

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**

**UNIDAD DE POSTGRADO**

**Aspectos matemáticos de la descomposición de  
imágenes utilizando ondículas (wavelets)**

**TESIS**

para optar grado académico de Magíster en Matemática Pura

**AUTOR**

Luis Miguel Nuñez Ramirez

**ASESORA**

Roxana López Cruz

**Lima – Perú**

**2010**

ASPECTOS MATEMÁTICOS DE LA DESCOMPOSICIÓN DE  
IMAGÉNES UTILIZANDO ONDÍCULAS(WAVELETS)

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos como parte de los requisitos para obtener el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Aprobado por:

---

Dr. Victor Rafael Cabanillas Zannini  
Presidente

---

Dra. Roxana Lopez Cruz  
Miembro Asesor

---

Dr. José Raúl Luyo Sánchez  
Miembro

---

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra  
Miembro

---

Dr. Alejandro Ortíz Fernandez  
Miembro

## FICHA CATALOGRÁFICA

LUIS MIGUEL NUÑEZ RAMIREZ

Aspectos Matemáticos de la Descomposición  
de Imágenes utilizando Ondículas (Wavelets)

xii, 139pp. 29,7 cm (UNMSM, Magíster en Matemática 2010)

Tesis - Universidad Nacional Mayor de San Marcos,  
Facultad de Ciencias Matemáticas.

1. UNMSM / FCM

## DEDICATORIA

A mis padres Luis Alfonso Nuñez Florian y Rosa Aurora Ramirez de Nuñez.

A mis hermanos Carlos, Jorge, Richard, Leda y Verónica.

A mis sobrinas Yadira y Vanessa.

A mi sobrino Carlos Daniel.

## AGRADECIMIENTOS

A mis padres y hermanos, por el apoyo que siempre me brindan.

A los miembros del jurado, por las observaciones y sugerencias que me hicieron para mejorar este trabajo, en especial al Dr. Alejandro Ortiz por ser el motivador principal de este trabajo, a la Dra. Roxana Lopez Cruz por sus enseñanzas y oportunos consejos y al Dr. Victor R. Cabanillas Zannini por sus acertadas observaciones y comentarios sobre el trabajo.

A los profesores y amigos de la Facultad de Ciencias Matematicas que contribuyeron a mi formación profesional.

# Contenido

<b>Contenido</b>	<b>x</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Definiciones básicas . . . . .	1
<b>2 Introducción</b>	<b>7</b>
<b>3 Teoría Matemática de Frames y Análisis Multirresolución</b>	<b>11</b>
3.1 Resultados Básicos de la Teoría de Frames . . . . .	11
3.2 Uso de los Frames en Teorema de Muestreo . . . . .	15
3.3 Análisis Multirresolución . . . . .	17
3.4 Base Ortonormal de Ondículas $\psi_{j,k}$ y la Proyección Or- togonal $P_j$ sobre $V_j$ . . . . .	18
3.5 Algunas Propiedades de $\phi$ y $W_0$ . . . . .	21
3.6 Existencia de una base ortonormal de ondículas . . . . .	24
3.7 Análisis Multirresolución de Haar . . . . .	25
<b>4 Bases ortonormales de Ondículas</b>	<b>33</b>
4.1 Bases de Riesz de las Funciones Escalas . . . . .	33

4.2	La Función Escala como un Punto de Iniciación . . . . .	39
4.3	El Teorema de Separabilidad . . . . .	42
4.4	El Teorema de la Densidad . . . . .	42
4.5	Observaciones . . . . .	42
4.6	Estrategia para la construcción de nuevas Bases Ortonormales de Ondículas. . . . .	47
4.7	Teorema de la Regularidad de Ondículas . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Análisis Multirresolución y su conexión con Esquemas de Filtramiento de Sub-Bandas</b>	<b>52</b>
5.1	Proceso Esquemático para el Cálculo de los Coeficientes de Ondículas. . . . .	52
5.2	Etapas de un Esquema de Filtramiento de Sub-Banda con Re- construcción Exacta . . . . .	58
5.3	Filtramiento: Filtro de Pasa Bajo y Pasa Alto Ideales . . . . .	59
5.4	Los Filtros $a^0$ , $\tilde{a}^0$ , $a^1$ , $\tilde{a}^1$ y su relación con las Funciones Regulares $\alpha^0$ , $\tilde{\alpha}^0$ , $\alpha^1$ y $\tilde{\alpha}^1$ . . . . .	65
5.5	Filtros QMF, FIR y CQF . . . . .	70
5.6	Comentarios . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Bases Ortonormales de Ondículas de Soporte Compacto</b>	<b>76</b>
6.1	Construcción de $m_0$ . . . . .	76
6.2	Relación entre $\hat{\phi}$ y $m_0$ . . . . .	83
6.3	Lema de Mallat . . . . .	88
6.4	Función Entera de Tipo Exponencial . . . . .	93
6.5	El Polinomio Trigonométrico $m_0$ y los Frames Apretados . . . .	100

6.6	Comentarios . . . . .	108
6.7	Otras Consideraciones . . . . .	109
<b>7</b>	<b>Condiciones necesarias y suficientes para ortonormalizar</b>	<b>111</b>
7.1	Condiciones necesarias y suficientes sobre $m_0$ . . . . .	111
7.2	Conclusiones . . . . .	128
	<b>Bibliografía</b>	<b>138</b>



## RESUMEN

### ASPECTOS MATEMÁTICOS DE LA DESCOMPOSICIÓN DE IMAGENES UTILIZANDO ONDÍCULAS (WAVELETS)

LUIS MIGUEL NUÑEZ RAMIREZ

2010

Asesor : Dra. Roxana Lopez Cruz

Grado obtenido : Magíster en Matemática

---

El propósito de la presente tesis es estudiar de manera analítica técnicas para la construcción de los elementos básicos del Análisis Multirresolución (AMR) como son los espacios  $V_j$  o la función escala  $\phi$  y la ondícula  $\psi$ . La idea básica de una ondícula es que ella es una función que pertenece a un cierto espacio de funciones y que sometida a dilataciones y traslaciones genera una base ortonormal, u otro tipo de base, en tal espacio. Surgen dos funciones básicas, la función escala  $\phi$  y la función ondícula  $\psi$ . Esta técnica de descomponer señales en términos de ondículas (o de frames), tiene gran impacto en diversas investigaciones interdisciplinarias (aplicaciones a la medicina, biología, economía, astronomía, entre otros).

En este trabajo también estudiaremos, la descomposición de un espacio de funciones en subespacios, así como algunas estrategias para la construcción del polinomio trigonométrico  $m_0$ , siguiendo los lineamientos matemáticos de una de las mejores exponentes de la teoría de ondículas, Ingrid Daubechies

[12]. Por otro lado, se establece la descomposición y reconstrucción de una señal sometida a un filtro, y la relación que existe entre la ondícula  $\psi$  y el polinomio trigonométrico  $m_0$ .

**Palabras clave:** Ondícula, AMR, Polinomio Trigonométrico, Frames, Filtro.

## ABSTRACT

### MATHEMATICAL FACTS OF THE DECOMPOSITION OF IMAGES USING WAVELETS

LUIS MIGUEL NUÑEZ RAMIREZ

2010

Advisor : Dra. Roxana Lopez Cruz

Obtained degree : Master in Mathematics

---

The purpose of this thesis is an analytical study of techniques for the construction of the basis elements of Multiresolution Analysis (MRA) as are the spaces  $V_j$  or scaling function  $\varphi$  and wavelet  $\psi$ . The basic idea of a wavelet is that it is a function that belongs to a certain space of functions and subjected to dilations and translations generate an orthonormal basis, or other basis in this space. There are two basic functions, the scaling function  $\varphi$  and wavelet function  $\psi$ . This technique of decomposing signals in terms of wavelet (or frame) has great impact on various interdisciplinary research (applications in medicine, biology, economics, astronomy, among others).

This work also will study the decomposition of a function space into subspaces and some strategies for building the trigonometric polynomial  $m_0$ , following mathematical guidelines of one of the best exponents of the theory of wavelets, Ingrid Daubechies [12].

On the other hand, provides for the decomposition and reconstruction of a signal subjected to a filter, and the relationship between the wavelet  $\psi$  and the trigonometric polynomial  $m_0$ .

**Key words:** Wavelet, MRA, Trigonometric Polynomials, Frames, Filter.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentamos brevemente el marco teórico referencial y notaciones a considerar que permitirá un mejor desarrollo y entendimiento del trabajo a realizar.

### 1.1 Definiciones básicas

**Definición 1.1.** *Sea  $p$  un número real tal que  $1 \leq p < \infty$  y  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto. Representamos por  $L^p(\Omega)$  al conjunto formado por*

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } u \text{ es medible y } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty\}$$

*$L^p(\Omega)$  es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales de funciones, provista con la norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

*el cual hace un espacio de Banach.*

Para el caso  $p = 2$ , es un espacio de Hilbert separable con el producto escalar, definido por

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$$

para todo  $u, v \in L^2(\Omega)$ .

Su norma inducida será denotada por  $\langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}$$

para todo  $u \in L^2(\Omega)$

En especial, cuando  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $u \in L^2(\mathbb{R})$  es llamado un función de energía finita o señal.

**Definición 1.2.** Representaremos por  $L^\infty(\Omega)$  al espacio de las funciones numéricas  $u$  medibles en  $\Omega$  y que son esencialmente acotadas en  $\Omega$ , provista con la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{Sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$$

**Definición 1.3.** Sea  $\Omega$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y  $u$  una función escalar

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Llamaremos soporte de  $u$  a la clausura del conjunto

$$\{x \in \Omega \text{ tal que } u(x) \neq 0\}$$

y lo podemos denotar por  $\text{Soport}(u)$ . Así

$$\text{Soport}(u) = \overline{\{x \in \Omega \text{ tal que } u(x) \neq 0\}}$$

Ademas, para cada  $\alpha, \beta, -\infty < \alpha < \beta < \infty$ , el conjunto de funciones

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tal que } \text{Soport}(u) \subset [\alpha, \beta]\}$$

representa un sub espacio cerrado de  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Definición 1.4.** Dada una función  $u$ , definimos  $T_a u$ ,  $E_a u$  y  $D_a u$  por medio

$$\begin{aligned}T_a u(x) &= u(x - a) \\E_a u(x) &= e^{2\pi i a x} u(x) \\D_a u(x) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} u\left(\frac{x}{a}\right), a \neq 0\end{aligned}$$

donde  $a$  es un número real.

En especial,  $E_a(x) = e^{2\pi i a x}$ . Los operadores  $T_a u$ ,  $E_a u$  y  $D_a u$  son operadores unitarios de  $L^2(\mathbb{R})$  en  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Definición 1.5.** La transformada de Fourier de una función  $u$ , la definimos por medio de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} u(x) dx$$

y lo denotamos por

$$F(u)(\xi) = \widehat{u}(\xi)$$

esto es,

$$F(u)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} u(x) dx$$

y su transformada de Fourier inversa viene dado por

$$(F(u)(\xi))^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi$$

Además, como  $F : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  es un operador unitario, se tiene si  $u \in L^2(\mathbb{R})$  entonces  $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R})$  y  $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|\widehat{u}\|_{L^2(\Omega)}$ . Una propiedad usual de las transformada de Fourier es

$$F\left(\frac{d^\ell u}{dx^\ell}\right) = (i\xi)^\ell F(u)(\xi)$$

Luego

$$\int |u^{(\ell)}(x)|^2 dx < \infty \text{ si y solo si } \int |\xi|^{2\ell} |\widehat{u}(\xi)|^2 dx < \infty$$

con la notación  $\frac{d^\ell u}{dx^\ell} = u^{(\ell)}$ .

**Definición 1.6.** Sea  $\{g_{m,n}(x) = E_{bm}T_{an}g(x) = e^{2\pi ibmx}g(x-na)\}$  una familia de funciones mediante translaciones y modulaciones, para algún  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Llamaremos a las funciones  $\{g_{m,n}(x)\}$  la transformada de Fourier de funciones ventanas discretas o de corto tiempo.

**Definición 1.7.** Dada una función  $u$ ,  $u$  es  $\sigma$ -bands limitada para  $\sigma > 0$ , si su transformada de Fourier tiene soporte compacto,  $\text{Soport}(\widehat{u}) \subset [-\sigma, \sigma]$ .

**Definición 1.8.** Un sistema de funciones  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ,  $u_k \in L^2(\mathbb{R})$  es llamado sistema ortonormal que lo denotamos por s.o.n si y sólo si

$$\int_{\mathbb{R}} u_k(x) \overline{u_j(x)} dx = \delta_{j,k}$$

donde  $\delta_{j,k}$  es delta de Kronecker.

**Definición 1.9.** Un s.o.n  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es llamado base ortonormal que lo denotaremos por b.o. en un subespacio  $V$  de  $L^2(\mathbb{R})$  si y sólo si para cada  $f \in V$ ,  $f(x) = \sum_k c_k u_k(x)$  donde  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \ell_2(\mathbb{Z})$  tal que  $\sum_k |c_k|^2 < \infty$ .

**Definición 1.10.** Una ondícula o wavelet es una función básica  $\psi$ , que tiene las siguientes características:



- i)  $\psi$  es desplazable (tiene decaimiento rápido en el infinito o es de soporte compacto).
- ii)  $\psi$  es oscilante u onda, esto es  $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$
- iii)  $\psi$  tiene regularidad en el sentido  $L^\infty(\mathbb{R})$ .
- iv)  $\psi$  es arbitrariamente trasladada y dilatada.

La palabra ondícula o wavelet es usada en matemática para denotar una familia de bases ortonormales en  $L^2(\mathbb{R})$  con propiedades de aproximación. La teoría de ondícula o wavelet fue desarrollada por Y. Meyer, S. Mallat, I. Daubechies y otros en los fines de los ochenta e inicios de los noventa.

**Lema de Fatou.**

Si  $f_n \geq 0$  para cada  $n$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  salvo un conjunto de puntos donde la convergencia puntual tiene medida cero con respecto a la medida de Lebesgue, entonces

$$\int f(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sup} \int f_n(x) dx$$

En particular, si  $\lim \text{Sup}$  es finito, entonces  $f$  es integrable.

El  $\lim \text{Sup}$  de una sucesión es definida por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Sup} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [\text{Sup}\{a_k \text{ tal que } n \leq k\}]$$

**Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.**

Supongamos que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  salvo un conjunto de puntos donde la convergencia puntual tiene medida cero con respecto a la medida de Lebesgue.

Si  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para todo  $n$ , y  $\int g(x) dx < \infty$ , entonces  $f$  es integrable y

$$\int f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx$$

**Definición 1.11.** *Llamaremos un esquema de filtramiento de sub bandas con reconstrucción exacta cuando cada base ortonormal de ondículas asociada con un AMR da lugar a un par de filtros CQF (Filtros de cuadratura conjugada).*

**Definición 1.12.** *Un frame es exacto si al quitar un elemento deja de ser un frame.*

**Definición 1.13.** *Un filtro (discreto) es una aplicación lineal continua  $F : l^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow l^2(\mathbb{Z})$ , que conmuta con traslaciones (es decir es una convolución).*

# Capítulo 2

## Introducción

Las *Ondículas* (Wavelets) es una teoría actual que está en pleno desarrollo con aplicaciones significativas a sectores cada vez más amplios del Análisis moderno y de la Matemática Aplicada, así como la estadística, física, economía, medicina, etc., han impactado en muchas áreas de la ciencia y tecnología.

Por muchos años el análisis de Fourier (Series y Transformadas de Fourier) sirvió para estudiar problemas del análisis armónico, así como de la física, entre otros dominios. Sin embargo, tal análisis es insuficiente para interpretar y resolver otras situaciones que provienen, por ejemplo, de la teoría de señales, lo que sugirió la introducción de nuevas ideas.

La consolidación del *Análisis de Ondículas* fue conseguido con la ayuda del importante concepto de *Análisis multirresolución (AMR)*, debido a S. Mallat [16](quien trabajaba en el análisis de imágenes) junto con Yves Meyer [18] (otro notable analista) a fines de los años ochenta.

El propósito de esta tesis es analizar los *fundamentos técnicos de la teoría*

*de ondículas* y algunos de los avances que esta nueva teoría ha proporcionado en diversas áreas de la matemática aplicada. Dentro de las nuevas técnicas usadas, una de las mas importantes es la teoría de frames. Se puede observar una vinculación entre la teoría de frames y la teoría de ondículas. Así, el trabajo de J. Benedetto y W. Heller [3] juega un rol central en el estudio de algunos teoremas de muestreo a través de la teoría de frames. Sin embargo, una de las mejores representantes del estudio de la teoría de ondículas es Ingrid Daubechies [12], por su significativos aportes en la construcción de filtros ortogonales, pero no simétricos y las ondículas llamadas de segunda generación que permiten la implementación rápida de la transformada de ondículas sobre dominios acotados, muestras irregulares, etc.

En el Capítulo 3, introducimos el concepto de frames (marcos) en un espacio de Hilbert y algunas propiedades que consideramos interesantes. Mostraremos como los frames pueden ser usados para obtener teoremas de muestreo.

Así mismo, resaltamos la importancia del concepto de *Análisis Multirresolución (AMR)* cuyo aporte a la construcción de ondículas es de una relevancia vital. Sin embargo, antes de formalizarse el *AMR* ya se habían construido ejemplos de bases ortonormales de *ondículas regulares*, lo que ahora es considerado como un arte más que un procedimiento: requirio ingenio y artificios especiales.

Finalmente estudiaremos como ejemplo el *AMR* de A. Haar (1909).

El Capítulo 4 nos sugiere una estrategia, para la construcción de nuevas bases ortonormales de ondículas a partir de la *función escala*  $\phi$  tal que  $\phi$  y  $\hat{\phi}$  tengan un decaimiento razonable.

Por otro lado, tenemos la regularidad de la bases ortonormales de ondículas. Para las bases de ondículas (no necesariamente ortonormales) existe una relación entre la regularidad de  $\psi$  y la multiplicidad del cero en  $\xi = 0$  de  $\widehat{\psi}$ .

El Capítulo 5 nos muestra el proceso esquemático para el cálculo de los coeficientes de ondículas y las etapas de un esquema de filtramiento de sub-bandas con reconstrucción exacta (etapas de la descomposición y reconstrucción en un proceso de filtramiento). Cada base ortonormal de ondículas asociada con un *AMR* da lugar a un par de filtros CQF, esto es, un esquema de filtramiento de sub-banda con reconstrucción exacta.

En el Capítulo 6 estamos interesados en construir ondículas  $\psi$  con soporte compacto a partir de una función escala  $\phi$  con soporte compacto (en su forma ortogonalizada).

Así mismo, vemos la correspondencia con bases ortonormales de ondículas, la relación entre  $\widehat{\phi}$  y  $m_0$  (polinomio trigonométrico). Diversas estrategias han sido desarrolladas, correspondiente a condiciones sobre  $m_0$  para asegurar que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

ó que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) \overline{\phi(x-n)} dx = \delta_{n,0}$$

se verifiquen.

En el Capítulo 7, se hace un estudio de las condiciones necesarias y suficientes para ortonormalizar. Cohen (1990) identificó una primera condición necesaria y suficiente sobre  $m_0$ . Lawton fue el que inicio muchos de los caminos existentes, para la derivación de condiciones sobre  $m_0$  que aseguran

$$\text{que } \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Las *ondículas* se aplican para descifrar datos, lo que es una contribución muy importante en las aplicaciones de la matemática en otras áreas de la ciencia y la tecnología.

# Capítulo 3

## Teoría Matemática de Frames y Análisis Multirresolución

Los *Frames*, fueron introducidos por Duffin-Schaeffer en 1952 . Debemos remarcar que la idea de los frames es una generalización de los conceptos de base ortonormal y de la base de Riesz que sirven para representar elementos de un espacio de Hilbert, las cuales son recuperables conociéndose sus coeficientes-frame; la diferencia con otras representaciones es que los frames pueden ser superabundantes, esto es a diferencia de las bases los frames no son necesariamente linealmente independientes.

### 3.1 Resultados Básicos de la Teoría de Frames

**Definición 3.1.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Si  $G = \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base de  $H$ , entonces se dice que  $G$  es una base de Riesz si existe un isomorfismo topológico  $T : H \rightarrow H$  y una base ortonormal  $\{u_n\} \subset H$  tal que  $T(g_n) = u_n$ ,*

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 3.2.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y norma  $\| \cdot \|$ . Entonces una sucesión  $G = \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset H$ , no necesariamente una base de  $H$ , es llamado *Frame* si y sólo si existen  $A, B$  con  $0 < A \leq B < \infty$  para todo  $f \in H$ , de tal manera que verifique

$$A \|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, g_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

**Observación 3.1.** De la Definición 3.2 tenemos que:

- (i) Si  $A = B$ , entonces  $\sum_n |\langle f, g_n \rangle|^2 = A \|f\|^2$  en tal caso, la sucesión  $\{g_n\}$  es llamada *frame apretado* ( *tight-frame* ).
- (ii) Si  $A = B = 1$ , entonces  $\sum_n |\langle f, g_n \rangle|^2 = \|f\|^2$  si y solamente si  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal.

Los números  $A$  y  $B$  son llamados *cotas frames*.

**Teorema 3.1.** Sea la sucesión  $G = \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  contenida en el espacio de Hilbert  $H$ . Entonces son válidas las siguientes afirmaciones:

- (i) Todo *frame*  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es completo.
- (ii) Toda base ortonormal en  $H$  es un *frame* con *cotas frames*  $A = B = 1$ .
- (iii) Si  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es un *tight-frame* con  $A = B = 1$  y  $\|g_n\| = 1$ , entonces  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal.
- (iv) Una base de *Schauder* de  $H$  no es necesariamente un *frame* para  $H$ .



**Demostración.** Ver [19].

**Teorema 3.2.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable y  $G = \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset H$  un frame con cotas frames  $A$  y  $B$ . Consideremos el operador frame  $S : H \rightarrow H$  definido por

$$S(f) = \sum_n \langle f, g_n \rangle g_n.$$

Entonces son válidas las siguientes afirmaciones:

(i) El operador frame  $S$  es un operador lineal y acotado sobre  $H$  con

$$AI \leq S \leq BI$$

(ii)  $S$  es inversible y verifica  $B^{-1}I \leq S^{-1} \leq A^{-1}I$ . Además,  $S^{-1}$  es un operador positivo es decir,  $S^{-1} \geq 0$ . Entonces  $S^{-1}$  es autoadjunto.

(iii)  $\{S^{-1}g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es un frame con cotas frames  $B^{-1}$  y  $A^{-1}$ .

(iv) Para cada  $f \in H$ , se tiene que  $f = \sum_n \langle f, g_n \rangle S^{-1}g_n$ .

(v) Si existe una sucesión  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset H$  tal que  $f = \sum_n c_n g_n$ , entonces

$$\sum_n |c_n|^2 = \sum_n |a_n|^2 + \sum_n |a_n - c_n|^2,$$

es decir,

$$\sum_n |a_n|^2 \leq \sum_n |c_n|^2$$

donde  $a_n = \langle f, S^{-1}g_n \rangle$ .

(vi) Si adicionalmente,  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es un frame-exacto, entonces  $\{g_n\}$  y  $\{S^{-1}g_n\}$  son biortogonales, es decir,  $\langle g_m, S^{-1}g_n \rangle = \delta_{m,n}$ .

**Demostración.** Ver [19].

**Observación 3.2.** La idea es construir frames para  $L^2(\mathbb{R})$  a partir de una función simple  $g \in L^2(\mathbb{R})$  mediante traslaciones y modulaciones.

Estos frames son de la forma:

$$\{g_{mn}(x)\} = E_{mb}T_{na}g(x) = e^{2\pi imbx}g(x - na)_{m,n \in \mathbb{Z}},$$

para algún  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Entonces surgen las siguientes interrogantes:

- a) ¿Qué condiciones debe cumplir  $\{g_{m\omega_0, nt_0}\}$  ( $\omega_0$  y  $t_0$  son fijos) para ser un frame o una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ ?
- b) ¿Qué función  $g$  puede generar un frame de la forma  $\{E_{mb}T_{na}g(x)\}$  para  $L^2(\mathbb{R})$ ? Si tal función  $g$  existe es llamada *ondícula madre*.

En 1989 Heil y Walnut probaron que una condición necesaria para obtener un frame es la siguiente:

Para que  $g \in L^2(\mathbb{R})$  genere un frame, la función  $G(x) = \sum_n |g(x - na)|^2$  debe satisfacer la condición  $0 < A \leq G(x) \leq B < \infty$ , en casi todo punto de  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 3.3.** Sea  $g \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $G(x) = \sum_n |g(x - na)|^2$  satisfice la condición  $0 < A \leq G(x) \leq B < \infty$ , en casi todo punto  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $g$  tiene soporte compacto, con  $\text{Sop}(g) \subset I$ , donde  $I$  es un intervalo de longitud  $\frac{1}{b}$ , entonces  $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  es un frame con cotas frames  $b^{-1}A$  y  $b^{-1}B$ .

Además, para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tenemos  $Sf = \frac{fG}{b}$ , donde  $S$  es el operador frame. Asimismo,  $S$  es invertible y  $S^{-1}f = \frac{bf}{G}$ .

**Demostración.** Ver [19]

## 3.2 Uso de los Frames en Teorema de Muestreo

El objetivo es mostrar como toda función  $f$ ,  $\sigma$ -banda limitada, puede ser representada en la forma:

$$f = \sqrt{2\sigma} \sum_n f(a_n) \phi_n, \quad \sigma > 0 \quad (3.1)$$

tal que

$$\phi_n(t) = (K_n(\omega))^\vee, \quad K_n = \sum_m \langle E_{a_n} \hat{g}, h_m \rangle_{I_0} h_m, \quad h_m = S_0^{-1}(E_{a_m}), \quad I_0 = [-\sigma, \sigma],$$

$\hat{g}(\omega) = (2\sigma)^{-\frac{1}{2}} \chi_{I_0}(\omega)$ , sabiendo que  $\{E_{a_n}\}$  es un frame para  $L^2([-\sigma, \sigma])$  con operador frame  $S_0$ .

La expresión (3.1) es un modelo matemático general de la representación

$$f = \sum_n f(a_n) \psi_n, \quad \psi_n(\omega) = \int_{-\sigma}^{\sigma} h_n(\omega) e^{-2\pi i t \omega} d\omega = \langle h_n, \bar{E}_t \rangle_{I_0},$$

si  $\{E_{a_n}\}$  es un frame-exacto.

