetilde{u}) = A(u_0)u - A(u)u - F(u) = Ru$$

Además

$$(SRu - \widetilde{u})(0) = (SRu)(0) - \widetilde{u}(0) = u_0 - u_0 = 0$$

Por lo tanto $SRu - \widetilde{u}$ es solución del sitema (5.4), entonces por definición de la función S_0 se tiene

$$SRu - \widetilde{u} = S_0 Ru \tag{5.20}$$

Seguidamente probaremos que $SR(M) \subseteq M$, i.e., por la definición del conjunto M debemos probar que

$$\|SRu - \widetilde{u}\|_{MR_p} \leqslant \epsilon \ , \ \text{para todo} \ \ u \in M$$

En efecto, sea $u \in M$, entonces

$$\begin{aligned}
\|F(u)\|^p_{L^p(0,T;H)} &= \int_0^T |F(u(t))|^p \, dt \leqslant \int_0^T \sup_{t\in[0,T]} \|F(u(t))\|^p_{L^p(0,T;H)} \\
&= \sup_{t\in[0,T]} \|F(u(t))\|^p_{L^p(0,T;H)} \int_0^T 1dt \\
&= \left(\sup_{t\in[0,T]} \|F(u(t))\|_{L^p(0,T;H)} \right)^p \int_0^T 1dt \\
&= T \left(\|F(u)\|_{C([0,T;H])} \right)^p
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|F(u)\|_{L^p(0,T;H)} = T^{1/p} \, \|F(u)\|_{C([0,T;H])} \tag{5.21}$$

Sea $t \in [0, T]$, por (5.18) y (5.11) se tiene

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - u_0\|_{Tr_p} \leqslant \frac{2r'}{3} \leqslant \frac{2r}{3} \leqslant r$$

Entonces

$$u(t) \in B_r\,[u_0] \quad , \quad \forall \ \ t \in [0, T] \tag{5.22}$$

También de (5.14)

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\widetilde{u}(t) - u_0\|_{Tr_p} \leqslant \frac{r'}{3} \leqslant \frac{r}{3} \leqslant r$$

Luego

$$\widetilde{u}(t) \in B_r\,[u_0] \quad , \quad \forall \ \ t \in [0, T] \tag{5.23}$$

Seguidamente de (5.5) y (5.20) tenemos

$$\begin{aligned}
\|SRu-\tilde{u}\|_{MR_p} &= \|S_0Ru\|_{MR_p} = \|S_0\left(A(u_0)u-A(u)u-F(u)\right)\|_{MR_p}\\
&\leqslant \|S_0\|_{\mathcal{L}(L^p(0,T;H),MR_p)}\left(\|A(u_0)u-A(u)u-F(u)\|_{L^p(0,T;H)}\right)\\
&\leqslant c_s\left\|\left(A(u_0)-A(u)\right)(u)-F(u)\right\|_{L^p(0,T;H)}\\
&\leqslant c_s\left\|\left(A(u_0)-A(u)\right)(u)\right\|_{L^p(0,T;H)}+c_s\|F(u)\|_{L^p(0,T;H)}\\
&\leqslant c_s\sup_{t\in[0,T]}\|A(u_0)-A(u(t))\|_{\mathcal{L}(V,H)}\|u\|_{L^p(0,T;V)}+\\
&+ \quad c_s\left(\|F(u)-F(\tilde{u})\|_{L^p(0,T;H)}+\|F(\tilde{u})\|_{L^p(0,T;H)}\right)
\end{aligned}$$

De (5.21), (5.9), (5.10), (5.22) y (5.23)

$$\begin{aligned}
\|SRu-\tilde{u}\|_{MR_p} &\leqslant c_s\sup_{t\in[0,T]}\|A(u_0)-A(u(t))\|_{\mathcal{L}(V,H)}\|u\|_{L^p(0,T;V)}+\\
&\quad + c_sT^{1/p}\left(\|F(u)-F(\tilde{u})\|_{C([0,T];H)}+\|F(\tilde{u})\|_{C([0,T];H)}\right)\\
&\leqslant c_sL\sup_{t\in[0,T]}\|u(t)-u_0\|_{Tr_p}\|u\|_{L^p(0,T;V)}+\\
&\quad + c_sT^{1/p}L\|u-\tilde{u}\|_{C([0,T];Tr_p)}+c_sT^{1/p}\|F(\tilde{u})\|_{C([0,T];H)}
\end{aligned}$$

De (3.4), (5.18), (5.19), (5.11) y (5.16)

$$\begin{aligned}
\|SRu-\tilde{u}\|_{MR_p} &\leqslant c_sL\left(\frac{2r'}{3}\right)2\epsilon\ +\ c_sT^{1/p}L\,(2\epsilon)+\frac{\epsilon}{4}\\
&\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{4\epsilon}{3}\right)+2\left(\frac{\epsilon}{8}\right)+\frac{\epsilon}{4}\ =\ \frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}+\frac{\epsilon}{4}=\frac{3\epsilon}{4}\ \leqslant\ \epsilon
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|SRu-\tilde{u}\|_{MR_p}\leqslant\epsilon$$

Luego $SRu\in M$, por tanto $SR(M)\subseteq M$, lo cual prueba nuestra afirmación.

Seguidamente afirmamos que la función SR es una contracción en M. En efecto, sean $u, v \in M$ entonces por los cálculos hechos de (5.5) y (5.21) se tiene

$$\begin{aligned}
&\|SRu - SRv\|_{MR_p} = \|S\,(Ru - Rv)\|_{MR_p} = \|S_0\,(Ru - Rv)\|_{MR_p} \\
&\leqslant \|S_0\|_{\mathcal{L}(L^p(0,T;H),MR_p)} \|Ru - Rv\|_{L^p(0,T;H)} \\
&\leqslant c_s \|A(u_0)u - A(u)u - F(u) - A(u_0)v + A(v)v + F(v)\|_{L^p(0,T;H)} \\
&= c_s \|A(u_0)u - A(u)u - F(u) - A(u_0)v + A(v)v + F(v) + A(v)u - A(v)u\|_{L^p} \\
&\leqslant c_s \left(\|(A(u) - A(v))(u)\|_{L^p} + \|(A(u_0) - A(v))(u - v)\|_{L^p} + \|F(u) - F(v)\|_{L^p}\right) \\
&\leqslant c_s \|(A(u) - A(v))(u)\|_{L^p(0,T;H)} + c_s \|(A(u_0) - A(v))(u - v)\|_{L^p(0,T;H)} + \\
&\quad + c_s T^{1/p} \|F(u) - F(v)\|_{C([0,T;H])}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|SRu - SRv\|_{MR_p} \leqslant\; & c_s \|(A(u) - A(v))(u)\|_{L^p(0,T;H)} \\
& + c_s \|(A(u_0) - A(v))(u - v)\|_{L^p(0,T;H)} \\
& + c_s T^{1/p} \|F(u) - F(v)\|_{C([0,T;H])}
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Analicemos término a término esta última desigualdad. De (5.9), (5.22) y (5.19), (3.4) y (5.13) tenemos

$$\begin{aligned}
c_s \|(A(u) - A(v))(u)\|_{L^p(0,T;H)} &\leqslant c_s \sup_{t\in[0,T]} \|A(u(t)) - A(v(t))\|_{\mathcal{L}(V,H)} \|u\|_{L^p(0,T;V)} \\
&\leqslant c_s L \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{Tr_p} (2\epsilon) \\
&= c_s L \|u - v\|_{C([0,T];Tr_p)} (2\epsilon) \\
&\leqslant 4\epsilon c_s L \|u - v\|_{MR_p} \leqslant \frac{1}{6} \|u - v\|_{MR_p}
\end{aligned}$$

Entonces

$$c_s \|(A(u) - A(v))(u)\|_{L^p(0,T;H)} \leqslant \frac{1}{6} \|u - v\|_{MR_p} \tag{5.25}$$

