Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Académico Profesional de Matemática

Buena colocación para la ecuación Korteweg-de Vries modificada en $H^2(\mathbb{R})$

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Fredy Andrés ORTIZ DIAZ

ASESOR

José Raúl LUYO SANCHEZ

Lima, Perú

2016

Referencia bibliográfica

Ortiz, F. (2016). *Buena colocación para la ecuación Korteweg-de Vries modificada en* H^2 *(R)*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Académico Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

10(R)
VB.

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ...18:00.. horas del Viernes 2 de diciembre de 2016, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Calificador de Tesis: Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini (Presidente), Mg. Tomás Alberto Núñez Lay (Miembro), Dr. José Raúl Luyo Sánchez (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada: «BUENA COLOCACIÓN PARA LA ECUACIÓN KORTEWEG - DEVRIES MODIFICADA EN $H^2(\mathbb{R})$», presentado por el señor Bachiller FREDY ANDRÉS ORTIZ DIAZ, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

....dieciocho.....................(18).

A continuación el Presidente del Jurado, Dr. Víctor Rafael Cabanillas Zannini, manifestó que el señor Bachiller FREDY ANDRÉS ORTIZ DIAZ, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 18:50.. horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. VÍCTOR RAFAEL CABANILLAS ZANNINI
PRESIDENTE

MG. TOMÁS ALBERTO NÚÑEZ LAY
MIEMBRO

DR. JOSÉ RAÚL LUYO SÁNCHEZ
MIEMBRO ASESOR

FICHA CATALOGRÁFICA

Ortiz Diaz, Fredy Andrés

Buena colocación para la ecuación Korteweg-de Vries modificada en $H^2(\mathbb{R})$, (Lima) 2016.
XI, 50 p., 29.7 cm, (UNMSM, Licenciado en Matemática, 2016).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas. UNMSM/F de CM.

Agradecimentos

- A Dios, por cuidarme y guiar mi camino y el de mis seres amados.

- A Vanessa, mi amada esposa, quien comparte cada día mis alegrías y penas, la persona en quien más confío. Gracias por tu amor y comprensión, eres mi compañera.

- A mi familia, por su apoyo y cariño. En especial a mis padres, Santos y Luz, quienes son los cimientos de un hogar fuerte y unido. Por su amor, apoyo y por creer em mí. Sus enseñanzas me conviertieron en el hombre que hoy soy.

- A mis hermanas Marissa y Karina a quienes considero mis amigas. Por las palabras de motivación que tuve siempre de ellas y por su apoyo desde pequeño. Mis logros son los suyos.

- A mi sobrina Belén, por las ocurrencias de una niña inteligente, quien tiene un futuro promisorio.

- A mi asesor José Luyo, a quien hoy considero un amigo. Le agradezco por sus enseñanzas matemáticas y correcciones. Incluso hoy laborando juntos aprendo con sus sugerencias. Escribir matemática es un arte que debemos perfeccionar a lo largo de la vida.

- En memoria de mi buen amigo Moises Izaguirre, quien con sus valiosos y variados conocimientos de matemática y de la vida en general trasnmitía, en las nuevas generaciones, su experiencia. Además, me dió la oportunidad de trabajar en mejores condiciones laborales y recomendó ir a Brasil para continuar mi formación profesional.

- A los profesores Rafael Cabanillas Zannini, Tomás Nuñes Lay, por aceptar ser parte del jurado y por las valiosas sugerencias, correcciones y comentarios que hicieron al trabajo.

- Finalmente, a los profesores, trabajadores y compañeros de clase de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos con quienes compartí muchas experiencias durante mi etapa de estudiante de pregrado, en esta mi querida alma máter.

Resúmen

Buena colocación para la ecuación Korteweg-de Vries modificada en $H^2(\mathbb{R})$

Fredy Andrés Ortiz Diaz

Asesor: José Raúl Luyo Sanchez

En este trabajo probamos resultados de buena colocación global para la ecuación de Korteweg-de Vries modificada en el espacio de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$ usando los argumentos probados por A. V. Famiskii em [4] y basada en los argumentos presentados por Peter E. Zhidkov em [22].

Palabras-clave: Ecuación de Korteweg-de Vries modificada, problema de Cauchy mKdV.

Abstract

Well posedness for modified Korteweg-de Vries equation in $H^2(\mathbb{R})$

Fredy Andrés Ortiz Diaz

Adviser: José Raúl Luyo Sanchez

In this work we prove global well-posedness results for the Cauchy problem associate to the modified Korteweg-de Vries equation in Sobolev space $H^2(\mathbb{R})$ using the arguments proved by A. V. Famiskii in [4] and based on the arguments given by Peter E. Zhidkov in [22].

Keywords: Modified Korteweg-de Vries equation, Cauchy problem mKdV.

Índice general

Introducción

El estudio de las propiedades cualitativas para las soluciones del problema de valor inicial (PVI) asociado a ecuaciones de evolución no-lineales que modelan fenómenos físicos aumentó bastante en las últimas décadas.

En este trabajo estamos interesados en estudiar la buena colocación del (PVI), también conocido como *Problema de Cauchy*, asociado a la ecuación de Korteweg-de Vries modificada (mKdV), esto es, estudiaremos el modelo:

$$
\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + \lambda u^2(x,t)\partial_x u(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda = \pm 1, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1}
$$

donde $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en el instante inicial $u(x,0) = u_0(x)$ será considerado en un espacio de funciones adecuado.

En nuestras palabras, buena colocación significa hallar existencia en cierto sentido especificado en el Capítulo (2), unicidad de la solución, y además dependencia continua, esto último, debido a que en muchos casos los datos iniciales son tomados en laboratorio, por tanto existe la posibilidad de un error mínimo, se busca entonces soluciones a nuestro problema (1) tales que si cambiamos un poco el valor inicial, las soluciones correspondientes no varíen demasiado.

Este modelo es aplicado en diversas áreas de la fisica; por ejemplo, aparece en el contexto de ondas electromagnéticas, en colisiones de plasmas, [9], en redes de fonones armónicos [19], en interfaces de ondas entre dos líquidos con profundidades variando gradualmente [7], en ión (solitón) acústicos [13],[20],[21], media elástica [14] y es aplicada tambiém en problemas de flujo de tráficos [10],[16],[17].

En este trabajo vamos a probar la buena colocación global del modelo (1) en el espacio de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$, de manera más precisa probaremos la existencia, unicidad y dependencia continua de las soluciones con datos iniciales en este espacio. Usaremos el método de Regularización Parabólica. Esta parte del trabajo será desarrollada en el Capítulo 2, tomando como base principal el artículo de A. V. Faminskii [4], donde los conceptos y definiciones serán dados con mayor detalle usando los argumentos de P. Zhidkov [22].

Si bien es cierto, la ecuación (1) admite otras posibles demostraciones para probar la buena colocación, como por ejemplo usando Semigrupos, la elección del método y nuestras referencias se deben a que uno de nuestros objetivos principales es conseguir que un estudiante de pre grado familiarizado con los conceptos básicos de análisis matemático y ecuaciones diferenciales parciales logre entender y aplicar a casos más generales lo expuesto en esta tesis.

Antes de demostrar los resultados técnicos en el Capítulo 2, en el Capítulo 1 presentamos algunos resultados preliminares de análisis que serán de utilidad para obtener los resultados deseados.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos algunos conceptos y resultados básicos del análisis que serán utilizados en el transcurrir del trabajo.

1.1. Desigualdades elementales

A seguir probaremos algunas desigualdades clásicas que serán útiles en la prueba de los resultados principales.

Proposición 1.1 (**Desigualdad de Young**). *Sean a, b, p y q números positivos tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{1.1}$$

Demostración. La aplicación $x \mapsto e^x$ es convexa, luego

$$ab = e^{\log a+\log b} = e^{\frac{1}{p}\log a^p+\frac{1}{q}\log b^q} \leq \frac{1}{p}e^{\log a^p}+\frac{1}{q}e^{\log b^q} = \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},$$

conforme anunciado. $\square$

Lema 1.1 (**Desigualdad de Young com ϵ**). *Para $a\,, b\,, \epsilon>0$*

$$ab \leq \epsilon a^p + C_\epsilon b^q,$$

donde $C_\epsilon = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$.

Demostración. Aplicar la desigualdad de Young en

$$ab = \left((\epsilon p)^{\frac{1}{p}} a\right)\left(\frac{b}{(\epsilon p)^{\frac{1}{p}}}\right).$$

$\square$

Proposición 1.2. *Sean dos números reales $a, b \geq 0$. Para todo $s \geq 0$, existen constantes positivas m_s y M_s, dependiendo apenas de s, tales que*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a+b)^s \leq M_s(a^s + b^s). \tag{1.2}$$

Demostración. Si $a = 0$ no hay nada a probar. Asumamos $a > 0$. La desigualdad (1.2) es equivalente a la desigualdad

$$m_s\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s\right] \leq \left(1 + \frac{b}{a}\right)^s \leq M_s\left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^s\right]. \tag{1.3}$$

Por lo tanto, es suficiente probar que existen constantes positivas m_s e M_s tales que

$$m_s(1 + r^s) \leq (1+r)^s \leq M_s(1 + r^s), \tag{1.4}$$

para todo $r > 0$. En efecto, consideremos la función

$$F(r) = \frac{(1+r)^s}{1+r^s}.$$

Observe que para todo r, $s \geq 0$ tenemos $1 \leq (1+r)^s$ y $r^s \leq (1+r)^s$. Luego, $1+r^s \leq 2(1+r)^s$, consecuentemente

$$\frac{1}{2} \leq \frac{(1+r)^s}{1+r^s}. \tag{1.5}$$

Por otro lado, para $r > 1$ se tiene $(1+r)^s \leq (r+r)^s = (2r)^s$. Por tanto,

$$(1+r)^s \leq 2^s(1+r^s), \quad \text{esto es,} \quad \frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq 2^s.$$

La función $F(r)$ es continua en $[0,1]$ y no se anula en ese intervalo, luego, existe $\mu_s = \max_{r\in[0,1]}\left\{\frac{(1+r)^s}{1+r^s}\right\}$. Tomando $M_s = \min\{2^s, \mu_s\}$, vemos que

$$\frac{(1+r)^s}{1+r^s} \leq M_s. \tag{1.6}$$

De las desigualdades (1.5) y (1.6) concluimos que

$$\frac{1}{2} \leq F(r) \leq M_s,$$

Como queríamos probar. □

Ahora vamos a probar otro resultado clásico y bastante importante, la desigualdad de Gronwall.

Proposición 1.3. *Sea $f : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua no negativa. Supongamos además que existen constantes no negativas a y b tales que*

$$f(t) \leq b + a \int_{t_0}^{t} f(s)ds, \tag{1.7}$$

para todo $t_0 \leq t \leq T$. Entonces, vale la desigualdad $f(t) \leq be^{a(t-t_0)}$, para todo $t_0 \leq t \leq T$.

Demostración. Sea $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s)ds$. Si $t \in [t_0, T]$, entonces por el teorema fundamental del cálculo y por (1.7) tenemos

$$F'(t) \leq f(t) \leq b + aF(t).$$

Integrando esta desigualdad en $[t_0, t]$ obtenemos

$$\frac{1}{a} \ln\left(\frac{b + aF(t)}{b}\right) \leq t - t_0.$$

Por lo tanto, $f(t) \leq b + aF(t) \leq be^{a(t-t_0)}$. Como queríamos mostrar. $\square$

1.2. Elementos de análisis funcional

Comenzamos por definir los espacios $L^p(I)$, donde I es un intervalo de recta ó $I = \mathbb{R}$.

Definición 1.1. *Sea $1 \leq p \leq \infty$ e $I \subseteq \mathbb{R}$. Denotaremos por $L^p(I)$ el conjunto de todas las funciones $f : I \to \mathbb{R}$ medibles según Lebesgue, tales que*

$$\|f\|_{L^p(I)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_I |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty, & si\ 1 \leq p < \infty, \\ \\ inf\big\{r : |f(x)| \leq r,\ c.t.p\ x \in I\big\} < \infty, & si\ p = \infty. \end{cases} \tag{1.8}$$

Si $I = \mathbb{R}$ denotaremos $||\cdot||_{L^p} = ||\cdot||_{L^p(\mathbb{R})}$. Los espacios $L^p(I)$ son espacios de Banach y en particular $L^2(I)$ es espacio de Hilbert con relación al producto interno

$$\langle u, v\rangle_{L^2(I)} = \int_I u(x)v(x)dx.$$

Además, vale el siguiente resultado importante.

Teorema 1.1 (**Desigualdad de Hölder**)**.** *Sean $p, q \geq 1$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, I un intervalo o $\mathbb{R}$. Si $f \in L^p(I)$, $g \in L^q(I)$, entonces $fg \in L^1(I)$ y vale la desigualdad*

$$\|fg\|_{L^1(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} \|g\|_{L^q(I)}. \tag{1.9}$$

Demostración. Si $\begin{array}{ccc} p=1 & \to & q=\infty \\ p=\infty & \to & q=1 \end{array}$, tenemos

$$\int_I |f(x)g(x)|dx \leq ||g||_\infty ||f||_1 \tag{1.10}$$

Veamos el caso $1 < p < \infty$. Debemos recordar la desigualdad de Young:

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,\ \forall\, a,b \geq 0$$

Considere $a = |f(x)|$, $b = |g(x)|$, entonces

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q$$

Integrando tenemos

$$\int_I |fg|\,dx \leq \frac{1}{p}\underbrace{\int_I |f(x)|^p\,dx}_{<\infty} + \frac{1}{q}\underbrace{\int_I |g(x)|^q\,dx}_{<\infty} \tag{1.11}$$

Luego $fg \in L^1(I)$.

Ahora, en lugar de considerar f usar λf, $\lambda > 0$

$$\lambda\int_I |fg|dx \leq \frac{\lambda^p}{p}||f||_p^p + \frac{1}{q}||g||_q^q$$

luego

$$\int_I |fg|dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}||f||_p^p + \frac{1}{q\lambda}||g||_q^q \tag{1.12}$$

Tomemos

$$\frac{\lambda^{p-1}}{p} = \frac{||g||_q}{2||f||_p^{p-1}} \Rightarrow \lambda^{p-1} = \frac{p}{2}\frac{||g||_q}{||f||_p^{p-1}}$$

$$\lambda = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{||g||_q^{\frac{1}{1-p}}}{||f||_p} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \frac{||g||_q^{\frac{1}{1-p}}}{||f||_p}$$

de donde

$$\frac{1}{\lambda q}||g||_q^q = \frac{1}{q\lambda}\left(\frac{2}{p}\right)^{\frac{1}{1-p}} \frac{||f||_p}{||g||_q^{\frac{1}{p-1}}}||g||_q^q \tag{1.13}$$

Reemplazando (1.13) en (1.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_I |fg|dx &\leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}||f||_p^p + \frac{1}{q\lambda}||g||_q^q \\
&< \frac{1}{2}||f||_p||g||_q + \frac{1}{2}||f||_p||g||_q^{q-\frac{1}{p-1}} \\
&= \frac{1}{2}||f||_p||g||_q + \frac{1}{2}||f||_p||g||_q^{\frac{pq-q-1}{p-1}} \\
&= ||f||_p||g||_q
\end{aligned}$$

Estamos usando el hecho que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ implica $p=pq-q$. □

Observación 1.1. *En algunas ocasiones usaremos una generalización de la desigualdad de Hölder. Para mayores detalles, revisar [3].*

Teorema 1.2 (Desigualdad de Interpolación). *Suponga $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\bigcap L^q(\mathbb{R}^n)$, con $p<q$ entonces $f\in L^r(\mathbb{R}^n)$ para todo $r\in[p,q]$. Además,*

$$||f||_r\leq ||f||_p^{\theta}||f||_q^{1-\theta},$$

donde $\dfrac{1}{r}=\dfrac{\theta}{p}+\dfrac{1-\theta}{q}$.

