Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Computación Científica

Un problema de Dirichlet no local

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica

AUTOR
Juan Carlos SÁNCHEZ VERA

ASESOR
Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2017

Referencia bibliográfica

Sánchez, J. (2017). *Un problema de Dirichlet no local* [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Computación Científica]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS PARA OBTENER EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

En la Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:00 hrs. del viernes 15 de diciembre del 2017 se reunieron los miembros del Jurado Evaluador:

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre	Presidente
Lic. Willy David Barahona Martínez	Miembro
Dr. Eugenio Cabanillas Lapa	Miembro Asesor

para la sustentación de la Tesis intitulada «UN PROBLEMA DE DIRICHLET NO LOCAL», presentada por el bachiller JUAN CARLOS SÁNCHEZ VERA, para obtener el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del jurado, el expositor mereció la aprobación Con Sobresaliente, con un calificativo promedio de 17 Diecisiete (números y letras).

A continuación los miembros del jurado, dan manifiesto que el bachiller JUAN CARLOS SÁNCHEZ VERA, en virtud de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Siendo las 17:00 horas, se levantó la Sesión, firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
Presidente

Lic. Willy David Barahona Martínez
Miembro

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro Asesor

Un Problema de Dirichlet no Local

Juan Carlos Sánchez Vera

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Computación Científica.

Aprobado por:

....

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre

Presidente

....

Lic. Willy David Barahona Martínez

Miembro

....

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Miembro Asesor

LIMA - PERÚ

Diciembre - 2017

FICHA CATALOGRÁFICA

JUAN CARLOS SÁNCHEZ VERA

Un Problema de Dirichlet no local, (Lima) 2017.
xii, 35 pp, 29.7 cm, (UNMSM, Licenciado, Computación Científica, 2017).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1, Computación Científica I. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a mis padres: Jesús Hernando Sánchez Sánchez y Laura Eleuteria Vera Rojas, a mis hermanas Luz Mery y Milagros Soledad, y a todas las personas que siempre me apoyan para lograr mis objetivos.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos - UNMSM por darme la oportunidad de formarme profesionalmente.

A mis padres y familiares por el apoyo brindado durante mi formación profesional.

A Karina Escalante Zegarra por el apoyo brindado desde siempre.

Un agradecimiento especial al Dr. Eugenio Cabanillas Lapa por el asesoramiento en esta tesis.

RESUMEN

Un Problema de Dirichlet no Local

Juan Carlos Sánchez Vera

Diciembre - 2017

Orientador : Dr. Eugenio Cabanillas Lapa.

Título obtenido : Licenciado en Computación Científica.

En este trabajo se prueba que el problema de Dirichlet no local

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega |\bigtriangledown u|^2 dx\right) \triangle u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

posee una solución débil. La demostración se realiza mediante el uso de un corolario del Teorema de Weierstrass Generalizado. Así mismo, probamos un resultado de unicidad bajo una condición de pequeñez y presentamos la solución numérica del problema.

Palabras clave: Problema de Dirichlet no local, Teorema de Weierstrass, Solución débil.

ABSTRACT

A Nonlocal Dirichlet Problem

Juan Carlos Sánchez Vera

December - 2017

Advisor	: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa.
Obtained Professional Title	: Degree in Scientific Computing.

In this work, we prove that the nonlocal Dirichlet problem

$$\begin{cases} -a\left(\displaystyle\int_{\Omega} |\bigtriangledown u|^2 dx\right) \triangle u = f & \text{in } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{in } \Gamma \end{cases}$$

has a weak solution. We get the proof by means of a corollary to the generalized Weierstrass Theorem. Furthermore, we prove a uniqueness result under some smallness condition and present the numerical solution for this problem.

Keywords: Nonlocal Dirichlet problem, Weierstrass Theorem, weak solution.

Índice general

Capítulo I

Introducción

En este trabajo, estudiaremos la existencia de solución débil de un problema elíptico no local mediante una técnica específica del análisis funcional no lineal: El teorema de Weierstrass generalizado. Así el problema de hallar soluciones débiles $u(x)$ se reduce a encontrar mínimos del funcional de energía asociado. A fin de entender mejor el concepto de "no local", veremos algunos problemas elípticos relacionados con situaciones físicas. Un problema elíptico local típico, llamado Problema de Dirichlet es dado por

$$\begin{cases} - \triangle u(x) = f(x, u(x), \triangledown u(x)) & \text{en } \Omega \\ u(x) = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{I.3}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio limitado y regular, $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es la función incógnita cuya regularidad depende de f y $\triangledown u(x)$ es la gradiente de u en x. Este problema es de suma importancia en Matemática por dos aspectos fundamentales:

1.- Trata de fenómenos físicos relevantes del mundo físico, tales como: Mecánica de los medios continuos, Teoría del Potencial, Mecánica de Fluidos, Crecimiento Poblacional, Potencial Eléctrico en Cuerpos Metálicos, etc. En Geometría Diferencial, en el estudio de Superficies Mínimas, Superficies de Curvatura Constante, Teoría de Funciones Automorfas, también encontramos ecuaciones del tipo (I.3).

2.- La búsqueda de sus soluciones ha incentivado notablemente la investigación en Matemáticas como, por ejemplo, el Cálculo de Variaciones, las Series de Fourier, la Teoría del Grado de Leray Schauder, las técnicas de Sub y Super-solución, los Espacios Generalizados de Lebesgue, designados por $L^{p(x)}(\Omega)$, los Espacios Generalizados de Lebesgue-Sovolev, designados por $W^{m,p(x)}(\Omega)$.

Con relación a (I.3) y alguna de sus variaciones, consultar De Figueiredo[15], Gilbarg-Trudinger[16].

El problema (I.3) es llamado local porque en todos los términos involucrados los valores son calculados puntualmente, es decir en cada $x \in \Omega$. Sin embargo, esto no siempre sucede. En diversos problemas ocurre que los términos dependen del valor medio de la función sobre todo el dominio de acción; en este caso generalmente aparecen términos integrales, que corresponden a las llamadas: términos no locales.

Ilustraremos, a continuación, algunas situaciones en las cuales las ecuaciones son descritas con términos no locales.

Ejemplo I.1. *Consideremos el problema*

$$(P1)\begin{cases} -M(\| u \|^2) \triangle u(x) = f(x, u(x)) & en\ \Omega \\ u(x) = 0 \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio limitado y regular, $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función continua, $\| u \|^2 = \int_\Omega | \bigtriangledown u |^2$ es la norma usual en $H_0^1(\Omega)$ y $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada.