De (5.22),(5.9),(5.18) y (5.11) se tiene

$$\begin{aligned}
&c_s \|(A(u_0) - A(v))(u - v)\|_{L^p(0,T;H)} \\
&\leqslant c_s \sup_{t\in[0,T]} \|A(u_0) - A(v(t))\|_{\mathcal{L}(V,H)} \|u - v\|_{L^p(0,T;V)} \\
&\leqslant c_s L \sup_{t\in[0,T]} \|u_0 - v(t)\|_{Tr_p} \|u - v\|_{MR_p} \leqslant c_s L \left(\frac{2r'}{3}\right) \|u - v\|_{MR_p} \\
&\leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right) \|u - v\|_{MR_p} = \frac{1}{6} \|u - v\|_{MR_p}
\end{aligned}$$

Entonces

$$c_s \left\| (A(u_0) - A(v))(u - v) \right\|_{L^p(0,T;H)} \leqslant \frac{1}{6} \left\| u - v \right\|_{MR_p} \tag{5.26}$$

De (3.4),(5.10),(5.22),(5.16) y (5.13) tenemos

$$\begin{aligned} c_s T^{1/p} \left\| F(u) - F(v) \right\|_{C([0,T];H)} &\leqslant c_s T^{1/p} L \left\| u - v \right\|_{C([0,T];H)} \\ &\leqslant 2c_s T^{1/p} L \left\| u - v \right\|_{MR_p} \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{4} \left\| u - v \right\|_{MR_p} \leqslant \frac{1}{4} \left\| u - v \right\|_{MR_p} \end{aligned}$$

Entonces

$$c_s T^{1/p} \left\| F(u) - F(v) \right\|_{C([0,T];H)} \leqslant \frac{1}{4} \left\| u - v \right\|_{MR_p} \tag{5.27}$$

Reemplazando lo obtenido en (5.25),(5.26) y (5.27) en (5.24) se tiene

$$\left\| SRu - SRv \right\|_{MR_p} \leqslant \frac{1}{6} \left\| u - v \right\|_{MR_p} + \frac{1}{6} \left\| u - v \right\|_{MR_p} + \frac{1}{4} \left\| u - v \right\|_{MR_p}$$

i.e.,

$$\left\| SRu - SRv \right\|_{MR_p} \leqslant \frac{7}{12} \left\| u - v \right\|_{MR_p} \ , \text{ para todo } \ u, v \in M$$

Entonces la función SR es una contracción en el espacio de Banach M, entonces por el Teorema del Punto Fijo de Banach, existe un único $u \in M$ tal que $SRu = u$, luego por el lema 5.2, u es solución del sistema semilineal (5.1).
Con los resultados obtenidos hemos demostrado el siguiente teorema

Teorema 5.3. *Supongamos que las funciones A y F definidas inicialmente son continuas y localmente lipschitzianas, además supongamos que $A(u_0)$ posee L^p- regularidad maximal. Entonces el sistema (5.1) posee una única solución local en $MR_p(H, V)$.*

Capítulo

6

Ecuaciones Parabólicas lineales y semilineales: ejemplos

En el capítulo 5 dimos las condiciones necesarias para la existencia local del problema semilineal asociado a una ecuación parabólica abstracta. En este capítulo daremos a conocer algunos ejemplos aplicando estos resultados. En todos ellos verificaremos paso a paso las condiciones requeridas para poder aplicar el Teorema 5.3.

6.1 Ecuación semilineal del calor

Sean $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto con frontera regular ($n \geqslant 3$), $T > 0$ y $f \in C^1(\mathbb{R})$. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} u'(t,x) - \Delta u(t,x) + f(u(t,x)) = 0 & , \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega \\ u(t,x) = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{6.1}$$

Además supongamos que existe $c \geqslant 0$ tal que

$$|f'(s)| \leqslant c\,|s|^{\frac{2}{n-2}} . \tag{6.2}$$

Entonces para todo $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ existe una única solución local del sistema (6.1), $u \in W^{1,2}(0,T';L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T';D(\Delta_{L^2}))$.
En efecto, sabemos que la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ es densa y continua. La forma bilineal

viene dada por el producto interno en $H_0^1(\Omega)$, i.e., $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$a(u,v) = (u,v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \ \ , \ \ u,v \in V$$

Para todo $u, v \in V$, se tiene

$$(A_1 u, v)_{L^2(\Omega)} = a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx = (-\Delta u, v)_{L^2(\Omega)}$$

Entonces

$$A_1 u = -\Delta u \ , \text{ para todo } u \in H_0^1(\Omega)$$

i.e.,

$$A_1 \equiv -\Delta$$

Luego el operador generado por la terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$ es el operador $-\Delta$, así tenemos $-\Delta : D(-\Delta_{L^2(\Omega)}) \subseteq H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ donde

$$D(-\Delta_{L^2(\Omega)}) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \ , \ \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}$$

Luego por el Teorema 4.10, $-\Delta$ posee L^2- regularidad maximal y

$$Tr_2(L^2(\Omega), D(-\Delta_{L^2(\Omega)})) = H_0^1(\Omega)$$

Ahora veamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 5.3 para el sistema (6.1). Definamos $A : H_0^1(\Omega) = Tr_2\left(L^2(\Omega), D(-\Delta_{L^2(\Omega)})\right) \to \mathcal{L}\left(D(-\Delta_{L^2(\Omega)}), L^2(\Omega)\right)$ como

$$A(v_0)u = -\Delta u \ , \ \ \forall \ v_0 \in Tr_2\left(L^2(\Omega), D(-\Delta_{L^2(\Omega)})\right), \ u \in D(-\Delta_{L^2(\Omega)})$$

Sean $v_0, w_0 \in H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\|Av_0 - Aw_0\|_{\mathcal{L}(D(-\Delta), L^2(\Omega))} = \|-\Delta - (-\Delta)\|_{\mathcal{L}(D(-\Delta), L^2(\Omega))} = 0 \leqslant \|v_0 - w_0\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Por lo tanto el operador A es localmente lipschitziano.
Ahora definamos $F : H_0^1(\Omega) = Tr_2\left(L^2(\Omega), D(-\Delta_{L^2(\Omega)})\right) \to L^2(\Omega)$ como

$$(F(u))(x) = f(u(x)) \quad , \quad \forall \ u \in H_0^1(\Omega), \ x \in \Omega$$

Veamos algunas propiedades de esta función.
F es continua. En efecto, sea $(u_n) \subseteq H_0^1(\Omega)$ con $u_n \to u$ en $H_0^1(\Omega)$, entonces

$$\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \tag{6.3}$$

Desde que supusimos que $f \in C^1(\mathbb{R})$, definimos

$$k_n = \sup_{x\in[-n,n]} |f'(x)| \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Entonces para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tenemos

$$\begin{aligned} \|F(u_n) - F(u)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |(F(u_n))(x) - (F(u))(x)|^2 \, dx = \int_\Omega |f(u_n(x)) - f(u(x))|^2 \, dx \\ &\leqslant \int_\Omega k^2_{n_0} |u_n(x) - u(x)|^2 \, dx = k^2_{n_0} \|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Luego de (6.3) se obtiene

$$\|F(u_n) - F(u)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant k_{n_0} \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0$$

Esto muestra que la función F es continua.
Ahora veamos que F es localmente lipschitziana. En efecto, para esto hacemos uso de la inmersión de Sobolev

$$H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \tag{6.4}$$

i.e., existe $c_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}} \leqslant c_1 \|u\|_{H^1_0(\Omega)} \ , \ \forall \ u \in H^1_0(\Omega) \tag{6.5}$$

Además si consideramos $p = \dfrac{n}{2}$, $q = \dfrac{n}{n-2}$ se tiene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n} = 1 \tag{6.6}$$

Sean $u, v \in H^1_0(\Omega)$, entonces

$$\|F(u) - F(v)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |f(u(x)) - f(v(x))|^2 \, dx \tag{6.7}$$

Por el Teorema del Valor Medio, existe $\xi(x)$ con

$$u(x) < \xi(x) < v(x) \quad \text{ó} \quad v(x) < \xi(x) < u(x)$$

tal que

$$f(u(x)) - f(v(x)) = f'(\xi(x))(u(x) - v(x)) \tag{6.8}$$

y

$$|\xi(x)| \leqslant \text{máx}\{|u(x)|, |v(x)|\} = g(x) \ , \ x \in \ \Omega \tag{6.9}$$