Demostración. Note que

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\frac{p}{\theta}}+\frac{1}{\frac{q}{1-\theta}}\Rightarrow 1=\frac{1}{\frac{p}{r\theta}}+\frac{1}{\frac{q}{r(1-\theta)}}$$

Llamemos $p'=\dfrac{p}{r\theta}$, $q'=\dfrac{q}{r(1-\theta)}\rightarrow 1=\dfrac{1}{p'}+\dfrac{1}{q'}$

Por otro lado, dado que $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $f^{r\theta}\in L^{\frac{p}{r\theta}}(\mathbb{R}^n)=L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Análogamente, dado que $f\in L^q(\mathbb{R}^n)$, entonces $f^{(1-\theta)r}\in L^{\frac{q}{(1-\theta)r}}(\mathbb{R}^n)=L^{q'}(\mathbb{R}^n)$. Aplicando el Teorema de Hölder para p',q' obtenemos

$$|f|^{r\theta}|f|^{(1-\theta)r}=|f|^r\in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Así, $||\,|f|^r||_1\leq ||\,|f|^{r\theta}||_{p'}||\,|f|^{(1-\theta)r}||_{q'}$.

Luego,

$$\begin{aligned}
||f||_r^r &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{r\theta p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{(1-\theta)rq'}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}}\\
||f||_r^r &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{p}\,dx\right)^{\frac{r\theta}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^{q}\,dx\right)^{\frac{r(1-\theta)}{q}}\\
||f||_r &\leq ||f||_p^{\theta}||f||_q^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

□

1.2.1. Convergencias en un espacio normado

Sea $\mathcal{N}$ un espacio normado con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$. Por $\mathcal{N}'$ denotamos el dual topológico de $\mathcal{N}$, que es el conjunto de todos los funcionales lineales y continuos definidos en $\mathcal{N}$. En $\mathcal{N}'$ se define la norma

$$\|f\|_{\mathcal{N}'}:=\sup\big\{|\langle f,\xi\rangle|;\xi\in\mathcal{N};\|\xi\|=1\big\},$$

con la cual $\mathcal{N}'$ es un espacio de Banach. Podemos ahora introducir las siguientes definiciones de convergencia.

Definición 1.2 (**Convergencia fuerte**). *Decimos que la sucesión* $(\xi_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{N}$ *converge fuertemente para* ξ *en* $\mathcal{N}$*, o, simplemente,* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *converge para* ξ *en* $\mathcal{N}$*, y denotamos* $\xi_n \to \xi$ *en* $\mathcal{N}$ *cuando*

$$\|\xi_n - \xi\|_{\mathcal{N}} \to 0.$$

Definición 1.3 (**Convergencia débil**). *Decimos que* $(\xi_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{N}$ *converge débilmente para* ξ *en* $\mathcal{N}$*, y denotamos* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *en* $\mathcal{N}$ *cuando*

$$\langle f, \xi_n \rangle \to \langle f, \xi \rangle , \quad \textit{para cada}\, f \in \mathcal{N}'.$$

Ahora, sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de elementos de $\mathcal{N}'$ y $f \in \mathcal{N}'$.

Definición 1.4 (**Convergencia débil***). *Decimos que* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge débil estrella para* f *en* $\mathcal{N}'$*, denotamos* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\mathcal{N}'$ *cuando*

$$\langle f_n, \xi \rangle \to \langle f, \xi \rangle , \quad \textit{para cada}\, \xi \in \mathcal{N}.$$

Es posible definir una topología en $\mathcal{N}$ llamada de topología débil que induce la convergencia débil enunciada en la definición (1.3). También se puede definir una topología en $\mathcal{N}'$ llamada topología débil* que induce la convergencia débil*. Cuando se procede de esta forma, las convergencias numéricas usadas en las definiciones arriba pasan a ser una consecuencia de la manera como las topologías son definidas. Para más detalles al respecto de estas topologías consulte Oliveira ([18], p.104).

Uno de los motivos para definir la topología débil* es el teorema de Alaoglu. Si $dim\, \mathcal{N}' = \infty$ se sabe que $\overline{B}_{\mathcal{N}'}(0; 1)$ no es compacta en la topología usual de $\mathcal{N}'$ ([18], p.11). Sin embargo, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.3 (**Alaoglu**). *Si* $\mathcal{N}$ *es un espacio normado, entonces la bola cerrada* $\overline{B}_{\mathcal{N}'}(0; 1)$ *es compacta en la topología débil*.*

Demostración. Consultar ([18], p. 108). □

Las principales relaciones entre estas convergencias serán indicadas en la siguiente proposición.

Proposición 1.4. *Sean* $(\xi_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de elementos en* $\mathcal{N}$*,* $(f_n)_{n\geq 1}$ *una sucesión de elementos en* $\mathcal{N}'$*,* $\xi \in \mathcal{N}$*, y* $f \in \mathcal{N}'$*. Se cumplen:*

(i) *Si* $\xi_n \to \xi$ *en* $\mathcal{N}$ *entonces* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *en* $\mathcal{N}$,

(ii) *Si* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *en* $\mathcal{N}$, *entonces* $\|\xi_n\|$ *es limitada y* $\|\xi\| \leq \liminf_n \|\xi_n\|$,

(iii) *Si* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *en* $\mathcal{N}$ *y* $f_n \to f$ *en* $\mathcal{N}'$ *entonces* $\langle f_n, \xi_n \rangle \to \langle f, \xi \rangle$,

(iv) *Si* $f_n \rightharpoonup f$ *en* $\mathcal{N}'$ *entonces* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\mathcal{N}'$,

(v) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\mathcal{N}'$ *y* $\xi_n \to \xi$ *en* $\mathcal{N}$, *entonces* $\langle f_n, \xi_n \rangle \to \langle f, \xi \rangle$,

(vi) *Si* $\mathcal{N}$ *es un espacio de Hilbert entonces* $\xi_n \to \xi$ *en* $\mathcal{N}$ *si y solamente si* $\xi_n \rightharpoonup \xi$ *en* $\mathcal{N}$ *y* $\|\xi_n\| \to \|\xi\|$.

1.3. Algunas notas sobre distribuciones

En esta sección presentamos resultados básicos de la teoría de distribuciones en $\mathbb{R}$.

Definición 1.5. *Una función real* f *de clase* C^∞ *definida en* $\mathbb{R}$ *está en el espacio de Schwartz si para todo par de números enteros no negativos* m *y* n *existe una constante* $C_{m,n}$ *tal que*

$$p_{m,n}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^m f^{(n)}(x) \right| \leq C_{m,n} < \infty. \tag{1.14}$$

Denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ al conjunto de las funciones que pertenecen al espacio de Schwartz.

Definición 1.6. *Decimos que una sucesión* $(\varphi_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *converge para cero, si para todo* $m, n \in \mathbb{N}_0$ *tenemos*

$$p_{m,n}(\varphi_j) \to 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, decimos que la sucesión $(\varphi_j)_{j\geq 1}$ de elementos en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge para φ en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, cuando la sucesión $(\varphi_j - \varphi)_{j\geq 1}$ converge para cero en el sentido dado en la definición (1.6).
Ahora vamos a definir la transformada de Fourier en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definición 1.7. *La transformada de Fourier de una función* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *denotada por* $\widehat{f}$ *es definida mediante la siguiente expresión*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx. \tag{1.15}$$

La próxima proposición resume las principales propiedades de la Transformada de Fourier en el espacio de Schwartz.

Proposición 1.5. *Sean f, g en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ y $t > 0$, entonces se cumplen*

(i) $\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$,

(ii) $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$,

(iii) $\widehat{bf} = b\hat{f}$,

(iv) $(f^{(m)})\hat{}(\xi) = (2\pi i\xi)^m \hat{f}(\xi)$,

(v) $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

Demostración. Consultar [6]. □

Las formas lineales definidas en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, continuas en el sentido de la convergencia definida en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ se denominan distribuciones temperadas. El espacio vectorial de todas las distribuciones temperadas con la convergencia puntual de sucesiones será representado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Así

$$\lim_{j\to\infty} T_j = T \text{ en } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ si } \lim_{j\to\infty} \langle T_j, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

El siguiente teorema es muy importante para estimar derivadas de funciones en $L^p(\mathbb{R})$ y será de mucha utilidad en el Capítulo 2.

Proposición 1.6 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg). *Sean $q, r \in [1, +\infty)$ y además $j, m \in \mathbb{N}_0$, tales que $0 \leq j \leq m$. Entonces*

$$\|f^{(j)}\|_{L^p} \leq C(j, m, q, r, \theta)\|f^{(m)}\|_{L^q}^{\theta}\|f\|_{L^r}^{1-\theta}, \tag{1.16}$$

para todo $\theta \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$ y p satisfaciendo

$$\frac{1}{p} = j + \theta\left(\frac{1}{q} - m\right) + (1-\theta)\frac{1}{r}.$$

Demostración. Consultar [5]. □

Teorema 1.4. *Sea $1 \leq p < \infty$. La aplicación inclusión*

$$\begin{aligned} i : \mathcal{S}(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^p(\mathbb{R}) \\ \varphi &\longmapsto i(\varphi) = \varphi, \end{aligned}$$

es continua y densa, esto es,

i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.

ii) $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = L^p(\mathbb{R})$, *donde la clausura es considerada en la norma* $||\cdot||_{L^p}$.

iii) *Existen constantes positivas* $C_{m,n}$, M, N, $C := \sup\{C_{m,n} : 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N\}$ *tales que*

$$\|\varphi\|_{L^p} \leq C \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} p_{m,n}(\varphi), \text{ para cada } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{1.17}$$

La prueba de este resultado puede ser encontrada en [3].

Es fácil probar que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entonces $x^m \varphi^{(n)}(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Así, utilizando el teorema 1.4 podemos definir en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ la siguiente familia de seminormas:

$$\tilde{p}_{m,n}(\varphi) = \|x^m \varphi^{(n)}(x)\|_{L^2}. \tag{1.18}$$

El siguiente resultado nos da una forma equivalente de generar la topología de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ y será de utilidad para obtener parte de los resultados que serán presentados en el Capítulo 2.

Análogamente, decimos que $(\varphi_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ con relación a la familia (1.18) si $\tilde{p}_{m,n}(\varphi_j - \varphi) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\forall\, m,\, n \in \mathbb{N}_0$.

Proposición 1.7. *Valen las siguientes afirmaciones*

a) $\tilde{p}_{m,n}(\varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *si y solo si* $\tilde{p}_{m,0}(\varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *y* $\tilde{p}_{0,n}(\varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

b) $p_{m,n}(\varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *si y solo si* $\tilde{p}_{m,n}(\varphi_j) \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Demostración. Observe que basta probar que las seminormas son uniformemente equivalentes.

a) La condición es necesaria por ser un caso particular de la hipótesis. Para la suficiencia notamos que

$$\tilde{p}^2_{m,n}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\left(\varphi^{(n)}(x)\right)^2 dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{d^n}{dx}\left(x^{2m}\varphi^{(n)}(x)\right) dx,$$

ahora, usando la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx}\left(x^{2m}\varphi^{(n)}(x)\right) &= \sum_{0\leq k\leq n} C_{m,k,n}\, x^{2m-k} \varphi^{(2n-k)}(x) \\ &= \sum_{0\leq k\leq min\{n,2m\}} C_{m,k,n}\, x^{2m-k} \varphi^{(2n-k)}(x). \end{aligned}$$

Aplicando las desigualdades de Cauchy- Schwarz y Young

$$\begin{aligned}
\tilde{p}^2_{m,n}(\varphi) &\leq C_{m,n} \sum_{0\leq k\leq mim\{n,2m\}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)x^{2(2m-k)}dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi^{(2n-k)}(x)\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_{m,n} \sum_{0\leq k\leq mim\{n,2m\}} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2(x)x^{2(2m-k)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi^{(2n-k)}(x)\right)^2 dx\right\} \\
&\leq C_{m,n} \sum_{0\leq k\leq mim\{n,2m\}} \left\{\tilde{p}^2_{2m-k,0}(\varphi) + \tilde{p}^2_{0,2n-k}(\varphi)\right\}.
\end{aligned}$$

b) Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y estimemos $\tilde{p}_{m,n}(\varphi)$ como sigue

$$\begin{aligned}
\tilde{p}^2_{m,n}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\left(\varphi^{(n)}(x)\right)^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\left(1+x^2\right)\left(\varphi^{(n)}(x)\right)^2 \frac{1}{(1+x^2)}dx \\
&\leq \left(p^2_{m,n}(\varphi) + p^2_{m+1,n}(\varphi)\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&\leq C\left(p^2_{m,n}(\varphi) + p^2_{m+1,n}(\varphi)\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando (1.1) y (1.16) tenemos

$$\begin{aligned}
p^2_{m,n}(\varphi) &= \left\{\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|x^m\varphi^{(n)}(x)\right|\right\}^2 \leq C\left\|x^m\varphi^{(n)}(x)\right\|_{L^2}\left\|\frac{d}{dx}\left(x^m\varphi^{(n)}(x)\right)\right\|_{L^2} \\
&\leq C_m\left\|x^m\varphi^{(n)}(x)\right\|_{L^2}\left\|x^{m-1}\varphi^{(n)}(x)\right\|_{L^2} + C\left\|x^m\varphi^{(n)}(x)\right\|_{L^2}\left\|x^m\varphi^{(n+1)}(x)\right\|_{L^2} \\
&\leq C_m\left\{\left\|x^m\varphi^{(n)}(x)\right\|^2_{L^2} + \left\|x^{m-1}\varphi^{(n)}(x)\right\|^2_{L^2} + \left\|x^m\varphi^{(n+1)}(x)\right\|^2_{L^2}\right\} \\
&= C_m\left\{\tilde{p}^2_{m,n}(\varphi) + \tilde{p}^2_{m-1,n}(\varphi) + \tilde{p}^2_{m,n+1}(\varphi)\right\}.
\end{aligned}$$

□

1.4. Espacios de Sobolev

Fijando $1 \leq p \leq \infty$, para k un entero no negativo, definimos ahora un cierto espacio de funciones, cuyos miembros tienen derivada en el sentido de las distribuciones de varios órdenes pertenecientes a espacios $L^p(\mathbb{R})$.

Definición 1.8. *El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R})$ consiste de todas las funciones $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para cada entero m con $m \leq k$, $D^m u$ existe en el sentido de las distribuciones perteneciendo a $L^p(\mathbb{R})$.*

Si $u \in W^{k,p}(\mathbb{R})$ definimos su norma por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R})} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{m \leq k} \int_{-\infty}^{+\infty} \big(D^m u(x)\big)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \displaystyle\sum_{m \leq k} \operatorname*{supess}_{x \in \mathbb{R}} \big|D^m u(x)\big| & (p = \infty) \end{cases}$$

Definición 1.9. *Sea $(u_m)_{m \geq 1}$, $u \in W^{k,p}(\mathbb{R})$. Decimos que $(u_m)_{m \geq 1}$ converge para u en $W^{k,p}(\mathbb{R})$, escribimos*

$$u_m \to u, \text{ en } W^{k,p}(\mathbb{R}),$$

si

$$\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R})} = 0.$$

Teorema 1.5 (**espacio de Sobolev como espacio de funciones**). *Para cada $k \geq 1$ y $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Consultar [3]. □

El caso particular $p = 2$ es útil en las aplicaciones y en este caso el espacio de Sobolev $W^{k,2}(\mathbb{R})$ es representado por $H^k(\mathbb{R})$. El espacio $H^k(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar dado por

$$\langle u, v \rangle_{H^k} = \sum_{m \leq k} \langle D^m u, D^m v \rangle_{L^2},$$

para todo $u, v \in H^k(\mathbb{R})$, y se denomina espacio de Sobolev de orden k.

Definición 1.10. *Denotamos por $W_0^{k,p}(\mathbb{R})$ la cerradura de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ en $W^{k,p}(\mathbb{R})$.*

Así $u \in W_0^{k,p}(\mathbb{R})$ si y sólo si existe una sucesión de funciones $(u_m)_{m \geq 1} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_m \to u$ en $W^{k,p}(\mathbb{R})$.

