Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Estudio de la estabilidad de un sistema de Timoshenko con historia pasada (o con memoria)

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

AUTOR

Víctor Hilario TARAZONA MIRANDA

ASESOR

Alfonso PÉREZ SALVATIERRA

Lima, Perú

2018

Referencia bibliográfica

Tarazona, V. (2018). *Estudio de la estabilidad de un sistema de Timoshenko con historia pasada (o con memoria)*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas / Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

7 88 P
71 88 P

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las 16:40 horas del día jueves veinticinco de enero del dos mil dieciocho, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro e integrado por los siguientes miembros, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa (Jurado Evaluador); Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (Jurado Evaluador), Mg. Carlos Gilberto Quicaño Barrientos (Jurado Evaluador) y el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DE TIMOSHENKO CON HISTORIA PASADA (O CON MEMORIA)» presentada por el Bachiller Víctor Hilario Tarazona Miranda para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Víctor Hilario Tarazona Miranda respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Víctor Hilario Tarazona Miranda aprobado con el calificativo de .Muy... Bueno.(18)..................

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura** al Bachiller Víctor Hilario Tarazona Miranda.

Siendo las 17:50.. horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
Presidente

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
Miembro

Mg. Carlos Gilberto Quicaño Machado
Miembro

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro Asesor

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA DE TIMOSHENKO CON HISTORIA PASADA (O CON MEMORIA)

VÍCTOR HILARIO TARAZONA MIRANDA

Tesis presentada a consideración del jurado evaluador, integrado por el cuerpo docente de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el grado académico de Magister en Matemática Pura.

Aprobada por el jurado:

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
Presidente

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
Miembro

Mg.Carlos Gilberto Quicaño Barrientos
Miembro

Mg. Carlos Alberto Peña Miranda
Miembro

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
Miembro Asesor

FICHA CATALOGRÁFICA

TARAZONA MIRANDA VÍCTOR HILARIO

Estudio de la estabilidad del sistema de Timoshenko con historia pasada (o con memoria).
(Lima)2018.
VII,71P.,29.7cm (UNMSM, Maestría, Matemática,2018)
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas
1.Matemática Pura I. UNMSM/FCM II. Título
(Serie)

DEDICATORIA

A la memoria de mi padre, Víctor.
A mi compañera de siempre, Zoraida.
A mis hijos, Xiomara y Víctor.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por iluminarme y permitirme la culminación satisfactoria del presente trabajo.
Agradezco a mi asesor, Dr. Alfonso Pérez Salvatierra, por su constante apoyo, interés y paciencia en el desarrollo de la tesis.
A mi familia, muchas gracias por el apoyo moral en este proyecto.
A mi padre, Víctor, quien con su ejemplo, me enseñó que la vida es esfuerzo y sacrificio, para lograr la meta.
Agradezco a Charles López Verau, por su apoyo desinteresado hacia la culminación de este trabajo.
Agradezco a todos que de alguna forma contribuyeron para la realización de este trabajo.

RESUMEN

Estudio de la Estabilidad de un sistema de Timoshenko con historia pasada (o con memoria)

Víctor Hilario Tarazona Miranda

Enero, 2018

Asesor :Dr. Alfonso Pérez Salvatierra

Título Obtenido :Magister en Matemáticas

- -

En el presente trabajo, se estudia los sistemas vibratorios de Timoshenko con historia pasada actuando solamente en una ecuación. En este trabajo se obtiene la existencia, unicidad, estabilidad exponencial y decaimiento polinomial de un sistema de Timoshenko con historia pasada. Abordamos la teoría de semigrupos y propiedades del resolvente de un generador infinitesimal para demostrar la existencia y unicidad de soluciones del sistema planteado, además se estudia que la disipación dada por el término historia es lo suficientemente fuerte para producir estabilidad exponencial, si la velocidad de las ondas son iguales. En el caso que la velocidad de las ondas son diferentes, se demuestra que la energía de primer orden decae polinomialmente.

Palabras Clave:

Sistema de Timoshenko, teoría de semigrupo, estabilidad exponencial, decaimiento polinomial.

ABSTRACT

Study of the Stability of a Timoshenko system with past history (or with memory)

Tarazona, Víctor

January, 2018

Adviser :Dr. Alfonso Perez Salvatierra

- -

In the present work, we study Timoshenko's vibratory systems with past history acting only in one equation. In this work we obtain the existence, uniqueness, exponential stability and polynomial decay of a Timoshenko system with past history. We approach the theory of semigroups and properties of the resolver of an infinitesimal generator to demonstrate the existence and uniqueness of solutions of the proposed system, furthermore it is studied that the dissipation given by the term history is strong enough to produce exponential stability, if the speed of the waves are the same. In the case that the speed of the waves are different, it is shown that the first-order energy decays polynomially.

Keywords:

Timoshenko system, semigroup theory, exponential stability, polynomial decay.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El presente trabajo es una exposición didáctica de un sistema de Timoshenko,desarrollado por Fernandez Sare - Muñoz Rivera [10],llamado así en referencia al ingeniero ucraniano Stephen Prokafievich Timoshenko (1878-1972), describe el desplazamiento transversal y el desplazamiento angular del eje central de una viga de longitud L. En 1921, Timoshenko [29] dio como modelo para una barra o viga gruesa el siguiente sistema de ecuaciones hiperbólicas acopladas
$\rho\mu_{tt} = (k(\mu_x - \varphi))_x$, en $(0, L) \times (0, \infty)$
$I_p\varphi_{tt} = (EI\varphi_x)_x + k(\mu_x - \varphi)$, en $(0, L) \times (0, \infty)$
donde t denota la variable tiempo y x la variable espacial a lo largo de la viga de longitud L, en su configuración de equilibrio, μ es el desplazamiento transversal de la viga y φ es el ángulo de rotación del filamento de la viga. Los coeficientes ρ, I_ρ, E, I y k son respectivamente la densidad, el momento de inercia polar de una sección transversal, el módulo de elasticidad de Young's, el momento de inercia de una sección transversal y el módulo de corte.
Una cuestión importante de la investigación es buscar una mínima disipación por la cual las soluciones del sistema anterior, se estabilizan y decaen uniformemente a medida que el tiempo va al infinito.
Estamos interesados en estudiar los sistemas de Timoshenko con términos de convolución de la forma $g * \psi_{xx}(x, t) := \int_0^t g(s)\psi_{xx}(x, t - s)ds$, donde t es un número real positivo, o incluso $t = +\infty$. La función g es conocida como núcleo de convolución. Este término se llama, término de memoria cuando t es finito o historia si $t = +\infty$. El término de convolución lleva la información de todos los instantes $s < t$ hacia dentro del material en el instante t.
En [30], se estudia el sistema de Timoshenko modelado por,

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} = S_x \\ \rho_2\psi_{tt} = M_x - S \end{cases} \tag{1.1}$$

donde S es la tensión de corte, M es el momento de flector, φ es el desplazamiento transversal, ψ es el ángulo de rotación del filamento de la viga, $\rho_1 = \rho A$, siendo ρ la densidad del material y A el área de la sección transversal, por último $\rho_2 = \rho I$, siendo I el momento de inercia.
Asimismo, el sistema de Timoshenko (1.1) para vigas puramente elásticas es modelado por,

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \tag{1.2}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi) = 0 \tag{1.3}$$

Se denota por χ la diferencia entre las velocidades de ondas,

$$\chi := \frac{k}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2} \tag{1.4}$$

En este trabajo consideraremos el siguiente sistema lineal de Timoshenko con historia pasada; que resulta de agregar a la ecuación (1.3) el término memoria,

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \ en \ (0, L) \times (0, \infty) \tag{1.5}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds + k(\varphi_x + \psi) = 0 \text{ en } (0, L) \times (0, \infty) \tag{1.6}$$

y condiciones iniciales

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \text{ en } (0, L) \tag{1.7}$$

con constantes positivas ρ_1, ρ_2, k, b.
Aquí estamos interesados en el comportamiento asintótico de la solución. Nuestras principales herramientas son los resultados de Prüss sobre la estabilidad exponencial de semigrupos, ver [26] y [27]. Para utilizar estos resultados, es necesario, incrustar el problema en el contexto de semigrupos, por lo que se debe hacer algunas modificaciones, en nuestro sistema original (1.5)-(1.6). Siguiendo la idea de Dafermos [8], introducimos:

$$\eta^t(x, s) := \psi(x, t) - \psi(x, t-s) \tag{1.8}$$

luego

$$\psi_{xx}(x, t-s) = \psi_{xx}(x.t) - \eta^t_{xx}(x, s),$$

entonces el sistema (1.5)-(1.6) es reescrito como

$$\rho_1\varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi)_x = 0 \tag{1.9}$$

$$\rho_2\psi_{tt} - (b - \int_0^\infty g(s)ds)\psi_{xx}(x, t) - \int_0^\infty g(s)\eta^t_{xx}(x, s)ds + k(\varphi_x + \psi) = 0 \tag{1.10}$$

$$\eta_t + \eta_s - \psi_t = 0 \tag{1.11}$$

las condiciones iniciales son dadas por

$$\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0, \quad \varphi_t(\cdot, 0) = \varphi_1, \quad \psi(\cdot, 0) = \psi_0, \quad \psi_t(\cdot, 0) = \psi_1 \quad en \quad (0, L) \tag{1.12}$$

$$\eta_0(\cdot, s) = \psi_0(\cdot, 0) - \psi_0(\cdot, -s) \quad en \quad (0, L) \times (0, \infty) \tag{1.13}$$

lo que significa que la historia se considera como un valor inicial. Consideramos las condiciones de contorno de Dirichlet, pero nuestros argumentos se pueden utilizar para demostrar resultados similares para otras condiciones de contorno.

En cuanto al núcleo "g" consideramos las siguientes hipótesis:

$$g(t) > 0, \exists k_0, k_1, k_2 > 0 : -k_0 g(t) \leq g'(t) \leq -k_1 g(t), |g''(t)| \leq k_2 g(t), \forall t \geq 0 \quad (1.14)$$

$$\tilde{b} := (b - \int_0^\infty g(s)ds) > 0 \quad (1.15)$$

Vamos a mencionar algunos resultados de decaimiento de la energía para los sistemas disipativos de Timoshenko. En [14], Kim y Renardy , consideran un sistema conservativo de Timoshenko con dos controles en la frontera y ellos demuestran la estabilidad exponencial para la energía asociada al sistema. Si el término historia se sustituye en (1.6) por la función control $\tilde{b}(x)\psi_t$, $\tilde{b} > 0$, entonces Soufyane [28] demostró la estabilidad exponencial para el sistema linealizado si, y solo si, la velocidad de las ondas de la ecuaciones (1.5), (1.6) son iguales, es decir,

$$\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b} \quad (1.16)$$

Resultados similares son obtenidos por Muñoz R. y Racke [23], donde se utilizan técnicas de semigrupos. En [22] los mismos autores consideran un sistema de Timoshenko disipativo con una disipación a través de un acoplamiento a una ecuación del calor y demuestran la estabilidad exponencial si, y solo si, se cumple (1.16).

En[2], los autores consideran un sistema lineal de Timoshenko con memoria, siempre con condiciones de frontera homogéneas.Ellos usan técnicas multiplicativas para demostrar que el sistema es uniformemente estable cuando g decae uniformemente. Específicamente ellos obtienen decaimiento exponencial si g decae a una tasa exponencial y decaimiento polinomial si g decae a una tasa polinomial. En este trabajo los autores precisan de algunas condiciones técnicas extras para g' y g'' para obtener sus resultados.

En [19], los autores estudian el mismo sistema para $x \in (0, 1)$, $g'(t) \leqslant -k_0 g^p(t)$ y $1 \leqslant p < 3/2$, ellos demuestran que si (1.16) se cumple y $p = 1$, la primera energía decae exponencialmente y polinomialmente si $p > 1$. Sin embargo, si no se cumple (1.16) el decaimiento es en la tasa $1/t^p$ siempre que los datos iniciales sean lo suficientemente regulares.

En [17], los autores consideran el sistema vibratorio hiperbólico de tipo Timoshenko que están acoplados a una ecuación de calor que modela un efecto previsiblemente disipativo a través de la conducción del calor. Ellos utilizan el método de semigrupos para probar el resultado de estabilidad exponencial, con suposiciones sobre la función de relajación de la historia pasada g, decayendo exponencialmente cuando se cumple (1.16).

El resultado principal de este trabajo es demostrar que el sistema es exponencialmente estable si se cumple (1.16). Cuando no se cumple (1.16), que es más interesante desde el punto de vista físico, se demuestra que la energía de primer orden decae polinomialmente con las tasas que dependen de la regularidad de los datos iniciales.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la existencia y unicidad, la estabilidad exponencial y el decaimiento polinomial de un sistema de vigas de Timoshenko con una disipación dada por el termino historia, según el trabajo realizado por Hugo Fernandez Sare y Jaime Muñoz Rivera[10].

La organización de este trabajo es la siguiente. En el **Capítulo 2**, presentamos los principales resultados que serán usados en los capítulos posteriores. En el **Capítulo 3**, estudiamos la existencia y la unicidad de soluciones para el sistema (1.9)-(1.11) con las condiciones iniciales (1.12), (1.13); usando la teoría de semigrupos de operadores lineales acotados de clase C_0. En el **Capítulo 4**, usando el método de la energía se concluye que el sistema (1.9)-(1.11) es exponencialmente estable si, y solamente si, se cumple (1.16), es decir estudiamos el comportamiento exponencial del semigrupo asociado al sistema (1.9)-(1.11). En el **Capítulo 5**, se hace un estudio del decaimiento de la energía llegando a demostrar estabilidad de tipo polinomial, cuando (1.16) no se cumple. Finalmente, se mencionan las conclusiones del trabajo.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo, nos dedicaremos a la presentación de conceptos y resultados importantes, que nos servirán en el desarrollo de los capítulos posteriores.

2.1. Análisis Funcional

Definición 2.1.1

Sea $(X, +, ., \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Se llama norma a toda aplicación $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ tal que satisface:
(i) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$.
(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; $\forall x, y \in X$
Al par $(X, \|.\|)$ se le llama espacio normado.

Definición 2.1.2

Sean $(X, \|.\|)$ un espacio normado y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X.
(i) La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $x \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| < \epsilon$, para todo $n > n_0$.
(ii) La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_m - x_n\| < \epsilon$, para todo $m, n > n_0$.

Definición 2.1.3 (Espacio de Banach)

Un espacio vectorial normado $(X, \|.\|_X)$ se llama espacio de Banach si (X, d) es completo, donde d es la métrica inducida por la norma $\|.\|_X$.

Definición 2.1.4 (Operador acotado)

Sean $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ espacios normados y $B : D(B) \subset X \to Y$ un operador lineal. Diremos que B es un operador acotado (o continuo) si existe $C > 0$ tal que $\|Bx\|_Y \leq C\|x\|_X$, $\forall x \in D(B)$.

Observación 2.1.5

Sea $(X, \|.\|_X)$ un espacio normado. El espacio vectorial de todos los operadores lineales acotados $B : X \to X$ sera representado por $\mathcal{L}(X)$. Este espacio estará provisto de la norma $\|.\|_{\mathcal{L}}$ dada por $\|B\|_{\mathcal{L}} = sup\ \{\|Bx\|_X;\ x \in X \text{ y } \|x\|_X = 1\ \}$.

Proposición 2.1.6

Dado X un espacio de Banach y $B_1 \in \mathcal{L}(X)$ un operador invertible tal que $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Si $B_2 \in \mathcal{L}(X)$ es tal que $\|B_2\|_{\mathcal{L}} < \|B_1^{-1}\|_{\mathcal{L}}$, entonces el operador $B_1 + B_2$ es lineal, acotado e invertible.
Demostración: Ver [21].

Teorema 2.1.7

Sean X, Y espacios de Banach y $B : X \to Y$ un operador lineal acotado. Si B es biyectivo entonces $B^{-1} : Y \to X$ es un operador lineal acotado.
Demostración: Ver [15].

Proposición 2.1.8

Sean $X_1 = (X, \|.\|_1)$ y $X_2 = (X, \|.\|_2)$ dos espacios de Banach. Si existe una constante C tal que $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ para todo $x \in X$, entonces las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ son equivalentes.
Demostración: Ver [6].

Definición 2.1.9 (Forma Sesquilineal)

Sea X un espacio vectorial complejo. Una forma sesquilineal de X, es una aplicación $a : X \times X \to \mathbb{C}$ que satisface las siguientes condiciones:
(i) $a(x_1 + x_2, y) = a(x_1, y) + a(x_2, y)$, $\forall x_1, x_2, y \in X$.
(ii) $a(\lambda x, y) = \lambda a(x, y)$, $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
(iii) $a(x, y_1 + y_2) = a(x, y_1) + a(x, y_2)$, $\forall x, y_1, y_2 \in X$.
(iv) $a(x, \lambda y) = \bar{\lambda} a(x, y)$, $\forall x, y \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Definición 2.1.10

Sean $(X, \|.\|_X)$ un espacio normado y $a(.,.)$ una forma sesquilineal en $X \times X$. Diremos que $a(.,.)$ es continua (o acotada) si existe una constante $C > 0$ tal que
$|a(x, y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_X$, $\forall x, y \in X$.

Definición 2.1.11

Sean $(X, \|.\|_X)$ un espacio normado y $a(.,.)$ una forma sesquilineal en $X \times X$. Diremos que $a(.,.)$ es coerciva cuando existe $C > 0$, tal que $|a(x, x)| \geq C\|x\|_X^2$, $\forall x \in X$.

Definición 2.1.12

Sea X un espacio vectorial y $\langle .,. \rangle_X$ un producto interno en $X \times X$. Diremos que la norma definida por $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle_X}$ proviene del (o es inducida por el) producto interno $\langle .,. \rangle_X$.

Definición 2.1.13

Un espacio de Banach $(X, \|.\|_X)$ se llama espacio de Hilbert cuando la norma $\|.\|_X$ proviene de un producto interno $\langle .,. \rangle_X$.

Definición 2.1.14

Sea X un espacio vectorial complejo. Un funcional $T : X \to \mathbb{C}$ es lineal si satisface las siguientes condiciones:
(i) $T(x + y) = T(x) + T(y), \forall x, y \in X$.
(ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x), \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Definición 2.1.15

Un funcional $T : X \to \mathbb{C}$, sobre un espacio normado X, es acotado si existe una constante $C > 0$ tal que $|T(x)| \leq C\|x\|_X, \forall x \in X$.

Teorema 2.1.16

Si V es un espacio normado y X un espacio de Banach, entonces
$\mathcal{L}(V, X) = \{f : V \to X; f$ es un operador lineal acotado$\}$ es un espacio de Banach.
Demostración: Ver [24].

Teorema 2.1.17 (Lax-Milgran)

Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal, acotada y coerciva. Entonces, para toda funcional $T : H \to \mathbb{C}$ lineal acotado, existe un único $x \in H$ tal que $a(x, u) = T(u), \forall u \in H$.
Demostración: Ver [6].

2.2. Los Espacios $L^p(\Omega)$ y $L^p(0, T; X)$

Definición 2.2.1

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \leq p < +\infty$. El espacio $L^p(\Omega)$ es el espacio vectorial de la clase de funciones $f : \Omega \to \mathbb{K}$, con medida de Lebesgue, que satisfacen $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$; esto es

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}; f \text{es medible y} \int_\Omega |f(x)|^p < +\infty\}$.
En el espacio $L^p(\Omega)$ definimos la norma

$$\|f\|_{L^p} = (\int_\Omega |f|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Definición 2.2.2

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. El espacio $L^\infty(\Omega)$ es el espacio vectorial de la clase de funciones $f : \Omega \to \mathbb{K}$, con medida de Lebesgue, que son esencialmente acotadas en Ω, osea, existe una constante C tal que $|f(x)| \leq C$ para casi todo $x \in \Omega$; esto es $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K};\ f$ es medible y existe una constante C tal que $|f(x)| \leq C$ casi todo punto en Ω $\}$.
Se llama supremo esencial de f en Ω al número
$\inf\{\ C; |f(x)| \leq C$ para casi todo $x \in \Omega$ $\}$ y es denotado por $\sup\limits_{x\in\Omega} ess|f(x)|$.
En el espacio $L^\infty(\Omega)$ definimos la norma

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} ess|f(x)|.$$

Teorema 2.2.3

Sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p})$ es un espacio de Banach.
Demostración: Ver [1].

Observación 2.2.4

Del teorema 2.2.3, el espacio $(L^2(\Omega), \|.\|_{L^2})$ es un espacio de Hilbert cuyo producto interno es dado por

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Proposición 2.2.5

Si $a \geq 0, b \geq 0$ y $p \geq 1$ entonces $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$.

Demostración: Sabemos que $(max\{a, b\})^p = max\{a^p, b^p\} \leq (a^p + b^p)$
Luego tenemos

$$\begin{aligned}(a + b)^p &\leq (2max\{a, b\})^p \\ &\leq 2^p(a^p + b^p).\end{aligned}$$

Proposición 2.2.6 (Desigualdad de Young)

Si $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $p > 1$, $q > 1$ son tales que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ entonces $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.
Demostración: Ver [3].

Corolario 2.2.7

Sean $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $p > 1$, $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces $ab \leq \epsilon a^p + c(\epsilon)b^q$, $\forall \epsilon > 0$.
Demostración: Hacemos

$$\begin{aligned} ab &= (p\epsilon)^{1/p} \frac{1}{(p\epsilon)^{1/p}} ab \\ &= ((p\epsilon)^{1/p} a)(\frac{b}{(p\epsilon)^{1/p}}) \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Young, obtenemos

$$ab \leq \frac{1}{p}((p\epsilon)^{1/p}a)^p + \frac{1}{q}(\frac{b}{(p\epsilon)^{1/p}})^q = \epsilon a^p + \frac{b^q}{q(p\epsilon)^{q/p}}, \forall \epsilon > 0$$

Tomando $c(\epsilon) = \frac{1}{q(p\epsilon)^{p/q}}$, tenemos

$$ab \leq \epsilon a^p + c(\epsilon) b^q, \ \forall \epsilon > 0.$$

Teorema 2.2.8 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea X un espacio vectorial con producto interno $\langle ., . \rangle_X$.
Entonces $|\langle u, v \rangle_X| \leq \|u\|_X \|v\|_X, \forall u, v \in X$.