Su demostración no es inmediata. Consideremos  $b_m = 2\sigma m$ , al tener

$$G(\omega) = \sum_m |\hat{g}(\omega - 2\sigma m)|^2 = \frac{1}{2\sigma}$$

$$\hat{g}(\omega) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}, & \sigma(2m-1) \leq \omega \leq \sigma(2m+1) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

se deduce por el Teorema 9 de ([19]) que  $\{E_{a_n} T_{b_m} \hat{g}\}$  es un frame para  $L^2(\mathbb{R})$ , con el operador frame  $S$ . Por lo tanto, para todo  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  se tiene que

$$\hat{f} = \sum_{m,n} \langle \hat{f}, E_{a_n} T_{b_m} \hat{g} \rangle S^{-1}(E_{a_n} T_{b_m} \hat{g})$$

es decir,

$$S\hat{f} = \sum_{m,n} \langle \hat{f}, E_{a_n} T_{b_m} \hat{g} \rangle (E_{a_n} T_{b_m} \hat{g}).$$

pero

$$\langle \hat{f}, E_{a_n} T_{b_m} \hat{g} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} f(a_n),$$

entonces

$$S\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \sum_n f(a_n) E_{a_n} \hat{g} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \sum_n \langle \hat{f}, E_{a_n} \rangle E_{a_n} \hat{g},$$

donde

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \sum_n f(a_n) S^{-1}(E_{a_n} \hat{g}).$$

Luego, debido al operador frame  $S_0$ , se tiene que

$$S_0^{-1} \hat{f} = \sum_n \langle \hat{f}, S_0^{-1} E_{a_n} \rangle_{I_0} S_0^{-1} E_{a_n}$$

Además,  $S\hat{f} = \frac{S_0 \hat{f}}{2\sigma}$  y  $S^{-1} \hat{f} = (2\sigma) S_0^{-1} \hat{f}$  en  $L^2([-\sigma, \sigma])$

Por tanto

$$\hat{f} = \sqrt{2\sigma} \sum_n f(a_n) K_n \text{ si y solo si } f = \sqrt{2\sigma} \sum_n f(a_n) \check{K}_n.$$

Finalmente, si  $\{E_{a_n}\}$  es un frame-exacto, entonces por la parte (vi) del Teorema 2 ([19]),  $\{S_0^{-1} E_{a_n}\}$  es la única sucesión bi-ortonormal asociada a  $\{E_{a_n}\}$ , esto es,

$$\langle E_{a_m}, S_0^{-1}(E_{a_n}) \rangle = \delta_{m,n}.$$

Por tanto

$$K_n = \sum_n \langle E_{a_n} \hat{g}, h_m \rangle_{I_0} h_m = \sum_m \left\langle E_{a_n} \left( \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \right), S_0^{-1}(E_{a_m}) \right\rangle_{I_0} S_0^{-1}(E_{a_m})$$

$$K_n = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} S_0^{-1}(E_{a_n}) = \frac{h_n}{\sqrt{2\sigma}}$$

Por consiguiente

$$\phi_n(t) = (K_n(\omega))^\vee = \int K_n(\omega) e^{-2\pi i t \omega} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \langle h_n, \bar{E}_t \rangle_{I_0},$$

esto es,  $\phi_n(t) = (2\pi)^{-1/2} \psi_n(t)$ .

La técnica de los frames y sus duales frames en  $L^2(\mathbb{R})$ , es aplicable en diversos teoremas de muestreo como la asociada en la representación (3.1).

### 3.3 Análisis Multirresolución

**Definición 3.3.** *Un Análisis Multirresolución (AMR) sobre  $\mathbb{R}$ , consiste de una sucesión de subespacios cerrados  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R})$ , satisfaciendo:*

- (i)  $V_j \subset V_{j-1}, \forall j \in \mathbb{Z}$  (cadena de subespacios encajonados)
- (ii)  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}^{L^2} = L^2(\mathbb{R})$ , es decir  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  es densa en  $L^2(\mathbb{R})$
- (iii)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- (iv)  $f(x) \in V_j$  si y solo si  $f(2^j x) \in V_0$ .
- (v)  $f(x) \in V_0$  si y solo si  $f(x - n) \in V_0$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Además, por (iv) se tiene que si  $f(x) \in V_j$ , entonces

$$f(x - 2^j n) \in V_j, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}$$

- (vi) Existe  $\phi \in V_0$  tal que  $\{\phi_{0,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal en  $V_0$ .

Observemos, que todos los espacios  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  son versiones escaladas del espacio central  $V_0$ .

### 3.4 Base Ortonormal de Ondículas $\psi_{j,k}$ y la Proyección Ortogonal $P_j$ sobre $V_j$

Sea la función  $\phi_{j,n}(x) = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - n)$ , para todo  $j, n \in \mathbb{Z}$ . Entonces de acuerdo a la parte (iv) y (vi) de la Definición 3.3 se tiene que  $\{\phi_{j,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal de  $V_j$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$ . En este contexto, conociendo  $\phi$  construiremos la ondícula  $\psi$  y el criterio básico de *AMR*, el cual afirma lo siguiente:

Cuando una colección de subespacios cerrados  $\{V_j\}$  satisfacen las condiciones anteriores, entonces existe una base ortonormal de ondículas

$$\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$$

de  $L^2(\mathbb{R})$ , con

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k)$$

tal que para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$P_{j-1}f = P_j f + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

donde  $P_j$  es el operador proyección ortogonal sobre  $V_j$ .

La ondícula  $\psi$  a ser construida posteriormente, va a vivir en el complemento ortogonal de  $V_0$ , el cual lo denotaremos con  $W_0$ . Llamaremos  $\phi$  la *función escala* del *AMR*.

La Ondícula  $\psi$  es construida explícitamente, en la forma siguiente: Para todo  $j \in \mathbb{Z}$ , definimos  $W_j = V_j^\perp$  en  $V_{j-1}$ .

Como los  $\{\phi_{j,k}\}$ ,  $\{\psi_{j,k}\}$  son bases ortonormales de  $V_j$  y  $W_j$  respectivamente y mutuamente ortogonales entre sí, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_k \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle \phi_{j-1,k} &= \sum_k \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \\ &= \sum_k [\langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} + \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}] \end{aligned}$$

Luego,

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (3.2)$$

**Nota 1.** Observemos que  $\{\phi_{j-1,k}\}$  es una base ortonormal de  $V_{j-1}$ , luego si  $f \in V_{j-1}$ , entonces tenemos

$$f(x) = \sum_k a_k \phi_{j-1,k}$$

donde  $a_k = \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle$ . Análogamente, para las bases ortonormales  $\{\phi_{j,k}\}$  y  $\{\psi_{j,k}\}$  se tiene que

$$f_1(x) = \sum_k \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} \in V_j \quad \text{y} \quad f_2(x) = \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \in W_j$$

Luego,  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ . Seguidamente siendo  $W_j = V_j^\perp$  es un subespacio cerrado en  $V_{j-1}$ , entonces existe un subespacio  $V_j$  tal que

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j.$$

Por otra parte, la familia  $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  es mutuamente ortogonal, es decir

$$W_j \perp W_{j'} \quad \text{si} \quad j \neq j' \quad (3.3)$$

En efecto, supongamos que  $j > j'$ , entonces  $W_j \subset V_{j'} \perp W_{j'}$  y así  $W_j \perp W_{j'}$ .

Además, para  $j < J$  tenemos que

$$V_j = V_J \oplus \bigoplus_{k=0}^{J-j-1} W_{J-k} \quad (3.4)$$

Debido a la parte (ii) y (iii) de la Definición 3.3, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.4.**

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

**Demostración.** Ver [12]

Además, los espacios  $W_j$ , heredan la propiedad de escala de los  $V_j$ ,

$$f(x) \in W_j \text{ si y solo si } f(2^j x) \in W_0 \quad (3.5)$$

Esta propiedad nos permite afirmar, gracias a la descomposición,

$$P_{j-1}f = P_j f + \sum_k \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}),$$

que para un  $j$  fijo,  $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  constituye una base ortonormal para  $W_j$ , donde  $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$ . Pero, siendo  $\{\psi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  una base ortonormal para  $W_j$ , y tomando en cuenta el Teorema 3.4, entonces  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  será una base ortonormal para  $L^2(\mathbb{R})$ .

Además, (3.5) asegura que  $\{\psi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal para  $W_0$ .

**Objetivo:** Encontrar  $\psi \in W_0$  de tal manera que  $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sea una base ortonormal para  $W_0$ .



### 3.5 Algunas Propiedades de $\phi$ y $W_0$ .

a) Desde que  $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$  y  $\{\phi_{-1,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal para  $V_{-1}$ , entonces

$$\phi = \sum_n h_n \phi_{-1,n} \quad (3.6)$$

donde

$$h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \text{ y } \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1 \quad (3.7)$$

Entonces (3.6) puede ser expresado, como

$$\phi(x) = 2^{1/2} \sum_n h_n \phi(2x - n) \quad (3.8)$$

ó

$$\widehat{\phi}(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-\frac{\kappa}{2}n} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (3.9)$$

Por tanto,

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

donde  $m_0(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-i\xi n}$ .

Además,  $m_0(\xi)$  es una función  $2\pi$ -periódica en  $L^2([0, 2\pi])$  y

$$m_0(\xi) \in L^2([0, 2\pi])$$

b) La ortonormalidad de las  $\phi(x-k)$ , implica propiedades interesantes para  $m_0$ , como por ejemplo que,

$$|m_0(s)|^2 + |m_0(s + \pi)|^2 = 1 \text{ en casi todo punto } s \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

c) Caracterización del espacio  $W_0$ .

Por definición sabemos que el complemento ortogonal de  $V_0$  es definido por

$$W_0 = \{f \in V_{-1} : \langle f, g \rangle = 0, \text{ para todo } g \in V_0\}$$

Desde que  $f \in V_{-1}$ , tenemos  $f = \sum_n f_n \phi_{-1,n}$ , donde  $f_n = \langle f, \phi_{-1,n} \rangle$ . Esto implica que

$$\widehat{f}(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n f_n e^{-in\xi/2} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_f\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (3.11)$$

donde  $m_f(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n f_n e^{-in\xi}$ .

Además,  $m_f$  es una función  $2\pi$ -periódica en  $L^2([0, 2\pi])$  y  $m_f \in L^2([0, 2\pi])$ .

Del hecho que  $f \perp V_0$  implica que  $f \perp \phi_{0,k}$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , esto es,

$$\langle f, \phi_{0,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi_{0,k}(x)} dx = 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Pero

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\phi_{0,k}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\phi}(\xi)} e^{-i\xi k} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\phi}(\xi)} e^{i\xi k} d\xi$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\phi}(\xi)} e^{i\xi k} d\xi = 0$$

Discretizando la expresión anterior tenemos

$$\int_0^{2\pi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi\ell) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)} e^{i(\xi + 2\pi\ell)k} d\xi = 0,$$

es decir,

$$\int_0^{2\pi} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi\ell) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)} e^{i\xi k} d\xi = 0.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi\ell) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)} = 0, \quad (3.12)$$

debido a que la base  $\{e^{i\xi k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es densa en  $L^2([0, 2\pi])$ . Además la serie en (3.12) converge absolutamente en  $L^1([-\pi, \pi])$ . Así mismo se tiene,

$$\widehat{f}(\xi) = \lambda \left( \frac{\xi}{2} \right) \overline{m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right)} \widehat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} \right)$$

es decir,

$$\widehat{f}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} u(\xi) \overline{m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right)} \widehat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} \right) \quad (3.13)$$

donde  $u$  es una función  $2\pi$ -periódica.

**d)** La forma general (3.13), para la transformada de Fourier de  $f \in W_0$ , nos sugiere que consideremos,

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \overline{m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right)} \widehat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} \right) \quad (3.14)$$

como un candidato para nuestra Ondícula y dejando de lado cuestiones de convergencia, (3.13) puede ser expresado de la siguiente manera

$$\widehat{f}(\xi) = \left( \sum_k u_k e^{-i\xi k} \right) \widehat{\psi}(\xi) \quad \text{ó} \quad f(x) = \sum_k u_k \psi(x - k),$$

tal que las ondículas  $\psi(x - k)$  son un buen candidato para una base de  $W_0$ .

Observando las propiedades **a)** y **b)**,  $m_0$  y  $\widehat{\phi}$  nos aseguran que (3.14) define una función en  $L^2(\mathbb{R})$ , a la cual llamaremos  $\psi \in W_0$ . Luego,  $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal para  $W_0$ .

## 3.6 Existencia de una base ortonormal de ondículas

**Teorema 3.5.** *Si una cadena de subespacios cerrados  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  en  $L^2(\mathbb{R})$  satisface las condiciones de la Definición 3.3, entonces existe una base ortonormal de ondículas*

$$\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$$

asociadas a  $L^2(\mathbb{R})$  tal que

$$P_{j-1} = P_j + \sum_k \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (3.15)$$

donde  $P_j$  es el operador proyección ortogonal sobre  $V_j$ .

Una posibilidad para la construcción de la Ondícula  $\psi$  es dada por:

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{\frac{i\xi}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

donde

$$m_0(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-in\xi} \quad ; \quad h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \quad \text{con} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1, \quad (3.16)$$

equivalentemente

$$\psi = \sum_n (-1)^{n-1} \bar{h}_{1-n} \phi_{-1,n} \quad (3.17)$$

esto es,

$$\psi(x) = \sum_n 2^{1/2} (-1)^{n-1} \bar{h}_{1-n} \phi(2x - n)$$

con convergencia de la serie en el sentido de  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Nota 2.** Si la Ondícula  $\psi$  esta dado por

$$\psi(x) = \sum_n 2^{1/2} (-1)^{n-1} \bar{h}_{1-n} \phi(2x - n)$$

esto equivale a escribir

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{\frac{i\xi}{2}} m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right) \widehat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} \right). \quad (3.18)$$

**Nota 3.** La ondícula  $\psi$  no es determinada en forma única por la cadena del AMR y requisito (3.15): Si  $\psi$  satisface (3.17), entonces un  $\psi^\#$  sería del tipo

$$\widehat{\psi^\#}(\xi) = \rho(\xi) \widehat{\psi}(\xi) \quad (3.19)$$

con  $\rho$  una función  $2\pi$ -periodica y  $|\rho(\xi)| = 1$  en casi todo punto  $\xi \in \mathbb{R}$ . En particular, se puede elegir  $\rho(\xi) = \rho_0 e^{imp}$  con  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $|\rho_0| = 1$ . Así, definiremos de (3.17),

$$\psi = \sum_n g_n \phi_{-1,n} \text{ con } g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n}, \quad (3.20)$$

esto es,

$$\psi(x) = 2^{1/2} \sum_n g_n \phi(2x - n) = 2^{1/2} \sum_n (-1)^n \bar{h}_{1-n} \phi(2x - n)$$

u ocasionalmente

$$g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n+2N} \quad (3.21)$$

donde  $N \in \mathbb{Z}$  es elegido apropiadamente. ■

## 3.7 Análisis Multirresolución de Haar

Para objetivizar, repitamos los argumentos hechos por A. Haar en 1909, a quien se le reconoce como uno de los pioneros de la teoria de ondículas. Sea

la función

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.22)$$

En general,  $\phi$  no precisa tener soporte compacto, como lo tiene en este caso. Además  $\phi(x)$  y  $\phi(x - k)$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$  son ortogonales; en general  $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una familia ortonormal.

De (3.22) se observa que

$$\phi(2x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$\phi(2x - 1) = \begin{cases} 1 & ; \quad \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

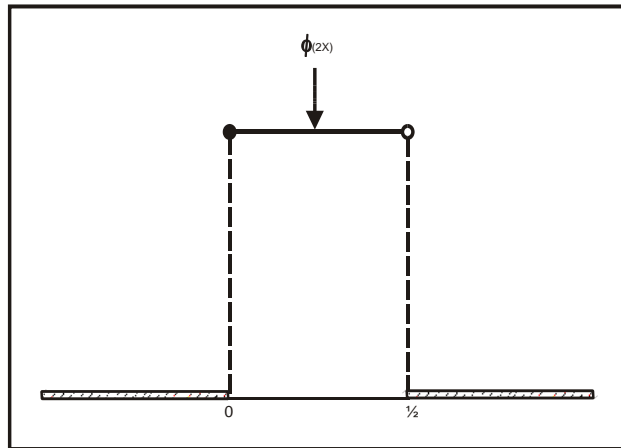


Figura 3.1

Luego, multiplicando escalarmente en  $L^2(\mathbb{R})$  a  $\phi(2x)$  y  $\phi(2x - 1)$  por  $\phi(x)$  tenemos

$$\langle \phi(x), \phi(2x) \rangle = \int_0^{1/2} \phi(x) \overline{\phi(2x)} dx = \frac{1}{2}$$

y

$$\langle \phi(x), \phi(2x - 1) \rangle = \int_{1/2}^1 \phi(x) \overline{\phi(2x - 1)} dx = \frac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$h_n = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \overline{\phi(2x - n)} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & ; \text{ si } n = 0, 1. \\ 0 & ; \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Sin embargo,

$$\phi(2x) + \phi(2x - 1) = \phi(x),$$

el cual nos representa la *ecuación de dilatación*. Así construiremos la ondícula  $\psi$  vía:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,0}(x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{-1,1}(x) \\ \psi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2x) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\phi(2x - 1) \end{aligned}$$

entonces tenemos,  $\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1)$ , el cual resulta ser

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & ; 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & ; \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (3.23)$$

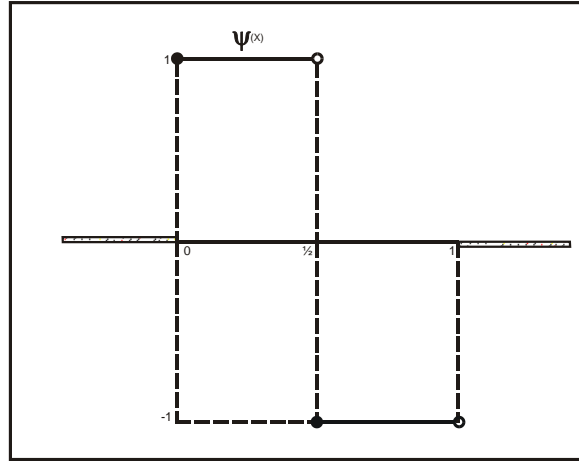


Figura 3.2

Además veamos que  $\psi(x)$  y  $\psi(2x)$  son ortogonales. En efecto, de (3.23) se sigue que

$$\psi(2x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x < 1/4 \\ -1 & ; 1/4 \leq x < 1/2 \\ 0 & ; \text{en otro caso} \end{cases}$$



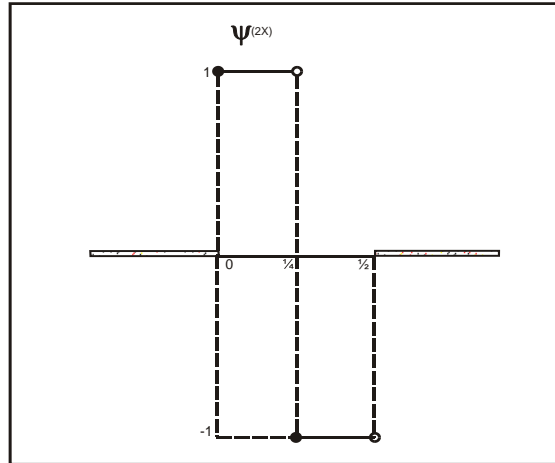


Figura 3.3

Por tanto,

$$\langle \psi(x), \psi(2x) \rangle = \int_0^{1/4} \psi(x) \overline{\psi(2x)} dx + \int_{1/4}^{1/2} \psi(x) \overline{\psi(2x)} dx = 0.$$

Ahora construyamos las traslaciones-dilataciones

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k).$$

Observamos que los soportes de  $\psi_{j,k}$  son intervalos de la forma  $[2^j k, 2^j(k+1))$ .

Graficamente se tiene la siguiente metamorfosis

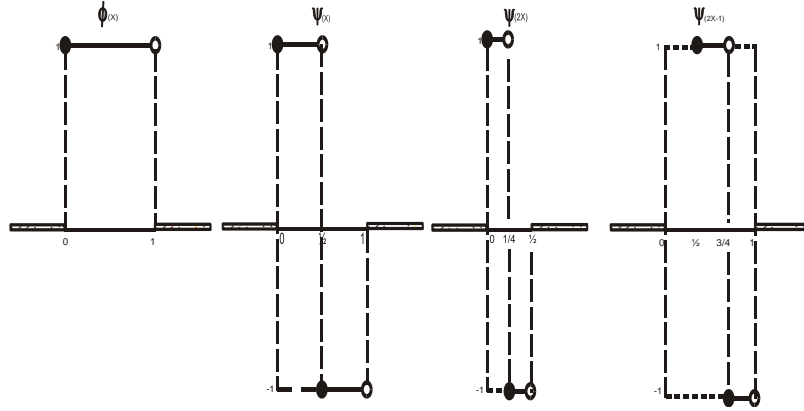


Figura 3.4

Ahora pasamos al siguiente nivel obteniéndose las siguientes funciones dilataciones-traslaciones  $\psi(4x)$ ,  $\psi(4x - 1)$ ,  $\psi(4x - 2)$  y  $\psi(4x - 3)$ .

En general, se observan que los soportes de  $\phi(x)$  y  $\psi(x)$  son intervalos de longitud 1, los soportes de  $\psi(2x)$  y  $\psi(2x - 1)$  son intervalos de longitud  $1/2$ , en tanto que los soportes de  $\psi(4x)$  y de sus dilataciones-traslaciones son intervalos de longitud  $1/4$ , y así sucesivamente la Familia de Haar resultante  $\{\phi(x), \psi(2^{-j}x - k)\}_{j \leq 0}$ ,  $0 \leq k < 2^{-j}$  para  $j$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , es una base del espacio  $L^2([0, 1])$  de tal manera que es trasladada para todo  $j \in \mathbb{Z}$  a una base de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Por tanto

$$\{\psi_{j,k}\} = \{2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}} \quad (3.24)$$

es un sistema ortonormal completo de  $L^2(\mathbb{R})$  (notese que como  $\{\psi_{j,k}\}$  es un sistema ortogonal completo de  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces  $\{\psi_{j,k}\}$  es una base ortogonal).

Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , entonces su representación es

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}$$

donde la convergencia es en el sentido de  $L^2(\mathbb{R})$ . Además, la función  $\phi$  es llamada *función escala* o *ondícula padre* y  $\psi$  la *ondícula básica* o *ondícula madre*. Por tanto,  $\{\psi_{j,k}\}$  son las Ondículas de Haar.

**Observación:**

Las Ondículas de Haar presentan una dificultad, no son continuas y su transformada de Fourier decae como  $\frac{1}{|\omega|}$  cuando  $|\omega| \rightarrow \infty$ . Debemos sospechar la dificultad de construirse otras bases de ondículas.

Sin embargo, antes de formalizarse el *AMR* ya se habían construido ejemplos de bases Ortonormales de Ondículas Regulares. El *AMR* fue formulado en 1986 por Y. Meyer [18] y S. Mallat [16] y [17].

Mallat trabajaba en el análisis de la imagen, en donde es frecuente trabajar simultáneamente en diferentes escalas, lo que motivó a interpretar las bases ortonormales de ondículas (construidas por Meyer) como instrumentos para describir matemáticamente el incremento (o disminución) de información, lo que permite obtener una buena, o mejor aproximación a altas escalas o multirresolución. Con Mallat (1989) la teoría de ondículas entra a una etapa de rápido desarrollo, debido a sus interesantes aplicaciones a la teoría de procesamientos de imágenes.

Continuando con el ejemplo de Haar, hagamos el siguiente argumento:

Sea  $f \in V_0$ , entonces  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k)$ , con  $\{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , esto es,  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$ , de esta forma  $f$  es una función constante por pedazos con

saltos de discontinuidad en  $\mathbb{Z}$ .

Así, por definición  $V_0$  es el subespacio cerrado de  $L^2(\mathbb{R})$ , de las funciones constantes por pedazos, con salto de discontinuidad en  $\mathbb{Z}$ . Por analogía,

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \left/ \begin{array}{l} f \text{ es constante por trozos sobre } [2^j k, 2^j(k+1)], \\ \text{para todo } k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}$$

que consiste en un subespacio cerrado de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Tenemos que  $\{2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_j$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$ .

Se verifica que  $V_j \subset V_{j-1}$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$  y  $f(x) \in V_j$  si y sólo si  $f(2^j x) \in V_0$ . De esta manera, se construye una familia  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  de subespacios cerrados de  $L^2(\mathbb{R})$ , que satisfacen las propiedades de un *AMR*.

Por tanto,  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  es un ejemplo de *AMR*, en nuestro ejemplo de Haar.

# Capítulo 4

## Bases ortonormales de Ondículas

### 4.1 Bases de Riesz de las Funciones Escalas

Sabemos que por la condición (vi) de la Definición 2.3, existe  $\phi \in V_0$ , tal que  $\{\phi_{0,n} : n \in \mathbb{Z}\}$  es una base ortonormal para  $V_0$ .

La ortonormalidad de los  $\{\phi_{0,k}\}$  puede ser relacionada vía el siguiente argumento en el que solamente es necesario que los  $\{\phi_{0,k}\}$  constituyan una base de Riesz.

El siguiente argumento muestra como construir una base ortonormal  $\{\phi_{0,k}^\#\}$  para  $V_0$  empezando con una base de Riesz  $\{\phi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  de  $V_0$ .

**Definición 4.1.** *El conjunto  $\{\phi_{0,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  es una base de Riesz para  $V_0$  si y solo si se satisfacen las condiciones:*

$$(i) \quad V_0 = \langle \{\phi_{0,k}\} \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$$

(ii) Para toda sucesión  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , se tiene

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k \phi(x - k) \right\|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2$$

donde  $A > 0$ ,  $B < \infty$  son independientes de los  $c_k$ .

Sea  $f \in V_0$ , entonces  $f(x) = \sum_k c_k \phi(x - k)$ . Luego,

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_k c_k e^{-i\xi k} \widehat{\phi}(\xi),$$

y si hacemos  $m(\xi) = \sum_k c_k e^{-i\xi k}$ , la anterior expresión queda simplificada en

$$\widehat{f}(\xi) = m(\xi) \widehat{\phi}(\xi).$$

Pero, por el Teorema de Plancherel se tiene que  $\|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2$ , entonces

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |m(\xi) \widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi,$$

es decir,

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |m(\xi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Discretizando el segundo miembro de la igualdad anterior tenemos

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2 \left( \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 \right) d\xi$$

y como

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 = (2\pi)^{-1}, \text{ en casi todo punto de } \xi \in \mathbb{R},$$

se sigue que

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2 d\xi,$$

entonces

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|m\|_{L^2([0,2\pi])}.$$

Sin embargo, como  $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz, entonces existe un isomorfismo

$\theta : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  definido por:

$$\theta(c_k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi(x - k), \text{ para todo } c_k \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Por lo tanto, gracias al isomorfismo  $\theta : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  establecemos que  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$  es equivalente a  $\|c_k\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$  y como  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|m\|_{L^2([0,2\pi])}$  se tiene que las normas  $\|\cdot\|_{L^2([0,2\pi])}$  y  $\|\cdot\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$  son equivalentes.

A continuación demostraremos que la condición (ii) de la Definición 4.1, es equivalente a

$$0 < (2\pi)^{-1} A \leq \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \leq (2\pi)^{-1} B < \infty, \text{ en casi todo punto } \xi \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

En efecto, a partir de la condición (ii) de la Definición 3.1 se tiene:

$$\begin{aligned} A (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \left| \sum_k c_k e^{-i\xi k} \right|^2 d\xi &\leq \left( \int_0^{2\pi} \left| \sum_k c_k e^{-i\xi k} \right|^2 d\xi \right) \left( \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \right) \\ &\leq B (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \left| \sum_k c_k e^{-i\xi k} \right|^2 d\xi \end{aligned}$$

Por tanto,

$$0 < (2\pi)^{-1} A \leq \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \leq (2\pi)^{-1} B < \infty, \text{ en casi todo punto } \xi \in \mathbb{R}.$$

Por consiguiente, podemos definir  $\phi^\# \in L^2(\mathbb{R})$  por medio de

$$\widehat{\phi^\#}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \left( \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \right)^{-1/2} \widehat{\phi}(\xi) \quad (4.2)$$

Claramente,

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi^\#}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = (2\pi)^{-1}, \text{ en casi todo punto } \xi \in \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

pues de (4.2) se tiene

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi^\#}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = (2\pi)^{-1} \left| \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \right|^{-1} \left( \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \right)$$

y como

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = (2\pi)^{-1}, \text{ en casi todo punto de } \xi \in \mathbb{R},$$

entonces la última expresión resulta ser (4.3), lo cual significa que  $\{\phi_{0,k}^\#\}$  son ortonormales.