En el caso $p = 2$ vamos a denotar por $H_0^k(\mathbb{R}) = W_0^{k,2}(\mathbb{R})$.

Definición 1.11. *Sean $1 \leq p < \infty$ y $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representamos por $W^{-k,q}(\mathbb{R})$ al dual topológico de $W^{k,p}(\mathbb{R})$.*

El dual topológico de $H^k(\mathbb{R})$ se denota por $H^{-k}(\mathbb{R})$. A seguir veremos otra caracterización de los espacios $H^m(\mathbb{R})$, m entero positivo.

Proposición 1.8. *$H^m(\mathbb{R})$ coincide con $\left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R});\ \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R})\right\}$. Definimos*

$$|||u|||_m = \|(1+|x|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}\|_{L^2}, \tag{1.19}$$

la aplicación $u \longmapsto |||u|||_m$ de $H^m(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una norma equivalente a la norma de Sobolev $\|\cdot\|_{H^m}$.

Proposición 1.9. *$H^m(\mathbb{R})$ es un espacio de Hilbert y $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ está continuamente inmerso en $H^m(\mathbb{R})$, siendo allí denso.*

Sea $m \geq 0$ e $H^{-m}(\mathbb{R}) = \left(H^m(\mathbb{R})\right)'$ el dual de $H^m(\mathbb{R})$. De la proposición anterior resulta que

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^m(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^{-m}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

donde $\hookrightarrow$ representa inmersión continua.

Denotamos por $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R})}$ la norma de una forma lineal continua $f \in H^{-s}(\mathbb{R})$, esto es,

$$\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} = \sup\left\{|\langle f, u\rangle|;\ u \in H^s(\mathbb{R}),\ \|u\|_{H^s(\mathbb{R})} = 1\right\}.$$

Proposición 1.10. *Son verdaderas las siguientes afirmaciones*

i) $H^{-s}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); (1+|x|^2)^{\frac{-s}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\}$,

ii) $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R})} = \|(1+|x|^2)^{\frac{-s}{2}} \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}$ *para toda* $f \in H^{-s}(\mathbb{R})$.

Capítulo 2

Ecuación mKdV

Antes de enunciar el principal resultado que probaremos en este capítulo definimos lo que significa buena colocación para el problema de Cauchy asociado a una ecuación de evolución abstracta.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach con norma $||\cdot||$ e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo de la recta. Sea

$$\begin{aligned} u : & I \longrightarrow \mathcal{X} \\ & t \longmapsto u(\cdot, t). \end{aligned}$$

Definimos $C\big(I;\mathcal{X}\big) = \big\{u : I \longrightarrow \mathcal{X};\ u(\cdot,t) \text{ es continua y limitada en } I\big\}$, y su norma $\big\|u\big\|_{C(I;\mathcal{X})} = \sup\limits_{t\in I} \|u(\cdot,t)\|$.

Análogamente, definamos

$$C^1\big(I;\mathcal{X}\big) = \big\{u : I \longrightarrow \mathcal{X};\ u(\cdot,t),\ \partial_t u(\cdot,t) \text{ son continuas y limitadas en } I\big\},$$

y su norma $\big\|u\big\|_{C^1(I;\mathcal{X})} = \text{máx}\big\{\sup\limits_{t\in I}\|u(\cdot,t)\|, \sup\limits_{t\in I}\|\partial_t u(\cdot,t)\|\big\}$.

Definición 2.1 (buena colocación). *Dados $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios de Banach y $T_0 \in (0,\infty)$, decimos que el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(t, u(t)) \in \mathcal{X}, \\ u(0) = \phi \in \mathcal{Y}, \end{cases} \tag{2.1}$$

donde $F : [0;T_0] \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ es una función continua, es localmente bien puesto si

(a) Existe $T \in (0, T_0]$ y una función $u \in C([0,T];\mathcal{Y})$ tal que $u(0) = \phi$ y la ecuación diferencial se satisface en el sentido que

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t,u(t)) \right\|_{\mathcal{X}} = 0, \quad \forall\, t \in [0,T],$$

donde las derivadas en 0 y T son calculadas por la derecha e izquierda respectivamente;

(b) *El problema* (2.1) *tiene como máximo una solución en* $C([0,T];\mathcal{Y})$.

(c) *La aplicación* $\phi \longrightarrow u$ *es continua. Más precisamente, sean* $\phi_n \in \mathcal{Y}$, $n \geq 1$, *tales que* $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{Y}} \phi$, *y sean* $u_n \in C([0,T_n];\mathcal{Y})$ *correspondientes soluciones. Para* $T \in (0;T_0)$, *entonces las soluciones* u_n *pueden ser extendidas al intervalo* $[0,T]$ *para todo* n *suficientemente grande y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_{\mathcal{Y}} = 0.$$

Si cualesquiera de estas condiciones no es satisfecha, el problema es llamado mal puesto. Finalmente, si $F(t,\cdot)$ está definida en $[0,+\infty)$ y (a), (b), y (c) son válidas en $[0,T]$, para todo $T>0$ diremos que (2.1) es bien puesto globalmente.

Nuestro objetivo es demostrar la buena colocación global para la ecuación Korteweg-de Vries modificada (mKdV), modelada por

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \ , \ \lambda = \pm 1, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.2}$$

donde $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y el dato inicial u_0 es considerado en el espacio $H^2(\mathbb{R})$, que en el resto del texto será denotado por H^2.

Definición 2.2. *Sea* $u_0 \in H^2$. *Una función* $u(\cdot,t) \in C\big([0,T];H^2\big) \cap C^1\big([0,T];H^{-1}\big)$ *es solución de* (2.2) *si*

i) $u(\cdot,0) = u_0$.

ii) $\displaystyle \lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(\cdot,t+h) - u(\cdot,t)}{h} - \partial_x^3 u(\cdot,t) - \lambda u^2(\cdot,t)\partial_x u(\cdot,t) \right\|_{H^{-1}} = 0$ *para todo* $t \in [0,T]$.

Observemos que de acuerdo con la definición 2.1 en este caso particular estamos considerando $\mathcal{Y} = H^2$ y $\mathcal{X} = H^{-1}$.

De manera más precisa, el resultado principal de este capítulo es el siguiente.

Teorema 2.1. *El problema de Cauchy* (2.2) *es globalmente bien puesto en* H^2 *en el sentido de la definición* (2.1), *además,* $u \in C^1\big([0,T];H^{-1}\big)$ *para todo* $T > 0$.

La prueba de este resultado será realizada en varias etapas usando un método conocido como regularización parabólica. El capítulo está estructurado de la siguiente manera: en la sección 2.1 obtenemos dos cantidades conservadas por el flujo de la ecuación que serán de mucha utilidad para ciertas desigualdades. En seguida, en la sección 2.2, encontramos para cada $0 < \varepsilon < 1$ una solución global $w(x,t;\varepsilon)$ en el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ para el problema regularizado

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \varepsilon \partial_x^4 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \text{ y } \lambda = \pm 1, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.3}$$

con datos iniciales tomados en el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Además, buscamos que las soluciones sean convergentes para una solución global $w(x,t;\varepsilon)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ para el problema original (2.2). En la sección 2.3 probaremos desigualdades a priori para el problema regularizado. Finalmente, en la sección (2.4), usando las soluciones regulares obtenidas en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ probaremos la existencia de soluciones en H^2 satisfaciendo las exigencias iniciales.

2.1. Leyes de conservación

A seguir mostraremos dos funcionales importantes que son conservados por el flujo de la ecuación Korteweg-de Vries modificada. [1]

Proposición 2.1. *Sea $u(\cdot,t)$ una solución regular para la ecuación* (2.2) *con dato inicial $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces,*

$$M\big[u(\cdot,t)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)dx = M\big[u_0\big], \tag{2.4}$$

$$E\big[u(\cdot,t)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - \lambda \frac{u^4}{12} \right\} dx = E\big[u_0\big], \tag{2.5}$$

para todo $t \geq 0$.

Demostración. Sea u solución regular de (2.2), entonces multiplicando el lado izquierdo de la ecuación (2.2) por u obtenemos

$$u\partial_t u + \lambda u^3 \partial_x u + u\partial_x^3 u = u\partial_t u + \left[\left(\partial_x u \partial_x^2 u + u \partial_x^3 u \right) - \partial_x u \partial_x^2 u + \lambda u^3 \partial_x u \right],$$

que podemos reescribir en la forma

$$\partial_t \left(\frac{u^2}{2} \right) = -\partial_x \left(u\partial_x^2 u - \frac{(\partial_x u)^2}{2} + \lambda \frac{u^4}{4} \right).$$

[1] La prueba será realizada sobre la hipótesis de la existencia de soluciones regulares con decaimiento a cero en el infinito.

Integrando con relación a la variable espacial y usando el hecho que la solución pertenece al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\left(u\partial_x^2 u - \frac{(\partial_x u)^2}{2} + \lambda\frac{u^4}{4}\right)dx = 0,\end{aligned}$$

o sea,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2(x)dx,$$

de donde sigue (2.4).

Por otro lado, derivando (2.2) con relación a la variable espacial obtenemos

$$\partial_{xt}^2 u + \partial_x^4 u + \lambda\partial_x\left(u^2\partial_x u\right) = 0. \tag{2.6}$$

Multiplicando (2.6) por $\partial_x u$ e integrando con respecto a x se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{tx}^2 u\partial_x u dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^4 u\partial_x u dx + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\left(u^2\partial_x u\right)\partial_x u dx = 0.$$

Usando integración por partes tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u)^2 dx &= -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\left(u^2\partial_x u\right)\partial_x u\, dx \\ &= \frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x\left(u^3\right)\partial_x^2 u\, dx \\ &= -\frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} u^3\partial_x^3 u\, dx.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Usando de nuevo la ecuación (2.2) en (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u)^2 dx &= -\frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} u^3\Big(-\partial_t u - \lambda u^2\partial_x u\Big)dx \\ &= \frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} u^3\partial_t u\, dx + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} u^5\partial_x u\, dx \\ &= \frac{\lambda}{12}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u^4 dx.\end{aligned}$$

Así,

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{2}(\partial_x u(x,t))^2 - \frac{\lambda}{12}u^4(x,t)\right\}dx = 0,$$

por lo tanto, vale (2.5). □

2.2. Solución local

Definición 2.3. *Una función* $u : \mathbb{R} \times [0.T) \longrightarrow \mathbb{R}$ *pertenece al espacio* $C^\infty\big([0,T);\mathcal{S}\big)$ *si*

i) $u \in C^\infty\big(\mathbb{R}\times[0,T)\big)$*;*

ii) $\displaystyle\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,T)}\left|x^k\frac{\partial^{m+n}u(x,t)}{\partial_t^m\partial_x^n}\right| < \infty.$

En esta sección probaremos la existencia de soluciones locales para el problema (2.3), de forma más precisa mostraremos el resultado siguiente.

Proposición 2.2. *Sean* $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *y* ε *un número real tal que* $0 < \varepsilon < 1$*. Entonces, el problema* (2.3) *tiene una única solución* $w(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,T_\varepsilon);\mathcal{S}\big)$*.*

La prueba de este resultado será realizada en varios pasos. Primero buscamos solución del problema (2.3) mediante un proceso iterativo.

2.2.1. Esquema iterativo

Considerando $0 < \varepsilon < 1$ arbitrario, construiremos soluciones del problema (2.3) mediante un proceso iterativo, esto es, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos:

- $w_1(x,t;\epsilon) = u_0(x)$,
- $w_n(x,t;\epsilon)$ solución para el problema descrito a continuación.

$$\begin{cases} \partial_t w_n + \partial_x^3 w_n + \varepsilon\partial_x^4 w_n = -\lambda w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}, & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\ ,\ \lambda=\pm1,\\ w_n(x,0) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.8}$$

Dado $n \geq 2$ mostraremos que existe solución única $w_n(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,+\infty);\mathcal{S}\big)$ para (2.8). En efecto, haremos la prueba por inducción. Para $n = 2$ en (2.8)

$$\begin{cases} \partial_t w_2 + \partial_x^3 w_2 + \varepsilon\partial_x^4 w_2 = -\lambda u_0^2 u_0', & (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\ ,\ \lambda=\pm1,\\ w_2(x,0) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Fourier y sus propiedades obtenemos

$$\begin{cases} \partial_t\widehat{w_2}(\xi,t) + (-8\pi^3 i\xi^3 + 16\pi^4\xi^4\varepsilon)\,\widehat{w_2}(\xi,t) = -\lambda\widehat{u_0^2u_0'}(\xi), & (\xi,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\ ,\ \lambda=\pm1,\\ \widehat{w_2}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}), & \xi\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Fijando $\xi \in \mathbb{R}$ el problema anterior es una E.D.O de primer orden como función de t, entonces obtenemos su solución explícita, dada por

$$\widehat{w_2}(\xi,t) = \widehat{u_0}(\xi)e^{f_\varepsilon(\xi)t} + \lambda\left(\frac{1-e^{f_\varepsilon(\xi)t}}{f_\varepsilon(\xi)}\right)\widehat{u_0^2u_0'}(\xi),$$

donde $f_\varepsilon(\xi) = 8\pi^3\xi^3\,(i - 2\pi\varepsilon\xi)$.

Así, usando la transformada de Fourier inversa podemos escribir

$$w_2(x,t;\varepsilon) = \big(H_1(\cdot,t) * u_0(\cdot)\big)(x) + \lambda\big(H_2(\cdot,t) * u_0^2u_0'(\cdot)\big)(x),$$

donde $\widehat{H_1}(\xi,t) = e^{f_\varepsilon(\xi)t}$, $\quad \widehat{H_2}(\xi,t) = \dfrac{1-e^{f_\varepsilon(\xi)t}}{f_\varepsilon(\xi)} = g_\varepsilon(\xi,t)$.

Como $g_\varepsilon(\xi,t)$, $e^{f_\varepsilon(\xi)} \in L^1(\mathbb{R}_\xi)$ se tiene que $H_1(x,t)$ y $H_2(x,t)$ son continuas en relación a x. Además, como $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenemos que $H_1(\cdot,t) * u_0(\cdot)$ e $H_2(\cdot,t) * u_0^2u_0'(\cdot)$ son C^∞ con relación a la variable x.

Haremos la prueba para la continuidad de $w_2(x,t;\varepsilon)$ como función del tiempo t, para el primer termino de $w_2(x,t;\varepsilon)$ fijando $T > 0$, considere una sucesión $(t_k)_{k\geq 1}$ en $[0,T]$ que converge para t_0, entonces tenemos

$$I_1(x,t_k) := \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-e^{f_\varepsilon(\xi)t_k}}{f_\varepsilon(\xi)}\right)e^{2\pi i\xi(x-y)}d\xi\right)u_0(y)\,dy.$$

Usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que $I_1(x,t_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} I_1(x,t_0)$. Análogamente se prueba que para cada $T > 0$ $w_2(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,T);\mathcal{S}\big)$.

Luego, suponga existe $w_{n-1} \in C^\infty\big([0,+\infty);\mathcal{S}\big)$. Siguiendo el proceso inductivo como en el caso n=2, existe $w_n \in C^\infty\big([0,T);\mathcal{S}\big)$, para cada $T > 0$.

2.2.2. Estimación para la norma H^2 de las soluciones en un intervalo de tiempo dependiendo de ε

En esta sección probaremos que la sucesión construida en el proceso iterativo es limitada en el espacio $C\big([0,T(\varepsilon)];\mathcal{S}\big)$. Primero, usando la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg (1.16) tenemos $\|\partial_x w\|_{L^2} \leq \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$, además, por la definición de la norma en el espacio H^2 y usando la desigualdad de Young (1.1) obtenemos

$$\|w\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2 \leq \|w\|_{H^2}^2 \leq \frac{3}{2}\left(\|w\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^2 w\|_{L^2}\right).$$

Así, tenemos la siguiente equivalencia $\|w\|_{H^2}^2 \cong \|w\|_{L^2}^2 + \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2$.