Demostración: Ver [24].

Teorema 2.2.9 (Desigualdad de Holder)

Sean $1 \leq p, q \leq +\infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Demostración: Ver [1].

Definición 2.2.10

Sean $1 \leq p \leq +\infty$, $T > 0$ y $(X, \|.\|_X)$ un espacio de Banach. El espacio $L^p(0, T; X)$ es el espacio vectorial de la clase de funciones $u : (0, T) \to X$, medibles, tales que $\|u(.)\|_X \in L^p(0, T)$. En $L^p(0, T; X)$ se define la norma:
$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = [\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt]^{1/p}$.
Por $L^\infty(0, T; X)$ estaremos denotando al espacio vectorial de las (clases) funciones medibles $u : (0, T) \to X$ tal que $\sup_{t \in (0,T)} ess \|u(t)\|_X < \infty$.
En este espacio definimos la norma $\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in (0,T)} ess \|u(t)\|_X$

Proposición 2.2.11

Sea X un espacio de Banach y $1 \leq p \leq +\infty$. El espacio $(L^p(0,T;X), \|.\|_{L^p(0,T;X)})$ es un espacio de Banach.
Demostración: Ver [9].

Observación 2.2.12

Si $p = 2$ y X es un espacio de Hilbert, entonces $L^2(0,T;X)$ es un espacio de Hilbert provisto del producto interno:

$$\langle u, v\rangle_{L^2(0,T:X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t)\rangle_X dt \ , \forall u, v \in L^2(0,T;X).$$

2.3. Distribuciones

Definición 2.3.1

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $u : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua. El soporte de u, que será denotado por $sop(u)$, es definido como la adherencia en Ω del conjunto $\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$, es decir $sop(u) = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$. Si $sop(u)$ es un compacto de Ω entonces diremos que u posee soporte compacto. Denotamos por $C_0(\Omega)$ al espacio de las funciones continuas en Ω con soporte compacto.

Definición 2.3.2

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. El espacio $C^m(\Omega)$ es el espacio de las funciones con todas las derivadas parciales de orden menor o igual que m continuas en Ω.
Denotaremos por $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Definición 2.3.3

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. El espacio $C_0^m(\Omega)$ es el espacio vectorial de todas las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que poseen todas las derivadas hasta el orden m y con soporte compacto. Si $m = \infty, C_0^\infty(\Omega)$ es el espacio vectorial de todas las funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciable y con soporte compacto.

Definición 2.3.4

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. El espacio $D(\Omega)$, llamado el espacio de las funciones de prueba es el espacio vectorial formado por todas las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto.

Definición 2.3.5

Sea $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $D(\Omega)$ y una función φ en $D(\Omega)$. Diremos que la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a φ en $D(\Omega)$ si existe un conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que
i) $sop(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$ y $sop(\varphi) \subset K$;
ii)Para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ uniformemente en K, donde D^α denota el operador derivada de orden α definido por $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$
y $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$.

Definición 2.3.6

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Una distribución sobre Ω es una aplicación lineal $B : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ que es continua en el sentido de la convergencia de $D(\Omega)$, es decir, si $\varphi_n \to 0$ en $D(\Omega)$, entonces $B(\varphi_n) \to 0$ en $\mathbb{R}$. El espacio vectorial formado por todas las distribuciones sobre Ω es representado por $D'(\Omega)$.

Definición 2.3.7

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$. La derivada distribucional o derivada débil de orden α de una distribución $B \in D'(\Omega)$ es la distribución

$$\begin{aligned} D^\alpha B : D(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\to (-1)^{|\alpha|} B(D^\alpha \varphi) \end{aligned}$$

es decir, $\langle D^\alpha B, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle B, D^\alpha \varphi\rangle, \forall \varphi \in D(\Omega)$.

Proposición 2.3.8

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
El operador de derivación $D^\alpha : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ es continua, es decir, si $B_n \to B$ en $D'(\Omega)$, entonces $D^\alpha B_n \to D^\alpha B$ en $D'(\Omega)$.
Demostración: Ver [7].

Definición 2.3.9

Sea X un espacio de Banach. Una distribución con valores en X es una aplicación lineal $B : D(0,T) \to X$ que es continua en el sentido de la convergencia de $D(0,T)$, es decir, si $\varphi_n \to 0$ en $D(0,T)$, entonces $B(\varphi_n) \to 0$ en X. El espacio vectorial formado por todas las distribuciones con valores en X es representado por $D'(0,T;X)$.

Definición 2.3.10

Sea m un entero no negativo. La derivada de orden m de una distribución $B \in D'(0,T;X)$ es la distribución

$$\frac{d^m B}{dt^m} : D(0,T) \to X$$
$$\varphi \to (-1)^m B(\frac{d^m \varphi}{dt^m}).$$

Proposición 2.3.11

Sean X e Y dos espacios de Banach tal que $X \hookrightarrow Y$. Si $u \in L^1(0,T;X)$ y $\dfrac{du}{dt} \in L^1(0,T;Y)$, entonces $u \in C([0,T],Y)$.
Demostración: Ver [18].

2.4. Espacios de Sobolev

Definición 2.4.1

Sea $1 \leq p < \infty$. Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable en $L^p(\Omega)$, y lo denotaremos por $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, si f es una función medible y para cualquier conjunto compacto $K \subset \Omega$ tenemos

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty.$$

Definición 2.4.2

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$, $1 \leq p \leq \infty$ y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diremos que la función $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la derivada parcial débil de orden α de u si

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observación 2.4.3

Si $u \in C^k(\Omega)$, entonces u posee derivada parcial débil de orden α y esta coincide con su derivada parcial clásica de orden α, para todo α satisfaciendo $|\alpha| \leq k$.

Definición 2.4.4

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ y $m \in \mathbb{N}$. El espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L^p(\Omega)$ formado por la clase de funciones $u \in L^p(\Omega)$ tales que, para todo multi-índice α con $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ existe (en el sentido débil) y está en $L^p(\Omega)$, es decir, $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}$.

Observación 2.4.5

Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$ entonces u posee derivada distribucional de orden α y esta coincide con su derivada parcial débil de orden α, para todo α satisfaciendo $|\alpha| \leq m$.
Para $1 \leq p < \infty$ en el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ definimos una norma $\|.\|_{W^{m,p}}$, dada por

$\|u\|_{W^{m,p}} = (\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p)^{1/p}$ y para $p = \infty$ definimos la norma $\|.\|_{W^{m,\infty}}$, dada por
$\|u\|_{W^{m,\infty}} = \max_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}$.

Teorema 2.4.6

Sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{W^{m,p}})$ es un espacio de Banach separable, reflexivo y uniformemente convexo.
Demostración: Ver [1].

Observación 2.4.7

El espacio $W^{m,2}(\Omega)$ provisto con la norma $\|.\|_{W^{m,2}}$ es un espacio de Hilbert que estará representado por $H^m(\Omega)$ y en el cual el producto interno es dado por

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

Definición 2.4.8

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $W_0^{m,p}(\Omega)$ es el espacio vectorial formado por la cerradura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir, $W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$.

Observación 2.4.9

También se puede definir como $W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}$. En el caso $p = 2$, denotaremos esta adherencia por $H_0^m(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{H^m(\Omega)} = W_0^{m,2}(\Omega)$. Además de la definición de $W_0^{m,p}(\Omega)$, se sigue que $(W_0^{m,p}(\Omega), \|.\|_{W^{m,p}})$ es un espacio de Banach.

A continuación, presentaremos los principales teoremas de desigualdades de Sobolev.

Teorema 2.4.10 (Sobolev, Gagliardo, Niremberg)

Sea $1 \leq p < n$ y $q \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n}$. Entonces,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n).$$

Además, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^q} \leq C\|\bigtriangledown u\|_{L^p} \ , \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración: Ver [20].

Teorema 2.4.11 (Desigualdad de Gagliardo-Niremberg)

Sea Ω un dominio acotado con frontera regular, $1 \leqslant q \leqslant p \leq \infty$, $r > n$ y $p \geqslant r$. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$\| u \|_{L^P(\Omega)} \leqslant C \| u \|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)} \|u\|^{\alpha}_{W^{1.r}(\Omega)} \ , \forall u \in W^{1.r}(\Omega)$$

con α satisfaciendo $\alpha(\frac{1}{q} + \frac{1}{n} - \frac{1}{r}) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Demostración: Ver [11].

Teorema 2.4.12

Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^m, $m \geq 1$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces tenemos las siguientes inmersiones compactas:

(i) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, r]$ donde $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{r}$.

(ii) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty\rangle$.

(iii) Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

En este caso, $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$ y $k = \left[\left|m - \dfrac{n}{p}\right|\right]$.

Demostración: Ver [1].

Una desigualdad muy importante, y que será utilizada de forma recurrente en este texto, es la desigualdad de Poincaré.

Lema 2.4.13 (Desigualdad de Poincaré)

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una constante positiva $c_p := C_p(\Omega, n)$, tal que

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq c_p \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W^{1,p}_0(\Omega), 1 \leq p < \infty,$$

donde c_p es la constante de Poincaré.

Demostración: Ver [5].

Observación 2.4.14

En particular, la expresión $\int_\Omega \bigtriangledown u \overline{\bigtriangledown v} dx$ es un producto interno en $H^1_0(\Omega)$, que induce la norma $\|\bigtriangledown u\|_{L^2}$, equivalente a la norma usual de $H^1_0(\Omega)$. Al tomar una función de $W^{1,p}_0(\Omega)$, se puede considerar siempre que se trata de un representante continuo, que se anula en la frontera de Ω.

Corolario 2.4.15

Si I es un intervalo no acotado y $u \in W^{1,p}(I)$, con $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0.$$

Demostracion: Ver [5].

2.5. Semigrupos de Operadores lineales

Definición 2.5.1 (Semigrupo)

Sea X un espacio de Banach. Un semigrupo sobre X es una familia $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales continuos $S(t) : X \to X$ que cumple las siguientes condiciones:
i) $S(0) = I$.
ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Definición 2.5.2 (Semigrupo fuertemente continuo)

Diremos que un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es fuertemente continuo (o de clase C_0), si $\lim_{t\to 0^+} \|(S(t)-I)x\|_X = 0$, $\forall x \in X$.

Definición 2.5.3

Diremos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo acotado en $[0, +\infty\rangle$, si existe $M \geq 1$, tal que $\|S(t)\|_X \leq M$. Si $M = 1$, se dice que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones.

Definición 2.5.4

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo sobre un espacio de Banach X. El generador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es el operador

$$\begin{aligned} A : D(A) &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \end{aligned}$$

donde

$$D(A) = \{x \in X; \exists \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \in X\}.$$

Observación 2.5.5

De la definición anterior, podemos reescribir el dominio del operador como

$$D(A) = \{x \in X; Ax = \frac{d^+}{dt} S(t)x|_{t=0} \in X\}.$$

Proposición 2.5.6

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A.
Si $x \in D(A)$, entonces $S(t)x \in D(A), \forall t \geq 0$ y $\dfrac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$.
Demostración: Ver [12].

Definición 2.5.7

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal.
Pongamos $A^0 = I, A^1 = A$ y supongamos que A^{n-1} está definido, consideremos

$$D(A^n) = \{x; x \in D(A) \text{ y } A^{n-1}x \in D(A)\}.$$

Vamos a definir A^n como:

$$A^n x = A(A^{n-1}x), \forall x \in D(A^n) \text{ , con } n \in \mathbb{N}.$$

Proposición 2.5.8

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 y A su generador infinitesimal.
i)$D(A^n)$ es un subespacio de X y A^n es un operador lineal de X.
ii) Si $x \in D(A^n)$, entonces $S(t)x \in D(A^n), \forall t \geq 0$ y

$$\frac{d^n}{dt^n}S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x, \forall n \in \mathbb{N}.$$

iii) $\bigcap\limits_n D(A^n)$ es denso en X.
Demostración: Ver [12].

Proposición 2.5.9

Si A es un generador infinitesimal de un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, de clase C_0, entonces $\forall x \in D(A^n)$, $S(t)x \in C^{n-k}([0,\infty); D(A^k)), k = 0, 1, 2, \ldots, n$.
Demostración: Ver [12] y [13].

Definición 2.5.10 (Resolvente)

Sea X un espacio de Banach y $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal. El conjunto resolvente de A, es denotado por $\rho(A)$ y consiste en el conjunto formado por todos $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador $(\lambda I - A)^{-1}$ existe y es acotado, esto es,
$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$.
El espectro de A es el conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.
Los elementos de $\rho(A)$ se llaman valores regulares de A y los elementos de $\sigma(A)$ se llaman valores espectrales de A.

Lema 2.5.11

Sea X un espacio de Banach y $S : X \to X$ un operador lineal continuo con inversa continua. Si $B \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\|B\| < \dfrac{1}{\|S^{-1}\|}$
entonces $S + B$ es un operador lineal inversible, con inversa continua.
Demostración: Afirmamos que $S + B$ es biyectivo.
En efecto, sea $v \in X$ y denotemos por G al operador

$$G(x) = S^{-1}(v) - S^{-1}B(x)$$

Observamos que G es una contracción, pues

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\|_X &\leq \|-S^{-1}B(x) + S^{-1}B(y)\|_X \\ &\leq \|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}\|B\|_{\mathcal{L}(X)}\|x - y\|_X \\ &\leq \beta\|x - y\|_X \end{aligned}$$

Tomando $\beta = \|S^{-1}\|\|B\| < 1$, luego por el teorema del punto fijo de Banach, se sigue que existe un único $z \in X$ tal que $G(z) = z$, osea, existe un único $z \in X$ tal que

$$z = S^{-1}(v) - S^{-1}B(z) \Leftrightarrow (S + B)(z) = v.$$

Luego tenemos que $S + B$ es un operador biyectivo y por lo tanto inversible.
Ahora, como $S + B$ es continuo, se sigue, por el teorema del Gráfico Cerrado, que $(S + B)^{-1}$ también es un operador continuo.

Lema 2.5.12

Sea A un operador lineal cerrado en un espacio de Hilbert H tal que $0 \in \rho(A)$. Si $i\mathbb{R} \not\subset \rho(A)$ entonces existe $w \in \mathbb{R}$ con $\|A^{-1}\|^{-1} \leq |w| < \infty$ tal que
$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \rho(A)$ y $\sup\{\|(i\beta I - A)^{-1}\|; |\beta| < |w|\} = \infty$.
Demostración: Como $0 \in \rho(A)$, del lema anterior, tenemos:

$$i\beta I - A = A(i\beta A^{-1} - I)$$

la cual posee inversa continua para $|\beta| < \|A^{-1}\|^{-1}$
Si $\sup\{\|(i\beta I - A)^{-1}\|; |\beta| < \|A^{-1}\|^{-1}\} = M < \infty$, entonces, nuevamente del lema anterior, tenemos

$$i\beta I - A = (i\beta_0 I - A)[I + i(\beta - \beta_0)(i\beta_0 I - A)^{-1}]$$

con $|\beta_0| < \|A^{-1}\|^{-1}$, posee inversa continua para $|\beta - \beta_0| < M^{-1}$ y $\|(i\beta I - A)^{-1}\|$ es una aplicación continua de β en el intervalo $(-\|A^{-1}\| - M^{-1}, \|A^{-1}\| + M^{-1})$.
Luego si $i\mathbb{R} \not\subset \rho(A)$, entonces existe $w \in \mathbb{R}$ con $\|A^{-1}\| \leq |w| < \infty$ tal que
$\{i\beta; |\beta| < |w|\} \subset \rho(A)$ y $\sup\{\|(i\beta I - A)^{-1}\|; |\beta| < |w|\} = \infty$.

Corolario 2.5.13

Con las hipótesis del Lema 2.5.12, existen $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de $\mathbb{R}, D(A)$ y H, respectivamente, tales que
$\lambda_k \to \omega; \|U_k\|_H = 1$ y $F_k \to 0$; siendo $(i\lambda_k I - A)U_k = F_k, \forall k \in \mathbb{N}$.

Demostración:
Del lema 2.5.12, existe una sucesión $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $|\omega| - \dfrac{1}{n} < |\beta_n| < |\omega|$ y
$\|(i\beta_n I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \geq T_n + n$,
donde $T_n = \sup\{\|(i\beta I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}; |\beta| \leq |\omega| - \dfrac{1}{n}\} < \infty$.
Luego existe una subsucesión de $(\beta_n)_{n\in\mathcal{N}}$ que converge a $|\omega|$, por abuso de notación escribimos la subsucesión como $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la cual converge a ω.
Así tenemos que existe una sucesión de números reales $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $\beta_n \to \omega$ y $|\beta_n| < |\omega|$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|(i\beta_n I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = \infty$.
Es decir, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(i\beta_n I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} > k, n \geq n_0.$$

Ahora tenemos,
(i) Existe, $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que

$$\|(i\lambda_k I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} > k.$$

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $G_k \in H$, $G_k \neq 0$, tal que

$$\frac{\|(i\lambda_k I - A)^{-1} G_k\|_H}{\|G_k\|_H} > k,$$

$$\text{de ahí, } \|G_k\|_H < \frac{1}{k}\|(i\lambda_k I - A)^{-1} G_k\|_H.$$

(iii) Tomamos $U_k = \dfrac{(i\lambda_k I - A)^{-1} G_k}{\|(i\lambda_k I - A)^{-1} G_k\|_H}, \forall k \in \mathbb{N}$.
(iv) Tomamos $F_k = \dfrac{G_k}{\|(i\lambda_k I - A)^{-1} G_k\|_H}$,
donde $\|F_k\|_H < \dfrac{1}{k}, \forall k \in \mathbb{N}$.
Así existen $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sucesiones de $\mathbb{R}$, $D(A)$ y H respectivamente, que cumplen lo pedido, siendo $(i\lambda_k I - A)U_k = F_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.5.14 (Hille-Yosida)

Un operador lineal A, no acotado, definido en $D(A) \subset X$ y con valores en X, es un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 si, y solamente si,
i) A es un operador cerrado y $\overline{D(A)} = X$.
ii) $\mathbb{R}^+ \subset \rho(A)$ y $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\lambda}, \forall \lambda > 0$.
Demostración: Ver [21].

Otra caracterización de los generadores infinitesimales de semigrupos de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 es dada en el teorema Lummer-Phillips. Para ello, introduciremos el concepto de operador disipativo.

Definición 2.5.15

Sea $(H, \|.\|_H)$ un espacio de Hilbert. Diremos que el operador lineal
$A : D(A) \subset H \to H$ es disipativo si $Re\langle Ax, x\rangle_H \leq 0$, $\forall x \in D(A)$.

Teorema 2.5.16

Sea H un espacio de Hilbert y $A : D(A) \subset H \to H$ un operador lineal disipativo.
i) Si $Im(\lambda_0 I - A) = H$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces $Im(\lambda I - A) = H$, para todo $\lambda > 0$.
ii) Si $Im(I - A) = H$, entonces $\overline{D(A)} = H$
Demostración: Ver [25].

Teorema 2.5.17(Lummer-Phillips)

Sea A un operador lineal con dominio denso $D(A)$ en un espacio de Hilbert H.
i) Si A es disipativo y existe un $\lambda_0 > 0$ tal que $Im(\lambda_0 I - A) = H$,entonces A es un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 sobre H.
ii) Si A es un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 sobre H, entonces $Im(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ y A es disipativo.
Demostración: Ver [21].

Corolario 2.5.18

Sea A un operador lineal disipativo con dominio $D(A)$ denso en el espacio de Hilbert H. Si $0 \in \rho(A)$, entonces A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0.
Demostración: Por hipótesis $0 \in \rho(A)$, por tanto existe y es acotado el operador A^{-1}. Del Lema 2.5.11, tenemos que $\lambda I - A$ es invertible para $0 < \lambda < \|A^{-1}\|^{-1}$. Luego usando el Teorema de Lummer Phillips, se sigue que A es un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0, sobre H.

Teorema 2.5.19

Si $A : D(A) \subset X \to X$ es un generador infinitesimal de un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 sobre X entonces, para cada $U_0 \in D(A)$ el problema de Cauchy abstracto

$$\begin{cases} U_t &= AU, \, t > 0 \\ U(0) &= U_0 \end{cases}$$

tiene una única solución U satisfaciendo

$$U \in \mathrm{C}([0, \infty), D(A)) \cap \mathrm{C}^1([0, \infty), X).$$

Demostración: Ver [31].

2.6. Estabilidad

A continuación, presentamos algunos conceptos y resultados de estabilidad.

Definición 2.6.1

Un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable si existen constantes $\alpha > 0$ y $M \geq 1$ tales que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\alpha t}, \forall t \geq 0.$$

El siguiente teorema, debido a J. Prüss [16], caracteriza la estabilidad exponencial de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 y este resultado se usará en el trabajo para investigar el decaimiento exponencial.

Teorema 2.6.2 (Prüss)

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de contracciones de clase C_0 definida en un espacio de Hilbert H y A su generador infinitesimal. Entonces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable si, y solamente si,

$$i\mathbb{R} \equiv \{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \subset \rho(A)$$

y

$$\exists C > 0 \text{ tal que } \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C \ , \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Ver [16] y [21].

Observación 2.6.3

Si $\phi(t) \to 0$ y $\|S(t)x\|_H \leq \phi(t)\|x\|_H, \forall x \in D(A)$, entonces $S(t)$ es exponencialmente estable.

Para semigrupos que no decaen exponencialmente, podemos analizar el decaimiento del tipo polinomial.

Definición 2.6.4

Un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre un espacio de Hilbert H, es polinomialmente estable si existen constantes $C > 0$ y $\gamma > 0$ tales que

$$\|S(t)x\|_H \leq \frac{C}{t^\gamma}\|x\|_{D(A)}, \forall x \in D(A).$$

Nosotros probaremos el decaimiento polinomial usando la técnica de desigualdades diferenciales, para ello usaremos resultados que mencionaremos a continuación.