Por otro lado, el espacio  $V_0^\#$  generado por  $\{\phi_{0,k}^\#\}$  es dado por

$$V_0^\# = \left\{ f : f = \sum_n f_n^\# \phi^\#(x - n), \text{ donde } f_n^\# \in \ell^2(\mathbb{Z}), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \right\},$$

esto es

$$V_0^\# = \left\{ f : \widehat{f} = v \widehat{\phi^\#}, \text{ donde } v \in L^2([0, 2\pi]) \text{ y es } 2\pi\text{-periódica} \right\}$$

y por (4.2)

$$V_0^\# = \left\{ f : \widehat{f} = v_1 \widehat{\phi}, \text{ donde } v_1 \in L^2([0, 2\pi]) \text{ y es } 2\pi\text{-periódica} \right\}.$$



Luego, debido a que  $\{\phi_{0,n}\}$  es una base de Riesz para  $V_0$ , se tiene

$$V_0^\# = \left\{ f : f = \sum_n f_n \phi(x - n), \text{ donde } f_n \in \ell^2(\mathbb{Z}), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \right\} = V_0$$

**Nota 4.** Sea  $v$  una función  $2\pi$ -periódica que se encuentra en  $L^2([0, 2\pi])$  y consideremos

$$v_1 = (2\pi)^{-1/2} \left( \sum_\ell \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \right)^{-1/2} v(\xi),$$

Entonces  $v_1$ , es una función  $2\pi$ -periódica en  $L^2([0, 2\pi])$ .

En efecto

$$|v_1(\xi)|^2 = (2\pi)^{-1} \left| \sum_\ell \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \right|^{-1} |v(\xi)|^2$$

y por (4.1) tenemos

$$|v_1(\xi)|^2 \leq (2\pi)^{-1} (2\pi) A^{-1} |v(\xi)|^2,$$

es decir,

$$|v_1(\xi)|^2 \leq A^{-1} |v(\xi)|^2.$$

Luego, integrando de 0 a  $2\pi$  obtenemos

$$\int_0^{2\pi} |v_1(\xi)|^2 d\xi \leq A^{-1} \|v\|_{L^2([0, 2\pi])} < \infty,$$

con lo cual se tiene que  $v_1 \in L^2([0, 2\pi])$ .

Ahora veamos que  $v_1$  es una función  $2\pi$ -periódica. Sea  $k \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$v_1(\xi + 2k\pi) = (2\pi)^{-1/2} \left( \left[ \sum_\ell \left| \widehat{\phi}(\xi + 2k\pi + 2\pi\ell) \right|^2 \right]^{-1/2} \right) v(\xi + 2k\pi).$$

Como  $v(\xi + 2k\pi) = v(\xi)$  y si hacemos el cambio de variable  $k + \ell = t$ , entonces la anterior expresión resulta ser

$$v_1(\xi + 2k\pi) = (2\pi)^{-1/2} \left( \left[ \sum_t |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi t)|^2 \right]^{-1/2} \right) v(\xi),$$

es decir,  $v_1(\xi + 2k\pi) = v_1(\xi)$ , con lo cual se tiene lo deseado.

## 4.2 La Función Escala como un Punto de Iniciación

En esta parte formalizaremos el *AMR*  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ , construyendo en principio  $V_0$  y luego los  $V_j$  por dilatación.

Construiremos  $V_0$  a partir de una función  $\phi$ , la cual satisface la condición

$$\phi(x) = \sum_n c_n \phi(2x - n) \quad (4.4)$$

donde  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , esto es,  $\sum_n |c_n|^2 < \infty$  y tal que

$$0 < \alpha \leq \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \leq \beta < \infty \quad (4.5)$$

Definamos

$$V_j = \overline{\langle \{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} \rangle} \quad (4.6)$$

donde  $\phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k)$ .

Las condiciones (4.4) y (4.5) son necesarias y suficientes para asegurar que  $\{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  sea una base de Riesz en cada  $V_j$ , y que los  $V_j$  satisfagan la propiedad de la cadena de subespacios encajonados de la definición 3.3.

Ahora nuestro objetivo es mostrar que  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  es un *AMR* de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Veamos entonces que existe una base de Riesz en  $V_0$  dado como en la parte (vi) de la Definición 3.3

En efecto, sea  $g \in V_0$ , entonces

$$g(x) = \sum_k c_k \phi(x - k)$$

cuya transformada de Fourier es

$$\widehat{g}(\xi) = m(\xi)\widehat{\phi}(\xi),$$

donde  $m(\xi) = \sum_k c_k e^{-i\xi k}$ .

Así mismo, por el teorema de Plancherel se tiene  $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$ , por lo que se sigue que

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |m(\xi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi$$

Discretizando  $\mathbb{R}$  en intervalos de  $[0, 2\pi]$  tenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2 \left( \sum_{\ell} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 \right) d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} |m(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Luego,  $\|f\|_2^2 = \|m\|_{L^2([0, 2\pi])}^2$ . Pero,  $m(\xi) = \sum_k c_k e^{-i\xi k}$ , entonces

$$\begin{aligned} \|m\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 &= \left\langle \sum_k c_k e^{-i\xi k}, \sum_{\ell} c_{\ell} e^{-i\xi \ell} \right\rangle \\ &= \sum_k c_k \left( \sum_{\ell} \bar{c}_{\ell} \langle e^{-i\xi k}, e^{-i\xi \ell} \rangle \right) \end{aligned}$$

Además

$$\langle e^{-i\xi k}, e^{-i\xi \ell} \rangle = \begin{cases} 1 & ; \quad k = \ell \\ 0 & ; \quad k \neq \ell \end{cases},$$

por lo que se deduce

$$\|m\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 = \sum_k c_k \bar{c}_k,$$

es decir,

$$\|m\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 = \sum_k |c_k|^2 = \|\{c_k\}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2.$$

Por lo tanto, gracias a la isometría  $\theta : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  establecemos que

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2 = \|m\|_{L^2([0,2\pi])} = \|\{c_k\}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}.$$

Por consiguiente, la propiedad de que  $\{\phi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sea una base de Riesz en  $V_0$ , significa también que

$$\|f\|_2 = \|m\|_{L^2([0,2\pi])} = \|\{c_k\}\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$$

Veamos ahora que el subespacio  $V_j$  definido en (4.6) es equivalente a la condición (iv) de la Definición 3.3. En efecto, si  $f(x) \in V_0$  esto implica tener que  $f(2^j x) \in V_{-j}$ , es decir,

$$f(x) \in V_0 \text{ si y sólo si } f(2^j x) \in V_{-j}.$$

Luego, haciendo  $x = 2^{-j}y$  obtenemos

$$f(2^{-j}y) \in V_0 \text{ si y sólo si } f(y) \in V_{-j}, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto,

$$f(2^j x) \in V_0 \text{ si y sólo si } f(x) \in V_j, \text{ para todo } j \in \mathbb{Z},$$

es decir, se cumple lo afirmado.

Además

$$f(x) \in V_j \text{ si y sólo si } f(2x) \in V_{j-1}.$$

Así mismo se verifica que  $V_j$  satisface la propiedad de la cadena de subespacios encajonados (parte (i) de la definición 3.3), y la invarianza de  $V_0$  bajo traslaciones (parte (v) de la Definición 3.3). Sin embargo, para asegurarnos que estamos ante un *AMR*, necesitamos ver que las condiciones (ii) y (iii) de la definición 3.3 se cumplan. Por ello mencionaremos los siguientes teoremas.

### 4.3 El Teorema de Separabilidad

**Teorema 4.1.** *Supongamos que  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  satisface (4.5) y definimos  $V_j$  como en (4.6), entonces  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ .*

**Demostración.** Ver [12]

Finalmente para probar la condición (ii) de la Definición 3.3, asumamos que  $\widehat{\phi}$  es acotada y que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx \neq 0.$$

Todo ello lo resumimos en el siguiente teorema.

### 4.4 El Teorema de la Densidad

**Teorema 4.2.** *Supongamos que  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  satisface*

$$0 < \alpha \leq \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \leq \beta < \infty$$

*y que, además,  $\widehat{\phi}(\xi)$  es acotada para todo  $\xi$  y continua en  $\xi = 0$ , con  $\widehat{\phi}(0) \neq 0$ .*

*Definimos  $V_j$  como en (4.6). Entonces*

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j}^{L^2} = L^2(\mathbb{R})$$

**Demostración.** Ver [12].

### 4.5 Observaciones

**Observación 4.1.** Si en los teoremas 4.1 y 4.2 le agregamos otras condiciones a  $\phi$ , entonces estos teoremas pueden ser probadas con fáciles estima-

tivas. Por ejemplo, Michelli en 1991 plantea: Que las mismas conclusiones son obtenidas si  $\phi$  es continua y satisface las condiciones

$$i) |\phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1-\varepsilon}$$

$$ii) \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \phi(x - \ell) = k, \text{ donde } k \neq 0. \text{ Entonces:}$$

$$\phi \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx \neq 0$$

En efecto, como  $\phi$  es continua y satisface  $|\phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1-\varepsilon}$  entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(x)| dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^{-1-\varepsilon} dx,$$

lo cual puede ser escrito como

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(x)| dx \leq C \left[ \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1-x)^{1+\varepsilon}} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^{1+\varepsilon}} \right]$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(x)| dx < \infty,$$

pues las integrales del segundo miembro de la expresión anterior son convergentes. Por tanto,

$$\phi \in L^1(\mathbb{R}).$$

A su vez de la condición *ii*) se sigue que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \phi(x - \ell)\phi(x) = k\phi(x)$$

e integrando sobre  $\mathbb{R}$  tenemos

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x - \ell)\phi(x) dx = k \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx.$$

Por último, como  $\{\phi_{0,\ell}\}$  es una base ortonormal y

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x - \ell)\phi(x)dx = \begin{cases} 1, & \ell = 0 \\ 0, & \ell \neq 0 \end{cases}$$

entonces en la última expresión obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = \frac{1}{k}, \text{ donde } k \neq 0.$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx \neq 0.$$

**Observación 4.2.** Si  $\widehat{\phi}$  es acotada, y continua en cero, entonces la condición  $\widehat{\phi}(0) \neq 0$  es necesaria en el Teorema 4.2.

**Observación 4.3.** De acuerdo al Teorema 4.2, se prueba que

$$|\widehat{\phi}(0)|^2 \leq \frac{B}{2\pi}$$

**Observación 4.4.** Las condiciones  $\widehat{\phi} \in L^\infty(\mathbb{R})$  y  $\widehat{\phi}(0) \neq 0$ , con  $\widehat{\phi}$  continua en cero implica algunas restricciones sobre los  $c_n$ .

En efecto, como  $\phi(x) = \sum_n c_n \phi(2x - n)$ , entonces

$$\widehat{\phi}(\xi) = 2^{-1} \sum_n c_n e^{-i\frac{\xi}{2}n} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

donde  $m_0(\xi) = 2^{-1} \sum_n c_n e^{i\xi n}$ . En particular, si  $\xi = 0$  se tiene

$\widehat{\phi}(0) = m_0(0)\widehat{\phi}(0)$ . Pero,  $\widehat{\phi}(0) \neq 0$  entonces  $m_0(0) = 1$ , o equivalentemente  $m_0(0) = 2^{-1} \sum_n c_n$ , esto es,  $\sum_n c_n = 2$ .



Además, como

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) \widehat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} \right)$$

esto implica que  $m_0$  es continua. En particular,  $m_0$  es continua en  $\xi = 0$ .

Por otra parte, como  $|\widehat{\phi}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-1/2-\varepsilon}$ , entonces la continuidad de  $\widehat{\phi}$  implica que  $\sum_{\ell} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2$  sea continua. En efecto, como

$$|\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)| \leq C(1 + |\xi + 2\pi\ell|)^{-1/2-\varepsilon}$$

entonces

$$\begin{aligned} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 &\leq \frac{C^2}{(1 + |\xi + 2\pi\ell|)^{1/2+\varepsilon}} \\ &\leq \frac{C'}{|\xi + 2\pi\ell|^{1/2+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

De donde deducimos que  $|\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|$  es acotada, es más es uniformemente continua, y como  $\sum_{\ell} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2$  converge uniformemente, esto implica que  $\sum_{\ell} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2$  sea continua.

Además, debido a que  $\sum_{\ell} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2$  y  $\widehat{\phi}(\xi)$  son continuas, entonces  $\widehat{\phi}^{\#} \in L^2(\mathbb{R})$  es continua, definida por

$$\widehat{\phi}^{\#}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \left[ \sum_{\ell} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 \right]^{-1/2} \widehat{\phi}(\xi).$$

Consecuentemente, definimos  $m_0^{\#}$  por medio de

$$m_0^{\#}(\xi) = \frac{\widehat{\phi}^{\#}(2\xi)}{\widehat{\phi}^{\#}(\xi)}.$$

Entonces

$$m_0^\#(\xi) = m_0(\xi) \left[ \sum_{\ell} |\widehat{\phi}(2\xi + 2\pi\ell)|^2 \right]^{-1/2} \left[ \sum_{\ell} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 \right]^{1/2}, \quad (4.7)$$

donde  $m_0(\xi) = \frac{\widehat{\phi}(2\xi)}{\widehat{\phi}(\xi)}$ .

Veamos a continuación que  $m_0^\#$  satisface las siguientes propiedades:

*i)*  $m_0^\#(0) = 1$ .

Basta hacer  $\xi = 0$  en  $m_0^\#(\xi) = \frac{\widehat{\phi}^\#(2\xi)}{\widehat{\phi}^\#(\xi)}$  para obtener lo deseado.

*ii)*  $|m_0^\#(\xi)|^2 + |m_0^\#(\xi + \pi)|^2 = 1$ .

En efecto. De  $\widehat{\phi}^\#(2\xi) = m_0^\#(\xi)\widehat{\phi}^\#(\xi)$  y  $\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}^\#(\xi + 2\pi\ell)|^2 = (2\pi)^{-1}$  tenemos

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0^\# \left( \frac{\xi + 2\pi\ell}{2} \right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}^\# \left( \frac{\xi + 2\pi\ell}{2} \right) \right|^2 = (2\pi)^{-1},$$

el cual procediendo de manera análoga como se probó (3.10), se obtendrá la propiedad *ii*).

*iii)*  $m_0^\#(\pi) = 0$ .

En efecto. Si hacemos  $\xi = 0$  en la propiedad *ii*), entonces obtenemos

$$|m_0^\#(0)|^2 + |m_0^\#(\pi)|^2 = 1$$

y gracias a la propiedad *i*) se sigue *iii*).

Así mismo,  $m_0(\pi) = 0$ , pues haciendo  $\xi = \pi$  en (4.7) y usando la propiedad *ii*) obtenemos

$$0 = m_0(\pi) \left[ \sum_{\ell} \left| \widehat{\phi}(2\pi + 2\pi\ell) \right|^2 \right]^{-1/2} \left[ \sum_{\ell} \left| \widehat{\phi}(\pi + 2\pi\ell) \right|^2 \right]^{1/2}$$

Por tanto  $m_0(\pi) = 0$ , con lo cual se obtiene lo deseado.

Por otra parte, como  $m_0(\xi) = \frac{1}{2} \sum_n c_n e^{in\xi}$ , entonces cuando  $\xi = \pi$  obtenemos que  $\frac{1}{2} \sum_n c_n (e^{i\pi})^n = 0$ . Luego se deduce  $\sum_n c_n (-1)^n = 0$ , el cual descomponiendo la suma en sus índices pares e impares se llega a que

$$\sum_n c_{2n} - \sum_n c_{2n+1} = 0,$$

es decir,  $\sum_n c_{2n} = \sum_n c_{2n+1}$ . Pero,  $\sum_n c_n = 2$ , entonces

$$\sum_n c_{2n} = \sum_n c_{2n+1} = 1$$

Así, esto es consistente con la condición de admisibilidad para  $\psi$ , esto es

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0. \blacksquare$$

## 4.6 Estrategia para la construcción de nuevas Bases Ortonormales de Ondículas.

Todo lo hecho anteriormente nos sugiere una estrategia, para la construcción de nuevas bases ortonormales de ondículas, que consiste en:

- a) Elegir adecuadamente  $\phi$  tal que:

(i)  $\phi$  y  $\widehat{\phi}$  tengan un decaimiento razonable.

(ii)  $\phi$  y  $\widehat{\phi}$  deben satisfacer, las siguientes características

$$\phi(x) = \sum_n c_n \phi(2x - n) \quad \text{y} \quad 0 < \alpha \leq \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \leq \beta < \infty, \text{ donde}$$

$$\sum_n |c_n|^2 < \infty.$$

(iii)  $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx \neq 0.$

Por los Teoremas 4.1 y 4.2 los  $V_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , conforman un *AMR*.

b) Considerar,  $\widehat{\phi}^\#(\xi) = \widehat{\phi}(\xi) \left[ 2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 \right]^{-1/2}$ , el cual ejecuta la llamada ortonormalización refinada.

c) Finalmente,

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} m_0^\# \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right) \widehat{\phi}^\# \left( \frac{\xi}{2} \right),$$

donde  $m_0^\#(\xi)$  es definido en (4.7). Equivalentemente se puede escribir

$$\psi(x) = \sum_n (-1)^n h_{1-n}^\# \phi^\#(x - n),$$

con  $m_0^\#(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n h_n^\# e^{-in\xi}.$

## 4.7 Teorema de la Regularidad de Ondículas

Para las bases de ondículas (no necesariamente ortonormales) existe una relación entre la regularidad de  $\psi$  y la multiplicidad cero de  $\widehat{\psi}$  en  $\xi = 0$ . Esto es una consecuencia del siguiente teorema.

**Teorema 4.3.** *Supongamos que  $f$  y  $\tilde{f}$  son dos funciones no idénticamente constantes tal que satisfacen:*

$$(i) \quad \langle f_{j,k}, \tilde{f}_{j',k'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'} \quad , \quad \text{donde} \quad f_{j,k}(x) = 2^{-j/2} f(2^{-j}x - k) \quad \text{y}$$

$$\tilde{f}_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \tilde{f}(2^{-j}x - k).$$

$$(ii) \quad f \in C^m(\mathbb{R}) \quad \text{tal que} \quad |\tilde{f}(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\alpha}, \quad \text{donde} \quad \alpha > m + 1 \quad \text{y} \quad C > 0.$$

(iii)  $f^{(\ell)}$  es acotada para  $\ell \leq m$ . Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \tilde{f}(x) dx = 0, \quad \text{para} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (4.8)$$

**Demostración.** Ver [12].

Una consecuencia inmediata del Teorema 4.3 es el siguiente resultado.

**Corolario 4.1.** *Si  $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  constituye un conjunto ortonormal en  $L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$ , además  $\psi \in C^m(\mathbb{R})$  es tal que  $|\psi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-m-1-\varepsilon}$  y  $\psi^{(\ell)}$  es acotada para  $\ell \leq m$ , entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx = 0, \quad \text{para} \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, m.$$

**Demostración.** Es inmediato del Teorema 4.3, haciendo  $f = \tilde{f} = \psi$ .

**Corolario 4.2.** *Supongamos que  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  son ortonormales. Entonces es imposible que  $\psi$  tenga un decaimiento exponencial y que  $\psi$  sea de clase  $C^\infty$ , con todas sus derivadas acotadas, a menos que  $\psi$  sea idénticamente nula.*

**Demostración.** Ver [12].

**Corolario 4.3.** *Supongamos que  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  constituye una base ortonormal de ondículas asociadas con un AMR, tal como fueron descritas en el Capítulo 3. Además si*

$$|\phi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-m-1-\varepsilon}, \quad |\psi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-m-1-\varepsilon}$$

y  $\psi \in C^m$  con  $\psi^{(\ell)}$  acotadas para  $\ell \leq m$ , entonces  $m_0$ , definida según (3.16) se factoriza como,

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right) \mathcal{L}(\xi) \quad (4.9)$$

donde  $\mathcal{L}$  es una función  $2\pi$ -periódica y  $\mathcal{L} \in C^m$ .

**Demostración.** En efecto, por Corolario 4.1, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx = 0 \quad \text{si y solo si} \quad \left. \frac{d^\ell \widehat{\psi}(\xi)}{d\xi^\ell} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \text{para todo } \ell \leq m.$$

A su vez, debido a la Observación 4.2 del Teorema 4.2,  $\widehat{\phi}(0) \neq 0$  y como  $\widehat{\phi}$  y  $\widehat{\psi} \in C^m$ , esto significa que  $m_0$  es diferenciable sucesivamente hasta el orden  $\ell \leq m$  en  $\xi = \pi$ , es decir,

$$\left. \frac{d^\ell m_0}{d\xi^\ell} \right|_{\xi=\pi} = 0, \quad \text{para } \ell \leq m.$$

En efecto, como  $\widehat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \widehat{\phi}(\xi/2)$ , y  $\widehat{\phi}(0) = 1$ , entonces

$$0 = \widehat{\psi}(0) = \overline{m_0(\pi)} \widehat{\phi}(0) = \overline{m_0(\pi)}$$

donde deducimos que  $\overline{m_0(\pi)} = 0$ , esto es,  $\xi = \pi$  es un cero de  $m_0$ .

Asimismo, derivando sucesivamente hasta el orden  $\ell \leq m$  se tiene que  $m_0$  posee un cero de orden  $m + 1$  en  $\xi = \pi$ . Luego

$$m_0(\xi) = (\xi - \pi)^{m+1} \mathcal{L}(\xi) \quad \text{si y solo si} \quad m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^{m+1} \mathcal{L}(\xi)$$

donde  $\mathcal{L}$  es un polinomio trigonométrico,  $2\pi$ -periódico y debido a que  $m_0 \in C^m$  se tiene  $\mathcal{L} \in C^m$ . Esto significa que  $m_0$  sería de la forma

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi),$$

con  $N = m + 1 \geq 1$ . ■

# Capítulo 5

## Análisis Multirresolución y su conexión con Esquemas de Filtramiento de Sub-Bandas

### 5.1 Proceso Esquemático para el Cálculo de los Coeficientes de Ondículas.

El Análisis Multirresolución (*AMR*) produce un esquema rápido para el cálculo de los coeficientes de ondículas de una función dada.

La idea es, si  $f$  es una señal o función de energía finita, entonces la podemos representar por

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$



Dada la función escala  $\phi$  (con respecto a una escala fina), por (3.20) tenemos

$$\psi = \sum_n g_n \phi_{-1,n}, \text{ donde } g_n = (-1)^n \bar{h}_{1-n}, \quad h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \text{ con } \sum_n |h_n|^2 = 1.$$

Por tanto,

$$\psi(x) = 2^{1/2} \sum_n (-1)^n \bar{h}_{1-n} \phi(2x - n).$$

Luego, tenemos

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(x) &= 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \\ &= 2^{-j/2} 2^{1/2} \sum_n (-1)^n \bar{h}_{1-n} \phi(2^{1-j}x - 2k - n) \\ &= \sum_n (-1)^n \bar{h}_{1-n} 2^{-\left(\frac{j-1}{2}\right)} \phi(2^{1-j}x - (2k + n)) \\ &= \sum_n g_n 2^{-\left(\frac{j-1}{2}\right)} \phi(2^{-(j-1)}x - (2k + n)) \end{aligned}$$

Como

$$\phi_{j-1,2k+n}(x) = 2^{-\left(\frac{j-1}{2}\right)} \phi(2^{-(j-1)}x - (2k + n))$$

y por (3.20), tenemos

$$\psi_{j,k}(x) = \sum_n g_n \phi_{j-1,2k+n}(x)$$

Ahora, haciendo  $m = 2k + n$  obtenemos

$$\psi_{j,k}(x) = \sum_m g_{m-2k} \phi_{j-1,m}(x)$$

Por tanto,

$$\psi_{j,k}(x) = \sum_n g_{n-2k} \phi_{j-1,n}(x) \tag{5.1}$$

Así mismo, es inmediato verificar

$$\langle f, \psi_{1,k} \rangle = \sum_n \bar{g}_{n-2k} \langle f, \phi_{0,n} \rangle$$

donde  $\bar{g}_{n-2k} \langle f, \phi_{0,n} \rangle$  es la convolución de la sucesión  $(\langle f, \phi_{0,n} \rangle)_n$  con  $\bar{g}_{n-2k}$  (dicha convolución retiene solamente muestras pares).

En forma general, obtenemos

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \left\langle f, \sum_n g_{n-2k} \phi_{j-1,n} \right\rangle = \sum_n \bar{g}_{n-2k} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad (5.2)$$

Por (3.8) se sigue que  $\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n)$ , entonces

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(x) &= 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k) = 2^{-j/2} 2^{1/2} \sum_n h_n \phi(2(2^{-j}x - k) - n) \\ &= 2^{-\binom{j-1}{2}} \sum_n h_n \phi(2^{-j+1}x - (2k + n)) \end{aligned}$$

Ahora, haciendo  $m = 2k + n$  y debido a que

$$\phi_{j-1,m}(x) = 2^{-\binom{j-1}{2}} \phi(2^{-(j-1)}x - m),$$

entonces tenemos

$$\phi_{j,k}(x) = \sum_m h_{m-2k} \phi_{j-1,m}(x),$$

esto es

$$\phi_{j,k}(x) = \sum_n h_{n-2k} \phi_{j-1,n}(x). \quad (5.3)$$

En consecuencia

$$\langle f, \phi_{j,k} \rangle = \left\langle f, \sum_n h_{n-2k} \phi_{j-1,n} \right\rangle = \sum_n \bar{h}_{n-2k} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad (5.4)$$

El proceso a seguir es claro :

Por (5.2) y (5.4) podemos calcular  $\langle f, \psi_{1,k} \rangle$  y  $\langle f, \phi_{1,k} \rangle$  respectivamente a partir de  $\langle f, \phi_{0,n} \rangle$ . Seguidamente aplicamos nuevamente (5.2) y (5.4) para

calcular  $\langle f, \psi_{2,k} \rangle$  y  $\langle f, \phi_{2,k} \rangle$  respectivamente a partir de  $\langle f, \phi_{1,n} \rangle$  y así sucesivamente continuamos el proceso para el cálculo de los coeficientes de ondículas  $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$  y  $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$  en los mismos  $j$ -nivel.

Recordemos que  $P_j$  es la proyección ortogonal sobre  $V_j$ , la cual es un operador lineal, continuo con  $\|P_j\| = 1$ , denotemos la proyección ortogonal sobre  $W_j$  por  $Q_j$ .

Descomponemos

$$\begin{aligned} f^0 &\in V_0 = V_1 \oplus W_1 \\ f^0 &\in V_0, \quad f^0 = P_0 f = \sum_n c_n^0 \phi_{0,n} \\ f^1 &\in V_1, \quad f^1 = P_1 f = \sum_n c_n^1 \phi_{1,n} \\ \delta^1 &\in W_1, \quad \delta^1 = Q_1 f = \sum_n d_n^1 \psi_{1,n} \end{aligned}$$

donde  $(c_n^0) = c^0$  es la raíz genérica de los coeficientes  $(c_n^1) = c^1$ ,  $(d_n^1) = d^1$ .

