



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

**Análisis y simulación numérica de un modelo
matemático SI con retardo discreto para las
enfermedades de transmisión sexual**

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática
Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR

Neisser PINO ROMERO

ASESOR

Roxana LÓPEZ CRUZ

Lima, Perú

2017



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Pino, N. (2017). *Análisis y simulación numérica de un modelo matemático SI con retardo discreto para las enfermedades de transmisión sexual*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE
MAGÍSTER**

2-4
170 (re)

Siendo las, 16.⁰⁰ horas del día jueves 12 de enero del dos mil diecisiete, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Oswaldo Napoleón Ramos Chumpitaz e integrado por los siguientes miembros: Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro (Jurado Evaluador); Dr. Frank Edmundo Escobedo Bailón (Jurado Informante); Mg. Jorge Icaro Condado Jáuregui (Jurado Evaluador) y la Dra. Roxana López Cruz como Jurado Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «ANÁLISIS Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DE UN MODELO MATEMÁTICO SI CON RETARDO DISCRETO PARA LAS ENFERMEDADES DE TRANSMISIÓN SEXUAL» presentada por el Bachiller Neisser Pino Romero, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada: Mención en Matemática Computacional.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Neisser Pino Romero respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Neisser Pino Romero aprobado con el calificativo de **Muy Bueno**
..DIECIOCHO.....

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del **Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada: Mención en Matemática Computacional** al Bachiller Neisser Pino Romero.

Siendo las 17.¹⁵ horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Oswaldo Napoleón Ramos Chumpitaz
Presidente

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
Miembro

Mg. Jorge Icaro Condado Jáuregui
Miembro

Dr. Frank Edmundo Escobedo Bailón
Miembro

Dra. Roxana López Cruz
Miembro Asesor

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

ESCUELA DE POSGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIDAD DE POSGRADO

**Análisis y Simulación Numérica de un Modelo
Matemático SI con Retardo Discreto para las
Enfermedades de Transmisión Sexual**

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el grado de Magíster en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional.

Dr. Oswaldo Napoleón Ramos Chumpitaz
Presidente

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro
Miembro

Dr. Frank Edmundo Escobedo Bailón
Miembro

Mg. Jorge Icaro Condado Jáuregui
Miembro

Roxana López Cruz, Ph.D.
Miembro Asesor

Lima – Perú
2017

TÍTULO: Análisis y Simulación Numérica de un Modelo Matemático SI con Retardo Discreto para las Enfermedades de Transmisión Sexual (Lima),

ix 170p, (UNMSM, Magíster, Matemática Aplicada, 2017)

TESIS, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Escuela de Posgrado. Facultad de Ciencias Matemáticas.

Unidad de Posgrado

1. Matemática Aplicada
 2. Modelamiento Epidemiológico
- I. UNMSM // EPG / FCM / UP
 - II. Magíster (Serie)

Índice general

Agradecimientos	VII
Resumen	IX
Abstract	XI
Glosario	XIII
Introducción	XVII
1. Preliminares	1
1.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	1
1.1.1. Problemas de Valor Inicial	1
1.1.2. Existencia y Unicidad	3
1.1.3. Análisis de Estabilidad de un Sistema de E.D.O.	7
Criterio de Routh-Hurwitz	7
Matriz de la Siguiete Generación	9
1.1.4. Estabilidad de Sistemas de E.D.O. No Lineales	12
2. Ecuaciones Diferenciales con Retardo	15
2.1. Ecuación Diferencial con Retardo Sencilla	16
2.1.1. Perturbación de la E.D.R. Sencilla	17
2.1.2. Oscilación de las Soluciones	19
2.2. Existencia de las Soluciones	20
2.2.1. Ecuación Diferencial con Retardo Discreto	20
2.3. Análisis Cualitativo de las E.D.R.	24
2.3.1. Sistemas Lineales Autónomos	24
2.3.2. La Ecuación Característica	25
2.3.3. Los Pequeños Retardos son Inofensivos	29
2.3.4. La Ecuación Escalar	30
2.3.5. Principio de Estabilidad Linealizada	34
2.3.6. Estabilidad Absoluta	35
2.3.7. Bifurcación de Hopf	36
3. Modelo Matemático Epidemiológico SI	39
3.1. Modelo SI Básico con Dinámica Vital en E.D.O.	43
3.1.1. Existencia y Unicidad de la Solución del Sistema	45
Soluciones Uniformemente Acotadas	47
3.1.2. Análisis Cualitativo del Modelo Matemático	51
Puntos de Equilibrio	51
Existencia de los Puntos de Equilibrio	52

3.1.3.	Linealización del Sistema	52
	Punto Libre de Infección	52
	Punto Endémico	53
	Número Básico de Reproducción	54
3.2.	Modelo SEI Básico con Dinámica Vital en E.D.O.	55
3.3.	Modelo SI Básico con Dinámica Vital en E.D.R.	56
	Positividad de la Soluciones	58
	Soluciones Uniformemente Acotadas	58
3.3.1.	Análisis Cualitativo del Modelo Matemático	63
	Puntos de Equilibrio	63
	Existencia de los Puntos de Equilibrio	63
3.3.2.	Linealización del Sistema	64
	Punto Libre de Infección	64
	Punto Endémico	65
3.4.	Modelo SI Básico con Dinámica Vital en E.D.R. con Estrategia de Control	68
	Positividad de la Soluciones	69
	Soluciones Uniformemente Acotadas	70
	Plano Fase	75
	Soluciones Oscilatorias	75
3.4.1.	Análisis Cualitativo del Modelo Matemático	78
	Puntos de Equilibrio	78
	Existencia de los Puntos de Equilibrio	79
3.4.2.	Linealización del Sistema	79
	Punto Libre de Infección	80
	Punto Endémico	81
3.5.	Modelo SI Básico con Dinámica Vital en E.D.O. con Estrategia de Control con 4 Poblaciones	85
3.5.1.	Modelo Matemático	86
	Existencia y Unicidad	87
3.5.2.	Estado de Equilibrio del Modelo	87
	Matriz de la Siguiete Generación	89
3.6.	Modelo SI Básico con Dinámica Vital en E.D.R. con Estrategia de Control con 4 Poblaciones	90
3.6.1.	Modelo Matemático	90
	Existencia y Unicidad	91
	Positividad de la Soluciones	92
3.6.2.	Análisis Cualitativo del Modelo Matemático	93
	Puntos de Equilibrio	93
3.6.3.	Linealización del Sistema	95
	Punto Libre de Infección	96
	Punto Endémico	98
4.	Simulación Computacional	103
4.1.	Software's Matemáticos	105
4.1.1.	Simulaciones Computacionales	106
4.2.	Métodos QSS para Ec. Diferenciales Ordinarias	109
4.2.1.	QSS para Órdenes Superiores	110
4.3.	Métodos QSS para Ec. Diferenciales con Retardo	111
4.3.1.	Definición de DQSS	111
4.3.2.	Propiedades Teóricas de los Métodos QSS para E.D.R.	112
	Estabilidad y Convergencia. Retardos Constantes	112
	Estabilidad y Convergencia. Retardo Dependientes del Tiempo y del Estado	113

4.4.	Simulación Computacional de los Modelos Matemáticos	115
4.4.1.	Simulaciones Computacionales en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . .	115
	Modelo Matemático SI con 2 ecuaciones	115
	Modelo Matemático SI con 4 ecuaciones	119
4.4.2.	Simulaciones Computacionales en las Ecuaciones Diferenciales con Retardo .	122
	Modelo Matemático SI con 2 ecuaciones	122
	Modelo Matemático SI con 4 ecuaciones	128
5.	Discusiones y Conclusiones	135
5.1.	Relación entre la Matemática y la Epidemiología	136
5.1.1.	Modelo SI con Dinámica Vital de 2 ecuaciones	137
	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	137
	Ecuaciones Diferenciales con Retardo	138
5.1.2.	Modelo SI con Dinámica Vital de 4 ecuaciones	141
	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	141
	Ecuaciones Diferenciales con Retardo	142
5.2.	Conclusiones	148
5.3.	Trabajos Futuros	153
5.3.1.	Modelo en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	154
5.3.2.	Modelo en Ecuaciones Diferenciales con Retardo	155
A.	Apéndice	159
A.1.	Prueba de Teoremas del Capítulo 4	159
A.1.1.	Estabilidad Entrada - Estado	159
A.1.2.	Demostración del Teorema 4.1	160
A.1.3.	Demostración del Teorema 4.2	162
	Bibliografía	165

Agradecimientos

En verdad es Bueno y necesario saber la Historia, para no criticar con excesiva facilidad el pasado, y pensar que los que vivimos en el presente tenemos toda la razón y en el pasado sólo era tiniebla y oscuridad.

En primer lugar, deseo expresar mi enorme agradecimiento a Dios por permitirme realizar este trabajo como parte de mi formación académica, que sigue guiando mis pasos en este sendero tanto profesional como personal en el día a día, por ser mi fortaleza ante los momentos de Debilidad, y por brindarme una vida llena de aprendizajes, experiencias y sobre todo Felicidad. A la Virgen María por su guía y protección maternal. Y a mi ángel de la Guarda que siempre está aconsejándome sobre el sendero de la Vida.

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Decana de América, en especial, a la Facultad de Ciencias Matemáticas, por darme la oportunidad de estudiar y ser un profesional.

Del mismo modo también deseo expresar mi agradecimiento a la asesora de esta tesis de maestría, a la profesora Roxana López Cruz, Ph.D. por la dedicación y apoyo que ha brindado a este trabajo, por el respeto a mis sugerencias e ideas y por la dirección y el rigor que ha facilitado a las mismas. Gracias por la confianza ofrecida desde que llegué a esta facultad, brindándome una gran formación no solo académica sino humanística en el área de la investigación científica en las Ciencias Básicas, por lo cual siempre estaré en deuda.

Asimismo, agradezco a cada uno de mis profesores de la maestría por su exigencia y dedicación; al profesor Jaime García Sócola, M.Sc., por sus comentarios y apoyo en este trabajo de investigación. Del mismo modo también quiero agradecer a cada uno de mis profesores de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por su apoyo en mi formación desde el pregrado por lo cual estoy muy agradecido.

En este caso, mi más sincero agradecimiento al profesor Rodrigo Castro, Ph.D. de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, con cuyo apoyo y exigencia estaré siempre agradecido. Por su orientación y atención a mis consultas sobre el Modelamiento mediante Eventos Discretos (DEVS), y por el material facilitado y las sugerencias recibidas. Del mismo a un agradecimiento al profesor Ernesto Kofman Ph.D. por brindarme una nueva perspectiva en el área de la simulación computacional aplicados a los sistemas dinámicos, en especial a las Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

Desde hace tiempo ha sido para mí un Axioma que las cosas pequeñas son con mucho las más importantes. *Arthur Conan Doyle.*

Gracias a mi familia, a mis padres, en especial a mi mamá, y mi mami (mi tía abuela), por su apoyo incondicional en todo momento, cuando me faltaban las fuerzas, ellos estaban ahí para que continuara este camino. A mi hermana mayor que me aconseja en cuanto tengo dudas y me apoya en todo momento. Gracias a mis amigos, que siempre me han prestado un gran apoyo moral y humano, necesarios en los momentos difíciles de este trabajo y esta profesión. A todos mis compañeros, muchas gracias por el apoyo en el día a día.

Deseo agradecer a dos personas muy especiales que ahora están en el cielo, desde ahí me apoyarán a seguir adelante en este sendero, me guiarán a continuar a pesar de las adversidades. Gracias por brindarme un motivo, una razón para no detenerme a pesar de las dificultades. A mantener la esperanza de seguir caminando aunque todo se pueda mostrar en contra de uno. También a una persona que me ayudó mucho a crecer en este camino académico y personal, que sin su apoyo peculiar no hubiera logrado seguir adelante. Gracias. En verdad muchas gracias.

Finalmente, quiero agradecer a mi bisabuelo materno, papá Gerardo, por la compañía en los tiempos difíciles y las enseñanzas impartidas durante mi niñez para continuar siempre adelante aún cuando haya problemas. Gracias por el apoyo, sé que siempre me cuidas desde el Cielo. Del mismo modo, agradecer enormemente al R.P. Vicente Folgado Ramírez, que en Paz descansa, quien fue mi formador espiritual y académico durante muchos años siempre recordándome de mantener siempre la esperanza y la caridad ante las dificultades de la vida, siempre con la mirada al Cielo pero con los pies firmes en la Tierra.

Son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional, académica y personal, a las que me encantaría agradecerles su amistad, sus consejos, su incondicional apoyo, su ánimo y compañía en los momentos más difíciles de mi vida. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón, sin importar en donde estén quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado y por todas sus Bendiciones.

La Matemática es Increíblemente Simple, y a la vez, Sorprendentemente Constructiva... y quizás, Inefablemente Comprendida.

Resumen

Ficha Bibliografica : Biblioteca de la Facultad de Ciencias Matemáticas, 2017
Autor de la Tesis : Neisser Pino Romero
Asesora de la Tesis : Roxana López Cruz, Ph.D.
Unidad de Posgrado : Facultad de Ciencias Matemáticas

En el presente trabajo de investigación, desarrollaremos el análisis cualitativo de los modelos matemáticos epidemiológicos SI, considerando las poblaciones epidemiológicas (Susceptibles e Infectados), cuando el contagio es instantáneo, es decir, cuando el individuo susceptible pasa a ser infectado y puede propagar la enfermedad (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) y también considerando el periodo latente de la enfermedad, es decir, un periodo de incubación que pasa el susceptible contagiado antes de ser un individuo infectado que pueda propagar la enfermedad (Ecuaciones Diferenciales con Retardo). Luego, se realizará una extensión del modelo SI, donde se considerará las poblaciones demográficas por sexo (Hombres y Mujeres), permitiendo una mejor perspectiva del desarrollo de la dinámica de transmisión de la Enfermedad de Transmisión Sexual, de manera particular, el VIH/SIDA. El análisis cualitativo de los modelos se complementará con el análisis numérico, tanto por Tiempo Discreto como en Eventos Discretos, para poder generar las simulaciones computacionales de los modelos, que nos permitan realizar las respectivas interpretaciones epidemiológicas de acuerdo a los datos que se consideren. Por lo cual, el estudio matemático nos permitirá tener una mejor concepción de la problemática para poder realizar una adecuada toma de decisiones en el ámbito del bienestar de la sociedad (Salud Pública).

Palabras Claves :

- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
- Ecuaciones Diferenciales con Retardo
- Estabilidad Local
- Simulación Computacional
- Método Numérico por Tiempo Discreto
- Método Numérico por Evento Discreto
- Epidemiología Matemática
- Enfermedades Infecciosas
- Enfermedades de Trasmisión Sexual : VIH/SIDA

Abstract

Cataloguing Data : Library of the Faculty of Mathematics, 2017
Thesis Author : Neisser Pino Romero
Advisor : Roxana López Cruz, Ph.D.
Unit Graduate : Faculty of Mathematics Science

In this research, we will develop the qualitative analysis of the SI epidemiological mathematical models, considering the epidemiological populations (Susceptible and Infected), when the transmission is instantaneous, ie, when the susceptible individual becomes infected and can spread the disease (Ordinary Differential Equations) and also considering the latent period of the disease, ie, an incubation period passes before being susceptible infected an infected individual that can spread disease (Delay Differential Equations). Then, an extension of the SI model, which will consider the demographic population by sex (men and women), allowing a better perspective of the development of the dynamics of transmission of sexually transmitted disease, particularly be held, HIV / AIDS. The qualitative analysis of the models will be complemented by numerical analysis, both Discrete Time and Discrete Event, to generate computer simulations of models that allow us to perform the respective epidemiological interpretations according to the data considered. Therefore, the mathematical study will give us a better understanding of the problem to make a proper decision-making in the field of welfare of society (Public Health).

Keywords :

- Ordinary Differential Equations
- Differential Equations with Delay
- Local Stability
- Computer Simulation
- Numerical Method for Discrete Time
- Discrete Event Numerical Method
- Mathematical Epidemiology
- Infectious Diseases
- Sexually Transmitted Diseases: HIV AIDS

Glosario

- **Algoritmo:** Un algoritmo es un conjunto definido de procedimientos paso a paso que proporciona la respuesta correcta a un problema particular; siguiendo las instrucciones dadas se puede llegar a la respuesta correcta. Un algoritmo es a menudo expresado en la forma de un gráfico, donde cada paso está representado por un cuadrado. Las flechas se ramifican después de cada paso para indicar direcciones posibles que puede tomar para resolver el problema. Esquema explícito de pasos a seguir con reglas bien definidas para resolver un problema de salud. [98].
- **Análisis de Género:** Análisis de un proceso o fenómeno que consiste en el examen de las funciones que desempeñan respectivamente los hombres y las mujeres y que abarca temas clave como la división del trabajo basada en el género (también conocido como división sexual del trabajo), las actividades productivas y reproductivas, el acceso a los recursos y los beneficios y el control sobre los mismos, y los factores socioeconómicos y ambientales que afectan a hombres y mujeres de manera diferenciada. [98,99].
- **Análisis de Sistemas:** Es un análisis formal cuyo objetivo es sugerir un curso de acción examinando sistemáticamente los objetivos, costos, efectividad y riesgos de un programa, proyecto, política o estrategia. [98].
- **Análisis de Situación:** Es el estudio de una situación que requiere ser mejorada. El análisis de situación se inicia con una definición del problema, una evaluación de su magnitud, extensión, severidad, causalidad y su impacto en la comunidad. [98,99].
- **Base de Datos:** Una base de datos es un sistema de archivos electrónico. En Salud Pública y Epidemiología, por ejemplo, tanto los países como las organizaciones internacionales, OMS y OPS cuentan con sistemas de base de datos que pueden ser consultadas permanentemente y en forma periódica (Ejemplo de base de datos internacional: Base de Datos de Indicadores, Básicos de Salud; Situación de Salud de la Américas: Indicadores Básicos; Perfiles de salud por Países; Atlas de Indicadores Básicos de Salud). En general en epidemiología, medicina, salud pública y ciencias afines se cuenta con bases de datos como herramienta fundamental en el quehacer de cada área de actividad. [98].
- **Brote:** Episodio en el cual dos o más casos de la misma enfermedad, tienen alguna relación entre sí: por el momento de inicio de los síntomas, por el lugar donde ocurrieron, por las características de las personas enfermas, por ejemplo: Edad, grupo étnico, ocupación, pasajeros en un mismo medio de transporte, etc. [98,99].
- **Cadena Epidemiológica (Cadena de Infección):** Proceso por el cual un agente infeccioso se transmite desde una fuente de infección, a un huésped susceptible mediante una secuencia en la que interviene los siguientes elementos: El agente, la fuente de infección, la puerta de salida, el mecanismo de transmisión, la puerta de entrada y el huésped. La importancia de la cadena epidemiológica radica en que identificando los posibles eslabones en cada enfermedad se puede interrumpir la cadena de transmisión y prevenir el desarrollo y propagación de estas enfermedades. [98].

- **Coherencia:** El término implica que una asociación de causa y efecto para una asociación no debe entrar en conflicto con lo que se sabe de la historia natural y biología de una enfermedad. [98].
- **Contagio:** Transmisión de una enfermedad de un enfermo a una persona sana. El contagio es unas veces directo, cuando existe contacto entre los dos individuos, y otras veces indirecto, cuando existe un intermediario que transporta el contagio (enfermero, animales domésticos, insectos, vestidos, alimentos, bebidas). [98].
- **Control:** Reducción, mediante intervenciones específicas, de la incidencia de una enfermedad a niveles en que deje de constituir un problema de Salud Pública. [98].
- **Control de Infección:** Control de la infección se refiere a las políticas y procedimientos utilizados para minimizar el riesgo de propagación de infecciones, especialmente en hospitales y centros de cuidado de la salud humana o animal. - El propósito del control de la infección es reducir la incidencia de enfermedades infecciosas. Estas enfermedades son generalmente causadas por bacterias o virus y pueden transmitirse por contacto de persona a persona, de animal a humano, de contacto humano con superficie infectada, en el aire infectado con pequeñas gotas de agentes infecciosos, suspendido en el aire y, finalmente, por vehículos comunes como la comida o el agua. Enfermedades que se transmiten de animales a los seres humanos son conocidas como zoonosis; los insectos que transmiten agentes patógenos son conocidos como vectores. [98].
- **Curva Epidémica:** Es un gráfico que presenta la distribución de los casos en el tiempo, de acuerdo a la fecha de los primeros síntomas, considerando a todos los afectados en el brote de una enfermedad; la unidad de tiempo que se establece en el diseño del gráfico depende del período abarcado en el brote; este período puede variar según la enfermedad de que se trate pudiéndose determinar en días o semanas o en horas si se trata de estafilococos por ejemplo. - La curva epidémica ayuda a determinar si el brote se originó a partir de una fuente común, intermitente, o se propagó de una persona a otra. [98].
- **DEVS:** Acrónimo del inglés para referirse a Discrete Event System Specification (Especificación de Sistemas de Eventos Discretos). El término es ahora estándar en el campo de la Simulación para referirse a un formalismo modular y jerárquico para modelar y analizar sistemas de diversos tipos. En particular, sistemas de eventos discretos, sistemas de ecuaciones diferenciales (o sistemas continuos) y sistemas híbridos continuos y discretos. [6,7].
- **Ecuación Diferencial con Retardo (E.D.R.):** Es una ecuación diferencial en la que la derivada de la función en un instante depende de los valores de la función en instantes anteriores. [14].
- **Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.):** Es la ecuación diferencial que relaciona una función desconocida de una variable independiente con sus derivadas. Es decir, una sola variable independiente, y una o más de sus derivadas respecto de tal variable. [19].
- **Endemia:** Es la presencia constante o la prevalencia habitual de casos de una enfermedad o agente infeccioso en poblaciones humanas dentro de un área geográfica determinada. [98].
- **Enfermedad Infecciosa:** Entidad infecciosa que se transmiten por contacto directo, de persona a persona. [98,99,100].
- **Epidemia:** Es el aumento de la incidencia de casos similares en poblaciones humanas en un área geográfica determinada. [98].
- **Epidemiología:** Se define como el estudio de la distribución, frecuencia y determinantes del proceso salud-enfermedad en poblaciones humanas. [98].

- **Estabilidad Numérica:** La estabilidad numérica técnicamente no forma parte de la teoría de la estabilidad, puesto que no analiza la estabilidad de soluciones de un sistema de evolución temporal, sino la estabilidad del algoritmo usado para encontrar una de las soluciones de dicho sistema. Sin embargo, el propio algoritmo numérico de resolución puede ser visto a veces como un sistema dinámico discreto. [8,9].
- **Estabilidad de Sistemas Dinámicos:** La estabilidad de los sistemas dinámicos se refiere a que pequeñas perturbaciones en las condiciones iniciales o en alguna de las variables que intervienen en la ecuación del movimiento produzca un comportamiento suficientemente similar al comportamiento sin dichas perturbaciones. Para sistemas deterministas descritos por ecuaciones diferenciales la estabilidad del dicho sistema de ecuaciones obviamente implica la estabilidad del sistema. [11].
- **Estrategia:** En Salud Pública, un conjunto de medidas esenciales de tipo sanitario, ambiental y socioeconómico dirigidas a controlar o resolver un problema. Las estrategias sustentan el cumplimiento de las políticas públicas de salud en el mediano y largo plazo. [98].
- **Estudio Observacional (Estudio No Experimental):** Un estudio en el que se permite a la naturaleza seguir su curso. Los cambios o diferencias en una característica (p.ej. si la población recibió o no la intervención de interés) se estudian en relación a los cambios o diferencias en otra(s) (p.ej. si fallecieron o no), sin la intervención del investigador. Suponen un mayor riesgo de sesgo de selección que los estudios experimentales (ensayos clínicos controlados aleatorizados). [98].
- **Factor de Riesgo:** Es toda característica o circunstancia de una persona o grupo de personas que se sabe está asociada con un incremento en la probabilidad de padecer, desarrollar o estar en especial vulnerabilidad a un proceso mórbido. [98].
- **Incidencia:** Se le define como el número de casos de enfermedad que comienzan o de personas que se enferman durante un período dado en una población determinada. Número de nuevos casos de una enfermedad. [98].
- **Información Epidemiológica:** La epidemiología depende de la información que se recolecta en el sistema de salud; por ello, es importante conocer los principales mecanismos y procedimientos que establecen las autoridades sanitarias nacionales e internacionales para obtener conocimientos oportunos, uniformes, completos y confiables, referentes al estado y evolución del proceso salud-enfermedad en la comunidad, para apoyar la vigilancia epidemiológica. [98].
- **Infectabilidad:** Capacidad de un agente infeccioso para causar la infección; se mide como la proporción de personas expuestas a un agente infeccioso que son infectadas. [98].
- **Métodos Numéricos:** Los métodos numéricos se basan en dos conceptos principales: recursión y aproximaciones. Esto significa que utilizan la recursión y las aproximaciones así como la iteración para encontrar una solución. [8,9].
- **Modelos Cualitativos:** Estos pueden usar figuras, gráficos o descripciones causales, en general se contentan con predecir si el estado del sistema irá en determinada dirección o si aumentará o disminuirá alguna magnitud, sin importar exactamente la magnitud concreta de la mayoría de aspectos. [18].
- **Modelos Cuantitativos o Numéricos:** Usan números para representar aspectos del sistema modelado, y generalmente incluyen fórmulas y algoritmos matemáticos más o menos complejos que relacionan los valores numéricos. El cálculo con los mismos permite representar el proceso físico o los cambios cuantitativos del sistema modelado. [8].

- Modelos de Simulación: Describen situaciones medibles de manera precisa o aleatoria, por ejemplo con aspectos de programación lineal cuando es de manera precisa, y probabilística o heurística cuando es aleatorio. Este tipo de modelos pretende predecir qué sucede en una situación concreta dada. [6,98].
- Pandemia: Enfermedad epidémica que afecta poblaciones en varios países o continentes. [98].
- Prevalencia: Es el número de casos existentes, en una población en un momento determinado, sin distinguir si son casos nuevos o antiguos. [98].
- Proceso Asíncrono: Cada variable de estado actualiza su valor independiente del resto de los estados, en distintos instantes. [6,7].
- Salud Pública: Es la ciencia y el arte de prevenir la enfermedad, prolongar la vida y promover la salud y la eficiencia, tanto física como mental, mediante los esfuerzos sociales organizados para el saneamiento del ambiente, el control de las infecciones en la comunidad, la educación de los individuos acerca de la higiene personal, la organización de los servicios médicos y de enfermería para el diagnóstico temprano y el tratamiento preventivo de la enfermedad y el desarrollo de un mecanismo social que permita asegurar a los individuos el disfrutar de un buen estado de salud. [98].
- Teoría de Estabilidad: Estudia la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos, es decir, examina cómo difieren las soluciones bajo pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales. La estabilidad es muy importante en física y ciencias aplicadas, ya que en general en los problemas prácticos las condiciones iniciales nunca se conocen con toda precisión, y la predictibilidad requiere que pequeñas desviaciones iniciales, no generen comportamientos cualitativamente muy diferentes a corto plazo. Cuando la diferencia entre dos soluciones con valores iniciales cercanos puede acotarse mediante la diferencia de valores iniciales se dice que la evolución temporal del sistema presenta estabilidad. [19,23].
- Vigilancia Epidemiológica: Se define como la utilización de los conceptos, fundamentos, categorías y comportamiento del proceso salud-enfermedad en la sociedad, a través de una estructura incluida en el sistema nacional de salud, la cual permite, mediante el conjunto de actividades que le son propias, obtener la información pertinente, explicar en todo momento el perfil de salud de la población, y detectar y prever los cambios que puedan ocurrir para recomendar oportunamente sobre bases objetivas y racionales los mecanismos de vigilancia epidemiológica como un instrumento de apoyo a los servicios de atención a la salud. Es una alternativa para definir con mayor oportunidad, las medidas de prevención y control de los principales problemas de salud-enfermedad que afectan a la sociedad, incluidos los factores que los condicionan. [98].

Introducción

La experiencia muestra que si bien no podemos comprender por completo los fenómenos que afectan la realidad en la que vivimos, al menos podemos intentar predecirla, dentro de ciertas limitaciones de cómo suceden los fenómenos naturales. La meta básica de la Ciencia actual es crear en torno a los fenómenos reales, modelos que describan y puedan predecir el comportamiento de tales fenómenos. Se puede decir entonces que un Modelo Matemático de un cierto fenómeno es bueno si predice o simula algunos de los comportamientos del fenómeno real. Además, se puede tratar de encontrar estructuras matemáticas que sirvan de modelo común a diversos y diferentes fenómenos. Si bien se dice que los problemas complejos tienen soluciones erróneas, sencillas y fáciles de comprender, éste es tal vez el caso de muchos de los modelos matemáticos que se usan en las diferentes ciencias.

Muchos de los fenómenos que se presentan en la naturaleza (biológicos, epidemiológicos, sociales, económicos, físicos, químicos, etc.) se pueden modelar matemáticamente mediante las Ecuaciones Diferenciales para su respectiva descripción y estudio de la misma. Desafortunadamente, solo en contados casos se pueden encontrar una solución analítica de estas ecuaciones, y en muchas ocasiones los modelos matemáticos de los objetos de estudio involucran ecuaciones diferenciales para las que no se cuenta con soluciones analíticas, de las mismas generando un gran malestar para el Modelamiento matemático, pero no impide que se siga estudiando esta rama de la investigación de alguna problemática. Este enfoque tiene varios nombres, tales como *dinámica de sistemas*, o *sistemas dinámicos*. Para ello debemos considerar en el análisis del mundo, a éste como un todo, como un sistema global. Nos alcanza con considerar como concepto el siguiente, que un sistema es un conjunto de elementos relacionados entre sí.[1].

Los conocimientos alcanzados por la humanidad hasta el presente, hacen presumir que los avances científicos tienden a prever todos los acontecimientos que pudieran suceder bajo la órbita de una realidad cada vez más artificial, cibernética o programable. Los distintos fenómenos que se presentan en las diversas Ciencias, estudian su comportamiento, sus consecuencias y fines, según los parámetros que intervienen, pero esencialmente prefieren analizar sus implicancias ahorrándose el proceso de ejecución. Así es como mediante imitaciones o analogías, se recrea o simula el fenómeno en cuestión considerando que a veces no es posible reiterar el experimento cuantas veces se desee. [1].

Antes de comenzar con algunas descripciones sobre los Modelos Matemáticos que se desarrollarán en el presente trabajo, se mencionará de manera muy especial del Modelo presentado, en el año 1927, por W. O. Kermack y A. G. McKendrick que crearon el modelo SIR que consideraba interacciones entre las poblaciones epidemiológicas Susceptibles, Infectados y Recuperados. De ahí en adelante, se comenzaron diferentes trabajos de investigación que concernía a la Epidemiología dar respuestas, pero que en momentos oportunos se apoyo fuertemente en la Matemática. Los Modelos Matemáticos Epidemiológicos han ayudado enormemente a la descripción de las enfermedades de contagio, de manera particular, las enfermedades infectocontagiosas donde nos centraremos en las Enfermedades de Transmisión Sexual (E.T.S.). [1,91,92].

Las Enfermedades de Transmisión Sexual (E.T.S.) que se considerarán en el desarrollo del presente trabajo serán del Modelo SI (Susceptibles - Infectados) donde la enfermedad no tiene una cura total, por ende no se considerará la población de los Recuperados. Una de las enfermedades que satisface esta condición es la enfermedad del VIH/SIDA. Esta enfermedad en los últimos años ha tenido un gran impacto en cuanto a su propagación, y a la vez, de los diferentes recursos que se tiene en el Gobierno para evitar brotes dentro de la sociedad, y con la misión de mantener a niveles bajos su propagación debido que es una enfermedad que genera el ingreso a muchas otras enfermedades cuando la enfermedad se sitúa en la población y comienza a afectar a la sociedad en cuanto a la salud pública de nuestra nación.

En consecuencia, se tiene que recurrir a otros métodos para tratar dichas ecuaciones, siendo uno de ellos, los Métodos Numéricos, para aproximar numéricamente las soluciones exactas del problema. Pero aplicar estos métodos numéricos se requiere de un análisis cuidadoso y detallado, debido que hay que garantizar que en verdad se está aproximando a la solución buscada, ya que en su implementación se tiene que considerar que puede suscitarse varios tipos de error tanto absoluto como relativo, como lo son los errores de medición de los datos y los errores de redondeo en los cálculos al compilar los algoritmos en las computadoras digitales. [2].

Una alternativa para estudiar estos problemas, es el estudio cualitativo de estas ecuaciones que están modelando el problema. En este contexto, en vez de tratar de encontrar las soluciones analíticas o exactas, o también de aproximar las soluciones mediante los métodos numéricos; nos enfocaremos en el comportamiento de las soluciones, es decir, qué sucede con las soluciones cuando la variable independiente (en nuestro caso el tiempo) tiende al infinito, es decir, qué sucede con el problema a un largo plazo de tiempo. Un elemento clave e importante en este estudio es encontrar los puntos de equilibrio o puntos críticos, los cuales son puntos en los que los valores de las variables dependientes no cambian al modificarse el valor de la variable independiente. Una vez encontrados los puntos de equilibrio, nos interesará saber cómo se comportan las soluciones en una vecindad de estos puntos: ¿Se acercan, se alejan u oscilan alrededor de este punto al crecer la variable independiente?. En el primer caso diremos que el punto de equilibrio es asintóticamente estable y en el segundo caso diremos que es asintóticamente inestable. [3].

Por lo cual, el estudio que se realiza con los puntos de equilibrio de las ecuaciones diferenciales, y el comportamiento de las soluciones de las mismas en una vecindad de dichos puntos es conocido como el análisis de estabilidad local de las Ecuaciones Diferenciales tanto en las Ordinarias (E.D.O.) como en las de Retardo (E.D.R.). Todo este análisis nos brindará la debida información sobre el comportamiento de las soluciones analíticas del sistema, el cual podrá se complementado con otros métodos, en nuestro caso, los Métodos Numéricos. [2].

Este estudio que se orienta a la estabilidad de las Ecuaciones Diferenciales, en especial a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, que nos permite hacer predicciones importantes sobre el comportamiento de los modelos matemáticos que las emplean, así como también, proporcionarnos un marco de referencia para validar los diversos métodos numéricos utilizados para aproximar las soluciones analíticas del modelo, en esta sección sobre las simulaciones computacionales se podría enfocar en dos tipos de aproximación numérica para la resolución de las Ecuaciones Diferenciales mencionadas: el Método Numérico por aproximación en Tiempo Discreto, para lo cual se utilizará los siguientes software's computacionales: MATLAB, Mathematica, Maple y RStudio; y también el Método Numérico por aproximación en Eventos Discretos, el cual se utilizará: Los Métodos QSS en PowerDEVS. De esta manera, con diferentes perspectivas sobre las simulaciones computacionales nos permitirá conocer las ventajas y desventajas que tiene cada uno, y el estudio en general de las Simulaciones Computacionales para la problemática que se está estudiando. [4,5,6,7,8,9].

En muchos casos, la respuesta de los modelos a los cambios en las variables dependientes no es instantánea, sino que ocurre después de un determinado lapso de tiempo (Retardo). Por ejemplo, en modelos biológicos y epidemiológicos la respuesta de las poblaciones de las especies, de los individuos que se están modelando suele presentarse después de que las mismas obtienen un grado de maduración, lo cual impone retardo a estas respuestas. En otros casos el cambio en las poblaciones depende de los valores de las mismas a lo largo de un intervalo de tiempo pasado (Retardo Distribuido). Por este motivo se hace necesario el estudio de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, ya sea este Discreto (cuando el retardo toma un valor fijo) o distribuido (cuando el retardo toma un valor variable). En algunos modelos puede haber más de un retardo discreto o distribuido, o bien, haber combinaciones de ambos tipos de Retardo. [10].

La Epidemiología surgió del estudio de las epidemias de enfermedades infecciosas que se presentan en la naturaleza; de ahí su nombre. Ya en el siglo XX, los estudios epidemiológicos se extendieron a las enfermedades y problemas de salud en general, analizados mediante diversos métodos, entre los cuales, los de la demografía y la estadística son especialmente importantes para su estudio; desde ahí han surgido más formas de describir la problemática como las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (considerando el *Tiempo* como la variable independiente), del mismo modo las Ecuaciones Diferenciales con Retardo (de manera similar, consideramos el *Tiempo* como la variable independiente), a diferencia de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, las Ecuaciones Diferenciales con Retardo considera una Historia anterior al punto de inicio de nuestro estudio, lo cual ayuda al estudio de ciertas enfermedades donde su evolución no sea de manera inmediata sino tenga un tiempo de maduración. [11,13,14].

La epidemiología cuenta con un amplio arsenal de instrumentos que permiten el análisis del proceso salud-enfermedad logrando conocimientos, estrategias y herramientas de otras disciplinas especialmente de la estadística y su aplicación a las ciencias biológicas, la bioestadística. También la ecología, las matemáticas, las ciencias de la computación, las ciencias sociales entre otras aportan a la epidemiología. Son múltiples los conceptos, términos y definiciones que componen las diferentes ramas de la epidemiología. [91].

Se presentará los fundamentos necesarios para la formulación de un Modelo Matemático Epidemiológico SI que permita la predicción de la dinámica de contagio entre Susceptibles e Infectados. Esto quiere decir, que se diseñará un Modelo matemático teniendo en cuenta ciertas hipótesis matemáticas para su adecuada formalización matemática, y a la vez que esté contrastado con la realidad que se intenta modelar, para lo cual se considerará condiciones necesarias para que se establezca un Modelo que interpreta el fenómeno epidemiológico, y su impacto en la sociedad expresada en Poblaciones Susceptibles e Infectadas, y como la interacción de estas poblaciones afecta a la sociedad; pero la cuestión del Modelo no es solamente describir, representar y contrastar con la realidad, sino ver la manera de cómo combatir el crecimiento de contagio de la epidemia, y en qué medida representa la estrategia de control para un adecuado procedimiento de prevención de la enfermedad en la medida que sea posible. En un primer momento desarrollado por las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) donde el contagio de un Susceptible por un Infectado es considerado de manera instantánea donde ya está apto para propagar la enfermedad; después se realizará una nueva consideración, cual es que la enfermedad posea un periodo latente antes que pueda propagarse la enfermedad, es decir, cuando un Susceptible es contagiado por un Infectado, este individuo debe esperar un periodo de incubación (periodo latente de la enfermedad) para poder propagar la enfermedad. Un ejemplo claro de este procedimiento en las Enfermedades de la Transmisión Sexual (E.T.S.) es el VIH/SIDA. [11,12,13,14].

La Salud Pública considerada como la atención oportuna y adecuada de la salud aplicada a la población en los aspectos de protección, promoción, recuperación y rehabilitación, ha tenido y sigue teniendo diferentes connotaciones de acuerdo a las diferentes posiciones ideológicas, políticas, económicas y sociales; posiciones que siempre están en conflicto, imperando por lo tanto las

decisiones del poder político. Lo que sí cabe destacar a partir de la Historia, que a partir de la Revolución Industrial, epidemias como el cólera, la viruela, la peste bubónica y la tifoidea produjeron un impacto social que hicieron evidente, aunque de manera limitada, el inicio de las acciones básicas de la salud pública por las relaciones existentes entre las enfermedades infecciosas y los bajos niveles de vida. Se inicia así el surgimiento del control de enfermedades transmisibles y de algunas actividades de saneamiento ambiental. [15].

Esto quiere decir, que la Epidemiología matemática brinda un gran soporte científico a la toma de decisiones, respalda las respuestas de acción en la población ante alguna epidemia. Por lo cual, el desarrollo y el trabajo conjunto e interdisciplinario para buscar una mejor solución social, económica y política brindaría una sociedad protegida ante las enfermedades que se pueda suscitar. En nuestro país, la Institución encargada sería la Dirección General de Epidemiología (D.G.E.) del Ministerio de Salud (MINSA) donde se deba determinar los estudios, actividades, intervenciones adecuadas para que el impacto de alguna epidemia no pase a umbrales alarmantes para la población. Una de las últimas publicaciones realizadas por el Ministerio, que se relaciona directamente con el presente trabajo, es el libro: "*Nociones Básicas de Modelamiento Matemático aplicado a la Epidemiología*" donde se muestra que las consideraciones básicas para poder realizar un Modelamiento matemático para estudiar la dinámica de transmisión de algunas enfermedades, y los estados que la población pueda pasar mediante la enfermedad se esté propagando, y a la vez, las actividades que se realicen para ir frenando el avance de la enfermedad, por el bien de la sociedad. [15,61,66,72].

Finalmente, el desarrollo de los Modelos Matemáticos Epidemiológicos ha ido creciendo enormemente tanto en su análisis matemático, sea por el análisis analítico o por el análisis cualitativo, que en muchos casos se complementa por el análisis numérico. Muchos de los modelos propuestos se presentan como referencias para describir diferentes problemas, que poco a poco se va desarrollando con mucho más cercanía a la realidad. El trabajo de la investigación en conjunto para el bien de la Humanidad. Cada contribución por más mínima que podría ser, ayuda enormemente al desarrollo de la investigación científica. La colaboración interdisciplinaria que se puede generar entre las diferentes ramas de la ciencia permitiría construir mejores perspectivas de análisis y investigación para un adecuado complemento científico. [12,14,92,94,95,96].

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo del presente capítulo, es proporcionar de manera rápida y sencilla los fundamentos básicos sobre el Análisis Matemático, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y la Estabilidad de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; ya que utilizaremos bastante de estas herramientas matemáticas en las demostraciones y aplicaciones. Del mismo modo, es suficiente con describir a detalle la formalidad matemática que nos ayudará en el desarrollo de este trabajo. [16,17,18,19,20,21].

1.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Ahora, veremos algunos resultados sobre las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, dichos resultados y sus respectivas demostraciones se pueden encontrar en [22,23,24].

Una Ecuación Diferencial es una ecuación que involucra derivadas (o diferenciales) de una función desconocida de una o más variables. Este tipo de ecuaciones aparece en el estudio de numerosos fenómenos físicos, químicos, económicos, biológicos; como por ejemplo, en los problemas gravitatorios, en la desintegración radioactiva, en el proceso macroeconómico de un país, en el crecimiento de poblaciones, en las reacciones químicas, etc. De modo que recordaremos algunas nociones básicas sobre las Ecuaciones Diferenciales que ayudan mucho a la descripción de la realidad que se vive a través del tiempo.

Las Ecuaciones Diferenciales se pueden clasificar, atendiendo a dos criterios:

1. **Tipo:** Si la función incógnita contiene una única variable independiente, entonces la ecuación se denomina ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.). En otro caso, cuando la función incógnita contiene dos o más variables independientes, la ecuación diferencial se dice que es una ecuación diferencial en derivadas parciales (E.D.P.).
2. **Orden:** Es la derivada de orden más alto que aparece en la ecuación diferencial.

1.1.1. Problemas de Valor Inicial

Definición 1.1 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función.

1. Una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) autónoma de primer orden asociada a F , es una expresión del tipo

$$w' = F(w) \tag{1.1}$$

2. Una solución de la EDO (1) es una función diferenciable $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que

- a) $\varphi(t) \in U$, para todo $t \in J$
- b) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, para todo $t \in J$

Observación 1.1 Si $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, es continua entonces toda solución φ de la E.D.O. (1) es de clase C^1 .