Teorema 2.6.5 (Prüss-Decaimiento Polinomial)

Sea A generador infinitesimal de un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 uniformemente acotado, donde $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y α real positivo.
Si $\|(i\lambda I - A)^{-1}A^{-\alpha}\| \leq C, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ entonces $\forall \epsilon > 0, \exists C_\epsilon > 0, \|S(t)A^{-\alpha-\epsilon}\| \leq \dfrac{C_\epsilon}{t}$.
Recíprocamente,
Si $\|S(t)A^{-\alpha}\| \leq \dfrac{C}{t}$ entonces $\forall \epsilon > 0$, $\exists C_\epsilon > 0$, $\|(\lambda I - A)^{-1}A^{-\alpha-\epsilon}\| \leq C_\epsilon, \forall Re\lambda \geq 0$.
Demostración: Ver [21].

El próximo teorema de A.Borichev and Y.Tomilov [4], caracteriza la estabilidad polinomial de semigrupos $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0 acotados sobre espacios de Hilbert.

Teorema 2.6.6

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo de clase C_0 con generador infinitesimal A, acotado sobre un espacio de Hilbert H tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Entonces, para $\alpha > 0$ fijado, las siguientes condiciones son equivalentes:
I) $\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = O(|\lambda|^\alpha), \lambda \to \infty$
II) $\|S(t)A^{-1}\|_H = O(t^{-1/\alpha}), t \to \infty$
Demostración: Ver [4].

Definición 2.6.7

Sea X un espacio de Hilbert.
Diremos que $A \in G(X, M, \omega)$ si A es un generador infinitesimal de un semigrupo de operadores lineales $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ acotados de clase C_0, satisfaciendo la condición $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, t \geq 0$.

Proposición 2.6.8

Supongamos que $A \in G(X, M, 0)$ y que A es invertible.
Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes, con $\alpha > 0$:
i) $\|S(t)A^{-\alpha}\|_X \leq \dfrac{C}{t}, t > 0$,
ii) $\|S(t)A^{-\alpha\gamma}\|_X \leq \dfrac{C'(\gamma)}{t^\gamma}, t > 0$, para algún/todo $\gamma > 0$.
Demostración: Ver [22] y [27].

Capítulo 3

Existencia y Unicidad

En este capítulo vamos a reformular el sistema (1.5)-(1.7) como un problema de Cauchy abstracto, para luego demostrar que admite una única solución. Primero determinaremos la energía asociada al sistema reformulado (1.9)-(1.11), luego la existencia del semigrupo asociado al sistema (1.9)-(1.11) y, por último, que el operador definido es un generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de clase C_0.

3.1. La energía del sistema

Para facilitar nuestro análisis consideraremos las siguientes condiciones frontera:

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \eta^t(0,s) = \eta^t(L,s) = 0, s, t \geqslant 0 \tag{3.1}$$

La energía asociada al sistema (1.9)-(1.11) con las condiciones de frontera (3.1) y las hipótesis sobre el núcleo g,(1.14)-(1.15) es dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \tilde{b}|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 + \int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds]dx \tag{3.2}$$

En efecto:
Considerando el multiplicador de primer orden, φ_t,ψ_t en (1.9) y (1.10) respectivamente e integrando sobre [0,L], esto es

$$\begin{cases} \int_0^L \rho_1\varphi_{tt}\varphi_t dx - \int_0^L k(\varphi_x + \psi)_x\varphi_t dx = 0 \\ \int_0^L \rho_2\psi_{tt}\psi_t dx - \int_0^L \tilde{b}\psi_{xx}\psi_t dx - \int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x,s)ds)\psi_t dx + \int_0^L k(\varphi_x + \psi)\psi_t dx = 0 \end{cases}$$

Luego integrando por partes adecuadamente, tenemos

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\int_0^L \rho_1|\varphi_t|^2 dx + \int_0^L k(\varphi_x + \psi)\varphi_{xt} dx = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}\int_0^L \rho_2|\psi_t|^2 dx + \int_0^L \tilde{b}\psi_x\psi_{xt} dx + \int_0^L (\int_0^\infty g(s)(\psi_t)_x n_x ds)dx + \int_0^L k(\varphi_x + \psi)\psi_t dx = 0 \end{cases}$$

Sumando estas dos expresiones precedentes y de las condiciones de frontera (3.1), se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1|\varphi_t|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2|\psi_t|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L \tilde{b}|\psi_x|^2dx + \int_0^L k(\varphi_x+\psi)\varphi_{xt}dx$$

$$+k\int_0^L(\varphi_x+\psi)\psi_t dx + \int_0^L(\int_0^\infty g(s)(n_t+n_s)_x n_x ds)dx = 0$$

Luego

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L[\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \tilde{b}|\psi_x|^2 + k|\varphi_x+\psi|^2]dx$$

$$+\int_0^L(\int_0^\infty g(s)n_{xt}n_x ds + \int_0^\infty g(s)n_{sx}n_x ds)dx = 0$$

Así obtenemos

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L[\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \tilde{b}|\psi_x|^2 + k|\varphi_x+\psi|^2 + \int_0^\infty g(s)|n_x|^2ds]dx}_{:=E(t)}$$

$$= -\int_0^L(\int_0^\infty g(s)n_{sx}n_x ds)dx$$

Así definimos la energía asociada al sistema

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L[\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \tilde{b}|\psi_x|^2 + k|\varphi_x+\psi|^2 + \int_0^\infty g(s)|n_x|^2ds]dx.$$

Además,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\int_0^L(\int_0^\infty g(s)n_{sx}n_x ds)dx = \frac{1}{2}\int_0^L(\int_0^\infty g'(s)n_x^2 ds)dx. \tag{3.3}$$

3.2. Existencia del Semigrupo

Para demostrar la existencia de soluciones, usaremos la teoría de semigrupos. Para tal se redefine el modelo inicial como un sistema de primer orden en el tiempo.
Sea $U := (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, n^t)'$, donde la tilde es usada para definir el operador transpuesto, así que, el sistema (1.9)-(1.11) es equivalente al problema de Cauchy abstracto,

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

donde $U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \eta_0)'$
y A es el operador diferencial asociado al sistema (1.9)-(1.11) dado por

$$A := \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1}\partial_x^2 & 0 & \frac{k}{\rho_1}\partial_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2}\partial_x & 0 & (\frac{\tilde{b}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2}I) & 0 & \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\partial_x^2(.,s)ds \\ 0 & 0 & 0 & I & -\partial_s \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Se introduce a partir de la energía, el espacio de fase, denotado por

$$H := H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1) \tag{3.5}$$

donde $L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1) = \{f : \mathbb{R}^+ \to H_0^1; \int_0^L (\int_0^\infty g(s)|f_x(s)|^2 ds)dx < \infty\}$
con producto interno $< \varphi, \psi >_{L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)} := \int_0^L \int_0^\infty g(s)\varphi_x(s)\psi_x(s)dsdx$
Por otro lado, definimos el producto interno en H

$$\begin{aligned} < U, V >_H = & < (u^1, u^2, u^3, u^4, \eta^1), (v^1, v^2, v^3, v^4, \eta^2) >_H \\ = & \rho_1 < u^2, v^2 >_{L^2} + \rho_2 < u^4, v^4 >_{L^2} + \tilde{b} < u_x^3, v_x^3 >_{L^2} + k < u_x^1 + u^3, v_x^1 + v^3 >_{L^2} \\ & + < n^1, n^2 >_{L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)} \end{aligned}$$

De aquí se define la norma como

$$\begin{aligned} \|U\|_H^2 &= \|(u^1, u^2, u^3, u^4, \eta)\|_H^2 \\ &= \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 + \tilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \|\eta\|_{L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)}^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Observamos que con esta norma el espacio H es un espacio de Hilbert.
Para definir completamente el operador A, necesitamos definir su dominio. Formalmente, el dominio de un operador es definido como un conjunto sobre el cual el operador está bien definido (espacio de fase) esto es,

$$D(A) = \{U \in H; AU \in H\}$$

Luego tenemos

$$AU = \begin{pmatrix} \varphi_t \\ \frac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{k}{\rho_1}\psi_x \\ \psi_t \\ -\frac{k}{\rho_2}\varphi_x + \frac{\tilde{b}}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}\psi + \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x, s)ds \\ \psi_t - \eta_s \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } AU \in H, \text{ tenemos} \begin{cases} \varphi_t \in H_0^1 \\ (\frac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{k}{\rho_1}\psi_x) \in L^2 \\ \psi_t \in H_0^1 \\ (-\frac{k}{\rho_2}\varphi_x + \frac{\tilde{b}}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}\psi + \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x, s)ds) \in L^2 \\ (\psi_t - \eta_s) \in L_g^2 \end{cases}$$

Luego el operador $A : D(A) \subset H \to H$ tiene el siguiente dominio
$D(A) = \{U = (u^1, u^2, u^3, u^4, \eta)' \in H : u^1 \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), u^2 \in H_0^1(0, L),$
$u^3 \in H_0^1(0, L), u^4 \in H_0^1(0, L), (\tilde{b}u_{xx}^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x, s)ds) \in L^2(0, L),$
$\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1), \eta(0) = 0\}$.

Lema 3.2.1

Supongamos que "g" satisface (1.14)-(1.15). Entonces para todo $\omega \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)$, $\omega_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)$, $\omega(0) = 0$, tenemos $\lim_{s\to\infty} g(s)\|\omega_x(s)\|_{L^2}^2 = 0$.
Demostracion:
Hacemos $F(s) = g(s)\|\omega_x(s)\|_{L^2}^2$
Se demuestra que $F \in L^1(0, \infty)$ y $F' \in L^1(0, \infty)$, luego $F \in W^{1,p}(0, \infty)$, usando el corolario 2.4.15 obtenemos $\lim_{s\to\infty} g(s)\|\omega_x(s)\|_{L^2}^2 = 0$.

A continuación, demostraremos que el operador A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones. Para ello emplearemos el corolario 2.5.18, que establece que todo operador lineal disipativo con dominio denso es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0, si el 0 pertenece al resolvente del operador A.

Teorema 3.2.2

El operador A dado en (3.4) es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0.

Demostración:

La linealidad del operador A es inmediata. Resta verificar que A es disipativo, que $0 \in \rho(A)$ y que $D(A)$ es denso en H.

Afirmación 1: El operador A es disipativo, es decir, $Re < AU, U >_H \leq 0$.

En efecto, sea $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \eta^t)' \in D(A)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
< AU, U >_H =& \rho_1 \int_0^L (\frac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} + \frac{k}{\rho_1}\psi_x)\varphi_t dx \\
&+ \rho_2 \int_0^L (-\frac{k}{\rho_2}\varphi_x + \frac{\tilde{b}}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}\psi + \frac{1}{\rho_2}\int_0^\infty g(s)\eta_{xx} ds)\psi_t dx \\
&+ \tilde{b}\int_0^L (\frac{\partial}{\partial x}\psi_t)\psi_x dx + k\int_0^L (\frac{\partial}{\partial x}\varphi_t + \psi_t)(\varphi_x + \psi) dx \\
&+ \int_0^L \int_0^\infty g(s)\frac{\partial}{\partial x}(\psi_t - \eta_s)\eta_x ds dx \\
=& \int_0^L k\varphi_{xx}\varphi_t dx + k\int_0^L \psi_x\varphi_t dx - k\int_0^L \varphi_x\psi_t dx + \tilde{b}\int_0^L \psi_{xx}\psi_t dx \\
&- k\int_0^L \psi\psi_t dx + \int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_{xx} ds)\psi_t dx + \tilde{b}\int_0^L (\psi_t)_x\psi_x dx \\
&+ k\int_0^L (\varphi_t)_x\varphi_x dx + k\int_0^L (\varphi_t)_x\psi dx + k\int_0^L \psi_t\varphi_x dx \\
&+ k\int_0^L \psi_t\psi dx + \int_0^\infty g(s)(\eta_t)_x\eta_x ds) dx
\end{aligned}
$$

Aplicando integración por partes y condición frontera, resulta que

$$
\begin{aligned}
< AU, U >_H &= \int_0^L \int_0^\infty g(s)(\eta_t)_x\eta_x ds dx - \int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x(\psi_t)_x ds dx \\
&= -\int_0^L \int_0^\infty g(s)(\eta_s)_x\eta_x ds dx \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, usando Lema 3.2.1 y $\eta_x(x, 0) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g(s)n_x(n_s)_x ds &= \lim_{r\to\infty}\int_0^r g(s)n_x\frac{d}{ds}(\eta_x)\\ &= \lim_{r\to\infty}[g(s)n_x^2|_0^r - \int_0^r \eta_x\frac{d}{ds}[g(s)\eta_x]\\ &= -\int_0^\infty g'(s)\eta_x^2 ds - \int_0^\infty g(s)n_x(\eta_s)_x ds\end{aligned}$$

Luego obtenemos

$$\int_0^\infty g(s)n_x(n_s)_x ds = -\frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)|\eta_x^2|ds \tag{3.8}$$

Reemplazando (3.8) en (3.7) obtenemos

$$< AU, U >_H = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g'(s)|n_x|^2 dsdx$$

Tomando la parte real y las hipótesis sobre g, tenemos:

$$\begin{aligned}Re < AU, U > &= \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g'(s)|\eta_x|^2 dsdx\\ &\leq -\frac{1}{2}k_1\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2 dsdx\\ &\leq 0\end{aligned}$$

Afirmación 2: El operador A es invertible
Queremos probar que dado $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5) \in H$, existe un único $U = (u^1, u^2, u^3, u^4, \eta)' \in D(A)$ tal que $AU = F$.
En efecto, para $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5) \in H$ en la ecuación $AU = F$ en términos de sus componentes, tenemos:

$$u^2 = f^1 \in H_0^1 \tag{3.9}$$

$$ku_{xx}^1 + ku_x^3 = \rho_1 f^2 \in L^2 \tag{3.10}$$

$$u^4 = f^3 \in H_0^1 \tag{3.11}$$

$$\tilde{b}u_{xx}^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx} ds - k(u_x^1 + u^3) = \rho_2 f^4 \in L^2 \tag{3.12}$$

$$u^4 - \eta_s = f^5 \in L_g^2 \tag{3.13}$$

De (3.9) y (3.11) obtenemos un único $u^2 \in H_0^1(0,L)$ y $u^4 \in H_0^1(0,L)$ respectivamente.
Reemplazando (3.11) en (3.13), tenemos

$\eta_s = f^3 - f^5$

y como $\eta(x,0) = 0$, resulta

$$\eta(x,s) = sf^3 - \int_0^s f^5(y)dy \tag{3.14}$$

Afirmamos que, $\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)$, pues

$$\begin{aligned}
\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|n_{xs}|^2 ds)dx &\leq \int_0^L (\int_0^\infty g(s)|f_x^3 - f_x^5|^2 ds)dx \\
&\leq \int_0^L (\int_0^\infty g(s)(|f_x^3| + |f_x^5|)^2 ds)dx \\
&\leq 4\int_0^L \int_0^\infty g(s)(|f_x^3|^2 + |f_x^5|^2)dsdx \\
&\leq 4b_0\|f_x^3\|_{L^2}^2 + 4\|f^5\|_{L_g^2}^2
\end{aligned}$$

Como $f^3 \in H_0^1(0;L)$ y $f^5 \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)$, resulta que $\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_{xs}|^2 ds)dx$ es convergente y por ende $\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)$.

A continuación demostraremos que $\eta \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L))$.
Usando (1.14), integración por partes, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad de Young y tomando $R > 0$, tenemos

$$\int_0^R g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2}\int_0^R g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2 ds + \frac{2}{k_1^2}\int_0^R g(s)\|\eta_{sx}\|_{L^2}^2 ds.$$

Luego, haciendo $R \to \infty$, tenemos

$$\int_0^\infty g(s)\|\eta_x\|_{L^2}^2 ds \leq 2C\int_0^\infty g(s)\|\eta_{sx}^2\|_{L^2} ds, C = \frac{2}{k_1^2}$$

Como $\eta_s \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L))$, concluimos que $\eta \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L))$.

Ahora queremos demostrar la existencia y unicidad de $u^1 \in H_0^1(0,L)$
y $u^3 \in H_0^1(0,L)$.
Reemplazando (3.14) en (3.12), el sistema (3.9)-(3.13), puede ser reescrito como

$$u^2 = f^1 \tag{3.15}$$

$$k(u_x^1 + u^3)_x = \rho_1 f^2 \tag{3.16}$$

$$\tilde{b}u^3_{xx} - k(u^1_x + u^3) = \rho_2 f^4 + \int_0^\infty g(s)(\int_0^s f^5_{xx}(x,\tau)d\tau - sf^3_{xx})dx \tag{3.17}$$

Como no hay métodos para resolver puntualmente el sistema anterior, pasamos a su formulación débil o formulación variacional. Multiplicamos (3.16) po $\overline{\omega^1} \in H^1_0$ y (3.17) por $\overline{\omega^3} \in H^1_0$, en $L^2(0,L)$, tenemos

$$\begin{cases} k\int_0^L (u^1_x + u^3)_x \overline{\omega^1}dx = \rho_1 \int_0^L f^2\overline{w^1}dx \\ \tilde{b}\int_0^L u^3_{xx}\overline{w^3}dx - k\int_0^L (u^1_x + u^3)\overline{w^3}dx = \rho_2 \int_0^L f^4\overline{w^3}dx - \int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}ds)\overline{\omega^3}dx \end{cases}$$

Usando integración por partes (para tener linealidad) en el sistema anterior, tenemos

$$\begin{aligned} k\int_0^L (u^1_x + u^3)(\overline{\omega^1_x + \omega^3})dx + \tilde{b}\int_0^L u^3_x\overline{\omega^3_x}dx = &- \rho_1 \int_0^L f^2\overline{\omega^1}dx - \rho_2 \int_0^L f^4\overline{\omega^3}dx \\ &- \int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_x ds)\overline{\omega^3_x}dx \end{aligned} \tag{3.18}$$

Consideramos el espacio $H_1 = H^1_0(0,L) \times H^1_0(0,L)$
con la norma dada por $\|(u^1,u^3)\|^2_1 = \|u^1\|^2_{H^1_0(0,L)} + \|u^3\|^2_{H^1_0(0,L)}$
es un espacio de Hilbert. Por otra parte, es fácil ver que H_1 con la norma dada por

$$\|(u^1,u^3)\|^2_2 = k\|u^1_x + u^3\|^2_{L^2} + \tilde{b}\|u^3_x\|^2_{L^2}$$

es un espacio de Hilbert. Se demuestra que las dos normas anteriores son equivalentes.

Definimos la forma sesquilineal

$$a : H_1 \times H_1 \to \mathbb{C}$$

dada por la parte izquierda de (3.18)

$$a((u^1,u^3),(\omega^1,\omega^3)) = k\int_0^L (u^1_x + u^3)(\overline{\omega^1_x + \omega^3}dx + \tilde{b}\int_0^L u^3_x\overline{\omega^3_x}dx$$

y cumple lo siguiente
i) $a(.,.)$ es coerciva:

$$\begin{aligned} a((u^1,u^3),(u^1,u^3)) =& k\|u^1_x + u^3\|^2_{L^2} + \tilde{b}\|u^3_x\|^2_{L^2} \\ =& \|(u^1,u^3)\|^2_{H_1} \end{aligned}$$

ii) $a(.,.)$ es continua:

$$\begin{aligned} |a((u^1,u^3),(\omega^1,\omega^3))| \leq& \tilde{b}\|u^3_x\|_{L^2}\|\omega^3_x\|_{L^2} + k\|u^1_x + u^3\|_{L^2}\|\omega^1_x + \omega^3\|_{L^2} \\ \leq& C_1[k\|u^1_x + u^3\|^2_{L^2} + \tilde{b}\|u^3_x\|^2_{L^2}]^{1/2}[\tilde{b}\|\omega^3_x\|^2_{L^2} + k\|\omega^1_x + \omega^3\|^2_{L^2}]^{1/2} \\ \leq& C_1\|(u^1,u^3)\|_{H_1}\|(\omega^1,\omega^3)\|_{H_1}. \end{aligned}$$

Enseguida, se define el funcional

$$T : H_1 \to \mathbb{C}$$

dada por la parte derecha de (3.18)

$$T(\varphi^1,\varphi^2) = -\rho_1\int_0^L f^2\overline{\varphi^1}dx - \rho_2\int_0^L f^4\overline{\varphi^2}dx - \int_0^\infty g(s)(\int_0^L \eta_x^t\overline{\varphi_x^2}dx)ds$$

y cumple lo siguiente.

i) T es lineal, se sigue directamente de la linealidad del producto interno.

ii) T es continua:
Sea $\omega = (\varphi^1,\varphi^2)$,

$$\begin{aligned}
|T(\omega)| &\leq \rho_1\|f^2\|_{L^2}\|\varphi^1\|_{L^2} + \rho_2\|f^4\|_{L^2}\|\varphi^2\|_{L^2} + \int_0^\infty g(s)(\|\eta_x^t\|_{L^2}\|\varphi_x^2\|_{L^2})ds \\
&\leq C_1\|\varphi^1\|_{L^2} + C_1\|\varphi^2\|_{L^2} + \|\varphi_x^2\|_{L^2}(\int_0^\infty g(s)ds)^{1/2}(\int_0^\infty g(s)\|\eta_x^t\|_{L^2}^2 ds)^{1/2} \\
&\leq C_1\|\varphi^1\|_{L^2} + C_1\|\varphi^2\|_{L^2} + \sqrt{b_0}\|\eta\|_{L_g^2}\|\varphi_x^2\|_{L^2} \\
&\leq C_p\|\varphi_x^1\|_{L^2} + C_p\|\varphi_x^2\|_{L^2} + C_2\|\varphi_x^2\|_{L^2} \\
&\leq C_3(\|\varphi^1\|_{H_0^1} + \|\varphi^2\|_{H_0^1})
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
|T(\omega)|^2 &\leq C_4(\|\varphi^1\|_{H_0^1} + \|\varphi^2\|_{H_0^1})^2 \\
&\leq 4C_4(\|\varphi^1\|_{H_0^1}^2 + \|\varphi^2\|_{H_0^1}^2) \\
&\leq C_5\|(\varphi^1,\varphi^2)\|_{H_1}
\end{aligned}$$

Asi, $|T(\omega)| \leq C\|(\varphi^1,\varphi^2)\|_{H_1}$
Luego por el Teorema 2.1.17 , existe un único par $(u^1,u^3) \in H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$ tal que $a((u^1,u^3),(\varphi^1,\varphi^2)) = T(\varphi^1,\varphi^2)$, $\forall(\varphi^1,\varphi^2) \in H_0^1(0,L)\times H_0^1(0,L)$.