Reemplazando (6.8) en (6.7) y de (6.2), (6.9) se tiene

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |f(u(x)) - f(v(x))|^2 \, dx &= \int_\Omega |f'(\xi(x))|^2 \, |u(x) - v(x)|^2 \, dx \\
&\leqslant \int_\Omega \left(c \, |\xi(x)|^{\frac{2}{n-2}} \right)^2 |u(x) - v(x)|^2 \, dx \\
&= c^2 \int_\Omega |\xi(x)|^{\frac{4}{n-2}} \, |u(x) - v(x)|^2 \, dx \\
&\leqslant c^2 \int_\Omega (g(x))^{\frac{4}{n-2}} \, |u(x) - v(x)|^2 \, dx
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\int_\Omega |f(u(x)) - f(v(x))|^2 \, dx \leqslant c^2 \int_\Omega (g(x))^{\frac{4}{n-2}} \, |u(x) - v(x)|^2 \, dx \tag{6.10}
$$

Desde que $g = \text{máx}\{|u|, |v|\} \in H_0^1(\Omega)$, entonces de (6.4) se tiene

$$
g = \text{máx}\{|u|, |v|\} \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \quad \text{i.e.,} \quad g = (\text{máx}\{|u|, |v|\})^{\frac{4}{n-2}} \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)
$$

y de (6.4)

$$
|u - v| \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \quad \text{i.e.,} \quad |u - v|^2 \in L^{\frac{n}{n-2}}
$$

Entonces de (6.6), (6.5) y la desigualdad de Holder en (6.10) se tiene

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega (g(x))^{\frac{4}{n-2}} \, |u(x) - v(x)|^2 \, dx \\
\leqslant & \left(\int_\Omega \left((g(x))^{\frac{4}{n-2}} \right)^{\frac{n}{2}} dx \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_\Omega \left(|u(x) - v(x)|^2 \right)^{\frac{n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
= & \left(\int_\Omega (g(x))^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_\Omega (|u(x) - v(x)|)^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \\
= & \left(\left(\int_\Omega (g(x))^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \right)^{\frac{4}{n-2}} \left(\left(\int_\Omega (|u(x) - v(x)|)^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} \right)^2 \\
= & \, \|g\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^{\frac{4}{n-2}} \, \|u - v\|_{L^{\frac{2n}{n-2}}}^2 \leqslant \left(c_1 \, \|g\|_{H_0^1(\Omega)} \right)^{\frac{4}{n-2}} \left(c_1 \, \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)} \right)^2 \\
= & \, c_1^{2 + \frac{4}{n-2}} \, \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{4}{n-2}} \, \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}^2
\end{aligned}
$$

i.e.,

$$
c^2 \int_\Omega (g(x))^{\frac{4}{n-2}} \, |u(x) - v(x)|^2 \, dx \leqslant c^2 c_1^{\frac{2n}{n-2}} \, \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{4}{n-2}} \, \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \tag{6.11}
$$

Reemplazando (6.11) en (6.10) y (6.10) en (6.7) se tiene

$$
\|F(u) - F(v)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leqslant c^2 c_1^{\frac{2n}{n-2}} \, \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{4}{n-2}} \, \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}^2
$$

i.e.,

$$\|F(u)-F(v)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\, c_1^{\frac{n}{n-2}} \, \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{2}{n-2}} \, \|u-v\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{6.12}$$

Ahora sea $R > 0$ y $u, v \in B_R[0] \subseteq H_0^1(\Omega)$, i.e.,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant R \;,\; \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant R$$

Tomando $L = c\, c^{\frac{n}{n-2}} R^{\frac{2}{n-2}}$, en (6.12) se obtiene

$$c\, c_1^{\frac{n}{n-2}} \, \|g\|_{H_0^1(\Omega)}^{\frac{2}{n-2}} \, \|u-v\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c\, c_1^{\frac{n}{n-2}} R^{\frac{2}{n-2}} \, \|u-v\|_{H_0^1(\Omega)} = L\, \|u-v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

i.e., existe $L > 0$ tal que

$$\|F(u)-F(v)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant L\, \|u-v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

Esto muestra que F es localmente lipschitziana.
Además $A(u_0) = -\Delta$ tiene L^2- regularidad maximal, por todo lo probado estamos en las hipótesis del Teorema 5.3, entonces para todo $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ existe una única solución local $u \in W^{1,p}(0,T'; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T'; D(-\Delta_{L^2}))$ del sistema (6.1).

6.2 Ecuación de Cahn-Hilliard

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y acotado, ya hemos visto que la forma bilineal $a : V \times V \to \mathbb{R}$ definido por

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx$$

con los espacios de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ generan el operador $-\Delta_{L^2}$, además por el Teorema 2.4 el conjunto

$$D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \;;\; \Delta u \in L^2(\Omega) \right\} = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{6.13}$$

es denso en $L^2(\Omega)$. Ahora consideremos la ecuación de Cahn-Hilliard

$$\begin{cases} u'(t,x) + \Delta\left(\Delta u(t,x) - f(u(t,x))\right) = 0 & , \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega \\ u(t,x) = \Delta u(t,x) = 0 & , \quad x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & , \quad x \in \Omega \end{cases} \tag{6.14}$$

El sistema (6.14) cumple las hipótesis del Teorema 5.3. Si la terna $\{H_0^1(\Omega), L^2(\Omega), a(u,v)\}$ genera el operador $-\Delta_{L^2}$, entonces con respecto al operador Δ^2, ¿qué terna lo generará?. Para responder esta interrogante, de (6.13) mostraremos que la función $b : D(A) \times D(A) \to \mathbb{R}$

definido por

$$b(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx$$

es una forma bilineal, continua y elíptica. En efecto
Bilinealidad. Sean $u, v, w \in D(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ de la linealidad del operador Δ se tiene

$$\begin{aligned} b(u+\lambda v, w) &= \int_\Omega \Delta\left(u+\lambda v\right)\Delta w dx = \int_\Omega \left(\Delta u + \lambda \Delta v\right)\Delta w dx \\ &= \int_\Omega \Delta u \Delta w dx + \lambda \int_\Omega \Delta v \Delta w dx = b(u,w) + \lambda b(u,w) \end{aligned}$$

i.e.,

$$b(u+\lambda v, w) = b(u,w) + \lambda b(u,w)$$

Análogamente

$$b(u, v+\lambda w) = b(u,v) + \lambda b(u,w)$$

Elipticidad. Por el Teorema 2.4 y la Observación 2.9, $D(A)$ es denso en $L^2(\Omega)$ y $-\Delta_{L^2}$: $D(A) \to L^2(\Omega)$ es un operador cerrado y continuo, entonces existe $c > 0$ tal que

$$\left\|\Delta u\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c \left\|u\right\|_{D(A)} \ , \ \forall\ u \in \ D(A) \tag{6.15}$$

Además por Lema 4.4, $D(A)$ es un espacio de Banach con la norma del gráfico, i.e.,

$$\left\|u\right\|_{D(A)} = \left\|u\right\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\Delta u\right\|_{L^2(\Omega)}$$

Luego la norma del gráfico es equivalente a la norma usual de $D(A)$, inducida por $H_0^1(\Omega)$, entonces existe $\eta > 0$ tal que

$$b(u,u) + \left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \left\|\Delta u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \geqslant \eta \left\|u\right\|^2_{D(A)} \ , \ \forall\ u \in \ D(A)$$

Esto muestra que la forma bilineal b es elíptica.
Continuidad. Por la equivalencia de normas también existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta \left\|u\right\|^2_{D(A)} \geqslant \left\|\Delta u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{6.16}$$