Observación 1.2 Si consideramos $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ y $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ entonces

1. La E.D.O. (1.1) tendría la forma de un sistema de "n" Ecuaciones Diferenciales Ordinarias autónomas, como se muestra a continuación:

$$\begin{cases} x_1'(t) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n'(t) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

2. φ es solución de la E.D.O. (1.2), si y sólo si,

- a) $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in U$, para todo $t \in J$
- b) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$ satisface (1.2), para todo $t \in J$

Definición 1.2 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función, $w_o \in U$ y $t_o \in \mathbb{R}$

1. El *Problema de Valor Inicial (P.V.I.)* o el *Problema de Cauchy* asociado a f , es dado por

$$\begin{cases} w'(t) = F(w) \\ w(t_o) = w_o \end{cases} \quad (1.3)$$

2. Una solución del (P.V.I.) (1.3) es una función $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable, donde $J \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que

- a) $t_o \in J$
- b) $\varphi(t) \in U$, para todo $t \in J$
- c) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$, para todo $t \in J$
- d) $\varphi(t_o) = w_o$

Observación 1.3 Si consideramos $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ y $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ entonces,

1. Para $w_o = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ cuando $t_o = 0$, tenemos el P.V.I. asociado a F

$$\begin{cases} x_1'(t) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) & , & x_1(0) = x_1^0 \\ x_2'(t) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) & , & x_2(0) = x_2^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n'(t) = F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) & , & x_n(0) = x_n^0 \end{cases} \quad (1.4)$$

2. Una solución del P.V.I. (1.4) es una función $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable en el intervalo $J \subseteq \mathbb{R}$ tal que cumple lo siguiente:

- a) $0 \in J$
- b) $\varphi(t) \in U$, para todo $t \in J$
- c) $\varphi'(t) = F(\varphi(t))$ satisface (1.4), para todo $t \in J$
- d) $\varphi(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

1.1.2. Existencia y Unicidad

En primer lugar, veamos algunas notaciones previas a los resultados que mencionaremos durante esta sección. Recordemos que $B_r(w_o) \in \mathbb{R}^n$ denota la bola abierta centrada en $w_o \in \mathbb{R}^n$, y de radio $r > 0$, de manera similar tenemos $B_r[w_o] \in \mathbb{R}^n$ denota la bola cerrada centrada en $w_o \in \mathbb{R}^n$, y de radio $r > 0$,

$$B_r(w_o) = \{w_o \in \mathbb{R}^n : \|w - w_o\| < r\} \quad B_r[w_o] = \{w_o \in \mathbb{R}^n : \|w - w_o\| \leq r\}$$

De manera similar para el caso de la recta Real, denotaremos respectivamente como el intervalo abierto o intervalo cerrado a

$$I_r(w_o) = \langle w_o - r; w_o + r \rangle \quad I_r[w_o] = [w_o - r; w_o + r]$$

Definición 1.3 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, y $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función

1. Decimos que F es **Lipschitz** en U , si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq C \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in U$$

2. Decimos que F es **localmente Lipschitz** en U , si y sólo si para cualquier $w_o \in U$, existen $k > 0$ tales que $B_k(w_o) \subseteq U$ y la restricción

$$F|_{B_k(w_o)} : B_k(w_o) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es Lipschitz en $B_k(w_o)$.

Definición 1.4 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, y $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Decimos que F es de clase C^1 en U , si y sólo si, se cumplen las siguientes condiciones:

- 1. Para todo $w \in U$, existen las derivadas parciales $\frac{\partial F_i}{\partial w_j}(w) \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$
- 2. Para todo $\forall 1 \leq i, j \leq n$ las funciones $\frac{\partial F_i}{\partial w_j} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ son continuas en U y lo denotamos:

$$J(w) = \frac{\partial (F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial (w_1, w_2, \dots, w_n)}(w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial w_1}(w) & \frac{\partial F_1}{\partial w_2}(w) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial w_n}(w) \\ \frac{\partial F_2}{\partial w_1}(w) & \frac{\partial F_2}{\partial w_2}(w) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial w_n}(w) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial w_1}(w) & \frac{\partial F_n}{\partial w_2}(w) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial w_n}(w) \end{bmatrix}$$

Esta matriz es conocida como la Matriz Jacobiana ó Jacobiano de F .

Proposición 1.1 (Cualquier función con derivada acotada es Lipschitz): Sea I un intervalo, y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I , diferenciable en $\text{int}(I)$, y tal que su derivada es acotada. Entonces f es Lipschitz en X .

Lema 1.1 Sea $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$, $F(X) = (F_1(X), F_2(X), \dots, F_n(X))$ con $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ son continuas y existen $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$ continuas en $\mathbb{R}_+^n \quad \forall j, k = \overline{1, n}$. Entonces, F localmente lipschitz continua en \mathbb{R}_+^n .

Teorema 1.1 Sea $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ localmente lipschitz continua para cada $j = \overline{1, n}$ y satisface $F_j(X) \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}_+^n$, $x_j = 0$. Entonces para cada $x_o \in \mathbb{R}_+^n$, existe una única solución de $X' = F(X)$ con $X(0) = X_o$ en \mathbb{R}_+^n donde está definida en algún intervalo $(0, b]$ con $b \in (0, \infty +]$. Si $b < +\infty$, entonces

$$\sup_{0 \leq t \leq b} \sum_{j=1}^n X_j(t) = +\infty$$

Proposición 1.2 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto y F una función de clase C^1 en U . Entonces F es localmente Lipschitz en U .

Donde $F_i : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, n$

Si cada una de las funciones F_i para $i = 1, 2, \dots, n$ son lineales, entonces (1.5) es llamado Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales, caso contrario se llamará Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales.

Si recurrimos a la notación matricial, resulta sencillo relacionar el sistema de n ecuaciones diferenciales con los resultados previos, para esto consideraremos las funciones vectoriales.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad y \quad F(x) = \begin{bmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{bmatrix}$$

luego, el sistema (1.4) tendría la siguiente forma: $x' = F(x)$, por lo cual se puede utilizar los resultados previos.

La forma general de un Sistema de n E.D.O. autónomas lineales:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}$$

Notemos también que el sistema (1.4) es lineal, entonces puede tomar la siguiente forma en su representación matricial

$$x' = F(x) = Ax + b$$

Donde:

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Si $b_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ entonces el Sistema de E.D.O. es llamado **homogéneo**, caso contrario **no homogéneo**.

Teorema 1.2 (Existencia y Unicidad): Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x_o \in \mathbb{R}^n$, y $t_o \in \mathbb{R}$, entonces la única solución del P.V.I.

$$\begin{cases} x' & = Ax \\ x(t_o) & = x_o \end{cases}$$

está dada por,

$$\begin{cases} \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto \varphi(t) = e^{(t-t_o)A}x_o \end{cases}$$

Definición 1.5 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función, para los cuales tenemos la ecuación diferencial ordinaria $x' = F(x)$. Entonces $x^* \in \mathbb{R}^n$ es llamado **punto crítico o punto de singularidad**, si y sólo si, $F(x^*) = 0$.

A continuación, veremos algunos resultados para la linealización de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias No Lineales. Para ello, sin pérdida de generalidad, consideraremos el sistema autónomo siguiente

$$\begin{cases} x'_1 & = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 & = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots & \vdots \\ x'_n & = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.5)$$

con un punto crítico aislado $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, es decir,

$$\begin{cases} F_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \\ F_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \end{cases}$$

Si $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $F_3(x_1, x_2, \dots, x_n)$ admiten su desarrollo en series Taylor de orden uno alrededor de $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, tenemos,

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n) &= F_1(x^*) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^*)(x - x_1^*) + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^*)(x - x_n^*) + R_1(x_1, \dots, x_n) \\ F_2(x_1, \dots, x_n) &= F_2(x^*) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^*)(x - x_1^*) + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^*)(x - x_n^*) + R_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) &= F_n(x^*) + \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^*)(x - x_1^*) + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^*)(x - x_n^*) + R_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^*)(x - x_1^*) + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^*)(x - x_n^*) + R_1(x_1, \dots, x_n) \\
F_2(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^*)(x - x_1^*) + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^*)(x - x_n^*) + R_2(x_1, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
F_n(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^*)(x - x_1^*) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^*)(x - x_n^*) + R_n(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Consideremos $w_1 = x - x_1^*, w_2 = x - x_2^*, \dots, w_n = x - x_n^*$, entonces

$$\begin{aligned}
w'_1 &= x'_1 = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
w'_2 &= x'_2 = F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
w'_n &= x'_n = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
w'_1 &= w_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^*) + w_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^*) + \dots + w_n \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^*) + R_1(x_1, \dots, x_n) \\
w'_2 &= w_1 \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^*) + w_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^*) + \dots + w_n \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^*) + R_2(x_1, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
w'_n &= w_1 \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^*) + w_2 \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x^*) + \dots + w_n \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^*) + R_n(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Donde las derivadas parciales están evaluadas en $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, es decir, son números y, $R_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ $R_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ denota el resto de términos en función de x_1, x_2, \dots, x_n .

Reescribiendo el sistema en su forma matricial, tenemos:

$$\begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ \vdots \\ w'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1(x_1, \dots, x_n) \\ R_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ R_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Cuando se considera $|w_1|, |w_2|, \dots, |w_n|$ suficientemente pequeños ó cercanos al cero, es decir, cuando $(w_1, w_2, \dots, w_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)$ podemos despreciar los términos $R_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ del sistema (1.7), así deduciremos que el comportamiento cualitativo del sistema (1.7) cerca al punto crítico $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ es similar al del sistema lineal asociado

$$\begin{bmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ \vdots \\ w'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Donde

$$\det(J(x^*)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^*) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x^*) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^*) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.9}$$

es la determinante de la matriz Jacobiana, de la parte lineal del sistema (1.8) evaluada en el punto crítico x^* .

El proceso que se ha realizado al sustituir el sistema no lineal (1.7) por el sistema lineal (1.8) se denomina la linealización del sistema (1.5) en el punto crítico $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

1.1.3. Análisis de Estabilidad de un Sistema de E.D.O.

En esta sección, recordaremos algunos resultados para el análisis de la estabilidad de las soluciones constantes de los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Definición 1.6 Para $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, consideremos la E.D.O. : $x' = F(x)$

Para lo cual $x^* \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico $F(x^*) = 0$. Se define

1. Diremos que x^* es un punto crítico estable si y sólo si, dado un $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $\|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$
2. Diremos que un punto de equilibrio x^* es un punto crítico asintóticamente estable si y sólo si x^* es un punto crítico estable y si además

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$$

3. Diremos que un punto de equilibrio x^* es un punto crítico inestable si no es estable.

Proposición 1.3 Dado el sistema lineal $x' = Ax$ donde $A \in M_{n \times n}$ y $w \in \mathbb{R}^n$. El punto crítico x^* es estable si todos los autovalores asociados a su matriz Jacobiana son negativos (autovalores reales) ó tienen la parte real negativa (autovalores complejos).

Criterio de Routh-Hurwitz

A continuación veremos el criterio de Routh-Hurwitz, el cual es una prueba matemática que se utiliza como condición necesaria y suficiente para verificar la estabilidad de sistemas de E.D.O. El criterio de Routh es un algoritmo recursivo eficiente para determinar cuando todas las raíces de un polinomio característico de un sistema lineal que tienen parte real negativa. Independientemente, el matemático Hurwitz propuso que los coeficientes del polinomio característico podían disponerse en una matriz cuadrada llamada "Matriz de Hurwitz", y mostró que su solución asociada es estable si y sólo si, la secuencia de determinantes de sus principales submatrices son positivas. Estos dos procesos son equivalentes. [25].

.

Ahora veremos unos resultados asociados al criterio de Routh

Definición 1.7 Sea el polinomio de variable real (Polinomio característico)

$$P(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + a_3 t^{n-3} + \dots + a_{n-1} t + a_n \quad ; \quad a_n \neq 0$$

definimos como el esquema de Routh del polinomio $P(t)$, al siguiente arreglo

$$\begin{array}{c|cccc} t^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ t^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ t^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots \\ \vdots & & & & & \\ t^1 & e_1 & & & & \\ t^0 & f_1 & & & & \end{array}$$

donde

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} ; \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} ; \quad \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} ; \quad c_2 = \frac{b_1 a_4 - a_1 b_3}{b_1} ; \quad \dots$$

y así sucesivamente.

Teorema 1.3 El número de raíces de un polinomio $P(t)$ de variable real, las cuales están en el semiplano derecho $\text{Re}(t) > 0$ es igual al número de cambios de signo en la primera columna del esquema de Routh.

Corolario 1.1 (Criterio de Routh): Para que todas las raíces de un polinomio $P(t)$ tengan parte real negativa, es necesario y suficiente, que todos los elementos en la primera columna del esquema de Routh tengan el mismo signo.

Definición 1.8 Sea el polinomio $P(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + a_3 t^{n-3} + \dots + a_{n-1} t + a_n$ con $a_n \neq 0$, entonces la matriz cuadrada de orden n .

$$H = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} a_k = 0 & \text{si } k > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ b_k = 0 & \text{si } k > \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \end{cases}$$

es llamada la matriz de Hurwitz.

Los determinantes de las submatrices principales de H , son llamados los determinantes de Hurwitz y se denotan de la siguiente forma:

$$\Delta_1 = b_0 ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} ; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix}$$

Corolario 1.2 (Criterio de Routh - Hurwitz): Para que todas las raíces del polinomio $P(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + a_3 t^{n-3} + \dots + a_{n-1} t + a_n$; $a_n \neq 0$, tengan parte real negativa, es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

$$a_0 \Delta_1 > 0 ; \Delta_2 > 0 ; a_0 \Delta_3 > 0 ; \Delta_4 > 0 ; \dots ; a_0 \Delta_n > 0 \quad \text{cuando } n \text{ es par}$$

$$a_0 \Delta_1 > 0 ; \Delta_2 > 0 ; a_0 \Delta_3 > 0 ; \Delta_4 > 0 ; \dots ; \Delta_n > 0 \quad \text{cuando } n \text{ es impar}$$

Hay que notar que si $a_0 > 0$, entonces la condición del criterio de Routh - Hurwitz se reduce a

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 > 0; \Delta_4 > 0; \dots; \Delta_n > 0$$

Observación 1.4 Si consideramos la notación convencional

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \dots + a_n$$

donde los coeficientes a_i son constantes reales para $i = 1, 2, \dots, n$ bajo las cuales se puede asegurar la estabilidad por el criterio de Routh - Hurwitz.

Observación 1.5 Este método es sencillo de aplicar, el detalle es garantizar las condiciones requeridas, lo cual no es fácil de mostrar. Por lo cual en algunos sistemas no ayuda analizarlo con este método. Por este motivo se utilizará otro método para buscar garantizar la Estabilidad.

Observación 1.6 Otra forma de expresar las determinantes de Routh-Hurwitz sería de la siguiente manera.

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + a_3\lambda^{n-3} + \dots + a_n$$

$$H_1 = a_1, \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

En general

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Donde también $a_j > 0$ para $j = 1, 2, \dots, n$. Todas las raíces del polinomio $P(\lambda)$ son negativas (Raíces Reales) o tienen parte real negativa (Raíces Complejas) si las determinantes de todas las matrices de Hurwitz son positivas.

$$\det(H_j) = |H_j| > 0 \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Matriz de la Siguiete Generación

Este método nos permite hallar el \mathfrak{R}_o de un modelo comportamental que describe problemas epidemiológicos, por lo cual es una gran herramienta alternativa del criterio de Routh - Hurwitz.

Esta matriz, usualmente denotado por K , se llama *la Matriz de la Próxima Generación* (Next Generation Matrix - **NGM**), que se introdujo en Diekmann et al (1990), quien propone definir \mathfrak{R}_o como el valor propio dominante de la matriz K . En particular, se explica cómo se puede determinar \mathfrak{R}_o por primera descomposición de la matriz como $T + \Sigma$, donde T es la *parte de transmisión*, que describe la producción de nuevas infecciones, y Σ es la *parte de transición*, que describe los cambios en Estado (incluyendo la eliminación por muerte o por la adquisición de la inmunidad).

- Dar una definición matemática de \mathfrak{R}_o dentro de los modelos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- Mostrar la conexión entre \mathfrak{R}_o y la estabilidad asintótica local y global de un modelo de E.D.O.

En esta parte del estudio de la estabilidad del sistema se enfocará en los modelos de compartimentos para la transmisión de una enfermedad epidemiológica. Los individuos se caracterizan por una variable única, de estado discreto y se clasifican en compartimentos basados en un estado. Un compartimento se llama un compartimiento de la enfermedad si los individuos se infectan en el mismo. Hay que tener en cuenta que este uso del término *enfermedad* es más amplia que la definición clínica, e incluye etapas asintomáticas de la infección, así como sintomático. Supongamos que hay n compartimentos de la enfermedad y m compartimentos no patológicos, y dejar que $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$ serán las subpoblaciones en cada uno de estos compartimentos. Además, se denotará con F_i la tasa de infecciones secundarias que aumentan el compartimento de la enfermedad i^{th} , y V_i , la tasa de progresión de la enfermedad, la muerte y la disminución de la recuperación del compartimento i^{th} . El modelo de la enfermedad se puede escribir de la siguiente forma:

$$x'_i = F_i(x, y) - V_i(x, y) \quad , \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{I-a})$$

$$y'_j = g_j(x, y) \quad , \quad j = \overline{1, m} \quad (\text{I-b})$$

Donde $'$ denotará la diferenciación con respecto al tiempo. Se tendrá en cuenta que la descomposición de la dinámica de F y V , y la designación de los compartimentos como infectados o no infectados pueden no ser únicos; diferentes descomposiciones corresponden a diferentes interpretaciones epidemiológicas del modelo. La derivación del número de reproducción básica se basa en la linealización del Modelo en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias sobre un equilibrio libre de enfermedad. Los siguientes supuestos se hacen para garantizar la existencia de este equilibrio y para garantizar que el modelo está bien planteado.

Los siguientes supuestos se hacen para garantizar la existencia de este equilibrio y para garantizar que el modelo está bien planteado. [26,27,28].

Hipótesis

1. Asumimos $F_i(0, y) = 0$ y $V_i(0, y) = 0$, para todo $y > 0$ y para $i = \overline{1, n}$. Todas las nuevas infecciones son infecciones secundarias derivadas de huéspedes infectados, no hay inmigración de individuos en los compartimentos de enfermedades.
2. Asumimos $F_i(x, y) \geq 0$ para todo $x, y > 0$ y $i = \overline{1, n}$. La función F representa nuevas infecciones y no puede ser negativo.
3. Asumimos $V_i(x, y) \leq 0$ cuando $x_i = 0$ y $i = \overline{1, n}$. Para cada componente, V_i representa una salida neta del compartimento i y debe ser negativa cuando el compartimento está vacío.
4. Asumimos $\sum_{i=1}^n V_i(x, y) \geq 0$ para todo x, y no negativo. Esta suma representa la salida total de todos los compartimentos infectados. Los términos en el modelo conduce a aumentos en $\sum_{i=1}^n x_i$ y se supone que representan las infecciones secundarias y por lo tanto pertenecen a F .
5. Asumimos que el sistema de libre de enfermedad $y' = g(0, y)$ tiene un único equilibrio que es asintóticamente estable. Es decir, todas las soluciones con las condiciones iniciales de la forma $(0, y)$ se acercan a un punto $(0, y_o)$ cuando $t \rightarrow \infty$. Nos referimos a este punto como el equilibrio libre de la enfermedad.

Por la hipótesis (1) asegura que el conjunto libre de la enfermedad, que consiste en todos los puntos de la forma $(0, y)$, es invariante. Es decir, cualquier solución sin los individuos infectados en algún momento en el tiempo será libre de infección para todos los tiempos. Esto a su vez asegura que el equilibrio libre de la enfermedad es también un equilibrio del sistema completo.

Supongamos que un solo individuo infectado se introduce en una población originalmente libre de enfermedad. La capacidad inicial de la enfermedad que se propague a través de la población se podrá determinar por una prueba de la linealización de (I-a) sobre el equilibrio libre de enfermedad $(0, y_o)$. Con el uso de la hipótesis (1), se podrá demostrar que

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, y_o) = \frac{\partial V_i}{\partial y_j}(0, y_o) = 0$$

Para cada par (i, j) , esto implica que las ecuaciones linealizadas para los compartimentos de la enfermedad, x , se desacoplan de las ecuaciones restantes y se pueden escribir como

$$x' = (F - V)x \quad (\text{II})$$

Donde F y V son las matrices $n \times n$ con entradas

$$F = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(0, y_o) \quad \text{y} \quad V = \frac{\partial V_i}{\partial y_j}(0, y_o)$$

Usando la hipótesis (5), la estabilidad lineal del sistema (I) está completamente determinada por la estabilidad lineal de $(F - V)$ en (II).

El número de infecciones secundarias producidas por un solo individuo infectado puede ser expresado como el producto de la duración prevista del periodo de infección, y la tasa se produce en las infecciones secundarias. Para el modelo general con n compartimentos de la enfermedad, éstos se calculan para cada compartimento de un caso índice hipotético. La hora prevista del caso índice pasa en cada compartimento está dada por la integral $\int_0^\infty \phi(t, x_o) dt$, donde $\phi(t, x_o)$ es la solución de (II), con $F = 0$ (sin infecciones secundarias) y las condiciones iniciales no negativos, x_o , lo que representa y el caso índice de infección:

$$x' = -Vx, \quad x(0) = x_o \quad (\text{III})$$

En efecto, esta solución muestra el camino del caso índice a través de los compartimentos de la enfermedad de la exposición inicial a través de la muerte o la recuperación con la i -ésima componente de $\phi(t, x_o)$ interpretada como la probabilidad de que el caso índice (introducido en el tiempo $t = 0$) es en estado de la enfermedad que en el momento t . La solución de (III) es $\phi(\mathbf{t}, \mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o \cdot \mathbf{e}^{-Vt}$, donde la exponencial de una matriz se define por la serie de Taylor,

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$$

Esta serie converge para todo t . Por lo tanto $\phi(\mathbf{t}, \mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o \cdot \mathbf{V}^{-1}$ y la entrada (i, j) de la matriz \mathbf{V}^{-1} se puede interpretar como la hora prevista de un individuo se introdujo inicialmente en la enfermedad compartimento j pasa en el compartimento enfermedad i .

La entrada (i, j) de la matriz F es la tasa de infecciones secundarias se producen en el compartimiento i por un caso índice en el compartimento j . Por lo tanto, el número esperado de infecciones secundarias producidas por el caso índice viene dado por,

$$\int_0^{\infty} F \cdot e^{-Vt} x_o dt = FV^{-1}x_0$$

Como expresa Diekmann y Heesterbeek [31], la matriz $\mathbf{K} = \mathbf{FV}^{-1}$ se conoce como el **NGM** para el sistema en el equilibrio libre de enfermedad. La entrada (i, j) de K es el número esperado de infecciones secundarias en el compartimento i producido por los individuos inicialmente en el compartimento j , suponiendo, por supuesto, que el entorno de ver por el individuo permanece homogénea durante la duración de su infección.

La matriz de la próxima generación (**NGM**), $K = FV^{-1}$, es no negativo, y por lo tanto tiene un valor propio no negativo, $\mathfrak{R}_o = \rho(FV^{-1})$, de tal manera que no hay otros valores propios de K con módulo mayor que \mathfrak{R}_o , y hay un autovector no negativo w asociado con \mathfrak{R}_o . Este vector propio es en cierto sentido la distribución de los individuos infectados que produce el mayor número, \mathfrak{R}_o , de infecciones secundarias por generación. Por lo tanto, \mathfrak{R}_o y los w vector propio asociado definir adecuadamente un infectivo "típico" y el número básico de reproducción pueden ser rigurosamente definidas como el radio espectral de la matriz de próxima generación, K . el radio espectral de una matriz K , denotado $\rho(K)$, es el máximo de los módulos de los valores propios de K . Si K es irreducible, a continuación, \mathfrak{R}_o es un simple valor propio de K reducible, que es a menudo el caso para la enfermedad con múltiples cepas, entonces K puede tener varios vectores propios correspondientes reales positivos para la reproducción números para cada cepa competir de la enfermedad.

Se deduce que la tasa de reproducción (\mathfrak{R}_o) de la enfermedad como valor propio dominante o radio espectral de la matriz de siguiente generación, K en una vecindad de estado libre de la infección. [27,28].

1.1.4. Estabilidad de Sistemas de E.D.O. No Lineales

Ahora veremos algunos resultados para la estabilidad de puntos críticos de Sistemas No Lineales.

Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Definición 1.15 Dado $(x_1^*; x_2^*; \dots ; x_n^*)$ punto de equilibrio aislado del Sistema No Lineal

$$\begin{cases} x_1'(t) &= F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2'(t) &= F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots & \vdots \\ x_n'(t) &= F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (1.10)$$

Diremos que el sistema autónomo dado por (1.10) es casi lineal en el punto $(x_1^*; x_2^*; \dots ; x_n^*)$ si se cumple lo siguiente:

1. La matriz Jacobiana $A = J(x_1^*; x_2^*; \dots ; x_n^*)$ del sistema (1.10) es regular o no singular, es decir, tiene determinante no nulo.
2. Si las funciones F_i para $i = \overline{1; n}$, admiten un desarrollo de Taylor de orden uno en un entorno del punto crítico $(x_1^*; x_2^*; \dots ; x_n^*)$, es decir,

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, \dots, x_n) &= F_1(x^*) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^*)(x - x_1^*) + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^*)(x - x_n^*) + R_1(x_1, \dots, x_n) \\
F_2(x_1, \dots, x_n) &= F_2(x^*) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^*)(x - x_1^*) + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^*)(x - x_n^*) + R_2(x_1, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
F_n(x_1, \dots, x_n) &= F_n(x^*) + \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^*)(x - x_1^*) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^*)(x - x_n^*) + R_n(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

Donde $R_i(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ verifica la condición:

$$\lim_{(x_1; x_2; \dots; x_n) \rightarrow (x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)} \frac{R_i(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\sqrt{(x - x_1^*)^2 + \dots + (x - x_n^*)^2}} = 0$$

Teorema 1.4 (Estabilidad para Sistema No Lineales) Sea $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ un punto crítico de un Sistema cuasi lineal

$$\begin{cases}
x_1'(t) &= F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\
x_2'(t) &= F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= F(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))
\end{cases}$$

Si la matriz Jacobiana $J(x_1; x_2; \dots; x_n)$ del sistema en el punto crítico $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$, tiene

- Los autovalores reales negativos o complejos con parte real negativa, entonces el origen es asintóticamente estable para el sistema lineal aproximado, y como consecuencia el punto $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ es asintóticamente estable para el sistema cuasi lineal.
- Los autovalores reales y alguno de ellos es positivo o complejos con parte real positiva, entonces el origen es inestable para el sistema lineal aproximado y el punto $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$ es inestable para el sistema cuasi lineal.

Observación 1.6 Si la matriz Jacobiana tiene autovalores imaginarios puros, entonces el origen es un centro del Sistema linealizado. En este caso no sabemos nada sobre la estabilidad del punto crítico $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$. En esta situación el estudio del sistema linealizado no nos determina la estabilidad local del punto crítico $(x_1^*; x_2^*; \dots; x_n^*)$, y para conseguir la estabilidad necesitaríamos recurrir a la construcción de un funcional de Lyapunov.

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales con Retardo

La Teoría de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo se ocupa de modelos donde la variación de la variable de estado X con el tiempo depende en cada instante t , no sólo de $X(t)$ sino también de los valores de X en instantes anteriores. En lo general estas ecuaciones se representan de la forma $X' = f(X(t), X(t-r))$, donde f es un función dada y $r > 0$ (*Retardo*).

Por lo cual, se empezará la Teoría con una Ecuación Diferencial con Retardo sencilla. La cual es la siguiente para poder extender a lo que sería un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

La Teoría base de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo que se desarrollará se encuentra en el Libro: **An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences** del profesor Hal Smith. [14,85,87].

Las Ecuaciones Diferenciales con Retardo puede ser aprendido por un estudio de un ejemplo sencillo, la ecuación lineal con retardo con signo negativo. Es una ecuación con el cual se puede ilustrar las características comunes de estas ecuaciones diferenciales como las tendencias de los retardos que dan lugar a oscilaciones que pueden convertirse en oscilaciones amortiguadas si el tiempo es suficientemente grande.

Los problemas para la solución de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo hacia atrás en el tiempo se apreciarán fácilmente por esta simple ecuación. Es un hecho problemático y complicado que incluso para esta ecuación lineal simple, la estabilidad de equilibrio requiere un análisis trivial de las raíces de una ecuación característica. Se mostrará cómo la raíz principal de esta ecuación característica señala la oscilación en la solución de la Ecuación Diferencial con Retardo.

Como ya se había mencionado, la respuesta de los Modelos a los cambios en las variables dependientes con respecto a su variable independiente (Tiempo), No es instantánea (comúnmente se modela mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias), sino que ocurre después de un determinado lapso de tiempo retardado ó con Retardo. Por ejemplo, en modelos biológicos y epidemiológicos la respuesta de las poblaciones de las especies, de los individuos que se están modelando suele presentarse después de que las mismas obtienen un grado de maduración, lo cual impone retardo a estas respuestas. En otros casos el cambio en las poblaciones depende de los valores de las mismas a lo largo de un intervalo de tiempo pasado (llamado Retardo Distribuido). Por este motivo se hace necesario el estudio de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, ya sea este Discreto (cuando el retardo toma un valor fijo) o distribuido (cuando el retardo toma un valor variable). En algunos

modelos puede haber más de un retardo discreto o distribuido, o bien haber combinaciones de ambos tipos de retardo. [1,10].

2.1. Ecuación Diferencial con Retardo Sencilla

La Ecuación Diferencial con Retardo más sencilla está dado por

$$u'(t) = -u(t-r) \quad (2.1)$$

donde $r > 0$ que es llamado el *Retardo*.

Supongamos que $r = 0$, con lo cual tendríamos una E.D.O.

$$u'(t) = -u(t) \quad (2.2)$$

donde la solución, $u(t) = u(0) \cdot e^{-t}$ la cual desciende a cero cuando $t \rightarrow +\infty$.

Si prescribimos $u(t)$ para $-r \leq t \leq 0$, entonces la ecuación (2.1) tiene que tener una única solución para $t > 0$.

Supongamos lo siguiente

$$u(t) = 1, -r \leq t \leq 0 \quad (2.3)$$

como la condición inicial para (2.1). Entonces, en el intervalo $0 \leq t \leq r$ siendo el argumento de u hacia la derecha satisfaciendo $t-r \leq 0$, luego

$$u'(t) = -u(t-r) = -1$$

Por lo tanto,

$$u(t) = u(0) + \int_0^t (-1)ds = 1 - t, \quad 0 \leq t \leq r \quad (2.4)$$

Luego, en el intervalo $r \leq t \leq 2r$ tenemos $0 \leq t-r \leq r$ así, por la ecuación (2.4) tenemos

$$u'(t) = -u(t-r) = -[1 - (t-r)]$$

desarrollando

$$u(t) = u(r) + \int_r^t (-[1 - (s-r)]) ds$$

$$u(t) = 1 - t + \frac{(t-r)^2}{2}, \quad r \leq t \leq 2r \quad (2.5)$$

Un caso más general se obtendría

$$u(t) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \frac{[t - (k-1)r]^k}{k!}; \quad (n-1)r \leq t \leq nr, \quad n \geq 1 \quad (2.6)$$

Luego, $u(t)$ es un polinomio de grado n dentro del subintervalo $[(n-1)r; nr)$. Por lo cual, $u(t)$ es una función suave, excepto en $nr, n \geq 0$.

Las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6) implican lo siguiente:

- $u'(0^-) = 0$ y $u(0^+) = -1$, luego en u' posee un salto de discontinuidad en $t = 0$.
- $u''(r^-) = 0$ y $u(r^+) = -1$, luego en u'' posee un salto de discontinuidad en $t = r$.
- $u^{(n)}((n-1)r^-) = 0$ y $u^{(n)}((n-1)r^+) = (-1)^n$.
- u es n - veces continuamente diferenciable en $((n-1)r; \infty+)$ para $n \geq 0$.

De aquí, $u^{(j)}(s^+)$ denota el límite de la j -ésima derivada de u , cuando $t \rightarrow s, t > s$ y $u^{(j)}(s^-)$ denota el límite cuando $t \rightarrow s, t < s$. Un punto clave es que la función u es más suave cuando t se va incrementando.

Por consiguiente, este es el procedimiento que se desarrolla para resolver el Problema de Valor Inicial (P.V.I) de las ecuaciones (2.1) y (2.3).

2.1.1. Perturbación de la E.D.R. Sencilla

Ahora, perturbaremos la Ecuación Diferencial sencilla que se desarrolló en el presente trabajo mediante la introducción de un parámetro α para poder analizar cómo este parámetro puede afectar el análisis de la Ecuación Diferencial. Con el presente análisis podemos extender a nuestro objetivo principal que es el análisis de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales.

Sea la Ecuación Diferencial

$$u'(t) = -\alpha \cdot u(t - r) \quad (2.7)$$

Donde consideramos $\alpha \in \mathbb{R}$, y $r \geq 0$.

En primer lugar, si consideramos $r = 0$. La Ecuación Diferencial sería Ordinaria donde el estudio de la misma es ya conocido. Con respecto a su estabilidad, la ecuación (2.7) es asintóticamente estable si $\alpha < 0$, y asintóticamente inestable si $\alpha > 0$. Ahora la pregunta sería, qué pasaría con la Ecuación (2.7) cuando $r > 0$.

Consideraremos un cambio de variable de tal manera que la Ecuación Diferenciales con Retardo se pueda resolver de una manera similar a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Sea un escalamiento del tiempo: $\tau = \eta t$, $\eta > 0$ para la ecuación $U(\tau) = u(t)$

De aquí,

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= \frac{1}{\eta} \cdot \frac{du}{dt} = -\frac{\alpha}{\eta} \cdot u(t - r) \\ \frac{dU}{d\tau} &= -\frac{\alpha}{\eta} \cdot U(\tau - r\eta) \end{aligned}$$

Ahora, si tomamos $\eta = \frac{1}{r}$ y $\beta = \alpha r$

$$\frac{dU}{d\tau} = -\beta \cdot U(\tau - 1) \quad (2.8)$$

Tomaremos $\eta = |\alpha|$ y $s = r|\alpha|$

$$\frac{dU}{d\tau} = \pm U(\tau - s)$$

Donde el signo lo determinará el valor de α . Con respecto a la estabilidad de una solución trivial, se procede como en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Luego, el valor que puede tomar λ de tal manera que $U(\tau) = e^{\lambda\tau}$ siendo solución de (2.8).

Es necesario introducir un operador lineal, definido por alguna función diferenciable.

$$L(U) = \frac{dU}{d\tau} + \beta \cdot U(\tau - 1)$$

Luego,

$$L(e^{\lambda\tau}) = \lambda e^{\lambda\tau} + \beta e^{\lambda(\tau-1)} = e^{\lambda\tau} [\lambda + \beta e^{\lambda\tau}]$$

$$L(e^{\lambda\tau}) = e^{\lambda\tau} [\lambda + \beta e^{\lambda\tau}] \quad (2.9)$$

Claramente, tenemos $L(e^{\lambda\tau}) \equiv 0$ si y sólo si, λ es la raíz de la ecuación característica

$$h(\lambda) = \lambda + \beta e^{\lambda} = 0 \quad (2.10)$$

Consideraremos $\lambda \in \mathbb{C}$ una raíz de (2.10) de orden l , donde $l \geq 1$, si

$$h(\lambda) = h'(\lambda) = h''(\lambda) = \dots = h^{(l-1)}(\lambda), \quad h^{(l)}(\lambda) \neq 0$$

Lema 2.1 Sea $\tau^j e^{\lambda\tau}$, $j = 0, 1, 2, \dots, k$ son soluciones de (2.8) si y sólo si, λ es una raíz de orden al menos $(k + 1)$ de h . (Ver Prueba en [14]. Página 17).

Con el conocimiento de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, se puede esperar que la solución trivial es asintóticamente estable si $\Re(\lambda) < 0$ para todas las raíces λ de la ecuación característica, y que es inestable si hay al menos una raíz con parte real positiva.

Como h es una función analítica de variable compleja λ tiene las siguientes propiedades elementales.

1. El conjunto de las raíces no puede tener ningún punto de acumulación en \mathbb{C} . Por lo tanto, para cada $R > 0$, el conjunto de raíces que satisfacen $|\lambda| \leq R$ es finito. Se deduce que el conjunto de las raíces es un conjunto numerable (posiblemente finito).
2. Si el conjunto de las raíces es infinito, denotado por $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $|\lambda_n| \rightarrow -\infty$. Debido que, $|\beta| \cdot e^{-\Re(\lambda_n)} = |\lambda_n|$, esto conlleva que $\Re(\lambda_n) \rightarrow -\infty$. En consecuencia, para $a \in \mathbb{R}$, $\Re(\lambda) \geq a$ para un número finito de raíces.
3. Si λ es una raíz, entonces es la raíz de orden finito.
4. Si λ es una raíz, también su conjugado $\bar{\lambda}$ es raíz.

Ahora, en nuestro estudio nos enfocaremos en la ecuación característica (2.10), especialmente para las raíces complejas.

Sea $\lambda = x + y \cdot i$ considerando la parte real y la parte compleja, obteniendo el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x &= -\beta \cdot e^{-x} \cdot \cos(y) \\ y &= +\beta \cdot e^{-x} \cdot \text{sen}(y) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Consideraremos las raíces reales de la ecuación (2.10)

Lema 2.2

1. Si $\beta < 0$, entonces hay una raíz real y es positiva.
2. Si $0 < \beta < e^{-1}$, entonces hay exactamente dos raíces reales $x_1 < x_2$, ambos negativas. Además, $x_1 \rightarrow -\infty$, y $x_2 \rightarrow 0$ cuando $\beta \rightarrow 0$.
3. Si $\beta = e^{-1}$, entonces hay una sola raíz real de orden dos, la cual es $\lambda = -1$.
4. Si $\beta > e^{-1}$, entonces no hay raíces reales.

Proposición 2.1 Las consideraciones para la ecuación (2.10)

1. Si $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\Re(\lambda) \leq -\delta$ para todas las raíces.
2. Si $\beta = \frac{\pi}{2}$, entonces $\lambda = \pm \frac{i\pi}{2}$ son raíces de orden uno.
3. Si $\beta > \frac{\pi}{2}$, entonces hay raíces $\lambda = x \pm y \cdot i$ con $x > 0, y \in \langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle$

El siguiente corolario que se desprende de la Proposición 2.1, se deduce una vez que establezca el resultado esperado respecto a la relación de las raíces de (2.10), y la estabilidad de la solución nula ó trivial (2.7).

Corolario 2.2 Las consideracion para la ecuación (2.7)

1. Si $\alpha < 0$, entonces $u = 0$ es inestable.
2. Si $0 < r\alpha < \frac{\pi}{2}$, entonces $u = 0$ es asintóticamente estable.
3. Si $r\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces $u = \text{sen}(\frac{\pi\tau}{2}); \cos(\frac{\pi\tau}{2})$ son soluciones.
4. Si $r\alpha > \frac{\pi}{2}$, entonces $u = 0$ es inestable.

2.1.2. Oscilación de las Soluciones

Podemos observar que la ecuación diferencial con retardo con signo negativo puede dar lugar a soluciones oscilatorias. Seamos precisos acerca de lo que queremos expresar sobre las oscilaciones.

Si $x(t)$ es una solución de (2.7) definida para $t \geq s$ para algunos s reales, decimos que es una Solución Oscilatoria, si tiene arbitrariamente grandes ceros, es decir: por cada $t_0 > s$ existe $t_1 > t_0$ tal que $x(t_1) = 0$; de lo contrario se dice que la Solución no es oscilatoria.

Teorema 2.5 Para cada real α y $r > 0$, diremos que son equivalentes.

1. Cada Solución de (2.7) es Oscilatoria.
2. $r\alpha > \frac{1}{e}$

Lema 2.3 Para cada $\beta \in \langle \frac{1}{e}; \frac{\pi}{2} \rangle$ hay un par de raíces complejas conjugadas $\lambda = x \pm y \cdot i$ de (2.10) satisfacen

$$-1 < x < 0 \quad , \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

Esta familia de raíces (λ, β) pueden ser parametrizados por x :

$$\beta = \beta(x) \quad , \quad y = h(x)$$

donde $\beta(x)$, $h(x)$ son funciones suaves, positivas, monótonas crecientes tal que $x \searrow -1$, $\lambda \longrightarrow -1$, $\beta \longrightarrow e^{-1}$, y $x \nearrow 0$, $\lambda \longrightarrow (\frac{\pi}{2}) \cdot i$, $\beta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$.

2.2. Existencia de las Soluciones

Con respecto a la Existencia y la Unicidad de las Soluciones de Ecuaciones Diferenciales con Retardo discreto se establece mediante el método de pasos desarrollado en el inicio de este capítulo; apelando a resultados clásicos de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Más aún las Ecuaciones Diferenciales con Retardo general (Retardo Distribuido) requieren un marco teórico más general de Existencia y Unicidad, esto incluye alguna notación particular para la situación endémica de la materia, y la identificación del espacio de estado apropiado para las Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

Las Soluciones de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo ó bien se extienden a toda la línea media o son explosivas ("*Blow Up*") en un tiempo finito. En especial las aplicaciones a la Biología requieren que las Soluciones se inicien en valores positivos (no negativos) como son las Poblaciones Epidemiológicas, Ecológicas, etc.; y de mantener un comportamiento positivo a través del tiempo. Las desigualdades diferenciales que implican los Retardos son herramientas importantes con las que las soluciones consolidadas permiten un mejor modelado de un problema.

Por lo cual, en el presente capítulo nos centraremos en la Existencia y la Unicidad de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo Discreto, lo cual nos ayudará en el Modelo Epidemiológico que desarrollaremos en el siguiente capítulo.

2.2.1. Ecuación Diferencial con Retardo Discreto

Para las Ecuaciones Diferenciales con Retardo Discreto realizaremos el Método de los Pasos para garantizar la Existencia y luego la Unicidad de las Soluciones. Por lo cual, tendremos en cuenta la base teórica de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. [14].

Ahora, consideraremos una Ecuación Diferencial No Lineal con Retardo

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t-r)) \tag{2.12}$$

con un sólo Retardo $r > 0$. Asumiremos que $F(t, x, y)$ y $F_x(t, x, y)$ son continuas en \mathbb{R}^3 .

Sea $s \in \mathbb{R}$, y sea $\phi : [s-r; s] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Veremos que una solución $x(t)$ de (2.12) satisfaciendo

$$x(t) = \phi(t) \quad , \quad s-r \leq t \leq s \tag{2.13}$$

Y satisfaciendo (2.12) sobre el intervalo $s \leq t \leq s + \sigma$ para algún $\sigma > 0$.

Debemos tener en cuenta el detalle que la interpretación de $x'(t)$ como la derivada hacia la derecha en s . La ecuación (2.12) puede ser resuelta por el método de los pasos como se sigue.

Para $s \leq t \leq s + r$, $x(t)$ debe satisfacer el Problema de Condición Inicial, como se resuelve en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

$$y'(t) = F(t, y(t), \phi(t - r)) \quad , \quad y(s) = \phi(s) \quad , \quad s \leq t \leq s + r$$

Como $g(t, y) \equiv F(t, y(t), \phi(t - r))$ y $g_y(t, y)$ son continuas.