De (3.10), tenemos

$$k(u_x^1 + u^3)_x = \rho_1 f^2 \in L^2(0,L)$$

Como $u_x^3 \in L^2(0,L)$ (pues $u^3 \in H_1^0(0,L)$), en la expresión anterior, resulta que, $u_{xx}^1 \in L^2(0,L)$, es decir $u^1 \in H^2(0,L)$.

Por otro lado como f^4 en $L^2(0,L)$, $u^3 \in H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$ y $u_x^1 \in L^2(0,L)$, en (3.12), tenemos

$$\tilde{b}u_{xx}^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t ds = \rho_2 f^4 + k(u_x^1 + u^3) \in L^2(0,L)$$

es decir,

$$(\tilde{b}u^3 + \int_0^\infty g(s)\eta^t ds)_{xx} \in L^2(0,L).$$

Por lo tanto, se obtiene un único $U = (u^1, u^2, u^3, u^4, \eta)' \in D(A)$,tal que $AU = F$, es decir el operador A tiene inversa.

Afirmación 3: El operador $A^{-1} : H \to D(A)$ es acotado.
Dado $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5) \in H$, existe $U = (u^1, u^2, u^3, u^4, \eta) \in D(A)$ tal que $AU = F$.
Luego tenemos

$$u^2 = f^1 \tag{3.19}$$

$$k(u_x^1 + u^3)_x = \rho_1 f^2 \tag{3.20}$$

$$u^4 = f^3 \tag{3.21}$$

$$-ku_x^1 + \tilde{b}u_{xx}^3 - ku^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}ds = \rho_2 f^4 \tag{3.22}$$

$$u^4 - n_s = f^5 \tag{3.23}$$

Multiplicando (3.20) por $\overline{u^1}$, (3.22) por $\overline{u^3}$ en $\text{Ł}^2(0, L)$, integrando por partes cada una de las dos ecuaciones resultantes y sumando miembro a miembro se concluye que

$$k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \tilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 = -\rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1}dx - \rho_2 \int_0^L f^4\overline{u^3}dx - \int_0^L \int_0^\infty g(s)n_x\overline{u_x^3}dsdx$$

En la expresión anterior, usando la desigualdad triangular y la desigualdad de Holder, se tiene

$$k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \tilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 \leq C_1\|U\|_H\|F\|_H + |\int_0^L \int_0^\infty g(s)n_x\overline{u_x^3}|dsdx$$

De (3.19) y (3.21) se deduce que

$$\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 \leq C_2\|F\|_H^2$$

donde $\mathrm{C}_2 = max\{\rho_1, \rho_2\}$.
Utilizando (1.14) y la desigualdad de Cauchy Schwarz se tiene

$\frac{k_1}{2}\|\eta\|_{L^2g}^2 \leq \|F\|_H\|U\|_H$.

Usando las desigualdades de Holder y triangular se obtiene

$$|-\rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1}dx - \rho_2 \int_0^L f^4\overline{u^3}dx| \leq C_3\|F\|_H\|U\|_H$$

De las desigualdades de Holder y Young, obtenemos

$|\int_0^L \int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^3}dsdx| \leq \frac{\tilde{b}}{2}\|u_x^3\|_H^2 + C_4\|\eta\|_{L_g^2}^2$, para alguna constante positiva C_4.

Luego existe una constante positiva C_5, tal que

$$\frac{1}{2}\|U\|_H^2 \leq C_5\|F\|_H^2 + C_5\|F\|_H\|U\|_H$$

Aplicando la desigualdad de Young en la última parte, se sigue que existe una constante positiva C tal que:

$$\|A^{-1}F\|_H = \|U\|_H \leq C\|F\|_H.$$

Así de las afirmaciones 2 y 3, obtenemos que $0 \in \rho(A)$.

Afirmación 4: El espacio $D(A)$ es denso en H.
Sabemos que $\lambda_0 I - A = A(\lambda_0 A^{-1} - I)$, pues es la composición de los operadores $A : D(A) \to H$ y $(\lambda_0 A^{-1} - I) : D(A) \to D(A)$,donde $\lambda_0 I - A : D(A) \to H$. Como A^{-1} es acotado, por el lema 2.5.11, tomando $B = \lambda_0 A^{-1}$ y $S = -I$, para $|\lambda_0| < 1/\|A^{-1}\|$, tenemos que $(\lambda_0 A^{-1} - I)$ es invertible, por lo tanto $\lambda_0 I - A$ es también invertible, por ser una composición de operadores invertibles. Luego $\lambda_0 I - A$ es sobreyectivo, para $\lambda_0 > 0$, en particular para $\lambda_0 = 1$. Como A es disipativo y H es de Hilbert se sigue del teorema 2.5.16 parte ii) que $D(A)$ es denso en H.

Luego de las afirmaciones demostradas, se sigue del Corolario 2.5.18 que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C_0.

Teorema 3.2.3 (Existencia y unicidad)

Sea g el núcleo que satisface las ecuaciones (1.14)-(1.15) y $U_0 \in D(A)$. Entonces existe una única solución $U = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, \eta)$ del sistema (1.9)-(1.11) con condiciones frontera (3.1) satisfaciendo $U \in C(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H)$.
Más aún, si $U_0 \in D(A^n)$ entonces $U \in C^{n-k}(\mathbb{R}^+; D(A^k)), k = 0, 1, \ldots, n$.
Demostración: El sistema (1.9)-(1.11) es equivalente al P.V.I.

$$\begin{cases} U_t = AU \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{3.24}$$

Como $U_0 \in D(A)$ y A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de clase C$_0$, entonces por el teorema 2.5.19, se concluye que existe una única solución $U(t) = S(t)U_0$ del problema de valor inicial (3.24), satisfaciendo $U \in C(\mathbb{R}^+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H)$.
Finalmente, si $U_0 \in D(A^n)$, por la proposición 2.5.9, obtenemos $U \in C^{n-k}(\mathbb{R}^+, D(A^k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Capítulo 4

Estabilidad Exponencial

Primero, consideraremos el sistema (1.9)-(1.11) con condiciones frontera (3.1) y las hipótesis sobre el núcleo g, (1.14)-(1.15) se cumplan.
Demostraremos que la energía

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L [\rho_1|\varphi_t|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \tilde{b}|\psi_x|^2 + k|\varphi_x + \psi|^2 + \int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds]dx \tag{4.1}$$

decae exponencialmente a cero a medida que el tiempo crece indefinidamente, siempre que la condición (1.16) se cumpla. Para ello, usaremos los resultados de Prüss [16] que indica que un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es exponencialmente estable si, y solo si, las siguientes condiciones se verifican:

a)
$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \text{ (conjunto resolvente)} \tag{4.2}$$

y

b)
$$\exists C > 0, \forall U \in D(A), \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq C \tag{4.3}$$

Para ello, usaremos la ecuación resolvente.
Dado $U = (u^1, u^2, u^3, u^4, \eta) \in D(A)$ y $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5) \in H$, observe que la ecuación resolvente $(i\lambda I - A)U = F$, es dada por:

$$i\lambda u^1 - u^2 = f^1 \tag{4.4}$$

$$i\lambda\rho_1 u^2 - k(u_x^1 + u^3)_x = \rho_1 f^2 \tag{4.5}$$

$$i\lambda u^3 - u^4 = f^3 \tag{4.6}$$

$$i\lambda\rho_2 u^4 - \tilde{b}u_{xx}^3 - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x,s)ds + k(u_x^1 + u^3) = \rho_2 f^4 \tag{4.7}$$

$$i\lambda\eta + \eta_s - u^4 = f^5 \tag{4.8}$$

donde

$$b_0 := \int_0^\infty g(s)ds,\ \tilde{b} := b - b_0 > 0 \tag{4.9}$$

A continuación, probaremos la condición (4.2) y para probar la condición (4.3) usaremos una serie de lemas.

Lema 4.1

Sea A definido por (3.4) y las hipótesis (1.14) y (1.15) sobre el núcleo g se verifican. Entonces el conjunto $i\mathbb{R} = \{i\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ esta contenido en $\rho(A)$.
Demostración:
Supongamos que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ no es verdadero. Entonces del corolario 2.5.13 existen $\omega \in \mathbb{R}$, una sucesión $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ con $\beta_n \to \omega$, $|\beta_n| < |\omega|$, una sucesión de funciones $U_n = (u_n^1, u_n^2, u_n^3, u_n^4, u_n^5) \in D(A)$ con $\|U_n\|_H = 1$ y una sucesión de funciones $F_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5) \in H$ tal que $F_n \to 0$ siendo $(i\beta_n I - A)U_n = F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Para este lema, en las ecuaciones (4.4)-(4.8), tomamos $U_n = U$, $F_n = F$ y hacemos $\lambda = \beta_n$.
Afirmación 1: $u_n^5 \to 0$ en $L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1(0,L))$.
De la expresión anterior, tenemos $\langle (i\beta_n I - A)U_n, U_n\rangle_H = \langle F_n, U_n\rangle_H$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
En la expresion anterior,tomando la parte real y las hipótesis sobre g tenemos

$$\begin{aligned}\frac{k_1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g(s)|u_{nx}^5|^2 dsdx \leq -\frac{1}{2}\int_0^L\int_0^\infty g'(s)|u_{nx}^5|^2 dsdx = Re\langle F_n, U_n\rangle_H \\ \leq |\langle F_n, U_n\rangle|,\ \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Como $F_n \to 0$ en H y $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, resulta que $\langle F_n, U_n\rangle \to 0$, cuando $n \to \infty$. Luego, tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^L\int_0^\infty g(s)|u_{nx}^5|^2 dsdx = 0$, es decir $\|u_n^5\|_{L_g^2} \to 0$
Así obtenemos

$$u_n^5 \to 0 \text{ en } L_g^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(0,L)) \tag{4.10}$$

Afirmación 2: $u_n^4 \to 0$ en $H_0^1(0,L)$
En (4.8), derivamos la expresión con respecto a x, luego multiplicando por $\int_0^L\int_0^\infty g(s)u_{nx}^4 dsdx$ y usando las desigualdades de Holder y Young, obtenemos

$$\|u_{nx}^4\|_{L^2}^2 \leq C\|u_n^5\|_{L_g^2}^2 + C\|f_n^5\|_{L_g^2}^2$$

Como $F_n \to 0$ y de (4.10), por la equivalencia de normas, obtenemos:

$$u_n^4 \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L) \tag{4.11}$$

Afirmación 3: $u_{nx}^3 \to 0$ en $L^2(0,L)$.
Haciendo $n \to \infty$ y usando (4.11) en (4.6), obtenemos

$$u_n^3 \to 0 \text{ en } H_0^1(0,L) \tag{4.12}$$

Así por la equivalencia de normas, $u_{nx}^3 \to 0$ en $L^2(0,L)$.
Afirmación 4: $u_{nx}^1 + u_n^3 \to 0$ en $L^2(0,L)$

En (4.7) multiplicamos por $\overline{(u_{nx}^1 + u_n^3)}$ en $L^2(0,L)$ y realizando integración por partes tenemos

$$
\begin{aligned}
k\int_0^L |u_{nx}^1+u_n^3|^2dx = & -i\beta_n\rho_2\int_0^L u_n^4(\overline{u_{nx}^1+u_n^3})dx-\tilde{b}\int_0^L u_{nx}^3(\overline{u_{nx}^1+u_n^3})_x dx\\
& -\int_0^\infty g(s)\int_0^L u_{nx}^5(\overline{u_{n_x}^1+u_n^3})_x dxds+\rho_2\int_0^L f_n^4(\overline{u_{nx}^1+u_n^3})dx\\
& +[(\tilde{b}u_{nx}^3+\int_0^\infty g(s)u_{nx}^5ds)u_{nx}^1]\begin{matrix}x=L\\x=0\end{matrix}
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Luego, sustituyendo $(u_{nx}^1+u_n^3)_x$ dado en (4.5), en (4.13), tenemos

$$
\begin{aligned}
k\int_0^L |u_{nx}^1+u_n^3|^2dx = & -i\beta_n\rho_2\int_0^L u_n^4(\overline{u_{nx}^1+u_n^3})dx+\frac{\tilde{b}}{k}\int_0^L u_{nx}^3(\overline{\rho_1 f^2-i\beta_n\rho_1u_n^2})dx\\
& +\frac{1}{k}\int_0^\infty g(s)\int_0^L u_{nx}^5(\overline{\rho_1 f_n^2-i\beta_n\rho_1u_n^2})dxds+\rho_2\int_0^L f_n^4(\overline{u_{nx}^1+u_n^3})dx\\
& \underbrace{+[(\tilde{b}u_{nx}^3+\int_0^\infty g(s)u_{nx}^5ds)u_{nx}^1]\begin{matrix}x=L\\x=0\end{matrix}}_{:=M}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Ahora vamos a estimar cada término del lado derecho de (4.14).
Usando las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Poincare, observando que $|\beta_n|<|\omega|$, tenemos

$$
|-i\beta_n\rho_2\int_0^L u_n^4(\overline{u_{nx}^1+u_n^3})dx|\le C|\omega|\|u_{nx}^4\|_{L^2}\|u_{nx}^1+u_n^3\|_{L^2}
\tag{4.15}
$$

$$
|\frac{\tilde{b}}{k}\int_0^L u_{nx}^3(\overline{\rho_1 f_n^2-i\beta_n\rho_1u_n^2})dx|\le C\|u_{nx}^3\|_{L^2}(|w|\|u_n^2\|_{L^2}+\|f_n^2\|_{L^2})
\tag{4.16}
$$

$$
|\frac{1}{k}\int_0^\infty g(s)\int_0^L u_{nx}^5(\overline{\rho_1 f_n^2-i\beta_n\rho_1u_n^2})dxds|\le C\|u_n^5\|_{L_g^2}(\|f_n^2\|_{L^2}+|\omega|\|u_n^2\|_{L^2})
\tag{4.17}
$$

y

$$
|\rho_2\int_0^L f_n^4(\overline{u_{nx}^1+u_n^3})dx|\le C\|f_n^4\|_{L^2}\|u_{nx}^1+u_n^3\|_{L^2}
\tag{4.18}
$$

donde C es una constante positiva.
En lo que sigue analizaremos el término M, para ello tomamos $q\in C^1([0,L])$ tal que $q(0)=-q(L)=1$. Luego, multiplicando la ecuación (4.7) por $q(x)\overline{(\tilde{b}u_{nx}^3+\int_0^\infty g(s)u_{nx}^5ds)}$ e integrando por partes en $L^2(0,L)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
-[\frac{q(x)}{2}(\tilde{b}u_{nx}^3+\int_0^\infty g(s)u_{nx}^5ds)^2]\begin{matrix}x=L\\x=0\end{matrix} = & -\frac{1}{2}\int_0^L q'(x)(\tilde{b}u_{nx}^3+\int_0^\infty g(s)u_{nx}^5ds)^2dx\\
& -i\beta_n\rho_2\int_0^L u_n^4q(x)\overline{(\tilde{b}u_{nx}^3+\int_0^\infty g(s)u_{nx}^5ds)}dx\\
& -k\int_0^L(u_{nx}^1+u_n^3)q(x)\overline{(\tilde{b}u_{nx}^3+\int_0^\infty g(s)u_{nx}^5ds)}dx\\
& +\rho_2\int_0^L f_n^4q(x)\overline{(\tilde{b}u_{nx}^3+\int_0^\infty g(s)u_{nx}^5ds)}dx
\end{aligned}
$$

Usando las desigualdades de Young y Cauchy-Schwarz en cada término, la ecuación anterior puede ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
-[\frac{q(x)}{2}|\tilde{b}u^3_{nx} + \int_0^\infty g(s)u^5_{nx}ds|^2]_{x=0}^{x=L} \leq & C(\|u^4_n\|^2_{L^2} + \|u^3_{nx}\|^2_{L^2} + \|u^5_n\|^2_{L^2_g} + \|f^4_n\|^2_{L^2}) \\
& + C\|u^1_{nx} + u^3_n\|_{L^2}(\|u^3_{nx}\|_{L^2} + \|u^5_n\|_{L^2_g})
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

De las convergencias (4.10),(4.11)y (4.12), observando que $F_n \to 0$ en H, cuando $n \to \infty$ y tomando en cuenta las estimaciones (4.15)-(4.19), podemos concluir que

$$|-i\beta_n\rho_2 \int_0^L u^4_n\overline{(u^1_{nx} + u^3_n)}dx| \to 0 \tag{4.20}$$

$$|\frac{\tilde{b}}{k}\int_0^L u^3_{nx}\overline{(\rho_1 f^2_n - i\beta_n\rho_1 u^2_n)}dx| \to 0 \tag{4.21}$$

$$|\frac{1}{k}\int_0^\infty g(s)\int_0^L u^5_{nx}\overline{(\rho_1 f^2_n - i\beta_n\rho_1 u^2_n)}dxds| \to 0 \tag{4.22}$$

$$|\rho_2\int_0^L f^4_n\overline{(u^1_{nx} + u^3_n)}dx| \to 0 \tag{4.23}$$

$$|[(\tilde{b}u^3_{nx} + \int_0^\infty g(s)u^5_{nx})u^1_{nx}]_{x=0}^{x=L}| \to 0 \tag{4.24}$$

cuando $n \to \infty$ y porque $\omega \neq 0$.
Por lo tanto, de (4.14), $k\int_0^L |u^1_{nx} + u^3_n|^2dx \to 0$, cuando $n \to \infty$, de lo cual se deduce que

$$(u^1_{nx} + u^3_n) \to 0 \text{ en } L^2(0, L) \tag{4.25}$$

Afirmación 5: $u^2_n \to 0$ en $L^2(0, L)$
De (4.5) y de las convergencias halladas, obtenemos

$$u^2_n \to 0 \text{ en } L^2(0, L) \tag{4.26}$$

Ya que, $\|U_n\|_H = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos una contradicción y la prueba del lema se completa.

Lema 4.2

Supongamos que las condiciones (1.14) y (1.15) se cumplen. Entonces para cada $F \in H$ existe una constante positiva C tal que
$\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2dsdx \leq C\|U\|_H\|F\|_H$

Demostración:
Multiplicando (4.5) por $\overline{u^2}$ e integrando en $L^2(0, L)$, tenemos

$i\lambda\rho_1\int_0^L u^2\overline{u^2}dx - k\int_0^L(u^1_x+u^3)_x\overline{u^2}dx = \int_0^L\rho_1 f^2\overline{u^2}dx$

Luego integrando por partes, tenemos
$i\lambda\rho_1\int_0^L|u^2|^2dx + k\int_0^L(u^1_x+u^3)\overline{u^2_x}dx = \rho_1\int_0^L f^2\overline{u^2}dx$

Ahora, usando (4.4): $u^2 = i\lambda u^1 - f^1$, en la ecuación anterior tenemos

$$i\lambda\rho_1\int_0^L|u^2|^2dx - i\lambda k\int_0^L(u^1_x+u^3)\overline{u^1_x}dx = \rho_1\int_0^L f^2\overline{u^2}dx + k\int_0^L(u^1_x+u^3)\overline{f^1_x}dx \quad (4.27)$$

Multiplicando (4.7) por $\overline{u^4}$ en $L^2(0,L)$, tenemos

$$i\lambda\rho_2\int_0^L u^4\overline{u^4}dx - \tilde{b}\int_0^L u^3_{xx}\overline{u^4}dx - \int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}ds)\overline{u^4}dx + k\int_0^L(u^1_x+u^3)\overline{u^4}dx = \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^4}dx$$

Luego, obtenemos

$$i\lambda\rho_2\int_0^L|u^4|^2dx + \underbrace{\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u^4_x}dsdx}_{:=I_1} + \underbrace{\tilde{b}\int_0^L u^3_x\overline{u^4_x}dx + k\int_0^L(u^1_x+u^3)\overline{u^4}dx}_{:=I_2} = \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^4}dx$$

Sustituyendo u^4 dado por (4.8), (4.6) en I_1 y I_2 respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} i\lambda\rho_2\int_0^L|u^4|^2dx - i\lambda\tilde{b}\int_0^L|u^3_x|^2dx - i\lambda\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2dsdx - i\lambda k\int_0^L(u^1_x+u^3)\overline{u^3}dx \\ + \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{\eta_{xs}}dsdx = \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^4}dx + \tilde{b}\int_0^L u^3_x\overline{f^3_x}dx + k\int_0^L(u^1_x+u^3)\overline{f^3}dx \\ + \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{f^5_x}dsdx \end{aligned} \quad (4.28)$$

Sumando (4.27) con (4.28) y tomando la parte real, tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{\eta_{xs}}dsdx = \rho_1\int_0^L f^2\overline{u^2}dx + k\int_0^L(u^1_x+u^3)\overline{f^1_x}dx + \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^4}dx \\ + \tilde{b}\int_0^L u^3_x\overline{f^3_x}dx + k\int_0^L(u^1_x+u^3)\overline{f^3}dx + \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{f^5_x}dsdx \end{aligned} \quad (4.29)$$

Usando (3.7) y (1.14) obtenemos

$$\frac{1}{2}k_1\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2ds \le -\frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)|\eta_x|^2ds = -\frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\eta_x\overline{\eta_x}ds = \int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{\eta_{sx}}ds$$

Luego reemplazando la expresión anterior en (4.29), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k_1\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2dsdx \le \rho_1\int_0^L f^2\overline{u^2}dx + k\int_0^L(u^1_x+u^3)(\overline{f^1_x}+\overline{f^3})dx + \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^4}dx \\ + \tilde{b}\int_0^L u^3_x\overline{f^3_x}dx + \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{f^5_x}dsdx \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ahora vamos a estimar cada término del lado derecho de la expresión anterior. Usando la desigualdad de Holder, tenemos

$\rho_1 \int_0^L f^2 \overline{u^2} dx \leq C_1 \|U\|_H \|F\|_H$

$k \int_0^L (u_x^1 + u^3)(\overline{f_x^1} + \overline{f^3}) dx \leq C_1 \|U\|_H \|F\|_H$