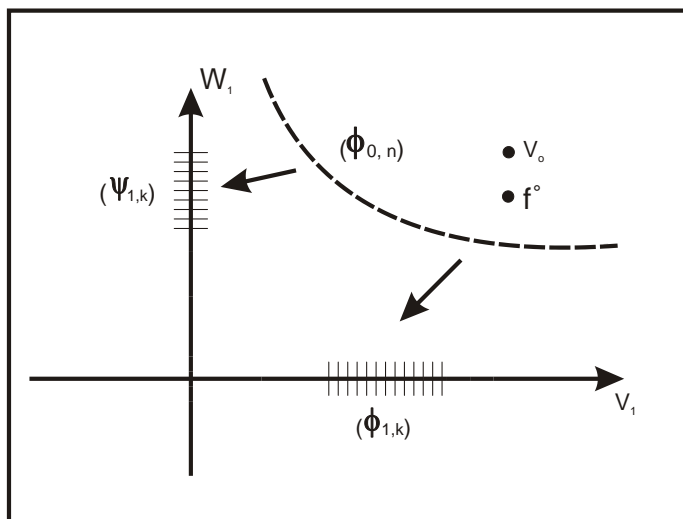


Figura 5.1

En cada uno de los espacios  $V_j$  y  $W_j$  nosotros tenemos bases ortonormales  $(\phi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  y  $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  respectivamente. Aquí, nosotros tenemos la transformación

$$T : (\phi_{0,n})_{n \in \mathbb{Z}} \longmapsto \left( (\phi_{1,n})_{n \in \mathbb{Z}}, (\psi_{1,n})_{n \in \mathbb{Z}} \right)$$

en  $V_0$ . Por tanto,

$$c_k^1 = \sum_n \bar{h}_{n-2k} c_n^0, d_k^1 = \sum_n \bar{g}_{n-2k} c_n^0 \quad (5.5)$$

**Nota 5.** En general consideremos  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $\bar{a} = (\bar{a}_{-n})_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  y  $A$  un operador tal que

$$(A(b))_k = \sum_n a_{2k-n} b_n, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z},$$

donde  $a_{2k-n} b_n$  es una convolución de pares de  $a$  y  $A$ .

De este modo,

$$(\bar{A}(b))_k = \sum_n \bar{a}_{-(2k-n)} b_n = \sum_n \bar{a}_{n-2k} b_n, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} c_k^1 &= \sum_n \bar{h}_{n-2k} c_n^0 = \bar{H}c^0 = c^1 \\ d_k^1 &= \sum_n \bar{g}_{n-2k} c_n^0 = \bar{G}c^0 = d^1 \end{aligned}$$

Por tanto, (5.5) es equivalente a  $c^1 = \bar{H}c^0$  y  $d^1 = \bar{G}c^0$ .

Nuevamente

$$\begin{aligned} c_k^2 &= \sum_n \bar{h}_{n-2k} c_n^1 \Leftrightarrow c^2 = \bar{H}c^1 \\ d_k^2 &= \sum_n \bar{g}_{n-2k} c_n^1 \Leftrightarrow d^2 = \bar{G}c^1 \end{aligned}$$

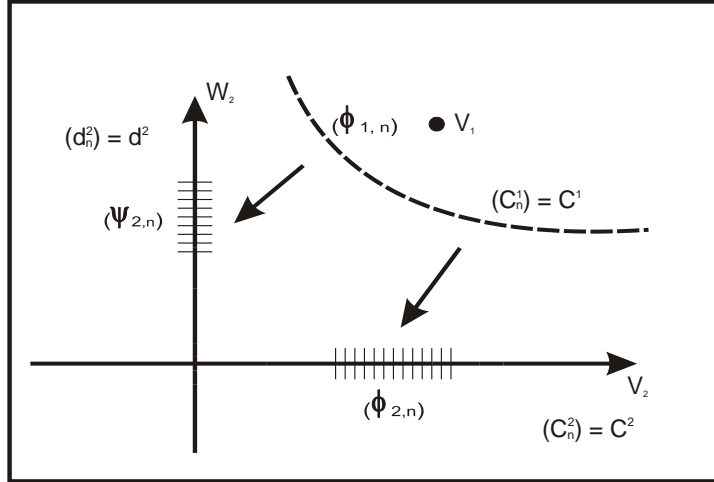


Figura 5.2

y así en forma recurrente continuamos dicho proceso esquemático. Además, se tiene que  $V_j \subset V_{j-1}$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}$  y para cada  $V_j$  su correspondiente  $W_j$ .

De manera esquemática puede ser representado por:

$$\begin{array}{cccccccc}
 c^0 & \xrightarrow{\overline{H}} & c^1 & \xrightarrow{\overline{H}} & c^2 & \xrightarrow{\overline{H}} & c^3 & \dots & \xrightarrow{\overline{H}} & c^J \\
 & \searrow \overline{G} & & \searrow \overline{G} & & \searrow \overline{G} & & & \searrow \overline{G} & \\
 & & d^1 & & d^2 & & d^3 & \dots & & d^J
 \end{array}$$

Sin embargo, en la manera práctica nos detendremos después de un número finito de niveles, digamos  $1 \leq j \leq J$ , excepto para la base de ondícula de A. Haar, todos los demás ejemplos de bases ortonormales de ondículas están constituidas por funciones de soporte infinito.

Así, para construir ejemplos de bases ortonormales en las que  $\psi$  es de soporte compacto, es más factible empezar con un polinomio trigonométrico

$m_0$  o equivalentemente de un Esquema de Filtramiento de Sub-banda, más que de la función escala  $\phi$  del subespacio  $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$ .

## 5.2 Etapas de un Esquema de Filtramiento de Sub-Banda con Reconstrucción Exacta

Todo lo realizado es una sucesión de transformaciones de bases ortogonales. Ahora, veamos el proceso inverso de nuestro esquema anterior, el cual consiste en: dados  $c^j = (c_n^j)$  y  $d^j = (d_n^j)$  encontrar  $c^{j-1}$ , esquemáticamente esto es

$$\begin{array}{ccc} c^{j-1} & \xrightarrow{\bar{H}} & c^j \\ & \searrow \bar{G} & \\ & & d^j \end{array}$$

En efecto, sabemos que  $f^{j-1} = f^j + \delta^j$ , donde  $f^j \in V_j$  y  $\delta^j \in W_j$ , esto es,

$$f^{j-1} = \sum_k c_k^j \phi_{j,k} + \sum_k d_k^j \psi_{j,k}.$$

Pero,

$$c_n^{j-1} = \langle f^{j-1}, \phi_{j-1,n} \rangle.$$

Entonces

$$c_n^{j-1} = \sum_k c_k^j \langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle + \sum_k d_k^j \langle \psi_{j,k}, \phi_{j-1,n} \rangle$$

y debido a (5.1) y (5.3) obtenemos

$$c_n^{j-1} = \sum_k c_k^j \left( \sum_n h_{n-2k} \langle \phi_{j-1,n}, \phi_{j-1,n} \rangle \right) + \sum_k d_k^j \left( \sum_n g_{n-2k} \langle \phi_{j-1,n}, \phi_{j-1,n} \rangle \right).$$

Por otra parte, sabemos que

$$(\phi_{j,k}) \text{ es ortonormal si y sólo si } \langle \phi_{j,k}, \phi_{j',k'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{kk'}.$$

Luego,

$$c_n^{j-1} = \sum_k [c_k^j h_{n-2k} + d_k^j g_{n-2k}] \quad (5.6)$$

Por tanto,

$$c_k^1 = \sum_n \bar{h}_{n-2k} c_n^0, \quad d_k^1 = \sum_n \bar{g}_{n-2k} c_n^0$$

es la etapa de análisis, donde  $c_n^0$  es la llamada *raíz primitiva* o *generadora* y (5.6) es la etapa de síntesis del proceso esquemático.

### 5.3 Filtramiento: Filtro de Pasa Bajo y Pasa Alto Ideales

**Definición 5.1.** Una función  $\gamma$  en  $L^2(\mathbb{R})$  es llamada una función banda-limitada si su transformada de Fourier  $F(\gamma) = \hat{\gamma}$  tiene soporte compacto, esto es,  $\hat{\gamma}(\xi) = 0$  para  $|\xi| > \Omega$ ,  $\Omega$  arbitrario.

Si suponemos que  $\Omega = \pi$  entonces  $\hat{\gamma}$  puede ser representado por su serie de Fourier,

$$\hat{\gamma}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\xi}$$

$$\text{donde } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\xi} \hat{\gamma}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{in\xi} \hat{\gamma}(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \gamma(n)$$

Además, por la transformada inversa de Fourier

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{\gamma}(\xi) d\xi \\ \gamma(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\xi} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\xi} \right) d\xi \\ \gamma(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x-n)\xi} d\xi \\ \gamma(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma(n) \frac{\text{sen } \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \end{aligned}$$

donde un número finito de  $c_n$  son diferentes de cero.

Desde que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$  para un número finito de  $c_n$  diferentes de cero, esto nos lleva a una sucesión de valores muestrales  $\gamma(n)$ , en cada punto  $n$ , de una función banda limitada  $\gamma$  con  $Sop(\hat{\gamma}) \subset [-\pi, \pi]$  siendo

$$\gamma(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma(n) \frac{\text{sen } \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \quad \text{ó} \quad \hat{\gamma}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-in\xi}$$

**Definición 5.2.** Sea  $\gamma$  una función banda-Limitada. Una operación de Filtramiento consiste en la multiplicación de  $\hat{\gamma}$  por una función  $2\pi$ -periódica  $\hat{\alpha}$ , que es definida por:

$$\hat{\alpha}(\xi) = \sum_n a_n e^{-in\xi}.$$

Esto es, una operación de Filtramiento es

$$\hat{\gamma} \hat{\alpha} = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n c_n e^{-in\xi} \right) \left( \sum_n a_n e^{-in\xi} \right)$$

Ahora surge la pregunta natural, ¿el resultado de la operación filtramiento es otra función banda-Limitada?. La respuesta es afirmativa. En efecto,

$$\hat{\gamma}(\xi) \hat{\alpha}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n a_n \left( \sum_m c_m e^{-i(m+n)\xi} \right)$$

y haciendo  $n = k - m$ , tenemos

$$\hat{\gamma}(\xi) \hat{\alpha}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_k e^{-ik\xi} \left( \sum_m a_{k-m} c_m \right).$$

Luego, se sigue que

$$(\alpha * \gamma)^\wedge(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{-in\xi} \left( \sum_m a_{n-m} c_m \right)$$

ó de manera equivalente

$$(\alpha * \gamma)(x) = [(\alpha * \gamma)^\wedge(\xi)]^\vee(x) = \sum_n \left( \sum_m a_{n-m} c_m \right) \frac{\text{sen } \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$$



donde  $\gamma$  es una función banda-Limitada y  $\alpha$  es el filtro.

**Definición 5.3.** Diremos que:

- (i)  $\alpha$  es un filtro de pasa bajo (Low-pass) si  $\hat{\alpha}|_{[-\pi,\pi]}$  está mayormente concentrada sobre  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .
- (ii)  $\alpha$  es un filtro de pasa alto (High-pass) si  $\hat{\alpha}|_{[-\pi,\pi]}$  está mayormente concentrada sobre  $\{\xi : \frac{\pi}{2} \leq |\xi| \leq \pi\}$

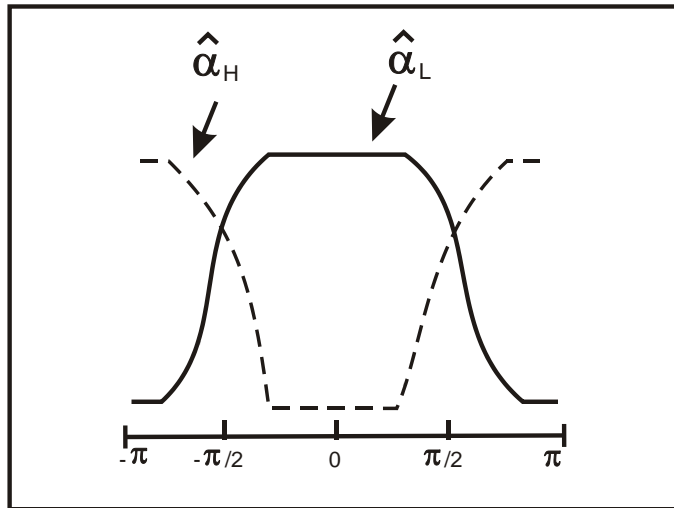


Figura 5.3

Los filtros de pasa bajo y pasa alto ideales son determinados por medio de

$$\hat{\alpha}_L(\xi) = \begin{cases} 1 & ; \quad |\xi| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & ; \quad \frac{\pi}{2} < |\xi| < \pi \end{cases}, \quad \hat{\alpha}_H(\xi) = \begin{cases} 0 & ; \quad |\xi| < \frac{\pi}{2} \\ 1 & ; \quad \frac{\pi}{2} < |\xi| < \pi \end{cases}$$

Por tanto,

$$\widehat{\alpha}_L + \widehat{\alpha}_H = 1.$$

En general,  $\widehat{\alpha}$  puede ser escrita como

$$\widehat{\alpha}(\xi) = \sum_n a_n e^{-in\xi},$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{\alpha}(\xi) e^{in\xi} d\xi.$$

Luego, con la expresión anterior obtenemos los coeficientes de paso bajo y alto, los cuales vienen a ser representados por

$$a_n^L = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \text{ para } n = 0 \\ 0 & ; \text{ para } n = 2k, k \neq 0 \\ \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)} & ; \text{ para } n = 2k+1 \end{cases}$$

y

$$a_n^H = \begin{cases} \frac{1}{2} & ; \text{ para } n = 0 \\ 0 & ; \text{ para } n = 2k, k \neq 0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{\pi(2k+1)} & ; \text{ para } n = 2k+1 \end{cases}$$

respectivamente.

Cuando el filtro de pasa bajo ideal  $\alpha_L$  es aplicado a una función banda-limitada  $\gamma$ , entonces se tiene que  $\alpha_L * \gamma$  es una función banda-limitada con  $Sop(\alpha_L * \gamma) \subset \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ . Luego,  $\alpha_L * \gamma$  es determinada por sus valores muestrales en  $2\mathbb{Z}$ , por lo cual tenemos

$$(\alpha_L * \gamma)(x) = \sum_n c_n^L \frac{\text{sen } \frac{\pi}{2}(x-2n)}{\frac{\pi}{2}(x-2n)},$$

donde  $c_n^L = \sum_m a_{2n-m}^L c_m$ .

Similarmente,  $\alpha_H * \gamma$  es una versión de frecuencia trasladada de una función banda-limitada con  $Sop(\alpha_H * \gamma) \subset \left[ \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ . Luego,  $\alpha_H * \gamma$  es también completamente determinada por sus valores muestrales en  $2\mathbb{Z}$ , por lo cual tenemos

$$(\alpha_H * \gamma)(x) = \sum_n c_n^H \frac{\text{sen} \frac{\pi}{2}(x-2n)}{\frac{\pi}{2}(x-2n)} \left\{ 2 \cos \frac{\pi}{2}(x-2n) - 1 \right\}$$

o equivalentemente

$$(\alpha_H * \gamma)(x) = \frac{1}{\pi} \sum_n c_n^H \int_{\frac{\pi}{2} \leq |\xi| \leq \pi} e^{i\xi(x-2n)} d\xi,$$

donde  $c_n^H = \sum_m a_{2n-m}^H c_m$ .

Luego,  $\alpha_H * \gamma$  es la convolución de las entradas de índices pares de  $a_n^H$  con  $c_k$ , la cual permite caracterizar completamente a  $\alpha_H * \gamma$ . Así mismo, se observa que la función  $\alpha_H * \gamma$  es una traslación de  $\alpha_L * \gamma$ , cuyo factor de traslación viene dado por:

$$2 \cos \frac{\pi}{2}(x-2n) - 1$$

Ahora, nuestro objetivo es reconstruir  $c_m$  a partir de  $c_n^L$  y  $c_n^H$ . Esta etapa de reconstrucción es denominada *proceso inverso* o *etapa de síntesis*. En efecto, debido a que  $\hat{\alpha}_L + \hat{\alpha}_H = 1$  y  $\hat{\alpha}_L \cdot \hat{\gamma} = (\alpha_L * \gamma)^\wedge$ , entonces

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(m) &= 1 \cdot \hat{\gamma}(m) = (\hat{\alpha}_L + \hat{\alpha}_H)(m) \cdot \hat{\gamma}(m) \\ &= (\alpha_L * \gamma)^\wedge(m) + (\alpha_H * \gamma)^\wedge(m). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\hat{\gamma} = (\alpha_L * \gamma)^\wedge + (\alpha_H * \gamma)^\wedge.$$

Además, se tiene que

$$\gamma(m) = \begin{cases} c_m & ; \text{ para } m = n \\ 0 & ; \text{ para } m \neq n \end{cases}$$

donde

$$\gamma(m) = \sum_n c_n \cdot \frac{\text{sen } \pi(m-n)}{\pi(m-n)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \gamma(m) &= c_m = (\alpha_L * \gamma)(m) + (\alpha_H * \gamma)(m) \\ &= \sum_k \frac{\text{sen } \frac{\pi}{2}(m-2k)}{\frac{\pi}{2}(m-2k)} \left\{ c_k^L + c_k^H \left[ 2 \cos \frac{\pi}{2}(m-2k) - 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

Así mismo, al hacer la descomposición de  $m$  para valores pares e impares, obtenemos

$$\begin{aligned} c_{2m} &= c_m^L + c_m^H \\ c_{2m+1} &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{2(-1)^\ell}{\pi(2\ell+1)} \{ c_{m-\ell}^L - c_{m-\ell}^H \}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,  $c_m$  puede ser expresado por

$$c_m = 2 \sum_n (a_{m-2n}^L c_n^L + a_{m-2n}^H c_n^H).$$

## 5.4 Los Filtros $a^0, \tilde{a}^0, a^1, \tilde{a}^1$ y su relación con las Funciones Regulares $\alpha^0, \tilde{\alpha}^0, \alpha^1$ y $\tilde{\alpha}^1$ .

De manera esquemática, los coeficientes de  $c_n^L, c_n^H$  y  $c_m$  determinadas anteriormente pueden ser representadas en la siguiente figura

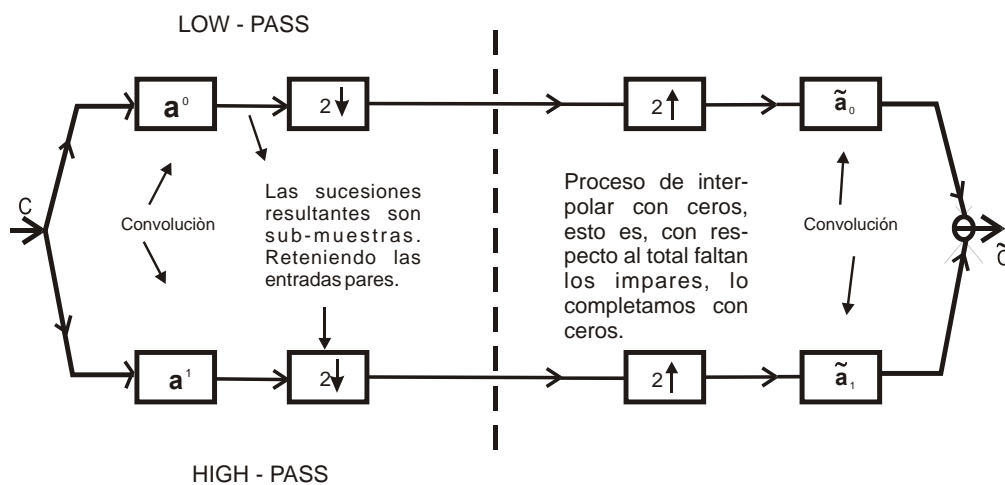


Figura 5.4

Representación Esquemática de las Etapas de Descomposición y Reconstrucción

en un Proceso de Filtrado de Sub-bandas. Al final  $C$  no es igual a  $\tilde{C}$ .

En el caso ideal, se tiene que  $a^0 = a^1, a^1 = a^H, \tilde{a}^0 = 2a^1$  y  $\tilde{a}^1 = 2a^H$ , el cual nos dice que el resultado final es idéntico a la señal o función de energía finita  $c$ , esto es  $c = \tilde{c}$ .

Los filtros de pasa bajo ideal  $a^L$  tiene por coeficientes a  $(a_n^L)_{n \in \mathbb{Z}}$ , y el de pasa alto ideal  $a^H$  tiene por coeficientes a  $(a_n^H)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Estos coeficientes

en la práctica decaen muy lentamente para ser usados, Si nosotros deseamos encontrar filtros  $a^0, \tilde{a}^0, a^1, \tilde{a}^1$  cuyos coeficientes tiene decaimiento más rápido que el caso ideal, debemos tomar funciones  $2\pi$ -periódicas  $\alpha^0, \tilde{\alpha}^0, \alpha^1$  y  $\tilde{\alpha}^1$  regulares que  $\alpha^L, \alpha^H$  (ver figura 5.5).

Esto significa que puede ocurrir aliasing (superposición de información). Como  $\alpha^0, \tilde{\alpha}^0, \alpha^1$  y  $\tilde{\alpha}^1$  son funciones regulares,  $2\pi$ -periódicas tomaremos  $|\alpha^0|, |\alpha^1|$  para compararlas con el caso ideal.

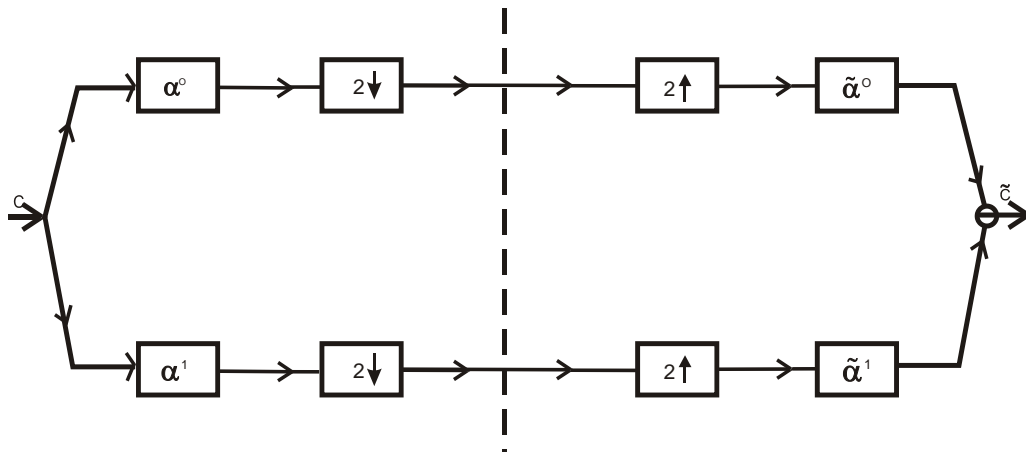


Figura 5.5

Los  $|\alpha^0|, |\alpha^1|$  se parecen a versiones de “secuencias” de  $\alpha^L$  y  $\alpha^H$ , tal como aparece en la figura 4.6, el cual significa que sus soportes son más grandes que los conjuntos  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  y  $\{\xi : \frac{\pi}{2} \leq |\xi| \leq \pi\}$  respectivamente. Por tanto, esto significa que  $\alpha^0 * \gamma$  y  $\alpha^1 * \gamma$  no son funciones de banda-limitada con frecuencia maximal en  $\frac{\pi}{2}$ .

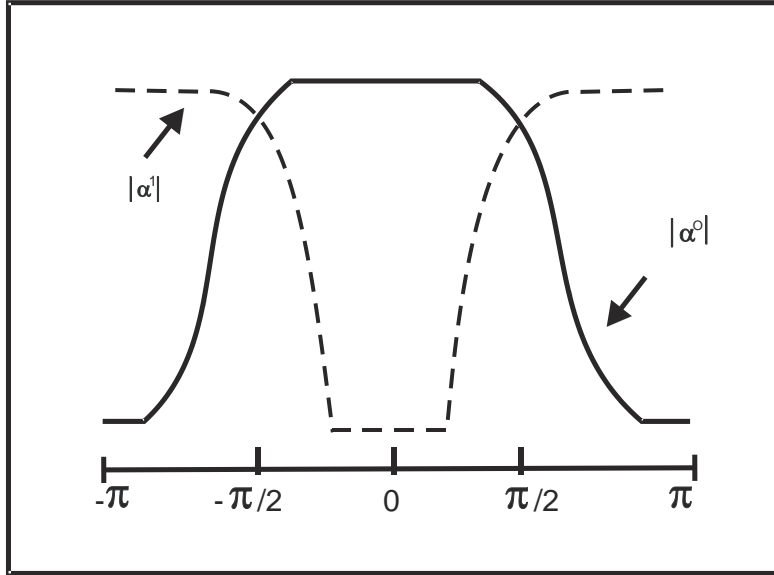


Figura 5.6

A fin de dar solución a esta dificultad, nuestro objetivo es buscar emparejamientos, es decir,  $\tilde{a}^0$  y  $\tilde{a}^1$  debemos emparejar con  $a^0$  y  $a^1$  respectivamente. Para encontrar las condiciones apropiadas sobre estos filtros, haremos uso de la siguiente  $z$ -notación:

La sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  es representada formalmente por la serie  $a(z) = \sum_n a_n z^n$ . Si  $z = e^{-i\xi}$  está sobre el círculo unitario, entonces  $a(z) = \sum_n a_n e^{-in\xi}$  denota la serie de Fourier.

Así mismo,  $a^0(z) c(z)$  es la  $z$ -notación para la convolución  $(a^0 * c)(z)$ , esto es,

$$a^0(z) c(z) = (a^0 * c)(z).$$

Además

$$\sum_n b_{2n} z^{2n} = \frac{b(z) + b(-z)}{2},$$

donde  $b(z) = \sum_n b_n z^n$ .

A continuación veremos, de acuerdo la figura 5.7 que las etapas de descomposición y reconstrucción de un esquema de filtramiento de Sub-bandas son expresadas de acuerdo a la  $z$ -notación establecida.

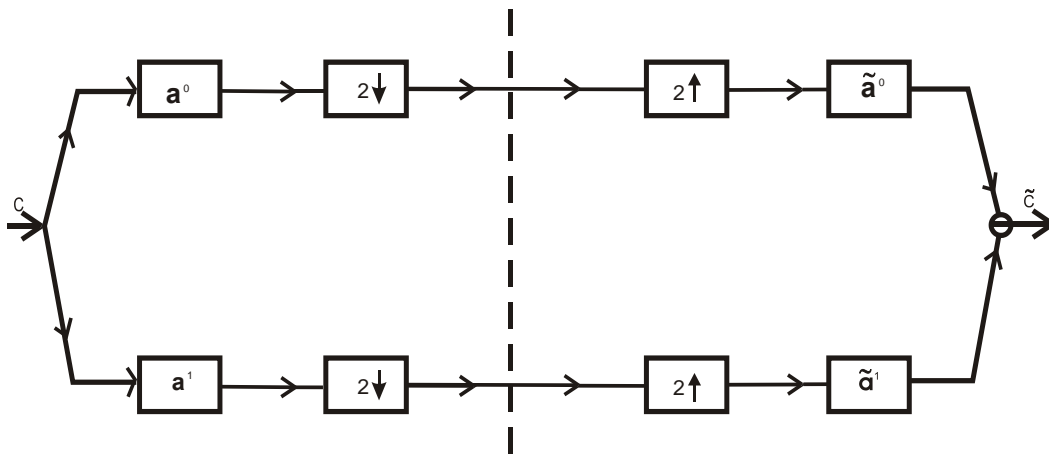


Figura 5.7

Veremos en primer lugar la etapa de la descomposición en este proceso de filtramiento de Sub-bandas:

$$\begin{aligned} \sum_n (a^0 * c)_{2n} z^{2n} &= \frac{1}{2} [(a^0 * c)(z) + (a^0 * c)(-z)] \\ &= \frac{1}{2} [a^0(z) c(z) + a^0(-z) c(-z)] \end{aligned} \quad (5.7)$$



y

$$\begin{aligned} \sum_n (a^1 * c)_{2n} z^{2n} &= \frac{1}{2} [(a^1 * c)(z) + (a^1 * c)(-z)] \\ &= \frac{1}{2} [a^1(z)c(z) + a^1(-z)c(-z)] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Luego, de (5.7) y (5.8) obtenemos

$$c^0(z^2) = \sum_n (a^0 * c)_{2n} z^{2n} \quad , \quad c^1(z^2) = \sum_n (a^1 * c)_{2n} z^{2n}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} c^0(z^2) &= \frac{1}{2} [a^0(z)c(z) + a^0(-z)c(-z)] \\ c^1(z^2) &= \frac{1}{2} [a^1(z)c(z) + a^1(-z)c(-z)] \end{aligned}$$

es la etapa de descomposición de un esquema de filtramiento de Sub-bandas.