Observamos que en $(P1)$ el término $M(\| u \|^2)$ es no local, es decir, no es calculado puntualmente en cada $x \in \Omega$, dado el hecho de que $\| u \|^2$ es calculado globalmente, considerando todo el dominio Ω.

Soluciones del problema $(P1)$ representan soluciones estacionarias de la Ecuación de Kirchhoff

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M(\| u \|^2) \triangle u(x) = f(x, u(x)) \tag{I.4}$$

que es una generalización de la establecida por Kirchhoff[19], en 1883,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{P_0}{h} + \frac{E}{2L} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{I.5}$$

Esta ecuación es una extensión de la Ecuación Clásica de la Cuerda Vibrante, propuesta por D'Alembert, considerando los efectos de los cambios en longitud de la cuerda durante la vibración.

Los parámetros en la ecuación (I.5) poseen los siguientes significados: L es la longitud de la cuerda, h es el área de la sección transversal de la cuerda, E es el módulo de Young del material del cual la cuerda esta hecha, ρ es la densidad de la masa y P_0 es la tensión inicial. Hay que destacar que la ecuación (I.4) comenzó a recibir mayor atención después de la publicación del trabajo de Lions[18] donde estaba propuesto un enfoque de Análisis Funcional para tal problema. El lector podrá consultar los trabajos de Arosio-Panizzi[2], Cousin-Frota-Larkin[12] y Ono[21], en los cuales encontrará resultados interesantes y otras referencias relacionadas con el problema (I.4).

Veamos, a modo de motivación otros problemas no locales relevantes, tanto por su interés matemático como por sus aplicaciones prácticas.

Ejemplo I.2. *Consideremos un modelo que ha sido estudiado por varios autores, entre los cuales mencionamos a Chipot-Lovat[5], Chipot-Rodrigues[6], Corrêa-Ferreira-Menezes[8] y Corrêa[7].*

Sea Ω un dominio limitado y regular de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$(a los largo de este trabajo, a menos que se diga lo contrario, Ω será de este tipo) y $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función dada.

El problema

$$\begin{cases} -a\left(\int_\Omega u\right) \triangle u(x) = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{I.6}$$

aparece en varias situaciones. Por ejemplo, u puede describir la densidad de una población(de bacterias por ejemplo) sujeta a propagación, el coeficiente de difusión a se supone que depende de la población total en el dominio Ω en vez de depender de la densidad local, es decir,el movimiento de las bacterias es determinado considerando el estado global del medio.

Aquí, el término no local es $a\left(\int_\Omega u\right)$.

Una generalización del problema (I.6) es

$$\begin{cases} -a\left(\|u\|_q^q\right) \triangle u(x) = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{I.7}$$

donde $\|u\|_q^q$ es la norma usual en $L^q(\Omega)$. Ver Correa[8].

En (I.7), el término no local es

$$a\left(\|u\|_q^q\right) = a\left(\int_\Omega |u|^q\right)$$

Ejemplo I.3. *El problema, de naturaleza no local*

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = \dfrac{\delta e^u}{\displaystyle\int_\Omega e^u} & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{I.8}$$

donde δ es una parámetro positivo y el término no local es $\int_\Omega e^u$, surge en la investigación análitica de fenómenos en que ocurren rupturas de placas metálicas deformadas por acción de alta tensión, en la investigación de flujos altamente turbulentos y en problemas de equilibrio en la teoría gravitacional de estrellas politrópicas.

Ejemplo I.4. *Una generalizacón del problema (I.8) es dado por*

$$\begin{cases} -\triangle u(x) = \dfrac{(g(x,u))^{\alpha}}{\left(\displaystyle\int_{\Omega} f(x,u)\right)^{\beta}} & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{I.9}$$

con el término no local $\left(\displaystyle\int_{\Omega} f(x,u)\right)^{\beta}$*, que surge en problemas relacionados con sistemas de partículas, pérdidas térmicas en problemas de generación ohmica de calor, etc. Con relación al problema (I.9), puede consultar Stanczy[22], Carrillo[4], Tzanetis-Vlamos[23], Corrêa de Morais Filho[9] y sus referencias.*

Ejemplo I.5. *En Deng-Li-Xie[13], los autores consideran el siguiente problema parabólico no local dado por*

$$\begin{cases} u_t = f(u)\left(\triangle u + a\left(\displaystyle\int_{\Omega} u\right)\right) & en\ \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 & en\ \partial\Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) & en\ \Omega \end{cases} \tag{I.10}$$

donde $a > 0$ y f es una función positiva y regular. El problema estacionario asociado es

$$\begin{cases} -\triangle u = a\left(\displaystyle\int_{\Omega} u\right) & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{I.11}$$

cuya generalización

$$\begin{cases} -\triangle u = a(x,u)|u|_q^p & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{I.12}$$

fue estudiada por Corrêa-Menezes[10].

El sistema

$$\begin{cases} -\triangle u^m = a|v|_p^{\alpha} & \text{en } \Omega \\ -\triangle v^m = b|u|_q^{\beta} & \text{en } \Omega \\ u = v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{I.13}$$

fue estudiada por Correa-Marques[11].

Problemas como (I.12)-(I.13) surgen en diversos fenómenos físicos y en la ingeniería. Ellos estan relacionados con algunos modelos de ignición para gases compresibles reactivos; ellos describen fenómenos físicos en los cuales la reacción es establecida por la temperatura en una única región del cuerpo y surgen en el estudio de flujo de fluidos a través de medios porosos isotrópos, rígidos y homogéneos; también surgen en el estudio de la dinámica de poblaciones.

Los ejemplos mencionados y otros que puedan encontrarse en la literatura científica, nos muestran la relevancia de los problemas elípticos no locales, como modelos matemáticos que permiten estudiar diversas situaciones del mundo real, así como el gran impulso que dan a las Ciencias Físicas- Matemáticas en la búsqueda e implementación de nuevas metodologías para su resolución.

Capítulo II

Nociones y Resultados Preliminares

II.1. Notaciones

1. $\mathbb{K}$ indica el cuerpo $\mathbb{R}$.

2. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N$ para $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, $N \in \mathbb{N}$.

3. $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$

4. Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es diferenciable, entonces la gradiente de f, que será denotado por ∇f, es definido como el vector de $\mathbb{R}^N$ dado por $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)$.

5. Si $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_N(x))$ es un campo vectorial de clase C^1, definimos la divergencia de $F(x)$, denotado por $divF$, como $divF = \nabla.F = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}$, donde ∇ es el operador definido como $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right)$.