$\rho_2 \int_0^L f^4 \overline{u^4} dx \leq C_1 \|U\|_H \|F\|_H$

$\tilde{b} \int_0^L u_x^3 \overline{f_x^3} dx \leq C_1 \|U\|_H \|F\|_H$

$\int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x \overline{f_x^5} ds dx \leq C_1 \|U\|_H \|F\|_H$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (4.30), para una constante $C > 0$, obtenemos

$\int_0^L \int_0^\infty g(s) |\eta_x|^2 ds dx \leq C \|U\|_H \|F\|_H.$

Lema 4.3

Supongamos que las condiciones (1.14) y (1.15) sobre el núcleo g se verifican. Entonces existe una constante positiva C tal que

$$\rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx \leq C\|U\|_H \|F\|_H + C\|U\|_H^{1/2} \|F\|_H^{1/2} (\|u_x^3\|_{L^2} + \|u_x^1 + u^3\|_{L^2})$$

Demostración:
Multiplicando (4.7) por $\int_0^\infty g(s) \overline{\eta} ds$ en $L^2(0, L)$, tenemos

$$i\lambda\rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\eta} u^4 ds dx - \tilde{b} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta} u_{xx}^3 ds dx - \int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_{xx} ds)(\int_0^\infty g(s)\overline{\eta} ds) dx$$
$$+ k \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta}(u_x^1 + u^3) ds dx = \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta} f^4 ds dx$$

Aplicando integración por partes y condición frontera para η en la expresión anterior, obtenemos

$$\underbrace{i\lambda\rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\eta} u^4 ds dx}_{:=I_3} + \tilde{b} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \overline{\eta_x} u_x^3 ds dx + \int_0^L |\int_0^\infty g(s) \eta_x ds|^2 dx$$
$$+ k \int_0^L \int_0^\infty g(s)(u_x^1 + u^3)\overline{\eta} ds dx = \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s)\overline{\eta} f^4 ds dx$$

Sustituyendo η dado por (4.8) en I_3, en la expresión anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_s}u^4dsdx+\tilde{b}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}u_x^3dsdx+\int_0^L|\int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2dx\\ +k\int_0^L\int_0^\infty g(s)(u_x^1+u^3)\overline{\eta}dsdx =&\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}f^4dsdx+\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)|u^4|^2dsdx\\ &+\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{f^5}u^4dsdx\end{aligned}$$

Despejando el penúltimo término del lado derecho de la expresión anterior y teniendo en cuenta que $b_0=\int_0^\infty g(s)ds$, obtenemos

$$\begin{aligned}\rho_2 b_0\int_0^L|u^4|^2dx =&-\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)u^4\overline{f^5}dsdx+\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_s}u^4dsdx\\ &+\tilde{b}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}u_x^3dsdx+k\int_0^L\int_0^\infty g(s)(u_x^1+u^3)\overline{\eta}dsdx\\ &+\int_0^L|\int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2dx-\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}f^4dsdx \qquad (4.31)\end{aligned}$$

Ahora vamos a estimar cada uno de los términos del lado derecho de (4.31).
Aplicando las desigualdades de Holder y Poincare, obtenemos

$$|-\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)u^4\overline{f^5}dsdx|\le C_1\|U\|_H\|F\|_H \qquad (4.32)$$

Usando la desigualdad de Holder y Lema 4.2, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^L|\int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2dx &\le \int_0^L[(\int_0^\infty g^{1/2}(s)g^{1/2}(s)|\eta_x|ds]^2dx\\ &\le \int_0^L[(\int_0^\infty(g^{1/2}(s)ds)^2)^{1/2}(\int_0^\infty(g^{1/2}(s)|\eta_x|ds)^2)^{1/2}]^2dx\\ &\le [\int_0^L(\int_0^\infty g(s)ds)(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^2|ds)dx\\ &\le b_0\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x|^2ds)dx\\ &\le C_1\|U\|_H\|F\|_H \qquad (4.33)\end{aligned}$$

Empleando la desigualdad de Young, integración por partes con respecto a s, las propiedades de g, la desigualdad de Poincare y Lema 4.2, obtenemos

$$|\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}_s u^4dsdx|\le b_0\frac{\rho_2}{2}\int_0^L|u^4|^2dx+C_1\|U\|_H\|F\|_H \qquad (4.34)$$

Por otro lado, del Lema 4.2, de las desigualdades de Holder y Poincare, obtenemos

$$|k\int_0^L\int_0^\infty g(s)(u_x^1+u^3)\overline{\eta}dsdx|\le C_1\|u_x^1+u^3\|_{L^2}(\|U\|_H\|F\|_H)^{1/2} \qquad (4.35)$$

Empleando la desigualdad de Holder y Lema 4.2, obtenemos

$$|\tilde{b}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}u_x^3 dsdx| \leq C_1\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/2}\|u_x^3\|_{L^2} \tag{4.36}$$

Nuevamente usando las desigualdades de Holder y Poincare, obtenemos

$$|-\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)\overline{\eta}f^4 dsdx| \leq C_1\|U\|_H\|F\|_H \tag{4.37}$$

Sustituyendo (4.32)-(4.37) en (4.31), para una constante $C > 0$ obtenemos

$$\rho_2\int_0^L |u^4|^2 dx \leq C\|U\|_H\|F\|_H + C\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/2}(\|u_x^3\|_{L^2} + \|u_x^1 + u^3\|_{L^2})$$

Lema 4.4

Supongamos que se verifican las hipótesis del Lema 4.2. Entonces para cada $\epsilon_1 > 0$, existe $C_{\epsilon_1} > 0$ tal que

$$\tilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2 dx \leq C_{\epsilon_1}\|U\|_H\|F\|_H + C_{\epsilon_1}\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + \epsilon_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2$$

Demostración:
Para estimar u^3, introducimos el multiplicador ω dado por la solución del problema de Dirichlet: $-\omega_{xx} = u_x^3$, $\omega(0) = \omega(L) = 0$
Luego ω se puede escribir como
$\omega(x) = -\int_0^x u^3(y)dy + \dfrac{x}{L}\int_0^L u^3(y)dy \equiv G(u^3)(x)$.
Es claro que G es una aplicación lineal.
Multiplicando (4.7) por $\overline{u^3}$ en $L^2(0,L)$ y usando integración por partes obtenemos

$$\underbrace{i\lambda\rho_2\int_0^L u^4\overline{u^3}dx}_{:=I_4} + \tilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2 dx + \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^3}dsdx$$
$$+ k\int_0^L u_x^1\overline{u^3}dx + k\int_0^L |u^3|^2 dx = \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^3}dx$$

Sustituyendo $i\lambda\overline{u^3}$ dado por (4.6) en I_4, obtenemos

$$\tilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2 dx + k\int_0^L u_x^1\overline{u^3}dx + k\int_0^L |u^3|^2 dx$$
$$= \rho_2\int_0^L |u^4|^2 dx - \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^3}dsdx + \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^3}dx + \rho_2\int_0^L u^4\overline{f^3}dx \tag{4.38}$$

Por otro lado, multiplicando (4.5) por $\overline{\omega}$ en $L^2(0,L)$, tenemos

$$i\lambda\rho_1\int_0^L u^2\overline{\omega}dx - k\int_0^L (u_x^1 + u^3)_x\overline{\omega}dx = \rho_1\int_0^L f^2\overline{\omega}dx$$

Usando integración por partes y condiciones de ω, en la expresión anterior, tenemos

$$k\int_0^L u_x^1\overline{\omega_x}dx + k\int_0^L u^3\overline{\omega_x}dx = \rho_1\int_0^L f^2\overline{\omega}dx - i\lambda\rho_1\int_0^L u^2\overline{\omega} \tag{4.39}$$

Luego usando integración por partes y condiciones de ω, tenemos

$k\int_0^L u^3\overline{\omega_x}dx = -k\int_0^L|\omega_x|^2dx$

De (4.6) y de la linealidad de $\omega(x) = G(u^3)(x)$, tenemos

$-i\lambda\overline{\omega} = \overline{G(f^3)} + \overline{G(u^4)}$

Reemplazando las dos expresiones anteriores en (4.39), obtenemos

$$k\int_0^L u_x^1\overline{\omega_x}dx - k\int_0^L|\omega_x|^2dx = \rho_1\int_0^L f^2\overline{\omega}dx + \rho_1\int_0^L u^2[\overline{G(f^3)} + \overline{G(u^4)}]dx \tag{4.40}$$

Usando integración por partes y condiciones de ω, obtenemos

$\int_0^L u_x^1\overline{\omega_x}dx = -\int_0^L u_x^1\overline{u^3}dx$

Reemplazando la expresión anterior en (4.40) y luego en (4.38), obtenemos

$$\begin{aligned}\tilde{b}\int_0^L|u_x^3|^2dx - k(\int_0^L|\omega_x|^2dx - \int_0^L|u^3|^2dx)\\ = \rho_2\int_0^L f^4\overline{u^3}dx + \rho_2\int_0^L u^4\overline{f^3}dx + \rho_1\int_0^L u^2\overline{G(f^3)}dx + \rho_1\int_0^L f^2\overline{\omega}dx + \rho_2\int_0^L|u^4|^2dx\\ - \int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^3}dsdx + \rho_1\int_0^L u^2\overline{G(u^4)}dx\end{aligned} \tag{4.41}$$

Ahora vamos a estimar cada uno de los términos del lado derecho de la expresión anterior.
Usando integración por partes, desigualdad de Holder y como $\omega_{xx} = -u_x^3$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^L |\omega_x|^2 dx &= -\int_0^L \omega_{xx}\overline{\omega} dx\\ &= -\int_0^L u^3\overline{\omega_x} dx\\ &\leq \int_0^L |u^3||\omega_x| dx\\ &\leq \|u^3\|_{L^2}\|\omega_x\|_{L^2},\end{aligned}$$

$$\text{se sigue que } \int_0^L |\omega_x|^2 dx \leq \int_0^L |u^3|^2 dx \tag{4.42}$$

Aplicando la desigualdad de Young y como $|G(u^4)(x)|^2 \leq 4L\|u^4\|_{L^2}^2$, obtenemos

$$|\rho_1 \int_0^L u^2\overline{G(u^4)} dx| \leq \rho_1\frac{\epsilon_1}{2}\|u^2\|_{L^2}^2 + C'_{\epsilon_1}\|u^4\|_{L^2}^2 \tag{4.43}$$

Aplicando las desigualdades de Holder y Poincare, obtenemos

$$|\rho_2 \int_0^L f^4\overline{u^3} dx| \leq C\|U\|_H\|F\|_H \tag{4.44}$$

$$|\rho_2 \int_0^L u^4\overline{f^3} dx| \leq C\|U\|_H\|F\|_H \tag{4.45}$$

$$|\rho_1 \int_0^L u^2\overline{G(f^3)} dx| \leq C\|U\|_H\|F\|_H \tag{4.46}$$

$$|\rho_1 \int_0^L f^2\overline{\omega} dx| \leq C\|U\|_H\|F\|_H \tag{4.47}$$

Usando la desigualdad de Holder, la desigualdad de Young y Lema 4.2, obtenemos

$$|-\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u_x^3} ds dx| \leq \frac{\tilde{b}}{4}\|u_x^3\|^2 + C\|U\|_H\|F\|_H \tag{4.48}$$

Sustituyendo (4.42)-(4.48) en (4.41) y tomando $C_1 > 0$ tenemos

$$\tilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2 dx \leq C_1\|U\|_H\|F\|_H + (\rho_2 + C'_{\epsilon_1})\int_0^L |u^4|^2 dx + \frac{\rho_1\epsilon_1}{2}\int_0^L |u^2|^2 dx + \frac{\tilde{b}}{4}\int_0^L |u_x^3|^2 dx \tag{4.49}$$

Aplicando el Lema 4.3, en (4.49), existe una constante positiva $\tilde{C}_{\epsilon_1}$ tal que

$$\begin{aligned}\tilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2 dx &\leq C_1\|U\|_H\|F\|_H + \tilde{C}_{\epsilon_1}\|U\|_H\|F\|_H\\ &+ \tilde{C}_{\epsilon_1}\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/2}(\|u_x^3\|_{L_2} + \|u_x^1 + u^3\|_{L^2})\\ &+ \frac{\rho_1\epsilon_1}{2}\int_0^L |u^2|^2 + \frac{\tilde{b}}{4}\int_0^L |u_x^3|^2 dx\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Young, en la expresión anterior para una constante $C_{\epsilon_1} > 0$, obtenemos

$$\tilde{b}\int_0^L |u_x^3|^2 dx \leq C_{\epsilon_1}\|U\|_H\|F\|_H + C_{\epsilon_1}\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + \rho_1\epsilon_1\|u^2\|_{L^2}^2.$$

Lema 4.5

Supongamos que se verifican las hipótesis del Lema 4.2, la condición (1.16), es decir, $\dfrac{\rho_1}{k}=\dfrac{\rho_2}{b}$. Entonces para cada $\epsilon_2>0$, existe $C_{\epsilon_2}>0$ tal que
$k\int_0^L |u_x^1+u^3|^2dx \le C_{\epsilon_2}\|U\|_H\|F\|_H + Re([\tilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x ds]\overline{u_x^1})\Big|_{x=0}^{x=L} + (\epsilon_1+\epsilon_2)\|u^2\|_{L^2}^2$,
donde ϵ_1 es dado por el Lema 4.4.
Demostración:
Multiplicando (4.7) por $\overline{u_x^1+u^3}$ en $L^2(0,L)$, tenemos

$$
\begin{aligned}
i\lambda\rho_2\int_0^L u^4\overline{(u_x^1+u^3)}dx - ([\tilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x ds]\overline{u_x^1})\Big|_{x=0}^{x=L} + k\int_0^L |u_x^1+u^3|^2dx \\
+ \underbrace{\int_0^L [\tilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x ds]\overline{(u_x^1+u^3)}_x dx}_{:=I_5} = \rho_2\int_0^L f^4\overline{(u_x^1+u^3)}dx
\end{aligned}
$$

En la expresión anterior reemplazamos (4.5), en I_5 y obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{i\lambda\rho_2\int_0^L u^4\overline{u_x^1}dx}_{:=I_6} + \underbrace{i\lambda\rho_2\int_0^L u^4\overline{u^3}dx}_{:=I_7} - ([\tilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x ds]\overline{u_x^1})\Big|_{x=0}^{x=L} \\
&- i\lambda\tilde{b}\frac{\rho_1}{k}\int_0^L u_x^3\overline{u^2}dx \underbrace{-i\lambda\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{u^2}dsdx}_{:=I_8} - \frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{f^2}dsdx \\
&- \frac{\tilde{b}\rho_1}{k}\int_0^L u_x^3\overline{f^2}dx + k\int_0^L |u_x^1+u^3|^2dx = \rho_2\int_0^L f^4\overline{(u_x^1+u^3)}dx \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

De (4.4) tenemos: $i\lambda\overline{u_x^1}=-(\overline{f_x^1}+\overline{u_x^2})$ y luego de (4.6) tenemos: $u^4=i\lambda u^3-f^3$, por lo tanto, reemplazando en I_6 obtenemos

$$
I_6 = -i\lambda\rho_2\int_0^L u^3\overline{u_x^2}dx - \rho_2\int_0^L u^4\overline{f_x^1}dx + \rho_2\int_0^L f^3\overline{u_x^2}dx \qquad (4.51)
$$

Usando (4.6) en I_7, obtenemos

$$
I_7 = -\rho_2\int_0^L |u^4|^2dx - \rho_2\int_0^L u^4\overline{f^3}dx \qquad (4.52)
$$

Sustituyendo η dado por (4.8) en I_8, obtenemos

$$
I_8 = \frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_{xs}\overline{u^2}dsdx - \frac{\rho_1 b_0}{k}\int_0^L u_x^4\overline{u^2}dx - \frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g(s)f_x^5\overline{u^2}dsdx
$$

De (4.6) tenemos: $u_x^4=i\lambda u_x^3-f_x^3$, como g es decreciente y usando integración por partes, podemos reescribir I_8 como

$$I_8 = -\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g'(s)\eta_x\overline{u^2}dsdx - i\lambda\frac{\rho_1 b_0}{k}\int_0^L u_x^3\overline{u^2}dx + \frac{\rho_1 b_0}{k}\int_0^L f_x^3\overline{u^2}dx$$
$$-\frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g(s)f_x^5\overline{u^2}dsdx \quad (4.53)$$

Usando (4.51), (4.52) y (4.53) en (4.50) obtenemos

$$\begin{aligned}
i\lambda b(\frac{\rho_1}{k} - \frac{\rho_2}{b})\int_0^L u^3\overline{u_x^2}dx + k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2dx = {} & ([\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds]\overline{u_x^1})\Big|_{x=0}^{x=L} \\
& + \rho_2\int_0^L |u^4|^2dx + \frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g'(s)\eta_x\overline{u^2}dsdx \\
& + \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\int_0^L u_x^3\overline{f^2}dx \\
& + \frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{f^2}dsdx \\
& + \rho_2\int_0^L f^4\overline{(u_x^1 + u^3)}dx \\
& + \rho_2\int_0^L u^4\overline{f^3}dx + \rho_2\int_0^L u^4\overline{f_x^1}dx \\
& + (\rho_2 - \frac{\rho_1 b_0}{k})\int_0^L f_x^3\overline{u^2}dx \\
& + \frac{\rho_1}{k}\int_0^L\int_0^\infty g(s)f_x^5\overline{u^2}dsdx
\end{aligned}$$

Puesto que $\frac{\rho_1}{k} = \frac{\rho_2}{b}$, reemplazando en la ecuación anterior y tomando la parte real, obtenemos

$$\begin{aligned}
k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2dx = {} & Re\{([\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds]\overline{u_x^1})\Big|_{x=0}^{x=L}\} + \rho_2\int_0^L |u^4|^2dx \\
& + \frac{\rho_1}{k}Re\{\int_0^L\int_0^\infty g'(s)\eta_x\overline{u^2}dsdx\} \\
& + \rho_1\frac{\tilde{b}}{k}Re\{\int_0^L u_x^3\overline{f^2}dx\} \\
& + \frac{\rho_1}{k}Re\{\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x\overline{f^2}dsdx\} \\
& + \rho_2 Re\{\int_0^L f^4(\overline{u_x^1 + u^3})dx\} \\
& + \rho_2 Re\{\int_0^L u^4(\overline{f_x^1 + f^3})dx\} \\
& + (\rho_2 - \frac{\rho_1 b_0}{k})Re\{\int_0^L f_x^3\overline{u^2}dx\} \\
& + \frac{\rho_1}{k}Re\{\int_0^L\int_0^\infty g(s)f_x^5\overline{u^2}dsdx\} \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Ahora vamos a estimar cada uno de los términos del lado derecho de (4.54).
Aplicando el Lema 4.3, desigualdad de Young y Lema 4.4 para alguna constante positiva $\tilde{C}_{\epsilon_1}$, obtenemos

$$\rho_2 \int_0^L |u^4|^2 dx \leq \tilde{C}_{\epsilon_1} \|U\|_H \|F\|_H + \frac{k}{2} \|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_1}{2} \|u^2\|_{L^2}^2 \tag{4.55}$$

Aplicando las hipótesis sobre g, desigualdad de Young y Lema 4.2 para alguna constante positiva $\tilde{C}_{\epsilon_2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g'(s) \eta_x \overline{u^2} ds dx &\leq \frac{\rho_1 k_0}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s) |\eta_x| |\overline{u^2}| ds dx \\ &\leq \frac{\rho_1 k_0}{k} \int_0^L |u^2| \int_0^\infty g(s) |\eta_x| ds dx \\ &\leq \frac{\epsilon_2}{2} \|u^2\|_{L^2}^2 + \tilde{C}_{\epsilon_2} \|U\|_H \|F\|_H \end{aligned} \tag{4.56}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos

$$\rho_1 \frac{\tilde{b}}{k} \int_0^L u_x^3 \overline{f^2} \leq \rho_1 \frac{\tilde{b}}{k} \|u_x^3\|_{L^2} \|f^2\|_{L^2} \leq C \|U\|_H \|F\|_H \tag{4.57}$$

$$\frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s) \eta_x \overline{f^2} ds dx \leq \frac{\rho_1}{k} \|\eta\|_{L_g^2} \|f^2\|_{L^2} \leq C \|U\|_H \|F\|_H \tag{4.58}$$

$$\rho_2 \int_0^L f^4 (\overline{u_x^1 + u^3}) dx \leq \rho_2 \|u_x^1 + u^3\|_{L^2} \|f^4\|_{L^2} \leq C \|U\|_H \|F\|_H \tag{4.59}$$

$$\rho_2 \int_0^L u^4 (\overline{f_x^1 + f^3}) dx \leq \rho_2 \|u^4\|_{L^2} \|f_x^1 + f^3\|_{L^2} \leq C \|U\|_H \|F\|_H \tag{4.60}$$

$$(\rho_2 - \frac{\rho_1 b_0}{k}) \int_0^L f_x^3 \overline{u^2} dx \leq (\rho_2 - \frac{\rho_1 b_0}{k}) \|u^2\|_{L^2} \|f_x^3\|_{L^2} \leq C \|U\| \|F\|_H \tag{4.61}$$

$$\frac{\rho_1}{k} \int_0^L \int_0^\infty g(s) f_x^5 \overline{u^2} ds dx \leq \frac{\rho_1}{k} \|u^2\|_{L^2} \|f^5\|_{L_g^2} \leq C \|U\|_H \|F\|_H \tag{4.62}$$

Sustituyendo (4.55)-(4.62) en (4.54), obtenemos

$$\begin{aligned} k \int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx \leq{}& Re([\tilde{b} u_x^3 + \int_0^\infty g(s) \eta_x ds] \overline{u_x^1})_{x=0}^{x=L} \\ &+ \frac{k}{2} \|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + (\frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2}{2}) \|u^2\|_{L^2}^2 + (C_1 + \tilde{C}_{\epsilon_1} + \tilde{C}_{\epsilon_2}) \|U\|_H \|F\|_H \end{aligned}$$

Luego, para cada ϵ_2, existe una constante positiva C_{ϵ_2} tal que

$$k\int_0^L |u_x^1+u^3|^2dx \le Re([\tilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x ds]\overline{u_x^1})\begin{matrix} x=L \\ x=0\end{matrix}$$
$$+(\epsilon_1+\epsilon_2)\|u^2\|_{L^2}^2 + C_{\epsilon_2}\|U\|_H\|F\|_H$$