Ahora veamos la etapa de reconstrucción (o síntesis):

$$\tilde{a}^0(z) c^0(z^2) = \left( \sum_n \tilde{a}_n^0 z^n \right) \left( \sum_n c_{2n}^0 z^{2n} \right)$$

y haciendo  $m = 2n$  y  $c_m^0 = 0$ , cuando  $m$  es impar, tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}^0(z) c^0(z^2) &= \left( \sum_n \tilde{a}_n^0 z^n \right) \left( \sum_m c_m^0 z^m \right) \\ &= \sum_n \left( \sum_m \tilde{a}_n^0 \dots c_m^0 \dots \right) z^n \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene que

$$\begin{aligned} \tilde{a}^1(z) c^1(z^2) &= \left( \sum_n \tilde{a}_n^1 z^n \right) \left( \sum_n c_{2n}^1 z^{2n} \right) \\ &= \sum_n \left( \sum_m \tilde{a}_n^1 \dots c_m^1 \dots \right) z^n \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\tilde{c}(z) = \tilde{a}^0(z) c^0(z^2) + \tilde{a}^1(z) c^1(z^2),$$

es la etapa de reconstrucción del proceso de filtramiento de sub-bandas. Por consiguiente, el efecto total viene dado por

$$\tilde{c}(z) = \frac{1}{2} [\tilde{a}^0(z) a^0(z) + \tilde{a}^1(z) a^1(z)] c(z) + \frac{1}{2} [\tilde{a}^0(z) a^0(-z) + \tilde{a}^1(z) a^1(-z)] c(-z), \quad (5.9)$$

donde  $c(-z)$  corresponde a una traslación de las series de Fourier  $\sum_n c_n e^{-in\xi}$  por  $\pi$ .

En la expresión (??), el segundo término contiene los efectos del aliasing (superposición de información), lo cual nos conduce a preguntarnos ¿Cuándo  $\tilde{c}(z) = c(z)$ ? Esto sucede cuando

$$[\tilde{a}^0(z) a^0(-z) + \tilde{a}^1(z) a^1(-z)] = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{a}^0(z) a^0(z) + \tilde{a}^1(z) a^1(z) = 2.$$

## 5.5 Filtros QMF, FIR y CQF

Los primeros esquemas de Sub-bandas codificadas, fueron dados por Esteban - Galand (1977). En su trabajo, como en muchos esquemas que serán considerados, las sucesiones son números reales, para ello selecciona los filtros:

$$a^1(z) = a^0(-z) \quad , \quad \tilde{a}^0(z) = a^0(z) \quad , \quad \tilde{a}^1(z) = -a^0(-z), \quad (5.10)$$

los cuales son llamados *Filtros de Espejos Cuadráticos* (QMF). Luego, reemplazando (5.10) en (??), obtenemos

$$\tilde{c}(z) = \frac{1}{2} \left[ (a^0(z))^2 - (a^0(-z))^2 \right] c(z),$$

donde  $c(z)$  es la señal y  $\frac{1}{2} \left[ (a^0(z))^2 - (a^0(-z))^2 \right]$  es el factor perturbador.

En (5.10) se tiene que  $a^1(z) = a^0(-z)$  y como  $a^0(z) = \sum_n a_n^0 z^n$  y  $a^1(z) = \sum_n a_n^1 (z)^n$ , se sigue que

$$\sum_n a_n^1 (z)^n = \sum_n (-1)^n a_n^0 (z)^n,$$

esto es,

$$a_n^1 = (-1)^n a_n^0. \quad (5.11)$$

Nuevamente, como  $\alpha(\xi) = \sum_n a_n e^{-in\xi}$ , en particular tomamos

$$\alpha^0(\xi) = \sum_n a_n^0 e^{-in\xi} \quad (5.12)$$

$$\alpha^1(\xi) = \sum_n a_n^1 e^{-in\xi} \quad (5.13)$$

Luego combinando (5.11) y (5.13) tenemos

$$\alpha^1(\xi) = \sum_n (-1)^n a_n^0 e^{-in\xi}.$$

Usando  $(-1)^n = e^{-in\pi}$  y considerando que  $a^0$  es simétrico, es decir  $a_n^0 = a_{-n}^0$ , se sigue que

$$\alpha^1(\xi) = \sum_n a_n^0 e^{-in(\pi-\xi)}.$$

Por tanto, debido a (5.12) la última expresión resulta ser

$$\alpha^1(\xi) = \alpha^0(\pi - \xi).$$

Así,  $\alpha^1$  es el espejo de  $\alpha^0$  con respecto a la banda-media evaluada en  $\xi = \frac{\pi}{2}$ .

Por lo general, en la práctica uno suele trabajar con Filtros FIR (Impulso de Respuesta Finita), esto significa que solamente un número finito de sus coeficientes  $a_n$  son diferentes de cero.

Ahora nuestro problema es averiguar, si es posible resolver  $\tilde{c}(z)$  definido por:

$$\tilde{c}(z) = \frac{1}{2} \left[ (a^0(z))^2 - (a^0(-z))^2 \right] c(z),$$

con ayuda de los Filtros FIR. Surge entonces la pregunta natural, ¿existirá un Filtro FIR  $a^0$  tal que  $(a^0(z))^2 - (a^0(-z))^2 = 2$ ? Desafortunadamente, no existe tal Filtro FIR; sin embargo, es posible construir un Filtro  $a^0$ , con una gran optimización, de tal modo que  $(a^0(z))^2 - (a^0(-z))^2 \approx 2$  y  $\tilde{c}(z) \approx c(z)$ .

Existen otros filtros, como los filtros GQMF que generaliza a los filtros QMF. Sin embargo, Mintzer (1985), Smith - Barnwell (1986), Vetterli (1986), propusieron un esquema diferente:

$$a^1(z) = z^{-1}a^0(-z^{-1}) \quad , \quad \tilde{a}^0(z) = a^0(z^{-1}) \quad , \quad \tilde{a}^1(z) = za^0(-z). \quad (5.14)$$

De manera inmediata, por (5.14) se verifica que

$$\tilde{a}^0(z)a^0(-z) + \tilde{a}^1(z)a^1(-z) = 0.$$

Así mismo, el efecto total viene dado por:

$$\tilde{c}(z) = \frac{1}{2} [\tilde{a}^0(z)a^0(z) + \tilde{a}^1(z)a^1(z)] c(z)$$

el cual usando (5.14) obtenemos

$$\tilde{c}(z) = \frac{1}{2} [a^0(z)a^0(z^{-1}) + a^0(-z)a^0(-z^{-1})] c(z).$$

A su vez, si consideramos  $z = e^{i\xi}$  y  $a_n^0 \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\tilde{c}(e^{i\xi}) = \frac{1}{2} \left[ |a^0(e^{-i\xi})|^2 + |a^0(-e^{-i\xi})|^2 \right]$$

o equivalentemente

$$\tilde{c}(e^{i\xi}) = \frac{1}{2} \left[ |\alpha^0(\xi)|^2 + |\alpha^0(\xi + \pi)|^2 \right].$$

Ahora surge nuevamente la pregunta, ¿existirá un Filtro FIR  $a^0$ , tal que

$$\frac{1}{2} [a^0(z) a^0(z^{-1}) + a^0(-z) a^0(-z^{-1})] = 1,$$

de manera que se obtenga una reconstrucción exacta, en el esquema de filtramiento de Sub-bandas?. La respuesta a esta pregunta es que solamente podemos construir filtros FIR aproximados, con un buen grado de optimización.

A los filtros escogidos en (5.14), se les denomina Filtros de Cuadratura Conjugada (CQF), los cuales no son tan populares como los QMF.

Retornando a las bases ortonormales de ondículas, tenemos que la etapa de análisis dada por:

$$c_k^1 = \sum_n \bar{h}_{n-2k} c_n^0 \quad y \quad d_k^1 = \sum_n \bar{g}_{n-2k} c_n^0$$

tienen la misma estructura que los coeficientes de los filtros de pasa bajo y alto:

$$c_n^L = \sum_m a_{2n-m}^L c_m \quad y \quad c_n^H = \sum_m a_{2n-m}^H c_m$$

respectivamente. Además, la etapa de síntesis dada por:

$$c_n^{j-1} = \sum_k [h_{n-2k} c_k^j + g_{n-2k} d_k^j]$$

tiene la misma estructura que los coeficientes

$$c_m = 2 \sum_n (a_{m-2n}^L c_n^L + a_{m-2n}^H c_n^H)$$

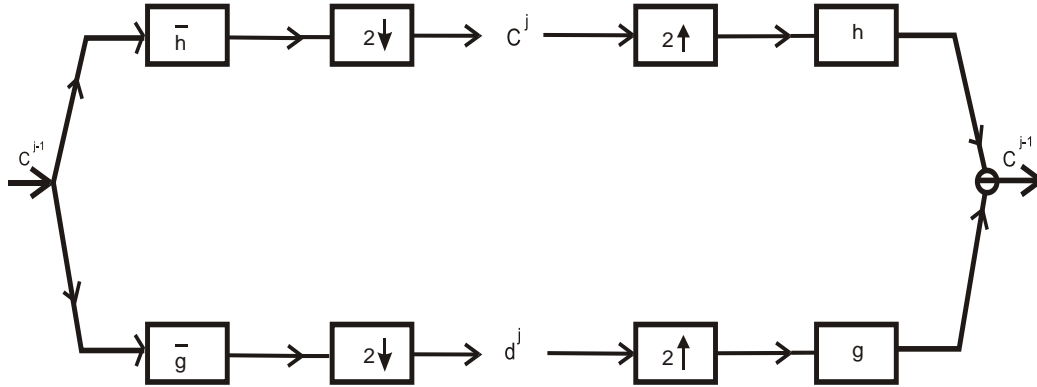


Figura 5.8

Etapas de un Esquema de Filtramiento de Sub-bandas para una Descomposición más Reconstrucción, en un AMR, donde  $(\bar{h})_n = \bar{h}_{-n}$ ,  $(\bar{g})_n = \bar{g}_{-n}$ .

Ahora, si consideramos que los  $h_n \in \mathbb{R}$ , y que los  $g_n = (-1)^n h_{1-n}$ , entonces nos preguntamos, ¿qué relación existe entre la figura 5.7 y 5.8?. La respuesta a esta interrogante es que existe una equivalencia entre estas dos figuras, con la elección de los filtros:

$$\begin{aligned}
 a^0(z) &= h(z^{-1}) & , & \quad \tilde{a}^0(z) = h(z) \\
 a^1(z) &= g(z^{-1}) = -z^{-1}h(-z) & , & \quad \tilde{a}^1(z) = g(z) = -zh(-z^{-1}).
 \end{aligned}$$

## 5.6 Comentarios

Cada base ortonormal de Ondículas asociada con un AMR, da lugar a un par de filtros CQF, esto es, a un esquema de filtramiento de Sub-bandas con reconstrucción exacta. Sin embargo, el proceso inverso no es cierto. Además, la mayoría de ejemplos de bases ortonormales correspondiente a una función

escala  $\phi^\#$ , con coeficientes  $h_n$  no finitos, son más complejos cuando  $\phi^\#$  posee soporte infinito.

Finalmente, acerca del proceso de filtramiento de sub-bandas surge tres grandes preguntas:

- (a) ¿Es posible construir bases ortonormales de ondículas correspondientes a filtros finitos?.
- (b) ¿Qué significa para estos filtros la correspondiente regularidad de las ondículas?.
- (c) ¿Como pueden ser usadas las ondículas en el contexto de un proceso de filtramiento?

Las respuestas a todas estas interrogantes serán dadas en los siguientes capítulos.

# Capítulo 6

## Bases Ortonormales de Ondículas de Soporte Compacto

### 6.1 Construcción de $m_0$

En este capítulo nuestro objetivo es construir el polinomio trigonométrico  $m_0$  a partir de una función escala  $\phi$  con soporte compacto en su versión ortogonalizada.

*Afirmación* :  $\psi$  es de soporte compacto.

En efecto, desde que  $\phi \in V_0 \subset V_{-1}$  y  $\{\phi_{-1,n}(x)\}$  es una base ortonormal



en  $V_{-1}$ , se tiene que

$$\phi(x) = \sum_n h_n \phi_{-1,n}(x),$$

donde  $\phi_{-1,n}(x) = 2^{1/2} \phi(2x - n)$  y  $h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle$ . Es importante resaltar que  $h_n \neq 0$  en un número finito. Por otra parte,

$$\psi(x) = 2^{1/2} \sum_n^{\text{finita}} (-1)^n \bar{h}_{-n+1} \phi(2x - n),$$

y  $\phi$  es de soporte compacto, entonces la combinación lineal finita de funciones de soporte compacto, también es compacto. Por tanto,  $\psi$  es de soporte compacto.

Eligiendo  $\phi$  y  $\psi$  ambas con soporte compacto tenemos la ventaja que los correspondientes esquemas de filtramiento de Sub-bandas usan solamente filtros FIR (vistos en el capítulo anterior).

Además,

$$m_0 = 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-in\xi},$$

es una función  $2\pi$ -periódica, con un número finito de  $h_n$  diferentes de cero, por consiguiente, para  $\phi$  de soporte compacto, la función  $m_0(\xi)$  es un polinomio trigonométrico.

A su vez, la ortonormalidad de los  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  implica

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(+\pi)|^2 = 1 \tag{6.1}$$

En este caso (6.1) lo habíamos visto al menos en casi todo punto  $\xi$ , pero debido a que  $m_0$  es continua, se tiene que (6.1) se cumple para todo  $\xi$ . Estamos interesados en que  $\phi$  y  $\psi$  sean razonablemente regulares

Una condición necesaria para la construcción de  $m_0$ , es considerar una función  $f$  no idénticamente constante que satisfaga el resultado del Teorema

4.3, es decir,

$$\int x^\ell f(x) dx = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, m \quad (6.2)$$

donde  $f \in C^m$  tiene soporte compacto y  $f^\ell$  es acotada para  $\ell \leq m$ . Luego, haciendo

$f = \psi$  en la relación (6.2), se obtiene que

$$\int x^\ell \psi(x) dx = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, m$$

Por otra parte, sabemos que una posible construcción de  $\psi$ , está dada por

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{-\frac{i\xi}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

con  $\widehat{\phi}(0) = 1$ . Además por el Corolario 4.1, tenemos

$$\int x^\ell \psi(x) dx = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \text{ si y sólo si } \left. \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} \widehat{\psi}(\xi) \right|_{\xi=0} = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, m.$$

A su vez, desde que ambos  $\widehat{\psi}, \widehat{\phi} \in C^m$  y  $\widehat{\phi}(0) \neq 0$  (por observación 4.2 del Capítulo 4), entonces

$$\left. \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} m_0(\xi) \right|_{\xi=\pi} = 0, \quad \text{para } \ell \leq m.$$

Para  $\ell = 0$ ,

$$\left. \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} \widehat{\psi}(\xi) \right|_{\xi=0} = \widehat{\psi}(\xi) \Big|_{\xi=0} = \widehat{\psi}(0) = 0,$$

pero

$$0 = \widehat{\psi}(0) = e^{\frac{i\xi \cdot 0}{2}} \overline{m_0\left(\frac{0}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{0}{2}\right) = 1 \cdot \overline{m_0(\pi)} \widehat{\phi}(0) = \overline{m_0(\pi)},$$

entonces  $\pi$  es un cero para  $m_0$ . Así, sucesivamente esto implica que  $m_0$  tiene un cero de orden  $(m+1)$  en  $\xi = \pi$ .

Por tanto

$$m_0(\xi) = (\xi - \pi)^{m+1} \mathcal{L}(\xi) \Leftrightarrow m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^{m+1} \mathcal{L}(\xi)$$

donde  $\mathcal{L}$  es  $2\pi$ -periódica, polinomio trigonométrico y  $\mathcal{L} \in C^m$ .

Luego, debido a lo expuesto anteriormente, esto significa que  $m_0$  sería de la forma

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi)$$

con  $N = m + 1 \geq 1$  y  $\mathcal{L}$  un polinomio trigonométrico. Esto motiva a preguntarnos ¿existe  $m_0(\xi)$  que verifica (6.1) ?. Veamos, sabemos que

$$\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} = e^{-\frac{i\xi}{2}} \cos \frac{\xi}{2}$$

entonces

$$m_0(\xi) = \left( e^{-\frac{i\xi}{2}} \cos \frac{\xi}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi)$$

implica

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 &= \left( \left| e^{-\frac{i\xi}{2}} \right|^2 \right)^N (\cos^2 \frac{\xi}{2})^N |\mathcal{L}(\xi)|^2 \\ &= (\cos^2 \frac{\xi}{2})^N |\mathcal{L}(\xi)|^2 \end{aligned}$$

donde  $|\mathcal{L}(\xi)|^2 = L(\xi)$  es una polinomial en  $\cos \xi$  (ó  $\sin^2 \frac{\xi}{2}$ ), esto es

$$|m_0(\xi)|^2 = (\cos^2 \frac{\xi}{2})^N P(\sin^2 \frac{\xi}{2}).$$

Así mismo,

$$\begin{aligned} |m_0(\xi + \pi)|^2 &= (\cos^2 (\frac{\xi + \pi}{2}))^N P(\sin^2 (\frac{\xi + \pi}{2})) \\ &= (\sin^2 (\frac{\xi}{2}))^N P(\cos^2 (\frac{\xi}{2})) \end{aligned}$$

Luego,

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = (\cos^2 \frac{\xi}{2})^N P(\sin^2 \frac{\xi}{2}) + (\sin^2 \frac{\xi}{2})^N P(\cos^2 \frac{\xi}{2}),$$

el cual haciendo  $y = \cos^2(\frac{\xi}{2})$ ,  $\sin^2(\frac{\xi}{2}) = 1 - y$ , tenemos

$$(y)^N P(1 - y) + (1 - y)^N P(y) = 1, \text{ para todo } y \in [0, 1] \quad (6.3)$$

Ahora, ¿existe un único  $P(y)$ , tal que  $P(y)$  es solución de (6.3)? El Teorema de Bezout's responde afirmativamente, con un polinomio  $P(y)$  de orden  $(N - 1)$ .

Para ello, solamente haremos uso del teorema Bezout's.

**Teorema 6.1.** *Si  $p_1, p_2$  son dos polinomios de grados  $n_1, n_2$  respectivamente, con ceros no comunes, entonces existen únicos  $q_1, q_2$  polinomios de grados  $n_1 - 1, n_2 - 1$  respectivamente, tal que*

$$p_1(x)q_1(x) + p_2(x)q_2(x) = 1. \quad (6.4)$$

Luego, retornando a nuestro problema (6.3) de acuerdo al Teorema 6.1, existen únicos  $q_1(x)$  y  $q_2(x)$  polinomios de grado  $\leq N - 1$ , tal que

$$(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1. \quad (6.5)$$

Sustituyendo  $1 - y$  por  $y$  en (6.5), se obtiene

$$(1 - y)^N q_2(1 - y) + y^N q_1(1 - y) = 1.$$

Así, tenemos que

$$(1 - y)^N q_1(y) + y^N q_2(y) = 1,$$

obteniéndose

$$(1 - y)^N [q_1(y) - q_2(1 - y)] + y^N [q_2(y) - q_1(1 - y)] = 0, \quad \forall y \in [0, 1].$$

Luego, por la unicidad de  $q_1, q_2$  se tiene que  $q_2(y) - q_1(1 - y) = 0$ , es decir,

$$q_2(y) = q_1(1 - y).$$

Por tanto  $P(y) = q_1(y)$  es solución de (6.3)

Sin embargo, podemos encontrar explícitamente la forma de  $q_1$ . En efecto,

$$\begin{aligned} (1 - y)^N q_1(y) &= 1 - y^N q_2(y) \\ &= 1 - y^N q_1(1 - y), \end{aligned}$$

entonces

$$q_1(y) = (1 - y)^{-N} [1 - y^N q_1(1 - y)]. \quad (6.6)$$

Por otra parte,

$$(1 - y)^{-N} = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + \sum_{k=N}^{\infty} \binom{N+k-1}{k} y^k,$$

entonces en (6.6), obtenemos

$$q_1(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + O(y^N)$$

Desde que el grado de  $q_1 \leq N - 1$ ,  $q_1$  es igual a su expansión de Taylor truncada después de  $N$  términos, esto es,

$$q_1(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

Luego,  $P(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k$  es una solución explícita de (6.3).

De este modo conocemos  $|\mathcal{L}(\xi)|^2$ , para cada  $y \in [0, 1]$ . Así,  $q_1(y)$  es la única solución de grado más bajo, que la denotaremos con  $P_N(y) = q_1(y)$ . Sin embargo, existen muchas soluciones de grado más alto. Así, para cualquier solución de grado más alto, tenemos

$$(1 - y)^N [P(y) - P_N(y)] + y^N [P(1 - y) - P_N(1 - y)] = 0. \quad (6.7)$$

Entonces  $P - P_N$  es divisible por  $y^N$ , es decir, existe  $\tilde{P}(y)$ , tal que

$$P(y) - (P_N)(y) = y^N \tilde{P}(y). \quad (6.8)$$

Además

$$\tilde{P}(y) + \tilde{P}(1 - y) = 0.$$

En efecto, reemplazando (6.8) en (6.7), obtenemos

$$(1 - y)^N y^N [\tilde{P}(y) + \tilde{P}(1 - y)] = 0.$$

Como  $0 < y \leq 1$ , se tiene que  $0 < (1 - y)^N \leq 1$ . Por tanto

$$\tilde{P}(y) + \tilde{P}(1 - y) = 0$$

Así, todo lo hecho anteriormente lo resumimos en el siguiente teorema.

**Teorema 6.2.** *Un polinomio trigonométrico  $m_0$  de la forma*

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi) \quad (6.9)$$

*satisface (6.1) si y solo si  $L(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2$ , puede ser escrito como*

*$L(\xi) = P(\sin^2 \xi/2)$ , con  $P(y) = P_N(y) + y^N \tilde{P}(y)$ ,  $\tilde{P}(y) = R(\frac{1}{2} - y)$ , donde  $R$  es un polinomio impar elegido tal que  $P(y) \geq 0$ , para cada  $y \in [0, 1]$ ,*

$$y P_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k.$$

**Observación.** El Teorema 6.2 caracteriza completamente a  $|\mathcal{L}(\xi)|^2$ , esto es, nosotros conocemos  $|\mathcal{L}(\xi)|^2$ , pero ¿Cómo podemos conocer  $\mathcal{L}(\xi)$ ?. La respuesta es dada por el Lema de Riesz.

**Lema de Riesz.** Sea  $A$  un polinomio trigonométrico positivo invariante bajo la sustitución  $\xi \mapsto -\xi$ ;  $A$  es necesariamente de la forma  $A(\xi) = \sum_{m=0}^M a_m \cos m\xi$ ,  $a_m \in \mathbb{R}$ . Entonces existe un polinomio trigonométrico  $B$  de orden  $M$ , esto es,

$$B(\xi) = \sum_{m=0}^M b_m e^{im\xi}, b_m \in \mathbb{R},$$

tal que  $|B(\xi)|^2 = A(\xi)$ .

La demostración del Lema de Riesz es constructiva, por ello tan solamente la mencionamos y haremos uso de él. En efecto, de acuerdo a nuestro problema, se tiene que  $|\mathcal{L}(\xi)|^2$  es un polinomio en  $\cos \xi$ , esto es,  $A = |\mathcal{L}(\xi)|^2$ , el cual es invariante por  $\xi \mapsto -\xi$ . Entonces por el Lema de Riesz, existe un polinomio trigonométrico  $B(\xi)$  tal que  $A(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2 = |B(\xi)|^2$ , esto es,  $|\mathcal{L}(\xi)| = |B(\xi)|$ .

## 6.2 Relación entre $\widehat{\phi}$ y $m_0$

Comencemos por encontrar una fórmula para la función escala  $\phi$ , el cual es un posible candidato. Realizado esto, procederemos a verificar si este posible candidato define un buen AMR.

Si un polinomio trigonométrico  $m_0$  es asociado con un AMR, y la función escala  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$  entonces sabemos que

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \text{ para todo } \xi \quad (6.10)$$

Ademas, si  $\widehat{\phi}$  es acotada y continua en 0, entonces es necesaria la condición  $\widehat{\phi}(0) \neq 0$ , debido a la densidad de los subespacios  $V_j$  en  $L^2(\mathbb{R})$ . Luego, en (6.10) cuando  $\xi = 0$  se tiene que  $\widehat{\phi}(0) = m_0(0) \widehat{\phi}(0)$ , esto es,  $m_0(0) = 1$ .

Así mismo, sabemos que

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1, \text{ en casi todo punto} \quad (6.11)$$

entonces cuando  $\xi = 0$ , se tiene que

$$|m_0(0)|^2 + |m_0(\pi)|^2 = 1,$$

esto es,  $|m_0(\pi)|^2 = 0$ . Por lo tanto,  $m_0(\pi) = 0$ .

De (6.10), se tiene que

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{2^2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^2}\right)$$

Luego,

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2^2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^2}\right)$$

Nuevamente por (6.10) tenemos

$$\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^2}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{2^3}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^3}\right),$$

entonces

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2^2}\right) m_0\left(\frac{\xi}{2^3}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^3}\right)$$



y así en forma recursiva, obtenemos

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\ell} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \quad (6.12)$$

De aquí, para todo  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , se tiene que

$$\widehat{\phi}(2k\pi) = \widehat{\phi}(2 \cdot 2^\ell (2m+1)\pi),$$

donde  $k = 2^\ell (2m+1)$  para algún  $\ell \geq 0$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

En (6.12), tomamos  $\xi = 2 \cdot 2^\ell (2m+1)\pi$ , entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(2k\pi) &= \prod_{j=1}^{\ell} m_0\left(\frac{2 \cdot 2^\ell (2m+1)\pi}{2^j}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{2 \cdot 2^\ell (2m+1)\pi}{2^\ell}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{\ell} m_0(2^{\ell+1-j} (2m+1)\pi) \widehat{\phi}(2(2m+1)\pi), \end{aligned}$$

y debido a (6.10) tenemos

$$\widehat{\phi}(2k\pi) = \prod_{j=1}^{\ell} m_0(2^{\ell+1-j} (2m+1)\pi) m_0\left(\frac{2(2m+1)\pi}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{2(2m+1)\pi}{2}\right).$$

Luego, como  $m_0$  es una función  $2\pi$ -periódica y además  $m_0(\pi) = 0$ , se tiene que

$$\widehat{\phi}(2k\pi) = \prod_{j=1}^{\ell} m_0(2^{\ell+1-j} (2m+1)\pi) m_0(\pi) \widehat{\phi}((2m+1)\pi),$$

esto es,

$$\widehat{\phi}(2k\pi) = m_0(\pi) \widehat{\phi}((2m+1)\pi) = 0, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} - \{0\}. \quad (6.13)$$

Desde que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = (2\pi)^{-1}, \text{ en casi todo punto}$$

entonces

$$\left| \widehat{\phi}(\xi) \right|^2 + \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{Z} \\ \ell \neq 0}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = (2\pi)^{-1}$$

y cuando  $\xi = 0$ , tenemos

$$\left| \widehat{\phi}(0) \right|^2 + \sum_{\substack{\ell \in \mathbb{Z} \\ \ell \neq 0}} \left| \widehat{\phi}(2\pi\ell) \right|^2 = (2\pi)^{-1},$$

pero, por (6.13) se tiene que  $\widehat{\phi}(2\pi\ell) = 0$ , para todo  $\ell \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Por tanto,

$$\left| \widehat{\phi}(0) \right| = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ahora, como  $\widehat{\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \phi(x) dx$ , cuando  $\xi = 0$  tenemos

$$\widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx,$$

entonces es equivalente afirmar que

$$\left| \widehat{\phi}(0) \right| = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{ó} \quad \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx \right| = 1.$$

Esto es conveniente para elegir la forma de  $\phi$  de manera que  $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$ .