Observación 2.1. *Una misma constante C denotará varias constantes que pueden ser diferentes durante las estimaciones realizadas. Sin embargo, cuando el crecimiento o dependencia de ciertas constantes con relación a los parámetros sea importante haremos la distinción correspondiente.*

Multiplicando (2.8) por w_n tenemos

$$w_n\partial_t w_n + w_n\partial_x^3 w_n + \varepsilon w_n\partial_x^4 w_n = -\lambda w_n w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}. \tag{2.9}$$

Por otro lado, derivando (2.8) dos veces respecto a la variable espacial obtenemos

$$\partial_x^2\partial_t w_n + \partial_x^5 w_n + \varepsilon\partial_x^6 w_n = -\lambda\partial_x^2\left[w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\right], \tag{2.10}$$

luego, multiplicando (2.10) por $\partial_x^2 w_n$ tenemos

$$\partial_x^2 w_n\left[\partial_x^2\partial_t w_n + \partial_x^5 w_n + \varepsilon\partial_x^6 w_n\right] = -\lambda\partial_x^2 w_n\partial_x^2\left[w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\right]. \tag{2.11}$$

Sumando (2.9) con (2.11) e integrando obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_n\|_{H^2}^2 + \varepsilon\|\partial_x^4 w_n\|_{L^2}^2 = -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 w_n\right)^2 dx - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w_n + \partial_x^4 w_n\right) w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\,dx,$$

luego,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_n\|_{H^2}^2 + \varepsilon\|\partial_x^4 w_n\|_{L^2}^2 &\le \varepsilon\|\partial_x^2 w_n\|_{L^2}^2 + \left(\|w_n\|_{L^2} + \|\partial_x^4 w_n\|_{L^2}\right)\|w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\|_{L^2}\\ &\le \varepsilon\|w_n\|_{H^2} + \varepsilon\|\partial_x^4 w_n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Luego, usando (1.16) obtenemos

$$\|w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1}\|_{L^2}^2 \le \|w_{n-1}\|_\infty^4\|\partial_x w_{n-1}\|_{L^2}^2 \le 4\|w_{n-1}\|_{H^2}^6,$$

entonces

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_n\|_{H^2}^2 \le \varepsilon\|w_n\|_{H^2}^2 + \frac{2}{\varepsilon}\|w_{n-1}\|_{H^2}^6,$$

ahora, tomando $C_\varepsilon = \text{máx}\left\{\varepsilon, \frac{2}{\varepsilon}\right\} = \frac{2}{\varepsilon}$, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_n\|_{H^2}^2 \le C_\varepsilon\bigg(\|w_n\|_{H^2}^2 + \|w_{n-1}\|_{H^2}^6\bigg). \tag{2.12}$$

Afirmación 2.2.1. *Existe $T_1 = T_1(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|w_n\|_{H^2}^2 \le 2\|u_0\|_{H^2}^2, \quad \forall\, t\in[0,T_1],\ n\ge 2 \tag{2.13}$$

Demostración. Integrando en (2.12) tenemos

$$\|w_n(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon}\int_0^t \|w_n(\cdot,s;\varepsilon)\|_{H^2}^2\,ds + \frac{4}{\varepsilon}\int_0^t \|w_{n-1}(\cdot,s;\varepsilon)\|_{H^2}^6\,ds + \|u_0\|_{H^2}^2.$$

Ahora, usaremos inducción. Para el caso $n = 2$ tenemos

$$\|w_2(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon}\int_0^t \|w_2(\cdot,s;\varepsilon)\|_{H^2}^2\,ds + \frac{4}{\varepsilon}\|u_0\|_{H^2}^6 t + \|u_0\|_{H^2}^2.$$

Considere $0 < T_0 < \dfrac{\varepsilon}{64\|u_0\|_{H^2}^4}$, entonces

$$\|w_2(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon}\int_0^t \|w_2(\cdot,s;\varepsilon)\|_{H^2}^2\,ds + \frac{3}{2}\|u_0\|_{H^2}^2.$$

Aplicando el lema de Gronwall tenemos

$$\|w_2(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{3}{2}\|u_0\|_{H^2}^2 e^{\frac{4}{\varepsilon}t},$$

luego considere $0 < T_1(\varepsilon) = \text{mín}\left\{T_0, \dfrac{\varepsilon}{4}\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)\right\}$, entonces $\|w_2(\cdot.t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq 2\|u_0\|_{H^2}^2$, para cada $0 < t < T_1$.

Supongamos la hipótesis es válida para $(n-1)$, esto es,

$$\|w_{n-1}(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq 2\|u_0\|_{H^2}^2, \quad \text{para todo } 0 < t < T_1(\varepsilon).$$

Ahora, de (2.12) y usando la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}\|w_n(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 &\leq \frac{4}{\varepsilon}\int_0^t \|w_n(\cdot,s;\varepsilon)\|_{H^2}^2\,ds + \frac{4}{\varepsilon}\int_0^t \|w_{n-1}(\cdot,s;\varepsilon)\|_{H^2}^2\,ds + \|u_0\|_{H^2}^2.\\ &\leq \frac{4}{\varepsilon}\int_0^t \|w_n(\cdot,s;\varepsilon)\|_{H^2}^2\,ds + \frac{32}{\varepsilon}\|u_0\|_{H^2}^6 t + \|u_0\|_{H^2}^2.\end{aligned}$$

Usaremos el siguiente dato $T_1 < T_0 < \dfrac{\varepsilon}{64\|u_0\|_{H^2}^4}$, entonces

$$\|w_n(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{4}{\varepsilon}\int_0^t \|w_2(\cdot,s;\varepsilon)\|_{H^2}^2\,ds + \frac{3}{2}\|u_0\|_{H^2}^2.$$

Aplicando el lema de Gronwall tenemos

$$\|w_n(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq \frac{3}{2}\|u_0\|_{H^2}^2 e^{\frac{4}{\varepsilon}t},$$

luego, para $t < T_1 < \dfrac{\varepsilon}{4}\ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$, entonces $\|w_n(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2}^2 \leq 2\|u_0(\cdot)\|_{H^2}^2$.

Esto verifica nuestra afirmación. □

La próxima afirmación nos da la limitación uniforme de las derivadas de w_n en L^2 en el mismo intervalo de tiempo obtenido en la afirmación 2.2.1.

Afirmación 2.2.2. *Sea $l \leq 3$, $l \in \mathbb{N}$. Existe una constante positiva $C(\varepsilon, l)$ tal que para todo $0 \leq t \leq T_1(\varepsilon)$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\|\partial_x^l w_n\|_{L^2}^2 \leq C(\epsilon, l). \tag{2.14}$$

Demostración. Derivando l veces en (2.8) tenemos

$$\partial_x^l \partial_t w_n + \partial_x^{l+3} w_n + \varepsilon \partial_x^{l+4} w_n = -\lambda \partial_x^l \left[w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \right]. \tag{2.15}$$

Multiplicando (2.15) por $\partial_x^l w_n$ e integrando obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^l w_n\right)^2 dx + \varepsilon \|\partial_x^{l+2} w_n\|_{L^2}^2 = -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^l w_n \partial_x^l \left[w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \right] dx,$$

usando integración por partes y (1.9) tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^l w_n\right)^2 dx + \varepsilon \|\partial_x^{l+2} w_n\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon \|\partial_x^{l+2} w_n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \left\| \partial_x^{l-2} \left[w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \right] \right\|_{L^2}^2, \tag{2.16}$$

entonces $\displaystyle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^l w_n\right)^2 dx \leq \frac{1}{4\varepsilon} \left\| \partial_x^{l-2} \left[w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \right] \right\|_{L^2}^2$, donde

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_x^{l-2} \left[w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \right] \right\|_{L^2} &= \left\| \sum_{k=0}^{l-2} C_k \partial_x^{l-2-k} \left(w_{n-1}^2 \right) \partial_x^{k+1} w_{n-1} \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{l-2} C_k \left(\sum_{j=0}^{l-2-k} C_{j,k} \partial_x^{l-2-k-j} w_{n-1} \partial_x^j w_{n-1} \right) \partial_x^{k+1} w_{n-1} \right\|_{L^2} \\
&\leq \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-1-k} C_{j,k} ||\partial_x^{p-1-k-j} w_{n-1}||_{H^1}^2 ||\partial_x^j w_{n-1}||_{H^1}^2 ||\partial_x^{k+1} w_{n-1}||_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Usando inducción y aplicando el lema de Gronwall obtenemos para cada $0 \leq t \leq T_1$ que $\|\partial_x^l w_n(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq C(\varepsilon, l)$. □

Afirmación 2.2.3. *Existe $T_2 = T_2(\varepsilon) \in \big(0, T_1(\varepsilon)\big)$ tal que para cada par m, $n \in \mathbb{N}$ tenemos la siguiente desigualdad*

$$\sup_{0 \leq t \leq T_2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2(x,t) dx \leq C(m, \varepsilon), \tag{2.17}$$

donde $C(m, \epsilon)$ es una constante independiente de n.

Demostración. Podemos asumir $m \geq 2$, pues el caso $m = 1$ es tratado de manera análoga.

Haciendo integración por partes obtenemos,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2 dx + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\left(\partial_x^2 w_n\right)^2 dx = \sum_i P_i,$$

donde P_i puede ser dada por una de las siguientes expresiones:

- $P_1 = C\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-k} w_n \partial_x^l w_n \, dx$ o $P_1 = C\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-k}\partial_x w_n \partial_x^l w_n \, dx$,
- $P_2 = C\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1}\tfrac{w_{n-1}^3}{3} w_n \, dx$,
- $P_3 = C\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\frac{w_{n-1}^3}{3}\partial_x w_n \, dx$,

donde $k, l = 0, 1, 2$.

Usando (2.8) tenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2 dx = I_1 + I_2 + I_3,$$

donde

$$I_1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n \partial_x^3 w_n \, dx,$$

$$I_2 = -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n \partial_x^4 w_n \, dx,$$

$$I_3 = -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \, dx.$$

Podemos escribir I_1 de la siguiente forma

$$I_1 = \underbrace{2m\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} w_n \partial_x^2 w_n \, dx}_{P_1(k=1,l=2)} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\partial_x w_n \partial_x^2 w_n \, dx}_{P_1(k=0,l=2)}. \tag{2.18}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} I_2 = &-\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}\left(\partial_x^2 w_n\right)^2 dx - \underbrace{(4m^2 - 2m)\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} w_n \partial_x^2 w_n \, dx}_{P_1(k=2,l=2)} - \\ &- \underbrace{4m\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1}\partial_x w_n \partial_x^2 w_n \, dx}_{P_1(k=1,l=2)}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

y

$$I_3 = \underbrace{2\lambda m \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} \frac{w_{n-1}^3}{3} w_n \, dx}_{P_2} + \underbrace{\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \frac{w_{n-1}^3}{3} \partial_x w_n \, dx}_{P_3} . \tag{2.20}$$

Ahora veremos desigualdades para algunas de las integrales que aparecen en (2.18), (2.19), (2.20). Las otras que restarán, pueden ser tratadas análogamente. Usaremos la siguiente desigualdad

$$|x|^{m'} \leq \varepsilon_1 x^{2m} + C(\varepsilon_1, m), \; m' \leq 2m \tag{2.21}$$

Estimaciones para I_1:

$$\begin{aligned}\left| 2m \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} w_n \partial_x^2 w_n \, dx \right| &\leq 2m \big\| x^m \partial_x^2 w_n \big\|_{L^2} \big\| x^{m-1} w_n \big\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{K} \big\| x^m \partial_x^2 w_n \big\|_{L^2}^2 + \frac{m^2}{\varepsilon} K \big\| x^{m-1} w_n \big\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{K} \big\| x^m \partial_x^2 w_n \big\|_{L^2}^2 + \frac{m^2}{\varepsilon} K \varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2 \, dx + C(\varepsilon, m),\end{aligned}$$

donde por la desigualdad (2.21) tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} w_n^2 \, dx \leq \varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2 \, dx + C(\varepsilon_1, m) \int_{-\infty}^{+\infty} w_n^2 \, dx.$$

Además, estamos considerando ε_1 apropiado y K suficientemente grande tales que

$$\frac{m^2 K C(\varepsilon_1, m)}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} w_n^2 \, dx \leq C(\varepsilon, m).$$

Para el otro término de I_1 el procedimiento es análogo.

Estimaciones para I_2:

$$\begin{aligned}\left| -2m(2m-1)\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} w_n \partial_x^2 w_n \, dx \right| &\leq (4m^2 - 2m)\varepsilon \| x^m \partial_x^2 w_n \|_{L^2} \| x^{m-2} w_n \|_{L^2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{K} \big\| x^m \partial_x^2 w_n \big\|_{L^2}^2 + K m^2 (2m-1)^2 \varepsilon \big\| x^{m-2} w_n \big\|_{L^2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{K} \big\| x^m \partial_x^2 w_n \big\|_{L^2}^2 + C \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2 \, dx + C(\varepsilon, m),\end{aligned}$$

donde por la desigualdad (2.21) tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-4} w_n^2 \, dx \leq \varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2 \, dx + C(\epsilon_1, m) \int_{-\infty}^{+\infty} w_n^2 \, dx.$$

Además, estamos considerando ε_1 apropiado y K suficientemente grande tales que

$$Km^2(2m-1)^2\varepsilon\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} w_n^2\, dx \leq C(\epsilon, m).$$

Para el otro término de I_2 el procedimiento es análogo.

Estimaciones para I_3:

$$\begin{aligned}\left|2\lambda m \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} \frac{w_{n-1}^3}{3} w_n\, dx\right| &\leq \frac{2m}{3} \left\|x^m w_n\right\|_{L^2} \left\|x^{m-1} w_{n-1}^3\right\|_{L^2} \\ &\leq \frac{m}{3} \left\|x^m w_n\right\|_{L^2}^2 + \frac{m}{3} \left\|x^{m-1} w_{n-1}^3\right\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_1 + C_2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \left(w_{n-1}^2 + w_n^2\right) dx,\end{aligned}$$

Para el otro término de I_3 el procedimiento es análogo. Finalmente,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2\, dx \leq C(\varepsilon, m) \left[1 + \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} \left(w_{n-1}^2 + w_n^2\right) dx\right]. \tag{2.22}$$

Aplicando el lema de Gronwall e inducción concluimos como en la afirmación (2.2.2) que existe $T_2 = T_2(\varepsilon) \in \big(0, T_1(\varepsilon)\big)$ tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq T_2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w_n^2(x,t) dx \leq C(m, \varepsilon).$$

□

2.2.3. Existencia y unicidad de la solución local

De la sección anterior hasta ahora tenemos

$$\sup_{[0,T_2(\varepsilon)]} \|x^k \partial_x^l w_n(\cdot, t; \varepsilon)\|_{L^2} \leq C_{k,l}, \quad \forall\, k,\, l \in \mathbb{N}_0.$$

Equivalentemente por (1.7) tenemos

$$\sup_{[0,T_2(\varepsilon)]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k \partial_x^l w_n(x, t; \varepsilon)| \leq \tilde{C}_{k,l}, \quad \forall\, k,\, l \in \mathbb{N}_0.$$

De acuerdo con (2.8) concluimos que $\partial_x w_n(x, t; \varepsilon) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, para cada $0 \leq t \leq T_2(\varepsilon)$ y además obtenemos que

$$\sup_{[0,T_2(\varepsilon)]} \|x^k \partial_x^l w_n(\cdot, t; \varepsilon)\|_{L^2} \leq M_{k,l}, \quad \forall\, k, l \in \mathbb{N}_0,$$

equivalentemente tenemos

$$\sup_{[0,T_2(\varepsilon)]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^k \partial_x^l w_n(x, t; \varepsilon)| \leq \tilde{M}_{k,l}, \quad k, l \in \mathbb{N}_0. \tag{2.23}$$

De (2.23) podemos concluir que la familia $\tilde{w}_{k,l} = \big(w_n(x, t; \varepsilon)\big)_{n \geq 1}$ verifica las siguientes propiedades:

- t continua en $[0, T_2(\varepsilon)]$,
- uniformemente limitado en $[0, T_2(\varepsilon)]$.