6. El Laplaciano de una función f es definido como $div(\nabla f) = \nabla.\nabla f = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ y es denotado por $\triangle f$.

7. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto limitado con $\partial\Omega$ de clase C^1, donde $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$.

   - $|\Omega|$ representa la medida del conjunto Ω.
   - $\overline{\Omega}$ representa la cerradura del conjunto Ω.

- $B_r(x)$ es la bola abierta de centro x y radio $r > 0$. Cuando se omite el centro de la bola entenderemos que la bola está centrada en el origen.

II.2. Identidades Útiles

Si f y g son funciones escalares de clase $C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto, c una constante real y F y G son campos vectoriales también de clase $C^1(\Omega)$, entonces las siguientes relaciones pueden ser fácilmente probadas:

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. $div(F+G) = divF + divG$
5. $div(fF) = fdivF + F.\nabla f$

II.3. Algunos Resultados de Álgebra Lineal

Definición II.1. *Sean $v_1, v_2, \cdots v_n$ vectores en un espacio V provisto de producto interno. Si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ siempre que $i \neq j$, entonces $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es llamado un conjunto ortogonal de vectores.*

Teorema II.1. *Si $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos en un espacio V provisto de un producto interno, entonces $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son linealmente independientes.*

Definición II.2. *Un conjunto ortonormal de vectores es un conjunto ortogonal de vectores unitarios. El conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es ortonormal si, y solamente si,*

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

Dado un conjunto ortogonal de vectores no nulos $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es posible formar un conjunto ortonormal definido

$$u_i = \left(\frac{1}{\|v_i\|}\right) v_i$$

Para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Teorema II.2. *Sea* $\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$ *una base ortonormal para un espacio* V *provisto de un producto interno. Si* $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$*, entonces* $a_i = \langle v_i, v\rangle$.

Corolario II.2.1. *Sea* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *una base ortonormal para un espacio* V *provisto de un producto interno. Si* $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ *y* $v = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$*, entonces*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Corolario II.2.2. ***(Identidad de Parseval)*** *Sea* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *una base ortonormal para un espacio* V *provisto de un producto interno y si* $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$*, entonces*

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

II.4. Convergencia Débil

Un espacio métrico se dice que es completo cuando toda sucesión de Cauchy en este espacio es convergente.

Un espacio vectorial normado que es completo, para la métrica inducida por la norma, se llama espacio de Banach.

Un espacio vectorial con producto interno V se denomina un espacio de Hilbert V. Si V es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interno.

Un espacio métrico E se dice que es separable si existe un subconjunto $D \subset E$, tal que D es numerable y denso en E.

Sea E un espacio de Banach y sea $f \in E'$ designamos por $T_f : E \to \mathbb{R}$ a la aplicación dada por $T_f = \langle f, x\rangle$, donde la notación $\langle f, x\rangle$ indica la funcional f calculado en x. Aquí E' es el dual de E dado por $E' = \{f : E \to \mathbb{K}; f \text{ es lineal y continua}\}$, provisto de la norma $\|f\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$ y E'' bidual provisto de la norma $\|\xi\| = \sup\limits_{f\in E';\|f\|\leq 1} | < \xi, f > |$.

Si E es un espacio normado, se dice que $x_n \to x$ fuerte en E si $\|x_n - x\|_E \to 0$.

Dada una sucesión (x_n) en E, E es un espacio normado, diremos que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge débilmente a x (en E), denotado por $x_n \rightharpoonup x$, si $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.

II.4.1. Propiedades de la Convergencia Débil

Proposición II.1. *Sean (x_n) e (y_n) sucesiones en un espacio normado E:*

- *Si $x_n \rightharpoonup x$ y $x_n \rightharpoonup y$, entonces $x = y$.*
- *Si $x_n \to x$, entonces $x_n \rightharpoonup x$.*
- *Si $x_n \rightharpoonup x$ y $y_n \rightharpoonup y$, entonces $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$.*
- *Si α es un escalar y $x_n \rightharpoonup x$, entonces $\alpha x_n \rightharpoonup \alpha x$.*
- *Si $x_n \rightharpoonup x$, entonces existe alguna constante positiva M tal que $\|x_n\| \leq M$ para toda n.*
- *Para que $x_n \rightharpoonup x$ es necesario y suficiente que la sucesión $\|x_n\|$ sea acotada y $f(x_n) \to f(x)$, para toda f en E'*

Teorema II.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia limitada en H. Entonces existe una subsecuencia $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ débilmente convergente en H.*

Prueba: *Ver [10], página 85.*

Definición II.3. *$C^k(\Omega)$ es el espacio de las funciones k veces diferenciables en Ω con la k-ésima derivada continua.*

Definición II.4. *$C^\infty(\Omega)$ es el conjunto de las funciones infinitamente diferenciables en Ω.*

Definición II.5. *$C^k(\overline{\Omega})$ es el conjunto de las funciones $f \in C^k(\Omega)$ tales que todas las derivadas de orden menor o igual a k se extienden continuamente a $\overline{\Omega}$.*

II.4.2. Distribuciones

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. El soporte de f, denotado por $suppf$, es la clausura en Ω del conjunto

$$\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$$

es decir $suppf = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$.

Representaremos por $C_0^\infty(\Omega)$, el conjunto de las funciones $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, cuyas derivadas parciales de todas las ordenes son continuas y cuyo soporte es un conjunto compacto de Ω. Los elementos de $C_0^\infty(\Omega)$ son llamados funciones de prueba. Esto es

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \to \mathbb{R}/\varphi \text{ es infinitamente diferenciable y } Supp\varphi \text{ es compacto} \subseteq \Omega\}$$

Naturalmente, $C_0^\infty(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma de funciones y de multiplicación por escalar.

II.4.3. Noción de Convergencia en $C_0^\infty(\Omega)$

Definición II.6. *Sean (φ_η) una secuencia en $C_0^\infty(\Omega)$ y $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Decimos que $\varphi_\eta \longrightarrow \varphi$ si:*

i) *$\exists K \subset \Omega$, K compacto, tal que $Supp\varphi_\eta \subset K$, para todo $\eta \in \mathbb{N}$.*

ii) *Para cada $\alpha \in \mathbb{N}^\eta$, $D^\alpha\varphi_\eta \longrightarrow D^\alpha\varphi$ uniformemente en Ω.*

Definición II.7. *El espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$ con la noción de convergencia definida arriba es denotado por $D(\Omega)$ y es llamado el espacio de las funciones de prueba.*

Definición II.8. *Una distribución sobre Ω es un funcional lineal definido en $D(\Omega)$ y continuo en relación a la noción de convergencia definida en $D(\Omega)$. El conjunto de todas las distribuciones sobre Ω es denotado por $D'(\Omega)$.*

De este modo,

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}; T \text{ es lineal y continuo}\}$$

Observamos que $D'(\Omega)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Si $T \in D'(\Omega)$ y $\varphi \in D(\Omega)$ denotaremos por $\langle T, \varphi \rangle$ al valor de T aplicado al elemento φ.