Luego, una solución local en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias esta garantizado por los Resultados previos de la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. [18,19,33,34].

Si existe esta Solución Local $x(t)$ para este intervalo $s \leq t \leq s + r$, entonces nuestra Solución $x(t)$ la cual está definida sobre $[s - r; s + r]$. Podemos repetir el argumento anterior para poder extender nuestra solución aún más a la derecha. Luego, para $s + r \leq t \leq s + 2r$, una solución $x(t)$ de (2.12)-(2.13) debe satisfacer el Problema de Valor Inicial de la E.D.O.

$$y'(t) = F(t, y(t), x(t - r)) \quad , \quad y(s + r) = x(s + r) \quad , \quad s + r \leq t \leq s + 2r$$

De nuevo, los resultados de la Existencia estándar para este tipo de problemas, garantizan la Existencia de una Solución Única, que llamamos $x(t)$, definida en algún subintervalo $[s + r; \sigma) \subset [s + r; s + 2r]$, lo cual posiblemente sea todo el intervalo. Por supuesto, $x(t)$, ahora está definido en $[s - r; \sigma)$ donde $s + r < \sigma$, es una solución de (2.12)-(2.13).

Si existe la Solución sobre todo el intervalo de $[s + r; s + 2r]$, entonces se puede volver el proceso para poder extender la solución a $[s + 2r; s + 3r]$, ó algún subintervalo de este intervalo.

Teorema 2.6 Sea $F(t, x, y)$ y $F_x(t, x, y)$ son continuas en \mathbb{R}^3 , $s \in \mathbb{R}$, y sea $\phi : [s - r; s] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces, existe $\sigma > s$, y posee una única solución del Problema de Valor Inicial (2.12)-(2.13) en el intervalo $[s - r; \sigma]$.

El Teorema 2.6 nos proporciona una única solución local de (2.12)-(2.13). Al igual que en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, a menudo se puede, pero no siempre, extender esta solución a definirse para todo $t \geq s$. Usamos la notación $[s - r; \sigma)$ para denotar el intervalo abierto $[s - r; \sigma)$ ó el intervalo cerrado $[s - r; \sigma]$. La afirmación de la Unicidad del Teorema 2.6 implica que si $x : [s - r; \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\tilde{x} : [s - r; p) \rightarrow \mathbb{R}$ son soluciones de (2.12)-(2.13), entonces $x(t) = \tilde{x}(t)$ para todo t de donde está definido.

Alternativamente, esto puede ser probado directamente usando la Desigualdad de Gronwall. Si $[s - r; \sigma) \subset [s - r; p)$, decimos que \tilde{x} es una extensión, ó la continuación, de $x \subset \tilde{x}$. Definimos una relación de orden parcial (linealmente ordenado) sobre el conjunto de las Soluciones de (2.12)-(2.13). El Lema de Zorn [18,19] se puede utilizar para la existencia de una única solución maximal definida (uno para el que no hay extensiones) $x : [s - r; \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ al igual que está definido en [33,34], la cual llamaremos una *Solución No Continuable* debido que no se puede extender ó continuar a un intervalo más grande, es decir, no se puede extender a una solución maximal. Esta solución no continuable se define necesariamente en un intervalo que está abierto a la derecha porque si $\sigma < \infty + \sigma < \infty+$, y si x fuera una solución en $[s - r; \sigma]$, entonces podríamos usar el Teorema 2.6 para obtener una extensión de x a un intervalo más grande, lo que contradice que x no tiene extensión.

El siguiente resultado nos proporcionará que si una solución no continuable (no extendible) no está definida para todo $s - r \leq t$, entonces tiene que estallar o explotar (*Blow Up*) cuando $t \rightarrow \sigma$. Esto es la misma conclusión que se obtiene para la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias [33,34].

Teorema 2.7 Sea F que satisface las hipótesis del Teorema 2.6, y sea $x : [s - r; \sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ una solución no continuable del Problema de Valor Inicial (2.12)-(2.13). Si $\sigma < +\infty$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \sigma^-} |x(t)| = +\infty$$

La Demostración del Teorema 2.7 se encuentra en [14,33].

Se ha construido la Existencia y Unicidad para una Ecuación Diferencial con Retardo a partir de la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Con la siguiente observación, se extenderá de una Ecuación a un Sistema de Ecuaciones Diferenciales, siendo el centro del presente trabajo.

Observación 2.1 De los Teoremas 2.6 y 2.7 se puede extender inmediatamente para el caso que $x \in \mathbb{R}^n$ y sea la función $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con casi ningún cambio en el resultado; también se puede extender a múltiples retardos discretos $r_0 < r_1 < \dots < r_m$ donde $F = F(t, y(t), y(t - r_0), y(t - r_1), \dots, y(t - r_m))$ con muy pocos cambios.

La mayoría de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo que surgen en los Modelos Matemáticos de Dinámica Poblacional como los Epidemiológicos ó los Ecológicos presentan cantidades intrínsecamente no negativas. Por lo tanto, es importante establecer que los valores iniciales sean no negativos debido que dan lugar a soluciones no negativas. Por lo tanto, formalizaremos la Positividad de las Soluciones en el siguiente Teorema.

Teorema 2.8 Supongamos que $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface las hipótesis del Teorema 2.6 y la Observación 2.1, y la siguiente consideración

$$\forall i, t; \forall x, y \in \mathbb{R}_+^n : x_i = 0 \implies F_i(t, x, y) \geq 0 \quad (2.14)$$

Si el Valor Inicial ϕ de (2.13) satisfaciendo $\phi \geq 0$, entonces la Solución correspondiente $x(t)$ de (2.12) satisfaciendo $x(t) \geq 0$ para todo $t \geq s$ donde está definido la Solución.

Observación 2.2 Si $F_i(s, x, y) < 0$ para algún i, s y algún $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ con $x_i = 0$, entonces para el Valor Inicial dado por la función continua no negativa.

$$\phi(\eta) = \left[1 - \frac{s - \eta}{r} \right] \cdot x + \frac{s - \eta}{r} \cdot y, \quad s - r \leq \eta \leq s$$

la Solución correspondiente de (2.12) satisfaciendo $x_i(s) = 0$, y $x'_i(s) < 0$ de modo, $x_i(t) < 0$ para todo $t > s$ suficientemente cerca $t = s$. Por lo tanto, (2.14) es una condición necesaria para la preservación genérica de la Positividad.

Para un caso más general, consideraremos un Problema de Valor Inicial de un Sistema No Autónomo.

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x_t) & t \geq \sigma \\ x_\sigma &= \phi \end{cases} \quad (2.15)$$

Donde $\sigma \in \mathbb{R}$ es el tiempo inicial, y $\phi \in C$ es el estado del Sistema en el tiempo σ . Esto significa lo siguiente

$$x(\sigma + \theta) = \phi(\theta) \quad ; \quad -r \leq \theta \leq 0$$

ó equivalentemente

$$x(t) = \phi(t - \sigma) \quad ; \quad \sigma - r \leq t \leq \sigma$$

Además, debemos permitir que x sea un vector en \mathbb{R}^n . En este caso, el espacio de estados debe ser $C = C([-r; 0], \mathbb{R}^n)$, el espacio de funciones continuas de $[-r; 0]$ en \mathbb{R}^n , y $f : \mathbb{R} \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua. Usaremos $|x|$ para la norma del vector, y para la norma de $\phi \in C$ usaremos la siguiente

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(\theta)| : -r \leq \theta \leq 0\}$$

además de la continuidad de f , asumiremos que también satisface una condición de Lipschitz en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R} \times C$.

Condición de Lipschitz (Lip) : Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, y $M > 0$; existe $K > 0$ tal que

$$|f(t, \phi) - f(t, \psi)| \leq K \|\phi - \psi\| \quad ; \quad a \leq t \leq b \quad , \quad \|\phi\|, \|\psi\| \leq M \quad (2.16)$$

Podemos observar que K depende del intervalo $[a; b]$, y M .

Se intentará encontrar una solución de (2.15) en el intervalo $[\sigma; \sigma + A]$ para algún $A > 0$.

Luego, integrando ambos lados y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtendremos $x(t)$ que es una solución continua para la ecuación integral

$$x(t) = \phi(0) + \int_{\sigma}^t f(s, x_s) ds \quad ; \quad \sigma \leq t \leq \sigma + A \quad (2.17)$$

Donde, en efecto, usando implícitamente el Lema 2.1.

$$x(t) = \phi(t - \sigma) \quad , \quad \sigma - r \leq t \leq \sigma$$

Lema 2.4 Si $x : [\sigma - r; \sigma + a] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ función continua, entonces $t \longrightarrow x_t$ es una función continua de $[\sigma; \sigma + a]$ en $C([-r; 0], \mathbb{R}^n)$.

Lema 2.5 Sea $f : \mathbb{R} \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ función continua y satisface (Lip), entonces para un intervalo finito $[a, b]$ y $M > 0$, existe $L > 0$ tal que

$$|f(t, \psi)| \leq L \quad ; \quad t \in [a, b] \quad , \quad \|\psi\| \leq M$$

Teorema 2.9 Supongamos que f es una función continua y satisface la condición Lipschitz (Lip), $\sigma \in \mathbb{R}$, y $M > 0$, existe $A > 0$ que depende solo de M , tal que si $\phi \in C$ satisface $\|\phi\| \leq M$. Entonces existe una única solución $x(t) = x(t, \phi)$ de (2.15) definida en $[\sigma - r; \sigma + A]$. Además, si K es la constante de Lipschitz correspondiente para f en $[\sigma; \sigma + A]$ y M , entonces

$$\max_{\sigma - r \leq \eta \leq \sigma + A} |x(\eta, \phi) - x(\eta, \psi)| \leq K \|\phi - \psi\| \cdot e^{KA} \quad ; \quad \|\phi\|, \|\psi\| \leq M \quad (2.18)$$

La Demostración del Teorema 2.9 se encuentra en [14].

Observación 2.3 Si f satisface una condición global de Lipschitz, donde si K en (Lip) puede ser escogido independientemente de a, b y M , entonces no se necesita alguna restricción para A del Teorema 2.9. Con mayor precisión, las conclusiones son válidas para todos los valores de $A > 0$. En este caso, la solución existe para todo $t \geq \sigma$

$$\|x_t(\phi) - x_t(\psi)\| \leq \|\phi - \psi\| \cdot e^{K(t-\sigma)} \quad ; \quad \sigma \leq t \leq \sigma + A$$

Observación 2.4 Del Teorema 2.8 se puede extender de manera natural al caso más general del Sistema (2.15). Se puede expresar $\phi \geq 0$ para las funciones continuas ϕ siempre que $\phi_j(s) \geq 0, \forall j, s$. La clave de la condición de la Positividad es:

$$\phi \geq 0, \phi_i(0) = 0 \implies f_i(t, \phi) \geq 0 \tag{2.19}$$

2.3. Análisis Cualitativo de las E.D.R.

El análisis cualitativo de un Sistema de Ecuaciones Ordinarias nos ayuda a analizar el comportamiento de las soluciones. Del mismo modo, se realizará para las Ecuaciones Diferenciales con Retardo. Un gran detalle que ayuda bastante para el análisis de Sistemas No Lineales es determinar la Estabilidad del Sistema. El método clásico de la determinación de la Estabilidad es Linealizar el Sistema sobre la Estabilidad, y luego determinar el comportamiento de la Solución, bien tenga un crecimiento exponencial o un decaimiento exponencial para el Sistema Lineal Asociado en una vecindad.

Aunque el método es similar a las de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la Ecuación Característica es más complicado debido que puede tener un número infinito de raíces. Para este caso, consideraremos un número finito de estas raíces que tienen parte real menor que cualquier número real dado.

2.3.1. Sistemas Lineales Autónomos

Los sistemas Lineales Autónomos, donde no interviene la variable independiente en el Sistema, nos permitirá estudiar el comportamiento de las Soluciones. Y como, en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias mediante una Linealización del Sistema No Lineal se podrá analizar como se hace en el Sistema Lineal comprendido en una vecindad.

Sobre la Estabilidad de un Sistema siempre tenemos la consideración que podamos obtener Soluciones con valores reales de los Sistemas, pero también es útil permitir Soluciones con valores complejos. Por lo tanto, modificaremos nuestro espacio $C = C([-r; 0], \mathbb{C}^n)$.

Una función $L : C \rightarrow \mathbb{C}^n$ es Lineal si satisface

$$L(a \cdot \phi + b \cdot \psi) = a \cdot L(\phi) + b \cdot L(\psi) \quad ; \quad \phi, \psi \in C \quad ; \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Donde se dice que L es acotada si existe $K > 0$, tal que

$$|L(\phi)| \leq K \|\phi\| \quad ; \quad \phi \in C$$

Ahora consideraremos algunos aspectos de la Ecuación Diferencial con Retardo Lineal

$$x'(t) = L(x_t) \tag{2.20}$$

Un ejemplo importante es el caso del retardo discreto el cual estamos desarrollando. Sean las matrices cuadradas A, B de orden n , y definimos

$$L(\phi) = A \cdot \phi(0) + B \cdot \phi(-r)$$

luego,

$$|L(\phi)| \leq |A| |\phi(0)| + |B| |\phi(-r)| \leq (|A| + |B|) \|\phi\|$$

De la ecuación (2.20) obtenemos

$$x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot x(t-r) \tag{2.21}$$

Si consideráramos el caso de más Retardos discretos, se tendría el Sistema Lineal

$$x'(t) = A \cdot x(t) + \sum_{j=1}^m B_j \cdot x(t-r_j) \tag{2.22}$$

Donde A, B_j son matrices cuadradas, y $r_j \geq 0$.

La Ecuación (2.20) es un Sistema de Ecuaciones Autónomas, por lo cual podríamos restringir los valores iniciales para los valores de x sobre $[-r; 0]$.

$$x(t) = \phi(t) \quad ; \quad -r \leq t \leq 0 \tag{2.23}$$

Donde $\phi \in C$. Y como, L es acotada, L satisface la condición de Lipschitz global

$$|L(\phi) - L(\psi)| = |L(\phi - \psi)| \leq K \|\phi - \psi\|$$

Por lo tanto, al aplicar el Teorema 2.9 y la Observación 2.3 para el problema de valor inicial (2.20) y (2.23). Por lo tanto, existe una única solución definida $x : [-r; +\infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida para todo $t \geq 0$.

El carácter lineal de (2.20) implica el principio de superposición de costumbre: una combinación lineal de las soluciones es de nuevo una solución.

2.3.2. La Ecuación Característica

Buscamos de manera particular una solución de la forma exponencial para la ecuación (2.20)

$$x(t) = e^{\lambda t} \cdot v \quad , \quad v \neq 0$$

Donde λ es complejo y v es un vector donde sus componentes son complejas. Es bastante útil tener la notación \exp_λ para la función continua definida en $[-r; 0]$ por $\exp_\lambda(\theta) = e^{\lambda\theta}$. De esta manera, veremos que el estado x_t correspondiente de $x(t)$ es el siguiente $x_t = e^{\lambda t} (\exp_\lambda) v$ debido

$$x_t(\theta) = x(t + \theta) = e^{\lambda(t+\theta)} v = e^{\lambda t} \exp_\lambda(\theta) \cdot v$$

Para que $x(t)$ sea una solución, se debe cumplir

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda t} \cdot v = L(x_t) = e^{\lambda t} \cdot L(\exp_{\lambda} \cdot v)$$

ó también,

$$\lambda \cdot v = L(\exp_{\lambda} \cdot v)$$

Ahora, escribiremos $v = \sum_j v_j e_j$ donde $\{e_j\}_j$ una base de \mathbb{C}^n , luego,

$$L(\exp_{\lambda} \cdot v) = \sum_j v_j L(\exp_{\lambda} e_j)$$

Definimos L_{λ} como una matriz cuadrada de orden n .

Donde $L_i(\phi)$ es componente i -ésimo de $L(\phi)$. Entonces $L(\exp_{\lambda} v) = L_{\lambda} v$, y veremos que $x(t) = e^{\lambda t} \cdot v$ una solución no nula de (2.20), si λ es la solución de la ecuación característica

$$\det(\lambda \cdot Id - L_{\lambda}) = 0 \tag{2.24}$$

En nuestro caso, $v \neq 0$ debe pertenecer al espacio nulo de $\lambda \cdot Id - L_{\lambda}$. Con frecuencia nos referimos a una solución $\lambda \in \mathbb{C}$ de (2.21) como una *raíz característica*.

Para este caso particular (2.21), la ecuación característica es

$$\det(\lambda \cdot Id - A - e^{-\lambda r} \cdot B) = 0 \tag{2.25}$$

Observación 2.5 Sin pérdida de generalidad, realizaremos el desarrollo de la ecuación (2.24)

para un sistema de dos ecuaciones desde el proceso de Linealización correspondiente. [10].

Consideraremos el sistema de la siguiente forma

$$\begin{aligned} x' &= f_1(x, y, x_r, y_r) \\ y' &= f_2(x, y, x_r, y_r) \end{aligned} \tag{v.1}$$

donde $f_i, i = 1, 2$ es una función suficientemente diferenciable para que exista la solución del sistema. De manera similar a las E.D.O. se hallará el punto de equilibrio $(x_o; y_o)$ que satisface

$$\begin{aligned} f_1(x_o; y_o; x_o; y_o) &= 0 \\ f_2(x_o; y_o; x_o; y_o) &= 0 \end{aligned}$$

es decir, para encontrar los puntos de equilibrio es necesario resolver el sistema algebraico anterior.

Una solución cercana al punto de equilibrio de la forma $(x, y) = (x_o + \epsilon u; y_o + \epsilon v)$ cumple:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \epsilon u' = f_1(x_o + \epsilon u; y_o + \epsilon v; x_o + \epsilon u_r; y_o + \epsilon v_r) \\ y'(t) &= \epsilon v' = f_2(x_o + \epsilon u; y_o + \epsilon v; x_o + \epsilon u_r; y_o + \epsilon v_r) \end{aligned} \tag{v.2}$$

Por medio de aproximaciones de Taylor de funciones de cuatro variables tenemos

$$f_i(x_o + \epsilon u; y_o + \epsilon v; x_o + \epsilon u_r; y_o + \epsilon v_r) \approx f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) + D_1 f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) \cdot \epsilon u \\ + D_2 f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) \cdot \epsilon v + D_3 f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) \cdot \epsilon u_r + D_4 f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) \cdot \epsilon v_r$$

$$f_i(x_o + \epsilon u; y_o + \epsilon v; x_o + \epsilon u_r; y_o + \epsilon v_r) \approx f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) + \epsilon [D_1 f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) \cdot u \\ + D_2 f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) \cdot v + D_3 f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) \cdot \epsilon u_r + D_4 f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) \cdot \epsilon v_r]$$

$$f_i(x_o; y_o; x_o; y_o) + \epsilon [D_1 f_i \cdot u + D_2 f_i \cdot v + D_3 f_i \cdot u_r + D_4 f_i \cdot v_r] \quad (\text{v.3})$$

donde $D_j f_i$ es la derivada parcial de f_i con respecto a la j -ésima variable evaluada en el punto $(x_o; y_o; x_o; y_o)$. En nuestro modelo sería $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3, 4$. Finalmente, combinando (v.2) con (v.3) obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} u' &= D_1 f_1 \cdot u + D_2 f_1 \cdot v + D_3 f_1 \cdot u_r + D_4 f_1 \cdot v_r \\ v' &= D_1 f_2 \cdot u + D_2 f_2 \cdot v + D_3 f_2 \cdot u_r + D_4 f_2 \cdot v_r \end{aligned}$$

Usando la notación matricial, podemos escribir este sistema como

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_3 f_1 & D_4 f_1 \\ D_3 f_2 & D_4 f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \end{bmatrix}$$

donde: $J = \begin{bmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{bmatrix} \quad J_r = \begin{bmatrix} D_3 f_1 & D_4 f_1 \\ D_3 f_2 & D_4 f_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + J_r \cdot \begin{bmatrix} u_r \\ v_r \end{bmatrix} \quad (\text{v.4})$$

donde las derivadas parciales se evalúan en los puntos adecuados.

La ecuación (v.4) es la linealización de (v.1) cerca del punto de equilibrio $(x_o; y_o)$

Ahora para encontrar la ecuación característica, en primer lugar consideraremos las siguiente notación $(u, v) = (u(t), v(t))$ y $(u_r, v_r) = (u(t-r), v(t-r))$. Supongamos $(u, v) = (C_1 \cdot e^{\lambda t}; C_2 \cdot e^{\lambda t})$, y $(u_r, v_r) = (C_1 \cdot e^{\lambda(t-r)}; C_2 \cdot e^{\lambda(t-r)})$, y al sustituir en (v4) obtenemos

$$\lambda \cdot e^{\lambda t} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = e^{\lambda t} \cdot J \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + e^{\lambda t} \cdot e^{-\lambda r} \cdot J_r \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

por lo tanto,

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + e^{-\lambda r} \cdot J_r \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

o equivalentemente

$$[\lambda \cdot Id - J - e^{-\lambda r} \cdot J_r] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0$$

luego, este sistema tiene una solución no trivial si

$$\det [\lambda \cdot Id - J - e^{-\lambda r} \cdot J_r] = 0$$

$$\text{Donde } J = \begin{bmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 \end{bmatrix} \quad y \quad J_r = \begin{bmatrix} D_3 f_1 & D_4 f_1 \\ D_3 f_2 & D_4 f_2 \end{bmatrix}.$$

Esta última ecuación es conocida como la ecuación característica de (2.20), lo que queríamos mostrar su desarrollo. Considerando el detalle que $J = A$, y $J_r = B$.

Si A y B son matrices de orden 2, la ecuación característica (2.25) puede ser expresada como $P(\lambda, e^{-\lambda r}) = 0$ donde $P(z, w)$ es un polinomio cuadrático en (z, w) .

$$\lambda^2 - (tr(A)) \cdot \lambda + \det(A) + e^{-2r\lambda} [C - (tr(B)) \cdot \lambda] = P(z, w) \quad (2.26)$$

Donde

$$C = \det(a^1 \mid b^2) + \det(b^1 \mid a^2)$$

De aquí, $\det(A)$ denota la determinante de A , $tr(A)$ denota la traza de A , y $(a^1 \mid b^2)$ denota la matriz con la primera columna de A y la segunda columna de B .

Una primera observación sería con respecto a la función h , definida por $h(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id - L_\lambda)$, la cual es una función analítica definida para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, que es, una función entera, analítica en todo el plano complejo.

Lema 2.6 La función $h(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id - L_\lambda)$, es una función entera.

Luego, las propiedades no triviales de las funciones enteras, en particular para h , son:

- Cada raíz característica tiene orden finito.
- Hay un cantidad numerable de raíces características.
- El conjunto de raíces características no tiene punto de acumulación finita.

Hay que observar la consideración que sólo hay un número finito de raíces características con parte real positiva.

Lema 2.7 Dado $\sigma \in \mathbb{R}$, hay una cantidad finita de raíces características que satisfacen la siguiente condición $\Re(\lambda) > \sigma$.

Si hay una cantidad infinita de raíces características distintas $\{\lambda_n\}_n$, entonces $\Re(\lambda) \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

Una importante implicación del Lema 2.7 es que exista $\sigma \in \mathbb{R}$, y un conjunto finito de raíces características dominantes"teniendo un parte real maximal igual a σ , y con todas las demás raíces poseen parte real estrictamente menor a σ .

Proposición 2.2. Supongamos que L pertenece a mapas de funciones reales hacia los vectores reales $L(C([-r; 0], \mathbb{R}^n)) \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, λ es una raíz característica si y sólo si $\bar{\lambda}$ es una raíz característica.

El resultado principal de esta parte de la Ecuación Característica, se refiere a la estabilidad de la solución $x = 0$ de (2.20).

Teorema 2.10. Supongamos que $\Re(\lambda) < \mu$ para cada raíz característica λ . Entonces, existe $K > 0$ tal que

$$|x(t, \phi)| \leq K \cdot e^{\mu t} \|\phi\| \quad ; \quad t \geq 0, \phi \in C \quad (2.27)$$

Donde $x(t, \phi)$ es la solución de (2.20) satisfaciendo $x_0 = \phi$.

En particular, $x = 0$ es asintóticamente estable para (2.20) si $\Re(\lambda) < 0$ para cada raíz característica λ ; y es inestable si la raíz característica satisface $\Re(\lambda) > 0$.

2.3.3. Los Pequeños Retardos son Inofensivos

Consideraremos el siguiente Sistema con Retardo Lineal

$$z'(t) = A \cdot z(t) + B \cdot z(t - r)$$

y su contraparte sin Retardo, es decir, cuando $r = 0$.

$$z'(t) = A \cdot z(t) + B \cdot z(t)$$

$$z'(t) = (A + B) \cdot z(t)$$

Ahora, analizaremos la correspondencia de las raíces características de

$$h(\lambda, r) = \det [\lambda \cdot Id - A - e^{-\lambda r} \cdot B] = 0 \quad (\Phi)$$

con los autovalores (valores propios) $A + B$:

$$h(\lambda, r) = \det (\lambda \cdot Id - A - B) = 0$$

$$h(\lambda, r) = \det [\lambda \cdot Id - (A + B)] = 0$$

Teorema 2.11 Sean z_1, z_2, \dots, z_k los valores propios distintos de $A + B$, sea $\delta > 0$, y sea $s \in \mathbb{R}$ que satisfacen: $s < \min_i \Re(z_i)$. Entonces, existe $r_o > 0$, tal que si $0 < r < r_o$ y $h(\lambda, r) = 0$ para algún z , entonces ó bien $\Re(z) < s$ ó $|z - z_i| < \delta$ para algún i .

En palabras, para un retardo suficientemente pequeño, las raíces características de (Φ) son o bien muy cerca de los valores propios de $A + B$ ó tienen más partes reales negativas que cualquiera de los valores propios de $A + B$. Luego, podemos elegir cualquier negativo que deseemos, por lo tanto podemos forzar estas últimas raíces a tener partes muy negativas si son suficientemente pequeñas.

¿Qué pasa con esas raíces características que se acercan mucho a uno de los z_i como r_o ? Pueden describirse por *el Teorema de la Función Implícita* si z_i es un orden de una raíz.

Los pequeños retardos son inofensivos en el sentido de que si la estabilidad asintótica se mantiene cuando $r = 0$, entonces continúa manteniéndose para los pequeños retardos en la medida en que podemos escoger δ suficientemente pequeño para que una vecindad ó bola con centro δ sobre cada valor propio de $A + B$ y que pertenezca al semi-plano izquierdo, y podamos elegir negativa. Por otro lado, si la inestabilidad se sostiene para $r = 0$ debido a una raíz positiva simple o un par complejo

conjugado de raíces con una parte real positiva, entonces el *teorema de la función implícita* puede aplicarse para mostrar que la inestabilidad continúa manteniéndose para $r < 0$.

Teorema de la Función Implícita Sea $h : D \times U \rightarrow \mathbb{C}$ donde $D \subset \mathbb{C}$ y $U \subset \mathbb{R}^k$ son conjuntos abiertos. Asumiremos que h es una función analítica en $z \in D$ para cada $p \in U$, y $h_z(z, p)$ es continua en $D \times U$. Asumiremos también que $h_p(z, p)$ existe y es continua en $D \times U$.

Si $h(z_o, p_o) = 0$ para algún $(z_o, p_o) \in D \times U$ y $h_z(z_o, p_o) \neq 0$, entonces existe alguna vecindad W de z_o en D , y una vecindad V de p_o en U , y una función continua y diferenciable $g : V \rightarrow W$ que satisface lo siguiente:

1. $g(p_o) = z_o$
2. $h(g(p), p) = 0, \quad p \in V$
3. Si $(z, p) \in V \times W$ y $h(z, p) = 0$, entonces $z = g(p)$.

2.3.4. La Ecuación Escalar

En esta parte, podremos obtener una concepción más completa de las raíces características asociadas con (2.21) en el caso de que A y B son escalares reales. Esto corresponde a la siguiente ecuación

$$x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot x(t - r) \quad (2.28)$$

En este caso, de la ecuación (2.25)

$$\lambda = A + B \cdot e^{-\lambda r} \quad (2.29)$$

Multiplicando por r , obtenemos

$$z = r\lambda, \quad \alpha = Ar, \quad \beta = Br$$

luego,

$$z = \alpha + \beta \cdot e^{-z} \quad (2.30)$$

Si escribimos $z = x + iy$, entonces las ecuaciones serían

$$\begin{aligned} 0 &= x - \alpha - \beta e^{-x} \cos(y) \\ 0 &= y + \beta e^{-x} \operatorname{sen}(y) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Observamos que $z = 0$ es la raíz característica cuando $\alpha + \beta = 0$.

Podemos definir $F(z, \alpha, \beta) = z - \alpha - \beta \cdot e^{-z}$ donde los ceros son las raíces de (2.30).

En todas las otras soluciones (z_0, α_0, β_0) de (2.30), el Teorema de la Función Implícita garantiza una raíz suave $z = z(\alpha, \beta)$ para (α, β) cerca a (α_0, β_0) .

Tomando $x = 0$, y resolviendo para α y β lo cual nos dará "*las curvas de estabilidad neutral*" en el espacio de parámetros a lo largo de la ecuación (2.30) donde se tiene raíces imaginarios puros $z = iy$.

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{y \cos(y)}{\operatorname{sen}(y)} \\ \beta &= -\frac{y}{\operatorname{sen}(y)}\end{aligned}\tag{2.32}$$

Como las raíces vienen en pares conjugados complejos, podemos restringir $y \geq 0$. Observemos que la curva está bien definido en $y = 0$ donde (α, β) , que coincide con los valores de los parámetros en los que $z = 0$ es una raíz doble. Ahora, denotamos por

$$C_0 = \{(\alpha, \beta) = \left(\frac{y \cos(y)}{\operatorname{sen}(y)}; -\frac{y}{\operatorname{sen}(y)}\right), \quad 0 \leq y \leq \pi\}$$

la curva a lo largo de $z = \pm iy$, $0 \leq y < \pi$ son raíces.

Ahora, necesitamos considerar las siguientes curvas

$$C_n = \{(\alpha, \beta) = \left(\frac{y \cos(y)}{\operatorname{sen}(y)}; -\frac{y}{\operatorname{sen}(y)}\right), \quad n\pi \leq y \leq (n+1)\pi\}, \quad n \geq 1$$

Donde $z = \pm iy$, $n\pi \leq y \leq (n+1)\pi$ son raíces.

Sea

$$R(\alpha, \beta) = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0, F(z, \alpha, \beta) = 0\}$$

El conjunto de raíces inestables para par de parámetros dados (α, β) y sea

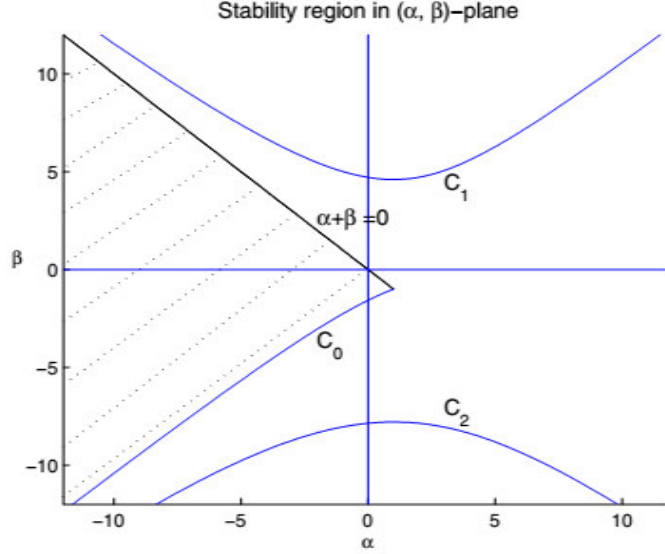
$$\begin{aligned}I &= \{(\alpha, \beta) : F(iy, \alpha, \beta) = 0 \text{ para algún } y \text{ real}\} \\ I &= \{(\alpha, \beta) : \alpha + \beta = 0\} \cup \{\cup_{n \geq 0} C_n\}\end{aligned}$$

son el conjunto de parámetros donde existen raíces puramente imaginarios o son raíces nulas. Por último, definimos

$$Z(\alpha, \beta) = \sum_{z \in R(\alpha, \beta)} \text{orden de la raíz } z$$

que cuenta las raíces inestables de acuerdo a la multiplicidad. Esta es una suma finita de acuerdo con lema 2.7.

Se puede mostrar que Z es continua, excepto en los puntos (α, β) donde $F(z, \alpha, \beta) = 0$ tiene raíces imaginarios puros o raíces nulas.



La gráfica muestra la región de estabilidad para (2.30) en el plano (α, β) .

Lema 2.8 La función de valor entero $Z(\alpha, \beta)$ es continua en todos los puntos (α, β) que no pertenecen al conjunto cerrado I . En consecuencia, Z es constante en los componentes conectados del complemento de I .

Proposición 2.3 Todas las raíces de (2.25) posee $\Re(z) < 0$ para (α, β) siguiendo para una región acotada bajo la curva C_0 y acotada sobre la curva $\{(\alpha, \beta) : \beta = -\alpha, \alpha \leq 1\}$ donde se encuentra $(\alpha, \beta) = (1; -1)$. Por lo menos una raíz satisface $\Re(z) > 0$ que pertenecen a la región abierta complementaria hacia la derecha. (*Demostración en [14]*).

Ahora, volvamos a nuestro problema original de la determinación de la estabilidad del estado de equilibrio $x = 0$ de la ecuación escalar (2.28), que depende de la ecuación característica (2.29). Supongamos que $A + B \neq 0$ pues de lo contrario $\lambda = 0$ es una raíz.

Teorema 2.12 Considerando la ecuación: $x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot x(t-r)$ (*Demostración en [14]*)

1. Si $A + B > 0$, entonces $x = 0$ es Inestable.
2. Si $A + B < 0$ y $B \geq A$, entonces $x = 0$ es asintóticamente Estable.
3. Si $A + B < 0$ y $B < A$, entonces existe $r^* > 0$ tal que $x = 0$ es asintóticamente Estable para $0 < r < r^*$, e Inestable para $r > r^*$.

En este caso, si se tiene pares de raíces imaginarios puros

$$r = r^* = (B^2 - A^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos^{-1} \left(-\frac{A}{B} \right)$$

Proposición 2.4 Dado para algún número real ρ , la ecuación característica (2.22) tiene un número finito de raíces λ tal que, $\Re(\lambda) \geq \rho$.

Proposición 2.5 Si $\operatorname{Re}(\lambda) < \rho$, para cada solución de la ecuación característica de (2.22)

$$\det \left(\lambda I - \sum_{i=1}^m A_j \cdot e^{-\lambda r_i} \right) = 0$$

entonces, existe una constante $M > 0$, tal que, para cada $\phi \in C([t_0 - r, t_0]; \mathbb{R})$, la solución de (2.22) satisfice

$$\|y(t, \phi)\| \leq M \|\phi\| \cdot e^{\rho(t-t_0)}$$

Corolario 2.3 Si $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, para cada solución de la ecuación característica, entonces existe una constante $M, \gamma > 0$ tal que, para cada $\phi \in C([t_0 - r, t_0]; \mathbb{R})$, la solución de (2.22) satisfice

$$\|y(t, \phi)\| \leq M \|\phi\| \cdot e^{\gamma(t-t_0)}$$

Lema 2.9 Si $|a| < b$, entonces todas las soluciones de $z'(t) = \tilde{a} \cdot z(t-r) - \tilde{b} \cdot z(t)$ tienden a cero, cuando $t \rightarrow +\infty$. [39].

Prueba. Asumimos una solución de la forma $e^{\lambda t}$, formamos la ecuación característica de esta ecuación

$$\lambda = \tilde{a} \cdot e^{-\lambda r} - \tilde{b}$$

Vemos que la parte real de alguna solución de esta ecuación diferencial es negativa.

Sea $\lambda = \mu + iv$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} u + iv &= \tilde{a} \cdot e^{-ur} e^{-ivr} - \tilde{b} \\ u + iv &= \tilde{a} e^{-ur} (\cos(vr) - i \operatorname{sen}(vr)) - \tilde{b} \end{aligned}$$

Analizando la parte real de esta ecuación, obtenemos

$$u + \tilde{b} = \tilde{a} e^{-ur} \cos(vr)$$

Si $u \geq 0$, entonces

$$b \leq u + b = \tilde{a} e^{-ur} \cos(vr) \leq \tilde{a} e^{-ur} \leq a$$

lo cual contradice la hipótesis de $|a| < b$.

Sea

$$y'(t) = p(t)y(t-r) - dy(t)$$

donde $p(t) \leq d, d > 0$. En la práctica, $p(t)$ representará la ecuación no lineal del modelo. Es mejor entender esta ecuación con la siguiente comparación con la siguiente ecuación

$$z'(t) = dz(t-r) - dz(t)$$

Lema 2.10. Si $y(t)$ y $z(t)$ están definidas como en la anterior consideración, y además $y(t) = z(t) \geq 0$ para $t \in [a, a+r]$ para algún a , entonces $y(t) \leq z(t) \quad \forall t$

2.3.5. Principio de Estabilidad Linealizada

Como mencionamos, desarrollar el análisis de un Sistema No Lineal es complicado y hasta veces imposible, por lo cual, se realiza una Linealización del Sistema No Lineal para poder trabajar con el Sistema Lineal Asociado al Sistema No Lineal dentro de una vecindad, es decir, se estudia la estabilidad local alrededor del punto crítico del Sistema.

Consideremos la Ecuación Diferencial No Lineal

$$x'(t) = f(x_t) \quad (2.33)$$

Entonces, $x(t) = x_0 \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ es la solución en el Estado Estacionario de (2.33) si y sólo si,

$$f(\widehat{x}_0) = 0$$

Donde $\widehat{x}_0 \in \mathbb{C}$ es una función constante igual a x_0 .

Si $x(t)$ es una solución de (2.33), y

$$x(t) = x_0 + y(t)$$

luego, $y(t)$ satisface

$$y'(t) = f(\widehat{x}_0 + y_t) \quad (2.34)$$

Se quiere entender el comportamiento de las Soluciones de (2.33) que comience bien cerca de \widehat{x}_0 para este propósito, es suficiente para comprender el comportamiento de las Soluciones de (2.34) comiencen cerca de $y = 0$. Asumiremos que

$$f(\widehat{x}_0 + \phi) = L(\phi) + g(\phi) \quad , \quad \phi \in C \quad (2.35)$$

Donde $L : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función lineal y acotada, y $g : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de "mayor orden." en el sentido que

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{|g(\phi)|}{\|\phi\|} = 0 \quad (2.36)$$

En efecto, esto significa que para cada $\mu > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\phi\| \leq \delta \implies |g(\phi)| \leq \mu \|\phi\|$$

El Sistema Lineal

$$z'(t) = L(z_t) \quad (2.37)$$

llamado también Sistema Linealizado (ó Variacional) sobre la Estabilidad de \widehat{x}_0 . Hay que considerar el Espacio Complejo $C = C([-r; 0], \mathbb{C}^n)$.

Teorema 2.13 Sea $\Delta(\lambda) = 0$ denotando la Ecuación Característica correspondiente a (2.37), y supongamos lo siguiente,

$$-\sigma = \max_{\Delta(\lambda)=0} \Re(\lambda) < 0$$

Entonces, \widehat{x}_0 es asintóticamente estable en la Estabilidad Local del estado estacionario de (2.33). En efecto, existe $b > 0$ tal que

$$\|\phi - \widehat{x}_0\| < b \implies \|x_t(\phi) - \widehat{x}_0\| \leq K \|\phi - \widehat{x}_0\| \cdot e^{-\frac{\sigma t}{2}}, t \geq 0$$

Si $\Re(\lambda) > 0$ para alguna raíz característica, entonces \widehat{x}_0 es inestable.

Consideremos el caso particular de (2.33)

$$x'(t) = F(x(t), x(t-r)) \quad (2.38)$$

Donde asumiremos lo siguiente, $F : D \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y diferenciable, y $D \subset \mathbb{R}^n$ es abierto. Si $F(x_0; x_0) = 0$ para algún $x_0 \in D$, entonces $x(t) = x_0, t \in \mathbb{R}$ es la solución de equilibrio, o lo que nosotros también llamamos el punto crítico ó punto de equilibrio. Entonces, $f(\phi) = F(\phi(0), \phi(-r))$ en (2.35) seguido por lo siguiente,

$$f(\widehat{x}_0 + \phi) = A\phi(0) + B\phi(-r) + G(\phi(0), \phi(-r))$$

Donde $A = f_x(x_0; x_0)$, $B = f_y(x_0; x_0)$.

Siguiendo con el Problema Linealizado, ó con la Lineal Asociada al Sistema sobre $x = x_0$ para la ecuación (2.38).

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(t-r) \quad (2.39)$$

2.3.6. Estabilidad Absoluta

En el desarrollo de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo es común encontrar la Ecuación característica de la forma

$$p(\lambda) + q(\lambda) \cdot e^{-r\lambda} = 0 \quad (2.40)$$

Donde p, q son polinomios con coeficiente reales, y $r > 0$, es el Retardo. Por ejemplo, la ecuación característica para un sistema de dos ecuaciones, (2.26), tiene esta propiedad cuando $\det(B) = 0$, un caso bastante común a menudo que se tiene un sólo Retardo. Y en la gran mayoría de casos, el grado de orden de p , es mayor que el de q .

Observación 2.6. Una consideración importante es cuando se analiza la Lineal Asociada alrededor del punto x_0 (punto crítico ó solución constante) es que se está estudiando la Estabilidad Local del Sistema No Lineal de E.D.R. Otro detalle importante a considerar: $A = J(x)$ es la Matriz Jacobiana asociada al Sistema No Lineal con respecto a la variable x , y $B = J_r(x)$ es la Matriz Jacobiana asociado al Sistema No Lineal con respecto al Retardo r .

Proposición 2.4 Sean p, q polinomios con coeficientes reales. Supongamos lo siguiente:

1. $p(\lambda) \neq 0, \Re(\lambda) > 0$
2. $|q(iy)| < |p(iy)|, 0 \leq y < +\infty$
3. $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty, \Re(\lambda) \geq 0} \left| \frac{q(\lambda)}{p(\lambda)} \right| = 0$

Entonces, $\Re(\lambda) < 0$ para toda raíz λ , y $r \geq 0$ del polinomio característico (2.40).

La conclusión de la Proposición 2.4 es llamado *Estabilidad Absoluta*, donde la estabilidad se mantiene para todo valor del Retardo. [14,33,48].

Corolario 2.4. Sea p un polinomio con coeficientes reales, y tiene el coeficiente uno en el término de mayor orden. También sea $q = c$ una constante. Si

1. Todas las raíces de p son reales y tienen parte negativa, y $|p(0)| > |c|$ ó
2. $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$; $a, b > 0$ y también
 - a) $b > |c|$ y $a^2 \geq 2b$ ó
 - b) $a\sqrt{4b - a^2} > 2|c|$ y $a^2 < 2b$

Entonces, $\Re(\lambda) < 0$ para toda raíz λ , y $r \geq 0$.