Por otro lado, se tiene que

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{j=1}^{\ell} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^\ell}\right) \longrightarrow \widehat{\phi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right),$$

converge absolutamente y uniformemente sobre compactos, cuando  $\ell \rightarrow +\infty$ .

Esto es,

$$\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi}(0) \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \quad (6.14)$$

y tiene sentido escribir este producto infinito. Desde que,

$$\sum_n |h_n| |n| < \infty, \quad m_0(0) = 1, \quad m_0(\xi) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi},$$

tenemos que

$$|m_0(\xi)| = |m_0(\xi) + 1 - 1| = |1 + (m_0(\xi) - 1)| \leq 1 + |m_0(\xi) - 1|$$

y como  $m_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n = 1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} |m_0(\xi) - 1| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi} - 1 \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |h_n| |e^{-in\xi} - 1|, \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} |e^{-in\xi} - 1| &= \left| -in\xi \int_0^1 e^{-in\xi t} dt \right| \\ &\leq |-in\xi| \int_0^1 |e^{-in\xi t}| dt \\ &\leq |n\xi| \int_0^1 1 dt = |n\xi| \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} |m_0(\xi) - 1| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |h_n| |n\xi| \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |h_n| |n| \right) |\xi|, \end{aligned}$$

esto es,

$$|m_0(\xi) - 1| \leq c |\xi|, \quad \text{donde } c = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n |h_n| |n|.$$

Así,

$$|m_0(\xi)| \leq 1 + |m_0(\xi) - 1| \leq 1 + c |\xi| \leq e^{c|\xi|}$$

Por consiguiente

$$|m_0(2^{-j}\xi)| \leq e^{c|2^{-j}\xi|} = e^{c2^{-j}|\xi|},$$

luego,

$$\prod_{j=1}^{\ell} |m_0(2^{-j} \xi)| \leq \prod_{j=1}^{\ell} e^{c2^{-j}|\xi|} = e^{c|\xi| \sum_{j=1}^{\ell} 2^{-j}}.$$

Por tanto,

$$\prod_{j=1}^{\infty} |m_0(2^{-j} \xi)| \leq e^{c|\xi|}$$

**Observación.** Generalmente, todo esto es aplicable, cuando  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$  y los  $h_n$  tienen suficiente decaimiento. Para nuestro caso,  $m_0$  es un polinomio trigonométrico (solamente un número finito de los  $h_n$  son diferentes de cero); nos interesa construir un  $\phi$  de soporte compacto.

Además, sabemos que si  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\phi$  con soporte compacto, entonces  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ .

Notamos que  $\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j} \xi)$  es solamente un posible candidato para la función escala  $\phi$  correspondiente a un polinomio trigonométrico  $m_0$ . Necesitamos que  $\phi$ , satisfaga algún requisito básico para una función escala.

### 6.3 Lema de Mallat

**Lema 1. (Mallat 1989).** *Si  $m_0$  es una función  $2\pi$ -periódica satisfaciendo*

- (i)  $|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1$ , en casi todo punto.
- (ii)  $(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j} \xi)$  converge puntualmente en casi todo punto.

Entonces su aproximacion o límite, que la llamaremos  $\widehat{\phi}(\xi)$  esta en  $L^2(\mathbb{R})$  y  $\|\widehat{\phi}\|_{L^2} \leq 1$ .

**Demostración.** Definamos

$$f_k(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[ \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi) \right] \chi_{[-\pi, \pi]}(2^{-k}\xi),$$

donde

$$\chi_{[-\pi, \pi]}(2^{-k}\xi) = \begin{cases} 1; & |\xi| \leq 2^k\pi \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

ó equivalentemente

$$\chi_{[-\pi, \pi]}(2^{-k}\xi) = \begin{cases} 1; & -\pi \leq 2^{-k}\xi \leq \pi \\ 0; & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} f_k(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[ \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi) \right] \chi_{[-2^{-k}\pi, 2^k\pi]}(\xi) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[ \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi) \right] \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f_k(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[ \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi) \right] \longrightarrow \widehat{\phi}(\xi)$$

converge puntualmente en casi todo punto en  $|\xi| \leq 2^k\pi$ , cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Así mismo,

$$\begin{aligned} |f_k(\xi)|^2 &= (2\pi)^{-1} \left| \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi) \right|^2 \left| \chi_{[-2^{-k}\pi, 2^k\pi]}(\xi) \right|^2 \\ &= (2\pi)^{-1} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi)|^2 \left| \chi_{[-2^{-k}\pi, 2^k\pi]}(\xi) \right|^2 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \int |f_k(\xi)|^2 d\xi &= (2\pi)^{-1} \int \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi)|^2 \left| \chi_{[-2^{-k}\pi, 2^k\pi]}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Sea

$$I_k = \int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} \left| \prod_k(\xi) \right|^2 d\xi$$

donde  $\prod_k$  es una función  $2^{k+1}\pi$ -periódica, tal que  $\prod_k(\xi) = \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi)$ .

En efecto,

$$\begin{aligned} \prod_k(\xi + 2^{k+1}\pi) &= \prod_{j=1}^k m_0\left(\frac{\xi + 2^{k+1}\pi}{2^j}\right) \\ &= \prod_{j=1}^k m_0\left(\frac{\xi}{2^j} + 2^{k+1-j}\pi\right) \\ &= \prod_{j=1}^k m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \\ &= \prod_k(\xi) \end{aligned}$$

Por otro lado, usando el hecho de que para toda función periódica  $f$  de período  $T$  se cumple que

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}} f(t) dt,$$

entonces

$$\int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} \left| \prod_k(\xi) \right|^2 d\xi = \int_{2^k\pi - \frac{2^{k+1}\pi}{2}}^{2^k\pi + \frac{2^{k+1}\pi}{2}} \left| \prod_k(\xi) \right|^2 d\xi = \int_0^{2^{k+1}\pi} \left| \prod_k(\xi) \right|^2 d\xi,$$

esto es,

$$I_k = \int_0^{2^{k+1}\pi} \left| \prod_k (\xi) \right|^2 d\xi$$

Luego,

$$\begin{aligned} I_k &= \int_0^{2^{k+1}\pi} \left| \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi) \right|^2 d\xi = \int_0^{2^{k+1}\pi} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_0^{2^k\pi} \left[ \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 \right] \left[ |m_0(2^{-k}\xi)|^2 + |m_0(2^{-k}\xi + \pi)|^2 \right] d\xi \\ &= \int_0^{2^k\pi} \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Por tanto,

$$I_k = I_{k-1}, \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Además, se sigue de manera recurrente que para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , se tiene

$$I_k = I_{k-1} = \dots = I_1 = 2\pi$$

En efecto,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \left| \prod_{j=1}^1 m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 d\xi \\ &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

Por otra parte, integrando (6.11) sobre  $[-\pi, \pi]$ , se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi + \int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi + \pi)|^2 d\xi = 2\pi,$$

esto es,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi = 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi + \pi)|^2 d\xi.$$

A su vez, haciendo  $\mu = \xi + \pi$ , tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi + \pi)|^2 d\xi = \int_0^{2\pi} |m_0(\mu)|^2 d\mu = \int_0^{2\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi,$$

entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi = 2\pi - \int_0^{2\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi$$

y debido al cambio de  $\xi$  por  $\frac{\xi}{2}$ , tenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi = 2\pi - \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 d\xi. \quad (6.15)$$

Además, como toda función periódica  $f$  de periodo  $T$  verifica

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt,$$

entonces tenemos que  $m_0$  satisface

$$\int_0^{4\pi} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 d\xi = \int_{-2\pi}^{2\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi.$$

Luego, en (6.15) se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi = 2\pi - \frac{1}{2} \int_{-2\pi}^{2\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi,$$

el cual puede ser escrito como

$$\int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi = 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi.$$

Por tanto, deducimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2 d\xi = \pi.$$

De este modo,  $I_1 = 2\pi$ .



Así mismo,

$$|m_0(\xi)|^2 \leq |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1,$$

entonces

$$|m_0(\xi)| \leq 1, \text{ para todo } \xi.$$

Luego, como  $|\widehat{\phi}(\xi)| \leq |\prod_k(\xi)|$ , tenemos

$$\begin{aligned} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 &\leq |\prod_k(\xi)|^2 \\ \int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi &\leq \int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} |\prod_k(\xi)|^2 d\xi = I_k = 2\pi, \end{aligned}$$

esto es,

$$(2\pi)^{-1} \int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Por consiguiente, por el Lema de Fatou cuando  $k \rightarrow \infty$ , tenemos

$$\int_{-2^k\pi}^{2^k\pi} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \longrightarrow \int |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi,$$

lo cual permite aseverar que

$$(2\pi)^{-1} \int |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \leq 1.$$

Por tanto,

$$\|\widehat{\phi}\|_{L^2} \leq 1. \quad \blacksquare$$

## 6.4 Función Entera de Tipo Exponencial

En primer lugar, enunciaremos el Teorema de Paley-Wiener, el cual será usado en la obtención de una función entera de tipo exponencial, siendo en

particular la Transformada de Fourier de una distribución con soporte compacto.

**Teorema 6.3 (Paley-Wiener).** *Sea  $K$  un subconjunto convexo-compacto de  $\mathbb{R}^n$  con función soporte  $H(\xi) = \max_{x \in K} \langle x, \xi \rangle$ . Cada función entera analítica  $u(\xi)$  en  $\mathbb{C}^n$  que satisface una estimativa*

$$u(\xi) \leq C(1 + |\xi|)^M e^{H(-Im(\xi))},$$

*es la transformada de Fourier de una distribución de orden  $M$ .*

**Demostración.** Ver [12] .

**Lema 2.** *Si  $\Gamma(\xi) = \sum_{n=N_1}^{N_2} \gamma_n e^{-in\xi}$  tal que  $\sum_{n=N_1}^{N_2} \gamma_n = 1$ , entonces  $\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi)$  es una función entera de tipo exponencial. En particular es la Transformada de Fourier de una distribución con soporte en  $[N_1, N_2]$ .*

**Demostración.** Por el Teorema 6.3 para distribuciones es suficiente probar que  $\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi)$  es una función entera de tipo exponencial con acotaciones:

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi) &\leq C_1 (1 + |\xi|)^{M_1} e^{N_1 |Im(\xi)|}, \text{ para } Im(\xi) \geq 0 \\ \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi) &\leq C_1 (1 + |\xi|)^{M_2} e^{N_2 |Im(\xi)|}, \text{ para } Im(\xi) \leq 0 \end{aligned}$$

para algún  $C_1, C_2, M_1$  y  $M_2$ . Probaremos tan solo la primera acotación; la segunda es enteramente análoga.

En efecto, definamos

$$\begin{aligned}\Gamma_1(\xi) &= e^{iN_1\xi}\Gamma(\xi) \\ &= e^{iN_1\xi}\sum_{n=N_1}^{N_2}\gamma_n e^{-in\xi}\end{aligned}$$

Sea  $n = m + N_1$ , entonces si  $n = N_2$  se tiene que  $m = N_2 - N_1$ . Luego,

$$\begin{aligned}\Gamma_1(\xi) &= e^{iN_1\xi}\sum_{m=0}^{N_2-N_1}\gamma_{m+N_1}e^{-i\xi(m+N_1)} \\ &= e^{iN_1\xi}\sum_{m=0}^{N_2-N_1}\gamma_{m+N_1}e^{-i\xi m}e^{-i\xi N_1} \\ &= \sum_{m=0}^{N_2-N_1}\gamma_{m+N_1}e^{-i\xi m}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\Gamma_1(\xi) = \sum_{n=0}^{N_2-N_1}\gamma_{n+N_1}e^{-i\xi n}.$$

Así mismo, se prueba que

$$\prod_{j=1}^{\infty}\Gamma(2^{-j}\xi) = e^{-iN_1\xi}\prod_{j=1}^{\infty}\Gamma_1(2^{-j}\xi).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\Gamma_1(\xi) &= e^{iN_1\xi}\Gamma(\xi) \quad , \quad \Gamma_1\left(\frac{\xi}{2}\right) = e^{iN_1\frac{\xi}{2}}\Gamma\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad , \\ \Gamma_1\left(\frac{\xi}{2^2}\right) &= e^{iN_1\frac{\xi}{2^2}}\Gamma\left(\frac{\xi}{2^2}\right), \dots, \Gamma_1\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = e^{iN_1\frac{\xi}{2^j}}\Gamma\left(\frac{\xi}{2^j}\right).\end{aligned}$$

Luego,

$$\Gamma_1\left(\frac{\xi}{2}\right)\Gamma_1\left(\frac{\xi}{2^2}\right)\dots\Gamma_1\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = e^{iN_1\frac{\xi}{2}+iN_1\frac{\xi}{2^2}+\dots+iN_1\frac{\xi}{2^j}}\Gamma\left(\frac{\xi}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\xi}{2^2}\right)\dots\Gamma\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

entonces podemos escribir

$$\prod_{j=1}^m \Gamma_1 \left( \frac{\xi}{2^j} \right) = e^{iN_1 \xi \left( \sum_{j=1}^m \frac{1}{2^j} \right)} \prod_{j=1}^m \Gamma \left( \frac{\xi}{2^j} \right)$$

y cuando  $m \rightarrow \infty$ , se tiene

$$\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1 \left( \frac{\xi}{2^j} \right) = e^{iN_1 \xi} \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma \left( \frac{\xi}{2^j} \right).$$

Por consiguiente,

$$\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma \left( \frac{\xi}{2^j} \right) = e^{-iN_1 \xi} \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1 \left( \frac{\xi}{2^j} \right).$$

Ahora, necesitamos encontrar una polinomial acotada para  $\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1 \left( \frac{\xi}{2^j} \right)$ , cuando

$Im(\xi) \geq 0$ . En efecto, si  $Im(\xi) \geq 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} |\Gamma_1(\xi) - 1| &= \left| \sum_{n=0}^{N_2-N_1} \gamma_{n+N_1} e^{-i\xi n} - 1 \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{N_2-N_1} \gamma_{n+N_1} e^{-i\xi n} - \sum_{n=0}^{N_2-N_1} \gamma_{n+N_1} \right|, \end{aligned}$$

debido a que  $\sum_{m=0}^{N_2-N_1} \gamma_{m+N_1} = 1$ , pues  $\sum_{n=N_1}^{N_2} \gamma_n = 1$ . Así mismo,

$$\begin{aligned} |\Gamma_1(\xi) - 1| &= \left| \sum_{n=0}^{N_2-N_1} \gamma_{n+N_1} (e^{-i\xi n} - 1) \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{N_2-N_1} |\gamma_{n+N_1}| |e^{-i\xi n} - 1| \end{aligned}$$

pero,

$$e^{-i\xi n} - 1 = -in\xi \int_0^1 e^{-i\xi nt} dt$$

entonces

$$\begin{aligned} |e^{-i\xi n} - 1| &\leq |-in\xi| \int_0^1 |e^{-i\xi nt}| dt = |n\xi| \int_0^1 dt \\ &\leq |n\xi| \end{aligned}$$

Luego,

$$|\Gamma_1(\xi) - 1| \leq \sum_{n=0}^{N_2-N_1} |\gamma_{n+N_1}| |e^{-i\xi n} - 1| \leq \sum_{n=0}^{N_2-N_1} |\gamma_{n+N_1}| |n\xi|,$$

esto es,

$$|\Gamma_1(\xi) - 1| \leq 2 \sum_{n=0}^{N_2-N_1} |\gamma_{n+N_1}|$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |\Gamma_1(\xi) - 1| &\leq 2 \sum_{n=0}^{N_2-N_1} |\gamma_{n+N_1}| \min(1, n|\xi|) \\ &\leq 2 \sum_{n=0}^{N_2-N_1} |\gamma_{n+N_1}| \min(1, |\xi|) \\ &\leq C \min(1, |\xi|), \end{aligned}$$

donde  $C = 2 \sum_{n=0}^{N_2-N_1} |\gamma_{n+N_1}|$ .

Ahora, tomaremos  $\xi$  arbitrario, tal que  $Im(\xi) \geq 0$ .

Supongamos que  $|\xi| \leq 1$ , entonces probaremos que

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| \leq e^C \tag{6.16}$$

En efecto, como

$$\prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi) = e^{-iN_1\xi} \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi),$$

entonces

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma(2^{-j}\xi) \right| = |e^{-iN_1\xi}| \left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| = \left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right|,$$

pero,

$$|\Gamma_1(\xi)| - 1 \leq |\Gamma_1(\xi) - 1| \leq C \min(1, |\xi|),$$

donde deducimos que

$$|\Gamma_1(\xi)| \leq 1 + C \min(1, |\xi|). \quad (6.17)$$

Considerando  $\xi = 2^{-j}\xi$  y debido a que  $|\xi| \leq 1$ , en la desigualdad (6.17), tenemos

$$|\Gamma_1(2^{-j}\xi)| \leq 1 + C \min(1, 2^{-j}|\xi|) \leq 1 + C2^{-j}|\xi| \leq 1 + C2^{-j}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^m |\Gamma_1(2^{-j}\xi)| &\leq \prod_{j=1}^m (1 + C2^{-j}) \\ \left| \prod_{j=1}^m \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| &\leq \prod_{j=1}^m e^{2^{-j}C} \\ \left| \prod_{j=1}^m \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| &\leq e^{C \sum_{j=1}^m 2^{-j}} \end{aligned}$$

Por consiguiente, cuando  $m \rightarrow \infty$ , en la última desigualdad, obtenemos la afirmación (6.16).

Ahora, si  $|\xi| \geq 1$  probaremos que

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| \leq (1 + C) e^C |\xi|^{\frac{\ln(1+C)}{\ln 2}}$$

En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| &= \left| \prod_{j=1}^{j_0+1} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| \left| \prod_{j=j_0+2}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| \\ &= \left| \prod_{j=1}^{j_0+1} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| \left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j-j_0-1}\xi) \right| \end{aligned}$$

Como  $|\xi| \geq 1$ , entonces existe  $j_0 \geq 0$  tal que  $2^{j_0} \leq |\xi| \leq 2^{j_0+1}$ , lo cual nos permite aseverar que  $\min(1, |\xi|) = 1$ , luego, de (6.17) se obtiene

$$|\Gamma_1(\xi)| \leq 1 + C$$

y haciendo  $\xi = 2^{-j}\xi$ , tenemos  $|\Gamma_1(2^{-j}\xi)| \leq 1 + C$ . Entonces

$$\prod_{j=1}^{j_0+1} |\Gamma_1(2^{-j}\xi)| \leq (1 + C)^{j_0+1}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| &= \left| \prod_{j=1}^{j_0+1} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| \left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j-j_0-1}\xi) \right| \\ &\leq (1 + C)^{j_0+1} \left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j-j_0-1}\xi) \right| \end{aligned}$$

y debido a (6.16), tenemos

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| \leq (1 + C)^{j_0+1} e^C.$$

Además, como  $2^{j_0} \leq |\xi| \leq 2^{j_0+1}$ , se tiene que

$$j_0 \ln 2 \leq \ln |\xi| \leq (j_0 + 1) \ln 2,$$

es decir,

$$j_0 \leq \frac{\ln |\xi|}{\ln 2} \leq j_0 + 1$$

Así,

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| \leq e^C (1+C) (1+C)^{\frac{\ln|\xi|}{\ln 2}}$$

y debido a que

$$\begin{aligned} e^C (1+C) (1+C)^{\frac{\ln|\xi|}{\ln 2}} &= e^C (1+C) \left[ e^{\ln(1+C)} \right]^{\frac{\ln|\xi|}{\ln 2}} \\ &= e^C (1+C) |\xi|^{\frac{\ln(1+C)}{\ln 2}}, \end{aligned}$$

concluimos que

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| \leq e^C (1+C) |\xi|^{\frac{\ln(1+C)}{\ln 2}},$$

esto es,

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} \Gamma_1(2^{-j}\xi) \right| \leq (1+C) e^C |\xi|^{\frac{\ln(1+C)}{\ln 2}}. \quad (6.18)$$

Luego, por (6.16) y (6.18) logramos establecer el polinomio acotado deseado.

■

## 6.5 El Polinomio Trigonométrico $m_0$ y los Frames Apretados

Antes de mencionar las condiciones sobre  $m_0$  que aseguren la identidad

$$\sum_{\ell} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = (2\pi)^{-1}, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R},$$

es interesante observar que aún si está identidad no es cierta, la función  $\psi$  definida por

$$\psi(x) = 2^{\frac{1}{2}} \sum_n (-1)^n \bar{h}_{1-n} \phi(2x - n)$$



genera un frame apretado, como probó Lawton en 1990.

**Teorema 6.4.** *Sea  $m_0$  un polinomio trigonométrico que satisface la condición (6.11) y que  $m_0(0) = 1$ . Además, consideremos  $\phi, \psi$  funciones de soporte compacto en  $L^2(\mathbb{R})$  definidas por:*

$$\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \quad \text{y} \quad \psi(\xi) = 2^{\frac{1}{2}} \sum_n (-1)^n \bar{h}_{1-n} \phi(2x - n)$$

respectivamente. Entonces

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|^2, \quad \text{para todo } f \in L^2(\mathbb{R}),$$

donde  $\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k)$ . Es decir,  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  constituye un frame apretado para  $L^2(\mathbb{R})$ .

### Demostración.

(a) Sabemos que la condición (6.11) puede ser expresada como

$$\sum_m h_m \bar{h}_{m-2k} = \delta_{k,0} \tag{6.19}$$

(b) Consideremos  $f \in C_c^\infty$  ( $f$  de soporte compacto y  $C^\infty$ ). Luego,

$$\begin{aligned} \sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 &= \sum_k \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{\phi}_{j,k}(x) dx \right|^2 \\ &= \sum_k \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}x - k) dx \right|^2 \\ &= 2^{-j} \sum_k \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi(2^{-j}x - k) dx \right|^2. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi(2^{-j}x - k) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |\phi(2^{-j}x - k)| dx,$$

entonces

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \leq 2^{-j} \sum_k \left[ \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |\phi(2^{-j}x - k)| dx \right]^2$$

y debido a que  $f \in C_c^\infty$ , tenemos

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \leq 2^{-j} \sum_k \left[ \int_{Sop(f)} \|f\|_\infty |\phi(2^{-j}x - k)| dx \right]^2,$$

es decir,

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \leq 2^{-j} \|f\|_\infty^2 \sum_k \left[ \int_{Sop(f)} |\phi(2^{-j}x - k)| dx \right]^2.$$

Luego, aplicando la desigualdad de Hölder, se tiene

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \leq 2^{-j} \|f\|_\infty^2 \sum_k \left[ \int_{Sop(f)} |\phi(2^{-j}x - k)|^2 dx \right] \left[ \int_{Sop(f)} dx \right].$$

Entonces

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \leq 2^{-j} \|f\|_\infty^2 |Sop(f)| \left[ \sum_k \int_{Sop(f)} |\phi(2^{-j}x - k)|^2 dx \right]$$

y haciendo el cambio  $x = 2^j y$ , obtenemos

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \leq \|f\|_\infty^2 |Sop(f)| \left[ \sum_k \int_{2^{-j}Sop(f)} |\phi(y - k)|^2 dy \right] \quad (6.20)$$

Elegimos  $K > 0$  tal que

$$2^{-j}Sop(f) \cap [2^{-j}Sop(f) + K] = \emptyset, \text{ cuando } k \geq K.$$

Entonces en la parte derecha de (6.20) se tiene

$$\begin{aligned} \sum_k \int_{2^{-j} \text{Sop}(f)} |\phi(y-k)|^2 dy &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{K-1} \int_{2^{-j} \text{Sop}(f)} |\phi(y-mK-l)|^2 dy \\ &\leq \sum_{l=0}^{K-1} \int_{\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{2^{-j} \text{Sop}(f) + l + mK\}} |\phi(y-l)|^2 dy \end{aligned}$$

y debido a

$$\text{int} \left\{ \overline{(2^{-j} \text{Sop}(f) + l + mK)} \right\} \cap \text{int} \left\{ \overline{(2^{-j} \text{Sop}(f) + l + nK)} \right\} = \emptyset, \text{ si } m \neq n;$$

para todo  $m, n \in \mathbb{Z}$ , se sigue que

$$\sum_k \int_{2^{-j} \text{Sop}(f)} |\phi(y-k)|^2 dy \leq \sum_{\ell=0}^{K-1} \int_{\mathbb{R}} |\phi(y-\ell)|^2 dy.$$

Luego, desarrollando la sumatoria en el lado derecho de la última desigualdad, obtenemos

$$\sum_k \int_{2^{-j} \text{Sop}(f)} |\phi(y-k)|^2 dy \leq K \|\phi\|^2.$$

Por consiguiente,

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \leq \|f\|_\infty^2 |\text{Sop}(f)| K \|\phi\|^2,$$

el cual nos permite aseverar que

$$\sum_k |\langle f, \phi_{j,k} \rangle|^2 \text{ es convergente, para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

Análogamente, se obtendrá que

$$\sum_k |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \text{ es convergente, para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

(c) Debido a que  $\phi = \sum_n h_n \phi_{-1,n}$ ,  $\psi = \sum_n (-1)^n \bar{h}_{-n+1} \phi_{-1,n}$  y además

$$\langle f, \phi_{j,k} \rangle = \sum_n \bar{h}_{n-2k} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad , \quad \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_n \bar{g}_{n-2k} \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle$$

se tiene

$$\langle f, \phi_{0,k} \rangle = \sum_n \bar{h}_{n-2k} \langle f, \phi_{-1,n} \rangle \quad , \quad \langle f, \psi_{0,k} \rangle = \sum_n \bar{g}_{n-2k} \langle f, \phi_{-1,n} \rangle$$

Luego,

$$\sum_k |\langle f, \phi_{0,k} \rangle|^2 = \sum_k \sum_{m,n} [h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k}] \langle f, \phi_{-1,n} \rangle \langle \phi_{-1,m}, f \rangle \quad (6.21)$$

$$\sum_k |\langle f, \psi_{0,k} \rangle|^2 = \sum_k \sum_{m,n} [(-1)^{m+n} \bar{h}_{2k-n+1} h_{2k-m+1}] \langle f, \phi_{-1,n} \rangle \langle \phi_{-1,m}, f \rangle$$

donde un número finito de los  $h_n$  son diferentes de cero.

(d) Ahora veamos que sucede con las expresiones de (6.21).