Ahora sean $u, v \in D(A)$, entonces de (6.16) tenemos

$$\begin{aligned} \left|b(u,v)\right|^2 &= \left|\int_\Omega \Delta u \Delta v dx\right|^2 \leqslant \left\|\Delta u\right\|^2_{L^2(\Omega)} \left\|\Delta v\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant \left(\left\|\Delta u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|u\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\left(\left\|\Delta v\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|v\right\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leqslant \left(\delta \left\|u\right\|^2_{D(A)}\right)\left(\delta \left\|v\right\|^2_{D(A)}\right) = \delta^2 \left\|u\right\|^2_{D(A)} \left\|v\right\|^2_{D(A)} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\left|b(u,v)\right| \leqslant \delta \left\|u\right\|_{D(A)} \left\|v\right\|_{D(A)} ,$$

esto muestra que b es continua.
Ahora denotemos por $B : D(B) \subseteq D(A) \to L^2(\Omega)$ el operador generado por la terna $\{D(A), L^2(\Omega), b(u,v)\}$, donde

$$D(B) = \left\{u \in D(A) \; ; \; Bu \in L^2(\Omega)\right\}$$

Además si $u, v \in D(B)$, entonces

$$(Bu, v) = b(u,v) = \int_\Omega \Delta u \Delta v dx = \int_\Omega \Delta\left(\Delta u\right) \Delta v dx = \int_\Omega \Delta^2 uv dx = \left(\Delta^2 u, v\right)$$

Así

$$Bu = \Delta^2 u \; , \; \forall \; u \in \; D(B)$$

Entonces el operador B se trata del operador Δ^2, que por la condición de elipticidad sobre la forma bilineal b, posee L^2- regularidad maximal, además

$$Tr_2\left(L^2(\Omega), D(\Delta_{L^2})\right) = H_0^1(\Omega) \tag{6.17}$$

y

$$Tr_2\left(L^2(\Omega), D(B)\right) = D(\Delta_{L^2}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{6.18}$$

En (6.14), veamos de quién se trata la función F del sistema (6.14), para ello definamos $F : D(A) = D(\Delta_{L^2}) \to L^2(\Omega)$ como

$$F(u) = -\Delta f(u) \; , \; u \in D(A) \tag{6.19}$$

Veamos que condiciones debemos imponer a la función f para estar en las hipótesis del teorema 5.3, observemos que de (6.19)

$$F(u) = \left(-\Delta \circ f\right)(u) \; , \; u \in D(A)$$

entonces para que F sea continua bastará que la función f lo sea, por ser el operador $-\Delta$ continuo en $D(A) = D(\Delta_{L^2})$. Por lo tanto la primera condición sobre f es que sea continua.
Ahora veamos las condiciones para tener la localidad lipschitziana sobre F. Sean $u, v \in D(A) = D(\Delta_{L^2})$, de (6.19) se tiene

$$\|F(u) - F(v)\|_{L^2(\Omega)} = \|-\Delta f(u) + \Delta f(v)\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta\left(f(u) - f(v)\right)\|_{L^2(\Omega)} \tag{6.20}$$

Para hacer uso de (6.15), debemos tener $f(u), f(v) \in D(A)$, esta es la segunda condición sobre f, entonces

$$\|\Delta\left(f(u) - f(v)\right)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c \, \|f(u) - f(v)\|_{D(A)} \tag{6.21}$$

De (6.20) y (6.21) tenemos la desigualdad

$$\|F(u) - F(v)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\,\|f(u) - f(v)\|_{D(A)} \tag{6.22}$$

De (6.13), definamos el operador $G : H^2(\Omega) \to H^2(\Omega)$ como

$$G(u)(x) = f(u(x))\ ,\ \forall\, u \in H^2(\Omega)\ ,\ \forall\, x \in \Omega$$

Ahora debemos demostrar que G esta bien definido y es localmente lipschitziano en conjuntos acotados de $H^2(\Omega)$. En efecto, sea $u \in H^2(\Omega)$ para la buena definición de G debemos ver que $f(u) \in H^2(\Omega)$, para esto debemos derivar hasta el segundo orden y para las respectivas acotaciones supondremos que

$$f \in C^3(\mathbb{R}) \tag{6.23}$$

Luego las funciones f, f', f'' son acotadas en todo intervalo acotado y desde que $u \in L^2(\Omega)$, u es acotada casi siempre en Ω, entonces por la continuidad de f existe $k_f > 0$ tal que

$$|f(u(x))| \leqslant k_f \quad \text{c.t.p. en } \Omega$$

Así

$$\|f(u)\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant k_f$$

En particular

$$f(u) \in L^2(\Omega) \tag{6.24}$$

Análogamente

$$f'(u), f''(u) \in L^\infty(\Omega) \tag{6.25}$$

De (6.25) y la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(u) = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega).L^2(\Omega) \subseteq L^2(\Omega) \tag{6.26}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(u) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f(u)\right) = \left(f''(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i} + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

Pero

$$\left(f''(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i} + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \in L^\infty.L^4.L^4 + L^\infty.L^2 \subseteq L^2 + L^2 = L^2$$

i.e.,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} f(u) \in L^2(\Omega) \tag{6.27}$$

Por lo tanto de (6.24), (6.26) y (6.27), $f(u) \in H^2(\Omega)$, esto demuestra la buena definición del operador G.

Ahora veamos las demás acotaciones, para esto usaremos las siguientes inmersiones de Sobolev

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

y

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega) \tag{6.28}$$

Por lo tanto existe $d > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant d\,\|u\|_{H^2(\Omega)} \;\;,\; u \in H^2(\Omega) \tag{6.29}$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leqslant d\,\|u\|_{H^1(\Omega)} \;\;,\; u \in H^1(\Omega) \tag{6.30}$$

En particular si $u \in H^2(\Omega)$, entonces $\nabla u \in H^1(\Omega)$ y de (6.30) se tiene

$$\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} \leqslant d\,\|\nabla u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant d\,\|u\|_{H^2(\Omega)} \;\;,\; u \in H^2(\Omega) \tag{6.31}$$

Para mostrar que G es localmente lipschitziana en conjuntos acotados de $H^2(\Omega)$, sean $u, v \in H^2(\Omega)$, $R > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant R \;,\; \|v\|_{H^2(\Omega)} \leqslant R \tag{6.32}$$

Luego de (6.29), (6.30), (6.31) y (6.32) se tiene

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \,,\; \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \,,\; \|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} \,,\; \|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} \leqslant dR \tag{6.33}$$

Además como supusimos que $f \in C^3(\mathbb{R})$, sea $M_R > 0$ tal que

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{L^\infty(-cR,cR)} \leqslant M_R \;,\; k = 0, 1, 2, 3. \tag{6.34}$$

Entonces por el teorema del valor medio y (6.34)

$$\begin{aligned}
\|f(u) - f(v)\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |f(u(x)) - f(v(x))|^2\, dx \\
&\leqslant \int_\Omega \|f'\|^2_{L^\infty(-cR,cR)} |u(x) - v(x)|^2\, dx \\
&= \|f'\|^2_{L^\infty(-cR,cR)} \int_\Omega |u(x) - v(x)|^2\, dx \\
&\leqslant M_R^2 \|u - v\|^2_{L^2(\Omega)} \;\leqslant\; M_R^2 \|u - v\|^2_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\|f(u) - f(v)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant M_R \|u - v\|_{H^2(\Omega)} \tag{6.35}$$

Además

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(u)-f(v)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega \left| f'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} - f'(v)\frac{\partial u}{\partial x_i} + f'(v)\frac{\partial u}{\partial x_i} - f'(v)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx \\
&\leqslant \int_\Omega \left(\left| \left(f'(u)-f'(v)\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + \left| f'(v)\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\right| \right)^2 dx \\
&\leqslant 2\left(\int_\Omega \left|f'(u)-f'(v)\right|^2 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx + \int_\Omega \left|f'(v)\right|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx \right)
\end{aligned}
$$

De (6.29), (6.34), (6.32) y el Teorema del Valor Medio, obtenemos

$$
\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(u)-f(v)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant \left(2M_R^2 d^2 R^2 + 2M_R^2\right) \|u-v\|_{H^2(\Omega)}
$$