Observación 2.7 En el análisis realizado se ha considerado implícitamente que los coeficientes A y B son independientes del Retardo τ con respecto al **Teorema 2.11**. Sin embargo, en las diversas aplicaciones que se realiza suele presentarse que los coeficientes A y B son funciones que incluyen al Retardo τ . Pero, aún así, el Teorema 2.11 en el inciso (1) sigue siendo válido, en este caso se muestra la existencia de una raíz característica positiva. Y, por parte del inciso (2) sigue siendo válido también. Para su respectiva demostración se argumenta por contradicción, suponiendo que hay una raíz λ distinta de cero con $\Re(\lambda) \geq 0$. Se utiliza la siguiente ecuación: $|A| < |\lambda - A| = |B| \cdot e^{-\tau \cdot \Re(\lambda)} \leq |B|$ para obtener la contradicción.

2.3.7. Bifurcación de Hopf

El *Teorema de la Bifurcación de Hopf* es uno de los resultados más importantes para las Ecuaciones Diferenciales de Retardo porque es esencialmente el único método para establecer rigurosamente la existencia de soluciones periódicas. Entonces el teorema se afirma, sin prueba, junto con una discusión de las propiedades de estabilidad de bifurcación de soluciones periódicas.

Ahora vamos a indicar el teorema de la bifurcación de Hopf, siguiendo [83,84,85,87]. Consideraremos la familia de un parámetro de las ecuaciones de retardo

$$x'(t) = F(x_t, \mu) \tag{2.41}$$

donde $F : C \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y dos veces diferenciable en sus argumentos, y $x = 0$ es un estado estacionario para todos los valores de μ .

$$F(0, \mu) \equiv 0$$

Luego, podemos linealizar F en $\phi = 0$

$$F(\phi, \mu) = L(\mu)\phi + f(\phi, \mu)$$

donde $L(\mu) : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ un operador lineal y acotado, y f de orden superior.

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{|f(\phi, \mu)|}{\|\phi\|} = 0$$

Así, la ecuación característica asociada a L sería:

$$0 = \det [\lambda \cdot Id - A(\mu, \lambda)] \quad , \quad A_{ij}(\mu) := L(\mu)_i(e_\lambda e_j)$$

La hipótesis principal es sobre las raíces características de esta ecuación.

(H) Para $\mu = 0$, la ecuación característica tiene un par de raíces simples $\pm\omega_o$ con $\omega_o \neq 0$, y ninguna otra raíz que sea un múltiplo entero $i\omega_o$.

Por una raíz simple, nos referimos a una raíz de orden uno. Si expresamos la ecuación característica como $h(\mu, \lambda) = 0$, entonces **(H)** implica que la derivada parcial $h_\lambda(0, i\omega_o) \neq 0$.

Por tanto, el teorema de la función implícita, implica la existencia de una familia de raíces continuas y diferenciables $\lambda = \lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$ para los pequeños valores de μ satisfaciendo $\lambda(0) = i\omega_o$. En particular, $\alpha(0) = 0$ y $\varpi(0) = \omega_o$. Nuestra siguiente suposición es que estas raíces cruzan el eje imaginario transversalmente cuando μ se acerca a cero. Más precisamente, suponemos que:

$$\alpha'(0) > 0 \tag{2.42}$$

Tengamos en cuenta que si $\alpha'(0) > 0$, entonces siempre podemos considerar que (2.42) se mantiene por el cambio de parámetro $v = -\mu$. Por lo tanto, el signo positivo es simplemente una normalización que para $\mu < 0$, el par de raíces tiene una parte real negativa donde como para $\mu > 0$ tiene una parte real positiva.

Teorema 2.14 Consideremos **(H)** y (2.42), entonces existe $\varepsilon_o > 0$, funciones de variable real $\mu(\varepsilon)$ y $T(\varepsilon) > 0$ satisfaciendo $\mu(0) = 0$ y $T(0) = \frac{2\pi}{\varepsilon_o}$, y una $T(\varepsilon)$ -función periódica no constante $p(t, \varepsilon)$, con todas las funciones continuas y diferenciables en ε para $|\varepsilon| < \varepsilon_o$, tal que $p(t, \varepsilon)$ es una solución de (2.41) y $p(t, \varepsilon) = \varepsilon q(t, \varepsilon)$ donde $q(t, 0)$ es una $\frac{2\pi}{\varepsilon_o}$ -solución periódica y $q' = L(0)q$.

Más aún, existen $\mu_o, \beta_o, \delta > 0$, tal que si (2.41) posee una solución periódica no constante $x(t)$ de período P para algún μ , satisfaciendo $\mu < \mu_o$ con $\max_t |x(t)| < \beta_o$ y $\left|P - \frac{2\pi}{\varepsilon_o}\right| < \delta$, entonces $\mu = \mu(\varepsilon)$ y $x(t) = p(t + \theta, \varepsilon)$ para algún $|\varepsilon| < \varepsilon_o$ y algún θ .

Si F es continua y cinco veces diferenciable, entonces

$$\begin{aligned} \mu(\varepsilon) &= \mu_1(\varepsilon)^2 + O(\varepsilon)^4 \\ T(\varepsilon) &= \frac{2\pi}{\varepsilon_o} [1 + \tau_1(\varepsilon)^2 + O(\varepsilon)^4] \end{aligned} \tag{2.43}$$

Si todas las otras raíces características para $\mu = 0$, tienen estrictamente parte real negativa excepto para $i\omega_o$, entonces $p(t, \varepsilon)$ es asintóticamente estable si $\mu_1 > 0$, e inestable si $\mu_1 < 0$.

El caso de que $\mu_1 > 0$, se denomina *Bifurcación Supercrítica de Hopf*. Si este es el caso y si todas las otras raíces características para $\mu = 0$ tienen partes reales estrictamente negativas excepto para $\pm\omega_o$, entonces el estado estacionario $x = 0$ es asintóticamente estable para $\mu < 0$ cercano a cero e inestable para $\mu > 0$ cercano a cero. Para $\mu = \mu_1(\varepsilon)^2 + O(\varepsilon)^4 > 0$ existe una solución periódica asintóticamente estable $p(t, \varepsilon)$. La estabilidad se pierde por el estado estacionario y se gana por la solución periódica.

Una imagen cualitativa bastante diferente a lo que ya se había mencionado, surge cuando $\mu_1 < 0$, la llamada *Bifurcación Subcrítica de Hopf*. En este caso, la solución periódica inestable $p(t, \varepsilon)$ existe cuando $\mu = \mu_1(\varepsilon)^2 + O(\varepsilon)^4 < 0$. Aunque el estado estacionario $x = 0$ es asintóticamente estable para $\mu < 0$, su punto de atracción debe ser muy pequeña, cuando es pequeña porque la solución periódica inestable de amplitud proporcional a $\sqrt{-\mu}$ está cerca. Lo más inquietante es que cuando

$x = 0$ pierde la estabilidad $\mu > 0$, ninguna solución limitada pequeña gana estabilidad. Si hay una forma de solución acotada estable $\mu > 0$, es *grande*.

Nuestras afirmaciones de estabilidad requieren un adecuado proceso, porque una solución periódica no constante $x(t)$ de (2.41) no puede ser asintóticamente estable en el sentido usual porque $y(t) = x(t + q)$ es también una solución periódica, y si $\theta \neq 0$ es pequeña, resulta $\|x_o - y_o\|$ siendo pequeño, aún todavía cuando $\|x_t - y_t\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Nuestras afirmaciones de estabilidad están en el sentido orbital: la solución periódica $x(t)$ es orbitalmente estable si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si $d(y_o, O) < \delta$, entonces $d(y_t, O) < \varepsilon$ para todos $t \geq 0$ donde $O = \{x_t : t \in \mathbb{R}\} \subset C$ y $d(y_o, O) = \inf\{\|y_o - \phi\| : \phi \in O\}$. Esto es orbitalmente asintóticamente estable si es orbitalmente estable, y existe $b > 0$ tal que si $d(y_o, O) < b$, entonces existe θ tal que $\|y_t - x_{t+\theta}\| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Después de haber realizado una breve teoría de las ecuaciones diferenciales con retardo desde la construcción de la ecuación diferencial con retardo sencilla de forma lineal hasta su extensión a un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo discreto. Desde la existencia y unicidad de las soluciones construida de una manera similar a las ecuaciones diferenciales ordinarias. La teoría necesaria para garantizar la estabilidad local del sistema diferencial y también la estabilidad absoluta. Una breve introducción a la Bifurcación de Hopf de como buscar los posibles puntos de Bifurcación que en muchas ocasiones en las Ecuaciones Diferenciales con Retardo son los mismos Retardos discretos. Toda la teoría presentada en el presente capítulo nos permitirá analizar los modelos matemáticos epidemiológicos que se estudiará en el siguiente capítulo donde nos permitirá relacionar la Matemática con la Epidemiología.

Capítulo 3

Modelo Matemático Epidemiológico SI

El Modelo Matemático aplicado a la Epidemiología que se estudiará, es una aplicación de los modelos comportamentales orientado a las Enfermedades Infecciosas que pueden causar alguna Epidemia en alguna comunidad donde pueda estar expuesta.

En la primera parte de la Sección del Modelo Epidemiológico, estudiaremos un modelo básico SI con dinámica vital, considerando las Poblaciones Epidemiológicas (Susceptibles e Infectados) en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, para luego realizar una perturbación al modelo y así, poder extenderlo a las Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

Antes de comenzar con las descripciones de los Modelos Matemáticos que se estudiarán en el presente capítulo, mencionaremos los antecedentes de los Modelos presentados donde se muestran la historia de cómo la Matemática y la Epidemiología han ido avanzando en su estudio de las enfermedades para buscar respuestas y soluciones ante los diferentes escenarios.

En el año 1927, W. O. Kermack y A. G. McKendrick crearon el modelo SIR que considera una enfermedad que se desarrolla a lo largo del tiempo y únicamente tres clases de individuos (Susceptibles, Infectados y Recuperados). [92,93,94].

$$\left\{ \begin{array}{ll} S' = -\beta SI & S(0) = S_o \geq 0 \\ I' = \beta SI - \rho I & I(0) = I_o \geq 0 \\ R' = \rho I & R(0) = R_o \geq 0 \end{array} \right. \quad \beta, \rho > 0$$

Luego, años más adelante se considero un nuevo modelo donde se consideraba el ingreso de nuevos individuos a la población Susceptible que se le denominaría *Dinámica Vital*. Y también la salida de la población por una tasa de mortalidad. [92,93,95].

$$\left\{ \begin{array}{ll} S' = N - \beta SI - \mu S & S(0) = S_o \geq 0 \\ I' = \beta S \cdot I - \rho I - \mu I & I(0) = I_o \geq 0 \\ R' = \rho I - \mu R & R(0) = R_o \geq 0 \end{array} \right. \quad \beta, \rho, \mu > 0$$

Con el desarrollo de la teoría matemática se fue realizando mayores intentos de estudiar los modelos matemáticos, sobretodo para la enfermedad infecciosa del VIH/SIDA. El cual se presenta

el *Modelo del SIDA de Anderson y May* donde se presentaba la dinámica entre las poblaciones Susceptibles e Infectados (VIH), pero también la distinción entre personas que tienen SIDA. [92,94,95].

$$\left\{ \begin{array}{l} X' = B - \mu X - \lambda c X \quad X(0) = X_o \geq 0 \\ Y' = \lambda c X - (v + \mu) Y \quad Y(0) = Y_o \geq 0 \\ A' = \rho v Y - (\delta + \mu) A \quad A(0) = A_o \geq 0 \\ Z' = (1 - \rho) v Y - \mu Z \quad Z(0) = Z_o \geq 0 \\ N = X + Y + Z + A \\ \lambda, c, v, \delta, \rho, \mu > 0 \end{array} \right.$$

Por último, se presentó un *Modelo con Incorporación de la Reproducción Viral* donde presentan la dinámica entre las personas que poseen el virus de la enfermedad y entran en contacto con la población que no tienen el virus. [91,96].

$$\left\{ \begin{array}{l} T' = s + pT \left(1 - \frac{T}{T_{\text{máx}}} \right) - d_T \cdot T - kVT \quad T(0) = T_o \geq 0 \\ F' = kVT - \delta F \quad F(0) = F_o \geq 0 \\ V' = N\delta F - cV \quad V(0) = V_o \geq 0 \\ p, d_T, k, \delta, c > 0 \end{array} \right.$$

Esto nos muestra, que hasta el día de hoy, se siguen desarrollando diferentes modelos como propuesta de explicar la dinámica de transmisión de la enfermedad del VIH/SIDA. Muchos de los cuales se quedarón como propuesta, otros se realizaron sus respectivas simulaciones computacionales para brindar un bosquejo de su comportamiento en el tiempo mediante condiciones iniciales que se te introducía para obtener resultados aproximados a los datos recolectados durante la investigación. [92,93,94].

Ahora presentaremos los detalles del Modelo Matemático SI, debido que que estudiaremos la Enfermedad de Transmisión Sexual del VIH/SIDA de manera particular, y hasta el momento, no se tiene un medicamento o remedio que pueda sanar completamente la enfermedad, solamente retrovirales que van deteniendo el avance de la enfermedad dentro del cuerpo. [49,50].

Dentro de los diversos modelos SI con Dinámica Vital, hay que considerar algunos casos esenciales para iniciar el estudio desde las E.D.O. con su extensión a las E.D.R. Esto nos ayudará a tener una mejor concepción de la problemática. Después consideraremos el análisis de otro modelo SI con Dinámica Vital que considerará una perturbación relacionada a un Retardo, lo que nos ayudará a tener otra percepción dentro de una misma concepción del problema. [15,30].

Realmente las nuevas consideraciones ante la Problemática de un Fenómeno, nos permiten comprender mejor el Problema que se está modelando. En las tres primeras secciones del presente Capítulo, se centrará en el estudio cualitativo de un Modelo SI Básico con Dinámica Vital estudiada por las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.), luego se extenderá el mismo Modelo SI Básico con Dinámica Vital sin Estrategia de Control estudiada por las Ecuaciones Diferenciales con Retardo (E.D.R.), para después introducir un coeficiente de protección lo que nos llevará al Modelo SI Básico con Dinámica Vital con Estrategia de Control estudiada por las E.D.R. [13,14,24].

Estos tres Modelos estarán comprendidos epidemiológicamente por las Poblaciones Susceptibles e Infectados únicamente, por otro lado, matemáticamente serán representados por dos ecuaciones para la representación del Sistema de nuestro Modelo.

Luego se realizará una extensión al Modelo SI Básico con Dinámica Vital tanto para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como para las Ecuaciones Diferenciales con Retardo. Esta nueva consideración no sólo abarcará a las poblaciones epidemiológicas (Susceptibles e Infectados) sino

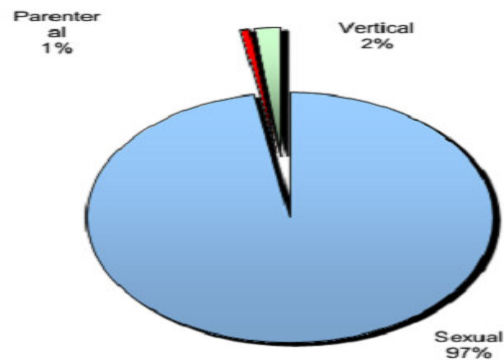
también a las poblaciones demográficas por sexo (Hombres y Mujeres). Lo que nos permitirá una mejor concepción y descripción del Problema. Estas consideraciones las realizaremos en las dos últimas secciones del presente capítulo. [13,24,29,30].

Antes de considerar las formulaciones matemáticas presentaremos un resumen sobre las enfermedades de transmisión sexual (ETS), antes conocidas como enfermedades venéreas, las cuales son un conjunto de afecciones clínicas infectocontagiosas que se transmiten de persona a persona por medio del contacto sexual que se produce, casi exclusivamente, durante las relaciones sexuales. Sin embargo, pueden transmitirse también por uso de jeringas contaminadas o por contacto con la sangre u otras secreciones, y algunas de ellas pueden transmitirse durante el embarazo o el parto, desde la madre al hijo. La mayor parte de las enfermedades de transmisión sexual son causadas por dos tipos de gérmenes: bacterias y virus, pero algunas también son causadas por hongos y protozoarios. [69,71].

Entre las enfermedades de transmisión sexual (ETS), en los últimos años se ha ido incrementando con una tendencia considerable, por lo cual en los últimos años se ha ido considerando e introduciendo diferentes métodos de prevenir el contagio de manera sustancial y directa a esta problemática de un gran impacto en nuestra sociedad. Una de estas enfermedades que actualmente está causando una gran preocupación en la salud pública, en el cuidado personal sobre todo, es el VIH/SIDA. El cual en los últimos años ha tenido un gran crecimiento pero a la vez tiene una gran dedicación en los estudios para intentar frenar esta epidemia que ocurre en todo el mundo. La enfermedad tiene varias dinámicas para contraerse, una de ellas en gran medida es por el acto sexual, ya sea heterosexual como homosexual, en otros casos por inyectables infectados, en la gestación madre-hijo, etc. [61,64].

De acuerdo al Boletín de la Dirección General de Epidemiología (DGE), donde la fuente recopilada es del "*Centro Nacional de Epidemiología, Prevención y Control de Enfermedades - MINSA*", la cual está aplicada a la Enfermedad de Transmisión Sexual del VIH/SIDA donde la vía de transmisión de las ETS son por vía sexual (97%). [72].

SIDA: VÍA DE TRANSMISIÓN 1983-2016



Las enfermedades de Trasmisión Sexual que en un inicio fueron reconocidas tenemos: clamidiasis y linfogranuloma venéreo (infección por *Chlamydia trachomatis*), gonorrea, Hepatitis C, sífilis, VPH. Por otro lado, las ITS más recientemente conocidas son las siguientes: candidiasis o aftas (infección por *Candida albicans*), *Mycoplasma genitalium* (uretritis no gonocócica), retrovirus como el VIH, el HTLV o el XMRV, ureaplasma, condiloma acuminata (verrugas genitales), causada

por el virus del papiloma humano. También se debe considerar las siguientes Infecciones transmitidas principalmente por vía sexual: chancroide, donovanosis o granuloma inguinal, ftiriasis (ladillas), herpesvirus (ocho tipos conocidos), infección gonocócica del tracto genitourinario, sífilis congénita, sífilis temprana y sífilis tardía y tricomoniasis. [15,61,81].

Realmente se tiene diferentes enfermedades que afectan directamente a la sociedad, por lo cual se debe tener medidas oportunas y acertadas para adecuadas intervenciones de acuerdo a las medidas que se considere en la Salud Pública correspondiente. Por esta gran preocupación se ha creado a través del tiempo varias instituciones para la comunicación, prevención, investigación, tratamiento entre las cuales una de ellas es el ONUSIDA, la cual constantemente presenta información actualizada en todo el mundo debido a las relaciones públicas que mantiene, y sobre todo que la enfermedad del VIH/SIDA es una preocupación global que afecta a toda la humanidad. Se puede observar los siguientes puntos de referencia importantes, para un adecuado análisis para un modelo matemático que pueda representar la dinámica de la enfermedad que sucede en el Perú con respecto a las enfermedades de transmisión sexual, en particular el VIH/SIDA. [68].

Por lo cual, se puede concluir parcialmente:

- Perú es un país de epidemia concentrada en hombres que tienen sexo con hombres, personas trans, trabajadores y trabajadoras sexuales.
- En el Perú fue reportado en 1983, y desde entonces ha tenido un dramático ascenso hasta la fecha, en el Perú existen 45037 personas infectadas con VIH y 28064 casos de SIDA. Ocupando el tercer lugar entre los países de Sudamérica.
Sin embargo, según el modelo de estimaciones desarrollado por OMS y ONUSIDA, existen aproximadamente 76000 personas viviendo con VIH/SIDA en el Perú.
- La mayoría de los casos proceden de las ciudades y departamentos con mayor concentración urbana de la costa y selva peruanas. Lima y Callao concentran el 73 % de los casos registrados.
- La prevalencia de VIH llega a 10.8% en el grupo de hombres que tienen sexo con otros hombres (HSH). La población transexual es la más afectada (diferentes estudios estiman una prevalencia de VIH del 32 %). Las trabajadoras sexuales y sus clientes son también grupos afectados por la epidemia.
- La forma de transmisión predominante es la transmisión sexual, pues un 97% de los casos registrados se infectaron por vía sexual.
- En el año 1986, por cada mujer con la infección había nueve varones infectados, situación que en los años subsiguientes varió significativamente. Actualmente, la razón de infecciones mujer:hombre se mantiene estable en el rango de una mujer infectada por cada tres varones con la infección.

El Modelamiento discreto es el más conocido y más utilizado como los modelos estadísticos, el cual permiten tener respuestas inmediatas, casi precisas dentro de un corto plazo el cual ayuda a discernir soluciones y respuestas ante la situación actual de la enfermedad de transmisión sexual, en nuestro caso de manera particular el VIH/SIDA, ahora el otro tipo de Modelamiento es el continuo el cual para ser formulado tiene un poco más de detalle por su formalización matemática mediante su estabilidad necesaria pero este modelo permite conocer lo que podría ocurrir a mediano y largo plazo desde el presente que se conoce. Ambos modelos permiten concebir matemáticamente el problema epidemiológico, lo cual comúnmente se conoce como “Epidemiología Matemática”. [30,68,69,70].

3.1. Modelo SI Básico con Dinámica Vital en E.D.O.

El modelo Matemático Epidemiológico Básico de Susceptibles e Infectados consiste en la interacción de la población susceptible con la población de los infectados ocasionando una epidemia ante una enfermedad infecciosa como son las Enfermedades de Transmisión Sexual (ETS) de una manera particular el VIH/SIDA. Se considerará únicamente las Poblaciones Epidemiológicas.

En este modelo se considera el ingreso constante de individuos no susceptibles a la población susceptible. Se considera la salida de la población Suscetible mediante la tasa de mortalidad natural (cualquier motivo menos la epidemia que se está modelando), y a la vez también se considera la salida de la población de los infectados mediante la tasa de mortalidad tanto por la epidemia como la natural. Mediante la tasa de contagio que sufren los susceptibles por la interacción con los infectados se ve la disminución de la población Susceptible lo cual esa cantidad, es adquirida por la población de los infectados.

Como se ha mencionado con anterioridad, a través de la historia de la Matemática en el servicio de la Epidemiología ha pasado diferentes etapas en la rigurosidad y formalidad matemática para las demostraciones de los teoremas que pertenecen al área en donde se está estudiando el problema. Con el presente modelo, se ha añadido el Modelo de W. O. Kermack y A. G. McKendrick, que en su tiempo permitió encontrar senderos en la investigación epidemiológica. Actualmente, se han desarrollado diferentes modelos para afrontar la problemática que puede afrontar la sociedad, donde la descripción de un modelo matemático puede brindar luces para una adecuada intervención. [92,93,94,96].

Se desarrollará no solamente la Existencia y Unicidad de las Soluciones del Sistema de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como se había presentado en [92,93]. Sino también se realizará el estudio de la positividad de las soluciones, y más aún, determinar bajo que condiciones el Sistema que representa nuestro Modelo Matemático Epidemiológico SI posee Soluciones Uniformemente Acotadas como un adecuado complemento del análisis cualitativo en cuanto a la estabilidad local del Sistema desarrollado. [35,36].

Ahora, representaremos matemáticamente cada consideración del modelo epidemiológico donde las variables consideradas son no negativas (positivas) debido que las variables matemáticas representan poblaciones de individuos.

Sean las Poblaciones Epidemiológicas.

- S : Población Susceptible
- I : Población Infectada
- N : Población No susceptible

Sean las tasas consideradas para el modelo

- σ : Tasa de ingreso a la Población Susceptible
- β : Tasa de contagio de Infectados a Susceptibles
- α : Tasa de mortalidad natural
- μ : Tasa de mortalidad por la enfermedad

Sean las tasas de Supervivencia

- $R_S = \frac{\sigma N}{\mu}$: Tasa de Supervivencia de los Susceptibles
- $R_I = \frac{\beta}{\alpha + \mu}$: Tasa de Supervivencia de los Infectados

Consideraremos las unidades de cada elemento del modelo

Variab les	Descripción
N	Cantidad de Individuos NO Susceptibles
S	Cantidad de Individuos Susceptibles
I	Cantidad de Individuos Infectados
$S' = \frac{\partial S}{\partial t}$	Cantidad de Susceptibles por unidad de Tiempo
$I' = \frac{\partial I}{\partial t}$	Cantidad de Infectados por unidad de Tiempo
Parámetros	Descripción
σ	Tasa de ingreso por unidad de Tiempo
β	Tasa de contagio por unidad de Tiempo
μ	Tasa de mortalidad natural por unidad de Tiempo
α	Tasa de mortalidad por la epidemia por unidad de Tiempo

Las dimensiones de las variables dentro del Sistema de Ecuaciones

$\frac{dS}{dt}$	Descripción
σN	Ingreso de la población No Susceptible a la población susceptible por la tasa de Ingreso por unidad de tiempo.
$-\beta S \cdot I$	Población de Susceptible contagiados por unidad de tiempo por un Infectado.
$-\mu S$	Población Susceptible fallecida de manera natural por unidad de tiempo.
$\frac{dI}{dt}$	Descripción
$+\beta S \cdot I$	Ingreso a la pob. Infectada de los Susceptibles contagiados por unidad de tiempo por un Infectado.
$-\mu I$	Población Infectada fallecida de manera natural por unidad de tiempo.
$-\alpha I$	Población Infectada fallecida por la epidemia por unidad de tiempo.

Por lo cual el modelo matemático quedaría expresado de la siguiente manera sin las dimensiones de cada variable, es decir, un Sistema Adimensionalizado.

$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S \quad S(0) = S_o \geq 0 \\ I' = \beta S \cdot I - (\alpha + \mu) I \quad I(0) = I_o \geq 0 \\ \sigma, \beta, \alpha, \mu > 0 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

3.1.1. Existencia y Unicidad de la Solución del Sistema

Para garantizar la Existencia y Unicidad del Sistema de E.D.O. (3.1) se utilizará un Lema y un Teorema de la Teoría Matemática de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, lo cual ya se ha mencionado en el capítulo 1 de las Preliminares del presente trabajo.

En primer lugar, utilizaremos el **Lema 1.1** en la ecuación (3.1) para determinar que es localmente Lipschitz continua.

Sea $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ $F(X) = (F_1(X), F_2(X))$ con $X = (S, I)$ donde S, I son funciones continuas positivas. Además,

$$\left. \begin{aligned} F_1(X) &= \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S \\ F_2(X) &= \beta S \cdot I - (\alpha + \mu)I \end{aligned} \right\} \text{ funciones continuas.}$$

Ahora se procederá a analizar las derivadas parciales de cada función: $F_i(S, I) \quad \forall i = \overline{1, 2}$

- Sea $F_1(S, I) = \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S$

$$\frac{\partial F_1}{\partial S} = -\beta I \quad \frac{\partial F_1}{\partial I} = -\beta S \quad \text{donde: } \frac{\partial F_1}{\partial S}; \frac{\partial F_1}{\partial I} \text{ son continuas.}$$

- Sea $F_2(S, I) = \beta S \cdot I - (\alpha + \mu)I$

$$\frac{\partial F_2}{\partial S} = \beta I \quad \frac{\partial F_2}{\partial I} = \beta S - (\alpha + \mu) \quad \text{donde: } \frac{\partial F_2}{\partial S}; \frac{\partial F_2}{\partial I} \text{ son continuas.}$$

$\therefore F$ localmente lipschitz continua en \mathbb{R}_+^2 .

A continuación utilizaremos el **Teorema 1.5** en la ecuación (3.1) para determinar que existe una única solución con una condición de valor inicial.

En primer lugar, se va a mostrar que satisface la condición del teorema.

- Sea $F_1(S, I) = \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S$
sea $S = 0, I > 0$

luego $F_1(S, I) = \sigma N > 0$

- Sea $F_2(S, I) = \beta S \cdot I - (\alpha + \mu)I$
sea $S > 0, I = 0$

luego $F_2(S, I) = 0$

$\therefore F_j(S, I) \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, 2}$

$$\text{Si } b < \infty \implies \sup_{0 \leq t \leq b} \sum_{j=1}^2 x_j(t) = \infty$$

Bastará probar lo siguiente para satisfacer el teorema.

Sea $I = (0, b]$ con $b \in (0, \infty]$

Si $b < \infty$ entonces, $\sup_{0 \leq t \leq b} \{S + I\} = \infty$

Supongamos, $b < \infty$ y sea $W = S + I$
 $W' = \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S + \beta S \cdot I - (\alpha + \mu)I$
 $W' = \sigma N - (\mu S + \alpha I + \mu I) = \sigma N - \mu(S + I) - \alpha I$
 $W' = \sigma N - \mu W - \alpha I \leq \sigma N - \mu W$

donde : $\rho = \sigma N \in \mathbb{R}^+$

$$W' \leq \rho - \mu W$$

integramos la expresión

$$\int W' \leq \int \rho - \int \mu W$$

luego, $W(t) - W_o \leq \rho t - \int_0^t \mu W(s) ds$

así, $W(t) \leq \rho t + W_o - \int_0^t \mu W(s) ds$

Por el lema de Gronwall

$$W(t) \leq (\rho t + W_o) \cdot e^{-\mu t}$$

luego, $W(t) \leq \frac{W_o}{e^{\mu t}} + \frac{\rho t}{e^{\mu t}}$

se puede deducir,

(i) $e^{\mu t} \geq 1$ luego, $\frac{W_o}{e^{\mu t}} \leq W_o$

(ii) $\frac{\rho t}{e^{\mu t}} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$

es decir, $W(t) \leq (\rho t + W_o) \cdot e^{-\mu t} \quad \forall t \in [0, b)$

Sea $g(t) = \rho t + W_o \leq M \quad \forall t \in [0, b)$

como $b < +\infty \rightarrow g(t) \leq M \quad \forall t \in [0, b)$

luego, $W(t) \leq M$ para algún $M > 0$

$$\sup\{S + I\} \leq M \quad \forall t \in [0, b)$$

de aquí, $\sup\{S + I\} < +\infty \quad (\Rightarrow \Leftarrow)$

$\therefore b = +\infty$

Por el Teorema enunciado, el sistema (3.1) tiene solución y es única, y además están definidas en $[0, \infty+)$

Soluciones Uniformemente Acotadas

Teorema 3.1 Existe $M > 0$ tal que para alguna solución $(S(t), I(t))$ de la ecuación (3.1) con una condición inicial positiva,

$$\max \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t); \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t); \right\} \leq M$$

Como hemos considerado $S(t) \geq 0, \forall t \geq 0$

Tenemos la primera ecuación:

$$S' = \sigma N - \beta SI - \mu S \leq \sigma N - \mu S$$

Las soluciones positivas con las condiciones iniciales positivas están dadas debajo de la solución de la siguiente ecuación:

$$S' = \sigma N - \mu S$$

cual solución analítica es:

$$S(t) = \frac{\sigma N}{\mu} + C \cdot e^{-\mu t}$$

Por consiguiente, todas las soluciones de $S(t)$ tienden a $\frac{\sigma N}{\mu}$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Luego, podemos concluir que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty+} \sup S(t) = \frac{\sigma N}{\mu}$$

De la segunda ecuación:

$$I' = \beta SI - (\alpha + \mu)I$$

Consideraremos lo siguiente: $\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} \right) - d < 0$ donde : $d = \alpha + \mu$

Consideramos $\varepsilon > 0$ tal que $\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) - d < 0$

como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) \leq \frac{\sigma N}{\mu}$, luego existe $t_1 > 0$ tal que, $S(t) < \frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \quad \forall t > t_1$

Este t_1 dependerá de alguna solución particular (i.e. condición inicial), pero $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t)$ no dependerá de t_1 . Para $t > t_1$, tenemos lo siguiente:

$$I' = \beta SI - dI \leq \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) I - dI$$

luego,

$$I' \leq A \cdot I - dI$$

Donde : $A = \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right)$

Ahora definiremos lo siguiente: $\beta \frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon < d$

Luego, se puede ver que las soluciones de:

$$Z'(t) = (A - d) \cdot Z(t)$$

tienden a **cero** cuando $t \rightarrow +\infty$.

Diremos que $I(t)$ está acotada por $Z(t)$
Luego,

$$\lim_{t \rightarrow \infty+} \sup I(t) = 0$$

Ahora consideraremos el caso: $\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} \right) \geq d$

Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) = \frac{\sigma N}{\mu}$, para alguna solución particular, existe $t_2 > 0$ tal que,

$$S(t) < 2 \left(\frac{\sigma N}{\mu} \right) \quad \forall t \geq t_2.$$

Luego,

$$I'(t) \leq 2\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} \right) \cdot I - d \cdot I \tag{\Psi1}$$

ahora vemos la desigualdad

$$I'(t) \geq -d \cdot I(t)$$

Luego, es fácil ver la conclusión que $t_2 > t_1$,

$$I(t_2) \geq I(t_1) \cdot e^{d(t_2-t_1)}$$

así, esta ecuación lo introducimos en ($\Psi1$)

$$I'(t) \leq \left(\frac{2\sigma\beta N}{\mu} - d \right) \cdot I(t)$$

Luego, sea $\Lambda = \frac{2\sigma\beta N}{\mu} - d$
así,

$$I'(t) \leq \Lambda \cdot I(t)$$

Ahora, para $t_2 > t_1$,

$$I(t_2) < I(t_1) \cdot e^{d(t_2-t_1)}$$

luego,

$$t_2 - t_1 \geq \frac{1}{\Lambda} \ln \left(\frac{I(t_2)}{I(t_1)} \right) \tag{\Psi2}$$

Supongamos que existe $t_3 > 0$ tal que, $\beta SI > \sigma N \quad \forall t \geq t_3$

Luego, para $t \geq t_3$

$$S'(t) = \sigma N - \beta SI - \mu S \leq \sigma N - \sigma N - \mu S \leq -\mu S$$

Así,

$$S'(t) \leq -\mu S$$

luego, la solución $S(t) = C \cdot e^{-\mu t}$ converge uniformemente a **cero** cuando $t \rightarrow +\infty$.

Así, para algún $z_o > 0$, existe $t_4 > r$ tal que $S(t) < z_o \quad \forall t > t_2 + t_3 + t_4$.

En particular, consideraremos el caso de z_o satisfaga

$$\beta \cdot z_o < d$$

luego,

$$I'(t) \leq (A - d) \cdot I \quad \text{con } a < d \quad \text{para } t > t_2 + t_3 + t_4$$

esto implicaría que $I(t)$ convergería a *cero* cuando $t \rightarrow +\infty$. ($\implies \Leftarrow$)

(Pues, $\beta SI > \sigma N \quad \forall t \geq t_2$.)

De aquí, concluimos que para algún número que $I(t)$ no está acotada, luego $\exists m > 0$ tal que $S(t) > m \quad \forall S \geq 0$.

Supongamos, $I(\zeta) > \frac{\beta}{m} \quad \forall \zeta > t_5$, entonces,

$$\beta SI > \beta(m) \left(\frac{\beta}{m} \right) = \beta^2$$

Lo cual generaría una contradicción.

Ahora, definimos lo siguiente,

$$M = \text{máx} \left\{ 2 \frac{\sigma N}{\mu}; \frac{\beta}{m} \cdot e^{\Lambda(T_3+T_4)} \right\}$$

como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) \leq \frac{\sigma N}{\mu}$, luego $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) \leq M$

Del mismo modo para $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t) \leq \frac{\beta}{m} \cdot e^{\Lambda(T_3+T_4)}$

Como $I(t)$ no puede ser acotado por $\left(\frac{\beta}{m} \right)$, debe haber tiempos largos $\bar{t}_2 > \bar{t}_1 > 0$ tal que se satisfaga lo siguiente:

1. $I(\bar{t}_1) = \frac{\beta}{m}$
2. $I(\bar{t}_2) = \frac{\beta}{m} \cdot e^{\Lambda(T_3+T_4)}$
3. $I'(\bar{t}_2) > 0$

Escogemos el caso: $\bar{t}_1 > t_2$, donde t_2 depende de una solución particular.

Ahora aplicamos a $(\Psi 2)$:

$$\bar{t}_2 - \bar{t}_1 \geq \frac{1}{\Lambda} \cdot \frac{\Lambda(T_3 + T_4) \ln(\frac{\beta}{m})}{\ln(\frac{\beta}{m})} = T_3 + T_4$$

luego, $\bar{t}_1 + t_3 + t_4 \leq \bar{t}_2$

pero, $t > t_2 + t_3 + t_4$, $I'(t) < 0$

Para algunos valores de t :

$$\begin{aligned} I'(t) &< \beta z_o \cdot I - d \cdot I < d \cdot I - d \cdot I \\ I'(t) &< d \cdot I - d \cdot I = 0 \end{aligned}$$

Lo cual implicaría, $I'(t) < 0$ $(\implies \Leftarrow)$

Por consiguiente, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t) < M$.

Corolario 3.1: Cuando $\beta \frac{\sigma N}{\mu} - d < 0$, las soluciones de (3.1) con condición inicial positiva satisfacen:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t); I(t)) = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$$

Prueba. Como $\beta \frac{\sigma N}{\mu} - d < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t) = 0$.

Dada la positividad de las soluciones, esto equivale a $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$,

Del mismo modo, $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) \leq \frac{\sigma N}{\mu}$.

Entonces, para $\varepsilon > 0, \exists T > 0$, tal que para $t \geq T$, $S(t) < \frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon$.

Es posible que T se incremente, lo cual podemos asumir lo siguiente

$$\beta S(\zeta) I(\zeta) < \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) I(\zeta) < \varepsilon$$

Ahora, para $\zeta > T$, si $S(t) > \frac{\sigma N}{\mu}$, luego

$$\begin{aligned} S'(t) &= \sigma N - \beta SI - \mu S < \sigma N - \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) - \mu S \\ S'(t) &< (\sigma N - \mu S) - \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) < -\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) < 0 \\ S'(t) &< 0 \end{aligned}$$

Por lo cual, $S(t)$ está decreciendo.

Por otro lado, si $S(t) < \frac{\sigma N}{\mu}$

$$\begin{aligned}
S'(t) &= \sigma N - \beta SI - \mu S > \sigma N - \beta\left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon\right) - \mu S \\
S'(t) &> (\sigma N - \mu S) - \beta\left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon\right) > 0 \\
S'(t) &> 0 \iff (\sigma N - \mu S) > \beta\left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon\right)
\end{aligned}$$

Si se cumple la condición $(\sigma N - \mu S) > \beta\left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon\right)$, se concluiría $S'(t) > 0$.

Por lo cual, $S(t)$ está creciendo para $t > T$.

Por consiguiente, $t > T$, $S(t)$ no cruza a $\frac{\sigma N}{\mu}$, y es monótona.

Más aún, la única posibilidad: $S(t)$ se tiende a $\frac{\sigma N}{\mu}$, cuando $t \rightarrow +\infty$.

3.1.2. Análisis Cualitativo del Modelo Matemático

Realizaremos el análisis cualitativo del Modelo Matemático SI siendo un método que nos permite saber como es su comportamiento a través del tiempo debido que el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias es del tipo No Lineal, por lo cual tendremos que hallar en primer lugar sus puntos críticos para saber cuales son los puntos estacionarios que tiene el Modelo.

Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio lo hallaremos igualando a cero cada ecuaciones del Sistema de Ecuaciones.

$$\begin{cases} \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S &= 0 \\ \beta S \cdot I - (\alpha + \mu)I &= 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Resolviendo el sistema obtenemos dos puntos críticos.

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right) \\
E_2 &= \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{\sigma \beta N - \mu(\alpha + \mu)}{\beta(\alpha + \mu)} \right)
\end{aligned}$$

luego,

$$E_2 = \left(R_I^{-1}; (\tilde{R} - 1) \frac{\mu}{\beta} \right)$$

Donde: $\tilde{R} = R_S \cdot R_I$

Al punto E_1 es llamado como el *punto libre de infección* (donde se llega que no haya infectados) y al punto E_2 es llamado como el *punto endémico* (donde hay una interacción entre susceptibles e infectados fija).

Existencia de los Puntos de Equilibrio

La existencia de los puntos de equilibrio para el Modelo Epidemiológico se debe garantizar su no negatividad debido que se está modelando poblaciones.

- $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0\right)$ (*trivial*)
- $E_2 = \left(R_I^{-1}; (\tilde{R} - 1)\frac{\mu}{\beta}\right)$

La existencia del Punto Libre de Infección E_1 , viene a ser *trivial*. Debido que todas valores son positivos y no nulos. Por otro lado, la existencia del Punto Endémico E_2 , para que esté definido epidemiológicamente deberá satisfacer la siguiente condición $\tilde{R} > 1$.

3.1.3. Linealización del Sistema

Diremos que un punto de equilibrio de una ecuación diferencial es *hiperbólico* si la matriz Jacobiana de las ecuaciones no tiene valores propios con *parte real nula*. El Teorema de Hartmann-Grobman establece que para cada punto de equilibrio hiperbólico de la ecuación diferencial existe una vecindad V del punto y un homeomorfismo definido en V que manda las soluciones de la ecuación diferencial original sobre las de su linealización y las de la ecuación diferencial original tienen el mismo comportamiento cualitativo.

Como el Sistema es No Lineal, por lo cual procederemos a su respectiva linealización para poder analizarlo cualitativamente. Por ende, hallaremos el Jacobiano del Sistema.

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ \beta I & \beta S - (\alpha + \mu) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Teniendo el Jacobiano del Sistema podremos hallar el comportamiento de las soluciones bajo el análisis del punto de equilibrio.

Punto Libre de Infección

El punto libre de infección E_1 , representa cuando en un instante del tiempo ya no hay infectados, solamente hay susceptibles. Analizaremos este punto de equilibrio para saber como es su comportamiento a través del tiempo.

$$J\left(\frac{\sigma N}{\mu}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\mu & -\frac{\sigma \beta N}{\mu} \\ 0 & \frac{\sigma \beta N}{\mu} - (\alpha + \mu) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Luego para saber si el punto de equilibrio puede ser estable o inestable o centro, debemos garantizar que la determinante del Jacobiano sea no nula.

Sea la consideración auxiliar: $R = \sigma \beta N - \mu(\alpha + \mu)$.

$$\begin{aligned} \left| J\left(\frac{\sigma N}{\mu}, 0\right) \right| &= -\sigma \beta N + \mu(\alpha + \mu) > 0 \\ \left| J\left(\frac{\sigma N}{\mu}, 0\right) \right| > 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{\sigma N}{\mu}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha + \mu}\right) < 1 \end{aligned}$$

$$\left| J\left(\frac{\sigma N}{\mu}, 0\right) \right| > 0 \Leftrightarrow R_S \cdot R_I < 1$$

Por consiguiente $\left| J\left(\frac{\sigma N}{\mu}, 0\right) \right|$ es positivo, debido que se ha impuesto que $\tilde{R} < 1$

Ahora que la determinante es positiva, analizamos la traza del Jacobiano

$$\text{traza} \left(J\left(\frac{\sigma N}{\mu}, 0\right) \right) = +\frac{\sigma\beta N}{\mu} - (\alpha + \mu) - \mu$$

Si deseamos que el punto libre de infección sea estable, la traza del Jacobiano debe ser negativa, por lo cual analizaremos bajo que condición se cumple.

$$\text{luego,} \quad \sigma\beta N < \mu(\alpha + \mu) + \mu^2 \Leftrightarrow \sigma\beta N - \mu(\alpha + \mu) < \mu^2$$

$$\therefore \quad \text{traza} \left(J\left(\frac{\sigma N}{\mu}, 0\right) \right) < 0 \Leftrightarrow R_S \cdot R_I - 1 < \frac{\mu}{\alpha + \mu}$$

Por consiguiente, las condiciones para que el punto libre de infección, $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0\right)$ sea estable localmente se tiene que cumplir las siguientes condiciones.