Por el teorema de Arzela Ascolí podemos concluir que existe

$$w(x,t;\varepsilon) \in C^1\big([0,T_2(\varepsilon)];\mathcal{S}(\mathbb{R})\big). \tag{2.24}$$

Ahora probaremos que existe $\tilde{w}(x,t;\varepsilon)$ tal que $w_n \to \tilde{w}$ en L^2. En efecto, para cada $0 < \varepsilon < 1$ usando (2.24) tenemos que

$$\begin{cases} \partial_t w(x,t;\varepsilon) + \partial_x^3 w(x,t;\varepsilon) + \varepsilon \partial_x^4 w(x,t;\varepsilon) = -\lambda w^2(x,t;\varepsilon)\partial_x w(x,t;\varepsilon), & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\ ,\ \lambda = \pm 1, \\ w(x,0;\varepsilon) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.25}$$

Sea $[0, T^*(\varepsilon)]$ el intervalo maximal de la solución. Probaremos que $T^*(\varepsilon) = +\infty$, para esto vamos obtener en la próxima sección estimaciones a priori en $C\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ para cualquier intervalo $[0,T]$ de existencia de la solución.

Además, también la siguiente desigualdad es satisfecha.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n^2\,dx \le C_\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g_{n-1}^2 + g_n^2\right]dx, \tag{2.26}$$

donde $g_n = w_n - w_{n-1}$. En efecto, partiendo de (2.8) tenemos

$$\partial_t w_n + \partial_x^3 w_n + \varepsilon \partial_x^4 w_n = -\lambda w_{n-1}^2 \partial_x w_{n-1} \tag{2.27}$$

$$\partial_t w_{n-1} + \partial_x^3 w_{n-1} + \varepsilon \partial_x^4 w_{n-1} = -\lambda w_{n-2}^2 \partial_x w_{n-2} \tag{2.28}$$

Restando (2.28) de (2.27) tenemos

$$\partial_t g_n + \partial_x^3 g_n + \varepsilon\partial_x^4 g_n = -\lambda\left[w_{n-1}^2\partial_x w_{n-1} - w_{n-2}^2\partial_x w_{n-2}\right]. \tag{2.29}$$

Multiplicando (2.29) por $g_n = w_n - w_{n-1}$, e integrando obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} g_n^2\,dx + \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 g_n\right)^2 dx = -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} g_n\big[\left(w_{n-1}^2 - w_{n-2}^2\right)\partial_x w_{n-1} + w_{n-2}^2\partial_x g_{n-1}\big]dx.$$

Donde usando las siguientes estimativas verificamos (2.26)

$$\begin{aligned} -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} g_n\left(w_{n-1}^2 - w_{n-2}^2\right)\partial_x w_{n-1}dx &= -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} g_n\left(w_{n-1} + w_{n-2}\right)g_{n-1}\partial_x w_{n-1}dx \\ &\le \|w_{n-1}+w_{n-2}\|_\infty \|\partial_x w_{n-1}\|_\infty \|g_{n-1}\|_{L^2}\|g_n\|_{L^2} \\ &\le C_1\left(\|g_{n-1}\|_{L^2}^2 + \|g_n\|_{L^2}^2\right). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g_n w_{n-2}^2 \partial_x g_{n-1}\, dx &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w_{n-2}\, g_{n-1}\, g_n \partial_x w_{n-2}\, dx + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}\, w_{n-2}^2 \partial_x g_n\, dx \\
&\leq C_1 \|g_{n-1}\|_{L^2} \|g_n\|_{L^2} + \|w_{n-2}\|_\infty^2 \|g_{n-1}\|_{L^2} \|\partial_x g_n\|_{L^2} \\
&\leq C_1 \Big(\|g_{n-1}\|_{L^2}^2 + \|g_n\|_{L^2}^2 \Big) + C_2 \|g_{n-1}\|_{L^2} \|\partial_x^2 g_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|g_n\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 \Big(\|g_{n-1}\|_{L^2}^2 + \|g_n\|_{L^2}^2 \Big) + \frac{C_2}{2} \Big(\|g_{n-1}\|_{L^2}^2 + \frac{2\epsilon}{C_2} \|\partial_x^2 g_n\|_{L^2}^2 + \frac{C_2}{8\varepsilon} \|g_n\|_{L^2}^2 \Big) \\
&\leq C_\varepsilon \Big(\|g_{n-1}\|_{L^2}^2 + \|g_n\|_{L^2}^2 \Big) + \varepsilon \|\partial_x^2 g_n\|_{L^2}^2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la sucesión $\big(w_n(x,t;\varepsilon)\big)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en L^2, así, converge para una función $w(x,t,\varepsilon)$ en el espacio L^2.

Nuestro objetivo ahora es probar que la convergencia anterior es satisfecha en el espacio $C\big([0,T(\varepsilon)];L^2\big)$, donde $T(\varepsilon)\in(0,T_2(\varepsilon)]$ es suficientemente pequeño. Para esto, basta probar la continuidad de w en $C\big([0,T(\varepsilon)];\mathcal{S}\big)$. Considere una sucesión $(t_k)_{k\geq 1}\subset[0,T(\varepsilon)]$ tal que $t_k\to t_0$ en $[0,T(\varepsilon)]$, ahora usando la desigualdad triangular tenemos

$$
||w(\cdot,t_k)-w(\cdot,t_0)||_{L^2} \leq ||w(\cdot,t_k)-w_n(\cdot,t_k)||_{L^2} + ||w_n(\cdot,t_k)-w_n(\cdot,t_0)||_{L^2} + ||w_n(\cdot,t_0)-w(\cdot,t_0)||_{L^2}.
$$

Notemos que en el primer y tercer términos vamos a usar que $w_n\to w$ en L^2. En el segundo vamos a usar el hecho que $w_n\in C\big([0,T(\varepsilon)];\mathcal{S}\big)$. Luego, concluimos que $w\in C\big([0,T(\varepsilon)];L^2\big)$. Así, usando que la sucesión $(w_n)_{n\geq 1}$ converge para $w(x,t;\varepsilon)$ en el espacio $C\big([0,T(\varepsilon)];L^2\big)$ y es limitada en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ obtenemos la convergencia en el espacio $C\big([0,T(\varepsilon)];\mathcal{S}\big)$. Finalmente tomando el limite en (2.8) cuando $n\to\infty$ obtenemos la existencia de solución local del problema (2.3) en el espacio $C\big([0,T(\varepsilon)];\mathcal{S}\big)$.

Para probar la unicidad de esta solución suponga la existencia de dos soluciones $w_1(x,t,\varepsilon)$ y $w_2(x,t,\varepsilon)$ en el espacio $C\big([0,T];\mathcal{S}\big)$, para algún $T>0$. Consideremos $w=w_1-w_2$, entonces existe una constante $C(\varepsilon)>0$ que no depende de $x\in\mathbb{R}$ ni de $t\in[0,T]$ satisfaciendo

$$
\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x,t,\varepsilon)dx \leq C(\varepsilon)\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x,t,\varepsilon)dx. \tag{2.30}
$$

De hecho, es simple verificar usando (2.3) que

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\,dx + \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\partial_x^2 w\big)^2 dx = -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w w_1^2\partial_x w_1\,dx + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w w_2^2 \partial_x w_2\,dx.
$$

Haciendo integración por partes tenemos $-\lambda\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} w w_1^2 \partial_x w_1\,dx = \frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} w_1^3\partial_x w\,dx$, también análogamente $\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w w_2^2 \partial_x w_2 \, dx = -\frac{\lambda}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} w_2^3 \partial_x w \, dx$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\, dx + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^2 w\right)^2 dx &= \frac{\lambda}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(w_1^3 - w_2^3\right) \partial_x w \, dx \\
&\leq \frac{1}{3}\|w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2\|_\infty \|w\|_{L^2} \|\partial_x w\|_{L^2} \\
&\leq \frac{C}{3}\|w\|_{L^2} \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C^2}{18}\|w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}\|w\|_{L^2} \\
&\leq \frac{C^2}{18}\|w\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{16\varepsilon}\|w\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Cancelando los términos semejantes tenemos $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\, dx \leq C(\varepsilon)\|w\|_{L^2}^2$. Luego, integrando obtenemos

$$||w(\cdot, t; \varepsilon)||_{L^2}^2 \leq 2C(\varepsilon)\int_0^t ||w(\cdot, s; \varepsilon)||_{L^2}^2 ds. \tag{2.31}$$

Aplicando el lema de Gronwall en (2.31) concluimos que $w = 0$, esto es, $w_1 = w_2$. Así, tenemos probada la unicidad de la solución local del problema (2.3).

2.3. Estimaciones a priori

Ahora vamos a probar algunas estimaciones, las cuales son uniformes con respecto a $\varepsilon \in (0, 1]$, para soluciones del problema (2.3).

Lema 2.1. *Para $T > 0$ sea $w(x, t; \varepsilon) \in C^\infty\big([0, T]; \mathcal{S}\big)$ solución de (2.3), entonces:*

i) $\|w(\cdot, t; \varepsilon)\|_{L^2}$ es una función decreciente de argumento $t > 0$.

ii) Para $T > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, sea $R_1 > 0$ tal que $\|w(\cdot, 0; \varepsilon)\|_{H^1} \leq R_1$. Entonces, existe $R_2 > 0$ tal que para cada $0 < t < T$

$$\|w(\cdot, t, \varepsilon)\|_{H^1} \leq R_2.$$

Demostración. Denotemos

$$g(t) = \|w(\cdot, t; \varepsilon)\|_{L^2} = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x, t; \varepsilon) dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

i) Observe que basta probar que $g'(t) \leq 0$. En efecto, si w es solución de (2.3) tenemos

$$\frac{d}{dt}\|w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2} = -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 w(x,t;\varepsilon)\right)^2 dx. \tag{2.32}$$

Esto es obtenido de la siguiente forma: Multiplicando por w en (2.3) tenemos

$$\frac{1}{2}\partial_t\left(w^2\right) + \lambda w^3\partial_x w + w\partial_x^3 w + \varepsilon w\partial_x^4 w = 0,$$

integrando con respecto a la variable espacial

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x,t;\varepsilon)dx = -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^3\partial_x w\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} w\partial_x^3 w\,dx - \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w\partial_x^4 w\,dx.$$

Se verifica integrando por partes que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} w^3\partial_x w\,dx = 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} w\partial_x^3 w\,dx = 0$, y también $\displaystyle -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w\partial_x^4 w dx = -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 w\right)^2 dx \leq 0.$

Así, $g'(t) \leq 0$. La primera parte del lema está probada.

ii) Ahora probamos la segunda parte del lema. Derivando (2.3) tenemos

$$\partial_x\partial_t w + \lambda\partial_x\left(w^2\partial_x w\right) + \partial_x^4 w + \epsilon\partial_x^5 w = 0, \tag{2.33}$$

Multiplicando (2.33) por $\partial_x w$ obtenemos

$$\partial_x w\partial_x\partial_t w + \lambda\partial_x w\left[2w(\partial_x w)^2 + w^2\partial_x^2 w\right] + \partial_x w\partial_x^4 w + \varepsilon\partial_x w\partial_x^5 w = 0. \tag{2.34}$$

Por otro lado, multiplicando (2.3) por $\lambda\frac{w^3}{3}$ tenemos

$$\lambda\frac{w^3}{3}\partial_t w + \frac{w^5}{3}\partial_x w + \lambda\frac{w^3}{3}\partial_x^3 w + \lambda\varepsilon\frac{w^3}{3}\partial_x^4 w = 0. \tag{2.35}$$

Substrayendo (2.35) de (2.34) e integrando obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_t\left(\frac{1}{2}(\partial_x w)^2 - \lambda\frac{w^4}{12}\right)dx + 2\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w(\partial_x w)^3 dx + \\
&+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x w\,\partial_x^2 w\,dx - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^3 w\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x w\,\partial_x^4 w\,dx - \\
&-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^5}{3}\partial_x w\,dx + \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x w\,\partial_x^5 w\,dx - \lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^4 w\,dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Usando integración por partes en (2.36) tenemos que

$$2\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w(\partial_x w)^3 dx + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x w\partial_x^2 w dx - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^3 w dx = 0,$$

y $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x w\, \partial_x^4 w\, dx = 0$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^5}{3}\partial_x w\, dx = 0$, ocurren. También

$$\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x w\, \partial_x^5 w\, dx = \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^3 w\right)^2 dx,$$

$$-\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^3}{3}\partial_x^4 w\, dx = \lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \partial_x w \partial_x^3 w\, dx.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x w)^2 dx = &- \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\partial_x^3 w\right)^2 dx + \lambda \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^4}{12}\, dx - \\ &- \lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \partial_x w\, \partial_x^3 w\, dx. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Afirmación 2.3.1. *La siguiente desigualdad es satisfecha*

$$I = -\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \partial_x w\, \partial_x^3 w\, dx \le C + \varepsilon \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^2.$$

Demostración. Usando (1.16) tenemos

$$\|w\|_\infty \le C_1 \|w\|_{L^2}^{\frac{5}{6}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^{\frac{1}{6}} \quad \text{y} \quad \|\partial_x w\|_{L^2} \le C_2 \|w\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^{\frac{1}{3}}, \tag{2.38}$$

entonces,

$$\begin{aligned} I &\le \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left| w^2 \partial_x w\, \partial_x^3 w \right| dx \\ &\le \varepsilon \|w^2 \partial_x w\|_{L^2} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Ahora, notemos que $\|w^2\partial_x w\|_{L^2}^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} w^4 (\partial_x w)^2 dx \le \|w\|_\infty^4 \|\partial_x w\|_{L^2}^2$. Luego,

$$\|w^2 \partial_x w\|_{L^2} \le \|w\|_\infty^2 \|\partial_x w\|_{L^2}.$$

Usando (2.38) y (1.1) tenemos

$$\begin{aligned} I &\le \varepsilon \|w\|_\infty^2 \|\partial_x w\|_{L^2} \|\partial_x^3 w\|_{L^2} \\ &\le \varepsilon C_1 \|w\|_{L^2}^{\frac{5}{3}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} C_2 \|w\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^{\frac{1}{3}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2} \\ &= \varepsilon C \|w\|_{L^2}^{\frac{7}{3}} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} \\ &= \varepsilon C \left(\frac{C_1}{\varepsilon} \|\partial_x w\|_{L^2}^{\frac{7}{18}} + \frac{\varepsilon}{C} \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^2 \right) \\ &\le C + \varepsilon \|\partial_x^3 w\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

□

Usando la afirmación (2.3.1), tenemos de (2.37)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x w)^2 dx \le \lambda \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^4}{12}dx + C$$

Además, sabemos que existe una constante positiva C_3 tal que

$$\lambda \frac{w^4}{12} \le C_3\left(w^2 + w^4\right). \tag{2.39}$$

Por otro lado, usando (1.16) tenemos $\|w\|_{L^4}^4 \le C_4\|w\|_{L^2}^3\|\partial_x w\|_{L^2}$. Ahora, integrando (2.39) obtenemos

$$\begin{aligned}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^4}{12}dx &\le C_3\left(\int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} w^4 dx\right)\\ &= C_3\left(\|w\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^4}^4\right)\\ &\le C_3\left(\|w\|_{L^2}^2 + C_4\|w\|_{L^2}^3\|\partial_x w\|_{L^2}\right)\\ &= C + \frac{1}{4}\|\partial_x w\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Así, para todo $t \in [0,T]$ se tiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \le \lambda\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^4}{12}dx + C. \tag{2.40}$$

Luego, integrando (2.40) en $(0,t)$

$$\frac{1}{2}\|\partial_x w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\partial_x w(\cdot,0;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \le \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^4(x,t;\varepsilon)}{12}dx - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^4(x,0;\varepsilon)}{12}dx + Ct,$$

esto es, $\frac{1}{2}||\partial_x w||_{L^2}^2 \le \frac{1}{4}||\partial_x w||_{L^2}^2 + C(R_1) + CT$, de donde

$$\|\partial_x w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \le C(R_1,T).$$