Tomando $L = \sqrt{2M_R^2 d^2 R^2 + 2M_R^2}$, obtenemos

$$
\left\| \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(u)-f(v)\right)\right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant L \|u-v\|_{H^2(\Omega)} \tag{6.36}
$$

Por otro lado también se tiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}\left(f(u)-f(v)\right) = \\
&= f''(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - f''\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} - f'(v)\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= f''(u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + f''(v)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} - f''(v)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \\
&\quad + f'(v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - f'(v)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - f''\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} - f'(v)\frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= \left(f''(u)-f''(v)\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \left(f'(u)-f'(v)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \\
&\quad + f'(v)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}\right) + f''(v)\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\right)
\end{aligned}
$$

Entonces tomemos las siguientes notaciones

$$\begin{aligned} A &= (f''(u) - f''(v))\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} \quad , \quad B = (f'(u) - f'(v))\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} \\ C &= f'(v)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}\right) \quad , \quad D = f''(v)\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene las desigualdades

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(f(u) - f(v)) \right\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|A + B + C + D\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega |A + B + C + D|^2 \\ &\leqslant \int_\Omega (|A| + |B| + |C| + |D|)^2 \\ &\leqslant 5\left(\int_\Omega |A|^2 + \int_\Omega |B|^2 + \int_\Omega |C|^2 + \int_\Omega |D|^2\right) \end{aligned}$$

De (6.29), (6.33), (6.34), el teorema del valor medio y las notaciones de A, B, C y D obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(f(u) - f(v)) \right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leqslant 5\,\|f'''\|^2_{L^\infty(-cR,cR)}\,\|u - v\|^2_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx + \\ &+ 5\,\|f'\|^2_{L^\infty(-cR,cR)} \int_\Omega \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}\right|^2 dx + 5\,\|f''\|^2_{L^\infty(-cR,cR)} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2 dx \\ &+ 5\,\|f''\|^2_{L^\infty(-cR,cR)} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2 dx + 5\,\|f''\|^2_{L^\infty(-cR,cR)} \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2 \left|\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2 dx \end{aligned}$$

Como $u \in H^2(\Omega)$, entonces $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \in L^2(\Omega)$. Además de (6.28), $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^4(\Omega)$, i.e., $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \in L^2(\Omega)$, luego por la desigualdad de Holder

$$\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 \leqslant \left\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right\|_{L^2(\Omega)} = \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2_{L^4(\Omega)} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|^2_{L^4(\Omega)} \tag{6.37}$$

Usando la desigualdad (6.37), de (6.29), (6.30), (6.32), (6.33) y (6.34) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \left(f(u) - f(v)\right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \; 5 \left\| f''' \right\|^2_{L^\infty(-cR,cR)} \left\| u - v \right\|^2_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2_{L^4(\Omega)} + \\
&\quad + \; 5 \left\| f'' \right\|^2_{L^\infty(-cR,cR)} \left\| u - v \right\|^2_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad + \; 5 \left\| f' \right\|^2_{L^\infty(-cR,cR)} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} \right\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad + \; 5 \left\| f'' \right\|^2_{L^\infty(-cR,cR)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|^2_{L^4(\Omega)} \\
&\leqslant \; 5 \left(M_R^2 d^6 R^4 + M_R^2 d^2 R^2 + M_R^2 + M_R^2 d^4 R^2 \right) \left\| u - v \right\|^2_{H^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Entonces tomando $S = \sqrt{5\left(M_R^2 d^6 R^4 + M_R^2 d^2 R^2 + M_R^2 + M_R^2 d^4 R^2\right)}$ se tiene

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \left(f(u) - f(v)\right) \right\|_{L^2(\Omega)} \leqslant S \left\| u - v \right\|_{H^2(\Omega)} \tag{6.38}$$

Por lo tanto (6.35), (6.36) y (6.38) demuestra que el operador G es localmente lipschitziano en conjuntos acotados de $H^2(\Omega)$.
Entonces existe $N > 0$ tal que

$$\left| G(u) - G(v) \right|_{H^2(\Omega)} \leqslant N \left\| u - v \right\|_{H^2(\Omega)} \;,\; \forall\, u, v \in B_R\,[0] \subseteq H^2(\Omega)$$

Retomando (6.22) tenemos

$$\left\| F(u) - F(v) \right\|_{L^2} \leqslant c \left\| f(u) - f(v) \right\|_{D(A)} = c \left| G(u) - G(v) \right|_{H^2} \leqslant cN \left\| u - v \right\|_{H^2}$$

Por lo tanto la función F definida por (6.19) es continua y localmente lipschitziana, además el operador $B(u_0) \equiv \Delta^2$ tiene L^2- regularidad maximal, luego por el teorema 5.3 existe una unica solucion local $u \in MR_2\left(0, T; L^2(\Omega), D(B)\right)$ del sistema (6.14). Resumimos el resultado obtenido en el siguiente teorema.

Teorema 6.1. *Supongamos que $f \in C^3(\mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto bien regular, entonces para todo $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ existe una única solución local $u \in W^{1,2}\left(0, T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; D(B)\right)$ de la ecuación de Cahn-Hilliard (6.14).*

Capítulo

7

Regularidad de soluciones

En los capítulos anteriores hemos estudiado las ecuaciones parabólicas lineales y semilineales, obteniendo resultados de existencia y unicidad bajo ciertas condiciones sobre los operadores y funciones. Con respecto a las soluciones: ¿qué propiedades extra de regularidad poseen?. Según lo visto hasta el momento, la regularidad de las condiciones iniciales repercute en la regularidad de las solución. En este capítulo analizaremos y responderemos la pregunta anterior. Más precisamente, analizaremos la regularidad de la solución del sistema semilineal

$$\begin{cases} u' + Au + F(u) = 0 & , \text{ en } \Omega \times (0, +\infty) \\ u(0) = u_0 & , \text{ en } \Omega \end{cases} \tag{7.1}$$

donde $A : D(A) \to H$ es una operador lineal y cerrado, H es un espacio de Banach con $D(A) \hookrightarrow H$ inmersión densa y continua. Además $F : Tr_p(H, D(A)) \to H$ es una función localmente lipschitziana y $u_0 \in Tr_p(H, D(A))$. El siguiente teorema juega un rol central en el estudio de regularidad de soluciones.

Teorema 7.1 (Teorema de la Función Implícita en Espacios de Banach)**.** *Sean X, Y, Z espacios de Banach y $G : X \times Y \to Z$ una función de clase C^k para algún $k \geqslant 1$. Supongamos que existe $(p, q) \in X \times Y$ tal que*

1. *G(p,q)=0.*
2. *La derivada de Fréchet $D_2G(p, q) : Y \to Z$ es invertible. Entonces existen vecindades $U \subseteq X$ de p, $V \subseteq Y$ de q y una función $g : U \to V$ de clase C^k tal que*

$$\{(x, y) \in U \times V \; ; \; G(x, y) = 0\} = \{(x, g(x)) \; ; \; x \in U\}$$

Además si la función G es analítica, entonces la función implícita g es analítica también.