Lema 4.6

Supongamos que se verifica las condiciones del Lema 4.5 y sea $q \in C^1([0,L])$ tal que $q(0) = -q(L) = 1$. Entonces existen constantes positivas C, C_q tal que

i)

$$-(\frac{q(x)}{2}|\tilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2)\begin{matrix} x=L \\ x=0\end{matrix} \le C\|U\|_H\|F\|_H + C\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/2}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}$$
$$+\epsilon_1 C\rho_1\|u^2\|_{L^2} + C_q\|u_x^3\|_{L^2}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}$$

y

ii)

$$-(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2)\begin{matrix} x=L \\ x=0\end{matrix} \le C\|U\|_H\|F\|_H + C_q(\|u_x^1+u^3\|_{L^2}^2 + \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2)$$

Demostración:

i) Multiplicando (4.7) por $q(x)\overline{(\tilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x ds)}$ en $L^2(0,L)$ tenemos

$$\underbrace{i\lambda\rho_2\int_0^L u^4 q(x)(\tilde{b}\overline{u_x^3}+\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}ds)dx}_{:=I_9}$$
$$-\underbrace{\int_0^L(\tilde{b}u_{xx}^3+\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}ds)q(x)(\tilde{b}\overline{u_x^3}+\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}ds)dx}_{:=I_{10}}$$
$$+k\int_0^L q(x)(u_x^1+u^3)(\tilde{b}\overline{u_x^3}+\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}ds)dx$$
$$=\rho_2\int_0^L f^4 q(x)(\tilde{b}\overline{u_x^3}+\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x}ds)dx \tag{4.63}$$

De (4.6) tenemos: $i\lambda\overline{u_x^3} = -\overline{u_x^4} - \overline{f_x^3}$ y de (4.8) tenemos: $i\lambda\overline{\eta_x} = \overline{\eta_{sx}} - \overline{f_x^5} - \overline{u_x^4}$, reemplazando en I_9, tenemos

$$
\begin{aligned}
I_9 =&\rho_2 \int_0^L u^4 q(x)[\tilde{b}(-\overline{u_x^4} - \overline{f_x^3}) + \int_0^\infty g(s)(\overline{\eta_{sx}} - \overline{f_x^5} - \overline{u_x^4})ds]dx \\
=&-\rho_2\tilde{b}\int_0^L q(x)u^4\overline{u_x^4}dx - \rho_2\tilde{b}\int_0^L q(x)u^4\overline{f_x^3}dx + \rho_2\int_0^L u^4 q(x)(\int_0^\infty g(s)\overline{\eta_{sx}}ds)dx \\
&-\rho_2\int_0^L q(x)u^4(\int_0^\infty g(s)\overline{f_x^5}ds)dx - \rho_2\int_0^L u^4 q(x)(\int_0^\infty g(s)\overline{u_x^4}ds)dx \\
=&-\rho_2(b - \int_0^\infty g(s)ds)\int_0^L q(x)u^4\overline{u_x^4}dx - \rho_2\tilde{b}\int_0^L q(x)u^4\overline{f_x^3}dx \\
&+\rho_2\int_0^L u^4 q(x)\{(g(s)\overline{\eta_x})\begin{matrix} s=\infty \\ s=0 \end{matrix} - \int_0^\infty \overline{\eta_x}g'(s)ds\}dx \\
&-\rho_2\int_0^L u^4 q(x)(\int_0^\infty g(s)\overline{f_x^5}ds)dx \\
&-\rho_2\int_0^L u^4 q(x)\overline{u_x^4}(\int_0^\infty g(s)ds)dx \\
=&-\rho_2 b\int_0^L q(x)u^4\overline{u_x^4}dx - \rho_2\tilde{b}\int_0^L u^4 q(x)\overline{f_x^3}dx \\
&-\rho_2\int_0^L\int_0^\infty u^4 q(x)g'(s)\overline{\eta_x}dsdx \\
&-\rho_2\int_0^L\int_0^\infty u^4 q(x)g(s)\overline{f_x^5}dsdx
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

Usando integración por partes, obtenemos

$$
Re(\int_0^L q(x)u^4\overline{u_x^4}dx) = -\frac{1}{2}\int_0^L q'(x)|u^4|^2dx \tag{4.65}
$$

De (4.65) en (4.64), tomando la parte real en I_9, obtenemos

$$
\begin{aligned}
Re(I_9) = &\frac{\rho_2 b}{2}\int_0^L q'(x)|u^4|^2dx + Re\{-\rho_2\tilde{b}\int_0^L q(x)u^4\overline{f_x^3}dx \\
&-\rho_2\int_0^L\int_0^\infty g'(s)q(x)u^4\overline{\eta_x}dsdx - \rho_2\int_0^L\int_0^\infty g(s)q(x)u^4\overline{f_x^5}dsdx\}
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

Usando integración por partes y como $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ en I_{10}, obtenemos

$$
Re(I_{10}) = -(\frac{q(x)}{2}|\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2)\begin{matrix} x=L \\ x=0 \end{matrix} + \frac{1}{2}\int_0^L q'(x)|\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2dx \tag{4.67}
$$

Sustituyendo (4.66) y (4.67) en (4.63), luego tomando la parte real, obtenemos

$$
\begin{aligned}
-(\frac{q(x)}{2}|\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2)\begin{matrix} x = L \\ x = 0 \end{matrix} &= Re\{\rho_2 \int_0^L f^4 q(x)(\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x} ds)dx\} \\
&- \frac{\rho_2}{2} b \int_0^L q'(x)|u^4|^2 dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^L q'(x)|\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2 dx \\
&+ Re\{\rho_2 \tilde{b} \int_0^L q(x) u^4 \overline{f_x^3} dx \\
&+ \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g'(s) q(x) u^4 \overline{\eta_x} dsdx \\
&+ \rho_2 \int_0^L \int_0^\infty g(s) q(x) u^4 \overline{f_x^5} dsdx\} \\
&- Re\{k \int_0^L q(x)(u_x^1 + u^3)(\tilde{b}u_x^3 \\
&+ \int_0^\infty g(s)\overline{\eta_x} ds)dx\} \qquad (4.68)
\end{aligned}
$$

Como $q \in C^1([0, L])$, tenemos que $q(x)$ y $q'(x)$ están acotados, entonces existe $C_1 := C_1(q) > 0$, luego en (4.68) tenemos

$$
\begin{aligned}
-(\frac{q(x)}{2}|\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2)\begin{matrix} x = L \\ x = 0 \end{matrix} &\leq \frac{\rho_2 b}{2} C_1 \int_0^L |u^4|^2 dx + \rho_2 \tilde{b} C_1 \int_0^L |u^4 \overline{f_x^3}| dx \\
&+ \rho_2 C_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s)|u^4 \overline{\eta_x}| dsdx \\
&+ \rho_2 C_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s)|u^4 \overline{f_x^5}| dsdx \\
&+ \frac{C_1}{2} \int_0^L |\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2 dx \\
&+ kC_1 \int_0^L |u_x^1 + u^3||\overline{\tilde{b}u_x^3}| dx \\
&+ kC_1 \tilde{b} \int_0^L \int_0^\infty g(s)|u_x^1 + u^3||\overline{\eta_x}| dsdx \\
&+ \rho_2 C_1 \tilde{b} \int_0^L |f^4 \overline{u_x^3}| dx \\
&+ \rho_2 C_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s)|f^4 \overline{\eta_x}| dsdx \qquad (4.69)
\end{aligned}
$$

Ahora vamos a estimar cada uno de los términos del lado derecho de (4.69). Empleando la desigualdad de Holder, Young y Lema 4.2, tenemos

$\rho_2 C_1 \int_0^L \int_0^\infty g(s) u^4 \overline{\eta_x} dsdx \leq C_2 \int_0^L |u^4|^2 dx + C_2 \|U\|_H \|F\|_H$

$kC_1 \int_0^L |u_x^1 + u^3||\overline{\tilde{b}u_x^3}| dx \leq C_2 \|u_x^1 + u^3\|_{L^2} \|u_x^3\|_{L^2}$

$kC_1\tilde{b}\int_0^L\int_0^\infty g(s)|u_x^1+u^3||\overline{\eta_x}|dsdx \leq C_2\|u_x^1+u^3\|_{L^2}\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/2}$

$\rho_2\tilde{b}C_1\int_0^L|u^4f_x^3|dx \leq C_2\|U\|_H\|F\|_H$

$\rho_2C_1\int_0^L\int_0^\infty g(s)|u^4\overline{f_x^5}|dsdx \leq C_2\|u^4\|_{L^2}^2+C_2\|U\|_H\|F\|_H$

$\rho_2C_1\tilde{b}\int_0^L|f^4\overline{u_x^3}|dx \leq C_2\|U\|_H\|F\|_H$

$\rho_2C_1\int_0^L\int_0^\infty g(s)|f^4\overline{\eta_x}|dsdx \leq C_2\|U\|_H\|F\|_H$

Usando la proposición 2.2.5 y Lema 4.2, tenemos

$$\frac{C_1}{2}\int_0^L|\tilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2dx \leq \tilde{C}_2\|U\|_H\|F\|_H+4C_2\tilde{b}^2\int_0^L|u_x^3|^2dx$$

Reemplazando las expresiones anteriores en (4.69), se sigue que existe una constante $C_3=C_3(q)>0$, tal que obtenemos

$$\begin{aligned}-\Big(\frac{q(x)}{2}|\tilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2\Big)\begin{matrix}x=L\\x=0\end{matrix} &\leq C_3\|U\|_H\|F\|_H+C_3\int_0^L|u^4|^2dx\\ &+C_3\|u_x^1+u^3\|_{L^2}\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/2}\\ &+C_3\|u_x^3\|_{L^2}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}\\ &+C_3\int_0^L|u_x^3|^2dx\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando los Lemas 4.3 y 4.4, y la desigualdad de Young en la expresión anterior, para cada $\epsilon_1>0$, existe $C>0$ y $C_q>0$, obtenemos

$$\begin{aligned}-\Big(\frac{q(x)}{2}|\tilde{b}u_x^3+\int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2\Big)\begin{matrix}x=L\\x=0\end{matrix} &\leq C\|U\|_H\|F\|_H+C\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/2}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}\\ &+\epsilon_1C\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2+C_q\|u_x^3\|_{L^2}\|u_x^1+u^3\|_{L^2}\end{aligned}$$

ii) Multiplicamos (4.5) por $q(x)\overline{u_x^1}$, en $L^2(0,L)$, tenemos

$$\underbrace{i\lambda\rho_1\int_0^L u^2q(x)\overline{u_x^1}dx}_{:=I_{11}}-k\int_0^L q(x)\overline{u_x^1}(u_x^1+u^3)_xdx=\rho_1\int_0^L q(x)\overline{u_x^1}f^2dx$$

De (4.4) tenemos: $i\lambda\overline{u_x^1} = -\overline{f_x^1} - \overline{u_x^2}$, luego lo reemplazamos en I_{11}, además integrando por partes y tomando la parte real en la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned} -k(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2)\begin{matrix} x=L \\ x=0 \end{matrix} &= \rho_1 Re\{\int_0^L u^2 q(x)\overline{f_x^1}dx\} + kRe\{\int_0^L q(x)\overline{u_x^1}u_x^3 dx\} \\ &- \frac{\rho_1}{2}\int_0^L q'(x)|u^2|^2dx - \frac{k}{2}\int_0^L q'(x)|u_x^1|^2dx \\ &+ \rho_1 Re\{\int_0^L q(x)\overline{u_x^1}f^2dx\} \end{aligned}$$

Como $q \in C^1([0,L])$, entonces en la expresión anterior, existe una constante $C_1 = C_1(q) > 0$ tal que, tenemos

$$\begin{aligned} -k(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2)\begin{matrix} x=L \\ x=0 \end{matrix} &\leq C_1\int_0^L |u_x^1|^2dx + C_1\int_0^L |u_x^3\overline{u_x^1}|dx + C_1\rho_1\int_0^L |u^2|^2dx \\ &+ C_1\int_0^L |u^2\overline{f_x^1}|dx + C_1\int_0^L |f^2\overline{u_x^1}|dx \end{aligned} \tag{4.70}$$

Ahora vamos a estimar cada uno de los términos del lado derecho de (4.70). Empleando la desigualdad de Holder, la desigualdad de Poincare, proposición 2.2.5 y del Lema 4.4, diremos que existe una constante $C_2 > 0$ tal que, tenemos

$$\begin{aligned} C_1\int_0^L |u_x^1|^2dx + C_1\int_0^L |u_x^3\overline{u_x^1}|dx &\leq (6C_1 + \frac{C_2}{2})\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \\ &+ \frac{3}{2}C_2\|U\|_H\|F\|_H + C_2\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Holder, la desigualdad triangular y la desigualdad de Poincare, tenemos

$C_1\int_0^L |u^2\overline{f_x^1}|dx \leq C_3\|U\|_H\|F\|_H$

$C_1\int_0^L |f^2\overline{u_x^1}|dx \leq C_3\|U\|_H\|F\|_H$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (4.70), para alguna constante positiva C, C_q, obtenemos

$$-k(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2)\begin{matrix} x=L \\ x=0 \end{matrix} \leq C\|U\|_H\|F\|_H + C_q(\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \rho_1\|u^2\|_{L^2}^2).$$

Lema 4.7

Con las notaciones anteriores, existe $C > 0$, tal que

$$\rho_1 \int_0^L |u^2|^2 dx \leq C\|U\|_H \|F\|_H + 4k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2$$

Demostración:
Multiplicando la ecuación (4.5) por $\overline{u^1}$ en $L^2(0, L)$ tenemos

$i\lambda\rho_1 \int_0^L u^2\overline{u^1}dx - k\int_0^L (u_x^1 + u^3)_x \overline{u^1}dx = \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1}dx$

Ahora integrando por partes la expresión anterior, obtenemos

$$\underbrace{i\lambda\rho_1 \int_0^L u^2\overline{u^1}}_{:=I_{12}} + k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u_x^1}dx = \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1}dx$$

En la expresión anterior, reemplazando (4.4) : $i\lambda\overline{u^1} = -\overline{f^1} - \overline{u^2}$, en I_{12}, obtenemos

$\rho_1 \int_0^L u^2(-\overline{f^1} - \overline{u^2})dx + k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u_x^1}dx = \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1}dx$

Luego, obtenemos

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_0^L |u^2|^2 dx &= k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u_x^1}dx - \rho_1 \int_0^L u^2\overline{f^1}dx - \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1}dx \\
&= k\int_0^L (u_x^1 + u^3)(\overline{u_x^1 + u^3} - \overline{u^3})dx - \rho_1 \int_0^L u^2\overline{f^1}dx - \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1}dx \\
&= k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx - k\int_0^L (u_x^1 + u^3)\overline{u^3}dx - \rho_1 \int_0^L u^2\overline{f^1}dx - \rho_1 \int_0^L f^2\overline{u^1}dx
\end{aligned}$$

Tomando la parte real en la expresión anterior, usando las desigualdades de Holder, Young y Poincare, por último usando el Lema 4.4 para ϵ_1 suficientemente pequeño, tenemos

$$\begin{aligned}
\rho_1 \int_0^L |u^2|^2 dx \leq& k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx + k\int_0^L |u^3||u_x^1 + u^3|dx \\
&+ \rho_1 \int_0^L |u^2||f^1|dx + \rho_1 \int_0^L |f^2||u^1|dx \\
\leq& k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx + \frac{k}{2}\int_0^L [|u^3|^2 + |u_x^1 + u^3|^2]dx \\
&+ \rho_1\|u^2\|_{L^2}\|f^1\|_{L^2} + \rho_1\|f^2\|_{L^2}\|u^1\|_{L^2} \\
\leq& \frac{3k}{2}\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx + \frac{k}{2}\|u^3\|_{L^2}^2 + C_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}\|f_x^1\|_{L^2} \\
&+ \rho_1 C_1\|f^2\|_{L^2}\|u_x^1\|_{L^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq & \frac{3k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2}C_1\|u_x^3\|_{L^2}^2 + C_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}(\|f_x^1 + f^3\|_{L^2} \\
& + \|f^3\|_{L^2}) + \rho_1 C_1\|f^2\|_{L^2}(\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} + \|u^3\|_{L^2}) \\
\leq & \frac{3k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2}C_1\|u_x^3\|_{L^2}^2 + C_1\rho_1\|U\|_H\|F\|_H \\
& + C_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}\|f_x^3\|_{L^2} + \rho_1 C_2\|U\|_H\|F\|_H + \rho_1 C_2\|f^2\|_{L^2}\|u_x^3\|_{L^2} \\
\leq & \frac{3k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + C_3\|u_x^3\|_{L^2}^2 + C_3\|U\|_H\|F\|_H \\
\leq & \frac{3k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + C_{\epsilon_1}\|U\|_H\|F\|_H + C_{\epsilon_1}\|U\|_H^{1/2}\|F\|_H^{1/}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2} \\
& + \frac{\rho_1}{2}\|u^2\|_{L^2}^2 + C_3\|U\|_H\|F\|_H \\
\leq & C\|U\|_H\|F\|_H + \frac{3k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|u^2\|_{L^2}^2 \\
\leq & C\|U\|_H\|F\|_H + 2k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_1}{2}\|u^2\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, existe un $C > 0$ tal que

$$
\rho_1 \int_0^L |u^2|^2 dx \leq C\|U\|_H\|F\|_H + 4k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2
$$

A continuación con la ayuda de estos lemas, vamos a demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.8

Supongamos que las hipótesis (1.14) y (1.15), sobre el núcleo g se verifica, que los datos iniciales satisfacen $\varphi_0, \psi_0 \in H_0^1(0, L)$, $\eta_0 \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)$, $\varphi_1, \psi_1 \in L^2(0, L)$ y la condición (1.16) se verifica. Entonces la energía $E(t)$ decae exponencialmente a cero, cuando el tiempo tiende a infinito, esto es, existen constantes positivas C y α independientes de los datos iniciales, tal que $E(t) \leq CE(0)e^{-\alpha t}, \forall t \geq 0$.

Demostración:
Para demostrar el resultado se usara el teorema 2.6.2, que caracteriza el decaimiento exponencial de semigrupos de contracciones. Para esto probaremos que se verifican las condiciones (4.2) y (4.3).
La condición (4.2) ya fue demostrado en el Lema 4.1.
A continuación probaremos la condición (4.3).
Sea $U = (u^1, u^2, u^3, u^4, \eta)' \in D(A)$ y $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5)' \in H$ satisfaciendo (4.4)-(4.9).
Luego del Lema 4.2, existe una constante $C' > 0$ tal que

$$
\|\eta\|_{L_g^2}^2 \leq C'\|U\|_H\|F\|_H \tag{4.71}
$$

En el Lema 4.3, usando la desigualdad de Young, para $\epsilon_2 > 0$, existe $C_1 := C_1(\epsilon_2) > 0$ tal que

$$\rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 \leq C_1\|U\|_H\|F\|_H + \frac{\tilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_2}{2}k\|u_x^1 + +u^3\|_{L^2}^2 \tag{4.72}$$

También en el Lema 4.4, usando la desigualdad de Young, se sigue que para $\epsilon_1 > 0$, existe $C_2 := C_2(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ tal que, tenemos

$$\tilde{b}\|u_x^3\|_{L^2}^2 \leq C_2\|U\|_H\|F\|_H + \epsilon_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + \frac{\epsilon_2}{2}k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \tag{4.73}$$

Luego, sumando (4.72) con (4.73), obtenemos

$$\rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 + \frac{\tilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 \leq C_3\|U\|_H\|F\|_H + \epsilon_2 k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \epsilon_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \tag{4.74}$$

Por otra parte, usando el Lema 4.4 y la desigualdad de Young, en el Lema 4.6, para cada $\tilde{N} > 0$ y $\delta > 0$, obtenemos

$$-\tilde{N}\left(\frac{q(x)}{2}|\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds|^2\right)\begin{matrix} x = L \\ x = 0 \end{matrix} \leq C_{\tilde{N}}\|U\|_H\|F\|_H + \frac{k}{4}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \epsilon_1 C_{\tilde{N}}\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \tag{4.75}$$

y

$$-\delta\left(\frac{q(x)}{2}|u_x^1|^2\right)\begin{matrix} x = L \\ x = 0 \end{matrix} \leq C_\delta\|U\|_H\|F\|_H + \frac{k}{4}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \delta C_q\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \tag{4.76}$$

donde $0 < \delta C_q < \dfrac{k}{4}$.