□

Lema 2.2. *Sean R_1, $T > 0$ arbitrarios, considere $R_2(R_1,T)$ proveniente del Lema 2.1. Para cada $R_3 > 0$ y $0 < \varepsilon < 1$, sea $w(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ la solución de (2.3) tal que $\|w(\cdot,0;\varepsilon)\|_{H^1} \le R_1$ y $\|w(\cdot,0;\varepsilon)\|_{H^2} \le R_3$. Entonces existe $R_4 > 0$ tal que*

$$\|w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{H^2} \le R_4, \quad \text{para}\, t \in [0,T].$$

Demostración. Partiendo de (2.3) probamos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 w\right)^2 dx &= -\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x^2 w\partial_x^2\left(w^2\partial_x w\right)dx - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x^2 w\partial_x^5 w dx}_{0} - -\,\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x^2 w\partial_x^6 w dx\\ &= -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^4 w\right)^2 dx \underbrace{-2\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x w)^3\partial_x^2 w\,dx}_{I_1} \underbrace{-5\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w\partial_x w\left(\partial_x^2 w\right)^2 dx}_{I_2}.\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^2 w\right)^2 dx = -\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^4 w\right)^2 dx + I_1 + I_2. \tag{2.41}$$

Estimaciones para I_1:

Aplicando la desigualdad de Gagliardo Nirenberg (1.16) y las propiedades de los espacios L^p tenemos

$$\begin{aligned}I_1 \leq 2\left\|(\partial_x w)^3\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 w\right\|_{L^2} &= 2\left\|\partial_x w\right\|_{L^6}^3\left\|\partial_x^2 w\right\|_{L^2}\\ &\leq 2C_1\left\|\partial_x w\right\|_{L^2}^2\left\|\partial_x^2 w\right\|_{L^2}\left\|\partial_x^2 w\right\|_{L^2}\\ &\leq C(R_2)\left\|\partial_x^2 w\right\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Afirmación 2.3.2. *La siguiente igualdad es satisfecha*

$$I_2 = -\frac{5}{6}\lambda\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^2 w\,dx + \frac{5}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w^3(\partial_x w)^3 + \lambda(\partial_x w)^3\partial_x^2 w\right)dx + I_\varepsilon, \tag{2.42}$$

donde

$$I_\varepsilon = \frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\left(w^2\left(\partial_x^3 w\right)^2 + (\partial_x w)^3\partial_x^3 w + 4w\partial_x w\,\partial_x^2 w\,\partial_x^3 w\right)dx.$$

Demostración. Multiplicando (2.3) por $-\frac{5}{6}\lambda w^2\partial_x w$ tenemos

$$-\frac{5}{6}\lambda w^2\partial_x^2 w\left(\partial_t w + \lambda w^2\partial_x w + \partial_x^3 w + \varepsilon\partial_x^4 w\right) = 0. \tag{2.43}$$

Por otro lado, derivando (2.3) dos veces y después multiplicando por $-\frac{5}{18}\lambda w^3$ obtenemos

$$-\frac{5}{6}\lambda\frac{w^3}{3}\partial_x^2\partial_t w - \frac{5}{6}\frac{w^3}{3}\partial_x^2\left(w^2\partial_x w\right) - \frac{5}{6}\lambda\frac{w^3}{3}\partial_x^5 w - \frac{5}{6}\lambda\varepsilon\frac{w^3}{3}\partial_x^6 w = 0. \tag{2.44}$$

Así, al sumar (2.43) y (2.44) obtenemos

$$\begin{gathered}-\frac{5}{6}\lambda\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^2 w\,dx - \underbrace{\frac{5}{6}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^2\left[w^2\partial_x w\right]dx}_{=0} - \frac{5}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} w^4\partial_x^2 w\partial_x w\,dx\\ -\frac{5}{6}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{w^3}{3}\partial_x^5 w\,dx - \frac{5}{6}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x^2 w\partial_x^3 w\,dx + \overline{I}_\varepsilon = 0,\end{gathered}$$

donde

$$\overline{I}_\varepsilon = -\frac{5}{6}\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \partial_x^2 w \partial_x^4 w \, dx - \frac{5}{6}\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^3}{3} \partial_x^6 w \, dx. \tag{2.45}$$

Usando integración por partes llegamos a

$$-\frac{5}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} w^4 \partial_x^2 w \partial_x w \, dx = \frac{5}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} w^3 (\partial_x w)^3 dx, \tag{2.46}$$

también tenemos $-\frac{5}{6}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^3}{3}\partial_x^2 \left(w^2 \partial_x w\right) = 0$. Además,

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^3}{3}\partial_x^5 w \, dx &= \frac{5}{6}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \partial_x w \, \partial_x^4 w \, dx \\ &= -\frac{5}{3}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w(\partial_x w)^2 \partial_x^3 w \, dx - \frac{1}{6} I_2 \\ &= \frac{5}{3}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x w)^3 \partial_x^2 w \, dx - \frac{5}{6} I_2. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Por otro lado tenemos

$$-\frac{5}{6}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \partial_x^2 w \, \partial_x^3 w \, dx = -\frac{1}{6} I_2.$$

Sumando (2.46) y (2.47) obtenemos

$$-\frac{5}{6}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^3}{3}\partial_x^5 w \, dx - \frac{5}{6}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \partial_x^2 w \, \partial_x^3 w \, dx = \frac{5}{3}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x w)^3 \partial_x^2 w \, dx - I_2,$$

luego

$$-\frac{5}{6}\lambda \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^3}{3}\partial_x^2 w \, dx + \frac{5}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(w^3(\partial_x w)^3 + \lambda(\partial_x w)^3 \partial_x^2 w\right) dx + \overline{I}_\varepsilon = I_2.$$

Haciendo integración por partes en (2.45) tenemos

$$-\frac{5}{6}\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \partial_x^2 w \, \partial_x^4 w \, dx = \frac{5}{6}\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2w\partial_x w \, \partial_x^2 w \, \partial_x^3 w + w^2 \left(\partial_x^3 w\right)^2\right) dx.$$

Análogamente

$$\begin{aligned} -\frac{5}{6}\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^3}{3}\partial_x^6 w \, dx &= \frac{5}{6}\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} w^2 \partial_x w \, \partial_x^5 w \, dx \\ &= -\frac{5}{6}\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^4 w \left(2w(\partial_x w)^2 + w^2 \partial_x^2 w\right) dx \\ &= \frac{5}{6}\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left(2(\partial_x w)^3 \partial_x^3 w + 6w \, \partial_x w \, \partial_x^2 w \, \partial_x^3 w - w^2 \partial_x^2 w \, \partial_x^4 w\right) dx. \end{aligned}$$

Así,

$$\overline{I}_\varepsilon = \frac{5}{3}\lambda\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left(w^2 \left(\partial_x^3 w\right)^2 + (\partial_x w)^3 \partial_x^3 w + 4w \, \partial_x w \, \partial_x^2 w \, \partial_x^3 w\right) dx = I_\varepsilon.$$

□

Ahora haremos algunas estimaciones para los términos de (2.42). Utilizando (1.16) tenemos

$$\|\partial_x w\|_{L^3} \leq C\|\partial_x w\|_{L^2}^{\frac{5}{6}} \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{6}},$$
$$\|\partial_x w\|_{L^6} \leq C\|\partial_x w\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{3}},$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{5}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(w^3(\partial_x w)^3 + \lambda(\partial_x w)^3\partial_x^2 w\Big)dx &\leq \frac{5}{6}\Big\{\|w\|_\infty^3\|\partial_x w\|_{L^3}^3 + \|(\partial_x w)^3\|_{L^2}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}\Big\}\\ &\leq \frac{5}{6}CR_2^3\|\partial_x w\|_{L^2}^{\frac{5}{2}} \|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{6}\|\partial_x w\|_{L^6}^3 \|\partial_x^2 w\|_{L^2}\\ &\leq \frac{5}{6}CR_2^3R_2^{\frac{5}{2}}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{6}R_2^2\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2\\ &\leq C_1 + C_2\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Afirmación 2.3.3. *La siguiente desigualdad es satisfecha*

$$I_\varepsilon \leq \varepsilon\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^2 + C(R_2).$$

Demostración. Haciendo integración por partes obtenemos

$$\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\big(\partial_x^3 w\big)^2dx = -\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\partial_x^2 w\Big(2w\partial_x w\,\partial_x^3 w + w^2\partial_x^4 w\Big)dx,$$
$$\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x w)^3\partial_x^3 w\,dx = -\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w\Big(2\partial_x w\,\partial_x^2 w\,\partial_x^3 w + (\partial_x w)^2\partial_x^4 w\Big)dx,$$

entonces

$$I_\varepsilon = -\frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty} w^2\partial_x^4 w\,dx - \frac{5}{3}\lambda\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}(\partial_x w)^2\partial_x^4 w\,dx,$$

así

$$I_\varepsilon \leq \frac{5}{3}\varepsilon\|w\|_\infty\,\|w\|_{L^2}\|\partial_x^4 w\|_{L^2} + \frac{5}{3}\varepsilon\big\|(\partial_x w)^2\big\|_{L^2}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}. \tag{2.48}$$

Donde es fácil ver que $\big\|(\partial_x w)^2\big\|_{L^2} = \|\partial_x w\|_{L^4}^2$, y usando (1.16) tenemos

$$\|\partial_x w\|_{L^4} \leq C\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^{\frac{5}{16}}\|w\|_{L^2}^{\frac{11}{16}}.$$

Siguiendo de (2.48), aplicando el Lema (2.1) y (1.1) obtenemos

$$\begin{aligned}I_\varepsilon &\leq \frac{5}{3}\varepsilon R_2^2\|\partial_x^4 w\|_{L^2} + \frac{5}{3}\varepsilon C\|\partial_x^4 w\|_{L^2}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^{\frac{5}{8}}\|w\|_{L^2}^{\frac{11}{8}}\\ &\leq \frac{5}{3}\varepsilon\left(\frac{3\varepsilon}{10}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^2 + \frac{5}{6\varepsilon}R_2^4\right) + \frac{5}{3}C\varepsilon\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^{\frac{13}{8}}\,R_2^{\frac{11}{8}}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^2 + C_1(R_2) + \frac{\varepsilon}{2}\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^2 + C_2(R_2)\\ &= \varepsilon\|\partial_x^4 w\|_{L^2}^2 + C(R_2).\end{aligned}$$

□

Afirmación 2.3.4. *La siguiente desigualdad es satisfecha*

$$I_3(w,t) = -\frac{5}{6}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w^3}{3}\partial_x^2 w\, dx \leq C + \frac{1}{4}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2.$$

Demostración. De hecho, usando (1.16) obtenemos

$$\begin{aligned} I_3(w,t) &\leq \frac{5}{18}\|w\|_{L^6}^3 \|\partial_x^2 w\|_{L^2} \\ &\leq C\|\partial_x w\|_{L^2}\|w\|_{L^2}^2\|\partial_x^2 w\|_{L^2} \\ &\leq C\,R_2^3\|\partial_x^2 w\|_{L^2} \leq C\left(\frac{1}{4C}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2 + C\,R_2^6\right) \\ &= C + \frac{1}{4}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

□

Luego,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^2 w\|_{L^2}^2 \leq C_1 + C_2||\partial_x^2 w||_{L^2}^2 + \frac{d}{dt}I_3(w,t)$$

entonces integrando en $(0,t)$ tenemos

$$\frac{1}{2}\|\partial_x^2 w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\partial_x^2 w(\cdot,0;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq C\int_0^t \|\partial_x^2 w(\cdot,s;\varepsilon)\|_{L^2}^2\, ds + +I_3(w,t) - I_3(w,0) + C_1 t,$$

así, $\|\partial_x^2 w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq C\int_0^t \|\partial_x^2 w(\cdot,s;\varepsilon)\|_{L^2}^2\, ds + C(R_2,R_3,T)$. Por lo tanto aplicando el lema de Gronwall obtenemos

$$\|\partial_x^2 w(\cdot,t;\varepsilon)\|_{L^2}^2 \leq R_4 = R_4(R_3,T).$$

□

Lema 2.3. *Sea $T>0$ tal que para $0<\varepsilon<1$ fijo, $w(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ es solución de* (2.3). *Entonces para cada entero $l \geq 2$ existe $C(l,T)>0$ satisfaciendo*

$$\|\partial_x^l w(\cdot,t:\varepsilon)\|_{L^2} \leq C(l,T), \quad \text{para } t \in [0,T].$$

Demostración. Probaremos el Lema usando inducción. El caso $l=2$ es verificado por el Lema (2.2). Ahora suponga la estimativa es satisfecha para $2 \leq l \leq r$, esto es,

$$||\partial_x^l w(\cdot,t;\varepsilon)||_{L^2} \leq C(l,T), \quad \text{para } 2 \leq l \leq r. \tag{2.49}$$

Considere $l = r+1$, partiendo de (2.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\partial_x^{r+1} w\|_{L^2}^2 &= -\varepsilon\|\partial_x^{r+3} w\|_{L^2}^2 - \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^{r+1}\left[w^2\partial_x w\right]\partial_x^{r+1} w\, dx \\ &\leq -\varepsilon\|\partial_x^{r+3} w\|_{L^2}^2 + \varepsilon\|\partial_x^{r+3} w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\partial_x^{r-1}\left[w^2\partial_x w\right]\right)^2 dx, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^{r-1}\left(w^2\partial_x w\right)\right\|_{L^2} &= \left\|\sum_{k=0}^{r-1} C_k \partial_x^{r-1-k}\left(w^2\right)\partial_x^{k+1} w\right\|_{L^2}\\ &= \left\|\sum_{k=0}^{r-1} C_k \Big\{\sum_{j=0}^{r-1-k} C_{j,k}\partial_x^{r-1-k-j} w \partial_x^j w\Big\}\partial_x^{k+1} w\right\|\\ &\leq \sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1-k} C_k C_{j,k} ||\partial_x^{r-1-k-j} w||_\infty ||\partial_x^j w||_\infty ||\partial_x^{k+1} w||_{L^2}\\ &\leq C\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-1-k} ||\partial_x^{r-1-k-j} w||_{H^1} ||\partial_x^j w||_{H^1} ||\partial_x^{k+1} w||_{L^2}.\end{aligned}$$

Usando (2.49) concluimos la prueba. □

Lema 2.4. *Sean $T > 0$ tal que para cada $0 < \varepsilon < 1$ fijo $w(x,t;\varepsilon) \in C^\infty\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ es solución de* (2.3)*. Entonces para cada entero $m > 0$ existe $C(m) > 0$ satisfaciendo*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} w^2(x,t;\varepsilon)dx \leq C(m), \quad \text{para } t \in [0,T].$$

Demostración. Antes de probar el Lema, probaremos una desigualdad que será importante en la demostración.