Teorema 7.2 (Series de Neuman)**.** *Sea $A : X \to X$ un operador lineal y continuo donde X un espacio de Banach. Supongamos que $\|A\| < 1$, entonces $I - A$ es invertible y*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Teorema 7.3. *Sea H un espacio de Banach, $A : D(A) \to H$ un operador lienal y cerrado con L^p- regularidad maximal. Si $B \in \mathcal{L}\left(Tr_p(H, D(A)), H\right)$, entonces $A + B$ también posee L^p- regularidad maximal.*

Demostración. Por hipótesis A tiene L^p- regularidad maximal, por lo tanto el operador $S_0 : MR_p^0\left(0, T; H, D(A)\right) \to L^p\left(0, T; H\right)$ definido por

$$S_0 u = u' + Au \tag{7.2}$$

es invertible. Entonces para demostrar que $A+B$ posee L^p- regularidad maximal será suficiente mostrar que el operador $S : MR_p^0\left(0, T; H, D(A)\right) \to L^p\left(0, T; H\right)$ definido por

$$Su = u' + \left(A + B\right) u \tag{7.3}$$

es invertible. En efecto, sea $u \in MR_p^0\left(0, T; H, D(A)\right)$, de (7.2) y (7.3) tenemos

$$Su = u' + Au + Bu = S_0 u + Bu = \left(S_0 + B\right) u \tag{7.4}$$

Por hipótesis el operador B es lineal y continuo, entonces existe $c_B > 0$ tal que

$$\|Bu_0\|_H \leqslant c_B \|u_0\|_{Tr_p(H,D(A))} \ , \text{ para todo } \ u_0 \in D(A) \tag{7.5}$$

Además de (7.4), ¿cómo se entiende Bu?, si el operador B tiene como dominio el espacio de Banach $Tr_p(H, D(A))$.
Desde que $MR_p^0\left(0, T; H, D(A)\right) \hookrightarrow C\left(0, T; Tr_p\right)$ y de (7.5) se tiene

$$\begin{aligned}
\|Bu\|^p_{L^p(0,T;H)} &= \int_0^T \|Bu(t)\|_H^p \, dt \leqslant \int_0^T c_B^p \|u(t)\|^p_{Tr_p} \, dt \\
&\leqslant \int_0^T c_B^p \left(\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|^p_{Tr_p} \right)^p dt = c_B^p \|u\|^p_{C(0,T;Tr_p)} \int_0^T dt \\
&= Tc_B^p \|u\|^p_{C(0,T;Tr_p)} \leqslant Tc_B^p \left(2^p \|u\|^p_{MR_p^0} \right)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\|Bu\|_{L^p(0,T;H)} \leqslant 2c_B T^{1/p} \|u\|_{MR_p^0}$$

Luego $B \in \mathcal{L}\left(MR_p^0, L^p(0,T;H)\right)$ y

$$\|B\|_{\mathcal{L}\left(MR_p^0, L^p(0,T;H)\right)} \leqslant 2c_B T^{1/p} \tag{7.6}$$

Así en (7.4) se tiene que

$$S \equiv S_0 + B \equiv S_0\left(I + S_0^{-1}B\right) \tag{7.7}$$

entonces demostrar que el operador S es invertible, debemos demostrar que el operador $I + S_0^{-1}B : MR_p^0 \to MR_p^0$ también lo es. En efecto, desde que S_0 es invertible entonces existe $c > 0$ tal que

$$\left\|S_0^{-1}\right\|_{\mathcal{L}\left(L^p(0,T;H), MR_p^0\right)} \leqslant c \tag{7.8}$$

De (7.6) y (7.8)

$$\left\|S_0^{-1}B\right\|_{\mathcal{L}\left(MR_p^0, MR_p^0\right)} \leqslant \left\|S_0^{-1}B\right\|_{\mathcal{L}\left(L^p, MR_p^0\right)} \|B\|_{\mathcal{L}\left(MR_p^0, L^p\right)} \leqslant 2cc_B T^{1/p}$$

Tomando $T \in (0,1]$ tal que $2cc_B T^{1/p} < 1$, entonces

$$\left\|-S_0^{-1}B\right\|_{\mathcal{L}\left(MR_p^0, MR_p^0\right)} = \left\|S_0^{-1}B\right\|_{\mathcal{L}\left(MR_p^0, MR_p^0\right)}$$

Luego por teorema 7.2, $I - \left(-S_0^{-1}B\right) = I + S_0^{-1}B$ es invertible, entonces de (7.7) el operador S es invertible, así $A + B$ tiene L^p- regularidad maximal. □

Ahora enunciaremos y demostraremos el teorema principal de este capítulo.

7.1 Aplicación del Teorema de la Función Implícita en espacios de Banach: regularidad de soluciones

Teorema 7.4 (regularidad de soluciones)**.** *En el sistema (7.1) supongamos que A tiene L^p- regularidad maximal, $F \in C^k$ para algún $k \geqslant 1$. Entonces la única solución local $u \in MR_p(0,T;H,D(A))$ es tal que para todo $\tau > 0$ se tiene*

$$u \in W^{k+1,p}(\tau,T;H) \cap W^{k,p}(\tau,T;D(A))$$

$$u \in C^k((0,T];H) \cap C^{k-1}((0,T];D(A))$$

Además si $F \in C^\infty$, entonces $u \in C^\infty((0,T];D(A))$ y si F es analítica entonces u también lo es.

Demostración. Sea $u \in MR_p(0,T;D(A))$ la única solución local del sistema (7.1), tomemos

$T \in (0,1]$.
Sea $\lambda \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ entonces

$$0 \leqslant \left(1 - \frac{T}{2}\right) t \leqslant (1+\lambda)\, t < \left(1 + \frac{T}{2}\right) t < \left(\frac{2+T}{2}\right) t \leqslant \frac{3T}{2} < T$$

Por lo tanto la función $u_\lambda : \left[0, \frac{T}{2}\right] \to D(A) \subseteq H$ dada por

$$u_\lambda(t) = u\left((1+\lambda)t\right)$$

esta bien definida, además para todo $\lambda \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, $u_\lambda \in MR_p\left(0, \frac{T}{2}; H, D(A)\right)$, por ello si no hay lugar a confusión consideraremos que $u_\lambda \in MR_p(0,T;H,D(A))$.
Por otro lado de (7.1) y la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} & u_\lambda'(t) + (1+\lambda)Au_\lambda(t) + (1+\lambda)F(u_\lambda(t)) \;= \\ =\; & (u((1+\lambda)t))' + (1+\lambda)Au((1+\lambda)t) + (1+\lambda)F(u(1+\lambda)t) \\ =\; & (1+\lambda)u'((1+\lambda)t) + (1+\lambda)Au((1+\lambda)t) + (1+\lambda)F(u((1+\lambda)t)) \\ =\; & (1+\lambda)\left[u' + Au + F(u)\right]_{/(1+\lambda)t} = (1+\lambda),0 = 0 \end{aligned}$$

i.e.,

$$u_\lambda'(t) + (1+\lambda)Au_\lambda(t) + (1+\lambda)F(u_\lambda(t)) = 0$$

además

$$u_\lambda(0) = u((1+\lambda),0) = u(0) = u_0$$

por lo tanto u_λ es solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{lll} u' + (1+\lambda)Au + (1+\lambda)F(u) = 0 & , & \text{en } \Omega \times (0,+\infty) \\ u(0) = u_0 & , & \text{en } \Omega \end{array} \right. \tag{7.9}$$

Ahora debemos definir una función adecuada tal que se cumplan todas las hipótesis del teorema de la Función Implícita.
Sea $G : \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \times MR_p(H, D(A)) \to L^p(0,T;H) \times Tr_p(H,D(A))$ definida por

$$G(\lambda, v) = (v' + (1+\lambda)Av + (1+\lambda)F(v), v(0) - u_0)$$

De (7.9) y la definición de G para todo $\lambda \in \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ se obtiene

$$G(\lambda, u_\lambda) = (0,0) \tag{7.10}$$

y

$$G(0,u) = (0,0) \tag{7.11}$$

Además por ser por hipótesis F de clase C^k, G también lo es.
Sea el operador $T : MR_p(0,T;H,D(A)) \to L^p(0,T;H) \times Tr_p(H,D(A))$, definido por

$$Tv = (v' + Av + F'(u(t))v, v(0)) \tag{7.12}$$

Veamos que T es lineal y continuo. En efecto, sean $v_1, v_2 \in MR_p(0,T;H,D(A))$, $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
& T(v_1 + \lambda v_2) = \\
= \; & ((v_1 + \lambda v_2)' + A(v_1 + \lambda v_2) + F'(u(t))(v_1 + \lambda v_2), (v_1 + \lambda v_2)(0)) \\
= \; & (v_1' + \lambda v_2' + Av_1 + \lambda Av_2 + F'(u(t))(v_1) + \lambda F'(u(t))(v_2), v_1(0) + \lambda v_2(0)) \\
= \; & (v_1' + Av_1 + F'(u(t))v_1, v_1(0)) + \lambda\, (v_2' + Av_2 + F'(u(t))v_2, v_2(0)) \\
= \; & T(v_1) + \lambda T(v_2)
\end{aligned}$$