Si  $n = 2r$ ,  $m = 2s$  y haciendo  $k = s + r - \ell$ , para luego sumar la parte derecha de las expresiones de (6.21), tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_k [h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} + (-1)^{m+n} \bar{h}_{2k-n+1} h_{2k-m+1}] \\ &= \sum_{k=k(n,s)} [h_{2\ell-2s} \bar{h}_{2\ell-2r} + \bar{h}_{2s-2\ell+1} h_{2r-2\ell+1}] , \end{aligned}$$

y usando

$$\sum_p h_p \bar{h}_{p-2k} = \delta_{k,0} = \begin{cases} 1 ; & k = 0 \\ 0 ; & k \neq 0 \end{cases}$$

obtenemos

$$\sum_k [h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} + (-1)^{m+n} \bar{h}_{2k-n+1} h_{2k-m+1}] = \delta_{r,s} = \delta_{n,m} \quad (6.22)$$

En forma análoga, para  $n = 2r + 1$ ,  $m = 2s + 1$  y haciendo  $k = s + r - \ell$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_k [h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} + (-1)^{n+m} \bar{h}_{2k-n+1} h_{2k-m+1}] \\ &= \sum_k [h_{2\ell-2s+1} \bar{h}_{2\ell-2r+1} + \bar{h}_{2s-2\ell} h_{2r-2\ell}] \\ &= \delta_{r,s} = \delta_{n,m} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Así mismo, para  $n = 2r$ ,  $m = 2s + 1$  y haciendo  $k = s + r - \ell$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_k [h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} + (-1)^{n+m} \bar{h}_{2k-n+1} h_{2k-m+1}] \\ &= \sum_k [h_{2r-2k} \bar{h}_{2s+1-2k} - \bar{h}_{2k-2r+1} h_{2k-2s}] \end{aligned}$$

y por (6.19), se tiene

$$\sum_k [h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} + (-1)^{n+m} \bar{h}_{2k-n+1} h_{2k-m+1}] = 0 = \delta_{r,s} = \delta_{n,m} \quad (6.24)$$

Luego, de (6.22), (6.23) y (6.24), se sigue que

$$\sum_k [h_{n-2k} \bar{h}_{m-2k} + (-1)^{n+m} \bar{h}_{2k-n+1} h_{2k-m+1}] = \delta_{n,m} \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \sum_k |\langle f, \phi_{0,k} \rangle|^2 + \sum_k |\langle f, \psi_{0,k} \rangle|^2 &= \sum_{m,n} \delta_{m,n} \langle f, \phi_{-1,m} \rangle \langle \phi_{-1,m}, f \rangle \\ &= \sum_m \langle f, \phi_{-1,m} \rangle \overline{\langle f, \phi_{-1,m} \rangle} \\ &= \sum_m |\langle f, \phi_{-1,m} \rangle|^2 \end{aligned}$$

Por la propiedad telescópica, tenemos

$$\sum_{j=-J+1}^J \sum_k |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \sum_k |\langle f, \phi_{-J,k} \rangle|^2 - \sum_k |\langle f, \phi_{J,k} \rangle|^2 \quad (6.25)$$

(e) Así mismo, debido al Teorema 4.1 se tiene que para una función fija  $f$ , continua y de soporte compacto,

$$\sum_k |\langle f, \phi_{J,k} \rangle|^2 \longrightarrow 0, \text{ cuando } J \rightarrow \infty,$$

esto es,  $\sum_k |\langle f, \phi_{J,k} \rangle|^2 \leq \varepsilon$  para  $J$  suficientemente grande y  $\varepsilon$  arbitrario.

Similarmente, debido al Teorema 4.2 se tiene que

$$\sum_k |\langle f, \phi_{-J,k} \rangle|^2 = 2\pi \int |\widehat{\phi}(2^{-J}\xi)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi + R$$

con  $|R| \leq C'' 2^{-J} \leq \varepsilon$ , para  $J$  suficientemente grande.

*Afirmación:*  $|\widehat{\phi}(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ , para todo  $\xi$ .

En efecto, como  $|m_0(\xi)| \leq 1$ , para todo  $\xi$ , entonces es cierto que

$$\left| m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq 1, \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, k$$

esto nos permite afirmar

$$\left| \prod_{j=1}^k m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq 1$$

y cuando  $k \rightarrow \infty$ , obtenemos

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right) \right| \leq 1.$$

Por otra parte, sabemos que  $\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$ , entonces de la desigualdad anterior obtenemos la afirmación deseada.

Ahora, debido a la afirmación anterior y al hecho de que  $\widehat{\phi}$  es continua en  $\xi = 0$ , estamos en condiciones de aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue, el cual nos permite aseverar que

$$\sum_k |\langle f, \phi_{-J,k} \rangle|^2 \longrightarrow 2\pi \left| \widehat{\phi}(0) \right|^2 \int \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi, \text{ cuando } J \rightarrow \infty,$$

y como  $\widehat{\phi}(0) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ , tenemos

$$\sum_k |\langle f, \phi_{-J,k} \rangle|^2 \longrightarrow \|f\|^2, \text{ cuando } J \rightarrow \infty,$$

Por consiguiente en (6.25), obtenemos que

$$\sum_{j=-J+1}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \longrightarrow \|f\|^2, \text{ cuando } J \rightarrow \infty.$$

Por tanto,

$$\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|^2, \text{ para todo } f \in C_c^\infty \quad (6.26)$$

Finalmente, como la inmersión continua  $C_c^\infty \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$  es densa, (6.26) es extendido para todo  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Por consiguiente

$$\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|^2, \text{ para todo } f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{si y sólo si}$$

$$\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\} \text{ es base ortonormal en } L^2(\mathbb{R}).$$

Esto es,  $\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$  es un frame apretado para  $L^2(\mathbb{R})$ . ■

## 6.6 Comentarios

Sin considerar otras condiciones sobre  $m_0$ , se tiene un frame apretado (*tight-frame*) con frame constante 1. Esto es,

$$\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|^2, \text{ para todo } f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{si y sólo si}$$

$$\{\psi_{j,k} : j, k \in \mathbb{Z}\} \text{ es base ortonormal para } L^2(\mathbb{R}).$$

o equivalentemente

$$\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 = \|f\|^2, \text{ para todo } f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ si y sólo si } \sum_l \left| \widehat{\psi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 = (2\pi)^{-1}.$$

Además, como  $\widehat{\psi}(\xi) = e^{-\frac{i\xi}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$  se tiene que

$$\left| \widehat{\psi}(\xi) \right| = \left| e^{-\frac{i\xi}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \right| = \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right| \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|,$$

entonces

$$2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = 2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi + 2\pi\ell}{2} + \pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\xi + 2\pi\ell}{2}\right) \right|^2$$

$$1 = 2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\ell + \pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi\ell\right) \right|^2.$$

Ahora, descomponiendo los términos de índices pares e impares de la sumatoria, tenemos

$$1 = 2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + 2\pi\ell + \pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + 2\pi\ell\right) \right|^2$$

$$+ 2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + 2\pi\ell + 2\pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi + 2\pi\ell\right) \right|^2.$$



Entonces

$$1 = 2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 \left| \widehat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} + 2\pi\ell \right) \right|^2 \\ + 2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \left| \widehat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} + \pi + 2\pi\ell \right) \right|^2,$$

el cual puede ser escrito como

$$1 = \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} + 2\pi\ell \right) \right|^2 \\ + \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right|^2 2\pi \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi} \left( \frac{\xi}{2} + \pi + 2\pi\ell \right) \right|^2$$

y haciendo  $\alpha(\xi) = 2\pi \sum_{\ell} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2$  en la última ecuación, obtenemos

$$\left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 \alpha(\xi) + \left| m_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \alpha \left( \frac{\xi}{2} + \pi \right) = 1.$$

## 6.7 Otras Consideraciones

Diversas estrategias han sido desarrolladas, correspondiente a condiciones sobre  $m_0$ , que permiten asegurar que se cumpla

$$\sum_{\ell} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = (2\pi)^{-1} \quad \text{ó} \quad \int \phi(x) \overline{\phi}(x - n) dx = \delta_{n,0}$$

Una de estas estrategias consiste en probar que las funciones truncamientos  $f_k$  definidas por:

$$f_k(\xi) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[ \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi) \right] \chi_{[-\pi, \pi]}(2^{-k}\xi),$$

donde

$$\chi_{[-\pi, \pi]}(2^{-k} \xi) = \begin{cases} 1 & ; \quad |\xi| \leq 2^k \pi \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

converja a  $\widehat{\phi}$  en  $L^2(\mathbb{R})$  y no solo puntualmente en casi todo punto.

Condiciones suficientes sobre el polinomio trigonométrico  $m_0$  para asegurar esta convergencia en  $L^2(\mathbb{R})$  son dadas por:

- (i)  $\inf_{|\xi| \leq \frac{\pi}{2}} |m_0(\xi)| > 0$  (Mallat 1989), ó
- (ii)  $m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{i\xi}}{2}\right)^N \mathcal{L}(\xi)$ , con  $\sup_{\xi} |\mathcal{L}(\xi)| \leq 2^{N-\frac{1}{2}}$  ( ver [11]).

Ninguna de estas condiciones son necesarias, pero ambas cubren muchos ejemplos interesantes.

# Capítulo 7

## Condiciones necesarias y suficientes para ortonormalizar

Se sabe que posteriormente, muchas condiciones necesarias y suficientes sobre  $m_0$  fueron encontrados. Así, Cohen (1990) identificó una primera condición necesaria y suficiente sobre  $m_0$  y aseguró la convergencia de los  $f_k$  en  $L^2(\mathbb{R})$ . Empezaremos introduciendo un nuevo concepto.

### 7.1 Condiciones necesarias y suficientes sobre

$$m_0$$

**Definición 7.1.** *Se dice que un conjunto compacto  $K$  es congruente a  $[-\pi, \pi]$  módulo  $2\pi$  si:*

- (i)  $|K| = 2\pi$
- (ii) *Para todo  $\xi \in [-\pi, \pi]$ , existe  $\ell \in \mathbb{Z}$  tal que  $\xi + 2\pi\ell \in K$ .*

Propiamente, tal conjunto compacto  $K$  congruente a  $[-\pi, \pi]$  puede ser visto como el resultado de algún trabajo de corte y pegamento sobre  $[-\pi, \pi]$ . Ahora vamos a establecer y probar el teorema de Cohen.

**Teorema 7.1 (Cohen 1990).** *Supongamos que  $m_0$  es un polinomio trigonométrico que satisface la condición (6.11) con  $m_0(0) = 1$ , y definamos  $\phi$  como:*

$$\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

*Si existe un compacto  $K$  congruente a  $[-\pi, \pi]$  módulo  $2\pi$  conteniendo una vecindad de 0 tal que*

$$\inf_{k>0} \inf_{\xi \in K} |m_0(2^{-k}\xi)| > 0, \quad (7.1)$$

*entonces*

$$\int \phi(x) \overline{\phi(x-n)} dx = \delta_{n,0} \text{ si y sólo si } \sum_{\ell} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

**Demostración.** Definamos:

$$u_k(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \left[ \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi) \right] \chi_K(2^{-k}\xi), \quad (7.2)$$

donde

$$\chi_K(\xi) = \begin{cases} 1 & ; \quad \xi \in K \\ 0 & ; \quad \xi \notin K \end{cases}$$

Desde que  $K$  contiene una vecindad de 0,  $u_k \rightarrow \widehat{\phi}$  en casi todo punto, cuando  $k \rightarrow \infty$ . En efecto, podemos asumir  $|m_0(2^{-k}\xi)| \geq C > 0$  para  $k \geq 1, \xi \in K$ . También se tiene

$$|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq C' |\xi|, \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}$$

En efecto,

$$m_0(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-in\xi}, \quad m_0(0) = 1$$

entonces

$$|m_0(\xi) - m_0(0)| = |m_0(\xi) - 1| = \left| 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-in\xi} - 2^{-1/2} \sum_n h_n \right|$$

Pero,

$$\prod_{k=k_0+1}^{\infty} e^{-C'2^{-k+1}|\xi|} \geq e^{-C'2^{-k_0+1} \max_{\xi \in K} |\xi|},$$

lo que implica tener

$$|\widehat{\phi}(\xi)| \geq C'',$$

donde  $C'' = (2\pi)^{-1/2} C^{k_0} e^{-C'2^{-k_0+1} \max_{\xi \in K} |\xi|} > 0$ . Por tanto,

$$\frac{|\widehat{\phi}(\xi)|}{C''} \geq \chi_K(\xi). \quad (7.3)$$

Por otra parte, de (7.2) se sigue que

$$|u_k(\xi)| \leq (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi)| |\chi_K(2^{-k}\xi)|$$

y debido a (7.3) se tiene

$$|u_k(\xi)| \leq (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi)| \frac{|\widehat{\phi}(2^{-k}\xi)|}{C''}.$$

Entonces, si hacemos  $k \rightarrow \infty$ , tenemos

$$|u_k(\xi)| \leq (2\pi)^{-1} \frac{|\widehat{\phi}(\xi)|}{C''}$$

y usando el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obtenemos que

$$u_k(\xi) \longrightarrow \widehat{\phi}(\xi) \text{ en } L^2(\mathbb{R}), \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

La congruencia de  $K$  con  $[-\pi, \pi]$  módulo  $2\pi$  significa que para cualquier función  $f$   $2\pi$ -periódica,

$$\int_{\xi \in K} f(\xi) d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi = \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi.$$

En particular,

$$\int |u_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \int_{\xi \in K} (2\pi)^{-1} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi)|^2 |\chi_K(2^{-k}\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi,$$

de donde, haciendo  $\zeta = 2^{-k}\xi$  y  $j = \ell + 1$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int |u_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi &= (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^{2\pi} \prod_{\ell=0}^{k-1} |m_0(2^{-\ell-1} 2^k \zeta)|^2 e^{-in2^k \zeta} d\zeta \\ &= (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^{2\pi} e^{-in2^k \zeta} \prod_{\ell=0}^{k-1} |m_0(2^\ell \zeta)|^2 d\zeta \\ &= (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^{2\pi} e^{-in2^k \zeta} \left[ \prod_{\ell=1}^{k-1} |m_0(2^\ell \zeta)|^2 \right] |m_0(\zeta)|^2 d\zeta \\ &= (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^\pi \left[ \prod_{\ell=1}^{k-1} |m_0(2^\ell \zeta)|^2 \right] [|m_0(\zeta)|^2 + |m_0(\zeta + \pi)|^2] d\zeta \end{aligned}$$

Así mismo,

$$|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq 2^{-1/2} \sum_n |h_n| |e^{-in\xi} - 1|.$$

Entonces, debido a que  $|e^{-in\xi} - 1| \leq |n\xi|$  se tiene

$$|m_0(\xi) - m_0(0)| \leq C' |\xi|,$$

donde  $C' = 2^{-1/2} \sum_n |h_n| |n|$ . Por consiguiente,

$$1 - |m_0(\xi)| \leq |m_0(0) - m_0(\xi)| = |1 - m_0(\xi)| \leq C' |\xi|,$$

esto es,  $|m_0(\xi)| \geq 1 - C' |\xi|$ .

Puesto que  $K$  es un conjunto acotado podemos encontrar  $k_0 > 0$  tal que

$$2^{-k} C' |\xi| < \frac{1}{2}, \text{ si } \xi \in K \text{ y } k \geq k_0.$$

Por otra parte, para  $\xi \in K$ , se tiene que

$$\widehat{\phi}(\xi) = \prod_{k=1}^{\ell} m_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^\ell}\right).$$

Luego,

$$\left| \widehat{\phi}(\xi) \right| \longrightarrow \left| \widehat{\phi}(0) \right| \prod_{k=1}^{\infty} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \right|$$

converge absolutamente y uniformemente sobre el compacto  $K$ , cuando  $\ell \rightarrow \infty$ , esto es,

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\phi}(\xi) \right| &= (2\pi)^{-1/2} \prod_{k=1}^{\infty} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \right| \\ &= (2\pi)^{-1/2} \prod_{k=1}^{k_0} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \right| \prod_{k=k_0+1}^{\infty} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \right|. \end{aligned}$$

Además, usando

$$\left| m_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \right| \geq C, \text{ para todo } k \geq 1 \text{ y } \left| m_0\left(\frac{\xi}{2^k}\right) \right| \geq 1 - C' \left| \frac{\xi}{2^k} \right| \geq e^{-2C'2^{-k}|\xi|}$$

convenientemente en la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \left| \widehat{\phi}(\xi) \right| &\geq (2\pi)^{-1/2} C^{k_0} \prod_{k=k_0+1}^{\infty} e^{-2C'2^{-k}|\xi|} \\ \left| \widehat{\phi}(\xi) \right| &\geq (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^\pi e^{-in2^k\zeta} \prod_{\ell=1}^{k-1} |m_0(2^\ell\zeta)|^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Pero,

$$(2\pi)^{-1} 2^k \int_0^\pi e^{-in2^k\zeta} \prod_{\ell=1}^{k-1} |m_0(2^\ell\zeta)|^2 d\zeta = (2\pi)^{-1} 2^{k-1} \int_0^{2\pi} e^{-in2^{k-1}\zeta} \prod_{\ell=0}^{k-2} |m_0(2^\ell\zeta)|^2 d\zeta$$

En efecto, haciendo  $\ell' = \ell - 1$ ,  $\ell' = 0$ ;  $\ell = k - 1$ ,  $\ell' = k - 2$ , tenemos

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^\pi e^{-in2^k \zeta} \prod_{\ell=1}^{k-1} |m_0(2^\ell \zeta)|^2 d\zeta &= (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^\pi e^{-in2^k \zeta} \prod_{\ell'=0}^{k-2} |m_0(2^{\ell'+1} \zeta)|^2 d\zeta \\ &= (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^{2\pi} e^{-in2^k \frac{\xi}{2}} \prod_{\ell=0}^{k-2} |m_0(2^\ell \xi)|^2 \frac{d\xi}{2}, \end{aligned}$$

debido a la sustitución de  $\zeta = \frac{\xi}{2}$ ,  $0 \leq \zeta \leq 2\pi$ . Luego,

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1} 2^k \int_0^\pi e^{-in2^k \zeta} \prod_{\ell=1}^{k-1} |m_0(2^\ell \zeta)|^2 d\zeta &= (2\pi)^{-1} 2^{k-1} \int_0^{2\pi} e^{-in2^{k-1} \xi} \prod_{\ell=0}^{k-2} |m_0(2^\ell \xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\xi \in K} |u_{k-1}(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{\xi \in K} |u_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \int_{\xi \in K} |u_{k-1}(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi,$$

es decir,

$$\int_{\xi \in K} |u_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \int_{\xi \in K} |u_{k-1}(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \dots = \int_{\xi \in K} |u_1(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi.$$

En particular,

$$\int_{\xi \in K} |u_1(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \pi^{-1} \int_0^\pi e^{-in2\xi} d\xi.$$

Si  $n = 0$ :

$$\int_{\xi \in K} |u_1(\xi)|^2 e^{-i0\xi} d\xi = 1$$

Si  $n \neq 0$ :

$$\int_{\xi \in K} |u_1(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = 0.$$

Por tanto,

$$\int_{\xi \in K} |u_k(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \delta_{n,0}, \text{ para todo } k.$$



Por consiguiente, como  $u_k(\xi)$  converge a  $\widehat{\phi}(\xi)$  en casi todo punto, cuando  $k \rightarrow \infty$  y

$$|u_k(\xi)| \leq (C'')^{-1} (2\pi)^{-1/2} |\widehat{\phi}(\xi)|,$$

entonces

$$|u_k(\xi)|^2 \longrightarrow |\widehat{\phi}(\xi)|^2 \text{ en casi todo punto, cuando } k \rightarrow \infty.$$

Luego,

$$\int e^{-in\xi} |u_k(\xi)|^2 d\xi \longrightarrow \int e^{-in\xi} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi, \text{ en casi todo punto, cuando } k \rightarrow \infty,$$

esto es,

$$\delta_{n,0} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int e^{-in\xi} |u_k(\xi)|^2 d\xi = \int e^{-in\xi} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{\phi}(\xi)|^2 e^{-in\xi} d\xi = \delta_{n,0} \text{ si y sólo si } \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{si y sólo si } \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \overline{\phi(x-n)} dx = \delta_{n,0}. \blacksquare$$

### Observaciones.

1.- El recíproco del Teorema 7.1 también se cumple. Para ello, definamos

los conjuntos  $S_\ell$ ,  $-\ell_0 \leq \ell \leq \ell_0$  por

$$S_0 = \left\{ \xi \in [-\pi, \pi] : |\widehat{\phi}(\xi)| \geq C \right\}$$

y para  $\ell \neq 0$ ,

$$S_\ell = \left\{ \xi \in [-\pi, \pi] : \bigcup_{k=-\ell_0}^{\ell_0} S_k \cup S_0 ; |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell)| \geq C \right\}.$$

Además, definimos

$$K = \bigcup_{\ell=-\ell_0}^{\ell_0} \overline{(S_\ell + 2\pi\ell)}$$

el cual es compacto y congruente a  $[-\pi, \pi]$  módulo  $2\pi$  (Ver [12]).

2.- La condición (7.1) puede parecer técnicamente conciso y difícilmente verificable en la práctica. Recordemos sin embargo, que  $K \subset [-R, R]$  es compacto.

Por la continuidad de  $m_0$  y  $m_0(0) = 1$ , se tiene que  $|m_0(2^{-k}\xi)| > \frac{1}{2}$ , uniformemente para todo  $|\xi| \leq R$ , si  $k \geq k_0$ .

Esto significa que (7.1) reduce los requerimientos que los  $k_0$ -funciones

$$m_0\left(\frac{\xi}{2}\right), m_0\left(\frac{\xi}{2^2}\right), \dots, m_0\left(\frac{\xi}{2^{k_0}}\right)$$

no tienen ceros sobre  $K$ , o equivalentemente, que  $m_0$  no tiene ceros en

$$\frac{K}{2}, \frac{K}{2^2}, \dots, \frac{K}{2^{k_0}}$$

3.- Las funciones Truncamientos  $\mu_k$  no son las mismas como las  $f_k$  introducidas en la demostración del Lema de Mallat (Lema 1), pero se prueba que la convergencia en  $L^2(\mathbb{R})$  de los  $\mu_k$  implica la convergencia en  $L^2(\mathbb{R})$  de los  $f_k$ . En efecto,  $K$  contiene una vecindad de cero,  $K \supset [-\alpha, \alpha]$ , para algún  $\alpha$  tal que  $0 < \alpha < \pi$ . Definamos

$$v_k = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[ \prod_{j=1}^k m_0(2^{-j}\xi) \chi_{[-\alpha, \alpha]}(2^{-k}\xi) \right].$$

Puesto que  $\chi_{[-\alpha, \alpha]} \leq \chi_K$ , siguiendo los mismos argumentos del Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue aplicados a los  $\mu_k$ , se tiene que

$$\left\| v_k - \widehat{\phi} \right\|_{L^2} \longrightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Por consiguiente,

$$0 \leq \|u_k - v_k\|_{L^2} \leq \|u_k - \widehat{\phi}\|_{L^2} + \|v_k - \widehat{\phi}\|_{L^2},$$

implica que

$$\|u_k - v_k\|_{L^2} \longrightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Luego, por la congruencia de  $K$  con  $[-\pi, \pi]$  módulo  $2\pi$ , se tiene que

$$\|u_k - v_k\|_{L^2} = \|f_k - v_k\|_{L^2}.$$

Por consiguiente,

$$0 \leq \|f_k - \widehat{\phi}\|_{L^2} \leq \|f_k - v_k\|_{L^2} + \|v_k - \widehat{\phi}\|_{L^2},$$

obteniendo

$$\|f_k - \widehat{\phi}\|_{L^2} \longrightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

- 4.- Si la condición  $\inf_{|\xi| \leq \frac{\pi}{2}} |m_0(\xi)| > 0$ , propuesta por Mallat (1989) es satisfecha, entonces podemos tomar simplemente  $K = [-\pi, \pi]$ ; entonces la condición de Cohen es trivialmente satisfecha y por consiguiente  $\{\phi_{0,n}\}$  son ortonormales.

Ahora, solamente mencionaremos el siguiente corolario que da otro ejemplo de como aplicar la condición de Cohen.

**Corolario 7.1.** *Supongamos que  $m_0$  es un polinomio trigonométrico que satisface la condición (6.11) con  $m_0(0) = 1$ , y definamos  $\phi$  como:*

$$\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

Si  $m_0$  no tiene ceros en  $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ , entonces  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  son ortonormales.

Observemos que solo necesitamos construir adecuadamente un conjunto compacto  $K$ ; debido a que  $m_0$  puede tener ceros en  $\xi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $K = [-\pi, \pi]$  ya no es una buena elección. El Corolario 7.1 es óptimo en el siguiente sentido: No es posible encontrar  $0 < \alpha < \frac{1}{3}$  tal que la falta de ceros de  $m_0$  sobre  $[-\alpha\pi, \alpha\pi]$  garantiza la ortonormalidad de los  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

**Teorema 7.2.** *Supongamos que  $m_0$  es un polinomio trigonométrico que satisface la condición (6.11) con  $m_0(0) = 1$ , y definamos  $\phi$  como en el Corolario 7.1. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i)  $\int \phi(x) \overline{\phi(x-n)} dx = \delta_{n,0}$  si y solo si existe un compacto  $K$  congruente a  $[-\pi, \pi]$  módulo  $2\pi$ , conteniendo una vecindad de 0 tal que

$$\inf_{K > 0} \inf_{\xi \in K} |m_0(2^{-k}\xi)| > 0,$$

(ii) Los ciclos de la forma  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n\}$  en  $[-\pi, \pi]$ , es decir,

$$\begin{aligned} [-\pi, \pi] &\longrightarrow [-\pi, \pi] \\ \xi &\mapsto 2\xi \bmod 2\pi \end{aligned}$$

tal que  $|m_0(\xi_j)| = 1$ , para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ , no son triviales.

**Demostración.** Ver [12].

Lawton (1990) fue el pionero de los muchos caminos existentes, para la obtención de condiciones sobre  $m_0$  que aseguren que

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

**Teorema 7.3.** *Supongamos que  $m_0$  es un polinomio trigonométrico que satisface la condición (6.11) con  $m_0(0) = 1$ , y definamos  $\phi$  como:*

$$\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi).$$

*Si el autovalor 1 de la matriz  $A_{(2N-1) \times (2N-1)}$  definida por  $A_{\ell k} = \sum_{n=0}^N h_n \bar{h}_{k-2\ell+n}$ ,  $-N+1 \leq \ell, k \leq N-1$  es no degenerada, entonces  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  son ortonormales.*

**Demostración.** Supongamos que  $m_0$  sea de la forma

$$m_0(\xi) = 2^{-1/2} \sum_{n=0}^N h_n e^{-in\xi},$$

esto es,  $h_n = 0$  para  $n < 0$  ó  $n > N$ . Definamos

$$\alpha_\ell = \int \phi(x) \overline{\phi(x-\ell)} dx.$$

Desde que  $\text{Supp}(\phi) \subset [0, N]$ ,  $\alpha_\ell = 0$  si  $|\ell| > N$ , reagrupamos el  $\alpha_\ell$  no trivial,  $|\ell| < N$  en un vector- $(2N-1)$  dimensional de la forma

$$(\alpha_{-N+1}, \dots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-1})$$

Como

$$\phi(x) = 2^{1/2} \sum_n h_n \phi(2x-n),$$

el  $\alpha_\ell$  satisface

$$\begin{aligned} \alpha_\ell &= 2 \int \left( \sum_n h_n \phi(2x-n) \right) \left[ \sum_m \overline{h_m \phi(2(x-\ell)-m)} \right] dx \\ &= 2 \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N h_n \bar{h}_m \left[ \int \phi(2x-n) \overline{\phi((2x-n)-(2\ell+m-n))} dx \right] \\ &= \sum_{n,m=0}^N h_n \bar{h}_m \alpha_{2\ell+m-n}, \end{aligned}$$

y haciendo  $k = 2\ell + m - n$ , tenemos

$$\alpha_\ell = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left( \sum_{n=0}^N h_n \bar{h}_{k-2\ell+n} \right) \alpha_k \quad (7.4)$$

Definamos la matriz  $A_{(2N-1) \times (2N-1)}$  por:

$$A_{\ell k} = \sum_{n=0}^N h_n \bar{h}_{k-2\ell+n}, \quad -N+1 \leq \ell, k \leq N-1,$$

donde implícitamente  $h_m = 0$  si  $m < 0$  ó  $m > N$ , entonces

$$A_{(2N-1) \times (2N-1)} \cdot \alpha_{(2N-1) \times 1} = \alpha_{(2N-1) \times 1} = \mathbf{1} \cdot \alpha_{(2N-1) \times 1},$$

esto es,  $\alpha$  es un auto-vector de  $A$  con autovalor 1. Si definimos  $\beta_\ell = \delta_{\ell,0}$ , entonces

$$(A\beta)_\ell = \sum_k A_{\ell k} \delta_{k0} = A_{\ell 0} = \sum_{n=0}^N h_n \bar{h}_{n-2\ell}$$

y debido a que  $\sum_m h_m \bar{h}_{m-2\ell} = \delta_{\ell,0}$ , obtenemos

$$(A\beta)_\ell = \beta_\ell.$$

Si el autovalor 1 de la matriz  $A$  es no degenerada, entonces  $\alpha$  necesariamente tiene que ser múltiplo de  $\beta$ , esto es,

$$\int \phi(x) \overline{\phi(x-\ell)} dx = \gamma \delta_{\ell,0}, \quad \text{para algún } \gamma \in \mathbb{C}.$$

Esto implica

$$\sum_k \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi k) \right|^2 = (2\pi)^{-1} \gamma$$

el cual puede ser escrito como

$$(2\pi)^{-1} \gamma = \sum_{k \neq 0} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi k) \right|^2 + \left| \widehat{\phi}(\xi) \right|^2,$$

y cuando  $\xi = 0$ , en la expresión anterior obtenemos que  $\gamma = 1$ .