Afirmación 2.3.5. *Sean $l = 0,\ 1,\ 2$; $m \in \mathbb{N}$, y $n = 1,\ 2$. Entonces existe $C > 0$ y un entero positivo r tales que para cada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tenemos*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2m-l}\left(\frac{d^n u(x)}{dx^n}\right)^2 dx \leq C\left\{\|u\|_{H^r}^2 + \|u\|_{H^2}^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}u^2(x)dx\right\}. \tag{2.50}$$

Demostración. Aplicando (1.16) y considerando $a \in \mathbb{Z}$, $n = 1,\ 2$ y $r > 2$ entero tenemos la siguiente estimación,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d^n u}{dx^n}\right\|_{L^2(a,a+1)} &\leq C_r \|u\|_{L^2(a,a+1)}^{1-\frac{n}{r}}\left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(a,a+1)}^{\frac{n}{r}}\\ &\leq C_r\|u\|_{L^2(a,a+1)}^{1-\frac{n}{r}}\left(\left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(a,a+1)}^{\frac{n}{r}} + \|u\|_{L^2(a,a+1)}^{\frac{n}{r}}\right).\end{aligned}$$

Luego, en el término de la izquierda en (2.50) es igual a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2m-l}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} |x|^{2m-l}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx + \left(\sum_{k=-\infty}^{-2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\right)\int_k^{k+1} |x|^{2m-l}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx.$$

Usando para $x \in (k, k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0,1\}$ las siguientes estimativas

$$\frac{1}{2} \leq \frac{|k|}{|x|} \leq 2 \quad \text{e} \quad |k|^{2m-l} \leq 2^{2m-l} x^{2m}.$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2m-l}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx &\leq \|u\|_{H^2}^2 + C\left(\sum_{k=-\infty}^{-2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\right)|k|^{2m-l}\int_k^{k+1}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx \\
\leq \|u\|_{H^2}^2 + C&\left(\sum_{k=-\infty}^{-2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\right)|k|^{2m-l}\left(\int_k^{k+1} u^2 dx\right)^{1-\frac{n}{r}}\left(\left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(k,k+1)}^{\frac{n}{r}} + \|u\|_{L^2(k,k+1)}^{\frac{n}{r}}\right)^2 \\
\leq \|u\|_{H^2}^2 + C_r&\left(\sum_{k=-\infty}^{-2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\right)2^{2m-l}\left(\int_k^{k+1} x^{2m}u^2 dx\right)^{1-\frac{n}{r}}\left(\left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(k,k+1)}^2 + \|u\|_{L^2(k,k+1)}^2\right)^{\frac{n}{r}} \\
\leq \|u\|_{H^2}^2 + C_r&\left(\sum_{k=-\infty}^{-2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\right)\left\{\int_k^{k+1} x^{2m}u^2 dx + \left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(k,k+1)}^2 + \|u\|_{L^2(k,k+1)}^2\right\} \\
\leq \|u\|_{H^2}^2 + C_r&\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\int_k^{k+1} x^{2m}u^2 dx + \left\|\frac{d^r u}{dx^r}\right\|_{L^2(k,k+1)}^2 + \|u\|_{L^2(k,k+1)}^2\right\}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2m-l}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)^2 dx \leq C_r\left\{\|u\|_{H^r}^2 + \|u\|_{H^2}^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}u^2 dx\right\}.$$

□

Partiendo del hecho que w es solución de (2.3) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}w^2 dx = &-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}w^3\partial_x w\, dx + 2m\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1}w\partial_x^2 w dx \\
&- m\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1}(\partial_x w)^2 dx - \epsilon\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}w\partial_x^4 w\, dx.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Ahora haremos estimaciones para las integrales obtenidos en (2.51). En el primer término tenemos

$$-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}w^3\partial_x w\, dx \leq \|x^m w^2\partial_x w\|_{L^2}\|x^m w\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}\left(\|x^m w^2\partial_x w\|_{L^2}^2 + \|x^m w\|_{L^2}^2\right),$$

también

$$\begin{aligned}
\|x^m w^2\partial_x w\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}w^4(\partial_x w)^2 dx \leq \|w\|_\infty^4\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}(\partial_x w)^2 dx \\
&\leq C_1\left\{\|w\|_{H^r}^2 + \|w\|_{H^2}^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m}w^2 dx\right\} \\
&\leq C_1 + C_2\|x^m w\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^3\partial_x w\,dx\le C_1+C_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx. \tag{2.52}$$

Para el segundo término tenemos

$$\begin{aligned}2m\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m-1}w\partial_x^2 w\,dx &\le 2m\|x^{m-1}\partial_x^2 w\|_{L^2}\|x^m w\|_{L^2}\\ &\le m\left(\|x^{m-1}\partial_x^2 w\|_{L^2}^2+\|x^m w\|_{L^2}^2\right),\end{aligned}$$

donde

$$\|x^{m-1}\partial_x^2 w\|_{L^2}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m-2}\left(\partial_x^2 w\right)^2dx\le C_1+C_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx,$$

así,

$$2m\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m-1}w\partial_x^2 w\,dx\le C_1+C_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx. \tag{2.53}$$

De (2.50) obtenemos

$$-m\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m-1}(\partial_x w)^2dx\le C_1+C_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx. \tag{2.54}$$

Análogamente, haciendo dos veces integración por partes y procediendo como en (2.52) y (2.53) obtenemos

$$I_\varepsilon=-\varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w\partial_x^4 w\,dx\le C_1+C_2\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx. \tag{2.55}$$

Usando (2.52)-(2.55) en (2.51) tenemos para $t\in[0,T]$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2\,dx\le C_3+C_4\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2dx,$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2(x,t,\varepsilon)dx\le 2C_4\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2(x,t,\varepsilon)dx+2C_3t+\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2(x,0;\varepsilon)dx.$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2m}w^2\,dx\le C(m,T)$. □

2.3.1. Solución de la KdV Modificada en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Proposición 2.3. *Para cada $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ y $0 < \varepsilon < 1$, el problema* (2.3) *tiene una única solución global.*

Demostración. En efecto, sea $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Suponga existe $T^* > 0$ tal que la única solución $w(\cdot, t; \varepsilon) \in C\big([0,T]; \mathcal{S}\big)$ de (2.3), se puede extender al semi-intervalo de tiempo $[0, T^*)$ y no puede ser extendida en una vecindad a la derecha del punto $t = T^*$.

Entonces, en virtud de la continuidad arriba indicada existe $\lim_{t \to T^{*-}} u(x, t; \varepsilon) = u_1(x)$, entendido en el sentido del espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Así, considerando el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \varepsilon \partial_x^4 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \ , \ \lambda = \pm 1, \\ u(x, T^*) = u_1(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Luego, tenemos solución local del sistema anterior en un intervalo de tiempo $[T^*, T^* + \delta)$, esto es una contradicción. Porlo tanto, la solución puede ser extendida pata todo T^* positivo. □

Usando la Proposición 2.3 obtenemos el siguiente resultado para el problema (2.2).

Proposición 2.4. *Sea $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Entonces, existe solución global para el problema* (2.2).

Demostración. En vista de la proposición 2.3, para cada $0 < \varepsilon \leq 1$ arbitrario, solución global de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \varepsilon \partial_x^4 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \ , \ \lambda = \pm 1, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$ obtenemos solución de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \ , \ \lambda = \pm 1, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La unicidad de esta solución puede ser probada como en la proposición (2.3). □

2.4. Solución del problema en H^2

En esta sección resolveremos el problema de Cauchy para la ecuación Korteweg-de Vries modificada asociado a un dato inicial en el espacio H^2. Recordemos que la ecuación Korteweg-de Vries modificada que intentamos resolver es la siguiente.

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \ , \ \lambda = \pm 1, \\ u(x, 0) = u_0(x) \in H^2, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A seguir, haremos la demostración del resultado principal de este trabajo, el teorema (2.1), cuya prueba será hecha en algunos pasos.

2.4.1. Búsqueda de un candidato

Pretendemos encontrar un candidato para la solución del problema en el espacio L^2.

Sean $u_0 \in H^2$ y $T > 0$ arbitrarios. Usando el hecho que $\mathcal{S}$ es denso en $H^2(\mathbb{R})$ existe una sucesión $(u_0^n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $u_0^n \to u_0$ en H^2 cuando $n \to \infty$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $u_n(\cdot, t) \in C^\infty\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ la solución de

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \lambda u^2 \partial_x u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \ , \ \lambda = \pm 1, \\ u(x,0) = u_0^n(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.56}$$

Sabemos que $\|u_0^n\|_{H^1} < \infty$, dado que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^1$, entonces se tiene que

$$\|u_0^n(\cdot)\|_{H^1} \leq \sup_n \|u_0^n(\cdot)\|_{H^1} < \infty.$$

Consideremos $R_2^n = R_2\left(\|u_n\|_{H^1}, T\right)$ proveniente del lema 2.1. Observe que $(R_2^n)_{n\geq 1}$ es acotado, denotemos por

$$\overline{R}_2 = \sup_n R_2(\|u_n\|_{H^1}, T) = \sup_n R_2^n > 0.$$

Análogamente $\|u_0^n\|_{H^2} \leq R_3^n$, denotemos $\overline{R}_3 = \sup_n R_3^n$. Entonces, debido al Lema 2.2 existe $\overline{R}_4 = R_4(\overline{R}_3) > 0$ tal que $\|u_n\|_{H^2} \leq \overline{R}_4$. Así, para $t \in (0,T)$ tenemos

$$\|u_n(\cdot,t)\|_{H^1} \leq \overline{R}_2 \qquad \text{y} \qquad \|u_n(\cdot,t)\|_{H^2} \leq \overline{R}_4. \tag{2.57}$$

Por lo tanto, tenemos

Afirmación 2.4.1. *La sucesión $(u_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en $C([0,T];L^2)$*

Demostración. Para $0 < t \leq T$, partiendo de (2.56) tenemos

$$\partial_t u_n + \partial_x^3 u_n + \lambda u_n^2 \partial_x u_n = 0, \tag{2.58}$$

$$\partial_t u_m + \partial_x^3 u_m + \lambda u_m^2 \partial_x u_m = 0. \tag{2.59}$$

Substrayendo (2.59) de (2.58), después multiplicando por $u_n - u_m$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)^2 dx &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)\left[u_m^2 \partial_x u_n - u_m^2 \partial_x u_m\right] dx \\ &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u_m)\left[u_n^2\left(\partial_x u_n - \partial_x u_m\right) + \partial_x u_m \left(u_n^2 - u_m^2\right)\right] dx, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(u_n-u_m)\,u_n^2\partial_x(u_n-u_m)dx &= \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}u_n\partial_x u_n(u_n-u_m)^2dx\\
&\leq \|u_n\|_\infty\|\partial_x u_n\|_\infty\int_{-\infty}^{+\infty}(u_n-u_m)^2dx\\
&\leq C(T)\int_{-\infty}^{+\infty}(u_n-u_m)^2dx,
\end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned}
-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(u_n-u_m)^2\,(u_n+u_m)\,\partial_x u_m\,dx &\leq \|u_n+u_m\|_\infty\|\partial_x u_m\|_\infty\int_{-\infty}^{+\infty}(u_n-u_m)^2dx\\
&\leq C(T)\int_{-\infty}^{+\infty}(u_n-u_m)^2dx,
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}(u_n-u_m)^2dx\leq C(T)\int_{-\infty}^{+\infty}(u_n-u_m)^2dx.$$

Aplicando el lema de Gronwall tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(u_n-u_m)^2dx\leq\|u_0^n-u_0^m\|_{L^2}^2\,e^{2C(T)t},$$

dado que $\|u_0^n-u_0^m\|_{L^2}\to 0$ cuando $n,m\to\infty$, entonces haciendo $n,m\to\infty$ obtenemos $\|u_n(\cdot,t)-u_m(\cdot,t)\|_{L^2}\to 0$, como queríamos probar. □

Luego la sucesión $\big(u_n(\cdot,t)\big)_{n\geq 1}$ es de Cauchy en L^2, por lo tanto $\big(u_n(\cdot,t)\big)_{n\geq 1}$ converge en el espacio $C\big([0,T];L^2\big)$ para una función $u(x,t)$.

La continuidad es satisfecha, pues si $t_k\to t_0$ en $[0,T]$, entonces

$$\|u(\cdot,t_k)-u(\cdot,t_0)\|_{L^2}\leq\|u(\cdot,t_k)-u_n(\cdot,t_k)\|_{L^2}+\|u_n(\cdot,t_k)-u_n(\cdot,t_0)\|_{L^2}+\|u_n(\cdot,t_0)-u(\cdot,t_0)\|_{L^2}.$$

2.4.2. Regularidad en H^2

Ahora, de (2.57) tenemos

Afirmación 2.4.2. *Para $t\in[0,T]$ tenemos:*

$$u(\cdot,t)\in H^2(\mathbb{R})\qquad y\qquad \|u(\cdot,t)\|_{H^2}\leq\overline{R}_4. \tag{2.60}$$

Demostración. En efecto, tomando t arbitrario en $[0,T]$, usando (2.57) y el teorema 1.3 la sucesión $\big(u_n(\cdot,t)\big)_{n\geq 1}$ es débilmente compacta en H^2, ya que H^2 es reflexivo. Luego contiene una subsucesión que converge débil (sin perdida de generalidad podemos suponer la misma sucesión).

Por lo tanto, aplicando la proposición 1.4 tenemos

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^2} \leq \liminf_n \|u_n(\cdot,t)\|_{H^2} \leq \overline{R}_4.$$

Así, (2.60) está probada. □

Análogamente, probaremos que nuestro candidato es regular en H^1.

Lema 2.5. *Para cada $T > 0$, $u_n \to u$ cuando $n \to \infty$ en $C\big((0,T);H^1\big)$.*

Demostración. Sea $T > 0$ arbitrario fijo, consideremos $t \in (0,T)$.

Note que ya hemos verificado $u_n(\cdot,t), u(\cdot,t) \in H^1$, luego

$$\sup_{t\in(0,T)} \|u_n\|_{H^1} < \infty, \qquad \sup_{t\in(0,T)} \|u\|_{H^1} < \infty.$$

Por definición sabemos que

$$\|u_n - u\|_{H^1}^2 = \|u_n - u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u_n - \partial_x u\|_{L^2}^2,$$

ahora, usando Cauchy Schwarz, desigualdad triangular y la afirmación 2.4.2

$$\begin{aligned}
\|\partial_x u_n - \partial_x u\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x(u_n - u)\partial_x(u_n - u)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u)\partial_x^2(u_n - u)dx \\
&\leq \|u_n - u\|_{L^2}\|u_n - u\|_{H^2} \\
&\leq 2\overline{R}_4\|u_n - u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Así, cuando $n \to \infty$ tenemos $\|u_n - u\|_{H^1} \to 0$, además, como

$$\begin{aligned}
\|u_n - u\|_{H^1} &\leq \|u_n - u\|_{L^2}^2 + 2\overline{R_4}\|u_n - u\|_{L^2} \\
&\leq 4\overline{R}_4^{\,2} + 2\overline{R}_4\overline{R}_2 < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, $\sup_{t\in(0,T)} \|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H^1} < \infty$. Para probar la continuidad considere una sucesión $t_k \to t_0$ en $[0,T]$ y basta usar la siguiente desigualdad.

$$\begin{aligned}
||u(\cdot,t_k) - u(\cdot,t_0)||_{H^1} \leq &||u(\cdot,t_k) - u_n(\cdot,t_k)||_{H^1} + ||u_n(\cdot,t_k) - u_n(\cdot,t_0)||_{H^1} \\
&+ ||u_n(\cdot,t_0) - u(\cdot,t_0)||_{H^1}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.6. *Para cada $T > 0$, sea $t \in [0,T]$. Entonces $\|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H^2} \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Usando el lema (2.5), para cada $t \in \mathbb{R}^+$

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en } H^2 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Además, tenemos a partir de (2.41) y (2.42) considerando $\varepsilon = 0$

$$\frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,0)\|_{L^2}^2 = R(u_n), \tag{2.61}$$

donde

$$R(u_n) = R_1(u_n) + R_2(u_n),$$
$$R_1(u_n) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -\frac{\lambda}{3}(\partial_x u_n(x,s))^3 \partial_x^2 u_n(x,s) + \frac{5}{3} u_n^3(x,s)(\partial_x u_n(x,s))^3 \right\} dxds,$$
$$R_2(u_n) = \frac{5}{6}\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u_n^2(x,t)(\partial_x u_n(x,t))^2 - u_n^2(x,0)(\partial_x u_n(x,0))^2 \right\} dx.$$

Queremos probar que $R(u_n)$ tiende para $R(u)$ cuando $n \to \infty$. Para $R_2(u_n)$ el paso del límite es válido en vista de la siguiente desigualdad.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u_n^2(\partial_x u_n)^2 - u^2(\partial_x u)^2 \right\} dx &= -\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u_n^3 \partial_x^2 u_n - u^3 \partial_x^2 u \right\} dx \\
&= C \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u_n^3 \left(\partial_x^2 u_n - \partial_x^2 u\right) + \partial_x^2 u \left(u_n^3 - u^3\right) \right\} dx \\
&\le C_1 \|u_n - u\|_{H^1} + C_2 \|u_n - u\|_{H^1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u_n^2(x,0)(\partial_x u_n(x,0))^2 - u^2(x,0)(\partial_x u(x,0))^2 \right\} dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Para los términos de $R_1(u_n)$ usando

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ (\partial_x u_n(x,s))^3 \partial_x^2 u_n(x,s) - (\partial_x u(x,s))^3 \partial_x^2 u(x,s) \right\} dx\, ds \\
&= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \partial_x^2 u_n \left[(\partial_x u_n)^3 - (\partial_x u)^3 \right] + (\partial_x u)^3 \left(\partial_x^2 u_n - \partial_x^2 u \right) \right\} dx\, ds \\
&= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \partial_x^2 u_n \left[(\partial_x u_n)^3 - (\partial_x u)^3 \right] - 3(\partial_x u)^2 \partial_x^2 u \left(\partial_x u_n - \partial_x u \right) \right\} dx\, ds \\
&\le \int_0^t \left\{ C_1 \|\partial_x^2 u_n(\cdot,s)\|_{L^2} ||u_n - u||_{H^1} + C_2 \|u(\cdot,s)\|_{H^2}^3 \|u_n - u\|_{H^1} \right\} ds \\
&\le C \sup_{s\in(0,t)} \|u_n - u\|_{H^1} t \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Análogamente, para el otro término de $R_1(u_n)$, concluimos que $R(u_n) \to R(u)$ cuando $n \to \infty$.