- $\tilde{R} < 1$
- $\tilde{R} < \frac{\mu}{\alpha + \mu} + 1$

Punto Endémico

El punto Endémico E_2 , representa cuando hay interacción entre los susceptibles e infectados pero esta interacción se mantiene constante, es decir no cambia a través del tiempo. Analizaremos este punto de equilibrio para saber como es su comportamiento a través del tiempo.

$$J\left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{R}{\beta(\alpha + \mu)}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{(\alpha + \mu)} - \mu & -(\alpha + \mu) \\ \frac{R}{(\alpha + \mu)} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Luego para saber si el punto de equilibrio puede ser estable o inestable o centro, debemos garantizar que la determinante del Jacobiano sea no nula.

$$\left| J\left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{R}{\beta(\alpha + \mu)}\right) \right| = R > 0$$

$$\left| J\left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{R}{\beta(\alpha + \mu)}\right) \right| > 0$$

Por consiguiente $\left| J\left(\frac{\sigma N}{\mu}, 0\right) \right|$ es positivo, debido que se ha impuesto que R sea positivo ($R > 0$).

Ahora que la determinante es positiva, analizamos la traza del Jacobiano

$$\text{traza} \left(J\left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{R}{\beta(\alpha + \mu)}\right) \right) = -\left(\frac{R}{(\alpha + \mu)} + \mu\right) < 0$$

Por consiguiente, las condiciones para que el punto endémico, $E_2 = \left(R_I^{-1}; (\tilde{R} - 1)\frac{\mu}{\beta}\right)$ sea estable localmente se tiene que cumplir las siguientes condiciones.

- $R = \sigma\beta N - \mu(\alpha + \mu) > 0$ (estabilidad)

Teorema 3.2 (Estabilidad)

Sea $\tilde{R} = R_S \cdot R_I$, y el Modelo representado en (3.1).

1. Si $\tilde{R} < 1$, el punto Libre de Infección $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0\right)$, es localmente Estable.
2. Si $\tilde{R} > 1$, el punto Endémico $E_2 = \left(R_I^{-1}; (\tilde{R} - 1)\frac{\mu}{\beta}\right)$, es localmente Estable.

Después de haber realizado el análisis de las Soluciones Uniformemente Acotadas del Sistema (3.1) donde se enunció un corolario 3.1, donde se determinaba hacia donde convergía el sistema a largo plazo, luego se realizo el análisis cualitativo donde se determinó los puntos de equilibrio y sus condiciones para que el sistema pueda ser localmente estable en cada punto estacionario. Por lo cual, ahora presentaremos el siguiente Teorema que complementará todo el análisis realizado buscando la situación epidemiológica adecuada donde se llegue que la infección generada por la enfermedad haya desaparecido.

Teorema 3.3 (Soluciones Uniformemente Acotadas y Estabilidad del Punto Libre de Infección)

Si $\tilde{R} < 1$, entonces el Modelo (3.1) en el Punto Libre de Infección $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0\right)$, es asintóticamente Estable, y además posee Soluciones Uniformemente Acotadas que convergerán al Estado Estacionario del Punto Libre de Infección.

Número Básico de Reproducción

El número Básico de Reproducción Efectiva \mathfrak{R}_e , es sin duda la cantidad más importante en la epidemiología de enfermedades infecciosas. Es una de las cantidades estimadas con mayor urgencia para enfermedades infecciosas emergentes en situaciones de brote, y su valor proporciona una visión en el diseño de las intervenciones de control de infecciones establecidas. Desde un punto de vista teórico \mathfrak{R}_e juega un papel vital en el análisis de modelos de las enfermedades infecciosas. El Número Básico de Reproducción Efectiva, \mathfrak{R}_e , se define como el número esperado de infecciones secundarias producidas por un caso índice en una población completamente susceptible. Este número es una medida del potencial de propagación de la enfermedad dentro de una población epidemiológica. Si $\mathfrak{R}_e < 1$, entonces algunos individuos infectados introducidos en una población completamente susceptible será, en promedio, la cual interactuarán entre sí pero la enfermedad no se propagará. Si, por el contrario, $\mathfrak{R}_e > 1$, entonces el número de individuos infectados aumentará con cada generación y la enfermedad se extenderá. [29,30].

Se ha demostrado que \mathfrak{R}_e se caracteriza matemáticamente con respecto a la transmisión de la infección como un "proceso demográfico", donde la producción de descendencia no es visto como dar a luz en el sentido demográfico, pero como causantes de una nueva infección a través de la transmisión (que se referirá a esto como un "nacimiento epidemiológico"). En una forma natural esto conduce a la visualización del proceso de infección en términos de "generaciones de individuos infectados" consecutivos, en completa analogía a las generaciones demográficos. Teniendo en cuenta que el número de reproducción básica es un parámetro de umbral para la invasión de un organismo de la enfermedad en una población completamente susceptible; una vez que la enfermedad ha comenzado a extenderse, condiciones que favorecen la propagación va a cambiar y \mathfrak{R}_e ya no puede ser una buena medida de la transmisión de enfermedades. Sin embargo, actualmente en muchos de

los modelos de transmisión de enfermedades, la prevalencia máxima de huéspedes infectados y el tamaño final de la epidemia está aumentando las funciones de \mathfrak{R}_o , por lo que es una medida útil de para conocer la posible propagación de la enfermedad. [31].

Por lo cual hallaremos el respectivo Número Básico de Reproducción Efectiva de nuestro modelo.

$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S \quad S(0) = S_o \geq 0 \\ I' = \beta S \cdot I - (\alpha + \mu)I \quad I(0) = I_o \geq 0 \\ \sigma, \beta, \alpha, \mu > 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

De la ecuación (3.6), analizaremos la parte de la variación de la población de los Infectados

$$I' = \beta S \cdot I - (\alpha + \mu)I \quad (3.7)$$

Matemáticamente sabemos que una función es decreciente, si su derivada es negativa, es decir, $I' < 0$. Para lo cual, debería cumplirse: $\beta S \cdot I - (\alpha + \mu)I < 0$.

Epidemiológicamente, significaría el decrecimiento de la población de los Infectados a lo largo del tiempo.

$$I' = I \cdot (\beta S - (\alpha + \mu))$$

Como I representa una población epidemiológica, tiene que ser necesariamente no negativo, por lo cual quien determinará el signo será la expresión: $\beta S - (\alpha + \mu)$.

$$\text{Luego, } \beta S - (\alpha + \mu) < 0 \iff \beta S < (\alpha + \mu). \iff \frac{\beta}{\alpha + \mu} \cdot S < 1$$

Por consiguiente, la expresión $\frac{\beta}{\alpha + \mu} \cdot S$ debe ser negativa para conseguir el decaimiento de los Infectados, a esta expresión llamamos *Número Básico de Reproducción Efectiva*.

$$\mathfrak{R}_e = \frac{\beta}{\alpha + \mu} \cdot S^* \quad (3.8)$$

Donde \mathfrak{R}_e determinará cuando la población de los Infectados crece o decrece para poder analizar su desarrollo a través del tiempo. Es decir, si $\mathfrak{R}_e < 1$, la población de los Infectados decrecerá con el tiempo por mientras que si $\mathfrak{R}_e > 1$, la población de los Infectados crecerá con el tiempo.

3.2. Modelo SEI Básico con Dinámica Vital en E.D.O.

Se ha considerado el Modelo Matemático SI con Dinámica Vital donde interactúan las poblaciones epidemiológicas: Susceptibles e Infectados. Donde al contacto de un Susceptible con un Infectado pasa instantáneamente a la población de los Infectados, pero esta consideración no siempre se da en las Enfermedades de Transmisión Sexual, donde antes de pasar a la población de los Infectados pasa por un periodo latente de la enfermedad, o también llamado un periodo de incubación. Esta consideración puede ser estudiada por un Modelo Matemático Epidemiológico SEI (Susceptible - Expuesto - Infectado).

Donde la consideración del Modelo anterior se intruducirá una nueva población Epidemiológica que son los Expuestos, donde recibirá a los individuos susceptibles que han tenido contacto con los

infectados, y después de un tiempo latente pasarán a la población de los infectados mediante una tasa de transición de la enfermedad (ρ).

Añadiendo la consideración mencionada sobre la población de los Expuestos (E), perturbaremos el modelo anterior con sus consideraciones iniciales al presentar el modelo matemático **SI**.

$$\left\{ \begin{array}{ll} S' = \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S & S(0) = S_o \geq 0 \\ E' = \beta S \cdot I - \rho E & I(0) = I_o \geq 0 \\ I' = \rho E - (\alpha + \mu)I & E(0) = E_o \geq 0 \end{array} \right. \quad (\otimes)$$

$$\sigma, \beta, \rho, \alpha, \mu > 0$$

Este Modelo representado en (\otimes), está desarrollado mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, las cuales se pueden estudiar muy bien la dinámica de transmisión de la Enfermedad de Transmisión Sexual considerando un periodo latente de la enfermedad.

En nuestro trabajo expresaremos el modelo **SEI** en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, como un modelo **SI** en las Ecuaciones Diferenciales con Retardo. Donde la población de los Expuestos (E) será considerado en el nuevo modelo como un coeficiente de Retardo introducido en la dinámica de transmisión de la población de los Infectados. Lo cual que inicialmente comienza en un sistema de tres ecuaciones en E.D.O. pasaría a ser un sistema de dos ecuaciones en E.D.R.

Donde del mismo modo, el sistema posee sus puntos críticos en su estado estacionario. Las cuales son el Punto Libre de Infección (E_1), y el Punto Endémico (E_2).

$$E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0; 0 \right)$$

$$E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{R}{\beta \rho (\alpha + \mu)}; \frac{\widehat{R}}{\beta (\alpha + \mu)} \right)$$

Donde:

- $R = \sigma \beta N - \mu(\alpha + \mu)$
- $\widehat{R} = \sigma \rho N - \mu(\alpha + \mu)$

3.3. Modelo SI Básico con Dinámica Vital en E.D.R.

El modelo Matemático Epidemiológico Básico de Susceptibles e Infectados consiste en la interacción de la población susceptible con la población de los infectados ocasionando una epidemia ante una enfermedad infecciosa, en nuestro caso serán las Enfermedades de Transmisión Sexual y de una manera particular, el VIH/SIDA. En el presente Modelo se considera únicamente las Poblaciones Epidemiológicas.

El presente modelo que se analizará posee una perturbación del modelo anterior, por lo cual, de una Ecuación Diferencial Ordinaria se pasará a una Ecuación Diferencial con Retardo. La perturbación que se desarrollará será la introducción del Retardo en las Poblaciones Epidemiológicas en la razón de cambio de una de las Poblaciones, en nuestro caso el de los Infectados.

Como en el modelo anterior **SI** se considera el ingreso constante de individuos no susceptibles (población que no ha iniciado su vida sexual activa) a la población susceptible. Se considera la

salida de la población susceptible mediante la tasa de mortalidad natural (cualquier motivo menos la epidemia que se está modelando) y a la vez también se considera la salida de la población de los infectados mediante la tasa de mortalidad tanto por la epidemia como la natural. Luego se presentó el modelo **SEI** como la consideración de la exposición de la enfermedad en su periodo latente antes de pasar a la población de los Infectados.

En el Modelo anterior se considera la tasa de contagio que sufren los susceptibles por los infectados se ve la disminución de la población susceptible lo cual esa cantidad es adquirida por la población de los infectados, en el presente modelo también se considerará la misma concepción de la interacción entre los Susceptibles con los Infectados. Pero se tendrá una perspectiva diferente entre la interpretación epidemiológica con el modelamiento mediante las E.D.O. y las E.D.R.

Como se había mencionado, la interacción entre los Susceptibles con los Infectados se modela mediante el producto de ambas poblaciones, interpretándose epidemiológicamente la disminución de la población de Susceptibles relacionado con la tasa de contagio, y el ingreso a la población de Infectados de manera inmediata. Esta consideración es muy bien modelada por las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, pero en muchas epidemias no ocurre esto, el individuo pasa un tiempo para que se encuentre infectado, lo que se llama período latente. Bajo esta consideración, el Retardo nos permite considerar el tiempo en que se encuentra un individuo en la transición para que sea considerado infectado. Por lo cual, se introducirá el Retardo en la población Infectada y en la población susceptible cuando haya una interacción entre ambas. [35].

El presente Modelo será considerado sin ninguna estrategia de control para intentar disminuir la tasa de infección, es decir, el contacto entre Susceptibles e Infectados se dará libremente. Más adelante, consideraremos una coeficiente que medirá el nivel de Protección que se realiza para evitar el contagio de la enfermedad con una perturbación en este modelo, lo cual permitirá una mejor perspectiva de la realidad del problema, y como se realiza medidas de prevención, control y acción ante la Problemática que se está modelando matemáticamente en el área de la Epidemiología.

$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S \\ I' = \beta S(t - \tau) \cdot I(t - \tau) - (\alpha + \mu)I \\ \text{con Condiciones Iniciales :} \\ S_o(t) = S_h^o \quad , \quad I_o(t) = \varphi_o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \tau > 0 \\ 0 \leq \sigma, \beta, \alpha, \mu < 1 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Mediante el **Teorema 2.6** y el **Teorema 2.7** se puede garantizar la Existencia y la Unicidad de la Solución de una Ecuación Diferencial con Retardo. Del mismo modo, se puede extender para un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo mediante la **Observación 2.1**.

De esta manera, obtenemos la Existencia y Unicidad del Sistema (3.9) considerándolo de la siguiente manera.

$$\text{Sea } t \in \mathbb{R} \text{ , } x = (S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2 \text{ , } y = (S(t - \tau), I(t - \tau)) \in \mathbb{R}_+^2$$

$$x'(t) = F(t, x, y)$$

Donde se desprende

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S \\ F_2 &= \beta S(t - \tau), I(t - \tau) - (\alpha + \mu)I \end{aligned}$$

De aquí, que F_1, F_2 son continuas dentro de su Dominio positivo, y también $F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Es decir, las derivadas de F_1, F_2 con respecto a x son continuas.

- $\frac{\partial F_1}{\partial S} = -\beta \cdot I - \mu$ *continua*
- $\frac{\partial F_1}{\partial I} = -\beta \cdot S - (\alpha + \mu)$ *continua*
- $\frac{\partial F_2}{\partial S} = 0$ *continua*
- $\frac{\partial F_2}{\partial I} = -(\alpha + \mu)$ *continua*

y además, $S_o(t) : [-\tau, 0] \longrightarrow [0, +\infty)$; $I_o(t) : [-\tau, 0] \longrightarrow [0, +\infty)$ es continua.

Por lo cual, existe $\varpi > s$ y hay una única solución del Sistema (3.9) en $[s - \tau, \varpi]$.

Positividad de la Soluciones

Después de haber garantizado la Existencia y la Unicidad del Sistema (3.9), analizaremos la Positividad de las Soluciones mediante el **Teorema 2.8**.

Como $i, t, x = (S, I), y \in \mathbb{R}_+^n$ (consideraciones del Problema Epidemiológico)

- Para $S = 0 : F_1(t, 0, I, y) = 0$
- Para $I = 0 : F_2(t, S, 0, y) = \beta \cdot y \geq 0$

Luego, la condición inicial $S_o(t), I_o(t)$ satisface $S_o(t), I_o(t) \geq 0$, luego la Solución correspondiente del Sistema (3.9) satisface $S(t), I(t) \geq 0$ para todo $t \geq s$ donde está definido el Sistema.

Soluciones Uniformemente Acotadas

Teorema 3.4 Existe $M > 0$ tal que para alguna solución $(S(t), I(t))$ de la ecuación (3.9) con una condición inicial positiva,

$$\max \left\{ \limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t); \limsup_{t \rightarrow +\infty} I(t); \right\} \leq M$$

Como hemos considerado $S(t) \geq 0, \forall t \geq 0$

Tenemos la primera ecuación:

$$S' = \sigma N - \beta SI - \mu S \leq \sigma N - \mu S$$

Las soluciones positivas con las condiciones iniciales positivas están dadas debajo de la solución de la siguiente ecuación:

$$S' = \sigma N - \mu S$$

cual solución analítica es:

$$S(t) = \frac{\sigma N}{\mu} + C \cdot e^{-\mu t}$$

Por consiguiente, todas las soluciones de $S(t)$ tienden a $\frac{\sigma N}{\mu}$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Luego, podemos concluir que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty^+} \sup S(t) = \frac{\sigma N}{\mu}$$

De la segunda ecuación:

$$I' = \beta S(t - \tau)I(t - \tau) - (\alpha + \mu)I$$

Consideraremos lo siguiente: $\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} \right) - d < 0$ donde : $d = \alpha + \mu$

Consideramos $\varepsilon > 0$ tal que $\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) - d < 0$

como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) \leq \frac{\sigma N}{\mu}$, luego existe $T_1 > 0$ tal que, $S(t) < \frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \quad \forall t > T_1 - r$

Este T_1 dependerá de alguna solución particular (i.e. condición inicial), pero $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t)$ no dependerá de T_1 . Para $t > T_1$, tenemos lo siguiente:

$$I' = \beta S(t - \tau)I(t - \tau) - dI \leq \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) I(t - r) - dI$$

luego,

$$I' \leq A \cdot I(t - \tau) - dI$$

Donde : $A = \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right)$

Ahora definiremos lo siguiente: $\beta \frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon < d$

Por el **Lema 2.9**, se puede ver que las soluciones de:

$$Z'(t) = A \cdot Z(t - \tau) - d \cdot Z(t)$$

tienden a **cero** cuando $t \rightarrow +\infty$.

Y, ahora por el Lema 2.10, diremos que $I(t)$ está acotada por $Z(t)$
Luego,

$$\lim_{t \rightarrow \infty^+} \sup I(t) = 0$$

Ahora consideraremos el caso: $\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} \right) \geq d$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty^+} \sup S(t) = \frac{\sigma N}{\mu}$, para alguna solución particular, existe $T_2 > 0$ tal que,

$$S(t) < 2 \left(\frac{\sigma N}{\mu} \right) \quad \forall t \geq T_2.$$

Luego,

$$I'(t) \leq 2\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} \right) \cdot I(t - \tau) - d \cdot I(t) \quad (\Psi 1)$$

ahora vemos la desigualdad

$$I'(t) \geq -d \cdot I(t)$$

Luego, es fácil ver la conclusión que $t_2 > t_1$,

$$I(t_2) \geq I(t_1) \cdot e^{d(t_2 - t_1)}$$

En particular, sea $t_2 = t > \tau$, $t_1 = t - \tau$

luego, obtenemos:

$$I(t - r) \geq I(t) e^{dr}$$

así, esta ecuación lo introducimos en ($\Psi 1$)

$$I'(t) \leq \left(\frac{2\sigma\beta N}{\mu} \cdot e^{dr} - d \right) \cdot I(t)$$

Luego, sea $\Lambda = \frac{2\sigma\beta N}{\mu} \cdot e^{dr} - d$
así,

$$I'(t) \leq \Lambda \cdot I(t)$$

Ahora, para $t_2 > t_1$,

$$I(t_2) < I(t_1) \cdot e^{d(t_2 - t_1)}$$

luego,

$$t_2 - t_1 \geq \frac{1}{\Lambda} \ln \left(\frac{I(t_2)}{I(t_1)} \right) \quad (\Psi 2)$$

Supongamos que existe $T_3 > 0$ tal que, $\beta SI > \sigma N \quad \forall t \geq T_3$

Luego, para $t \geq T_3$

$$S'(t) = \sigma N - \beta SI - \mu S \leq \sigma N - \sigma N - \mu S \leq -\mu S$$

Así,

$$S'(t) \leq -\mu S$$

luego, la solución $S(t) = C \cdot e^{-\mu t}$ converge uniformemente a **cero** cuando $t \rightarrow +\infty$.

Así, para algún $z_o > 0$, existe $T_4 > r$ tal que $S(t) < z_o \quad \forall t > T_2 + T_3 + T_4$.

En particular, consideraremos el caso de z_o satisfaga

$$\beta \cdot z_o < d \cdot e^{-dr} < d$$

luego,

$$I'(t) \leq A \cdot I(t - \tau) - d \cdot I(t) \text{ con } a < d \text{ para } t > T_2 + T_3 + T_4$$

esto implicaría que $I(t)$ convergería a *cero* cuando $t \rightarrow +\infty$. ($\implies \Leftarrow$)

(Pues, $\beta SI > \sigma N \quad \forall t \geq T_2$.)

De aquí, concluimos que para algún número que $I(t)$ no está acotada, luego $\exists m > 0$ tal que $S(t) > m \quad \forall S \geq 0$.

Supongamos, $I(\zeta) > \frac{\beta}{m} \quad \forall \zeta > T_5$, entonces,

$$\beta SI > \beta(m) \left(\frac{\beta}{m} \right) = \beta^2$$

Lo cual generaría una contradicción.

Ahora, definimos lo siguiente,

$$M = \text{máx} \left\{ 2 \frac{\sigma N}{\mu}; \frac{\beta}{m} \cdot e^{\Lambda(T_3+T_4)} \right\}$$

como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) \leq \frac{\sigma N}{\mu}$, luego $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) \leq M$

Del mismo modo para $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t) \leq \frac{\beta}{m} \cdot e^{\Lambda(T_3+T_4)}$

Como $I(t)$ no puede ser acotado por $\left(\frac{\beta}{m} \right)$, debe haber tiempos largos $\bar{t}_2 > \bar{t}_1 > 0$ tal que se satisfaga lo siguiente:

1. $I(\bar{t}_1) = \frac{\beta}{m}$
2. $I(\bar{t}_2) = \frac{\beta}{m} \cdot e^{\Lambda(T_3+T_4)}$
3. $I'(\bar{t}_2) > 0$

Escogemos el caso: $\bar{t}_1 > T_2$, donde T_2 depende de una solución particular.

Ahora aplicamos a $(\Psi 2)$:

$$\bar{t}_2 - \bar{t}_1 \geq \frac{1}{\Lambda} \cdot \frac{\Lambda(T_3 + T_4) \ln\left(\frac{\beta}{m}\right)}{\ln\left(\frac{\beta}{m}\right)} = T_3 + T_4$$

luego, $\bar{t}_1 + T_3 + T_4 \leq \bar{t}_2$

pero, $t > T_2 + T_3 + T_4, \quad I'(t) < 0$

Para algunos valores de t :

$$\begin{aligned} I'(t) &< \beta z_o \cdot I(t - \tau) - d \cdot I(t) < d \cdot e^{-d\tau} \cdot I(t - \tau) - d \cdot I(t) \\ I'(t) &< d \cdot e^{-d\tau} \cdot e^{-d\tau} \cdot I(t) - d \cdot I(t) < d \cdot I(t) - d \cdot I(t) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual implicaría, $I'(t) < 0$ ($\implies \Leftarrow$)

Por consiguiente, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t) < M$.

Corolario 3.2 Cuando $\beta \frac{\sigma N}{\mu} - d < 0$, las soluciones de (3.9) con condición inicial positiva satisface:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t); I(t)) = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$$

Prueba. Como $\beta \frac{\sigma N}{\mu} - d < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t) = 0$.

Dada la positividad de las soluciones, esto equivale a $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$,

Del mismo modo, $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) \leq \frac{\sigma N}{\mu}$.

Entonces, para $\varepsilon > 0$, $\exists T > 0$, tal que para $t \geq T$, $S(t) < \frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon$.

Es posible que T se incremente, lo cual podemos asumir lo siguiente

$$\beta S(\zeta) I(\zeta) < \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) I(\zeta) < \varepsilon$$

Ahora, para $\zeta > T$, si $S(t) > \frac{\sigma N}{\mu}$, luego

$$\begin{aligned} S'(t) &= \sigma N - \beta SI - \mu S < \sigma N - \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) - \mu S \\ S'(t) &< (\sigma N - \mu S) - \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) < -\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) < 0 \\ S'(t) &< 0 \end{aligned}$$

Por lo cual, $S(t)$ está decreciendo.

Por otro lado, si $S(t) < \frac{\sigma N}{\mu}$

$$\begin{aligned} S'(t) &= \sigma N - \beta SI - \mu S > \sigma N - \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) - \mu S \\ S'(t) &> (\sigma N - \mu S) - \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) > 0 \\ S'(t) &> 0 \iff (\sigma N - \mu S) > \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) \end{aligned}$$

Si se cumple la condición $(\sigma N - \mu S) > \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right)$, se concluiría $S'(t) > 0$.

Por lo cual, $S(t)$ está creciendo para $t > T$.

Por consiguiente, $t > T$, $S(t)$ no cruza a $\frac{\sigma N}{\mu}$, y es monótona.

Más aún, la única posibilidad: $S(t)$ se tiende a $\frac{\sigma N}{\mu}$, cuando $t \rightarrow +\infty$.

3.3.1. Análisis Cualitativo del Modelo Matemático

Realizaremos el análisis cualitativo del Modelo Matemático SI siendo un método que nos permite saber como es su comportamiento a través del tiempo debido que el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias es del tipo No Lineal, por lo cual tendremos que hallar en primer lugar sus puntos críticos para saber cuales son los puntos estacionarios que tiene el Modelo.

Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio lo hallaremos igualando a cero cada ecuaciones del Sistema de Ecuaciones.

$$\begin{cases} \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S & = 0 \\ \beta S(t-r) \cdot I(t-r) - (\alpha + \mu)I & = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Un detalle importante para hallar los puntos críticos de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo, es considerar que cuando se iguala a cero cada ecuación del sistema es porque buscamos los puntos estacionarios que no cambian a través del tiempo. La misma noción que en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias se realiza en las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, por lo cual el término que contiene el retardo se consideraría como una variable que no contenga el retardo, solamente para hallar los puntos críticos. Por lo cual el Sistema quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S & = 0 \\ \beta S \cdot I - (\alpha + \mu)I & = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Resolviendo el sistema obtenemos dos puntos críticos:

$$E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$$

$$E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{\sigma \beta N - \mu(\alpha + \mu)}{\beta(\alpha + \mu)} \right)$$

luego,

$$E_2 = \left(R_I^{-1}; (\tilde{R} - 1) \frac{\mu}{\beta} \right)$$

Donde: $R = \sigma \beta N - \mu(\alpha + \mu)$ y $\tilde{R} = R_S \cdot R_I$

Al punto E_1 es llamado como el *punto libre de infección (donde se llega que no haya infectados)* y al punto E_2 es llamado como el *punto endémico (donde hay una interacción entre susceptibles e infectados fija)*.

Existencia de los Puntos de Equilibrio

La existencia de los puntos de equilibrio para el Modelo Epidemiológico se debe garantizar su no negatividad debido que se está modelando poblaciones.

- $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$ (*trivial*)
- $E_2 = \left(R_I^{-1}; (\tilde{R} - 1) \frac{\mu}{\beta} \right)$

luego, se tendrá que imponer la siguiente consideración:

$$\tilde{R} = R_S \cdot R_I > 1 \quad (3.12)$$

3.3.2. Linelización del Sistema

Del mismo modo que se hizo en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con respecto al Sistema No Lineal, mediante una linealización del Sistema. Por lo cual hallaremos la matriz Jacobiana con respecto a las variables sin Retardo, y una matriz Jacobiana con respecto a las variables con Retardo. [10,35,42,43].

Por lo cual la Matriz Jacobiana sin Retardo sería el siguiente:

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ 0 & -(\alpha + \mu) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Por lo cual la Matriz Jacobiana con Retardo sería el siguiente:

$$J_\tau(S, I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta I(t - r) & \beta S(t - r) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Vemos que el determinante de J_τ es nula, este detalle lo consideraremos más adelante.

$$|J_\tau| = 0 \quad (3.15)$$

Teniendo las matrices Jacobianas, formaremos el polinomio característico que tiene la forma:

$$p(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id - J - J_\tau \cdot e^{-\lambda\tau}) = 0$$

con lo cual, el polinomio característico a nuestro modelo sería

$$p(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ 0 & -(\alpha + \mu) \end{bmatrix} - e^{-\lambda\tau} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta I(t - r) & \beta S(t - \tau) \end{bmatrix} \right|$$

luego,

$$p(\lambda) = \left| \begin{array}{cc} \lambda + \beta I + \mu & \beta S \\ \beta I(t - \tau) \cdot e^{-\lambda\tau} & \lambda + (\alpha + \mu) - \beta S(t - \tau) \cdot e^{-\lambda\tau} \end{array} \right| = 0 \quad (3.16)$$

así, el polinomio característico

$$p(\lambda) = (\lambda + \beta I + \mu) (\lambda + (\alpha + \mu) - \beta S(t - \tau) \cdot e^{-\lambda\tau}) - \beta S (\beta I(t - \tau) \cdot e^{-\lambda\tau}) \quad (3.17)$$

Punto Libre de Infección

El punto libre de infección $E_1 = (\frac{\sigma N}{\mu}, 0)$ representa cuando en un instante del tiempo ya no hay infectados, solamente hay susceptibles. Analizaremos este punto de equilibrio para saber como es su comportamiento a través del tiempo.

$$J\left(\frac{\sigma N}{\mu}, 0\right) = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \frac{\beta \sigma N}{\mu} \\ 0 & \lambda + (\alpha + \mu) - \frac{\beta \sigma N}{\mu} \cdot e^{-\lambda\tau} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

luego, el polinomio característico para E_1

$$p(\lambda) = (\lambda + \mu) \left(\lambda + (\alpha + \mu) - \frac{\beta \sigma N}{\mu} \cdot e^{-\lambda\tau} \right)$$

así, se puede deducir

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda + (\alpha + \mu) - \frac{\beta\sigma N}{\mu} \cdot e^{-\lambda\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

por consiguiente se obtiene los dos autovalores del polinomio característico

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

ahora, el siguiente autovalor debería ser negativo o tener parte real negativa para poder concluir que es estable el punto libre de infección.

Por lo cual, utilizaremos el **Teorema 2.12** del capítulo 2, que nos permite analizar en este caso.

Tenemos el segundo término del polinomio característico (3.19)

$$\lambda = -(\alpha + \mu) + \frac{\beta\sigma N}{\mu} \cdot e^{-\lambda\tau} \quad (3.20)$$

Dandole forma a los términos de (3.20), tendríamos

$$\begin{aligned} A &= -(\alpha + \mu) \\ B &= \frac{\beta\sigma N}{\mu} \end{aligned}$$

Satisfaciendo las condiciones del **Teorema 2.12**, utilizaremos los resultados del Teorema para poder imponer restricciones de tal manera que obtengamos la estabilidad local del punto de Equilibrio Libre de Infección.

1. Condición: $A + B < 0$

$$\begin{aligned} \frac{\beta\sigma N}{\mu} - (\alpha + \mu) &< 0 \\ \frac{\beta\sigma N}{\mu} &< (\alpha + \mu) \end{aligned}$$

2. Condición: $B \geq A$

$$-(\alpha + \mu) \leq \frac{\beta\sigma N}{\mu}$$

Por consiguiente, podemos concluir sobre el punto libre de infección, $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}, 0\right)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Bajo la siguiente condición

$$\tilde{R} = R_S \cdot R_I < 1 \quad (3.21)$$

Punto Endémico

El punto Endémico $E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{\sigma\beta N - \mu(\alpha + \mu)}{\beta(\alpha + \mu)}\right)$, representa cuando hay interacción entre los susceptibles e infectados pero esta interacción se mantiene constante, es decir no cambia a través del tiempo. Analizaremos este punto de equilibrio para saber como es su comportamiento a través del tiempo.

Para un mejor desarrollo del análisis, haremos un cambio de variables auxiliares con respecto al punto endémico.

- $R = \sigma\beta N - \mu(\alpha + \mu) > 0$

Luego, el punto endémico sería $E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{R}{\beta(\alpha + \mu)} \right)$

Ahora, introducimos el punto E_2 al polinomio característico (3.16)

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{R}{(\alpha + \mu)} + \mu & \alpha + \mu \\ -\frac{R}{(\alpha + \mu)} \cdot e^{-\lambda\tau} & \lambda + (\alpha + \mu) - (\alpha + \mu) \cdot e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

$$\bar{p}(\lambda) = \lambda^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha + \mu)} \right) \lambda + (\mu(\alpha + \mu) + R)$$

$$\bar{q}(\lambda) = -(\alpha + \mu)\lambda - \mu(\alpha + \mu)$$

así, el polinomio característico tiene la forma

$$p(\lambda) = \bar{p}(\lambda) - \bar{q}(\lambda) \cdot e^{-\lambda\tau} \quad (3.23)$$

Teniendo la consideración de $|J_\tau| = 0$. Esto nos ayudará para el análisis de la estabilidad local del punto endémico debido que su forma no es similar que en el punto libre de infección. Por lo cual ahora utilizaremos los resultados de la **Proposición 2.4** que lo denominamos Estabilidad Absoluta. [10].

1. Primero verificaremos: $\bar{p}(\lambda) \neq 0$

$$\bar{p}(\lambda) = \lambda^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha + \mu)} \right) \lambda + (\mu(\alpha + \mu) + R)$$

Bastará que el término independiente no sea cero para garantizar que $\bar{p}(\lambda)$ sea no nulo.

$$R + \mu(\alpha + \mu) \neq 0$$

Ahora, analizaremos la determinante del polinomio

$$\Delta = \left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha + \mu)} \right)^2 - 4(\mu(\alpha + \mu) + R)$$

luego, las raíces serían:

$$\bar{\lambda} = \frac{-\left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha + \mu)} \right) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Ahora $\bar{\lambda}$ deben ser no negativos. Por lo cual analizaremos la discriminante en todos sus casos.

■ Para la discriminante Positiva: $\Delta > 0$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{(\alpha + 2\mu)}{2} \\ \bar{\lambda}_2 &= -\frac{(\alpha + 2\mu + \sqrt{\Delta})}{2} \end{aligned}$$

Por lo cual, $\bar{\lambda}_2 < 0$, y $\bar{\lambda}_1 < 0 \Leftrightarrow \Delta < \left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha + \mu)} \right)$.

- Para la discriminante Nula: $\Delta = 0$

$$\bar{\lambda}_{1,2} = -\frac{\left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha+\mu)}\right)}{2}$$

Donde $\bar{\lambda}_{1,2}$ posee signo negativo.

- Para la discriminante Negativa: $\Delta < 0$

$$\bar{\lambda} = \frac{-\left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha+\mu)}\right)}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \cdot i$$

Donde $\bar{\lambda}_{1,2}$ tienen parte real negativa.

Por lo cual, utilizaremos el criterio de Routh-Hurwitz para poder satisfacer esta condición, para poder lograr justificar esta consideración importante de la proposición. Usando el criterio de Routh-Hurwitz para la Estabilidad de Sistemas. [47,48].

Si $\bar{p}(\lambda) = 0$, donde $\bar{p}(\lambda) = \lambda^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha+\mu)}\right)\lambda + (\mu(\alpha + \mu) + R)$.

1. De aquí, se puede ver, $\left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha+\mu)}\right) > 0$, $(\mu(\alpha + \mu) + R) > 0$.

Por lo cual, se tiene $\Re(\lambda) < 0$. Por consiguiente, con el criterio de Routh-Hurwitz se puede satisfacer la primera condición de la Proposición 2.4.

2. Ahora realizaremos la condición de $|\bar{q}(iy)| < |\bar{p}(iy)|$; $0 \leq y < +\infty$

$$a) \quad |\bar{q}(iy)| = |-(\alpha + \mu)y \cdot i - \mu(\alpha + \mu)|$$

$$|\bar{q}(iy)| = \sqrt{(\mu(\alpha + \mu))^2 + ((\alpha + \mu)y)^2}$$

$$b) \quad |\bar{p}(iy)| = |-y^2 + (\alpha + 2\mu)y \cdot i + (\mu(\alpha + \mu) + R)|$$

$$|\bar{p}(iy)| = \sqrt{((\mu(\alpha + \mu) + R) - y^2)^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha+\mu)}\right)^2 y^2}$$

Para lo cual debemos analizar las expresiones de tal manera que se garantice la condición.

$$(\mu(\alpha + \mu))^2 + ((\alpha + \mu)y)^2 < ((\mu(\alpha + \mu) + R) - y^2)^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha + \mu)}\right)^2 y^2 \quad (3.24)$$

3. La siguiente condición debe satisfacer:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \left| \frac{\bar{q}(\lambda)}{\bar{p}(\lambda)} \right| = 0$$

En efecto, se cumple esta condición. Debido que el grado de $\bar{q}(\lambda)$ es 1, y de $\bar{p}(\lambda)$ es 2. Esto indica que $\bar{p}(\lambda)$ al tener mayor grado, se incrementa con mayor rapidez que $\bar{q}(\lambda)$. Por lo cual en el limite al infinito, la expresión tiende al cero.

Por consiguiente, al cumplirse estas tres condiciones bajo las restricciones mostradas se obtendrá la estabilidad local absoluta que el **Proposición 2.4** indica. Esto quiere decir, que para cualquier

raíz λ y para todo $\tau > 0$ se obtiene la estabilidad absoluta para cualquier valor del retardo discreto. Epidemiológicamente, el Punto Endémico $E_2 = \left(R_I^{-1}; (\tilde{R} - 1) \frac{\mu}{\beta} \right)$ es asintóticamente estable.

Teorema 3.5 (Estabilidad)

Sea $R = \sigma\beta N - \mu(\alpha + \mu) > 0$, y $\tilde{R} = R_S \cdot R_I$, y el Modelo representado en (3.9).

1. Si $\tilde{R} < 1$, el punto Libre de Infección $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$, es asintóticamente Estable.
2. Si $(\mu(\alpha + \mu))^2 + ((\alpha + \mu)y)^2 < ((\mu(\alpha + \mu) + R) - y^2)^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{(\alpha + \mu)} \right)^2 y^2$,
donde $0 \leq y < +\infty$, el punto Endémico $E_2 = \left(R_I^{-1}; (\tilde{R} - 1) \frac{\mu}{\beta} \right)$, es asintóticamente Estable.

Teorema 3.6 (Soluciones Uniformemente Acotadas y Estabilidad del Punto Libre de Infección)

Si $\tilde{R} < 1$, entonces el Modelo (3.9) en el Punto Libre de Infección $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$, es asintóticamente Estable, y además posee Soluciones Uniformemente Acotadas que convergerán al Estado Estacionario del Punto Libre de Infección.

3.4. Modelo SI Básico con Dinámica Vital en E.D.R. con Estrategia de Control

Después de haber analizado el Modelo Matemático con Dinámica Vital (sin Estrategia de Control) mediante las Ecuaciones Diferenciales con Retardo garantizando que el Sistema (3.9) posee Solución (Existencia y Unicidad), además que existe una Solución Uniformemente Acotada (Solución Particular) con una condición inicial positiva, y que mediante el análisis cualitativo del Sistema nos ha permitido conocer cuando el comportamiento de las soluciones podría ser Estable.

Las condiciones del anterior modelo serán las mismas, con la diferencia de la perturbación en la interacción de los Susceptibles e Infectados mediante la tasa de contagio con la introducción del coeficiente de la Estrategia de Control, que matemáticamente será representado con una función exponencial decreciente a razón de una proporción de control $\varpi\tau$, siendo τ el retardo, el motivo principal de usar esta función es que a través del tiempo causará decremento en la tasa de contagio. Si el presente modelo se considera $\varpi = 0$, el modelo se perturba en el segundo modelo desarrollado.

$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \sigma N - \beta \cdot S \cdot I - \mu S \\ I' = \beta \cdot e^{-\varpi\tau} \cdot S(t - \tau) \cdot I(t - \tau) - (\alpha + \mu)I \\ \text{con Condiciones Iniciales :} \\ S_o(t) = S_h^o, \quad I_o(t) = \varphi_o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \tau > 0 \\ 0 \leq \sigma, \varpi, \beta, \alpha, \mu < 1 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

Mediante el **Teorema 2.6** y el **Teorema 2.7** se puede garantizar la Existencia y la Unicidad de la Solución de una Ecuación Diferencial con Retardo. Del mismo modo, se puede extender para un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo mediante la **Observación 2.1**.

De esta manera, obtenemos la Existencia y Unicidad del Sistema (3.25) considerándolo de la siguiente manera.

Sea $t \in \mathbb{R}$, $x = (S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2$, $y = (S(t - \tau), I(t - \tau)) \in \mathbb{R}_+^2$

$$x'(t) = F(t, x, y)$$

Donde se desprende

$$\begin{aligned} F_1 &= \sigma N - \beta \cdot S \cdot I - \mu S \\ F_2 &= \beta \cdot e^{-w\tau} \cdot S(t - \tau) \cdot I(t - \tau) - (\alpha + \mu)I \end{aligned}$$

De aquí, que F_1, F_2 son continuas dentro de su Dominio positivo, y también $F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}_+)$. Es decir, las derivadas de F_1, F_2 con respecto a x son continuas.

- $\frac{\partial F_1}{\partial S} = -\beta \cdot I - \mu$ *continua*
- $\frac{\partial F_1}{\partial I} = -\beta \cdot S - (\alpha + \mu)$ *continua*
- $\frac{\partial F_2}{\partial S} = 0$ *continua*
- $\frac{\partial F_2}{\partial I} = -(\alpha + \mu)$ *continua*

y además, $S_o(t) : [-\tau, 0] \rightarrow [0, \infty)$; $I_o(t) : [-\tau, 0] \rightarrow [0, \infty)$ es continua.

Por lo cual, existe $\varpi > s$ y hay una única solución del Sistema (3.25) en $[s - \tau, \varpi]$.

Positividad de la Soluciones

Después de haber garantizado la Existencia y la Unicidad del Sistema (3.25), analizaremos la Positividad de las Soluciones mediante el **Teorema 2.8**.

Como $i, t, x = (S, I), y \in \mathbb{R}_+^n$ (consideraciones del Problema Epidemiológico)

- Para $S = 0 : F_1(t, 0, I, y) = 0$
- Para $I = 0 : F_2(t, S, 0, y) = \beta \cdot y \geq 0$

Luego, la condición inicial $S_o(t), I_o(t)$ satisface $S_o(t), I_o(t) \geq 0$, luego la Solución correspondiente del Sistema (3.25) satisface $S(t), I(t) \geq 0$ para todo $t \geq s$ donde está definido el Sistema.

Otra forma de analizar la positividad de las Soluciones, es decir, Soluciones Positivas para todo el Tiempo considerado dado una condición inicial positiva acotada en un intervalo $[a - \tau; a]$. Para $I(t)$ en el intervalo $[a; a + \tau]$, de donde se obtiene $I'(t) \geq (\alpha + \mu)I(t)$. Es evidente que las soluciones son positivas, más aún, las soluciones son finitas en ese intervalo.