II.4.4. Noción de Convegencia en $D'(\Omega)$

Definición II.9. *Decimos que $T_\gamma \longrightarrow T$ en $D'(\Omega)$ si $< T_\gamma, \varphi > \longrightarrow < T, \varphi >$, para toda $\varphi \in D(\Omega)$.*

II.5. Espacios $L^p(\Omega)$

En este trabajo, las integrales realizadas sobre Ω son consideradas en el sentido de Lebesgue, así como la medibilidad de las funciones involucradas.

Definición II.10. *Sean Ω un conjunto medible y $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p(\Omega)$ o conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $\|f\|_p < \infty$ donde:*

$$\|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}, \ si\ 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|f\|_\infty = sup\ ess_{t\in\Omega}|f(t)| = inf\{C \in \mathbb{R}^+ | med\{t \in \Omega / |f(t)| > C\} = 0\}$$

$$= inf\{C; |f| \leq C\ q.s.\}$$

Observación II.1. *Las funciones $\|.\|_p : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}^+, 1 \leq p \leq \infty$, son normas.*

En verdad $L^p(\Omega)$ debe ser entendido como un conjunto de clase de funciones donde dos funciones reales están en la misma clase si ellas son iguales casi siempre en Ω.

Los espacios $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, son espacios de Banach, siendo $L^2(\Omega)$ un espacio de Hilbert con el producto interno usual de la integral.

Teorema II.4. *$C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$.*

II.6. Desigualdades Importantes

II.6.1. Desigualdad de Hölder

Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = 1$ si $q = \infty$ y $q = \infty$ si $p = 1$). Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

II.6.2. Desigualdad de Young

Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ y $1 < p, q < \infty$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ entonces $ab \leq \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$.

II.6.3. Desigualdad de Cauchy-Schwarz para funciones en $L^2(\Omega)$

Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ dos funciones de integral cuadrada, entonces

$$|\langle f, g\rangle_{L^2}| = \left| \int_\Omega f(x)g(x)dx \right| \leq \left[\int_\Omega |f(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_\Omega |g(x)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

II.7. Espacios $L^p_{loc}(\Omega)$

Definición II.11. *Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $1 \leq p \leq \infty$. Indicamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ o conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que, $f\chi_K \in L^p(\Omega)$, para todo K compacto de Ω, donde χ_K es una función característica del compacto K.*

Observación II.2. $L^1_{loc}(\Omega)$ *es llamado el espacio de las funciones localemente integrables.*

Para $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ el funcional $T = T_u : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,$$

define una distribución sobre Ω.

Lema II.1. ***(Du Bois-Raymond)*** *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces $T_u = 0$ si, y solamente si, u=0 casi siempre en Ω.*

Observemos que la aplicación

$$L^1_{loc}(\Omega) \longrightarrow D'(\Omega)$$
$$u \longmapsto T_u$$

es lineal, continua e inyectiva. En consecuencia, podemos identificar a la distribución T_u con la función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. En este sentido se tiene que $L^1_{loc} \subset D'(\Omega)$. Como $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ tenemos que toda función de $L^p(\Omega)$ define una distribución sobre Ω, es ecir, toda función $L^p(\Omega)$ puede ser vista como una distribución.

Definición II.12. *Sean $T \in D'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^N$. La derivada de orden α de T, denotada por $D^\alpha T$, es una distribución definida por*

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi >, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Con esta definición se tiene que si $u \in C^k(\Omega)$ entonces $D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$, donde $D^\alpha u$ indica la derivada clásica de u. Por lo tanto, si $T \in D'(\Omega)$ entonces $D^\alpha T \in D'(\Omega)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

II.8. Espacios de Sobolev

Los principales resultados de esta sección pueden ser vistos en las referencias Adams[1], Brézis[3] y Medeiros[24].

Definición II.13. *Sean $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Indicaremos por $W^{m,p}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones u de $L^p(\Omega)$ tales que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertenece a $L^p(\Omega)$, siendo $D^\alpha u$ la derivada distribucional de u. $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado Espacio de Sobolev de orden m relativo al espacio $L^p(\Omega)$.*

Resumiendo,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}.$$

II.8.1. Norma en $W^{m,p}(\Omega)$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se tiene que

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |(D^\alpha u)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$$

o

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}\ ,\ p = \infty$$

define una norma sobre $W^{m,p}(\Omega)$.

Observación II.3. *Se considera los espacios de Banach V y H, siendo V con la norma $\|.\|_V$ y H con la norma $|.|_H$. Supongamos que $V \subset H$ (como subespacio vectorial),el operador*

$$i : V \longrightarrow H$$

que a cada $v \in V$ hace corresponder $i(v) = v$ en H es llamado el operador de inmersión de V en H.

Definición II.14. *Se dice que la inmersión $V \hookrightarrow H$ es continua, si el operador de inmersión $i : V \longrightarrow H$ es continuo, es decir cuando existe una constante $C > 0$, tal que*

$$|v|_H \leq C\|v\|_V$$

para todo $v \in V$. Un ejemplo simple es el caso $V = H_0^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$ o $V = H^1(\Omega)$ y $H = L^2(\Omega)$.

Definición II.15. *Se dice que la inmersión $V \hookrightarrow H$ es compacta, denotando $V^c \hookrightarrow H$ si el operador de inmersión $i : V \longrightarrow H$ es compacto, esto es cuando i es continuo y cada sucesión acotada en V posee una subsucesion convergente en H.*

Teorema II.5. *(**Teorema de Kakutani**) Sea E un espacio de Banach. E es reflexivo si, y solamente si,*

$$B_E = \{f \in E : \|x\| \leq 1\}$$

es débilmente compacto.

II.8.2. Inmersiones de Sobolev

Teorema II.6. *(**Teorema de Sobolev**) Sean $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces*

i) *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$,*

ii) *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $q \in [p, \infty)$,*

iii) *Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,*

siendo las inmersiones anteriores continuas.