Recordando que $u_0^n \to u_0$ en H^2 cuando $n \to \infty$, como

$$\frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,0)\|_{L^2}^2 = R(u_n),$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2 &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \|\partial_x^2 u_n(\cdot,0)\|_{L^2}^2 + \liminf_{n\to\infty} R(u_n) \\ &= \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,0)\|_{L^2}^2 + R(u). \end{aligned} \tag{2.62}$$

Ahora, observemos que las consideraciones anteriores continúan válidas en el siguiente problema, fijando t

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x^3 w + \lambda w^2 \partial_x w = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \text{ y } \lambda = \pm 1, \\ w(x,t) = u(x,t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Consideremos una sucesión arbitraria $(w_0^n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, tal que $w_0^n(\cdot) \to u(\cdot,t)$ en H^2. Entonces denotemos por $w_n(\cdot,s)$ la solución de

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x^3 w + \lambda w^2 \partial_x w = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \text{ y } \lambda = \pm 1, \\ w(x,t) = w_0^n(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Donde $w_n(\cdot,s) \in C^\infty\big((0,T);\mathcal{S}\big)$, y observe que $w_n(\cdot,t) = w_0^n(\cdot)$. Como antes $w_n(\cdot,s) \to u(\cdot,s)$ en $C\big((0,T);H^1\big)$, además, para $s \in \mathbb{R}$ fijo, $w_n(\cdot,s) \rightharpoonup u(\cdot,s)$ en $H^2(\mathbb{R})$.

Dado que $w_n(\cdot,t) = w_0^n(\cdot) \to u(\cdot,t)$ en $H^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,0)\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \|\partial_x^2 w_n(\cdot,0)\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty} \|\partial_x^2 w_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2 - \liminf_{n\to\infty} R(u_n) \\ &= \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 - R(u). \end{aligned} \tag{2.63}$$

Ahora, de (2.62) y (2.63) concluimos que

$$\frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,0)\|_{L^2}^2 + R(u). \tag{2.64}$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ en (2.61)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|\partial_x^2 u_n(\cdot,t)\|_{L^2}^2\right) &= \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,0)\|_{L^2}^2 + R(u)\\ &= \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,t)\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos $u_n(\cdot,t) \rightharpoonup u(\cdot,t)$ en H^2 y $\|u_n(\cdot,t)\|_{H^2} \to \|u(\cdot,t)\|_{H^2}$, por lo tanto $u_n(\cdot,t) \to u(\cdot,t)$ en H^2, como queríamos probar. □

2.4.3. Continuidad del candidato en H^2

Lema 2.7. *Para cada $T > 0$, $u \in C\big((0,T);H^2\big)$.*

Demostración. De (2.64) tenemos

$$\frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\|\partial_x^2 u(\cdot,0)\|_{L^2}^2 + R(u).$$

Afirmación 2.4.3. $\|\partial_x^2 u(\cdot,t)\|_{L^2}$ *es continua como función de t.*

En efecto, observe que basta probar $R(u(\cdot,t))$ es continua como función de t. Recordando que $R(u) = R_1(u) + R_2(u)$, donde

$$R_1\big(u(\cdot,t)\big) = \int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{-\frac{\lambda}{3}(\partial_x u(x,s))^3\partial_x^2 u(x,s) + \frac{5}{3}u^3(x,s)(\partial_x u(x,s))^3\right\}dxds,$$

$$R_2\big(u(\cdot,t)\big) = \frac{5}{6}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{u^2(x,t)(\partial_x u(x,t))^2 - u^2(x,0)(\partial_x u(x,0))^2\right\}dx.$$

Para $R_1(\cdot,t)$ considere $t_1,t_2 \in [-T,T]$

$$\begin{aligned}R_1\big(u(\cdot,t_1)\big) - R_1\big(u\cdot,t_2)\big) &= \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{\lambda}{3}(\partial_x u)^3\partial_x^2 u + \frac{5}{3}u^3(\partial_x u)^3\right\}dx\,ds\\ &\le \int_{t_1}^{t_2}\left\{C_1\|\partial_x u\|_\infty^2\|\partial_x u\|_{L^2}\|\partial_x^2 u\|_{L^2} + C_2\|u\|_\infty^3\|\partial_x u\|_\infty\|\partial_x u\|_{L^2}^2\right\}ds\\ &\le \int_{t_1}^{t_2}\left\{C_1\|u\|_{H^2}^4 + C_2\|u\|_{H^2}^6\right\}ds\\ &\le C|t_1-t_2|.\end{aligned}$$

Así, $R_1\big(u(\cdot,t)\big)$ es continua como función de t.

Para probar la continuidad de $R_2\big(u(\cdot,t)\big)$, consideremos una sucesión $(t_k)_{k\ge1}$ contenida en

$[0,T]$ tal que $t_k \to t_0$ cuando $k \to \infty$, luego

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ u^2(x,t_k)(\partial_x u(x,t_k))^2 - u^2(x,t_0)(\partial_x u(x,t_0))^2 \Big\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ u^2(x,t_k)\left[(\partial_x u(x,t_k))^2 - (\partial_x u(x,t_0))^2\right] \Big\} dx \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_x u(x,t_0))^2 \left[u^2(x,t_k) - u^2(x,t_0)\right] \Big\} dx \\
&\le \|u\|_\infty^2 \|\partial_x u(\cdot,t_k) - \partial_x u(\cdot,t_0)\|_{L^2} \|\partial_x u(\cdot,t_k) + \partial_x u(\cdot,t_0)\|_{L^2} + \\
&+ \|u(\cdot,t_k) - u(\cdot,t_0)\|_{H^1} \|u(\cdot,t_k) + u(\cdot,t_0)\|_{H^1} \|\partial_x u(\cdot,t_0)\|_{L^2}^2 \\
&\le C_1 \|u(\cdot,t_k) - u(\cdot,t_0)\|_{H^1} + C_2 \|u(\cdot,t_k) - u(\cdot,t_0)\|_{H^1}.
\end{aligned}
$$

Dado que, $u(\cdot,t) \in C\big((0,T);H^1\big)$, el último término en la desigualdad anterior tiende a cero, cuando $k \to \infty$. Esto prueba nuestra afirmación. □

Luego, $\|u(\cdot,t)\|_{H^2}$ es continua como función de t, para cada $t \in [0,T]$.

Tomando un arbitrario $t_0 \in [0,T]$ y una sucesión $(t_n)_{n\ge1} \subset [0,T]$ tal que $t_n \to t_0$ cuando $n \to \infty$. Entonces debido a los datos anteriores tenemos $u(\cdot,t_n) \to u(\cdot,t_0)$ en H^1.

Además, como $\|u(\cdot,t_n)\|_{H^2} \le \overline{R}_4$ existe una subsucesión convergente (sin perdida de generalidad podemos tomar la misma sucesión). Dado que, convergencia fuerte implica convergencia débil, entonces $u(\cdot,t_n) \rightharpoonup u(\cdot,t_0)$ en H^1, luego, $u(\cdot,t_n) \rightharpoonup u(\cdot,t_0)$ en H^2. Debido a la continuidad de $||u(\cdot,t)||_{H^2}$ como función de t, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \|u(\cdot,t_n)\|_{H^2} = \|u(\cdot,t_0)\|_{H^2},$$

entonces, $u(\cdot,t_n) \to u(\cdot,t_0)$ en H^2, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \|u(\cdot,t_n) - u(\cdot,t_0)\|_{H^2} = 0.$$

2.4.4. Existencia de la solución del problema

Lema 2.8. *Para cada $T>0$, $u_n(\cdot,t) \to u(\cdot,t)$ cuando $n\to\infty$ en $C\big([0,T];H^2\big)$.*

Demostración. Suponga la afirmación no es válida, entonces existe $\epsilon > 0$ y una sucesión $(t_n)_{n\ge1} \subset [0,T]$ tal que

$$\|u_n(\cdot,t_n) - u(\cdot,t_n)\|_{H^2} \ge \epsilon. \tag{2.65}$$

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe $(t_{n_k})_{k\ge1} \subset (t_n)_{n\ge1}$ y $t_0 \in [0,T]$ tal que $t_{n_k} \to t_0$ cuando $k\to\infty$.

Sin embargo, por el lema anterior, $u(\cdot,t_{n_k}) \to u(\cdot,t_0) \quad \text{en } H^2$.

De manera análoga al lema (2.6) se puede probar que

$$u_{n_k}(\cdot,t_{n_k}) \to u(\cdot,t_0) \quad \text{en } H^2,$$

luego,

$$\begin{aligned}\|u_{n_k}(\cdot,t_{n_k}) - u(\cdot,t_{n_k})\|_{H^2} &\leq \|u_{n_k}(\cdot,t_{n_k}) - u(\cdot,t_0)\|_{H^2} + \|u(\cdot,t_{n_k}) - u(\cdot,t_0)\|_{H^2} \\ &< \epsilon.\end{aligned}$$

Esto es una contradicción con (2.65). □

Veamos a continuación que u es de hecho la solución del problema (2.2). En efecto, dado que cada u_n es regular entonces

$$\partial_t u_n(\cdot,t) = F\big(u_n(\cdot,t)\big) = -\lambda u_n^2(\cdot,t)\partial_x u_n(\cdot,t) - \partial_x^3 u_n(\cdot,t) \tag{2.66}$$

tienen sentido en el espacio H^{-1}, para cada $t \in [0,T]$, de donde concluimos que

$$u_n(\cdot,t+h) - u_n(\cdot,t) = \int_t^{t+h} F(u_n(\cdot,s))ds.$$

Usando que $u_n \longrightarrow u$ en H^2 y el Teorema de la convergencia dominada obtenemos la igualdad

$$u(\cdot,t+h) - u(\cdot,t) = \int_t^{t+h} F(u(\cdot,s))ds,$$

válida en H^{-1}, de donde podemos concluir que $u(\cdot,t) \in C^1\big([0,T];H^{-1}\big)$ y $\partial_t u_n \to \partial_t u$ en H^{-1}.

Finalmente tomando limite en el espacio H^{-1} en ambos lados de (2.66) concluimos la prueba.

2.4.5. Unicidad de la solución del problema

Consideremos $u_1(\cdot,t), u_2(\cdot,t)$ dos soluciones generalizadas de (2.2) definidas en el intervalo de tiempo $[0,T]$, donde $T > 0$. Observe que para $t \in [0,T]$ y $w = u_1 - u_2$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w\big[u_1^2\partial_x u_1 - u_2^2\partial_x u_2\big]dx \\ &= -\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} w\big[(u_1^2 - u_2^2)\partial_x u_1 + u_2^2\partial_x w\big]dx \\ &\leq C\int_{-\infty}^{+\infty} w^2 dx.\end{aligned}$$

Aplicando el Lema de Gronwall obtenemos $u_1 = u_2$.

2.4.6. Dependencia continua

Sea $u_0 \in H^2$ y una sucesión $(u_0^n)_{n\geq 1} \subset H^2$ tal que $u_0^n \to u_0$ en H^2 cuando $n \to \infty$. Sean $u(x,t)$ y $u_n(x,t)$ las correspondientes soluciones generalizadas de (2.2) para datos iniciales $u_0(x)$ y $u_0^n(x)$ respectivamente.

Necesitamos probar que para cada $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{H^2} = 0. \tag{2.67}$$

Tomemos $T > 0$ arbitrario, como $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ es denso en H^2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\tilde{u}_0^n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que para la correspondiente solución $\tilde{u}_n(\cdot,t) \in C^\infty\big([0,T];\mathcal{S}\big)$ de (2.2) tenemos

$$\max_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}_n(\cdot,t) - u_n(\cdot,t)\|_{H^2} < \frac{1}{n}, \tag{2.68}$$

observe que $\tilde{u}_0^n \to u_0$ en H^2 cuando $n \to \infty$. De donde por el lema 2.7 tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \max_{t\in[0,T]} \|u(\cdot,t) - \tilde{u}_n(\cdot,t)\|_{H^2} = 0. \tag{2.69}$$

Aplicando desigualdad triangular y usando (2.68) y (2.69) obtenemos (2.67).

Bibliografía

[1] Angulo, J.; Nonlinear Dispersive Equations (Mathematical Surveys and Monographs). American Mathematical Society, 2009.

[2] Benjamin, T. B.; The Stability of Solitary Waves. Fluid Mechanics Research Institute, University of Essex, 1971.

[3] Evans, L. C.; Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 2010.

[4] Faminskii, A. V.; The Cauchy Problem for the Korteweg-de Vries Equation and for its Generalization, translated from Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo, No. 13, pp. 56–105, 1988.

[5] Friedman, A.; Partial Differential Equations. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

[6] Grafakos, L.; Classical Fourier Analysis (Graduate Texts in Mathematics). Springer, 2008.

[7] Helfrich, K. R., Melville, W. K., Miles, J. W.; J. Fluid. Mech. 149, 1984.

[8] Henri, D. B., Perez, J. F., Wreszinski, W. F.; Stability Theory for Solitary Wave Solutions of Scalar Field Equation, 1982.

[9] Khater, A. H., El-Kakaawy, O. H., Callebaut, D. K.; Phys. Scr. 58, 1968.

[10] Komatsu, T. S., Sasa, S. I.; Phys. Rev. E 52, 1995.

[11] Linares, F., Ponce, G.; Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. Springer, 2007.

[12] Lima, E. L.; Espaços Métricos. IMPA, 1977.

[13] Lonngren, K. E.; Opt. Quantum Electron 30, 1998.

[14] Matsutani, S., Tsuru, H.; J. Phys. Soc. Jpn. 60, 1991.

[15] Medeiros, L. A., Milla Miranda, M.; Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos). UFRJ, 2000.

[16] Nagatani, T.; Physica A 264, 1999.

[17] Nagatani, T.; Physica A 265, 1999.

[18] Oliveira, C. R.; Introdução à Análise Funcional. IMPA, 2008.

[19] Ono, H.; J. Phys. Soc. Jpn. 61, 1962.

[20] Tajiri, M., Nishihara, K.; J. Phys. Soc. Jpn. 54, 2001.

[21] Watanabe, S.; J. Phys. Soc. Jpn. 53, 1984.

[22] Zhidkov, P. E.; Korteweg-de Vries and Nonlinear Schrödinger Equations: Qualitative Theory, Lectures Notes in Mathematics 1756. Springer, 2001.