Si consideramos $M > 0$, una cota de $S(t)$ en $[a - \tau; a]$, es decir, $S(t) \leq M$, luego,

$$I'(t) \leq \beta \cdot e^{-w\tau} \cdot M \cdot I(t - \tau) - (\alpha + \mu) \cdot I(t)$$

lo cual implicaría,

$$\begin{aligned}
I'(t) + (\alpha + \mu) \cdot I(t) &= \beta \cdot e^{-w\tau} \cdot S(t - \tau) \cdot I(t - \tau) \\
\frac{d}{dt} (e^{-w\tau} \cdot I(t)) &= \beta \cdot e^{-w\tau} \cdot S(t - \tau) \cdot I(t - \tau)
\end{aligned}$$

integrando a ambos lados de a hasta $a + \varepsilon$, $\varepsilon \in [0; \tau]$

$$\begin{aligned}
e^{-(\alpha+\mu)(a+\varepsilon)} \cdot I(a + \varepsilon) &= e^{-(\alpha+\mu)a} \cdot I(a) + \int_a^{a+\varepsilon} \beta \cdot e^{-(\alpha+\mu)s} \cdot e^{-w\tau} \cdot S(s - \tau) \cdot I(s - \tau) ds \\
I(a + \varepsilon) &= e^{(\alpha+\mu)\varepsilon} \cdot I(a) + \int_a^{a+\varepsilon} \beta \cdot e^{-(\alpha+\mu)(a+\varepsilon-s)} \cdot e^{-w\tau} \cdot S(s - \tau) \cdot I(s - \tau) ds
\end{aligned}$$

El lado derecho es finito para $\varepsilon \in [0; \tau]$, teniendo en cuenta que el integrando es acotado.

Con respecto a la primera ecuación

$$S' = \sigma N - \beta SI - \mu S \leq \sigma N - \mu S$$

Las soluciones positivas con las condiciones iniciales positivas están dadas debajo de la solución de la siguiente ecuación:

$$S' = \sigma N - \mu S$$

cual solución analítica es:

$$S(t) = \frac{\sigma N}{\mu} + C \cdot e^{-\mu t}$$

Por consiguiente, todas las soluciones de $S(t)$ tienden a $\frac{\sigma N}{\mu}$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Por lo cual, podemos concluir que $S(t)$ estaría acotado por $\frac{\sigma N}{\mu} > 0$.

Por consiguiente, las Soluciones de $S(t), I(t)$ no son negativas y finitas para todo $t \geq a - r$.

Soluciones Uniformemente Acotadas

Teorema 3.7 Existe $M > 0$ tal que para alguna solución $(S(t), I(t))$ de la ecuación (3.25) con una condición inicial positiva,

$$\max \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t); \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t); \right\} \leq M$$

Como hemos considerado $S(t) \geq 0, \forall t \geq 0$

Tenemos la primera ecuación:

$$S' = \sigma N - \beta \cdot SI - \mu S \leq \sigma N - \mu S$$

Las soluciones positivas con las condiciones iniciales positivas están dadas debajo de la solución de la siguiente ecuación:

$$S' = \sigma N - \mu S$$

Por consiguiente, todas las soluciones de $S(t)$ tienden a $\frac{\sigma N}{\mu}$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Luego, podemos concluir que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty+} \sup S(t) = \frac{\sigma N}{\mu}$$

De la segunda ecuación:

$$I' = \beta e^{-w\tau} S(t-\tau)I(t-\tau) - (\alpha + \mu)I$$

Consideraremos lo siguiente: $\beta e^{-w\tau} \left(\frac{\sigma N}{\mu}\right) - d < 0$ donde : $d = \alpha + \mu$

Consideramos $\varepsilon > 0$ tal que $\beta e^{-w\tau} \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon\right) - d < 0$

como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) \leq \frac{\sigma N}{\mu}$, luego existe $T_1 > 0$ tal que, $S(t) < \frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \quad \forall t > T_1 - r$

Este T_1 dependerá de alguna solución particular (i.e. condición inicial), pero $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t)$ no dependerá de T_1 . Para $t > T_1$, tenemos lo siguiente:

$$I' = \beta e^{-w\tau} S(t-\tau)I(t-\tau) - dI \leq \beta e^{-w\tau} \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon\right) I(t-r) - dI$$

luego,

$$I' \leq A \cdot I(t-\tau) - dI$$

Donde : $A = \beta e^{-w\tau} \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon\right)$

Ahora definiremos lo siguiente: $\beta e^{-w\tau} \frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon < d$

Por el **Lema 2.9**, se puede ver que las soluciones de:

$$Z'(t) = A \cdot Z(t-\tau) - d \cdot Z(t)$$

tienden a **cero** cuando $t \rightarrow +\infty$.

Y, ahora por el Lema 2.10, diremos que $I(t)$ está acotada por $Z(t)$
Luego,

$$\lim_{t \rightarrow \infty+} \sup I(t) = 0$$

Ahora consideraremos el caso: $\beta e^{-w\tau} \left(\frac{\sigma N}{\mu}\right) \geq d$

Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) = \frac{\sigma N}{\mu}$, para alguna solución particular, existe $T_2 > 0$ tal que,

$$S(t) < 2 \left(\frac{\sigma N}{\mu}\right) \quad \forall t \geq T_2.$$

Luego,

$$I'(t) \leq 2\beta e^{-w\tau} \left(\frac{\sigma N}{\mu} \right) \cdot I(t - \tau) - d \cdot I(t) \quad (\Psi 1)$$

ahora vemos la desigualdad

$$I'(t) \geq -d \cdot I(t)$$

Luego, es fácil ver la conclusión que $t_2 > t_1$,

$$I(t_2) \geq I(t_1) \cdot e^{d(t_2 - t_1)}$$

En particular, sea $t_2 = t > \tau$, $t_1 = t - \tau$

luego, obtenemos:

$$I(t - \tau) \geq I(t) e^{d\tau}$$

así, esta ecuación lo introducimos en ($\Psi 1$)

$$I'(t) \leq \left(\frac{2\sigma\beta N}{\mu} \cdot e^{-w\tau} \cdot e^{d\tau} - d \right) \cdot I(t)$$

Luego, sea $\Lambda = \frac{2\sigma\beta N}{\mu} \cdot e^{-w\tau} e^{d\tau} - d$
así,

$$I'(t) \leq \Lambda \cdot I(t)$$

Ahora, para $t_2 > t_1$,

$$I(t_2) < I(t_1) \cdot e^{d(t_2 - t_1)}$$

luego,

$$t_2 - t_1 \geq \frac{1}{\Lambda} \ln \left(\frac{I(t_2)}{I(t_1)} \right) \quad (\Psi 2)$$

Supongamos que existe $T_3 > 0$ tal que, $\beta SI > \sigma N \quad \forall t \geq T_3$

Luego, para $t \geq T_3$

$$S'(t) = \sigma N - \beta SI - \mu S \leq \sigma N - \sigma N - \mu S \leq -\mu S$$

Así,

$$S'(t) \leq -\mu S$$

luego, la solución $S(t) = C \cdot e^{-\mu t}$ converge uniformemente a **cero** cuando $t \rightarrow +\infty$.

Así, para algún $z_o > 0$, existe $T_4 > r$ tal que $S(t) < z_o \quad \forall t > T_2 + T_3 + T_4$.

En particular, consideraremos el caso de z_o satisfaga

$$\beta \cdot z_o < d \cdot e^{-d\tau} < d$$

luego,

$$I'(t) \leq A \cdot I(t - \tau) - d \cdot I(t) \text{ con } a < d \text{ para } t > T_2 + T_3 + T_4$$

esto implicaría que $I(t)$ convergería a *cero* cuando $t \rightarrow +\infty$. ($\implies \Leftarrow$)

(Pues, $\beta SI > \sigma N \quad \forall t \geq T_2$.)

De aquí, concluimos que para algún número que $I(t)$ no está acotada, luego $\exists m > 0$ tal que $S(t) > m \quad \forall S \geq 0$.

Supongamos, $I(\zeta) > \frac{\beta}{m} \quad \forall \zeta > T_5$, entonces,

$$\beta SI > \beta(m) \left(\frac{\beta}{m} \right) = \beta^2$$

Lo cual generaría una contradicción.

Ahora, definimos lo siguiente,

$$M = \text{máx} \left\{ 2 \frac{\sigma N}{\mu}; \frac{\beta}{m} \cdot e^{\Lambda(T_3+T_4)} \right\}$$

como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) \leq \frac{\sigma N}{\mu}$, luego $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup S(t) \leq M$

Del mismo modo para $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t) \leq \frac{\beta}{m} \cdot e^{\Lambda(T_3+T_4)}$

Como $I(t)$ no puede ser acotado por $\left(\frac{\beta}{m} \right)$, debe haber tiempos largos $\bar{t}_2 > \bar{t}_1 > 0$ tal que se satisfaga lo siguiente:

1. $I(\bar{t}_1) = \frac{\beta}{m}$
2. $I(\bar{t}_2) = \frac{\beta}{m} \cdot e^{\Lambda(T_3+T_4)}$
3. $I'(\bar{t}_2) > 0$

Escogemos el caso: $\bar{t}_1 > T_2$, donde T_2 depende de una solución particular.

Ahora aplicamos a $(\Psi 2)$:

$$\bar{t}_2 - \bar{t}_1 \geq \frac{1}{\Lambda} \cdot \frac{\Lambda(T_3 + T_4) \ln\left(\frac{\beta}{m}\right)}{\ln\left(\frac{\beta}{m}\right)} = T_3 + T_4$$

luego, $\bar{t}_1 + T_3 + T_4 \leq \bar{t}_2$

pero, $t > T_2 + T_3 + T_4, \quad I'(t) < 0$

Para algunos valores de t :

$$\begin{aligned} I'(t) &< \beta e^{-w\tau} z_o \cdot I(t - \tau) - d \cdot I(t) < d \cdot e^{-d\tau} \cdot I(t - \tau) - d \cdot I(t) \\ I'(t) &< d \cdot e^{-d\tau} \cdot e^{-d\tau} \cdot I(t) - d \cdot I(t) < d \cdot I(t) - d \cdot I(t) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual implicaría, $I'(t) < 0$ ($\implies \Leftarrow$)

Por consiguiente, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t) < M$.

Corolario 3.3 Cuando $\beta e^{-w\tau} \frac{\sigma N}{\mu} - d < 0$, las soluciones de (3.24) con condición inicial positiva satisfacen:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t); I(t)) = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$$

Prueba. Como $\beta \frac{\sigma N}{\mu} - d < 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup I(t) = 0$.

Dada la positividad de las soluciones, esto equivale a $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$,

Del mismo modo, $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) \leq \frac{\sigma N}{\mu}$.

Entonces, para $\varepsilon > 0$, $\exists T > 0$, tal que para $t \geq T$, $S(t) < \frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon$.

Es posible que T se incremente, lo cual podemos asumir lo siguiente

$$\beta S(\zeta) I(\zeta) < \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) I(\zeta) < \varepsilon$$

Ahora, para $\zeta > T$, si $S(t) > \frac{\sigma N}{\mu}$, luego

$$\begin{aligned} S'(t) &= \sigma N - \beta SI - \mu S < \sigma N - \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) - \mu S \\ S'(t) &< (\sigma N - \mu S) - \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) < -\beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) < 0 \\ S'(t) &< 0 \end{aligned}$$

Por lo cual, $S(t)$ está decreciendo.

Por otro lado, si $S(t) < \frac{\sigma N}{\mu}$

$$\begin{aligned} S'(t) &= \sigma N - \beta SI - \mu S > \sigma N - \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) - \mu S \\ S'(t) &> (\sigma N - \mu S) - \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) > 0 \\ S'(t) &> 0 \iff (\sigma N - \mu S) > \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right) \end{aligned}$$

Si se cumple la condición $(\sigma N - \mu S) > \beta \left(\frac{\sigma N}{\mu} + \varepsilon \right)$, se concluiría $S'(t) > 0$.

Por lo cual, $S(t)$ está creciendo para $t > T$.

Por consiguiente, $t > T$, $S(t)$ no cruza a $\frac{\sigma N}{\mu}$, y es monótona.

Más aún, la única posibilidad: $S(t)$ se tiende a $\frac{\sigma N}{\mu}$, cuando $t \rightarrow +\infty$.

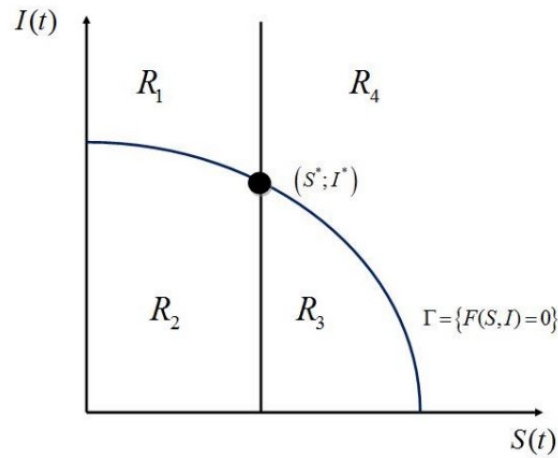
Plano Fase

El Plano Fase es la representación gráfica en el plano S vs I , donde se puede apreciar fácilmente la interacción de los niveles de las dos poblaciones epidemiológicas. En particular, cuando se divide el plano $S - I$, en las siguientes Regiones

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(S, I) : S \leq 0, F(S, I) \geq 0\} \\ R_2 &= \{(S, I) : S \leq 0, F(S, I) \leq 0\} \\ R_3 &= \{(S, I) : S \geq 0, F(S, I) \leq 0\} \\ R_4 &= \{(S, I) : S \geq 0, F(S, I) \geq 0\} \end{aligned}$$

Donde $F(S, I)$ está definida por $S' = -S \cdot F(S, I)$ i.e., $F(S, I) = \beta \cdot I - \frac{\sigma N}{S} + \mu$.

En la siguiente figura representamos la división de las Regiones.



Se debe notar que la curva Γ es una verdadera Isoclina (en este caso para S). Cuando las Soluciones están encima de esta curva, S está decreciendo, por mientras que cuando está por debajo, S está creciendo. La línea vertical $S = S^*$ está incluida sólo como referencia. Convenientemente los Retardos en la *Razón de Cambio* de $I(t)$ no son significativos en las Isoclinas que puedan ser representados. [37].

Soluciones Oscilatorias

Mostraremos que si el componente S de las Soluciones tiende por encima o por debajo de $S = S^*$, deben acercarse el Estado Estacionario. Este resultado está contenido en los siguientes teoremas.

Teorema 3.8 Si existe un $T > 0$, tal que $S(t) < S^* \quad \forall t > T$, entonces $(S(t), I(t)) \rightarrow (S^*, I^*)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Demostración

Empezaremos la demostración con la segunda ecuación para $I(t)$

$$I'(t) = \beta e^{-w\tau} S(t - \tau) \cdot I(t - \tau) - d \cdot I(t)$$

Integrando de T hasta la t , obtenemos:

$$\begin{aligned}
I(t) - I(T) &= \int_T^t (\beta e^{-w\tau} S(s-\tau) \cdot I(s-\tau) - d \cdot I(s)) ds \\
I(t) - I(T) &= \int_{T-\tau}^{t-\tau} (\beta e^{-w\tau} S(s) \cdot I(s)) ds - \int_T^t d \cdot I(s) ds \\
I(t) - I(T) &= \int_{T-\tau}^T \beta e^{-w\tau} S(s) \cdot I(s) ds + \int_T^{t-\tau} \beta e^{-w\tau} S(s) \cdot I(s) ds - \int_T^t d \cdot I(s) ds
\end{aligned}$$

Ahora, definimos la constante Ψ por,

$$\Psi = I(T) + \int_{T-\tau}^T \beta e^{-w\tau} S(s) \cdot I(s) ds$$

Hay que tener en cuenta, que Ψ está completamente determinado por la Historia Inicial de la Ecuación Diferencial con Retardo en el intervalo de tiempo $[T-\tau, T]$.

De la ecuación anterior, se puede diferenciar dos desigualdades.

Primero tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
I(t) &\leq \Psi + \int_{T-\tau}^t \beta e^{-w\tau} S(s) \cdot I(s) ds - \int_T^t d \cdot I(s) ds \\
I(t) &\leq \Psi - \int_T^t (d - \beta e^{-w\tau} S(s) \cdot I(s)) ds \quad (\blacktriangle)
\end{aligned}$$

De aquí, ahora se puede notar una cota para $I(t)$ cuando $S(t) \rightarrow S^*$ bajo la hipótesis del Teorema. Iniciaremos con el caso: $S(t) < S^*$, *i.e.*, $\beta e^{-w\tau} S(s) < d$, y considerando la desigualdad (\blacktriangle) , el Integrand es positivo, lo cual la Integral es creciente con el tiempo t .

Como $I(t)$ es conocido y debe ser positivo,

$$\int_T^{\infty+} (d - \beta e^{-w\tau} S(s)) \cdot I(s) ds < \infty+$$

por la continuidad del Integrand, podemos concluir lo siguiente cuando $t \rightarrow +\infty$

$$(d - \beta e^{-w\tau} S(s)) \cdot I(s) \rightarrow 0$$

No es inmediato determinar cual de los dos términos de este producto tiende a cero, pero se puede mostrar, $d - \beta e^{-w\tau} S(s)$ tiende a cero, es decir, cuando $S(t) \rightarrow S^*$.

Por lo cual, consideraremos los tiempos t_1, t_2, t_3, \dots de tal manera que $S(t)$ posea un Mínimo Relativo. Es sencillo pensar que estos tiempos pueden ocurrir cuando la Solución corte a la curva Γ . En la región donde $S(t) < S^*$, los valores de $I(t)$ en la curva Γ son acotados inferiormente por algún m no nulo. Entonces,

$$(d - \beta e^{-w\tau} S(t_i)) \cdot I(t_i) \geq (d - \beta e^{-w\tau} S(t_i)) \cdot m \geq 0$$

Como el término de la izquierda, tiende a cero, el término del medio también debería tender a cero, pero esta consideración solo es posible si $\beta e^{-w\tau} S(t_i) \rightarrow d$. Y si el Mínimo Relativo tiende a S^* , entonces es sencillo ver que $S(t_i) \rightarrow S^*$.

Si $S(t_i) \rightarrow S^*$, entonces $S'(t) \rightarrow 0$, lo cual nos permite observar que la Ecuación Diferencial para $S(t)$ que la ecuación $I(t_i) \rightarrow I^*$. Con lo cual queda demostrado el Teorema para este caso.

De un modo similar, se puede demostrar el caso $S(t) > S^*$. Con la consideración previa del siguiente Lema.

Lema 3.1 Si $S(t) > S^*$ para $t > T$, y una Historia Inicial positiva para $S(t)$ e $I(t)$, entonces $I(t)$ está acotada lejos del cero para $t > T$.

Para una Historia Inicial Positiva (Condición Inicial Positiva), se puede ver con detalle en [38], lo cual tenemos Soluciones que son Positivas. Luego, se desprende dos casos: $I(t)$ pose un número finito como Mínimo Relativo ó que $I(t)$ posee un número infinito de Mínimos Relativos.

En el primer caso, si $I(t)$ no está acotada lejos del cero, entonces $I(t) \rightarrow 0$, y además existe un $T_2 > T$ tal que $I'(t) < 0 \quad \forall t > T_2$.

Luego, para $t > T_2 + \tau$

$$I'(t) = \beta \cdot e^{-w\tau} \cdot S(t-r) \cdot I(t-r) - d \cdot I(t) < 0$$

$$I(t) > \frac{\beta \cdot e^{-w\tau} \cdot S(t-r)}{d} \cdot I(t-r) \geq I(t-\tau)$$

lo cual contradice la tesis que $I'(t)$ está decreciendo.

Para el segundo caso, consideraremos los tiempos $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ de tal forma que $I(t)$ posea un Mínimo Relativo. Luego, para estos tiempos tenemos: $I'(t_i) = 0$

$$I(t_i) = \frac{\beta \cdot e^{-w\tau} \cdot S(t_i-r)}{d} \cdot I(t_i-r) \geq I(t_i-\tau) \geq I(t_j)$$

para algún $i > j$. De esta forma, podemos continuar hasta llegar a $I(t)$ para algún $t \in [T-\tau, T]$. Luego,

$$\ell = \min_{t \in [T-\tau, T]} I(t) > 0$$

lo cual, es una cota Inferior Positiva de $I(t)$ para $t > T$. \square

Teorema 3.9 Si existe un $T > 0$, tal que $S(t) > S^* \quad \forall t > T$, entonces $(S(t), I(t)) \rightarrow (S^*, I^*)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Demostración

Sea M una cota superior de $I(t)$, para lo cual empezaremos con lo siguiente

$$\begin{aligned} I(t) &= \Psi + \int_T^{t-\tau} \beta e^{-w\tau} S(s) \cdot I(s) ds - \int_T^t d \cdot I(s) ds \\ I(t) &= \Psi + \int_T^{t-\tau} (\beta e^{-w\tau} S(s) - d) \cdot I(s) ds - d \int_{t-\tau}^t I(s) ds \\ I(t) &\geq \Psi + \int_T^{t-\tau} (\beta e^{-w\tau} S(s) - d) \cdot I(s) ds - d \cdot M_\tau \end{aligned} \quad (\diamond)$$

La función $I(t)$ está acotada superiormente, por lo que, también está acotada inferiormente por (\diamond) , y deben ser finitos cuando $t \rightarrow +\infty$. Como en la prueba del teorema anterior, puesto que el integrando es positivo, debemos tener $(\beta e^{-w\tau} S(t) - d) \cdot I(t) \rightarrow 0$, pero por el lema anterior, se demuestra que $I(t)$ tiende al cero, bajo las hipótesis del teorema. Luego, se sigue $\beta e^{-w\tau} S(t) - d \rightarrow 0$, y como en el teorema anterior, esto implica $(S(t), I(t)) \rightarrow (S^*, I^*)$.

Ahora, cuando elegimos el retardo τ lo suficientemente grande como para que el estado de equilibrio no trivial (S^*, I^*) sea inestable, esto lleva a una contradicción de este comportamiento definido. Teniendo en cuenta, que hay una contradicción, podemos concluir que $S(t)$ no es menor que S^* , $\forall t$. Por lo cual, la curva de la Solución debe salir de la región $R_1 \cup R_2$. La única posibilidad para que esto ocurra es para que la curva a pasar de región R_2 a la región R_3 en un punto $I(t) < I^*$.

Esto es evidente, puesto que la función $S(t)$ es decreciente cuando la solución está por encima de la curva Γ .

Teorema 3.10 Si existe un $T > 0$, tal que $S(t) < S^*$ ó $S(t) > S^*$ para todo $t > T$, entonces $(S(t), I(t)) \rightarrow (S^*, I^*)$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Observación: Con respecto a la Positividad de las Soluciones, y las Soluciones Oscilatorias demostradas para el sistema (3.25) en la presente sección, también cumplen para el sistema (3.9) cuando $\varpi = 0$. Donde el sistema (3.25) y el sistema (3.9) son equivalentes debido que se ha eliminado la perturbación generada por el coeficiente de la estrategia de control.

3.4.1. Análisis Cualitativo del Modelo Matemático

Realizaremos el análisis cualitativo del Modelo Matemático SI siendo un método que nos permite saber como es su comportamiento a través del tiempo debido que el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias es del tipo No Lineal, por lo cual tendremos que hallar en primer lugar sus puntos críticos para saber cuales son los puntos estacionarios que tiene el Modelo.

Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio lo hallaremos igualando a cero cada ecuaciones del Sistema de Ecuaciones.

$$\begin{cases} \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S & = 0 \\ \beta \cdot e^{-w\tau} \cdot S(t-r) \cdot I(t-r) - (\alpha + \mu)I & = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Un detalle importante para hallar los puntos críticos de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo, es considerar que cuando se iguala a cero cada ecuación del sistema es porque buscamos los puntos estacionarios que no cambian en el tiempo. La misma noción que en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias se realiza en las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, por lo cual el término que contiene el retardo se consideraría como una variable que no contenga el retardo, solamente para hallar los puntos críticos. Por lo cual el Sistema quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S & = 0 \\ \beta e^{-w\tau} S \cdot I - (\alpha + \mu)I & = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Resolviendo el sistema obtenemos dos puntos críticos:

$$E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$$

$$E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{\sigma\beta N e^{-w\tau} - \mu(\alpha + \mu)}{\beta(\alpha + \mu)} \right)$$

luego,

$$E_2 = \left(R_I^{-1}; (e^{-w\tau} \tilde{R} - 1) \frac{\mu}{\beta} \right)$$

Donde: $R^* = \sigma\beta N \cdot e^{-w\tau} - \mu(\alpha + \mu)$ y $\tilde{R} = R_S \cdot R_I$

Al punto E_1 es llamado como el *punto libre de infección* (donde se llega que no haya infectados) y al punto E_2 es llamado como el *punto endémico* (donde hay una interacción entre susceptibles e infectados constante, es decir, No hay cambio).

Existencia de los Puntos de Equilibrio

La existencia de los puntos de equilibrio para el Modelo Epidemiológico se debe garantizar su no negatividad debido que se está modelando poblaciones.

- $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$ (*trivial*)
- $E_2 = \left(R_I^{-1}; (e^{-w\tau} \tilde{R} - 1) \frac{\mu}{\beta} \right)$

luego, se tendrá que imponer la siguiente consideración:

$$\sigma\beta N e^{-w\tau} - \mu(\alpha + \mu) > 0$$

$$\sigma\beta N e^{-w\tau} > \mu(\alpha + \mu)$$

$$e^{-w\tau} \cdot \left(\frac{\sigma N}{\mu} \right) \left(\frac{\beta}{\alpha + \mu} \right) > 1$$

$$e^{-w\tau} \tilde{R} > 1 \tag{3.28}$$

3.4.2. Linelización del Sistema

Del mismo modo que se hizo en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con respecto al Sistema No Lineal, mediante una linealización del Sistema. Por lo cual hallaremos la matriz Jacobiana con respecto a las variables sin Retardo, y una matriz Jacobiana con respecto a las variables con Retardo. [10,35,42,43].

Como habíamos realizado para el Modelo SI Básico con Dinámica Vital (sin coeficiente de Control, o también llamado Estrategia de Control), realizaremos el mismo procedimiento para el presente Modelo Matemático. Considerando la perturbación realizada en cada paso de nuestro análisis.

Por lo cual la Matriz Jacobiana sin Retardo sería el siguiente:

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ 0 & -(\alpha + \mu) \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

Por lo cual la Matriz Jacobiana con Retardo sería el siguiente:

$$J_\tau(S, I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta e^{-w\tau} I(t-r) & \beta e^{-w\tau} S(t-r) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Vemos que el determinante de J_τ es nula, este detalle lo consideraremos más adelante.

$$|J_\tau| = 0 \quad (3.31)$$

Teniendo las matrices Jacobianas, formaremos el polinomio característico que tiene la forma:

$$p(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id - J - J_\tau \cdot e^{-\lambda\tau}) = 0$$

con lo cual, el polinomio característico a nuestro modelo sería

$$p(\lambda) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S \\ 0 & -(\alpha + \mu) \end{bmatrix} - e^{-\lambda\tau} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta e^{-w\tau} I(t-\tau) & \beta e^{-w\tau} S(t-\tau) \end{bmatrix} \right|$$

luego,

$$p(\lambda) = \left| \begin{array}{cc} \lambda + \beta I + \mu & \beta S \\ \beta I(t-\tau) \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau} & \lambda + (\alpha + \mu) - \beta S(t-\tau) \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau} \end{array} \right| = 0 \quad (3.32)$$

así, el polinomio característico

$$p(\lambda) = (\lambda + \beta I + \mu) (\lambda + (\alpha + \mu) - \beta S(t-\tau) \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau}) - \beta S (\beta I(t-\tau) \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau}) \quad (3.33)$$

Punto Libre de Infección

El punto libre de infección $E_1 = (\frac{\sigma N}{\mu}, 0)$ representa cuando en un instante del tiempo ya no hay infectados, solamente hay susceptibles. Analizaremos este punto de equilibrio para saber como es su comportamiento a través del tiempo.

$$J(\frac{\sigma N}{\mu}, 0) = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & \frac{\beta \sigma N}{\mu} \\ 0 & \lambda + (\alpha + \mu) - \frac{\beta \sigma N}{\mu} \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

luego, el polinomio característico para E_1

$$p(\lambda) = (\lambda + \mu) \left(\lambda + (\alpha + \mu) - \frac{\beta \sigma N}{\mu} \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau} \right)$$

así, se puede deducir

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda + (\alpha + \mu) - \frac{\beta \sigma N}{\mu} \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

por consiguiente se obtiene los dos autovalores del polinomio característico

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

ahora, el siguiente autovalor debería ser negativo o tener parte real negativa para poder concluir que es estable el punto libre de infección.

Por lo cual, utilizaremos el **Teorema 2.12** del capítulo 2, que nos permite analizar en este caso.

Tenemos el segundo término del polinomio característico (3.35)

$$\lambda = -(\alpha + \mu) + \frac{\beta\sigma N}{\mu} \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau} \quad (3.36)$$

Dandole forma a los términos de (3.36), tendríamos

$$\begin{aligned} A &= -(\alpha + \mu) \\ B &= \frac{\beta\sigma N}{\mu} \cdot e^{-w\tau} \end{aligned}$$

Satisfaciendo las condiciones del **Teorema 2.12**, utilizaremos los resultados del Teorema para poder imponer restricciones de tal manera que obtengamos la estabilidad local del punto de Equilibrio Libre de Infección.

1. Condición: $A + B < 0$

$$\begin{aligned} \frac{\beta\sigma N}{\mu} e^{-w\tau} - (\alpha + \mu) &< 0 \\ \frac{\beta\sigma N}{\mu} e^{-w\tau} &< (\alpha + \mu) \end{aligned}$$

2. Condición: $B \geq A$

$$-(\alpha + \mu) \leq \frac{\beta\sigma N}{\mu} e^{-w\tau}$$

Por consiguiente, podemos concluir sobre el punto libre de infección, $E_1 = (\frac{\sigma N}{\mu}, 0)$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable. Bajo la condición

$$e^{-w\tau} \cdot \left(\frac{\sigma N}{\mu}\right) \left(\frac{\beta}{\alpha + \mu}\right) < 1$$

$$e^{-w\tau} \cdot R_S \cdot R_I < 1$$

Punto Endémico

El punto Endémico $E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}, \frac{\sigma\beta N e^{-w\tau} - \mu(\alpha + \mu)}{\beta(\alpha + \mu)}\right)$, representa cuando hay interacción entre los susceptibles e infectados pero esta interacción se mantiene constante, es decir no cambia a través del tiempo. Analizaremos este punto de equilibrio para saber como es su comportamiento a través del tiempo.

Para un mejor desarrollo del análisis, haremos un cambio de variables auxiliares con respecto al punto endémico.

- $R^* = \sigma\beta N e^{-w\tau} - \mu(\alpha + \mu) > 0$

Luego, el punto endémico sería $E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}, \frac{R^*}{\beta(\alpha + \mu)}\right)$

Ahora, introducimos el punto E_2 al polinomio característico (3.31)

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + \frac{R}{(\alpha+\mu)} + \mu & (\alpha + \mu) \\ -\frac{U}{(\alpha+\mu)} \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau} & \lambda + (\alpha + \mu) - (\alpha + \mu) \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.37)$$

$$p(\lambda) = \left(\lambda + \frac{R^*}{(\alpha + \mu)} + \mu \right) (\lambda + (\alpha + \mu) - (\alpha + \mu) \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau}) + R^* \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau}$$

luego,

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \left[\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha + \mu)} \right] \cdot \lambda + [R^* + \mu(\alpha + \mu)] + [-(\alpha + \mu) \cdot \lambda - \mu(\alpha + \mu)] \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau}$$

Sean los polinomios,

$$\bar{p}(\lambda) = \lambda^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha + \mu)} \right) \lambda + (\mu(\alpha + \mu) + R^*)$$

$$\bar{q}(\lambda) = -(\alpha + \mu)\lambda - \mu(\alpha + \mu)$$

así, el polinomio característico tiene la forma

$$p(\lambda) = \bar{p}(\lambda) - \bar{q}(\lambda) \cdot e^{-w\tau} e^{-\lambda\tau} \quad (3.38)$$

Teniendo la consideración de $|J_\tau| = 0$. Esto nos ayudará para el análisis de la estabilidad local del punto endémico debido que su forma no es similar que en el punto libre de infección, por lo cual ahora utilizaremos los resultados de la **Proposición 2.4** que lo denominamos Estabilidad Absoluta. [10].

1. Primero verificaremos: $\bar{p}(\lambda) \neq 0$

$$\bar{p}(\lambda) = \lambda^2 + (\alpha + 2\mu)\lambda + (\mu(\alpha + \mu) + R^*)$$

Bastará que el término independiente no sea cero para garantizar que $\bar{p}(\lambda)$ sea no nulo.

$$(\mu(\alpha + \mu) + R^*) \neq 0$$

Ahora, analizaremos la determinante del polinomio

$$\Delta = \left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha + \mu)} \right)^2 - 4(\mu(\alpha + \mu) + R^*)$$

luego, las raíces serían:

$$\bar{\lambda} = \frac{-\left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha + \mu)} \right) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

Ahora $\bar{\lambda}$ deben ser negativos. Por lo cual analizaremos la discriminante en todos sus casos.

- Para la discriminante Positiva: $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1 &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{\left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha+\mu)}\right)}{2} \\ \bar{\lambda}_2 &= -\frac{\left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha+\mu)} + \sqrt{\Delta}\right)}{2}\end{aligned}$$

Por lo cual, $\bar{\lambda}_2 < 0$, y $\bar{\lambda}_1 < 0 \Leftrightarrow \Delta < \left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha+\mu)}\right)$.

- Para la discriminante Nula: $\Delta = 0$

$$\bar{\lambda}_{1,2} = -\frac{(\alpha + 2\mu)}{2}$$

Donde $\bar{\lambda}_{1,2}$ posee signo negativo.

- Para la discriminante Negativa: $\Delta < 0$

$$\bar{\lambda} = \frac{-\left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha+\mu)}\right)}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \cdot i$$

Donde $\bar{\lambda}_{1,2}$ tiene parte real negativa.

Por lo cual, utilizaremos el criterio de Routh-Hurwitz para poder satisfacer esta condición de la Proposición 2.4 para poder lograr justificar esta consideración importante de la proposición. Del mismo modo que se realizó en el análisis cualitativo en el Modelo Matemático SI con Dinámica Vital sin Estrategia de Control. Usando el criterio de Routh-Hurwitz para Estabilidad de Sistemas. [47,48].

1. Si $\bar{p}(\lambda) = 0$, donde $\bar{p}(\lambda) = \lambda^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{U^*}{(\alpha+\mu)}\right)\lambda + (\mu(\alpha + \mu) + R^*)$.

De aquí, se puede ver, $\left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha+\mu)}\right) > 0$, $(\mu(\alpha + \mu) + R^*) > 0$.

Por lo cual, se tiene $\Re(\lambda) < 0$. Por consiguiente, con el criterio de Routh-Hurwitz se puede satisfacer la condición de la Proposición 2.4.

2. Ahora realizaremos la condición de $|\bar{q}(iy)| < |\bar{p}(iy)|$; $0 \leq y < +\infty$

$$\begin{aligned}a) \quad |\bar{q}(iy)| &= |-(\alpha + \mu)y \cdot i - \mu(\alpha + \mu)| \\ |\bar{q}(iy)| &= e^{-w\tau} \cdot \sqrt{(\mu(\alpha + \mu))^2 + ((\alpha + \mu)y)^2} \\ b) \quad |\bar{p}(iy)| &= |-y^2 + (\alpha + 2\mu)y \cdot i + (\mu(\alpha + \mu) + R^*)| \\ |\bar{p}(iy)| &= \sqrt{((\mu(\alpha + \mu) + R^*) - y^2)^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha+\mu)}\right)^2 y^2}\end{aligned}$$

Para lo cual debemos analizar las expresiones de tal manera que se garantice la condición.

$$e^{-2w\tau} (\mu(\alpha + \mu))^2 + ((\alpha + \mu)y)^2 < ((\mu(\alpha + \mu) + R^*) - y^2)^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha + \mu)}\right)^2 y^2$$

3. La siguiente condición que se debe verificar:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} \left| \frac{\bar{q}(\lambda)}{\bar{p}(\lambda)} \right| = 0$$

En efecto, se cumple esta condición. Debido que el grado de $\bar{q}(\lambda)$ es 1, y de $\bar{p}(\lambda)$ es 2. Esto indica que $\bar{p}(\lambda)$ al tener mayor grado, se incrementa con mayor rapidez que $\bar{q}(\lambda)$. Por lo cual en el límite al infinito, la expresión tiende al cero.

Por consiguiente, al cumplirse estas tres condiciones bajo las restricciones mostradas se obtendrá la estabilidad absoluta que la **Proposición 2.4** indica. Esto quiere decir, que para cualquier raíz λ y para todo $\tau > 0$ se obtiene la estabilidad absoluta para cualquier valor del retardo discreto. Epidemiológicamente, el Punto Endémico $E_2 = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}; \frac{\sigma \beta N e^{-w\tau} - \mu(\alpha + \mu)}{\beta(\alpha + \mu)} \right)$ es asintóticamente estable.

Teorema 3.11 (Estabilidad)

Sea $R^* = \sigma \beta N e^{-w\tau} - \mu(\alpha + \mu) > 0$, y $\tilde{R} = R_S \cdot R_I$, y el Modelo representado en (3.24).

1. Si $e^{-w\tau} \cdot \tilde{R} < 1$, el punto Libre de Infección $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$, es asintóticamente Estable.

2. Si $e^{-2w\tau} (\mu(\alpha + \mu))^2 + ((\alpha + \mu)y)^2 < ((\mu(\alpha + \mu) + R^*) - y^2)^2 + \left(\alpha + 2\mu + \frac{R^*}{(\alpha + \mu)} \right)^2 y^2$,

donde $0 \leq y < +\infty$, el punto Endémico $E_2 = \left(R_I^{-1}; (e^{-w\tau} \cdot \tilde{R} - 1) \frac{\mu}{\beta} \right)$, es asintóticamente Estable.

Teorema 3.12 (Sol. Uniformemente Acotadas y Estabilidad del Punto Libre de Infección)

Si $e^{-w\tau} \tilde{R} < 1$, entonces el Modelo (3.24) en el Punto Libre de Infección $E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0 \right)$, es asintóticamente Estable, y además posee Soluciones Uniformemente Acotadas que convergerán al Estado Estacionario del Punto Libre de Infección.

Después de haber analizado diferentes Modelos Matemáticos aplicado a la Epidemiología. Donde se empezó con el Modelo Básico SI con Dinámica Vital para Susceptibles e Infectados, estudiado por las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, luego se extendió el mismo Modelo, pero estudiado con las Ecuaciones Diferenciales con Retardo Sin Control, para luego perturbarlo a un Modelo con Estrategia de Control. En todos los Modelos, se ha realizado la Existencia y Unicidad de las Soluciones, Positividad de Soluciones, Soluciones Uniformemente Acotadas, luego se ha procedido a realizar el respectivo Análisis Cualitativo para describir el Comportamiento de las Soluciones de acuerdo a los parámetros que tiene cada Modelo y sus semejanzas, por ejemplo los dos primeros Modelos comparten los mismos Puntos Estacionarios: *el Punto Libre de Infección y el Punto Endémico*. En cambio, el tercer Modelo comparte el mismo Punto Libre de Infección, por mientras que el Punto Endémico es similar a los dos anteriores, con la diferencia del coeficiente de Estrategia de Control, si se considera $w = 0$, compartiría el mismo Punto. Más adelante, en el capítulo 4, se procederá a complementar el estudio cualitativo con el estudio numérico computacional como un complemento adecuado para los Modelos Epidemiológicos estudiados.

Ahora realizaremos una extensión del Modelo Básico SI con Dinámica Vital para poblaciones epidemiológicas: Susceptibles e Infectadas, que matemáticamente comprende dos ecuaciones dentro del Sistema que representa al Modelo. Por lo cual, dividiremos las Poblaciones epidemiológicas en Poblaciones demográficas por sexo, es decir, Hombre y Mujer. Esta perturbación del primero Modelo nos permite tener una visión mucho más amplia del desarrollo de la Epidemia que consistía en

comprender los Susceptibles e Infectados sin distinguir el sexo que poseían. Con esta consideración, no solamente se amplía el análisis epidemiológico sino también el análisis matemático que está describiendo el fenómeno de la Epidemia.

Por lo cual, utilizaremos la extensión del Modelo Básico SI con Dinámica Vital para poblaciones epidemiológicas comprendidas también en poblaciones demográficas por sexo que en primer lugar será estudiada por las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, en este campo, se utilizará el estudio realizado en [30]. Luego, en segundo lugar se realizará el estudio mediante las Ecuaciones Diferenciales con Retardo. En ambos Modelos, matemáticamente se considerará cuatro ecuaciones para el Sistema que describe el Modelo, indicando un estudio mucho más fino y dedicado al análisis cualitativo del Sistema, y se complementará con las Simulaciones Computacionales correspondientes para una mejor comprensión de la Epidemia.

3.5. Modelo SI Básico con Dinámica Vital en E.D.O. con Estrategia de Control con 4 Poblaciones

En esta sección, nos centraremos en detallar brevemente los Resultados obtenidos en la Tesis de Licenciatura: "Modelo Matemático de la Dinámica de Transmisión del VIH/SIDA en una Población Heterosexual Activa en el Perú", que describe la problemática de la Epidemia de una enfermedad infecciosa, en este caso, el VIH/SIDA. [30].

Las consideraciones del Modelo serán similares que en el primer Modelo SI Básico, por lo cual se hará una extensión con los detalles necesarios. Que pasamos a detallar a continuación para complementar la perturbación del Modelo SI mediante poblaciones Epidemiológicas únicamente. [49,50,54].

Una gran consideración con respecto al trabajo que se presentó en [29] donde se había propuesto el Modelo Matemático Comportamental que se desarrollará, en tal trabajo se había realizado sus respectivas simulaciones computacionales. Por lo cual, en el trabajo que se desarrolló en [30], se ha extendido ha realizar su análisis cualitativo para estudiar su estabilidad, más aún, encontrar el Número Básico de Reproducción Efectiva (\mathfrak{R}_e) que dentro de la Epidemiología viene a ser un coeficiente importantísimo para el análisis de la dinámica de la transmisión de las enfermedades infecciosas. Las dinámicas que se tendrán en cuenta en el modelo son la esencia del modelo debido que intervienen la interacción entre variables que representarán los supuestos ya mencionados. [30].

- $\sigma_h H_{NS}$: Fracción de hombres de la población no susceptible que pasan a ser sexualmente activos.
- $\sigma_m M_{NS}$: Fracción de mujeres no susceptible de la población que pasan a ser sexualmente activas.
- $-\mu S_h$: Fracción de individuos hombres susceptibles que mueren de manera natural.
- $-\mu S_m$: Fracción de individuos mujeres susceptibles que mueren de manera natural.
- $-\mu I_h$: Fracción de individuos hombres infectados que mueren de manera natural.

- $-\mu I_m$: Fracción de individuos mujeres infectadas que mueren de manera natural.
- $-\alpha I_h$: Fracción de individuos hombres infectados que mueren por la enfermedad.
- $-\varepsilon I_m$: Fracción de individuos mujeres infectadas que mueren por la enfermedad.
- $\beta_m I_m S_h$: Fracción de hombres que pasan de ser susceptibles y llegan al estado infeccioso.
- $\beta_h I_h S_m$: Fracción de mujeres que pasan de ser susceptibles y llegan al estado infeccioso.

Sean las Tasas de Supervivencia:

- * $R_S^H = \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}$: Tasa de Supervivencia de Susceptibles Hombres.
- * $R_S^M = \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}$: Tasa de Supervivencia de Susceptibles Mujeres.
- * $R_I^H = \frac{\beta_h}{\alpha + \mu}$: Tasa de Supervivencia de Infectados Hombres.
- * $R_I^M = \frac{\beta_m}{\varepsilon + \mu}$: Tasa de Supervivencia de Infectadas Mujeres.