Observación II.4.

1. *$(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_p)$ es un espacio de Banach.*

2. *Cuando $p = 2$ el espacio de Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$ se convierte en un espacio de Hilbert con producto interno dado por*

$$\langle u, v\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)};\ u, v \in W^{m,2}(\Omega).$$

3. *Se denota $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.*

II.9. El Espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$

Definición II.16. *Definimos al espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ como la clausura de $C_0^{\infty}(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, esto es*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}$$

Observación II.5.

1. *Cuando $p = 2$, se escribe $H_0^m(\Omega)$ en lugar de $W_0^{m,p}(\Omega)$.*

2. *Si $W_0^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$ entonces la medida de $\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}$ es nula.*

3. *$W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.*

II.9.1. Desigualdad de Poincaré

Sea Ω un abierto limitado en $\mathbb{R}^N$. Entonces existe una constante C (dependiendo de Ω) tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left\|\bigtriangledown u\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{II.1}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. La constante $C = C(\Omega)$ citado en el teorema anterior es llamada constante de Poincaré para Ω. La desigualdad (II.9.1) también es válida si Ω está limitado en una sola dirección.

Observación II.6.

1. *La desigualdad de Poincaré también es válida si $u \in H^1(\Omega)$ y el trazo de u sobre $\Gamma = \partial\Omega$ se anula en un subconjunto no vacío de Γ.*

II.9.2. Consecuencias de la desigualdad de Poincaré

1. La norma de Sobolev en $H_0^1(\Omega)$ es equivalente a la norma de la gradiente en $L^2(\Omega)$. De hecho, la desiguladad de Poicaré dice que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

para todo $u \in H_0^1(\Omega)$. Además , naturalemente se tiene que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

para toda $u \in H^1(\Omega)$.

2. La norma de Sobolev es equivalente a la norma del Laplaciano en $L^2(\Omega)$ para funciones en $H_0^2(\Omega)$ debido a que existe $C > 0$ tal que $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^2(\Omega)$. La desigualdad $\|\triangle u\| \leq C_1\|u\|_{H^2}$, $\forall u \in H_0^2(\Omega)$ es obvia. Esto se deduce del hecho de que si $u \in H_0^2(\Omega)$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H_0^1(\Omega)$ y también de la desigualdad de Ponicaré.

II.10. Teorema de Divergencia y Fórmulas de Green

Valen las siguinetes fórmulas:

i) $\displaystyle\int_\Omega div\mathbf{F}dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x).\eta(x)d\Gamma$, $\mathbf{F} \in [H^1(\Omega)]^N$.

ii) $\displaystyle\int_\Omega v\triangle u dx = -\int_\Omega \nabla v\nabla u dx$, $v \in H_0^1(\Omega)$, $u \in H^2(\Omega)$.

iii) $\displaystyle\int_\Omega v\triangle u dx = \int_\Omega (\triangle v)u dx$, $u, v \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Definición II.17. *Definimos a la norma y producto interno en $H_0^1(\Omega)$ respectivamente por*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u\nabla v dx$$

La norma así definida es equivalente a la norma $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ en $H_0^1(\Omega)$.

Resultados

Teorema II.7. ***(Desigualdad de Sobolev)*** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, donde $\partial\Omega$ es C^1. Suponga que $1 \leq p < N$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces $u \in L^{p^*}(\Omega)$ y vale la estimación*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

donde $p^* = \frac{Np}{N-p}$ *y la constante* C *depende solamente de* p, N *y* Ω.

Prueba: *Ver [7], página 265.*

Teorema II.8. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto. Suponga que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *para algún* $1 \leq p < N$. *Entonces tenemos la siguiente estimación*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

para cada $q \in [1, p^*]$, *donde* $p^* = \frac{Np}{N-p}$ *y la constante* C *depende solamente de* p, q, N *y* Ω.

Prueba: *[7], página 265.*

Teorema II.9. ***(Teorema de Rellich-Kondrachov)*** *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto y limitado tal que* $\partial\Omega$ *es de clase* C^1. *Entonces, dada una secuencia limitada* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in W^{1,p}(\Omega)$, *existe una subsecuencia* $(u_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}}$ *convergente en cualquier* $L^q(\Omega)$, *donde* $q < p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Prueba: *Ver [8], página 167.*

Teorema II.10. ***(Convergencia Dominada de Lebesgue)*** *Sea* f_n *una secuencia de funciones integrables tales que* $f_n \to f$ *q.t.p.. Suponga que existe una* g *integrable tal que* $|f_n(x)| < g(x)$ *q.t.p.. Entonces* f *es integrable y* f_n *converge en promedio a f,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

y en particular

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) dx = \int_X f(x) dx$$

Definición II.18. *Sea* X *un espacio métrico* *i) Decimos que el funcional $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es semicontinuo inferiormente si:*

$$\forall (u_\nu) \subseteq X : u_\nu \to u \Rightarrow J(u) \leq \lim_{\nu \to +\infty} inf J(u_\nu)$$

ii) Decimos que el funcional $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es débilmente semicontinuo inferiormente si:

$$\forall (u_\nu) \subseteq X : u_\nu \rightharpoonup u \Rightarrow J(u) \leq \lim_{\nu \to +\infty} inf J(u_\nu)$$

Teorema II.11. ***(Teorema de Weierstrass Generalizado)***
Sea X un espacio topológico compacto, $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces J es acotado inferiormente y $\exists u_0 \in X$ tal que:

$$J(u_0) = \inf_{u \in X} J(u)$$

Corolario II.11.1. *Sea X un espacio de Hilbert, $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional que es*

i) débilmente semicontinua inferiormente,

ii) coercivo, esto es $\lim_{|u| \to +\infty} J(u) = +\infty$

Entonces J es acotado inferiormente y existe $u_0 \in X$ tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in X} J(u)$$

II.11. Funciones Diferenciables

Definición II.19. *Sea $\varphi : U \to \mathbb{R}$, donde U es abierto en un espacio de Banach X. El funcional φ tiene derivada de Gateaux $f \in X'$ en u si para cada $h \in X$*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\varphi(u + th) - \varphi(u) - \langle f, th \rangle \right] = 0$$

Notación: $f := \varphi'(u)$ si existe f.

Definición II.20. *El funcional $\varphi : U \to \mathbb{R}$, U es abierto,tiene derivada de Fréchet $f \in X'$ en u si:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \left(\varphi(u + h) - \varphi(u) - \langle f, h \rangle \right) = 0$$

.