Sumando (4.75) con (4.76) y como $q(0) = -q(L) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{N}}{2}[|\tilde{b}u_x^3(L) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L)ds|^2 + |\tilde{b}u_x^3(0) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(0)ds|^2] \\ &+ \frac{\delta}{2}[|u_x^1(L)|^2 + |u_x^1(0)|^2] \leq C_T\|U\|_H\|F\|_H + \frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + T\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{4.77}$$

donde $T = T(C_{\tilde{N}}, C_q, C_\delta)$.
Usando la desigualdad de Young, tenemos que dado $\sigma > 0$ existe un $C_3 := C_3(\sigma) > 0$ tal que, tenemos

$$\begin{aligned} Re(z_1\overline{z_2}) &\leq |z_1||z_2| \\ &\leq \sigma|z_1|^2 + C_3|z_2|^2 \end{aligned}$$

Tomando $\sigma = \dfrac{\delta}{2} > 0$, $C_3 = \dfrac{\tilde{N}}{2}$ en la desigualdad anterior y usando (4.77), tenemos

$$\begin{aligned}
Re([\tilde{b}u_x^3 + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds]\overline{u_x^1})\begin{matrix} x = L \\ x = 0 \end{matrix} &\leq |\tilde{b}u_x^3(L) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L)ds||u_x^1(L)| \\
&+ |\tilde{b}u_x^3(0) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(0)ds||u_x^1(0)| \\
&\leq \frac{\tilde{N}}{2}|\tilde{b}u_x^3(L) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L)ds|^2 + \frac{\delta}{2}|u_x^1(L)|^2 \\
&+ \frac{\tilde{N}}{2}|\tilde{b}u_x^3(0) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(0)ds|^2 + \frac{\delta}{2}|u_x^1(0)|^2 \\
&\leq C_T\|U\|_H\|F\|_H + \frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + T\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Reemplazando (4.78) en el Lema 4.5, tenemos

$$k\int_0^L |u_x^1 + u^3|^2 dx \leq (C_T + C_{\epsilon_2})\|U\|_H\|F\|_H + \frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + (T + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\rho_1})\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2$$

Así obtenemos

$$\frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 dx \leq C_\tau\|U\|_H\|F\|_H + \tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \tag{4.79}$$

donde $\tau := \tau(\epsilon_1, \epsilon_2, \delta), 0 < \tau < 1$
Finalmente del Lema 4.7, tenemos

$$2\tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \leq 2\tau C_4\|U\|_H\|F\|_H + 8\tau k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 \tag{4.80}$$

Sumando (4.79) con (4.80), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2}\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + 2\tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \leq & C_\tau\|U\|_H\|F\|_H + \tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 + 2\tau C_4\|U\|_H\|F\|_H \\
& + 8\tau k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Así obtenemos

$$(\frac{1}{2} - 8\tau)k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \leq C_5\|U\|_H\|F\|_H \tag{4.81}$$

Sumando (4.71) con (4.74) y con (4.81), para ϵ_1, ϵ_2 suficientemente pequeño, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\eta\|_{L_g^2}^2 + \rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 + \frac{\tilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + (\frac{1}{2} - 8\tau)k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + \tau\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \leq & C'\|U\|_H\|F\|_H \\
& + \epsilon_1\rho_1\|u^2\|_{L^2}^2 \\
& + C_3\|U\|_H\|F\|_H \\
& + C_5\|U\|_H\|F\|_H \\
& + \epsilon_2 k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Luego, existe un $C > 0$, tal que

$$\|\eta\|_{L_g^2}^2 + \rho_2\|u^4\|_{L^2}^2 + \frac{\tilde{b}}{2}\|u_x^3\|_{L^2}^2 + (\frac{1}{2} - 8\tau - \epsilon_2)k\|u_x^1 + u^3\|_{L^2}^2 + (\tau - \epsilon_1)\rho_1\|u^2\|^2 \leq C\|U\|_H\|F\|_H$$

Tomando $\dfrac{1}{2} - 8\tau - \epsilon_2 > 0$ y $\tau - \epsilon_1 > 0$, para ϵ_1, ϵ_2 y δ bien pequeños, tenemos

$$\|U\|_H^2 \leq C\|U\|_H\|F\|_H, \forall U \in D(A)$$

De donde $\|U\|_H \leq C\|F\|_H$
Es decir, $\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_H \leq C$, donde C es una constante positiva.
Así hemos probado la condición (4.3) y por el Teorema 2.6.2 (Pruss), se tiene el teorema 4.8.

Capítulo 5

Decaimiento Polinomial

En este capítulo estudiaremos el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (1.9)-(1.11) con condiciones frontera (3.1), cuando (1.16) no se verifica.
Para ello introducimos la energía de segundo orden
$E_2(t) := E(\varphi_t, \psi_t, \eta_t)$, donde $E(t) := E(\varphi, \psi, \eta)$
Luego de (3.3) y (1.14) obtenemos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (\int_0^\infty g'(s)|\eta_x^t|^2 ds)dx \leq -\frac{k_1}{2}\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds)dx \tag{5.1}$$

$$\frac{d}{dt}E_2(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (\int_0^\infty g'(s)|\eta_{xt}^t|^2 ds)dx \leq -\frac{k_1}{2}\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2 ds)dx \tag{5.2}$$

Definimos ω como una solución del problema de Dirichlet

$$-\omega_{xx} = \psi_x,\ \omega(0) = \omega(L) = 0$$

e introducimos el funcional

$$F_1(t) := \int_0^L [\rho_2\psi_t\psi + \rho_1\varphi_t\omega]dx.$$

Para demostrar el decaimiento polinomial, usaremos el método de las desigualdades diferenciales, el cual consiste en obtener estimativas para diferentes funcionales, las cuales serán dadas en los siguientes lemas.

Lema 5.1

Para cada $\epsilon_1 > 0$ existe una constante positiva $C_{\epsilon_1} > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}F_1(t) \leq -\frac{\tilde{b}}{2}\int_0^L \psi_x^2 dx + \epsilon_1\int_0^L \varphi_t^2 dx + C_{\epsilon_1}\int_0^L \psi_t^2 dx + C\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds)dx \tag{5.3}$$

Demostración: Multiplicando la ecuación (1.10) por ψ en $L^2(0,L)$, tenemos

$$\rho_2\int_0^L \psi_{tt}\psi dx - \int_0^L (b-\int_0^\infty g(s)ds)\psi_{xx}\psi dx - \int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t ds)\psi dx$$
$$+ k\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi dx = 0$$

Luego usando integración por partes y $\tilde{b} = b - b_0$, en la ecuación anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_2\psi_t\psi dx =&\rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx - \tilde{b}\int_0^L \psi_x^2 dx - \int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)\psi_x dx - k\int_0^L \varphi_x\psi dx\\ &- k\int_0^L \psi^2 dx \end{aligned}\tag{5.4}$$

Multiplicando la ecuación (1.9) por ω en $L^2(0,L)$, tenemos

$\rho_1\int_0^L \varphi_{tt}\omega dx - k\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x\omega dx = 0$

Luego usando la condición de ω e integración por partes, en la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{d}{dt}\int_0^L \rho_1\varphi_t\omega dx = -k\int_0^L \varphi\psi_x dx + k\int_0^L \omega_x^2 dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t\omega_t dx \tag{5.5}$$

Además usando integracion por partes, obtenemos

$$-k\int_0^L \varphi_x\psi dx = k\int_0^L \varphi\psi_x dx$$

De la expresión anterior y las ecuaciones (5.4) y (5.5), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_1(t) =&\rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx - \tilde{b}\int_0^L \psi_x^2 dx - k\int_0^L \psi^2 dx + k\int_0^L \omega_x^2 dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t\omega_t dx\\ &- \int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)\psi_x dx\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Young, tenemos

$$\begin{aligned}-\int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)\psi_x dx \leq& \int_0^L |\psi_x||\int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds| dx\\ \leq&\delta\int_0^L |\psi_x|^2 dx\\ &+ C_\delta\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds)dx\end{aligned}$$

Por lo tanto,de las dos expresiones anteriores, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_1(t) \leq&\rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx - \tilde{b}\int_0^L \psi_x^2 dx - k\int_0^L \psi^2 dx + k\int_0^L \omega_x^2 dx + \rho_1\int_0^L \varphi_t\omega_t dx\\ &+ \delta\int_0^L |\psi_x|^2 dx + C_\delta\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds)dx\end{aligned}\tag{5.6}$$

Ahora vamos a estimar los términos positivos del lado derecho de la expresión anterior.
Aplicando la condición de ω, integracion por partes y la desigualdad de Holder, tenemos

$$k\int_0^L \omega_x^2 dx \leq k\int_0^L \psi^2 dx \tag{5.7}$$

Usando la desigualdad de Poincare, la desigualdad de Young y la condición de ω, tenemos

$$\begin{aligned}
\rho_1\int_0^L \varphi_t\omega_t dx &\leq \rho_1\int_0^L |\varphi_t||\omega_t|dx \\
&\leq \rho_1\epsilon\int_0^L |\varphi_t|^2dx + \rho_1 C_\epsilon\int_0^L |\omega_t|^2dx \\
&\leq \epsilon_1\int_0^L |\varphi_t|^2dx + \tilde{C}_{\epsilon_1}\int_0^L |\psi_t|^2dx
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Sustituyendo (5.7) y (5.8) en (5.6), obtenemos

$$\frac{d}{dt}F_1(t) \leq \frac{-\tilde{b}}{2}\int_0^L \psi_x^2dx + \epsilon_1\int_0^L \varphi_t^2dx + C_{\epsilon_1}\int_0^L \psi_t^2dx + C\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx. \square$$

Denotamos por K a la funcional y lo definimos como

$$K(t) := -\int_0^L \rho_2\psi_t(\int_0^\infty g(s)\eta^t(x,s)ds)dx.$$

Lema 5.2

Para cada $\epsilon_2 > 0$ existe una constantes positiva C_{ϵ_2} tal que

$$\frac{d}{dt}K(t) \leq \frac{-\rho_2 b_0}{2}\int_0^L \psi_t^2dx + \epsilon_2 + \int_0^L \psi_x^2dx + \epsilon_2\int_0^L \varphi_x^2dx + C_{\epsilon_2}\int_0^L\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2dsdx$$

Demostración:
Multiplicando la ecuación (1.10) por $\int_0^\infty g(s)\eta^t(x,s)ds$ en $L^2(0,L)$, tenemos

$$\begin{aligned}
&\rho_2\int_0^L \psi_{tt}(\int_0^\infty g(s)\eta^t(x,s)ds)dx - (b-\int_0^\infty g(s)ds)\int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta^t(x,s)ds)\psi_{xx}dx \\
&-\int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x,s)ds)(\int_0^\infty g(s)\eta^t(x,s)ds)dx \\
&+k\int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta^t(x,s)ds)(\varphi_x+\psi)dx = 0
\end{aligned}$$

En la ecuación anterior, usando integración por partes, luego la derivada de $K(t)$ y por último de (1.11): $\eta_t = \psi_t - \eta_s$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}K(t) =&\tilde{b}\int_0^L \psi_x(\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)dx + \int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)^2dx - \rho_2 b_0\int_0^L \psi_t^2 dx\\ &+ k\int_0^L(\varphi_x+\psi)(\int_0^\infty g(s)\eta^t(x,s)ds)dx + \rho_2\int_0^L \psi_t(\int_0^\infty g(s)\eta_s^t(x,s)ds)dx\end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}\int_0^L \psi_t(\int_0^\infty g(s)\eta_s^t(x,s)ds)dx &= \int_0^L \psi_t[(g(s)\eta^t(x,s))\Big|_{s=0}^{s=\infty} - \int_0^\infty g'(s)\eta^t(x,s)ds]dx\\ &= -\int_0^L \psi_t(\int_0^\infty g'(s)\eta^t(x,s)ds)dx\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)^2dx &\leq \int_0^L(\int_0^\infty g(s)ds(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx\\ &\leq \int_0^\infty g(s)ds\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx\\ &\leq b_0\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2dsdx \qquad (5.9)\end{aligned}$$

Usando las desigualdades de Young, Poincare y las hipótesis sobre g, concluimos que, para cada $\epsilon_2 > 0$, existe $C_{\epsilon_2} > 0$, tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}K(t) \leq &-\frac{\rho_2 b_0}{2}\int_0^L \psi_t^2dx + \epsilon_2\int_0^L \psi_x^2dx + \epsilon_2\int_0^L \varphi_x^2dx\\ &+ C_{\epsilon_2}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx. \ \square\end{aligned}$$

Para $N := N(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ y $N_2 > 0$, definimos el funcional $\xi(t)$ como

$$\xi(t) := N(E(t) + E_2(t)) + F_1(t) + N_2K(t) \qquad (5.10)$$

Luego

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = N(\frac{d}{dt}E(t) + \frac{d}{dt}E_2(t)) + \frac{d}{dt}F_1(t) + N_2\frac{d}{dt}K(t)$$

Lema 5.3

Existe una constante positiva C_1, tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\xi(t) \leq &\frac{-Nk_1}{2}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2ds)dx - (\frac{Nk_1}{2} - (C + N_2C_{\epsilon_2}))\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx\\ &-(\frac{\tilde{b}}{2} - C_1N_2\epsilon_2)\int_0^L \psi_x^2dx - (\frac{N_2\rho_2 b_0}{2} - C_{\epsilon_1})\int_0^L \psi_t^2dx\\ &+ \epsilon_1\int_0^L \varphi_t^2dx + 2N_2\epsilon_2\int_0^L|\varphi_x+\psi|^2dx\end{aligned}$$

Demostración:
De (5.1), (5.2), (5.3) y Lema 5.2, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\xi(t) \leq &-\frac{Nk_1}{2}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2ds)dx - (\frac{Nk_1}{2} - C - N_2C_{\epsilon_2})\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx \\ &- (\frac{\tilde{b}}{2} - N_2\epsilon_2)\int_0^L \psi_x^2dx - (\frac{N_2\rho_2b_0}{2} - C_{\epsilon_1})\int_0^L \psi_t^2dx \\ &+ \epsilon_1\int_0^L \varphi_t^2dx + N_2\epsilon_2\int_0^L \varphi_x^2dx \end{aligned} \tag{5.11}$$

Por otro lado usando la desigualdad triangular, propiedad de números reales y la desigualdad de Poincare, resulta que

$$\int_0^L \varphi_x^2dx \leq 2\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2dx + 2C_p\int_0^L \psi_x^2dx \tag{5.12}$$

Asi reemplazando (5.12) en (5.11), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\xi(t) \leq &-\frac{Nk_1}{2}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2ds)dx - (\frac{Nk_1}{2} - C - N_2C_{\epsilon_2})\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx \\ &- (\frac{\tilde{b}}{2} - C_1N_2\epsilon_2)\int_0^L \psi_x^2dx - (\frac{N_2\rho_2b_0}{2} - C_{\epsilon_1})\int_0^L \psi_t^2dx \\ &+ \epsilon_1\int_0^L \varphi_t^2dx + 2N_2\epsilon_2\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2dx. \ \square \end{aligned}$$

Definimos el funcional $F_2(t)$ como

$$F_2(t) := \rho_2\int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi)dx + \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\int_0^L \psi_x\varphi_tdx + \frac{\rho_1}{k}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)\varphi_tdx$$

Lema 5.4

Para cualquier $\epsilon_3 > 0$, existe una constante $C_{\epsilon_3} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_2(t) \leq &[(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2dx + \epsilon_3\int_0^L \varphi_t^2dx \\ &+ \rho_2\int_0^L \psi_t^2dx + C_{\epsilon_3}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx + C_{\epsilon_3}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2ds)dx \end{aligned}$$

Demostración:
Derivando $F_2(t)$ con respecto a t, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_2(t) = &\rho_2\int_0^L \psi_{tt}(\varphi_x + \psi)dx + \rho_2\int_0^L \psi_t(\varphi_x + \psi)_tdx + \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\int_0^L \psi_x\varphi_{tt}dx \\ &+ \frac{\rho_1\tilde{b}}{k}\int_0^L \psi_{tx}\varphi_tdx + \frac{\rho_1}{k}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}^t(x,s)ds)\varphi_tdx \\ &+ \frac{\rho_1}{k}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)\varphi_{tt}dx \end{aligned} \tag{5.13}$$

Usando las ecuaciones (1.9), (1.10) y (1.11), en (5.13), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_2(t) = &\int_0^L (\varphi_x+\psi)[(b-\int_0^\infty g(s)ds)\psi_{xx}+\int_0^\infty g(s)\eta^t_{xx}(x,s)ds - k(\varphi_x+\psi)]dx\\ &+\rho_2\int_0^L \psi_t^2dx + (\frac{\rho_1 b}{k}-\rho_2)\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx + \tilde{b}\int_0^L \psi_x(\varphi_x+\psi)_x dx\\ &-\frac{\rho_1}{k}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta^t_{sx}(x,s)ds)\varphi_t dx + \int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta^t_x(x,s)ds)(\varphi_x+\psi)_x dx\end{aligned}$$

Luego, usando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_2(t) =&[(\tilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta^t_x ds)\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2dx + \rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx\\ &+(\frac{\rho_1 b}{k}-\rho_2)\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx + \frac{\rho_1}{k}\int_0^L(\int_0^\infty g'(s)\eta^t_x ds)\varphi_t dx \qquad (5.14)\end{aligned}$$

De (1.11), tenemos: $\psi_{xt} = \eta^t_{xt} + n^t_{xs}$, como $b_0 = \int_0^\infty g(s)ds$ y usando integración por partes con respecto a "s", resulta que

$$\begin{aligned}b_0\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx &= \int_0^L(\int_0^\infty g(s)\psi_{xt}ds)\varphi_t dx\\ &= \int_0^L(\int_0^\infty g(s)[\eta^t_{xt}+\eta^t_{xs}]ds)\varphi_t dx\\ &= \int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta^t_{xt}ds)\varphi_t dx + \int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta^t_{xs}ds)\varphi_t dx\\ &= \int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta^t_{xt}ds)\varphi_t dx - \int_0^L(\int_0^\infty g'(s)\eta^t_{x}ds)\varphi_t dx\end{aligned}$$

Luego obtenemos

$$\int_0^L \psi_{xt}\varphi_t dx = \frac{1}{b_0}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta^t_{xt}ds)\varphi_t dx - \frac{1}{b_0}\int_0^L(\int_0^\infty g'(s)\eta^t_x ds)\varphi_t dx \qquad (5.15)$$

Sustituyendo (5.15) en (5.14), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_2(t) =&[(\tilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta^t_x(x,s)ds)\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2dx + \rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx\\ &+\frac{1}{b_0}(\frac{\rho_1 b}{k}-\rho_2)\int_0^L(\int_0^\infty g(s)\eta^t_{xt}(x,s)ds)\varphi_t dx\\ &-[\frac{\rho_1}{k}(\frac{b}{b_0}-1)-\frac{\rho_2}{b_0}]\int_0^L(\int_0^\infty g'(s)\eta^t_x ds)\varphi_t dx \qquad (5.16)\end{aligned}$$

Finalmente, usando las hipótesis sobre g y la desigualdad de Young en (5.16), concluimos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_2(t) \leq &[(\tilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta^t_x(x,s)ds)\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2dx + \rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx\\ &+\epsilon_3\int_0^L \varphi_t^2 dx + C_{\epsilon_3}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta^t_x|^2ds)dx + C_{\epsilon_3}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta^t_{xt}|^2ds)dx.\end{aligned}$$

Lema 5.5

Sea $q \in C^1([0,L])$, satisfaciendo $q(0) = -q(L) = 2$, y sean las funcionales

$J_1(t) := \rho_2 \int_0^L \psi_t q(x)(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)dx,$

$J_2(t) := \rho_1 \int_0^L \varphi_t q(x)\varphi_x dx.$

Entonces existe $C_1 > 0$ y para cada $\tilde{\epsilon} > 0$ existe una constante positiva $C_{\tilde{\epsilon}} > 0$ tal que

i)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_1(t) \leq &- [(\tilde{b}\psi_x(L,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(L,s)ds)^2 + (\tilde{b}\psi_x(0,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(0,s)ds)^2] \\
&+ C_1\int_0^L \psi_t^2 dx + \tilde{\epsilon}\int_0^L \varphi_x^2 dx + C_{\tilde{\epsilon}}\int_0^L \psi_x^2 dx + C_{\tilde{\epsilon}}\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds)dx
\end{aligned}$$

ii)

$$\frac{d}{dt}J_2(t) \leq -k[\varphi_x^2(L,t) + \varphi_x^2(0,t)] + C_1\int_0^L [\varphi_t^2 + \varphi_x^2 + \psi_x^2]dx$$

Demostración

i) En primer lugar derivando $J_1(x)$ con respecto a t, tenemos

$$\frac{d}{dt}J_1(t) = \int_0^L \rho_2 q(x)\psi_{tt}(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x ds) + \int_0^L \rho_2 q(x)\psi_t(\tilde{b}\psi_{tx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{tx}^t ds)dx$$

Usando (1.10) en la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}J_1(t) = &\int_0^L q(x)(\tilde{b}\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t ds - k(\varphi_x + \psi))(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)dx \\
&+ \int_0^L \rho_2 q(x)\psi_t(\tilde{b}\psi_{tx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{tx}^t ds)dx
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Pero, usando integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^L q(x)(\tilde{b}\psi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t ds)(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)dx \\
&\qquad = [\frac{q(x)}{2}(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)^2]_{x=0}^{x=L} \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\int_0^L q'(x)(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)^2 dx
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Usando (1.11) y la integración por partes con respecto a s en el último término de (5.17), tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^L \rho_2 q(x)\psi_t(\tilde{b}\psi_{tx}+\int_0^\infty g(s)\eta_{tx}^t ds)dx = &-\frac{\rho_2}{2}(\tilde{b}+b_0)\int_0^L q'(x)\psi_t^2 dx\\ &+\rho_2\int_0^L q(x)\psi_t(\int_0^\infty g'(s)\eta_x^t ds)dx \end{aligned} \tag{5.19}$$

Reemplazando (5.18) y (5.19) en (5.17), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_1(t) = &-[(\tilde{b}\psi_x(0,t)+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(0,s)ds)^2dx+(\tilde{b}\psi_x(L,t)+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(L,s)ds)^2]\\ &-\frac{1}{2}\int_0^L q'(x)(\tilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)^2dx\\ &-\frac{\rho_2}{2}(\tilde{b}+b_0)\int_0^L q'(x)\psi_t^2dx+\rho_2\int_0^L q(x)\psi_t(\int_0^\infty g'(s)\eta_x^t ds)dx\\ &-k\int_0^L q(x)(\varphi_x+\psi)(\tilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)dx \end{aligned} \tag{5.20}$$

Ahora vamos a estimar los términos del lado derecho, de (5.20).
Usando $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, $q \in C^1([0,L])$ y (5.9), tenemos

$$-\frac{1}{2}\int_0^L q'(x)(\tilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)^2dx \leq C\tilde{b}^2\int_0^L \psi_x^2dx + Cb_0\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx \tag{5.21}$$

Como $q \in C^1([0,L])$, tenemos

$$-\frac{\rho_2}{2}(\tilde{b}+b_0)\int_0^L q'(x)\psi_t^2dx \leq \frac{\rho_2}{2}(\tilde{b}+b_0)C\int_0^L \psi_t^2dx \tag{5.22}$$

Empleando la desigualdad de Young y usando (1.14), obtenemos

$$\begin{aligned}\rho_2\int_0^L q(x)\psi_t(\int_0^\infty g'(s)\eta_x^t ds)dx \leq &\epsilon\rho_2 k_1 D\int_0^L \psi_t^2 dx\\ &+C_\epsilon\rho_2 k_1 D b_0\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx \end{aligned} \tag{5.23}$$