3.5.1. Modelo Matemático

La Estrategia de Control estará representada por una función continua, con lo cual se intentará disminuir la dinámica de transmisión de la enfermedad. Esta función tendrá que satisfacer condiciones epidemiológicas que permitan una adecuada percepción del problema, y por ende, que pueda brindar una respuesta lo más acertada posible. La consideración de la Estrategia de Control será representada como una función constante: w .

El coeficiente de protección (ϖ) será un dato estadístico el cual determinará el índice de protección que se tiene, este coeficiente estará entre $[0, 1]$ debido que intentará prevenir el contagio pero también se tendrá en cuenta que no será un 100 %, debido que los métodos naturales y no naturales no tienen un 100 % de protección. Los métodos naturales serían la abstinencia y tener una sola pareja sexual, por mientras que el método no natural sería el uso de Preservativos (condones) que están considerados que brindan una protección entre 90 % y 95 %. Por comodidad se utilizará el valor w , pues en sí, la estrategia de control será de la siguiente manera: $w = 1 - \varpi$. Donde ϖ es el coeficiente de Efectividad de la Estrategia de Control. Esto mostrará que cuando no haya una estrategia de control $\varpi = 0$, el valor de $w = 1$; brindando un Modelo Matemático sin control, es decir, no se toma ninguna medida para intentar disminuir el contagio de la enfermedad, por ende si $\varpi = 1$, el valor de $w = 0$, lo que indicaría que la Estrategia de Control es completamente efectiva al 100 %. [30].

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S'_h = \sigma_h H_{NS} - w\beta_m I_m S_h - \mu S_h \\
 I'_h = w\beta_m I_m S_h - \alpha I_h - \mu I_h \\
 S'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h I_h S_m - \mu S_m \\
 I'_m = \beta_h I_h S_m - \varepsilon I_m - \mu I_m \\
 \\
 S_h(0) = S_o^h \geq 0 ; I_h(0) = I_o^h \geq 0 \\
 S_m(0) = S_o^m \geq 0 ; I_m(0) = I_o^m \geq 0 \\
 \\
 0 < \alpha, \beta_m, \beta_h, \sigma_h, \sigma_m, \varepsilon, \mu, w < 1
 \end{array} \right. \quad (3.39)$$

Existencia y Unicidad

Para garantizar la Existencia y Unicidad del Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (3.39) utilizaremos un lema y un teorema de la Teoría Matemática de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, presentado en el Capítulo de Preliminares. [30].

Lema 3.2 Sea $F : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$, $F(X) = (F_1(X), F_2(X), F_3(X), F_4(X))$ con $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ son continuas y $\exists n \frac{\partial F_j}{\partial x_k}$ continuas en \mathbb{R}_+^4 , $\forall j, k = \overline{1, 4}$. Entonces, F localmente lipschitz continua en \mathbb{R}_+^4 . [25,30]. (Ver demostración en [30]).

Teorema 3.13 Sea $F : \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$ localmente lipschitz continua para cada $j = \overline{1, 4}$ y satisfice $F_j(X) \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}_+^4$, $x_j = 0$. Entonces para cada $x_o \in \mathbb{R}_+^4$, existe una única solución de $X' = F(X)$ con $X(0) = X_o$ en \mathbb{R}_+^4 donde está definida en algún intervalo $(0, b]$ con $b \in (0, +\infty)$, entonces $\sup_{0 \leq t \leq b} \sum_{j=1}^4 X_j(t) = +\infty$. [25,30]. (Ver demostración en [30]).

3.5.2. Estado de Equilibrio del Modelo

Para garantizar la estabilidad del modelo matemático, en primer lugar se hallará los puntos críticos del Modelo matemático, representado por un sistema de ecuaciones igualados a cero.

Puntos Críticos Sea el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\begin{cases} \sigma_h H_{NS} - w\beta_m I_m S_h - \mu S_h & = 0 \\ w\beta_m I_m S_h - \alpha I_h - \mu I_h & = 0 \\ \sigma_m M_{NS} - \beta_h I_h S_m - \mu S_m & = 0 \\ \beta_h I_h S_m - \varepsilon I_m - \mu I_m & = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

Desarrollando el sistema (3.40) obtenemos los siguientes puntos criticos.

El Punto Libre de Infección en el Estado Estacionario del Modelo

Para la Población Masculina tanto Susceptible como Infectado se tiene:

$$\begin{aligned} S_h &= \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu} \\ I_h &= 0 \end{aligned}$$

Para la Población Femenina tanto Susceptible como Infectada se tiene:

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu} \\ I_m &= 0 \end{aligned}$$

donde: $S_h \neq 0$, $S_m \neq 0$ y además son positivos no nulos.

Por consiguiente, se tiene el Punto Crítico:

$$\overline{E}_1 = \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0 \right) \quad (3.41)$$

El presente punto crítico nos ayudará a saber sobre el comportamiento de las Soluciones de nuestro Sistema de Ecuaciones mediante su Análisis Cualitativo que se desarrollará más adelante.

El Punto Endémico en el Estado Estacionario del Modelo

Para la Población Masculina tanto Suceptible como Infectado se tiene:

$$S_h = \frac{\sigma_h \beta_h (\varepsilon + \mu) H_{NS} + \mu (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\beta_h (w \sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))}$$

$$I_h = \frac{w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\beta_h (\alpha + \mu) (w \sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))}$$

Para la Población Femenina tanto Susceptible como Infectada se tiene:

$$S_m = \frac{w (\alpha + \mu) (\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))}{\beta_m (\sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu))}$$

$$I_m = \frac{w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{w (\varepsilon + \mu) (\sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu))}$$

Sea la siguiente consideración:

$$R_1 = w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)$$

$$R_2 = w \sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) > 0$$

$$R_3 = w \sigma_m \beta_m M_{NS} (\alpha + \mu) + \mu (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu) > 0$$

$$R_4 = \sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) > 0$$

Por consiguiente:

$$\overline{E}_2 = \left(\frac{(\varepsilon + \mu) R_4}{\beta_h R_2}; \frac{R_1}{\beta_h R_3}; \frac{R_3}{\beta_m R_4}; \frac{R_1}{w (\varepsilon + \mu) R_4} \right) \quad (3.42)$$

Para garantizar la existencia adecuada al modelo matemático propuesto; los puntos críticos tienen que ser necesariamente no negativos.

En primer lugar, el punto crítico $\overline{E}_1 > 0$ (*trivial*)

En segundo lugar, el punto crítico \overline{E}_2 tiene que ser no negativo.

Para lo cual se debe cumplir: $R_1 > 0$

Teorema 3.14 *Sea el Sistema (3.40), y sean sus puntos críticos expresados en (3.41), (3.42).*

1. *La expresión (3.41) no tiene restricción alguna. (trivial)*
2. *Si $w \cdot R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M > 1$, entonces la expresión (3.42) estará bien definida epidemiológicamente. (Ver demostración en [30]).*

De esta manera, las expresiones (3.41), (3.42) que representan los puntos críticos del Sistema (3.40) son no negativos, lo cual epidemiológicamente es correcto debido que no hay valores negativos en una Población de personas.

Matriz de la Siguiete Generación

El método de la Siguiete Generacion es un método muy útil para hallar el Número Básico de Reproducción Efectiva para el Modelo Comportamental que estamos estudiando. Como se detallo en el capítulo de los Nociones preliminares, nos ayuda a saber cuando el Sistema es Estable o Inestable, y para qué condiciones se puede garantizar la estabilidad. En la referencia utilizada se ha demostrado las condiciones para los teoremas que garantizan la Estabilidad del Sistema. [30].

$$\mathfrak{R}_e = \sqrt{\left(\frac{w\beta_m I_m + \beta_h I_h}{2\mu}\right)^2 - \left(\frac{w\beta_m \beta_h I_m I_h}{\mu^2} - \frac{w\beta_m \beta_h S_m S_h}{(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)}\right) - \left(\frac{w\beta_m I_m + \beta_h I_h}{2\mu}\right)}$$

Analizando para los puntos críticos.

$$\blacksquare \overline{E}_1 = \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0\right)$$

$$\mathfrak{R}_e = \sqrt{\frac{w\beta_m \beta_h \sigma_h H_{NS} \sigma_m M_{NS}}{\mu^2(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)}} = \sqrt{w \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}\right) \left(\frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}\right) \left(\frac{\beta_m}{\varepsilon + \mu}\right) \left(\frac{\beta_h}{\alpha + \mu}\right)}$$

luego,
$$\mathfrak{R}_e = \sqrt{w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M}$$

Teorema 3.15 (Estabilidad) Sea $w, R_S^H, R_S^M, R_I^H, R_I^M > 0$. (Ver demostración en [30]).

1. Si $w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M < 1$, entonces $\mathfrak{R}_e < 1$, por consiguiente el Sistema (3.39) en el Punto Libre de Infección \overline{E}_1 es Estable localmente.
2. Si $w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M > 1$, entonces $\mathfrak{R}_e > 1$, por consiguiente el Sistema (3.39) en el Punto Libre de Infección \overline{E}_1 es Inestable localmente.

Interpretación: Si se puede condicionar la interacción de las tasas de supervivencias tanto de susceptibles como infectados al entrar en contacto con las poblaciones no susceptibles conjuntamente con el coeficiente de protección que representa la estrategia de control que intenta disminuir el contagio de susceptibles al entrar en contacto con los infectados, de tal manera que el número de Reproducción, \mathfrak{R}_e , sea menor que uno esto implicará que el Modelo Matemático Epidemiológico en el Punto Libre de Infección \overline{E}_1 sea estable localmente, y así la infección de la enfermedad sea controlable y no se propague sin poder controlarla. En cambio, cuando \mathfrak{R}_e , sea mayor que uno esto implicará que el Modelo Matemático Epidemiológico sea inestable localmente, y así la infección de la enfermedad se propagará de tal manera que no se pueda controlar, sobre todo que este Modelo no tiene ninguna estrategia de control.

$$\blacksquare \overline{E}_2 = \left(\frac{(\varepsilon + \mu)R_4}{\beta_h R_2}, \frac{R_1}{\beta_h R_3}, \frac{R_3}{\beta_m R_4}, \frac{R_1}{w(\varepsilon + \mu)R_4}\right)$$

$$\mathfrak{R}_e = \sqrt{\frac{1}{4\mu^2} \left(\frac{(\alpha + \mu)wR_2}{R_4} + \frac{R_1}{(\alpha + \mu)R_2}\right)^2 + \frac{w\beta_m \beta_h}{(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu)R_4} \left(\frac{(\varepsilon + \mu)(\alpha + \mu)R_4^2}{\beta_h \beta_m R_2} - \frac{R_1^2}{\mu^2 w R_4}\right) - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{(\alpha + \mu)wR_2}{R_4} + \frac{R_1}{(\alpha + \mu)R_2}\right)}$$

donde se debe garantizar que $\frac{R_2^2}{\mu^2} \neq \frac{R_4 R_3}{\beta_m}$, entonces se tendrá que buscar que $\mathfrak{R}_e < 1$ para la estabilidad local del Sistema. [30].

Teorema 3.16 (Estabilidad)

Sea $R_1, R_2, R_3, R_4 > 0$ (Ver demostración en [30]).

Si $\frac{R_2^2}{\mu^2} \neq \frac{R_4 R_3}{\beta_m}$ y se satisface, $0 < \frac{w\beta_m\beta_h}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)R_4} \left(\frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)R_4^2}{\beta_h\beta_m R_2} - \frac{R_1^2}{\mu^2 w R_4} \right) < \frac{1}{4}$, entonces $\mathfrak{R}_e < 1$ y, por consiguiente el Sistema (3.39) en el Punto Endémico \overline{E}_2 es Estable localmente.

Interpretación: De aquí, concluimos que $\mathfrak{R}_e < 1$, lo cual el Sistema sería estable en el punto Endémico \overline{E}_2 , debido que el Teorema 3.7 hará cumplir la condición para poder garantizar la estabilidad local. Las expresiones R_1, R_2, R_3, R_4 contendrán la esencia de la dinámica que interactúan las poblaciones susceptibles e infectadas, donde el crecimiento de lo susceptibles es mayor que los infectados, manteniendo la estabilidad de la propagación de la enfermedad.

Después de tener estas consideraciones del Modelo SI mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias [30] con sus respectivos resultados, podremos perturbarlo de una manera similar que se realizó en las secciones anteriores del presente Capítulo, es decir, extenderemos a las Ecuaciones Diferenciales con Retardo del presente Modelo que se ha estudiado.

3.6. Modelo SI Básico con Dinámica Vital en E.D.R. con Estrategia de Control con 4 Poblaciones

Como se había mencionado, la interacción entre los Susceptibles con los Infectados se modela mediante el producto de ambas poblaciones, interpretándose epidemiológicamente la disminución de la población de Susceptibles relacionado con la tasa de contagio, y el ingreso a la población de Infectados de manera inmediata. Pero en muchas epidemias no ocurre esto, el individuo pasa un tiempo para que se encuentre infectado, lo que se llama período latente. Bajo esta consideración, el Retardo nos permite considerar el tiempo en que se encuentra un individuo en la transición para que sea considerado infectado, más aún, ahora que consideraremos la extensión de las poblaciones epidemiológicas a las demográficas, es decir, no solamente consideraremos las poblaciones de Susceptibles e Infectados únicamente, sino también las poblaciones por su sexo (Hombre y Mujer). Esto, nos permitirá tener una mejor comprensión de la dinámica que sucede mediante la interacción entre los individuos. Por lo cual, se introducirá el Retardo en la población Infectada femenina y en la población susceptible masculina cuando haya una interacción entre ambas en la razón de cambio de la población infectada masculina donde se está ingresando, teniendo una consideración para el Retardo ($\tau > 0$), debido que la Población de los Hombres ha ido en una tendencia de aumento en su vida sexual activa, por lo cual esta consideración nos permite entender que los Hombres tienen mucho más probabilidad de contraer la enfermedad. Por otra parte, la Población de las Mujeres tanto Susceptibles e Infectadas se considerarán como ecuaciones diferenciales ordinarias, es decir, no se le aplicará ningún Retardo por lo cual se interpretará que se mantiene en la misma dinámica expuesta anteriormente en la sección 3.4 del presente capítulo con respecto a la Enfermedad de Transmisión Sexual del VIH/SIDA. [30,35,49,51,52].

3.6.1. Modelo Matemático

El presente Modelo será considerado con una estrategia de control para intentar disminuir la tasa de infección, es decir, el contacto entre Susceptibles e Infectados se dará condicionado a la proporción de la Estrategia de Control que se realice. Esta consideración permitirá una mejor perspectiva de la realidad del problema, y cómo se realiza medidas de prevención, control y acción ante la Problemática que se está modelando matemáticamente en el área de la Epidemiología.

En el Modelo presentado en la sección 3, específicamente en la ecuación (3.39) se presenta el Modelo Matemático con Estrategia de Control en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, con el coeficiente de efectividad: $w = 1 - \varpi$. Donde ϖ es representa la Estrategia de Control. Es decir, si No se realiza ninguna Estrategia es representado por $\varpi = 0$, por consiguiente $w = 1$, lo que representaría el mismo Modelo Matemático pero sin Estrategia de Control. [30].

La estrategia de Control en el presente Modelo Matemático con E.D.R. será representado por el coeficiente de efectividad que contiene la interacción entre el Coeficiente de Estrategia de Control y el coeficiente de Retardo que representa la Historia de la Población Masculina: w . Si consideramos $\varpi = 0$ se tendría un Modelo Matemático sin Control de similar forma que se realizó cuando el Modelo estaba representado por E.D.O. Del mismo modo que en el anterior Modelo se considerará únicamente una Estrategia de Control para la Población Masculina, debido que se consideran que los Hombres se protegen para evitar el contagio de la enfermedad, una enfermedad específica sería el VIH/SIDA, entre otras Enfermedades de Transmisión Sexual (ETS). [30].

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_h = \sigma_h H_{NS} - \beta_m \cdot w \cdot S_h \cdot I_m - \mu S_h \\ I'_h = \beta_m \cdot w \cdot S_h(t - \tau) \cdot I_m(t - \tau) - (\alpha + \mu) I_h \\ S'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - \mu S_m \\ I'_m = \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - (\varepsilon + \mu) I_m \\ \text{con Condiciones Iniciales :} \\ \\ S_h(t) = S_h^o \quad , \quad I_h(t) = \varphi_h^o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ S_m(t) = S_m^o \quad , \quad I_m(t) = I_m^o \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \\ \tau > 0 \\ 0 \leq \sigma_h, \sigma_m, w, \beta_h, \beta_m, \alpha, \mu, \varepsilon < 1 \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Existencia y Unicidad

Mediante el **Teorema 2.6** y el **Teorema 2.7** se puede garantizar la Existencia y la Unicidad de la Solución de una Ecuación Diferencial con Retardo. Del mismo modo, se puede extender para un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo mediante la **Observación 2.1**.

De esta manera, obtenemos la Existencia y Unicidad del Sistema (3.43), de una manera similar como se realizó en las secciones anteriores, considerándolo de la siguiente manera.

Sea $t \in \mathbb{R}$,

Sea $x = (S_h(t), I_h(t), S_m(t), I_m(t)) \in \mathbb{R}_+^4$, $y = (S_h(t - \tau), I_h(t - \tau), S_m(t - \tau), I_m(t - \tau)) \in \mathbb{R}_+^4$

$$x'(t) = F(t, x, y)$$

Donde se desprende

$$\begin{array}{l} F_1 = \sigma_h H_{NS} - \beta_m \cdot w \cdot S_h \cdot I_m - \mu S_h \\ F_2 = \beta_m \cdot w \cdot S_h(t - \tau) \cdot I_m(t - \tau) - (\alpha + \mu) I_h \\ F_3 = \sigma_m M_{NS} - \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - \mu S_m \\ F_4 = \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - (\varepsilon + \mu) I_m \end{array}$$

De aquí, F_1, F_2, F_3, F_4 son continuas dentro de su Dominio (\mathbb{R}_+^4), y también $F_1, F_2, F_3, F_4 \in C^1(\mathbb{R}_+^4)$. Es decir, las derivadas de F_1, F_2, F_3, F_4 con respecto a x son continuas.

Para la función F_1 .

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial S_h} &= -\beta_m \cdot I_m - \mu && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_1}{\partial I_h} &= 0 && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_1}{\partial S_m} &= 0 && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_1}{\partial I_m} &= -\beta_m \cdot w \cdot S_h && \text{Continua}\end{aligned}$$

Para la función F_2 .

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_2}{\partial S_h} &= 0 && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_2}{\partial I_h} &= -(\alpha + \mu) && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_2}{\partial S_m} &= 0 && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_2}{\partial I_m} &= 0 && \text{Continua}\end{aligned}$$

Para la función F_3 .

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_3}{\partial S_h} &= 0 && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_3}{\partial I_h} &= -\beta_h \cdot S_m && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_3}{\partial S_m} &= -\beta_h \cdot I_h - \mu && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_3}{\partial I_m} &= 0 && \text{Continua}\end{aligned}$$

Para la función F_4 .

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_4}{\partial S_h} &= 0 && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_4}{\partial I_h} &= \beta_h \cdot S_m && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_4}{\partial S_m} &= \beta_h \cdot I_h && \text{Continua} \\ \frac{\partial F_4}{\partial I_m} &= -(\varepsilon + \mu) && \text{Continua}\end{aligned}$$

y además, consideramos:

$$\begin{aligned}S_o^h(t) : [-\tau, 0] &\longrightarrow [0, \infty+) & , & \quad I_o^h(t) : [-\tau, 0] \longrightarrow [0, \infty+) & \quad \text{continua} \\ S_o^m(t) : [-\tau, 0] &\longrightarrow [0, \infty+) & , & \quad I_o^m(t) : [-\tau, 0] \longrightarrow [0, \infty+) & \quad \text{continua}\end{aligned}$$

Por lo cual, existe $\varpi > s$ y hay una única solución del Sistema (3.43) en $[s - \tau, \varpi]$.

Positividad de las Soluciones

Después de haber garantizado la Existencia y la Unicidad del Sistema (3.43), analizaremos la Positividad de las Soluciones mediante el **Teorema 2.8**.

Como $i, t, x = (S_h, I_h, S_m, I_m)$, $y = (S_h(t - \tau), I_h(t - \tau), S_m, (t - \tau)I_m(t - \tau)) \in \mathbb{R}_+^n$
Sea $x, y \geq 0$ (consideraciones del Problema Epidemiológico)

- Para $S_h = 0$: $F_1(t, 0, I_h, S_m, I_m, y) = \sigma_h H_{NS} \geq 0$
- Para $I_h = 0$: $F_2(t, S_h, 0, S_m, I_m, y) = \beta_m \cdot w \cdot y_1 \cdot y_4 \geq 0$
- Para $S_m = 0$: $F_3(t, S_h, I_h, 0, I_m, y) = \sigma_m M_{NS} \geq 0$
- Para $I_m = 0$: $F_4(t, S_h, I_h, S_m, 0, y) = \beta_h \cdot S_m \cdot I_h \geq 0$

Luego, la condición inicial $S_o^h(t), I_o^h(t), S_o^m(t), I_o^m(t)$ satisface $S_o^h(t), I_o^h(t), S_o^m(t), I_o^m(t) \geq 0$, luego la Solución correspondiente del Sistema (3.43) satisface $S_h(t), I_h(t), S_m(t), I_m(t) \geq 0$ para todo $t \geq s$ donde está definido el Sistema.

3.6.2. Análisis Cualitativo del Modelo Matemático

Realizaremos el análisis cualitativo del Modelo Matemático SI correspondiente al sistema (3.43) siendo un método que nos permite saber como es su comportamiento a través del tiempo debido que el Sistema de Ecuaciones con Retardo es del tipo No Lineal, por lo cual tendremos que hallar en primer lugar sus puntos críticos para saber cuales son los puntos estacionarios que tiene el Modelo, en este caso, como se desarrolló en la sección 2 y sección 3. Esto quiere decir, que se hallará los puntos críticos del Sistema de E.D.R. como si fuera un Sistema de E.D.O.

Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio lo hallaremos igualando a cero cada una de las ecuaciones del Sistema de Ecuaciones.

$$\begin{cases} \sigma_h H_{NS} - \beta_m \cdot w \cdot S_h \cdot I_m - \mu S_h & = 0 \\ \beta_m \cdot w \cdot S_h(t - \tau) \cdot I_m(t - \tau) - (\alpha + \mu) I_h & = 0 \\ \sigma_m M_{NS} - \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - \mu S_m & = 0 \\ \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - (\varepsilon + \mu) I_m & = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Un detalle importante para hallar los puntos críticos de un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo, es considerar que cuando se iguala a cero cada ecuación del sistema es porque buscamos los puntos estacionarios que no cambian en el tiempo. La misma noción que en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias se realiza en las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, por lo cual el término que contiene el retardo se consideraría como una variable que no contenga el retardo, solamente para hallar los puntos críticos. Por lo cual el Sistema quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \sigma_h H_{NS} - \beta_m \cdot w \cdot S_h \cdot I_m - \mu S_h & = 0 \\ \beta_m \cdot w \cdot S_h \cdot I_m - (\alpha + \mu) I_h & = 0 \\ \sigma_m M_{NS} - \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - \mu S_m & = 0 \\ \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - (\varepsilon + \mu) I_m & = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

Desarrollando el sistema (3.44) obtenemos los siguientes puntos criticos.

El Punto Libre de Infección en el Estado Estacionario del Modelo

Para la Población Masculina tanto Suceptible como Infectado se tiene:

$$\begin{aligned} S_h &= \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu} \\ I_h &= 0 \end{aligned}$$

Para la Población Femenina tanto Susceptible como Infectada se tiene:

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu} \\ I_m &= 0 \end{aligned}$$

donde: $S_h \neq 0$, $S_m \neq 0$ y además son positivos no nulos.

Por consiguiente, se tiene el Punto Crítico:

$$\widetilde{E}_1 = \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0 \right) \quad (3.46)$$

El presente punto crítico nos ayudará a saber sobre el comportamiento de las Soluciones de nuestro Sistema de Ecuaciones mediante su Análisis Cualitativo que se desarrollará más adelante.

El Punto Endémico en el Estado Estacionario del Modelo

Para la Población Masculina tanto Susceptible como Infectado se tiene:

$$S_h = \frac{\sigma_h \beta_h (\varepsilon + \mu) H_{NS} + \mu (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\beta_h (w \sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu))}$$

$$I_h = \frac{w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{\beta_h (\alpha + \mu) (\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) w)}$$

Para la Población Femenina tanto Susceptible como Infectada se tiene:

$$S_m = \frac{(\alpha + \mu) (\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) w)}{\beta_m (\sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu))}$$

$$I_m = \frac{w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)}{(\varepsilon + \mu) (\sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\alpha + \mu))}$$

Sea la siguiente consideración:

$$R_1 = w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)$$

$$R_2 = w \sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) > 0$$

$$R_3 = (\alpha + \mu) (\sigma_m \beta_m M_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) w) > 0$$

$$R_4 = \sigma_h \beta_h H_{NS} + \mu (\varepsilon + \mu) > 0$$

Por consiguiente, se tiene el Punto Crítico:

$$\widetilde{E}_2 = \left(\frac{(\varepsilon + \mu) R_4}{\beta_h R_2}; \frac{R_1}{\beta_h R_3}; \frac{R_3}{\beta_m R_4}; \frac{R_1}{(\varepsilon + \mu) R_4} \right) \quad (3.47)$$

Teorema 3.17 (Existencia de los Puntos de Equilibrio)

Sea el Sistema (3.43), y sean sus puntos críticos expresados en (3.46), (3.47).

1. La expresión (3.46) no tiene restricción alguna. (trivial).
2. Si $w \cdot R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M > 1$, entonces la expresión (3.47) estará bien definida epidemilógicamente.

Demostración de (2):

$$w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} - \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu) > 0$$

$$w \sigma_m \beta_m \sigma_h \beta_h M_{NS} H_{NS} > \mu^2 (\alpha + \mu) (\varepsilon + \mu)$$

$$w \left(\frac{M_{NS}}{\mu} \right) \left(\frac{H_{NS}}{\mu} \right) \left(\frac{\sigma_h}{\alpha + \mu} \right) \left(\frac{\sigma_m}{\varepsilon + \mu} \right) > 1$$

Por consiguiente, se obtiene:

$$w \cdot R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M > 1$$

Observación: Como se indicó en las secciones anteriores (primera y segunda sección) del presente capítulo. Los puntos críticos en el Estado Estacionario del Sistema en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias serán las mismas en el Sistema de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

3.6.3. Linelización del Sistema

Del mismo modo que se hizo en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con respecto al Sistema No Lineal, mediante una linealización del Sistema. Por lo cual hallaremos la matriz Jacobiana con respecto a las variables sin Retardo, y una matriz Jacobiana con respecto a las variables con Retardo. Como habíamos realizado para el Modelo SI Básico con Dinámica Vital (sin coeficiente de Control, o también llamado Estrategia de Control), realizaremos el mismo procedimiento para el presente Modelo Matemático. Considerando la perturbación realizada en cada paso de nuestro análisis. [10,30,35,42,43].

Sea la consideración: $d_1 = \alpha + \mu$, $d_2 = \varepsilon + \mu$,

Por lo cual la Matriz Jacobiana sin Retardo sería el siguiente:

$$J(S, I) = \begin{bmatrix} -\beta_m I_m - \mu & 0 & 0 & -\beta_m S_h \\ 0 & -d_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_h S_m & -\beta_h I_h - \mu & 0 \\ 0 & \beta_h S_m & \beta_h I_h & -d_2 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Por lo cual la Matriz Jacobiana con Retardo sería el siguiente:

$$J_\tau(S, I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_m \cdot w \cdot I_m(t - \tau) & 0 & 0 & \beta_m \cdot w \cdot S_h(t - \tau) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Vemos que el determinante de J_τ es nula ($|J_\tau| = 0$), este detalle lo consideraremos más adelante.

Teniendo las matrices Jacobianas, formaremos el polinomio característico que tiene la forma:

$$p(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id - J - J_\tau \cdot e^{-\lambda\tau}) = 0$$

con lo cual, el polinomio característico a nuestro modelo sería

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + \beta_m I_m + \mu & 0 & 0 & \beta_m S_h \\ -e^{-\lambda\tau} \cdot \beta_m \cdot w \cdot I_m(t - \tau) & \lambda + d_1 & 0 & -e^{-\lambda\tau} \cdot \beta_m \cdot w \cdot S_h(t - \tau) \\ 0 & \beta_h S_m & \lambda + \beta_h I_h + \mu & 0 \\ 0 & -\beta_h S_m & \beta_h I_h & \lambda + d_2 \end{vmatrix} \quad (3.50)$$

así, el polinomio característico

$$p(\lambda) = (\lambda^4 + \bar{a}\lambda^3 + \bar{b}\lambda^2 + \bar{c}\lambda + \bar{d}) - (\tilde{a}\lambda^2 + \tilde{b}\lambda + \tilde{c}) \cdot e^{-\lambda\tau} \quad (3.51)$$

Donde:

- $\bar{a} = \beta_m I_m + \beta_h I_h + d_1 + d_2 + 2\mu$
- $\bar{b} = (\beta_m I_m + \beta_h I_h)(d_1 + d_2 + \mu) + \beta_m I_m \beta_h I_h + d_1 d_2 + \mu^2 + 2\mu(d_1 + d_2)$
- $\bar{c} = (\beta_m I_m + \beta_h I_h)(d_1 \mu + d_2 \mu + d_1 d_2 + \mu) + \mu(\mu + \mu d_1 + \mu d_2 + 2d_1 d_2)$
- $\bar{d} = \beta_m I_m \beta_h I_h d_1 d_2 + \mu d_1 d_2 (\mu^2 + \beta_m I_m + \beta_h I_h)$

- $\tilde{a} = wS_h(t - \tau)S_m\beta_h^2$
- $\tilde{b} = wI_m(t - \tau)S_hS_m\beta_m^2\beta_h + wS_h(t - \tau)S_m\beta_h^2(\beta_mI_m + 2\beta_hI_h + 2\mu)$
- $\tilde{c} = wI_mS_h(t - \tau)S_m\beta_h^2\beta_m(2\beta_hI_h + \mu) - wI_m(t - \tau)S_hS_m\beta_m^2\beta_h(\mu + \beta_h) + w\mu S_h(t - \tau)S_m\beta_h^2(\mu + 2\beta_h)$

Punto Libre de Infección

El punto libre de infección $\tilde{E}_1 = \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0 \right)$ representa cuando en un instante del tiempo ya no hay infectados, solamente hay susceptibles. Analizaremos este punto de equilibrio para saber como es su comportamiento a través del tiempo.

$$J\left(\tilde{E}_1\right) = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & 0 & 0 & \beta_m S_h \\ 0 & \lambda + d_1 & 0 & e^{-\lambda\tau} \cdot \beta_m \cdot w \cdot S_h(t - \tau) \\ 0 & \beta_h S_m & \lambda + \mu & 0 \\ 0 & -\beta_h S_m & 0 & \lambda + d_2 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

luego, el polinomio característico para \tilde{E}_1

$$p(\lambda) = (\lambda + \mu)^2 \left(\lambda^2 + (d_1 + d_2)\lambda + d_1 d_2 - \left(\frac{\beta_h \sigma_h H_{NS}}{\mu} \right) \left(\frac{\beta_m \sigma_m M_{NS}}{\mu} \right) \cdot w e^{-\lambda\tau} \right)$$

así, se puede deducir

$$\lambda + \mu = 0 \quad (3.53)$$

$$\lambda^2 + (d_1 + d_2)\lambda + d_1 d_2 - \left(\frac{\beta_h \sigma_h H_{NS}}{\mu} \right) \left(\frac{\beta_m \sigma_m M_{NS}}{\mu} \right) \cdot w e^{-\lambda\tau} = 0$$

por consiguiente se obtiene los dos autovalores del polinomio característico

$$\lambda_1 = -\mu < 0$$

ahora, el siguiente autovalor debería ser negativo o tener parte real negativa para poder concluir que es estable el punto libre de infección.

Sean los polinomios,

$$\bar{p}(\lambda) = \lambda^2 + (d_1 + d_2)\lambda + d_1 d_2$$

$$\bar{q}(\lambda) = -w \left(\frac{\beta_h \sigma_h H_{NS}}{\mu} \right) \left(\frac{\beta_m \sigma_m M_{NS}}{\mu} \right)$$

así, el polinomio característico tiene la forma

$$p(\lambda) = \bar{p}(\lambda) - \bar{q}(\lambda) \cdot e^{-\lambda\tau} \quad (3.54)$$

Teniendo la consideración de $|J_\tau| = 0$. Analizaremos la estabilidad local del punto Libre de Infección, por lo cual ahora utilizaremos los resultados de la **Proposición 2.4**, en particular el **Corolario 2.4**, debido a una consideración que el polinomio $\bar{q}(\lambda)$ es una constante. Con este Corolario conseguiremos establecer la Estabilidad Absoluta. [10].

El Corolario 2.4, tiene dos versiones que nos permite garantizar la Estabilidad Absoluta, por lo cual realizaremos la prueba para estos dos casos para verificar que en ambos casos se obtiene la misma condición que nos permite obtener la Estabilidad para el Punto Libre de Infección del Modelo Matemático.

■ Primera Forma del **Corolario 2.4**

Todas las raíces de $\bar{p}(\lambda)$ son reales y tienen parte negativa, y $|\bar{p}(0)| > |c|$

Tenemos: $\bar{p}(\lambda) = \lambda^2 + (d_1 + d_2)\lambda + d_1d_2$ y $\bar{q}(\lambda) = -\frac{\beta_h\sigma_h H_{NS}\beta_m\sigma_m M_{NS}}{\mu^2} \cdot e^{-w\tau}$

La discriminante de $\bar{p}(\lambda)$:

$$\Delta = (d_1 + d_2)^2 - 4d_1d_2 = (d_1 - d_2)^2 \geq 0$$

Las raíces de $\bar{p}(\lambda)$:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -d_2 < 0 \\ \lambda_2 &= -d_1 < 0\end{aligned}$$

Por consiguiente la primera condición está demostrada. Pasaremos a la segunda condición.

$$(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) > \left| -\frac{\beta_h\sigma_h H_{NS}\beta_m\sigma_m M_{NS}}{\mu^2} \cdot w \right|$$

Luego

$$(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) > \frac{\beta_h\sigma_h H_{NS}\beta_m\sigma_m M_{NS}}{\mu^2} \cdot w$$

La expresión anterior podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$w \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu} \right) \left(\frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu} \right) \left(\frac{\beta_h}{\alpha + \mu} \right) \left(\frac{\beta_m}{\varepsilon + \mu} \right) < 1$$

Por consiguiente:

$$w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M < 1 \quad (3.55)$$

■ Segunda Forma del **Corolario 2.4**

Sea $p(\lambda) = \lambda^2 + (d_1 + d_2)\lambda + d_1d_2$ $d_1; d_2 > 0$

Se debe cumplir: $d_1d_2 > \left| -\frac{e^{-w\tau}\beta_h\sigma_h H_{NS}\beta_m\sigma_m M_{NS}}{\mu^2} \right|$

En primer lugar, se debe cumplir:

$$(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) > \left| -\frac{\beta_h\sigma_h H_{NS}\beta_m\sigma_m M_{NS}}{\mu^2} \cdot w \right|$$

luego

$$(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu) > \frac{\beta_h\sigma_h H_{NS}\beta_m\sigma_m M_{NS}}{\mu^2} \cdot w$$

La expresión anterior podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$w \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu} \right) \left(\frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu} \right) \left(\frac{\beta_h}{\alpha + \mu} \right) \left(\frac{\beta_m}{\varepsilon + \mu} \right) < 1$$

Por consiguiente:

$$w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M < 1 \quad (3.56)$$

En segundo lugar, se debe cumplir:

$$(d_1 + d_2)^2 \geq 2d_1d_2$$

$$d_1^2 + d_2^2 \geq 0$$

Finalmente, se puede concluir: $\Re(\lambda) < 0$ para cada raíz λ , y $\forall \tau > 0$.

Como se puede apreciar la condición que se debe cumplir para garantizar que \widetilde{E}_1 sea asintóticamente Estable está representada en la ecuación (3.55) mediante la primera forma del Corolario 2.4. Del mismo modo, en la segunda forma del Corolario la condición para garantizar que \widetilde{E}_1 sea asintóticamente Estable está representada en la ecuación (3.56). Lo cual, es la misma condición necesaria para la Estabilidad en el Punto Libre de Infección $\widetilde{E}_1 = \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0 \right)$.

Punto Endémico

El punto libre de infección $\widetilde{E}_2 = \left(\frac{(\varepsilon + \mu)R_4}{\beta_h R_2}; \frac{R_1}{\beta_h R_3}; \frac{R_3}{\beta_m R_4}; \frac{R_1}{(\varepsilon + \mu)R_4} \right)$ representa cuando en un instante del tiempo la cantidad de Susceptibles e Infectados no varía. Analizaremos este punto de equilibrio para saber como es su comportamiento a través del tiempo.

Sea la consideración: $d_1 = \alpha + \mu$, $d_2 = \varepsilon + \mu$

Con lo cual, el polinomio característico a nuestro modelo sería:

$$J\left(\widetilde{E}_2\right) = \begin{bmatrix} \lambda + \frac{\beta_m R_1}{d_2 R_4} + \mu & 0 & 0 & \frac{d_2 \beta_m R_4}{\beta_h R_2} \\ e^{-\lambda \tau} \cdot \frac{\beta_m R_1}{d_2 R_4} \cdot w & \lambda + d_1 & 0 & e^{-\lambda \tau} \cdot \frac{d_2 \beta_m R_4}{\beta_h R_2} \cdot w \\ 0 & \frac{\beta_h R_3}{\beta_m R_4} & \lambda + \frac{R_1}{R_3} + \mu & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_h R_3}{\beta_m R_4} & -\frac{R_1}{R_3} & \lambda + d_2 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Por lo cual, su polinomio característico

$$p_{\widetilde{E}_2}(\lambda) = \bar{p}(\lambda) + \bar{q}(\lambda) \cdot e^{-\lambda \tau} \quad (3.58)$$

Para representar mejor el polinomio $\bar{p}(\lambda)$, utilizaremos algunas variables auxiliares.

$$\widehat{a} = (2\mu + d_1 + d_2) + \frac{R_1}{R_3} + \frac{\beta_m R_1}{d_2 R_4}$$

$$\widehat{b} = (2\mu d_2 + d_1 d_2) + \frac{\mu}{R_4} (\mu + 2d_1) + \frac{R_1}{R_3} \left(d_1 + \mu + \frac{\beta_m R_1}{d_2 R_4} \right) + \frac{R_1}{R_4} \left(\beta_m + \beta_m \mu + \frac{\beta_m d_1}{d_2} + \frac{d_2}{R_3} \right)$$

$$\widehat{c} = \frac{R_1 R_1}{R_4 R_3} \left(\beta_m + \frac{\beta_m d_1}{d_2} \right) + \frac{R_1}{R_4} \left(\beta_m \mu + \frac{\beta_m d_1}{d_2} \right) + \frac{R_1}{R_3} (\mu d_1 + \mu d_2 + d_1 d_2) + \mu^2 d_1 + 2\mu d_2 + d_1 d_2$$

$$\widehat{d} = \frac{R_1}{R_4} (\beta_m \mu d_1 + \beta_m d_1) + \mu d_1 d_2 \frac{R_1}{R_3} + \mu^2 d_1 d_2$$

luego,

$$\bar{p}(\lambda) = \lambda^4 + \widehat{a} \cdot \lambda^3 + \widehat{b} \cdot \lambda^2 + \widehat{c} \cdot \lambda + \widehat{d}$$

Donde estas variables auxiliares: $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}, \widehat{d} > 0$ (positivas)

Ahora, el polinomio $\bar{q}(\lambda)$

$$\bar{q}(\lambda) = -\frac{R_3}{R_2} (\lambda^2 + 2\mu\lambda + \mu^2) \cdot w$$

Teniendo la consideración de $|J_\tau| = 0$. Analizaremos la estabilidad local del punto Endémico, por lo cual ahora utilizaremos los resultados de la **Proposición 2.4**, para poder conseguir establecer la Estabilidad Absoluta. [10].

En primer lugar, analizaremos la primera condición de la Proposición 2.4 con respecto al polinomio $\bar{p}(\lambda)$. Realizaremos el método de Routh-Hurwitz para satisfacer esta condición.

La primera condición del método es que los coeficientes del polinomio $\bar{p}(\lambda)$ deben ser positivos, lo cual cumple el polinomio: $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d} > 0$.

Con lo cual formaremos las Determinantes de método, donde hay que garantizar que son positivas. Con esto, mostraremos que la primera condición de la Proposición 2.4 está demostrada.

$$\begin{aligned} H_1 &= \hat{a} \\ H_2 &= \begin{vmatrix} \hat{a} & 1 \\ \hat{c} & \hat{b} \end{vmatrix} = \hat{a}\hat{b} - \hat{c} \\ H_3 &= \begin{vmatrix} \hat{a} & 1 & 0 \\ \hat{c} & \hat{b} & \hat{a} \\ 0 & \hat{d} & \hat{c} \end{vmatrix} = \hat{a}\hat{b}\hat{c} - \hat{a}^2\hat{d} - \hat{c}^2 \\ H_4 &= \begin{vmatrix} \hat{a} & 1 & 0 & 0 \\ \hat{c} & \hat{b} & \hat{a} & 1 \\ 0 & \hat{d} & \hat{c} & \hat{b} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{d} \end{vmatrix} = \hat{d}(\hat{a}\hat{b}\hat{c} - \hat{a}^2\hat{d} - \hat{c}^2) \end{aligned}$$

Ahora que impondremos las condiciones para que se cumpla el método de Routh-Hurwitz.

$$H_1 > 0 \iff \hat{a} > 0 \tag{3.59}$$

$$H_2 > 0 \iff \hat{a}\hat{b} > \hat{c} \tag{3.60}$$

$$H_3 > 0 \iff \hat{a}\hat{b}\hat{c} > \hat{a}^2\hat{d} + \hat{c}^2 \tag{3.61}$$

$$H_4 > 0 \iff \hat{a}\hat{b}\hat{c} > \hat{a}^2\hat{d} + \hat{c}^2 \tag{3.62}$$

Por consiguiente, el Método de Hurwitz se cumplirá bajo la imposición de las condiciones (3.60) y (3.61), con lo cual el polinomio $\bar{p}(\lambda)$ satisficará la primera condición de la Proposición 2.4 para la Estabilidad Absoluta.