Diremos que $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ si existe la derivada de Fréchet y es continua.

Definición II.21. *Sea $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$. El funcional φ tiene derivada de Gateaux $B \in L(X, X')$ en u si para cada $h, v \in X$ se tiene que:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\langle \varphi'(u + th) - \varphi'(u) - B(th), v \rangle \right) = 0$$

Notación: $B := \varphi''(u)$ si existe B.

Definición II.22. *El funcional φ tiene segunda derivada de Fréchet $L \in B(X, X')$ en u si:*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} \left[\varphi'(u + h) - \varphi'(u) - Lh \right] = 0$$

.

Diremos que $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R})$ si la segunda derivada de Fréchet de φ existe y es continua en U.

Ejemplo II.1. *Sea $a(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica acotada en un espacio de Hilbert X y J una funcional en X, muchas veces llamado "energía funcional", definido por*

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u), \ \ donde \ F \in X^*$$

Hallemos la derivada de Fréchet de J.

Para un arbitrario $\phi \in X$,

$$J(u + \phi) = \frac{1}{2} a(u + \phi, u + \phi) - F(u + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} a(u, u) + \frac{1}{2} a(\phi, u) + \frac{1}{2} a(u, \phi) + \frac{1}{2} a(\phi, \phi) - F(u) - F(\phi)$$

por la forma bilineal de $a(\cdot, \cdot)$. Usando la simétria de $a(\cdot, \cdot)$, $[a(u, \phi) = a(\phi, u)]$, obtenemos

$$J(u + \phi) = \left\{ \frac{1}{2} a(u, u) - F(u) \right\} + \{ a(u, \phi) - F(\phi) \} + \frac{1}{2} a(\phi, \phi)$$

$$= J(u) + \{a(u,\phi) - F(\phi)\} + \frac{1}{2}a(\phi,\phi)$$

o

$$\frac{|[J(u+\phi) - J(u) - \{a(u,\phi) - F(\phi)\}]|}{\|\phi\|_X} = \frac{1}{2}\frac{|a(\phi,\phi)|}{\|\phi\|_X}$$

$$\leq \frac{M\|\phi\|_X\|\phi\|_X}{\|\phi\|_X} \text{ como } a(\cdot,\cdot) \text{ esta acotado}$$

Esto implica que

$$\lim_{\|\phi\|_X \to 0} \frac{|J(u+\phi) - J(u) - \{a(u,\phi) - F(\phi)\}|}{\|\phi\|_X} = 0$$

o

$$\langle J'(u), \phi\rangle = a(u,\phi) - F(\phi)$$

En particular para la forma bilineal

$$a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}, a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx$$

y $F = 0$, donde $X = H_0^1(\Omega)$, se tiene $J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ con derivada de Fréchet $\langle J'(u), v\rangle = a(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx$.

Capítulo III

Existencia de Soluciones Débiles

En este capítulo estudiaremos la existencia de soluciones débiles para el problema de Dirichlet no local

$$\begin{cases} -a\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \triangle u = f \text{ en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \qquad\qquad u = 0 \text{ en } \Gamma \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{III.1}$$

donde Ω un subconjunto abierto, acotado, bien regular de $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$0 < m \leq a(s) \leq M, \;\forall s$$

y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dada, en $L^2(\Omega)$.

Primero definamos el concepto de solución débil de la ecuación (III.1).

Para motivar este concepto, procederemos formalmente multiplicando la ecuación en (III.1) por una función v suficientemente regular e integrando en Ω se tiene

$$a\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \int_\Omega (-\triangle u)\, v dx = \int_\Omega f v dx$$

Ahora aplicando el teorema de Green, y considerando las funciones v tal que $v|_\Gamma = 0$ resulta

$$a\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f v dx = 0 \qquad \text{(III.2)}$$

La ecuación integral nos permite realizar la siguiente

Definición III.1. *Decimos que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es una solución débil del problema (III.1) si:*

i) $u \in H_0^1(\Omega)$,

ii) u satisface la relación (III.1), $\forall u \in H_0^1(\Omega)$.

Consideremos ahora el funcional de energía $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}\widehat{a}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) - F(u) \ , \forall u \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{(III.3)}$$

donde $\widehat{a}(s) = \displaystyle\int_0^s a(\lambda)d\lambda$, $F(u) = \displaystyle\int_\Omega f(x)u dx$.

Proposición III.1. *El funcional $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, dado en (III.3) está bien definido, está en la clase $C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ y*

$$\langle J'(u), v\rangle = a\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f v dx \ , \forall u, v \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{(III.4)}$$

Demostración:

Es inmediato ver que $\widehat{a}$ y F están bien definidas. Además F es lineal, continuo y diferenciable según Fréchet, con

$$\langle F'(u), v\rangle = \int_\Omega f v dx \ , \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Probaremos que $\varphi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\widehat{a}\left(b(u)\right)$$

donde $b(u) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ es de clase $C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$

En efecto b y $\widehat{a}$ son diferenciables, con

$$\langle b'(u), v\rangle = 2\,(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = 2\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx \ , \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

y

$$\widehat{a}'(s) = a(s)$$

Como φ es la composición de las funciones diferenciables $\widehat{a}$ y b, resulta que φ es diferenciable y

$$\langle \varphi'(u), v\rangle = a\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx \ , \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Luego J está bien definido, es de clase $C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ con derivada dada por (III.4).

■

Observación III.1.

i) De la definición de solución débil se tiene

$$J'(u) = 0 \Longleftrightarrow u \textit{ es solución débil de (III.1)}$$

Así todo punto crítico de J es solución débil de (III.1).

ii) Es claro que un mínimo (o un máximo) de J es un punto crítico.

El siguiente teorema es el resultado principal de este trabajo.

Teorema III.1. *Existe una solución débil del problema (III.1).*

Demostración: Para realizar la demostración asociaremos a (III.1) el funcional de energía $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ y probaremos que tiene un mínimo (global); de la observación anterior este mínimo es una solución débil.

Primero, probaremos que J es coercivo.