Usando $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, la desigualdad de Young, la desigualdad de Poincare y (5.9), tenemos

$$\begin{aligned}-k\int_0^L q(x)(\varphi_x+\psi)(\tilde{b}\psi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)dx \leq &2Dk\epsilon\int_0^L \varphi_x^2dx+2Dk\epsilon C\int_0^L\psi_x^2dx\\ &+2Dk\tilde{b}^2C_\epsilon\int_0^L\psi_x^2dx\\ &+2Dkb_0C_\epsilon\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx \end{aligned} \tag{5.24}$$

Finalmente de (5.21), (5.22), (5.23) y (5.24) en (5.20), tenemos nuestra conclusión

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_1 \leq &-[(\tilde{b}\psi_x(L,t)+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(L,s))^2+(\tilde{b}\psi_x(0,t)+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(0,s)ds)^2]\\ &+C_1\int_0^L \psi_t^2dx+\tilde{\epsilon}\int_0^L \varphi_x^2dx+C_{\tilde{\epsilon}}\int_0^L \psi_x^2dx+C_{\tilde{\epsilon}}\int_0^L(\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2ds)dx\end{aligned}$$

ii) Tenemos

$$\frac{d}{dt}J_2(t)=\rho_1\int_0^L q(x)\varphi_{tt}\varphi_xdx+\rho_1\int_0^L q(x)\varphi_t\varphi_{xt}dx$$

Usando (1.9): $\rho_1\varphi_{tt}=k(\varphi_x+\psi)_x$ e integracion por partes en la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_2(t) =&k\int_0^L q(x)\varphi_{xx}\varphi_xdx+k\int_0^L q(x)\psi_x\varphi_xdx+\rho_1\int_0^L q(x)\varphi_t\varphi_{xt}dx\\ =&\frac{k}{2}\int_0^L q(x)\frac{d}{dx}\varphi_x^2+k\int_0^L q(x)\psi_x\varphi_xdx+\frac{\rho_1}{2}\int_0^L q(x)\frac{d}{dx}\varphi_t^2\\ =&\frac{k}{2}[(q(x)\varphi_x^2)\begin{matrix}x=L\\x=0\end{matrix}-\int_0^L q'(x)\varphi_x^2dx]\\ &+k\int_0^L q(x)\psi_x\varphi_xdx+\frac{\rho_1}{2}[(q(x)\varphi_t^2)\begin{matrix}x=L\\x=0\end{matrix}-\int_0^L q'(x)\varphi_t^2dx]\\ =&-k[\varphi_x^2(L,t)+\varphi_x^2(0,t)]-\frac{k}{2}\int_0^L q'(x)\varphi_x^2dx\\ &+k\int_0^L q(x)\psi_x\varphi_xdx-\frac{\rho_1}{2}\int_0^L q'(x)\varphi_t^2dx \qquad (5.25)\end{aligned}$$

Ahora vamos a estimar cada uno de los términos del lado derecho de (5.25)
Usando $q\in C^1([0,1])$, obtenemos

$$-\frac{k}{2}\int_0^L q'(x)\varphi_x^2dx\leq\frac{k}{2}C\int_0^L|\varphi_x|^2dx \qquad (5.26)$$

$$-\frac{\rho_1}{2}\int_0^L q'(x)\varphi_t^2dx\leq\frac{\rho_1}{2}C\int_0^L|\varphi_t|^2dx \qquad (5.27)$$

Como $q\in C^1([0,L])$ y $2ab\leq a^2+b^2$, obtenemos

$$k\int_0^L q(x)\psi_x\varphi_xdx\leq\frac{kD^2}{2}\int_0^L|\psi_x|^2dx+\frac{k}{2}\int_0^L|\varphi_x|^2dx \qquad (5.28)$$

Luego de (5.26), (5.27) y (5.28) en (5.25), concluimos que existe $C_1>0$ tal que

$$\frac{d}{dt}J_2(t)\leq -k[\varphi_x^2(L,t)+\varphi_x^2(0,t)]+C_1\int_0^L[\varphi_t^2+\varphi_x^2+\psi_x^2]dx.\ \square$$

Para $\delta > 0$ y $\tilde{N} > 0$, definimos

$$F_3(t) := F_2(t) + \tilde{N} J_1(t) + \delta J_2(t) \tag{5.29}$$

Lema 5.6

Existen constantes positivas τ, C_τ y C_2, tal que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_3(t) \leq &- \frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \tau C_2 \int_0^L \varphi_t^2 dx \\ &+ C_\tau \int_0^L [\psi_x^2 + \psi_t^2 + \int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds + \int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2 ds] dx.\end{aligned}$$

Demostración:

Derivando la expresión (5.29) con respecto a t, tenemos

$$\frac{d}{dt}F_3(t) = \frac{d}{dt}F_2(t) + \tilde{N}\frac{d}{dt}J_1(t) + \delta\frac{d}{dt}J_2(t)$$

Así de los Lemas (5.4) y (5.5), en la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_3(t) \leq &[(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)\varphi_x]_{x=0}^{x=L} - k\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \epsilon_3 \int_0^L \varphi_t^2 dx \\ &+ \rho_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + C_{\epsilon_3}\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds) dx + C_{\epsilon_3}\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2 ds) dx \\ &- \tilde{N}[(\tilde{b}\psi_x(L,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(L,s)ds)^2 + (\tilde{b}\psi_x(0,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(0,s)ds)^2] \\ &+ \tilde{N}C_1\int_0^L \psi_t^2 dx + \tilde{\epsilon}\tilde{N}\int_0^L \varphi_x^2 dx + \tilde{N}C_{\tilde{\epsilon}}\int_0^L \psi_x^2 dx + \tilde{N}C_{\tilde{\epsilon}}\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds) dx \\ &- \delta k[\varphi_x^2(L,t) + \varphi_x^2(0,t)] + \delta C_1 \int_0^L [\varphi_t^2 + \varphi_x^2 + \psi_x^2] dx\end{aligned} \tag{5.30}$$

Como $|\varphi_x| \leq |\varphi_x + \psi| + |\psi|$ y $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, tenemos

$$k|\varphi_x|^2 \leq 2k|\varphi_x + \psi|^2 + 2k|\psi|^2$$

Usando la desigualdad de Poincare en la expresión anterior, tenemos

$$-\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx \leq -\frac{k}{4}\int_0^L |\varphi_x|^2 dx + C\int_0^L |\psi_x|^2 dx \tag{5.31}$$

para alguna constante $C > 0$.

Usando la desigualdad de Young y propiedad de números reales, tenemos

$$\begin{aligned}
[(\tilde{b}\psi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)\varphi_x]_{x=0}^{x=L} \leq & \delta k[\varphi_x^2(L,t) + \varphi_x^2(0,t)] \\
& + \tilde{N}[(\tilde{b}\psi_x(L,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(L,t)ds)^2 \\
& + (\tilde{b}\psi_x(0,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(0,t)ds)^2]
\end{aligned} \tag{5.32}$$

para $\tilde{N} \geq C_{\delta k}$

Usando (5.31)y para $(\tilde{\epsilon}\tilde{N} + \delta C_1) \leq \frac{k}{4}$, tenemos

$$\begin{aligned}
(\tilde{\epsilon}\tilde{N} + \delta C_1)\int_0^L \varphi_x^2 dx \leq & \frac{k}{4}\int_0^L \varphi_x^2 dx \\
\leq & \frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + C\int_0^L |\psi_x|^2 dx
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Reemplazando (5.32) y (5.33) en (5.30), para $\tilde{\epsilon} > 0$, $\epsilon_3 > 0$, $\delta > 0$ suficientemente pequeños y $\tilde{N}$ suficientemente grande y para $0 < \tau < 1$, existe C_τ y $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_3(t) \leq & -\frac{k}{2}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + \tau C_2\int_0^L \varphi_t^2 dx \\
& + C_\tau\int_0^L [\psi_x^2 + \psi_t^2 + \int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds + \int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2 ds]dx. \ \square
\end{aligned}$$

Finalmente, definimos el funcional

$$F_4(t) := -\int_0^L [\rho_1\varphi_t\varphi + \rho_2\psi_t\psi]dx \tag{5.34}$$

Lema 5.7

Existen constantes positivas τ, C_τ y C_2 tal que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{F_3(t) + \frac{2\tau C_2}{\rho_1}F_4(t)\} \leq & -\frac{k}{4}\int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx - \tau C_2\int_0^L \varphi_t^2 dx \\
& + C_\tau\int_0^L [\psi_t^2 + \psi_x^2]dx \\
& + C_\tau\int_0^L [\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds + \int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2 ds]dx
\end{aligned}$$

Demostración:
Derivando la expresión (5.34), con respecto a t, tenemos

$$\frac{d}{dt}F_4(t) = -\int_0^L [\rho_1\varphi_{tt}\varphi + \rho_1\varphi_t\varphi_t + \rho_2\psi_{tt}\psi + \rho_2\psi_t\psi_t]dx \tag{5.35}$$

Reemplazando (1.9), (1.10), integrando por partes y $\tilde{b} = b - b_0$, en (5.35), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_4(t) = &-\rho_1\int_0^L \varphi_t^2 dx - \rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 dx + \tilde{b}\int_0^L \psi_x^2 dx\\ &+\int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)\psi_x dx \qquad (5.36)\end{aligned}$$

Por otro lado usando la desigualdad de Young, tenemos

$$\int_0^L (\int_0^\infty g(s)\eta_x^t ds)\psi_x dx \leq \sigma\int_0^L \psi_x^2 dx + b_0 C_\sigma\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds)dx \qquad (5.37)$$

Por lo tanto, reemplazando (5.37) en (5.36), para un C grande, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_4(t) \leq &-\rho_1\int_0^L \varphi_t^2 dx - \rho_2\int_0^L \psi_t^2 dx + k\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 dx\\ &+C\int_0^L [\psi_x^2 + \int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds]dx \qquad (5.38)\end{aligned}$$

Usando Lema 5.6, (5.38) y escogiendo τ suficientemente pequeño, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{d}\{F_3(t) + \frac{2\tau C_2}{\rho_1}F_4(t)\} \leq &(-\frac{k}{2} + \frac{2\tau C_2 k}{\rho_1}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 dx + (\tau C_2 - 2\tau C_2)\int_0^L \varphi_t^2 dx\\ &+(C_\tau + \frac{2\tau C_2 C}{\rho_1})\int_0^L \psi_x^2 dx + (C_\tau - \frac{2\rho_2\tau C_2}{\rho_1})\int_0^L \psi_t^2 dx\\ &+(C_\tau + \frac{2\tau C_2 C}{\rho_1})\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds)dx\\ &+C_\tau\int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2 ds)dx \qquad (5.39)\end{aligned}$$

Tomando $0 < \dfrac{\tau C_2}{\rho_1} \leq \dfrac{1}{8}$ y $\tilde{C}_\tau = C_\tau + 2\dfrac{\tau C_2 C}{\rho_1}$ en (5.39), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{F_3(t) + \frac{2\tau C_2}{\rho_1}F_4(t)\} \leq &-\frac{k}{4}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 dx - \tau C_2\int_0^L \varphi_t^2 dx\\ &+\tilde{C}_\tau\int_0^L [\psi_t^2 + \psi_x^2]dx\\ &+\tilde{C}_\tau\int_0^L [\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds + \int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2 ds]dx.\end{aligned}$$

Ahora estamos en condiciones de demostrar la tasa de decaimiento polinomial de la energía de primer orden.

Teorema 5.8

Supongamos que no se cumple (1.16), el núcleo g verifica la condición (1.14) y que los datos iniciales satisfacen φ_0, $\psi_0 \in H^2 \cap H_0^1(0,L)$, $\eta_0 \in L_g^2(\mathbb{R}^+, H^2 \cap H_0^1)$ y

$\varphi_1, \psi_1 \in H_0^1(0, L)$.
Entonces la energía de primer orden $E(t)$ decae de forma polinomial para cero, esto es, existe una constante positiva C independiente de los datos iniciales tal que

$$E(t) \leq \frac{C}{t}(E(0) + E_2(0)).$$

Demostración:
Definimos el funcional $\mathcal{L}(t)$ como

$$\mathcal{L}(t) := \xi(t) + \mu\{F_3(t) + \frac{2\tau C_2}{\rho_1} F_4(t)\} \tag{5.40}$$

En (5.40), derivando con respecto a la variable t, usando el Lema 5.3 y Lema 5.7, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq & (\mu\tilde{C}_\tau - \frac{Nk_1}{2}) \int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2 ds)dx \\
& + (\mu\tilde{C}_\tau - \frac{Nk_1}{2} + C + N_2 C_{\epsilon_2}) \int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds)dx \\
& + (2N_2\epsilon_2 - \mu\frac{k}{4}) \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx + (\epsilon_1 - \mu\tau C_2) \int_0^L \varphi_t^2 dx \\
& + (\mu\tilde{C}_\tau + C_{\epsilon_1} - N_2\frac{\rho_2 b_0}{2}) \int_0^L \psi_t^2 dx \\
& + (C_1 N_2 \epsilon_2 - \frac{\tilde{b}}{2} + \mu\tilde{C}_\tau) \int_0^L \psi_x^2 dx \\
\leq & -\lambda_1 \int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_{xt}^t|^2 ds)dx - \lambda_2 \int_0^L (\int_0^\infty g(s)|\eta_x^t|^2 ds)dx \\
& - \lambda_3 \int_0^L \varphi_t^2 dx - \lambda_4 \int_0^L \psi_t^2 dx - \lambda_5 \int_0^L \psi_x^2 dx \\
& - \lambda_6 \int_0^L |\varphi_x + \psi|^2 dx
\end{aligned} \tag{5.41}$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{Nk_1}{2} - \mu\tilde{C}_\tau > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{Nk_1}{2} - C - N_2 C_{\epsilon_2} - \mu\tilde{C}_\tau > 0,\ N > \frac{2}{k_1}(C + N_2 C_{\epsilon_2} + \mu\tilde{C}_\tau),\ N > 0$$

$$\lambda_3 = \mu\tau C_2 - \epsilon_1 > 0$$

$$\lambda_4 = N_2\frac{\rho_2 b_0}{2} - \mu\tilde{C}_\tau - C_{\epsilon_1} > 0,\ N_2 > \frac{2}{\rho_2 b_0}(\mu\tilde{C}_t + C_{\epsilon_1}),\ N_2 > 0$$

$$\lambda_5 = \frac{\tilde{b}}{2} - C_1 N_2 \epsilon_2 - \mu\tilde{C}_\tau > 0$$

$$\lambda_6 = \frac{\mu k}{4} - 2N_2\epsilon_2 > 0$$

Tomando $N > \dfrac{2}{k_1}(C + N_2 C_{\epsilon_2} + \mu \tilde{C}_\tau)$, tenemos que $\lambda_1 > 0$; para $0 < \epsilon_2 < \text{mín}\{\dfrac{\mu k}{8N_2}, \dfrac{\tilde{b}}{4C_1 N_2}\}$, con $\mu > \dfrac{\tilde{b}}{4C_\tau}$, encontramos $\lambda_5 > 0$, $\lambda_6 > 0$, por ultimo como $-\lambda_1 \|\eta\|^2_{L^2_g} \leq 0$ en (5.41), tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\lambda E(t) \tag{5.42}$$

para algún $\lambda = \text{mín}\{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\} > 0$.

Luego integrando (5.42), de 0 a t, tenemos

$$\lambda \int_0^t E(s)ds \leq \mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t), \forall t \geq 0 \tag{5.43}$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Holder, la desigualdad de Poincare, la desigualdad de Young, existe una constante positiva β, tal que

$$\mathcal{L}(t) \leq \beta[E(t) + E_2(t)], \ \forall t \geq 0 \tag{5.44}$$

Luego usando (5.44), la desigualdad triangular y como la energía es decreciente, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t) &\leq |\mathcal{L}(0) - \mathcal{L}(t)| \\ &\leq |\mathcal{L}(0)| + |\mathcal{L}(t)| \\ &\leq 2\beta[E(0) + E_2(0)]\end{aligned} \tag{5.45}$$

De (5.45) en (5.43) tenemos

$$\lambda \int_0^t E(s)ds \leq 2\beta(E(0) + E_2(0)) \tag{5.46}$$

Recordemos que $\dfrac{d}{dt}E(t) \leq 0$, luego tenemos

$$\frac{d}{dt}[tE(t)] = E(t) + t\frac{d}{dt}E(t) \leq E(t), \forall t \geq 0 \tag{5.47}$$

Integrando con respecto a la variable t, desde 0 a t, en (5.47) y usando (5.46), obtenemos

$$tE(t) \leq \int_0^t E(s)ds \leq \frac{2\beta}{\lambda}(E(0) + E_2(0))$$

En consecuencia, tomando $C = \dfrac{2\beta}{\lambda} > 0$ concluimos que

$$E(t) \leq \frac{C}{t}(E(0) + E_2(0)).$$

Hemos demostrado que el sistema decae polinomialmente.

Conclusiones

- En este trabajo se ha demostrado que la disipación dada por el término historia es bastante fuerte para la estabilización exponencial y polinomial del sistema, dependiendo de una buena relación entre las constantes del sistema.
- Usamos la teoría de semigrupos lineales para mostrar que el sistema (1.9)-(1.11) esta bien puesto y determinamos la estabilidad exponencial del sistema.
- En este trabajo usamos la teoría de semigrupos para probar la existencia y unicidad de soluciones para un sistema de Timoshenko con historia pasada. Por otro lado usando propiedades del generador infinitesimal de un semigrupo asociado al sistema se demuestra que es exponencialmente estable si y solo si las velocidades de las ondas son iguales. Cuando el sistema no es exponencialmente estable demostramos la estabilidad polinomial por el método de los multiplicadores que consiste en obtener estimativos para diferentes funcionales, también se le llama método de la energía.
- La principal contribución de este trabajo fue establecer una condición necesaria y suficiente para garantizar la estabilidad exponencial. En el caso más general, el decaimiento polinomial es demostrado.

Bibliografía

[1] Adams,R.A. and Fournier, J.F.F., *Sobolev Spaces*, Academic Press, Amsterdam, 2003.

[2] Ammar-Khodja,F.; Benabdallah,A.; Muñoz Rivera, J.E. and Racke, R. *Energy decay for Timoshenko systems of memory type. Journal Differential Equations*, 194(1)(2003), 82–115.

[3] Bartle, R.G. *The elements of integration and Lebesque measure.* New York: Wiley Classics. Wiley-Interscience. 1995.

[4] Borichev, A. and Tomilov, Y. *Optimal polynomial decay of funcion and operate semigroups. Mathematische Annalen*, 347, (2009), 455-478.

[5] Brezis, H. *Analyse Fonctionelle, théorie et Applications.* Masson, Paris, 1983.

[6] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations* Springer, New York, 2011.

[7] Cavalcanti, M.M. and Cavalcanti, V.N.D. *Introdução ã Teoria das Distruiçoes e aos Espaços de Soboler.* Eduem, Maringá, PR, 2009.

[8] Dafermos, C.M. *Asymptotic stability in viscoelasticity. Arch Rational Mech. Anal.* 37,(1970), 297-308.

[9] Dautray, R. and Lion, J.L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Volume 5-Evolution Problems I.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[10] Fernandez Sare, H. and Muñoz Rivera, J. *Stability of Timoshenko system with past history.* J. Math. Anal. Appl. 339(2008), 482-502.

[11] Friedman, A. *Partial Differential Equations.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.

[12] Gomes, A.M. *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicaçoes ás Equaçoes de Evolução. Segunda Edición, Textos de Métodos Matemáticos 19*, IM-UFRJ, 1985.

[13] Kesavan, S. *Topics in functional analysis and applications.* New York: Wiley, 1989.

[14] Kim, J.U. and Renardy, Y. *Boundary control of the Timoshenko beam. SIAM, Journal Control and Optimization*, 25(6)(1987), 1417-1429.

[15] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley & Sons. Inc., New York, NY, 1978.

[16] Liu, Z. and Zheng, S. *Semigroups Associated with Dissipative Systems. Research Notes in Mathematics, Volumen 398*, Chapman & Hall/CRC, Boca Ratón, 1999.

[17] Ma, Z.; Zhang, L. and Yang, X. *Exponential stability for a Timoshenko-type system with history.* J. Math. Anal. Appl. 380 (2011), 299-312.

[18] Medeiros, L.A. *Tópicos em Equações Diferenciais Parciais. Parte I, IM-UFRJ*, Rio de Janeiro, RJ, 2006.

[19] Messaoudi, S.A. and Said-Houari, B. *Uniform decay in a Timoshenko-type system with history.* J. Math. Anal. Appl. 360(2009), 459-475.

[20] Muñoz Rivera, J.E. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais. Serie de Textos Avanzados.* LNCC, Petrópolis-Rio de Janeiro, 2004.

[21] Muñoz Rivera, J.E. *Estabilização de Semigrupos e Aplicações.Serie de Textos Avanzados.* LNCC, Petrópolis-Rio de Janeiro, 2008.

[22] Muñoz Rivera, J.E. and Rake, R. *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko Systems-Global existence and exponential stability. Journal Math. Anal. Appl.* 276(2002), 248-278.

[23] Muñoz Rivera, J.E. and Rake, R. *Global stability for damped Timoshenko system, Discrete and continuous Dynamical Systems.* 9(2003),1625-1639.

[24] Olivera, C.R. *Introdução á Análise Funcional.* Rio de Janeiro: Impa, 2012.

[25] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New York, NY, 1983.

[26] Prüss, J. *On the spectrum of C_0-semigroups.* Trans. Amer. Math. Soc. 284(2)(1984), 847-857.

[27] Prüss, J.; Bátkai, A.; Engel, K. and Schnaubelt. *Polinomial stability of operator semigroups.* Math. Nachr. 279(2006), 1425-1440.

[28] Soufyane, A. *Stabilisation de la poutre de Timoshenko.* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I 328 (199), 731-734.

[29] Timoshenko, S. *On the correctión for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismaticbars.* Philos, Mag 41 (1921), 744-746.

[30] Timoshenko, S. *Vibration Problem in Enginearing.* Van Nostrand, New York, 1928.

[31] Zheng, S. *Nonlinear evolutions equations.* Chapman & Hall / CRC, Boca Ratón, FL, 2004.