esto muestra que T es lineal.
Ahora sea $v \in MR_p(0,T;H,D(A))$, entonces por el Teorema de Acotación Uniforme

$$\begin{aligned}
\|Tv\|_{L^p(0,T;H)\times Tr_p} &= \|(v' + Av + F'(u(t))v, v(0))\|_{L^p(0,T;H)\times Tr_p} \\
&= \|v' + Av + F'(u(t))v\|_{L^p(0,T;H)} + \|v(0)\|_{Tr_p} \\
&\leqslant \|v'\|_{L^p(0,T;H)} + \|Av\|_{L^p(0,T;H)} + \\
&\quad + \|F'(u(t))v\|_{L^p(0,T;H)} + \|v(0)\|_{Tr_p} \\
&\leqslant \|v\|_{MR_p} + \|A\|_{\mathcal{L}(D(A),H)} \|v\|_{L^p(0,T;H)} + \\
&\quad + \|F'\| \, \|v\|_{L^p(0,T;H)} + \|v\|_{MR_p} \\
&\leqslant \|v\|_{MR_p} + \|A\|_{\mathcal{L}(D(A),H)} \|v\|_{MR_p} + \|F'\| \, \|v\|_{MR_p} + \|v\|_{MR_p} \\
&= \left(2 + \|A\|_{\mathcal{L}(D(A),H)} + \|F'\|\right) \|v\|_{MR_p}
\end{aligned}$$

Desde que T es lineal esta desigualdad muestra que también es continua.
Además de (7.1), (7.11) la definición de G y T se tiene

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0} \frac{\|G(0,u+h) - G(0,u) - Th\|_{L^p\times Tr_p}}{\|h\|} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\|(u' + Au + F(u+h) - F'(u(t))h, 0)\|_{L^p\times Tr_p}}{\|h\|} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\|(-F(u) + F(u+h) - F'(u(t))h, 0)\|_{L^p\times Tr_p}}{\|h\|} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\|F(u+h) - F(u) - F'(u(t))h\|_{L^p}}{\|h\|} \; = \; 0
\end{aligned}$$

Entonces por la unicidad de la derivada $T \equiv D_2G(0,u)$, esto nos induce a pensar que para

hacer uso del Teorema de la Función Implícita nuestro punto candidato es $(0,u)$. Veamos que $T \equiv D_2G(0,u)$ es invertible. En efecto, Por hipótesis el operador A tiene L^p- regularidad maximal, además $F'(u(t)) \in \mathcal{L}(Tr_p, H)$, entonces por el teorema 7.3 el operador $A + F'(u(t))$ tiene L^p- regularidad maximal.
Por lo tanto para todo $v_0 \in Tr_p(H, D(A))$ y $f \in L^p(0,T;H)$ el sistema

$$\begin{cases} v' + Av + F'(u(t))v = f & , \text{ en } \Omega \times (0,+\infty) \\ v(0) = v_0 & , \text{ en } \Omega \end{cases}$$

posee una única solución $v \in MR_p(0,T;H,D(A))$, equivalentemente el operador $T \equiv D_2G(0,u)$ definido por (7.12) es invertible.
Luego por el Teorema de la Función Implícita existen $\epsilon' \in \left(0, \dfrac{T}{2}\right)$, una vecindad $U \subseteq MR_p(0,T;H,D(A))$ de u y una función $g : (-\epsilon', \epsilon') \to U$ de clase C^k tal que

$$G(\lambda, g(\lambda)) = (0,0)\ , \text{ para todo } \lambda \in (-\epsilon', \epsilon')$$

además toda solución de $G(\lambda, v) = (0,0)$ en $(-\epsilon', \epsilon') \times U$ es de la forma $(\lambda, g(\lambda))$, i.e., de (7.10)

$$u_\lambda = g(\lambda) = u((1+\lambda)\cdot\,)$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos las respectivas derivadas de la función implícita g en el punto cero

$$g^{(k)}(0) : (-\epsilon', \epsilon') \to U \subseteq MR_p(0,T;H,D(A))$$

definida por

$$g^{(k)}(0)(t) = t^k u^{(k)}(t)$$

Ahora sea $\tau > 0$, si $t \in (\tau, T)$ entonces $t^{-k} \in C^\infty([\tau,T])$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\|u^{(k)}\right\|_{MR_p(\tau,T;H,D(A))} &= \left\|u^{(k)}\right\|_{W^{1,p}(\tau,T;H)} + \left\|u^{(k)}\right\|_{L^p(\tau,T;D(A))} \\ &= \left\|u^{(k)}\right\|_{L^p(\tau,T;H)} + \left\|u^{(k+1)}\right\|_{L^p(\tau,T;H)} + \left\|u^{(k)}\right\|_{L^p(\tau,T;D(A))} \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \|u\|_{MR_p(\tau,T;H,D(A))} &= \|u\|_{W^{1,p}(\tau,T;H)} + \|u\|_{L^p(\tau,T;D(A))} \\ &= \|u\|_{L^p(\tau,T;H)} + \|u\|_{L^p(\tau,T;H)} + \|u\|_{L^p(\tau,T;D(A))} \end{aligned}$$

De estas igualdades se tiene

- $u, u^{(k)}, u^{(k+1)} \in L^p(\tau,T;H)$, entonces

$$u \in W^{k+1,p}(\tau,T;H) \tag{7.13}$$

- $u, u^{(k)} \in L^p(\tau, T; D(A))$, entonces

$$u \in W^{k,p}(\tau, T; D(A)) \tag{7.14}$$

De (7.13) y (7.14), como $\tau > 0$ es arbitrario se tiene

$$u \in C^k((0,T]\,; H) \tag{7.15}$$

y

$$u \in C^{k-1}((0,T]\,; D(A)) \tag{7.16}$$

Finalmente de (7.13), (7.14), (7.15) y (7.16) y para todo $\tau > 0$

$$u \in W^{k+1,p}(\tau, T; H) \cap W^{k,p}(\tau, T; D(A))$$

y

$$u \in C^k(\tau, T; H) \cap C^{k-1}(\tau, T; D(A))$$

lo cual queriamos demostrar. □

Corolario 7.5. *Sea $A : D(A) \to H$ un operador lineal y cerrado en un espacio de Banach H, supongamos que A tiene L^p- regularidad maximal, entonces para todo $u_0 \in Tr_p(H, D(A)), k \geqslant 1$ la única solución del sistema*

$$\begin{cases} u' + Au = 0 & , \quad \text{en} \;\; \Omega \times (0, +\infty) \\ u(0) = u_0 & , \quad \text{en} \;\; \Omega \end{cases} \tag{7.17}$$

$u \in MR_p(0, T; H, D(A)) \cap C^\infty((0,T]\,; D(A^k))$. *Además esta solución es analítica en* $(0, \infty)$.

Demostración. Por tener A tiene L^p- regularidad maximal, sea u la solución del sistema (7.17), en este caso $F \equiv 0$, por lo tanto por teorema 7.4

$$u \in MR_p(0, T; H, D(A)) \cap C^k([\tau, T]\,; H) \cap C^{k-1}([\tau, T]\,; D(A)) \;,\; \forall\, \tau > 0, k \geqslant 1$$

i.e.,

$$u \in MR_p(0, T; H, D(A)) \cap C^\infty([\tau, T]\,; D(A)) \tag{7.18}$$

Sea el conjunto

$$P = \left\{ k \in \mathbb{N}\,;\; u \in C^\infty([\tau, T]\,; D(A^k)) \right\}$$