En efecto,

$$\widehat{a}(s)=\int_0^s a(\lambda)d\lambda \geq \int_0^s m d\lambda = ms \ , \forall s \in \mathbb{R}.$$

y

$$\widehat{a}\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) \geq m_0 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \equiv m_0\|u\|^2 \ , \forall u \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{(III.5)}$$

También de las desigualdades de Hölder y Poincaré se tiene

$$\int_\Omega fudx \leq \left|\int_\Omega fudx\right| \leq \int_\Omega |fudx| \leq |f|_2|u|_2 \leq C_*|f|_2\|u\| \ , \forall u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{(III.6)}$$

De (III.5) y (III.6) se obtiene

$$J(u)=\frac{1}{2}\widehat{a}\left(\|u\|^2\right)-\int_\Omega fudx \geq \frac{1}{2}m\|u\|^2-C_*|f|_2\|u\| = \|u\|\left[\frac{1}{2}m\|u\|-C_*|f|_2\right] \to +\infty$$

si $\|u\| \to +\infty$.

Lo que muestra que J es coercivo.

Ahora demostraremos que J es débilmente semicontinuo inferiormente.

Sean $(u_\nu)_{\nu\geq 1} \subseteq H_0^1(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ en } H_0^1(\Omega).$$

Como la norma es débilmente semicontinua inferiormente

$$\lim_{\nu\to+\infty} \inf \|u_\nu\|^2 \geq \|u\|^2 \qquad \text{(III.7)}$$

Luego

$$\lim_{\nu\to+\infty} \inf J(u_\nu) = \lim_{\nu\to+\infty} \inf \left(\frac{1}{2}\widehat{a}\left(\|u_\nu\|^2\right) - \int_\Omega fu_\nu dx\right)$$

Como las funciones en paréntesis son acotadas y continuas tenemos

$$\lim_{\nu\to+\infty}\inf J(u_\nu) = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\|u_\nu\|^2} a(\lambda)d\lambda - \int_\Omega f u_\nu dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\lim_{\nu\to+\infty}\|u_\nu\|^2} a(\lambda)d\lambda - \lim_{\nu\to+\infty}\int_\Omega f u_\nu dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\lim_{\nu\to+\infty}\inf\|u_\nu\|^2} a(\lambda)d\lambda - \lim_{\nu\to+\infty}\int_\Omega f u_\nu dx$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_0^{\|u\|^2} a(\lambda)d\lambda - \int_\Omega f u dx \tag{III.8}$$

donde la última desigualdad es una consecuencia del Teorema de Convergencia denominada de Lebesgue y (III.7).

De (III.8)

$$J(u) \leq \lim_{\nu\to+\infty}\inf J(u_\nu)$$

lo que muestra que J es débilmente semicontinua inferiomente en $H_0^1(\Omega)$.

Por el corolario del Teorema de Weierstrass Generalizado, teorema II.11 existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(u_0) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)} J(u)$$

y por la observación III.1, u_0 es una solución débil de (III.1). Esto concluye la prueba del teorema.

■

III.1. La unicidad de la Solución

En el siguiente teorema se muestra que imponiendo una condición de pequeñ̃ez en el comportamiento de la función a, el problema (III.1) tiene unicidad de la solución débil. Este resultado sigue las ideas de T.F Ma [20]

Teorema III.2. *Asuma que a satisface las condiciones del teorema III.1. Si además a es Lipschitziana, con constante de Lipschitz L_a, "suficientemente pequeña", entonces el problema (III.1) tiene exactamente una solución.*

Demostración: Sean u y v dos soluciones de (III.1) y hagamos

$$w = u - v$$

Luego se tiene:

$$\begin{cases} a\left(\|u\|^2\right) \triangle u = f \\ a\left(\|v\|^2\right) \triangle v = f \end{cases}$$

$$a\left(\|u\|^2\right) \triangle u - a\left(\|v\|^2\right) \triangle v = 0$$

Reordenando

$$a\left(\|u\|^2\right) \triangle w + \left(a\left(\|u\|^2\right) - a\left(\|v\|^2\right)\right) \triangle v = 0$$

Multiplicando por w, integrando en Ω y aplicando el teorema de Green resulta

$$a\left(\|u\|^2\right) \int_\Omega |\nabla w|^2 dx = -\left[a\left(\|u\|^2\right) - a\left(\|v\|^2\right)\right] \int_\Omega \nabla v \nabla w dx \tag{III.9}$$

Y usando la desigualdad

$$\left|\|p\|^2 - \|q\|^2\right| \leq (\|p\| + \|q\|)(\|p - q\|)$$

obtenemos

$$\left|\left[a\left(\|u\|^2\right) - a\left(\|v\|^2\right)\right] \int_\Omega \nabla v \nabla w dx\right| \leq L_a \left|\|u\|^2 - \|v\|^2\right| \|v\| \|w\| \tag{III.10}$$

Pero observamos que si v es solución débil de (III.1) satisface:

$$m\|v\|^2 \leq a\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right) \|v\|^2 = (f, v) \leq |f|_L |v|_L \leq |f| \frac{1}{\lambda_1} \|v\|$$

donde λ_1 es el primer autovalor del problema

$$\left| \begin{array}{c} -\triangle v = \lambda v \text{ en } \Omega \\ v = 0 \text{ en } \Gamma \end{array} \right.$$

Luego

$$\|v\| \leq \frac{|f|_L}{m\lambda_1} \tag{III.11}$$

Por tanto de (III.9)- (III.11)

$$m\|w\|^2 \leq 2L_a \left[\frac{|f|_L}{m\lambda_1}\right]^2 \|w\|^2$$

esto es

$$\left\{m - 2L_a \left[\frac{|f|_L}{m\lambda_1}\right]^2\right\} \|w\|^2 \leq 0$$

Por lo que para

$$0 < L_a < \frac{m^3\lambda_1^2}{2|f|_L^2}$$

obtenemos

$$\|w\| = 0 \Rightarrow u = v$$

■

III.2. La solución numérica aproximada

Aquí queremos comentar un método para obtener la solución aproximada débil del problema (III.1), guiándonos por el artículo de Gudi [17].

Para obtener esta solución aproximada, aplicaremos el método de elementos finitos.

Mediante la formulación débil de (III.1), podemos definir nuestro problema aproximado como sigue:

Queremos hallar $\omega_h \in V_h \subseteq H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a\left(\int_\Omega |\nabla\omega_h|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla\omega_h.\nabla v dx = \int_\Omega f v dx,\ \forall v \in V_h \tag{III.12}$$

donde V_h es el subespacio de elementos finitos de $H_0^1(\Omega)$ asociado a una triangulación regular τ_h de Ω.