Así, tenemos un criterio simple de suficiencia para la ortonormalidad.

### Observaciones

1. La condición de Lawton puede ser expresada en términos de polinomios trigonométricos. Definamos, como anteriormente  $M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2$ , y el operador  $P_0$  tal que

$$(P_0 f)(\xi) = M_0\left(\frac{\xi}{2}\right) f\left(\frac{\xi}{2}\right) + M_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) f\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right);$$

$f$  función  $2\pi$ -periódica. Si  $f$  es el polinomio constante 1, entonces

$$(P_0 f)(\xi) = M_0\left(\frac{\xi}{2}\right) + M_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right),$$

es invariante bajo  $P_0$  por la condición (6.11).

Ahora, expresaremos  $M_0(\xi)$ ,  $M_0(\xi) f(\xi)$  en términos de coeficientes de Fourier,

$$M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2 = \frac{1}{2} \sum_k w_k e^{-ik\xi}, \quad w_k = \sum_n h_n \bar{h}_{n-k}$$

$$\begin{aligned} M_0(\xi) f(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_k \left( \sum_n h_n \bar{h}_{n-k} \right) e^{-ik\xi} \cdot \sum_m f_m e^{-im\xi} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,n} (h_n \bar{h}_{n-k}) e^{-ik\xi} \cdot \sum_m f_m e^{-im\xi} \\ &= \frac{1}{2} \sum_m \left( \sum_{k,n} h_n \bar{h}_{n-k} f_m \right) e^{-i\xi(k+m)} \end{aligned}$$

y haciendo  $k + m = \ell$ , se obtiene

$$M_0(\xi) f(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left( \sum_{k,n} h_n \bar{h}_{n-k} f_{\ell-k} \right) e^{-i\xi\ell}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} (P_0 f)(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left( \sum_{k,n} h_n \bar{h}_{n-k} f_{\ell-k} \right) e^{-i\frac{\xi}{2}\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left( \sum_{k,n} h_n \bar{h}_{n-k} f_{\ell-k} \right) e^{-i(\frac{\xi}{2}+\pi)\ell} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left( \sum_{k,n} h_n \bar{h}_{n-k} f_{\ell-k} \right) e^{-i\frac{\xi}{2}\ell} + \frac{1}{2} \sum_{\ell} \left( \sum_{k,n} h_n \bar{h}_{n-k} f_{\ell-k} \right) e^{-i(\frac{\xi}{2})\ell} (-1)^\ell \end{aligned}$$

y haciendo  $\frac{\ell}{2} = \ell_1$ , tenemos

$$(P_0 f)(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\ell_1} \left( \sum_{k,n} h_n \bar{h}_{n-k} f_{2\ell_1-k} \right) e^{-i\frac{\xi}{2}\ell_1} + \frac{1}{2} \sum_{\ell_1} \left( \sum_{k,n} h_n \bar{h}_{n-k} f_{2\ell_1-k} \right) e^{-i\xi\ell_1}$$

Por tanto,

$$(P_0 f)(\xi) = \sum_{\ell} \left( \sum_{k,n} h_n \bar{h}_{n-k} f_{2\ell-k} \right) e^{-i\xi\ell}$$

o equivalentemente

$$(P_0 f)_\ell = \sum_{k,n} h_n \bar{h}_{n-k} f_{2\ell-k} = \sum_k \left( \sum_n h_n \bar{h}_{n-k} f_{2\ell-k} \right)$$

y haciendo  $2\ell - k = m$ , obtenemos

$$(P_0 f)_\ell = \sum_m \left( \sum_n h_n \bar{h}_{n-2\ell+m} \right) f_m$$

2.-  $(P_0 f)_\ell$  es la misma expresión como (7.4) (no hemos asumido que  $f_m = 0$  para  $|m| > N$ , sin embargo, no es lo mismo). Así, la condición de



Lawton es satisfecha si solamente los polinomios trigonométricos invariantes bajo  $P_0$  son constantes.

En principio no es claro determinar si la condición de Lawton es suficiente o no. Se puede aceptar que la matriz  $A$  tenga un auto-vector diferente de  $\beta$  con autovalor 1, pero no obstante ocurre que  $\alpha = \beta$ . Sin embargo, a comienzos de la década de los noventa, Cohen y Lawton probaron independientemente que sus dos condiciones son equivalentes (una generalización aparece en Cohen, Daubechies y Feauveau (1992); ver también Lawton (1991)) ver ([7] y [12]), implicando la suficiencia de la condición de Lawton.

**Teorema 7.4.** *Supongamos que  $m_0$  es un polinomio trigonométrico que satisface la condición (6.11) con  $m_0(0) = 1$ . Si existe un compacto  $K$  congruente a  $[-\pi, \pi]$  módulo  $2\pi$ , conteniendo una vecindad de 0, tal que*

$$\inf_{K>0} \inf_{\xi \in K} |m_0(2^{-k}\xi)| > 0,$$

*entonces los polinomios trigonométricos invariantes bajo  $P_0$  son solamente las constantes.*

**Observación.**

1. La demostración del Teorema 7.4 es técnicamente muy elaborada, por eso solamente la mencionaremos. La idea de la demostración es por contradicción. Se prueba la existencia de un polinomio trigonométrico no constante invariante por  $P_0$ , la cual contradice la existencia de un conjunto compacto con todas las propiedades deseadas. Ver [12].
2. Es suficiente a probar equivalencias. Denotamos la condición original

de Lawton por (L), condición de Cohen (C), condición de Lawton expresada en términos de  $P_0$  por (P) y la ortonormalidad de los  $\{\phi_{0,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  por (O), entonces

$$(P) \Rightarrow (L) \Rightarrow (O) \Rightarrow (C).$$

La implicación (C)  $\Rightarrow$  (P) es suficiente para mostrar la equivalencia de las cuatro condiciones.

Los resultados anteriores quedan sintetizados en el siguiente teorema.

**Teorema 7.5.** *Supongamos que  $m_0$  es un polinomio trigonométrico que satisface la condición (6.11) con  $m_0(0) = 1$ , y definamos  $\phi$  y  $\psi$  por medio de:*

$$\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi) \quad , \quad \widehat{\psi}(\xi) = -e^{-i\frac{\xi}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Entonces  $\phi$  y  $\psi$  son funciones de  $L^2(\mathbb{R})$  con soporte compacto, satisfaciendo

$$\phi(x) = 2^{1/2} \sum_n h_n \phi(2x - n) \quad , \quad \psi(x) = 2^{1/2} \sum_n (-1)^n h_{1-n} \phi(2x - n)$$

donde  $h_n$  es determinado por medio de  $m_0$  vía:  $m_0(\xi) = 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-in\xi}$ .

Además, los  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  tal que  $\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k)$  constituye un frame apretado para  $L^2(\mathbb{R})$  con frame constante 1.

Este frame apretado es una base ortonormal si y solo si  $m_0$  satisface una de las siguientes condiciones equivalentes:

A. Existe  $K$  compacto, congruente a  $[-\pi, \pi]$  módulo  $2\pi$ , conteniendo una vecindad de 0, tal que

$$\inf_{K \geq 1} \inf_{\xi \in K} |m_0(2^{-k}\xi)| > 0$$

B. Los ciclos de la forma  $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n\}$  en  $[0, 2\pi]$ , invariante bajo  $r$ :

$$\xi \mapsto 2\xi \bmod 2\pi,$$

tal que  $m_0(\xi_j + \pi) = 0$ , para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ , no son triviales.

C. El autovalor 1 de la matriz  $A_{[2(N_2-N_1)-1] \times [2(N_2-N_1)-1]}$  definida por

$$A_{\ell k} = \sum_{n=N_1}^{N_2} h_n \bar{h}_{k-2\ell+n}, \quad -(N_2 - N_1) + 1 \leq \ell, \quad k \leq (N_2 - N_1) + 1,$$

donde  $h_n = 0$  para  $n < N_1$ ,  $n > N_2$ , es no degenerada.

## 7.2 Conclusiones

1. Si  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ , con soporte compacto, entonces  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ . Luego, de la Observación 3.4 se tiene que  $m_0(0) = 1$  y  $m_0(\pi) = 0$ , esto es,  $m_0$  tiene un cero de multiplicidad 1 al menos en  $\pi$ .

2. La solución  $P$  de (6.3) fue encontrada via combinación de dos lemas (ver [12]). El camino más natural, es utilizando el *Teorema de Bezout's*, que fue señalado por Y. Meyer [18].

3. La fórmula para  $P_N$  fue obtenida por Hermann en 1971, donde los filtros FIR fueron diseñados, sin ningún esquema de reconstrucción perfecta.

4. La convergencia también se cumple, si un número finito de los  $h_n$  son distintos de cero, siempre que los  $h_n$  tengan un decaimiento suficientemente rápido tal que

$$\sum |h_n| (1 + |n|)^\varepsilon < \infty, \text{ para algún } \varepsilon > 0.$$

En este caso

$$|\text{sen } n\xi| \leq |n\xi|^{\min\{1, \varepsilon\}}$$

nos conduce a una cota similar.

5. Si  $m_0$  satisface (6.11) y  $\phi$  es definida por

$$\hat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi),$$

el cual genera una familia no ortonormal de traslaciones  $\phi_{0,n}$ , entonces necesariamente

$$\sum_{\ell} \left| \hat{\phi}(\xi + 2\pi\ell) \right|^2 = 0, \text{ para algún } \xi$$

(Cohen 1990-b) ver [12].

**6.** La condición  $\int \psi(x) \overline{\psi(x-k)} dx = \delta_{k,0}$  expresa que  $\|\psi\| = 1$ . Sin embargo, como los  $\{\psi_{j,k}\}$  constituyen un frame apretado con cotas frames constante 1, estas dos son equivalentes.

**7.** El análisis de ondículas es una alternativa al clásico Analisis de Fourier Localizado, esto es, al uso de la Transformada de Gabor con ventanas generalizadas.

La idea de descomponer señales o funciones apareció en ciertos trabajos del análisis armónico. La transformada de Fourier es una herramienta importante en el análisis del contenido frecuencial de la señal; ella es aplicable para estudiar *operadores lineales invariantes* en el tiempo, como el *operador diferenciación*, por ejemplo. Un algoritmo útil es la llamada Transformada Rápida de Fourier (TRF), el cual reduce significativamente el cálculo de tal transformada.

La localización de la transformada de Fourier fue un paso vital en el descubrimiento de nuevas y mejores transformadas, como la *transformada de ondícula*.

**8.** De este modo, el *Análisis de Fourier Localizado* mide la frecuencia local contenida en la señal y el *Análisis de Ondículas* analiza distintas ampliaciones, aumento o disminuciones de la señal con distintas escalas, considerándose como un microscopio que permite sondear las profundidades de una señal a escalas deseadas.

Los atomos en el Análisis de Fourier Localizado son las ondas seno y coseno, las que son multiplicadas por Ventanas que se desplazan por la recta

(o en mayores dimensiones). En el caso del análisis de Ondículas la ventana es una función básica  $\psi$ , que tiene las siguientes características:

- (i) Además de ser desplazable tiene decaimiento rápido en el infinito o es de soporte compacto.
- (ii)  $\psi$  es Oscilante, esto es,  $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$
- (iii)  $\psi$  tiene cierta regularidad.
- (iv)  $\psi$  es arbitrariamente trasladada y dilatada.

Así a la función  $\psi$  llamaremos ondícula o wavelet.

**9.** La Ondícula  $\psi$  da origen a la familia  $\psi_{a,b}(x)$ ,

$$\psi_{a,b}(x) = a^{-1/2} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right); \quad a > 0, \quad -\infty < b < \infty;$$

los  $\psi'_{a,b}$ s son los llamados *bloques de ladrillos* que nos permiten descomponer y reconstruir elementos de espacios de funciones como  $L^2(\mathbb{R})$ .

El parámetro  $a$  mide el promedio de anchura de la Ondícula  $\psi_{a,b}$ , y el parámetro  $b$  da la posición.

**10.** Ives Meyer [18] ha logrado establecer hasta 16 caminos, que a través de los años, condujeron a la consolidación de la noción de Ondícula..

Existen diversas transformadas de Ondículas, como son:

- **Transformada Ondícula Discreta**

$$T_{m,n}^{ond}(f) = a_0^{-m/2} \int \bar{\psi}(a_0^{-m}t - nb_0) f(t) dt$$

• **Transformada de Ondícula Continua**

$$(T_f^{ond}) (a, b) = a^{-1/2} \int \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} f(t) dt$$

donde  $\psi$  es una Ondícula, de clase  $C^m$ , esto es,  $\psi$  es una función de variable real que satisface:

- (i)  $D^\alpha \psi(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ , para  $|\alpha| \leq m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  (Condición de regularidad)
- (ii)  $D^\alpha \psi(x)$ ,  $|\alpha| \leq m$ , es de decrecimiento rápido en el infinito, llamado condición de Localización, esto es

$$|(1 + |x|)^m D^\alpha \psi(x)| \leq C_m, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq m, \alpha \in \mathbb{N}$$

- (iii)  $\psi$  es oscilante u onda, esto es

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x) dx = 0, \quad 0 \leq k \leq m$$

Además, se exige que la familia dilatada-trasladada de  $\psi$  constituya una base de Riesz del espacio considerado. Entre las transformadas de ondículas discretas tenemos a los frames y a las bases ortonormales de ondículas.

**11.-** En 1983. J. Morlet propuso el modelo ondícula para el análisis de datos sísmicos. A partir de entonces se consolida la teoría matemática de ondículas.

El procesamiento de señales es un gran objetivo. La entrada de una señal puede llegar en muchas formas: tiempo continuo, tiempo discreto y tiempo finito. Ello puede ser procesado de muchas maneras.

Lo interesante es una señal  $\overline{X}(n)$  en el tiempo discreto que es procesada por el operador Lineal Invariante tiempo. Si la entrada es trasladada en el tiempo entonces la salida es también igualmente trasladada. Dichos

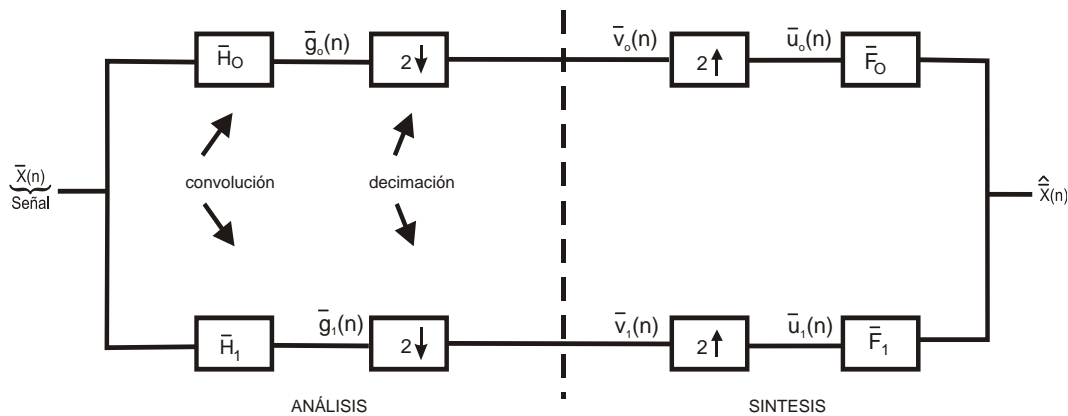
operadores son los **filtros**, los actores principales, en un procesamiento de señales.

Existen tres tipos de dominios:

- Dominio Tiempo.
- $z$ -dominio  $\bar{X}(\bar{X}(z))$ .
- Dominio frecuencia.

En cada dominio el Filtro es una multiplicación y además hay una conexión entre estas tres formas.

## 12. Reconstrucción Perfecta (RP)



Se tiene la RP de  $\hat{X}(n) = X(n)$

Ahora, ¿Cómo construir  $\bar{H}_0, \bar{H}_1, \bar{F}_0, \bar{F}_1$  tal que se tiene RP?

Un  $z$ -canal BF (banco de Filtro) da una RP si,

$$\bar{F}_0(z)\bar{H}_0(z) + \bar{F}_1(z)\bar{H}_1(z) = 2z^{-\ell}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

$$\bar{F}_0(z)\bar{H}_0(-z) + \bar{F}_1(z)\bar{H}_1(-z) = 0,$$



y expresada en su manera matricial se tiene:

$$[\bar{F}_0(z) \ \bar{F}_1(z)] \bar{H}_m(z) = [2z^{-\ell} \ 0]$$

donde  $\bar{H}_m(z)$  es definida por

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_0(z) & \bar{H}_0(-z) \\ \bar{H}_1(z) & \bar{H}_1(-z) \end{bmatrix}$$

el cual es llamada la Matriz Modulación del Análisis.

Así mismo, sabemos que *Aliasing* significa superposición de información, entonces para cancelar *Aliasing*, escogemos:

$$\bar{F}_0(z) = \bar{H}_1(-z) \ , \ \bar{F}_1(z) = -\bar{H}_0(-z)$$

Ahora, denotaremos

$$\bar{F}_0(z)\bar{H}_0(z) = \bar{P}_0(z) \ , \ \bar{F}_1(z)\bar{H}_1(z) = \bar{P}_1(z)$$

Por tanto,

$$\bar{P}_0(z) - \bar{P}_0(-z) = 2z^{-\ell}$$

En conclusión, el diseño de un  $z$ -canal de un banco de Filtro de RP es reducida a las etapas:

- Diseñar un filtro  $P_0$  pasa bajo satisfaciendo

$$\bar{P}_0(z) - \bar{P}_0(-z) = 2z^{-\ell}.$$

- Factorizar  $\bar{P}_0 = \bar{F}_0\bar{H}_0$ , entonces encontraremos  $\bar{F}_1$  y  $\bar{H}_1$ .

Notar que el diseño de  $\bar{P}_0$  no es única al igual que la factorización  $\bar{P}_0 = \bar{F}_0\bar{H}_0$ . Como  $\bar{P}_0(z) - \bar{P}_0(-z) = 2z^{-\ell}$ , se sigue que  $2z^{-\ell}$  es una función impar, lo cual hace que  $\ell$  sea impar.

Ahora normalizaremos  $\bar{P}_0(z)$  vía  $z^\ell$ , esto es:

$$\begin{aligned}\bar{P}(z) &= z^\ell \bar{P}_0(z) \\ \bar{P}(-z) &= (-z)^\ell \bar{P}_0(-z)\end{aligned}$$

entonces  $\bar{P}(-z) = -z^\ell \bar{P}_0(-z)$ . Luego, se tiene

$$\bar{P}(z) + \bar{P}(-z) = 2.$$

De este modo, asociada a la **Matriz Modulación Análisis**  $\bar{H}_m(z)$ , existe la **Matriz Modulación Síntesis**  $\bar{F}_m(z)$ , definida vía

$$\bar{F}_m(z) = \begin{bmatrix} \bar{F}_0(z) & \bar{F}_1(z) \\ \bar{F}_0(-z) & \bar{F}_1(-z) \end{bmatrix}$$

tal que

$$\bar{F}_m(z)\bar{H}_m(z) = \begin{bmatrix} 2z^{-\ell} & 0 \\ 0 & 2(-z)^{-\ell} \end{bmatrix}$$

Así mismo, si todos los filtros son simétricos o antisimétricos, esto es

$$\bar{H}(z) = \bar{H}\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{ó} \quad \bar{H}(z) = \bar{H}(-z)$$

respectivamente, entonces la condición de RP nos conduce a:

$$\bar{F}_m(z)\bar{H}_m(z) = I$$

**13.** El problema real es el diseño del filtro pasa bajo. La construcción de este filtro exige dos propiedades básicas: **simetría y ortogonalidad**. Sin

embargo, a excepción del filtro de Haar, no es posible encontrar un filtro con tales propiedades. Los filtros de Daubechies son ortogonales, pero no simétricos.

**14.** Los caminos para construir el AMR están dados por:

- Los espacios  $V_j$
- La función escala  $\phi$
- Los coeficientes  $\sqrt{2} \bar{h}(k)$  de la ecuación Dilatación

$$\phi(t) = \sum_k \sqrt{2} \bar{h}(k) \phi(2t - k)$$

Algunas veces para construir la Ondícula  $\psi$  no es suficiente con una función escala  $\phi$ . Es también posible tener en cuenta diferentes funciones escalas  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i$  cuando una  $\phi$  no puede generar  $V_0$ .

Por su parte, Ingrid Daubechies no parte del espacio genérico  $V_0$  ni de la función escala  $\phi$  sino de los coeficientes  $\sqrt{2} \bar{h}(k)$ . Actualmente ella está trabajando con ondículas llamadas de segunda generación, esto es, permite la implementación rápida de la transformada de ondículas (esquema *Lifting*).

El esquema *Lifting* es usada cuando la transformada de Fourier no es aprovechable, por ejemplo, ondículas sobre dominios acotados, ondículas sobre curvas y superficies, ondículas sobre muestras irregulares, etc.

**15.** La ortogonalidad viene de los  $W'_j$ s, los cuales son estudiados bajo tres puntos de vistas:

- Los espacios  $W'_j$ s

- La ondícula  $\psi$
- Los coeficientes  $\sqrt{2} \bar{d}(k)$  de la ecuación Ondícula

$$\psi(t) = \sum_k \sqrt{2} \bar{d}(k) \phi(2t - k)$$

**16.** La estrategia a emplear para encontrar la conexión y relación de las propiedades de  $\phi$  y  $\psi$ , está basada en el método recursivo:

- Calcular los coeficientes de la aproximación de la señal

$$f_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} \phi_{jk}(t),$$

obteniendo

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{jk} \psi_{jk}(t)$$

- Usar el método de la cascada para la construcción de  $\phi(t)$  resolviendo la ecuación de dilatación.
- Si  $\bar{C}(k)'s \perp \bar{d}(k)'s$ , entonces  $\psi_{jk} \perp \phi_{jk}$

En muchas aplicaciones los bancos de filtros ortonormales no funcionan dentro del esquema de Filtrado de RP, entonces se construyen bancos de filtros no ortonormales, denominados filtros biortogonales.

**17.** Los ondículas en estos últimos años han alcanzado un sorprendente y notable desarrollo, siendo uno de sus mejores exponentes Ronald Coifman que es uno de los más destacados matemáticos aplicados con sólida formación en matemática pura.

Su trabajo con Beylkin y Rokhlin [4] sobre problemas computacionales en análisis numérico permitió resolver problemas de alta concentración computacional y que no habían sido posible tratarse con los algoritmos existentes.

Dentro de las muchas aplicaciones de los ondículas, por ejemplo se tiene:

- Los eficientes algoritmos que sirven para representar funciones usándose bases de ondículas.
- Algoritmos de comprensión basados en la representación de ondículas los que concentran la mayor energía de las señal usándose pocos coeficientes.
- Nuevos métodos para codificación de canales, las que permiten a las representaciones via Ondículas brindar una información de un modo eficiente para transmitir dentro de canales con ruidos.
- Gráficos: La utilización de ondículas en gráficos incluye un uso importante: curvas y representación de superficies.
- Análisis numérico: Las ondículas son usadas en la solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales y Ecuaciones Integrales

# Bibliografía

- [1] BURT, P. and ADELSON, E., A. Multiresolution Spline With Application to image mosaics, ACM Trans. on Graphics 2, 217-236.(1983).
- [2] BENEDETTO, J., Irregular sampling and frames, Wavelets-A Tutorial in theory and Applications, C. Chui, Ed., Academic Press, New York , 1-63.(1991).
- [3] BENEDETTO, J., and HELLER, W., Irregular Sampling and the theory of frames, Part I, Note Matematica, X, Suppl. 1 , 103-125.(1990).
- [4] BEYLKIN, G., COIFMAN, R. & ROKHLIN, V. Fast Wavelet Transforms and numerical algorithms, Comm. Pure and Appl. Math. 44: 141-183. (1991).
- [5] CHUI, C. , An Introduction to Wavelets, Academic Press, Boston. (1992 a).
- [6] CHUI, C. , Wavelets: a Tutorial in Theory and Applications, Academic Press, Boston. (1992 b).

- [7] COHEN, A., DAUBECHIES, I. & VIAL, P. Wavelets on the interval and fast Wavelet Transform, *Journal of Applied Computational Harmonic Analysis* 1: 54-81.(1993).
- [8] DAUBECHIES, I., and LAGARIAS, J.C., Two-scale difference equations I. Existence and global regularity of solutions, *SIAM J. Math. Anal.*, in Press.
- [9] DAUBECHIES, I., and LAGARIAS, J.C., two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals, *SIAM J. Math. Anal.*, in Press.
- [10] DAUBECHIES, I., and LAGARIAS, J.C, Sets of matrices all infinite products of which converge, to appear.
- [11] DAUBECHIES, I. , Orthonormal bases of Compactly Supported Wavelets, *comm. Pure and Appl. Math.* 41, 909-996.(1988).
- [12] DAUBECHIES, I., Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSF regional conference series in Applied Mathematics, SIAM Publ., Philadelphia (1992).
- [13] GABOR, D., Theory of communications, *J. Inst. Elec. Eng. (London)*, 93 , 429-457.(1946).
- [14] HEIL, C. and WALNUT, D., Continuous and discrete Wavelet transforms, *SIAM Rev.*, 31 , 628-666.(1989).
- [15] HIGGINS, R., A. Sampling theorem for irregularly spaced sample points, *IEEE Trans. Inform. Theory*, IT-22 , 621-622.(1976).

- [16] MALLAT, S.G., A Theory for multiresolution signal decomposition: the Wavelet representation, *IEEE Trans. PAMI*, 11 , 674-693.(1989).
- [17] MALLAT, S.G., Multiresolution, approximations and Wavelet orthonormal bases for  $L^2(\mathbb{R})$ , *Trans. Amer. Math. Soc.* 315 , 69 - 88.(1989).
- [18] MEYER, Y., *Ondelettes et Opérateurs, I: Ondelettes*, Hermann, París, (1990).
- [19] NUÑEZ RAMIREZ, L., Tesis de licenciatura, *Frames: Su aplicación en la teoría de Muestreo*. UNMSM, Lima. (1998).
- [20] TCHAMITCHIAN, Ph., Biorthogonalité et théorie des opérateurs, *Rev. Math. Iberoamer.*, 3 , 163-189.(1987).
- [21] WALTER, G., A Sampling theorem for Wavelet Subspaces, *IEEE Inform. Theory*, 38 , 881-884.(1992).
- [22] YOUNG, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York (1980).