Probaremos que $P = \mathbb{N}$, para ello usaremos inducción. En efecto,

- De (7.18), $1 \in P$.
- Supongamos que $k \in P$ (Hipótesis inductiva), i.e.,

$$u \in C^\infty([\tau, T]\,; D(A^k)) \tag{7.19}$$

Entonces $u' \in C^\infty([\tau, T]\,; D(A^k))$, sea $t \in [\tau, T]$ se tiene

$$-\,Au(t) = u'(t) \in D(A^k) \tag{7.20}$$

De (7.19) y (7.20) se tiene que $u(t), Au(t) \in D(A^k)$, i.e.,

$$u(t) \in D(A^{k+1})\ ,\ \text{para todo } t \in [\tau, T]$$

Entonces $u \in L^p([\tau, T]\,, D(A^{k+1})) \hookrightarrow C([\tau, T]\,, D(A^{k+1}))$, así de (7.17)

$$Au' + A(Au) = 0$$

Entonces

$$Au' = -A(Au) \in L^p([\tau, T]\,, D(A^{k+1})) \tag{7.21}$$

Nuevamente en (7.17) y de (7.21)

$$u'' = -Au' \in L^p([\tau, T]\,, D(A^{k+1})) \hookrightarrow C([\tau, T]\,, D(A^{k+1}))$$

Análogamente

$$u''' = -Au'' \in L^p([\tau, T]\,, D(A^{k+1})) \hookrightarrow C([\tau, T]\,, D(A^{k+1}))$$

i.e.,

$$u^{(n+1)} = -Au^{(n)} \in L^p([\tau, T]\,, D(A^{k+1})) \hookrightarrow C([\tau, T]\,, D(A^{k+1}))\ ,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto

$$u \in C^\infty([\tau, T]\,, D(A^{k+1}))$$

Entonces $k+1 \in P$, i.e., $P = \mathbb{N}$. Luego

$$u \in MR_p(0, T; H, D(A)) \cap C^\infty([\tau, T]\,, D(A^k))\ ,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Así

$$u \in MR_p(0, T; H, D(A)) \cap C^\infty((0, T]\,, D(A^k))\ ,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

La analiticidad de la solución u en $(0, \infty)$ se sigue desde que $F \equiv 0$. $\square$

Ejemplo 7.6: *Sean* $\Omega = (0,1)\,, f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. *Consideremos la ecuación*

$$\begin{cases} u' - u_{xx} + f(u) = 0 & , \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times (0,1) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & , \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0,x) = u_0(x) & , \quad x \in (0,1) \end{cases} \tag{7.22}$$

Entonces para todo $u_0 \in H_0^1(0,1)$ *existe una única solución local*

$$u \in W^{1,2}(0,T;L^2(0,1)) \cap H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

del sistema (7.22), además $u \in C^{\infty}((0,T) \times (0,1))$.
En efecto, tomamos los espacio de Hilbert $V = H_0^1(0,1), H = L^2(0,1)$, *además se sabe que*

$$D(-\Delta_{L^2(\Omega)}) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

Entonces el operador $-\Delta_{L^2(\Omega)} : H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \to L^2(0,1)$ *definido por*

$$-\Delta u = -u_{xx}$$

tiene L^2*- regularidad maximal.*
Desde que $Tr_p(H_0^1(0,1), L^2(0,1)) = H_0^1(0,1)$, *definimos el operador de Nemytski* $F : H_0^1(0,1) \to L^2(0,1)$ *como*

$$(Fu)(x) = f(u(x))\;,\; x \in (0,1)$$

Como por hipótesis $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, *entonces* $F \in C^{\infty}(H_0^1(0,1))$, *en particular es localmente lipschitziana. Entonces por teorema 5.3 existe una única solución local* $u \in W^{1,2}(0,T;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1))$ *del sistema (7.22), más aún por teorema 7.4*

$$u \in C^{\infty}((0,T]\,; H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)) \hookrightarrow C^{\infty}((0,T]\,; H^2(0,1)) \tag{7.23}$$

Además desde que $F \in C^{\infty}(H_0^1(0,1))$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *se tiene*

$$F(H^k(0,1)) \subseteq H^k(0,1) \tag{7.24}$$

Por lo tanto $F|_{H^k(0,1)} : H^k(0,1) \to H^k(0,1)$ *es de clase* C^{∞}, *en particular de (7.23)*

$$u' \in C^{\infty}((0,T]\,; H^2(0,1)) \tag{7.25}$$

De (7.24)

$$f(u) \in C^{\infty}((0,T]\,; H^2(0,1)) \tag{7.26}$$

Por lo tanto en el sistema (7.22), de (7.25) y (7.26), $u_{xx} \in C^{\infty}((0,T]\,; H^2(0,1))$, *i.e.,*

$$u \in C^{\infty}((0,T]\,; H^4(0,1)) \tag{7.27}$$

Nuevamente por (7.23) y (7.24)

$$u', f(u) \in C^{\infty}((0,T]\,; H^4(0,1))$$

Así de (7.22)

$$u_{xx} \in C^{\infty}((0,T]\,; H^4(0,1))$$

i.e.,

$$u \in C^{\infty}((0,T]\,; H^6(0,1)) \tag{7.28}$$

Siguiendo inductivamente, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene de (7.23), (7.27) y (7.28)

$$u \in C^{\infty}((0,T]\,; H^{2k}(0,1))$$

Además desde que

$$H^{2k}(0,1) \hookrightarrow C^{2k-1}([0,1])\ , \ \textit{para todo}\ \ k \in \mathbb{N}$$

Se sigue que

$$u \in C^{\infty}((0,T]\,; C^{2k-1}([0,1]))\ , \ \textit{para todo}\ \ k \in \mathbb{N}$$

i.e.,

$$u \in C^{\infty}((0,T) \times (0,1)).$$

Capítulo

8

Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis ha sido estudiar diversos aspectos relacionados a un modelo parabólico semilineal de la forma:

$$u' + A(u) + F(u) = 0, \tag{8.1}$$

donde las funciones A y F no son necesariamente lineales.

Como a menudo sucede en Matemáticas, al enfrentarnos a un problema desconocido, primero debemos abordar un caso particular de mismo, de modo que nos de una idea e intuición para así abordar el caso general. En ese sentido, como primero paso, nos concentramos en el caso que A es lineal y $F = 0$:

$$u' + Au = 0, \tag{8.2}$$

para el cual concluimos que es posible demostrar la existencia, unicidad y regularidad de soluciones, asumiendo que A es generado por una terna de la forma $\{V, H, a(\cdot,\cdot)\}$, con $V \subset H$ espacios de Hilbert de immersión densa y a una forma bilineal en H. Las herramientas fundamentales para analizar este caso fue el uso del Teorema de Lax-Milgram y las correspondientes inmersiones de Sobolev. A lo largo del estudio de este caso, nosotros concluimos que este tipo de métodos se pueden usar para analizar otro tipo de ecuaciones con estructura similar a (8.2).

Usando los resultados para el caso lineal, y haciendo uso de un argumento de punto fijo de Banach, concluimos que la ecuación (8.1) junto a una condición de frontera $u(0) = u_0$ en un espacio adecuado de regularidad maximal, posee una solución local. Además, concluimos que una solución u de (8.1) hereda la regularidad del dato en frontera u_0, es decir, mientras mas regular sea u_0, más regular será la correspondiente solución u asociada a (8.1). Análogamente al caso lineal, nosotros concluimos que el argumento de punto fijo de Banach se puede utilizar para estudiar la existencia de soluciones de otras ecuaciones diferenciales parciales con estructura similar a (8.1).

Finalmente, con estos resultados a la mano, concluimos que las ecuaciones de Cahn-Hilliard y la semilineal del calor poseen soluciones: únicas y suficientemente regulares.

Bibliografía

[1] BREZIS, H., Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Editorial Sprimger, 1983.

[2] CAZENAVE, T., HARAUX, A., An Introduction to Semilinear Evolution Equations, Oxford University Press, 1998.

[3] CHILL, R., Equations paraboliques: Comportement qualitatif, Laboratoire de Mathématique et Applications de Metz, 2006.

[4] EVANS, L., Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1998.

[5] KREYZIG, E., Introductory Functional Analysis with Applications American Mathematical Society, 1998.

[6] LIONS, J. L., Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non-linéaires, Dunod, 1969.

[7] MILLA, M., Análise Espectral em espacos de Hilbert, Universidad Federal do Río de Janeiro, Instituto de Matemática, 1990.

[8] ZEIDLER, E., Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Editorial Springer, 1988.

[9] ZILL, D., Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de Modelado, International Thomsom Editores S.A, 2002.