Sea ahora $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m$ una base canónica de V_h asociada con los nodos de τ_h. Queremos determinar una solución ω_h de (III.12), esto es debemos hallar $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$

$$\omega_h = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi_i$$

satisfaciendo (III.12). Luego tenemos el sistema de ecuaciones algebraico no lineal

$$F_j(\vec{\alpha}) = F_j(\omega_h) = 0\ ,\ 1 \leq j \leq m \tag{III.13}$$

donde

$$F_j(\omega_h) = a\left(\int_\Omega |\nabla\omega_h|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla\omega_h.\nabla\phi_j dx - \int_\Omega f\phi_j dx\ ,\ 1 \leq j \leq m$$

Para resolver el sistema no lineal (III.13) podemos implementar el método iterativo de Newton-Raphson; para esto bastará computar la matriz jacobiana del sistema, esto es

$$\left[\frac{\partial F_j}{\partial \alpha_l}(\omega_h)\right]_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq l \leq m}}$$

donde

$$\frac{\partial F_j}{\partial \alpha_l}(\omega_h) = a'\left(\int_\Omega |\nabla\omega_h|^2 dx\right)\int_\Omega 2\nabla\omega_h.\nabla\phi_l dx \int_\Omega \nabla\omega_h.\nabla\phi_j dx +$$

$$a\left(\int_\Omega |\nabla\omega_h|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla\phi_l.\nabla\phi_j dx \neq 0\ ,\ 1 \leq j, l \leq m$$

Este procedimiento puede ser implementado a través de un software adecuado(por ejemplo MATLAB) para obtener resultados numéricos.

Conclusiones

1. El problema no local (III.1) admite solución débil para el dato $f \in L^2(\Omega)$. Para obtener la solución hemos aplicado un corolario del Teorema de Weierstrass Generalizado, que en esencia determina la existencia de un punto de mínimo para el funcional de energía asociado al problema (III.1), este punto de mínimo es la solución débil buscada.

2. Bajo adecuadas condiciones de pequeñez sobre la función M (la constante de Lipschitz suficientemente pequeña) es posible probar unicidad de la solución al problema (III.1).

3. La metodología empleada es general, de modo que puede aplicarse a otro tipo de problemas elípticos no locales; así mismo imponiendo restricciones adecuadas de pequeñez sobre los datos de estos nuevos problemas, debe conseguirse unicidad de las soluciones.

4. Sería interesante investigar resultados similares para otros operadores no locales (por ejemplo con exponente variable o de tipo fraccional). Conjeturamos que nuestra metodología permitiría obtener resultados positivos de existencia.

Bibliografía

[1] Adams, R.A.; Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] A. AROSIO & S. PANIZZI; On the Well-Posedness of the Kirchhoff String, Trans. Amer. Math. Soc. 348(1996), 305-330.

[3] Brezis, H. ; Analyse Functionelle, Thérie et Applications, Dunod, Paris, 2005.—

[4] J.A. CARRILLO; On a Nonlocal Elliptic Equation with Decreasing Nonlinearity Arising in Plasma Physics and heat Conduction, Nonlinear Analysis, 32(1998) 97-115.

[5] M. CHIPOT, & B. LOVAT; Some Remarks on Nonlocal Elliptic and Parabolic Problems, Nonlinear Anal., T.M.A. vol. 30, 4619-4627.

[6] M. CHIPOT, & J.F. RODRIGUES; On a Class of Nonlinear Problems, RAIRO Modélisation Math. Anal. Num. Vol 26, 447-467,(1997).

[7] CORRÊA, F.J.S.A., Sobre Problemas Elípticos Não-Locais e Algumas Técnicas de Análise Funcional não-Linear, Seminário Brasileiro de Análise, Ed. N°62, (2005).

[8] CORRÊA, F.J.S.A., SILVANO D.B. MENEZES & J. FERRERA, On a Class of Problems Involving a Nonlocal Operator, Applied Math. and Comp. 147 (2004) 475789.

[9] CORRÊA, F.J.S.A.& D.C. DE MORAIS FILHO, On Class of Nonlocal Elliptic Problems Via Galerkin Method, Journal Of Mathematical Analysis and Applications, 310(2005) 177-187.

[10] CORRÊA, F.J.S.A.& SILVANO D.B. MENEZES,Existence of Solutions to Nonlocal and Singular Elliptic Problems Via Galerkin Method, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2004(2004), N°19,pp.1-10.

[11] CORRÊA, F.J.S.A.& LOPES, F.P.M., Communications on Applied Nonlinear Analysis, vol.(2006), pp.

[12] A.T. COUSIN, C.L. FROTA, N.A. LARKIN L.A. MEDEIROS, On the Abstract Model of the Kirchhoff-Carrier Equation, Comm. Appl. Anal. 1(1997), 289-404.

[13] W. DENG, Y. LI & C. XIE, Existence and nonexistence of Global Solutions of Some Nonlocal Degenerate Parabolic Equations, Applied Mathematics Letters, 16(2003)803-808.

[14] W. DENG, Y. LI & C. XIE, Blow-up and Global Existence for a Nonlocal Degenerate Parabolic System, J. Mtah. Anal. and Appl. 277(2003) 199-217.

[15] DE FIGUEIREDO D.G., Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems, Lecture Notes in Mathematics, N°957, Springer-Verlag, New York(1982), pp.34-87.

[16] D. GILBARG-N.S. TRUDINGER, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Second Edition, Springer-Verlag, 1983.

[17] T. Gudi, Finite Element Method for a Nonlocal Problem of Kirchhoff Type, SIAM J. Numer. Anal., 50(2), 657-668.

[18] J.L. LIONS, On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics, em G. de La Penha, L.A. Medeiros(Eds), International Symposium on Continuum, Mechanics and Partial Differential Equations, Rio de Janeiro(1997), Mathematics Studies, Vol. 30, North-Holland, Amsterdam, 1978, 284-346.

[19] P.L. LIONS, On the Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations, SIAM Review, Vol. 24, N. 4, October(1982)441-467.

[20] T.F. Ma, Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type, Nonlinear Analysis 63 (2005) e1967-e1977.

[21] K. ONO, On Global Solutions and Blow-up Solutions of Nonlinear Kirchhoff Strings with Nonlinear Dissipation, J. Math. Anal. Appl. 216(1997), 321-342.

[22] R. STAŃCZY, Nonlocal Elliptic Equations, Nonlinear Analysis, 47(2001), 3579-3584.

[23] D.E. TZANETIS & P.M. VLAMOS, A nonlocal Problem Modelling Ohmic Heating with Variable Thermal Conductivity, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2(2001) 443-454.

[24] L.A. Medeiros & M. Mila Miranda, Introdução aos Espaçõs de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais, IM-UFRJ, 1993.