Para la segunda condición se debe garantizar: $|\bar{q}(iy)| < |\bar{p}(iy)|$, $0 \leq y < +\infty$

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad |\bar{p}(iy)| &= \left| (y^4 - \widehat{b}y^2 + \widehat{d}) + (\widehat{c}y - \widehat{a}y^3) \cdot i \right| \\
|\bar{p}(iy)| &= \sqrt{(y^4 - \widehat{b}y^2 + \widehat{d})^2 + (\widehat{c}y - \widehat{a}y^3)^2} \\
\blacksquare \quad |\bar{q}(iy)| &= \left| -\frac{R_3^*}{R_2^*} \cdot w \left((\mu^2 - y^2) - (2\mu y) \cdot i \right) \right| \\
|\bar{q}(iy)| &= \frac{R_3}{R_2} \cdot w \sqrt{(\mu^2 - y^2)^2 + (2\mu y)^2}
\end{aligned}$$

Con estas expresiones debemos garantizar que se cumpla la segunda condición. Por consiguiente se debe cumplir la siguiente desigualdad.

$$w^2 \left(\frac{R_3}{R_2} \right)^2 (y + \mu)^2 < (y^4 - \widehat{b}y^2 + \widehat{d})^2 + (\widehat{c}y - \widehat{a}y^3)^2 \quad (3.63)$$

La tercera condición que se debe verificar:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty+} \left| \frac{\bar{q}(\lambda)}{\bar{p}(\lambda)} \right| = 0$$

En efecto, se cumple esta condición. Debido que el grado de $\bar{q}(\lambda)$ es 2, y de $\bar{p}(\lambda)$ es 4. Esto indica que $\bar{p}(\lambda)$ al tener mayor grado, se incrementa con mayor rapidez que $\bar{q}(\lambda)$. Por lo cual en el límite al infinito, la expresión tiende al cero.

Por consiguiente, al cumplirse estas tres condiciones bajo las restricciones mostradas, es decir, las condiciones de las ecuaciones (3.60), (3.61), (3.63) se obtendrá la Estabilidad Absoluta que el **Proposición 2.4** indica. Esto quiere decir, que para cualquier raíz λ y para todo $\tau > 0$ se obtiene la estabilidad absoluta para cualquier valor del retardo discreto. Epidemiológicamente, el Punto Endémico $\widetilde{E}_2 = \left(\frac{(\varepsilon + \mu)R_4}{\beta_h R_2}; \frac{R_1}{\beta_h R_3}; \frac{R_3}{\beta_m R_4}; \frac{R_1}{(\varepsilon + \mu)R_4} \right)$ es asintóticamente estable.

Teorema 3.18 (Estabilidad)

Sea $R_1 = w\sigma_m\beta_m\sigma_h\beta_h M_{NS}H_{NS} - \mu^2(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu)$, y el Modelo representado en (3.43)

1. Si $w \cdot R_S^H \cdot R_S^M \cdot R_I^H \cdot R_I^M < 1$, el punto Libre de Infección $\widetilde{E}_1 = \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0 \right)$ es asintóticamente Estable.
2. Si $R_1 > 0$, $\widehat{a}\widehat{b} > \widehat{c}$, $\widehat{a}\widehat{b}\widehat{c} > \widehat{a}^2\widehat{d} + \widehat{c}^2$, $w^2 \left(\frac{R_3^*}{R_2^*} \right)^2 (y + \mu)^2 < (y^4 - \widehat{b}y^2 + \widehat{d})^2 + (\widehat{c}y - \widehat{a}y^3)^2$,
donde: $0 \leq y < \infty+$, el punto Endémico $\widetilde{E}_2 = \left(\frac{(\varepsilon + \mu)R_4}{\beta_h R_2}; \frac{R_1}{\beta_h R_3}; \frac{R_3}{\beta_m R_4}; \frac{R_1}{(\varepsilon + \mu)R_4} \right)$ es asintóticamente Estable.

Después de haber realizado el estudio cualitativo del modelo matemático epidemiológico SI expresado en (3.25) mediante los teoremas presentados y los resultados obtenidos para conseguir la estabilidad del sistema. Podemos deducir las diferentes restricciones que se presentan para obtenerlo, por mientras que en el estudio epidemiológico nos permite conocer las interacciones que existen entre las tasas epidemiológicas consideradas y las poblaciones comprendidas en la presente investigación.

En el presente capítulo se han presentado diferentes modelos matemáticos epidemiológicos SI con sus diferentes consideraciones y enfoques que tienen debido al objetivo que han sido desarrollados. Primero se comenzó con el modelo SI considerando solamente las poblaciones epidemiológicas Susceptibles e Infectados, donde la transmisión de la enfermedad era instantánea para poder contagiar a otros individuos; luego se consideró que la enfermedad tuviera un periodo de incubación antes de poder ser transmitida a otros individuos por los infectados, un claro ejemplo la enfermedad de transmisión sexual del VIH/SIDA, siendo el estudio principal de esta investigación. Después se extendió del modelo matemático epidemiológico SI de las poblaciones epidemiológicas a considerar las poblaciones demográficas por sexo (Hombres y mujeres) donde se consideraba una transmisión heterosexual para el presente estudio, con lo cual ayudaba a extender el estudio matemático y también ayudaba de mejor manera al estudio epidemiológico debido que se tenía información y se consideraba el comportamiento de cada población.

Más adelante, se considerara como un trabajo futuro realizar una extensión aun mayor, que en la actualidad se está considerando bastante alarmante, que es la interacción de poblaciones homosexuales. Por lo cual, de un modelo matemático epidemiológico SI donde están las poblaciones susceptibles e infectados, ahora se consideraran las nuevas poblaciones demográficas por género (hombres, mujeres, homosexuales), esto indicará nuevas consideraciones de las interacciones entre todas las poblaciones al momento que se pueda transmitir la enfermedad. Para finalizar consideraremos el término **género** en sentido amplio, es “lo que significa ser varón o mujer, y cómo define este hecho las oportunidades, los papeles, las responsabilidades y las relaciones de una persona”. Mientras que el sexo es una característica biológica, el género está definido socialmente. En algunas sociedades el género es lo que significa ser varón o mujer en contraposición al grupo de cromosomas con los que se nace. El género conforma las oportunidades que se le ofrecen a una persona en la vida, los papeles que puede ejercer y los tipos de relaciones que puede tener: las normas sociales que influyen enormemente en la propagación del VIH/SIDA. [71,81,82].

Nuestras consideraciones dentro la concepción del sexo biológico (Hombre y Mujer) tenemos que distinguir algunas perspectivas sociales. Para la mujer, la adopción de riesgos y la vulnerabilidad a la infección se ven incrementadas por normas que hacen que esté poco indicado que tenga una buena información acerca de la sexualidad o que proponga el empleo del preservativo; por la relación habitual que existe entre el consumo de sustancias tóxicas y el intercambio de relaciones sexuales por drogas o dinero; y por el recurso al trabajo sexual por parte de las mujeres migrantes, las refugiadas y otras que sufren la desintegración de la familia. Para el hombre, el riesgo y la vulnerabilidad se ven aumentados por las normas que le dificultan el reconocimiento de deficiencias en sus conocimientos sobre la sexualidad; por la relación que existe entre socializar y consumir alcohol. Para los jóvenes, las normas que desincentivan el acceso a la información y los servicios que fomentan unas relaciones sexuales más seguras; que prescriben la virginidad femenina (lo cual puede favorecer prácticas alternativas como las relaciones sexuales anales); y que empujan a los varones jóvenes a tener “conquistas” sexuales más pronto y con más frecuencia, también aumentan su riesgo y vulnerabilidad a la infección. [81].

En las sociedades donde el VIH se considera un signo de promiscuidad sexual, las normas por razón del sexo configuran la forma como se perciben los hombres y mujeres infectados por el VIH, en las que la mujer seropositiva se enfrenta con un mayor estigma y rechazo que el hombre. Esas normas influyen también en el modo en que los miembros de la familia viven y afrontan el VIH y las muertes por SIDA. Así pues, las respuestas a la epidemia deben fundamentarse en el conocimiento de las expectativas y las necesidades relacionadas con el género, y quizá necesiten enfrentarse a normas adversas. [81].

Capítulo 4

Simulación Computacional

La Simulación Computacional en el ámbito del Modelamiento Matemático ha permitido enormemente tener una mejor perspectiva de cómo se comportan las soluciones a través del tiempo, es decir, las simulaciones computacionales nos permitirá poder encontrar, y analizar la solución del modelo matemático de acuerdo a las condiciones iniciales que se introduzca; como el modelo matemático que se ha desarrollado es un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y luego se ha perturbado a un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo, y también en muchas ocasiones es complicado hallar la solución analítica de un sistema, por lo cual se recurre generalmente a los Métodos numéricos para poder encontrar una adecuada solución aproximada que tenga el menor error posible para que pueda considerarse una buena solución.

La solución numérica de modelos expresados como sistemas dinámicos ha sido de gran interés durante décadas, debido que por el camino de un análisis directo o analítico se hace difícil de hallar la solución exacta. Por otro lado, tenemos el análisis cualitativo del sistema dinámico que nos permite analizar el comportamiento de las soluciones en su estado estacionario; en estos casos, el análisis numérico nos brinda gran la ayuda de complementar el análisis cualitativo para poder tener una mejor concepción del modelo. Como mencionamos hay muchos sistemas físicos, químicos, económicos y biológicos que pueden ser modelados por las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) y por las Ecuaciones Diferenciales con Retardo (E.D.R.), y consecuentemente realizar sus respectivas simulaciones computacionales. [6,7].

Sin embargo, existe un número significativo de sistemas dinámicos aplicados a las ciencias e ingenierías que requieren en sus modelos, la inclusión de retardos. A pesar de su importancia, la simulación numérica de modelos descritos por las Ecuaciones Diferenciales con Retardo (E.D.R.) se encuentra cubierta por un mínimo de investigadores, y también, el estado del arte del desarrollo del software correspondiente está mucho menos desarrollado que el caso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Se han desarrollado recientemente buenos algoritmos de integración para las Ecuaciones Diferenciales con Retardo (Shampine, Thompson, y colaboradores) llamados "**dde23**" implementados en *MATLAB*. Los autores también proveen un algoritmo en Fortran, llamado `dde_solver`. Ambos consisten en algoritmos clásicos de integración numérica en el sentido de que están basados en la idea clásica de la discretización del tiempo (Método Numérico por tiempos discretos), utilizada en la mayoría de la literatura numérica para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y las Ecuaciones Diferenciales con Retardo. [29]. Del mismo modo, en el Software Estadístico *Rstudio* también nos permite poder simular computacionalmente las Ecuaciones Diferenciales con Retardo como las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias entre otras, como *Mathematica*, *Maple* y *Python*. [29].

En el estudio de las Soluciones Numéricas hay diferentes métodos para encontrar las Soluciones Aproximadas, las cuales son un adecuado complemento para el estudio cualitativo de las Soluciones. Para nuestro caso mencionaremos dos formas de proceder con las Simulaciones Computacionales: el Método por Tiempo Discreto, el cual se usa en los softwares, *Matlab, Mathematica, Maple, Python y RStudio*, y el Método por Eventos Discretos, utilizaremos los Métodos QSS en PowerDEVS. Ambos métodos tienen ventajas y desventajas para aproximar las soluciones de un Sistema, por lo cual, depende del Fenómeno que se intenta modelar y la adecuada utilización de los Métodos Numéricos. Cabe resaltar, que ambos métodos son válidos al realizar las simulaciones computacionales debido que ambos convergen a la solución numérica. No solo es una apreciación computacional sino también matemática, debido que se demuestra mediante Teoremas la equivalencia de la Convergencia de las Soluciones tanto por el método de Tiempo Discreto y el método de Evento Discreto. [6,7,8,9].

En el presente capítulo, analizaremos las simulaciones computacionales del modelo mediante dos métodos, con dos sentidos diferentes pero equivalentes, lo cual nos brindará un campo más amplio con respecto a la aproximación de las soluciones de los sistemas dinámicos, en nuestro caso, las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, como mencionamos el análisis numérico clásico son los métodos numéricos por tiempos discretos, por lo cual, el otro análisis numérico que se ha ido avanzando el estado del arte de la integración numérica de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, presentando una nueva clase de algoritmos, denominados **DQSS**, basados en la cuantificación de las variables de estado en lugar de la discretización del tiempo, a lo que se le denomina métodos numéricos por eventos discretos. [7].

Los algoritmos **DQSS** fueron implementados en la herramienta del modelado y simulación en los Métodos QSS en PowerDEVS, por medio de la cual se simplifica notablemente el uso de estos algoritmos de integración. Actualmente, se encuentran disponibles algoritmos para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias hasta de orden cuatro (QSS1, QSS2, QSS3 y QSS4), las cuales numéricamente son equivalentes al método numérico clásico más conocido que es el algoritmo de Runge Kutta de orden cuatro. Ambos algoritmos pueden ser extendidos hasta el orden n . [7].

Los métodos QSS resultan ser muy útiles para la simulación de modelos E.D.R. Existe un número de razones para esta observación. QSS brinda una salida densa, preservando dicha información no sólo durante un paso de integración, sino durante la simulación completa. Las trayectorias de QSS consisten en secuencias de segmentos polinómicos. Los coeficientes de estos segmentos polinómicos cambian únicamente en instantes de eventos, es decir, cuando una variable de estado cambia su nivel de cuantificación. Para reconstruir la trayectoria de una solución, es suficiente ir almacenando cada instante inmediato futuro en el cual los coeficientes polinómicos cambiarán, permaneciendo válida, hasta tanto, la descripción polinómica actual de la solución. Procediendo de este modo, la solución completa consistirá en una secuencia finita de secciones polinómicas, de duración finita. La información para cada variable de estado puede ser mantenida por separado, dado que los métodos QSS son intrínsecamente asíncronos, es decir, cada variable de estado se actualiza independientemente del resto del sistema, cada vez que la misma cruza el siguiente umbral de cuantificación. Estas características pueden ser aprovechadas para el cálculo (interpolación) de señales con retardos. [6,7,29].

El presente capítulo se organizará de la siguiente manera. Se presentará la idea básica y constructiva de los métodos QSS, luego se mostrará la generalización del concepto de QSS aplicado a las Ecuaciones Diferenciales con Retardo y se explicarán los algoritmos DQSS en detalle, y finalmente se discutirán las propiedades numéricas de los algoritmos DQSS, es decir, la estabilidad y convergencia del método. Toda la literatura para este capítulo está basada en las investigaciones y publicaciones de los profesores ya mencionados y sus colaboradores. [6,7].

4.1. Software's Matemáticos

En la actualidad, muchos de los problemas que uno puede afrontar al intentar modelar matemáticamente de alguna problemática de nuestra realidad, se ve apoyada profundamente complementada mediante las simulaciones computacionales. Una guía para poder percibir si el camino por donde se dirige la investigación va por buen sendero, o quizás debe considerarse otra perspectiva, de tal manera que se fortalezca la idea de una investigación más cercana a la realidad.

Para lo cual, primero presentaremos un herramienta de vital importancia para poder interpretar las simulaciones computacionales para personas que no estén intimamente relacionadas con la Matemática Computacional, esto quiere decir que mediante un Interfaz Gráfico nos proporcionaría una adecuada interpretación de los parámetros que se introduzcan en el Modelo para que se pueda realizar la Simulación, y dependiendo de los datos ingresados, las gráficas se mostrarán de una manera dinámica, sencilla e interactiva. [7,8].

Recordando un poco sobre el conocimiento del manejo de la información hay que tener muchas consideraciones sobre las ventajas de diferentes paquetes computacionales, en especial, la gran diferencia de las licencias de propiedad, es decir, un paquete informático que posee una licencia de autorización para su respectivo uso de acuerdo ley. Pero también, las herramientas que brinda para el desarrollo de diferentes fenómenos de una manera más directa y accesible de tal manera que permita obtener los resultados deseados. Como se ha mencionado, hay varios software's que nos permiten realizar Simulaciones Computacionales con respecto a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, entre otras. Los más conocidos son **Matlab, Mathematica, Maple, Python, RStudio** que también se desarrolla mediante el Método de Tiempo Discreto. Por lo cual, se tiene bastantes herramientas para realizar esta labor computacional cuando se realiza alguna investigación que requiera tener simulaciones computacionales. Los programas computacionales con licencia son *Matlab, Mathematica y Maple*. Por mientras, que los programas computacionales de utilización libre son *RStudio y Python*. [7,8]



PoweDEVS es una herramienta de software de propósito para DEVS (Discrete Event System Specification), el término es ahora estándar dentro del campo de la Simulación para referirse a un formalismo modular y jerárquico para modelar y analizar sistemas de diversos tipos. El entorno permite la definición de modelos DEVS atómicos en el lenguaje **C++** que se puede acoplar entonces gráficamente en diagramas de bloques jerárquicos para crear sistemas más complejos. Una característica notable de PowerDEVS es la posibilidad de realizar simulaciones bajo un verdadero-sistema operativo de tiempo (RTAI) la sincronización con un reloj de tiempo real, lo que permite el diseño e implementación automática de los controladores digitales síncronas y asíncronas. Combinado con su biblioteca de simulación de sistema continuo, PowerDEVS es también una herramienta eficiente para la simulación en tiempo real de los sistemas físicos. Otra característica es la interconexión entre PowerDEVS y el paquete numérico Scilab. Las simulaciones PowerDEVS pueden hacer uso de las variables y funciones del espacio de trabajo de Scilab (también es un software libre), y los resultados pueden ser enviados de vuelta a Scilab para su posterior procesamiento y análisis de datos. Además de describir las principales características de la herramienta de software, el artículo también ilustra su uso con algunos ejemplos que muestran su simplicidad y eficacia en el proceso de simulación. Ha sido desarrollado en la Universidad Nacional de Rosario (Argentina) por Ernesto Kofman, Federico Bergero, Gustavo Migoni, Enrique Hansen, Joaquín Fernández, Marcelo Lapadula y Esteban Pagliero. La distribución es totalmente gratuita. [5,6,7,55,56,57,58,59].

Después de presentar dos diferentes maneras de realizar las simulaciones computacionales, también se añadirá una presentación mediante una Interfaz Grafica que ayuda bastante con la relación de los Modelos Matemáticos y con las personas que no están muy relacionadas con el análisis matemático y numérico propiamente dicho, el cual nos permite en la introducción de datos una generación de una simulación computacional que nos permita una interpretación epidemiológica adecuada a los parámetros ingresados.

4.1.1. Simulaciones Computacionales

Se presenta dos diferentes interfaces graficos donde las diferencias internas de la programación computacional son pequeñas, y en cuanto a la presentación para los usuarios debe ser una interacción más agradable para su entendimiento, y por ende, para su ayuda científica ante las problemáticas que se susciten en el ámbito de estudio. Por lo cual, presentaremos ambos interfaces para poder apreciar sus diferentes perspectivas.

Por lo cual presentaremos dos Modelos Epidemiológicos representados mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias aplicados a Enfermedades Infecciosas.

El Modelo 1, presenta un Modelo SI considerando las Poblaciones Epidemiológicas.

$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \sigma N - w \cdot \beta S \cdot I - \mu S \\ I' = w \cdot \beta S \cdot I - (\alpha + \mu) I \\ S(0) = S_o \geq 0 ; I(0) = I_o \geq 0 \\ 0 \leq \sigma, \beta, \alpha, \mu < 1 \end{array} \right. \quad (\text{Modelo 1})$$

El Modelo 2, presenta un Modelo SI considerando las Poblaciones Epidemiológicas en conjunto con las Demográficas clasificadas por Sexo.

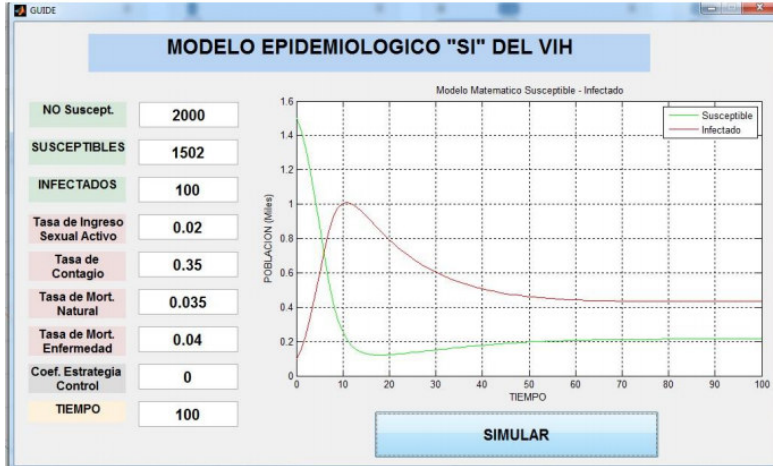
$$\left\{ \begin{array}{l} S'_h = \sigma_h H_{NS} - w \beta_m I_m S_h - \mu S_h \\ I'_h = w \beta_m I_m S_h - \alpha I_h - \mu I_h \\ S'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h I_h S_m - \mu S_m \\ I'_m = \beta_h I_h S_m - \varepsilon I_m - \mu I_m \\ S_h(0) = S_o^h \geq 0 ; I_h(0) = I_o^h \geq 0 \\ S_m(0) = S_o^m \geq 0 ; I_m(0) = I_o^m \geq 0 \\ 0 \leq \sigma_m, \sigma_h, \beta_m, \beta_h, \alpha, \varepsilon, \mu, w < 1 \end{array} \right. \quad (\text{Modelo 2})$$

Para terminar una pequeña introducción al GUIDE realizado en MATLAB. Por otro lado, se realizará una simulación con RStudio (R). Presentaremos el resultado de la Simulación Computacional para los mismos parámetros y las mismas Poblaciones Iniciales. Esto nos ayudará a percibir mejor las aprehensiones de cada interfaz gráfico.

N	=	2000	σ	=	0,02	ε	=	0,04
S	=	1502	β	=	0,35	w	=	0
I	=	100	μ	=	0,035	<i>Tiempo</i>	=	100

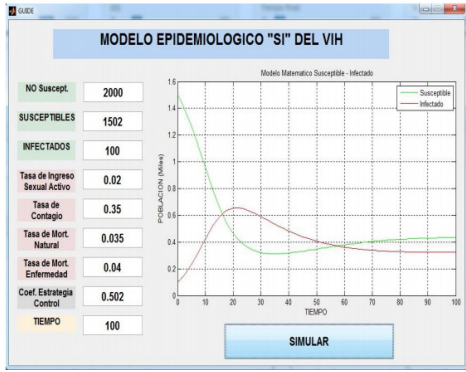
Simulación MATLAB

MATLAB nos permite realizar un GUIDE sencillo mediante ingreso de datos para generar la grafica de la Simulación computacional.

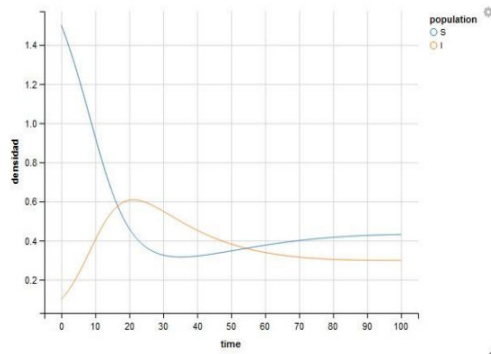


En esta sección, presentaremos algunos casos de Simulaciones Computacionales mediante uso de MATLAB y RStudio para poder seguir analizando en ambos casos una misma problemática el cual son las enfermedades infecciosas, entre una de ellas el VIH/SIDA. Por lo cual, se realizará un análisis epidemiológico mediante las Simulaciones reforzadas con el análisis cualitativo que se ha descrito anteriormente para los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Considerando las datos anteriores donde se presentó los GUIDE's de ambos software, con la diferencia en el coeficiente de Estrategia de Control, que nos mostrará una perturbación en la Simulación, lo cual se podrá inferir dos interpretaciones en los dos casos, para sacar conclusiones en las diferentes situaciones. Específicamente, el coeficiente en la primera situación se consideró que era nula, es decir, no ha habido protección de ningún tipo ante la posibilidad de contraer la enfermedad. En cambio en la segunda situación se ha considerado que la protección es del 50,2 % de los individuos que usan algún método de protección para evitar el contagio de la enfermedad. En los demás parámetros se han considerado los mismos valores, para ver el cambio únicamente en la conciencia de ver algún medio para protegerse de contraer la enfermedad por vía sexual (El Modelo se ha considerado únicamente el contagio por vía sexual). [6,29,30,38].

Considerando los siguientes parámetros para la Simulación Computacional del Modelo 1 tanto en Maltab y RStudio como una introducción a la comparación efectiva que se puede realizar ante diferentes software's matemáticos. En la actualidad, hay diversos programas computacionales que realizan satisfactoriamente esta labor.

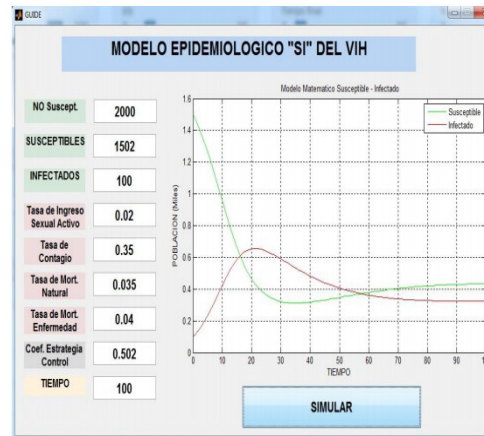
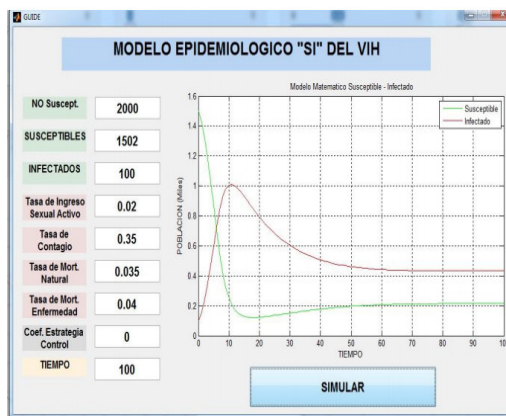


MATLAB



RStudio

(F4.1)



Después de haber realizado las dos Simulaciones se ve claramente un gran cambio entre la Simulación computacional con coeficiente de estrategia de Control al 0.00 %, y la Simulación computacional con coeficiente de estrategia de control al 50.2 %, para una mejor descripción antes de la Interpretación presentaremos ambas Simulaciones realizadas en MATLAB.

Interpretación Epidemiológica

Realmente en el estudio de la Epidemiología, algo de vital importancia, es la prevención de posibles brotes, en caso que se diera los brotes, el poder controlar que los brotes de una manera eficiente de tal forma que no se extiendan, y se pueda volver una epidemia. Para lo cual, siempre se emplea protocolos de prevención y de control para cada enfermedad, uno de los métodos que nos permiten conocer posibles situaciones son los modelos matemáticos para lo cual la recolección de datos es importante, es decir, que se mantenga un registro de la población que es potencialmente susceptible al contagio, como de la población contagiada. Esto ayuda al discernimiento oportuno, y a una respectiva toma de decisiones en tiempo real con aplicación inmediata a corto, mediano plazo y en algunas ocasiones a largo plazo.

Por ende, en las dos simulaciones realizadas se puede apreciar la situación de lo que sucedería en caso no se toma ninguna medida de prevención ni mucho menos una de control. En la primera situación se ve una caída considerable de la población susceptible mientras se da el crecimiento de la población infectada por la enfermedad, después de un tiempo considerable ambas poblaciones se mantienen constante, es decir, no hay cambios bruscos en su crecimiento o decrecimiento. Pero hay que tener en cuenta que la población infectada se mantiene superior a la de los susceptibles, lo cual, representa un dilema epidemiológico el cual debe ser contrarrestado debido que la población susceptible debe estar por encima de la población infectada. Esta situación que no es favorable para el bienestar de la sociedad, esta reacción se manifiesta en considerar, analizar, efectuar, realizar estrategias de protección y control para que se mantenga una razón mínima. Estas aplicaciones con estrategias de control son de mayor impacto cuando se realiza con tiempo a base de datos recogidos y analizados para poder realizar oportunamente intervenciones adecuadas para contrarrestar el posible crecimiento de la epidemia.

4.2. Métodos QSS para Ec. Diferenciales Ordinarias

Consideramos un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias autónoma, es decir, invariante en el tiempo representado en su forma de espacio de estados: [6,7,46].

$$x'(t) = f(x(t), u(t)) \quad (4.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de estado, y $u(t) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de trayectorias de entrada, conocidas y constantes a tramos.

El método QSS de primer orden (QSS1) realiza la simulación de una versión aproximada de la ecuación (4.1), y se lo denomina Quantized State System (QSS).

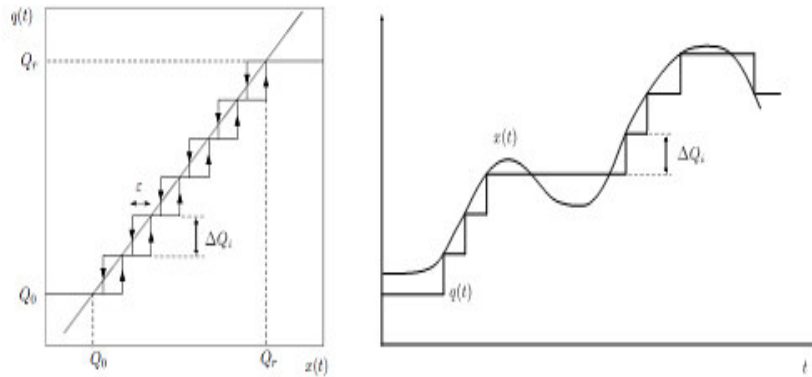
$$x'(t) = f(q(t), u(t)) \quad (4.2)$$

donde $q(t)$ es un vector de estados cuantificados que resulta de la cuantificación de las variables de estado $x_j(t)$.

Cada componente de $q(t)$ sigue una trayectoria constante a tramos, relacionada con su correspondiente componente de $x(t)$ por una función de cuantificación con histéresis definida por:

$$q_j(t) = \begin{cases} x_j(t) & \text{si } |q_j(t^-) - x_j(t)| = \Delta Q_j \\ q_j(t^-) & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (4.3)$$

con $q_j(t^-) = x_j(t_0)$, y siendo t^- el límite por izquierda del instante t . Luego, $q_j(t)$ resulta en una aproximación constante a tramos de $x_j(t)$ que cambia su valor únicamente cuando ambas trayectorias difieren en $\pm\Delta Q_j$. La magnitud ΔQ_j se denomina *quantum*. La relación entre x_j y q_j se describe en la siguiente figura:



La función de cuantificación de estado con histéresis (izquierda). Cuantificación con ancho de histéresis $\varepsilon = \Delta Q$ (derecha).

En la figura anterior (derecha), se muestra un ejemplo de cuantificación para una trayectoria arbitraria $x(t)$ aplicando la relación de la ecuación (4.3). La presencia de histéresis en QSS1 evita la presencia de oscilaciones de frecuencia infinita que impedirían el avance del tiempo de simulación.

El método QSS1 puede realizar la simulación computacional de *cualquier* sistema con la estructura de la ecuación (4.1), ofreciendo las siguientes propiedades: [6,7]

- Preserva la estabilidad numérica (sin involucrar fórmulas implícitas). La cuantificación puede ser tratada como una perturbación acotada de la Ecuación Diferencial Ordinaria original, de modo que la estabilidad no lineal puede ser estudiada por medio de funciones de Lyapunov.
- Ofrece una cota de error global, que garantiza que la solución numérica de un sistema lineal invariante en el tiempo analíticamente estable nunca diferirá de su solución analítica por una cantidad mayor a un valor finito y calculable.
- Es intrínsecamente asíncrono: cada variable de estado actualiza su valor independiente del resto de los estados, en distintos instantes. Esto ofrece una ventaja significativa en términos de performance cuando se tratan sistemas con matrices ralas, es decir, las matrices de gran tamaño en la que la mayor parte de sus elementos son ceros.
- Provee salida densa, una característica particularmente útil para métodos asíncronos, es decir, métodos que son potencialmente bloqueantes.
- Es muy eficiente al realizar la simulación a través de discontinuidades fuertes, debido a la simplicidad de los procedimientos requeridos para resolver raíces de polinomios cuando se dispone de una salida densa. Asimismo, debido a las propiedades asíncronas del método, cada discontinuidad puede manejarse eficientemente de forma aislada.

Mientras los algoritmos de integración clásicos para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias conducen a aproximaciones de tiempo discreto, es decir, a sistema de ecuaciones en diferencia, los métodos QSS no lo hacen. En cambio, la aproximación QSS de la ecuación (4.2) resulta en un Sistema de Eventos Discretos, que puede modelarse usando el formalismo DEVS.

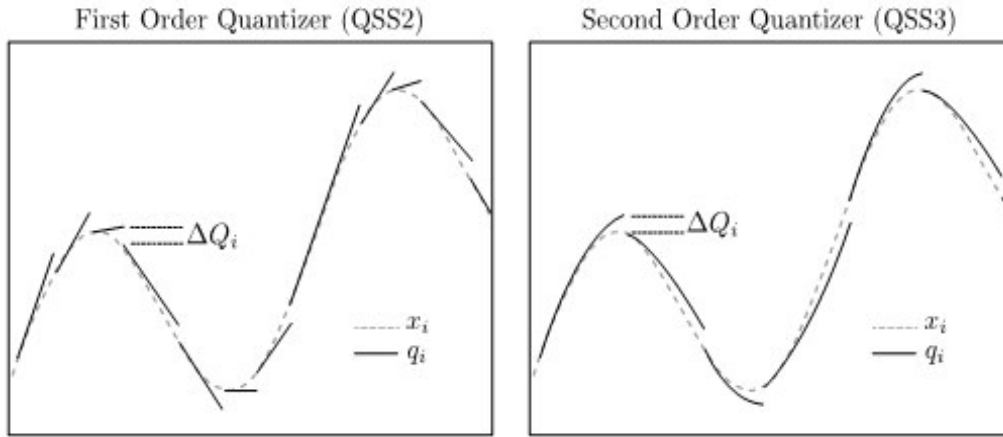
4.2.1. QSS para Órdenes Superiores

El mecanismo QSS1 descrito hasta aquí es un algoritmo de aproximación de primer orden que ofrece una relación lineal entre la precisión y el número de pasos requeridos para simular un sistema dado. Luego, exhibe un desempeño pobre para los niveles de precisión relativamente altos requeridos para la mayoría de las aplicaciones en el modelamiento epidemiológico.

Por este motivo, se han desarrollado métodos QSS de órdenes superiores, en particular, métodos QSS de segundo orden (QSS2), tercer orden (QSS3), y cuarto orden (QSS4). La idea básica es reemplazar la función de cuantificación que calcula $q_j(t)$ para preservar información de órdenes superiores sobre las señales originales $x_j(t)$.

En la cuantificación de QSS1, se preserva la primera derivada de $x_j(t)$, obteniendo para $q_j(t)$ una aproximación de constantes a tramos (tipo función escalera). En QSS2, se preserva la segunda derivada de $x_j(t)$, obteniendo para $q_j(t)$ una aproximación lineal a tramos (sucesión de rectas), mientras que en QSS3, la tercera derivada temporal de $x_j(t)$ es preservada, produciendo trayectorias parabólicas a tramos (sucesión de parábolas) en $q_j(t)$. Para QSS4, se preserva la cuarta derivada de $x_j(t)$ y se obtiene $q_j(t)$ como hipérbolas a tramos.

En la siguiente figura se muestra la cuantificación $q_j(t)$ para una señal de entrada arbitraria $x_j(t)$ usando un "quantum" ΔQ_j , para los métodos QSS2 y QSS3.



La cuantificación de señales de la figura de primer orden (usada en QSS2, izquierda) y de segundo orden (usada en QSS3, derecha).

La definición formal de los métodos QSS2, QSS3 y QSS4 es la misma que la de QSS1. Los integradores QSS2 y QSS3 aproxima al sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de la ecuación (4.1) con el sistema QSS de la ecuación (4.2), pero ahora las versiones cuantificadas de los estados q_j se calculan a partir de x_j como se muestra en la figura anterior.

En términos de los problemas de desempeño mencionados antes, los métodos QSS de orden superior ofrecen una propiedad muy importante: para QSS2, el número de pasos del algoritmo crece con la raíz cuadrada de la precisión, para QSS3, el número de pasos crece con la raíz cúbica de la precisión, y para QSS4, sucede lo propio con la raíz cuarta. Cabe destacar que QSS1, QSS2, QSS3 y QSS4 comparten las mismas propiedades teóricas (al menos para sistemas lineales). [7].

4.3. Métodos QSS para Ec. Diferenciales con Retardo

En esta sección, se presentarán los métodos Delay Quantized State System (DQSS) para resolver numéricamente las Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

Las Ecuaciones Diferenciales con Retardo se caracterizan por su capacidad de hacer referencia a valores pasados de las variables de estado. Las E.D.R. expresan la información del pasado (historia de los estados) por medio de una ó más funciones retardo ("delay functions") de la forma genérica $\tau_j(\cdot)$. Los retardos pueden ser tanto constantes del tipo $\tau_j(\cdot) = \tau_j$ (constant delay D.D.E.), o pueden ser funciones del tiempo del tipo $\tau_j(\cdot) = \tau_j(t)$ (time dependent D.D.E.). Incluso los retardos pueden depender los propios estados del sistema, acorde a $\tau_j(\cdot) = \tau_j(t; x_1(t); \dots; x_n(t))$ (state dependent D.D.E.). [6,7,46].

Se reformulará ahora la representación genérica de E.D.O. en la ecuación (4.1) para incorporar el tipo de información retardada mencionada más arriba, y luego se aplicará una función de cuantificación a las variables de estado, para obtener así lo que se llamará *métodos DQSS*.

4.3.1. Definición de DQSS

Consideramos la siguiente Ecuación Diferencial con Retardo en su representación de espacio vectorial de estados (ó State Equation System)

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau_1(x, t)); \dots; x(t - \tau_m(x, t)); u(t)) \quad (4.4)$$

donde $\tau_1(x, t) \geq 0$ para todo t, x y para todo j , y el resto de las variables y funciones quedan definidas como en el caso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en la ecuación (4.1).

Consideramos también la *historia inicial* :

$$x(t) = S(t) \quad ; \quad -\tau_{\text{máx}} < t < 0 \quad (4.5)$$

donde $\tau_{\text{máx}}$ es una constante positiva que satisface $t - \tau_i(x, t) > -\tau_{\text{máx}} \quad \forall t, x \quad \forall i$.

Un método DQSS puede realizar la simulación del sistema *retardado y cuantificado*:

$$x'(t) = f(q(t), q(t - \tau_1(q, t)); \dots; q(t - \tau_m(q, t)); u(t)) \quad (4.6)$$

donde cada componente del vector de estados cuantificados $q(t)$ está relacionado uno a uno con su componente correspondiente en el vector de estados $x(t)$ por medio de una función de cuantificación con histéresis de orden n .

4.3.2. Propiedades Teóricas de los Métodos QSS para E.D.R.

En la presente subsección se analizarán las características de estabilidad y convergencia para los casos de DQSS con retardos constantes, y luego con retardos variables y dependientes del estado. Las propiedades serán justificadas por medio de teoremas justificadas en el apéndice del presente trabajo.

Estabilidad y Convergencia. Retardos Constantes

Con el siguiente teorema se establecen las condiciones que garantizan la aplicabilidad de los métodos DQSS para resolver las Ecuaciones Diferenciales con Retardo genéricas de retardo constante.

Se probará que, dado un sistema original estable, la simulación del sistema DQSS equivalente preservará la estabilidad numérica, y también que la solución numérica podrá hacerse tan precisa como se desee haciendo tender a cero el "quantum", ΔQ . Solamente se requerirá que el sistema original tenga solución asintóticamente estable para la condición inicial nula.

Teorema 4.1. Consideremos la siguiente Ecuación Diferencial con Retardo

$$x'(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i) \quad (4.7)$$

asumiendo que la solución analítica $\phi_a(t)$ para la condición inicial trivial $\phi_a(t) = x(t) = 0; \quad t \leq 0$ es asintóticamente estable. Luego

1. El error cometido por cualquier método QSS en la simulación de la ecuación (4.7) está acotada para todo $t \geq 0$, para cualquier ΔQ adoptado, y para cualquier condición inicial $x(t \leq 0)$.
2. La aproximación QSS converge a la solución analítica, es decir, el error global tiende a cero cuando el "quantum" tiende a cero.

Observación: La Demostración del Teorema 4.1 en el Apéndice. [7].

Estabilidad y Convergencia. Retardo Dependientes del Tiempo y del Estado

Con el próximo teorema, se extiende la clase de E.D.R. que puede ser simulada con métodos DQSS a la clase de sistemas genéricos cuyos retardos son dependientes del tiempo y del estado, garantizando la aplicabilidad de los métodos DQSS. Como antes, se prueba que la simulación del sistema DQSS equivalente de un sistema original estable preservará la estabilidad numérica, y que al mismo tiempo la solución numérica puede hacerse tan precisa como se desee haciendo tender a cero el "quantum" ΔQ .

Pero en este caso, se requerirá una propiedad más restrictiva sobre el sistema original. Se pedirá que el sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo sea Estable Entrada-Estado, esto significa que si el sistema es perturbado con una entrada arbitraria pero acotada, entonces la evolución de todos sus estados también será acotada.

Teorema 4.2. Consideramos la siguiente Ecuación Diferencial con Retardo

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(x, t))) \quad (4.8)$$

donde la función f es localmente Lipschitz en los primeros argumentos y continua a tramos en t , y $\tau(\cdot)$ es localmente Lipschitz en x , y continua a tramos en t . Sea $\phi_a(t)$ su solución analítica para una historia inicial $\phi_a(t < 0)$ dada. Supongamos que la solución analítica es acotada, y que el sistema forzado

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(x, t))) + u(t) \quad (4.9)$$

es Estable Entrada-Estado para la solución $\phi_a(t)$.

Sea $\phi(t)$ la solución de la aproximación DQSS

$$x'(t) = f(t, q(t), q(t - \tau(q, t))) \quad (4.10)$$

con historia inicial $\phi(t < 0) = \phi_a(t < 0)$.

Luego, considerando "quantums" ΔQ_j , $j = \overline{1, n}$ suficientemente pequeños, por ende el error $e(t) \triangleq \phi(t) - \phi_a(t)$ estará acotado para todo $t > 0$. Aún más $e(t) \rightarrow 0$, si $\Delta Q_j \rightarrow 0$.

Observación: La Demostración del Teorema 4.2 en el Apéndice. [7].

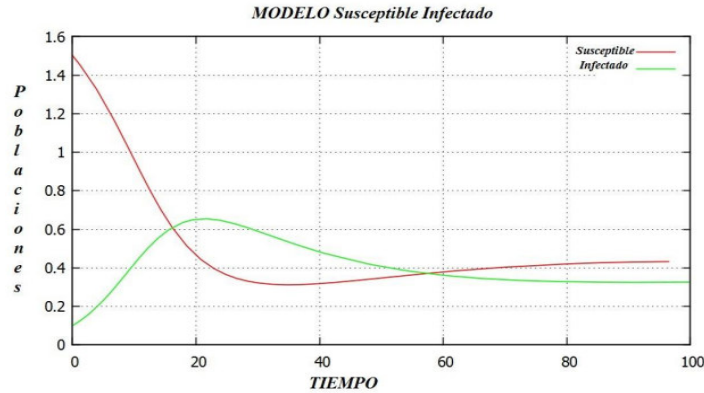
Observación 4.1. El Teorema 4.2 se cumple para cualquier Ecuación Diferencial con Retardo de la forma de (4.8), que posee una única función de retardo τ . Sin embargo, puede ser extendida de la forma directa a una Ecuación Diferencial con Retardo con múltiples funciones de retardo, de la forma de la ecuación (4.1).

Considerando los los parámetros para la Simulación Computacional que se realizó anteriormente. La diferencia entre estas es el Método Numérico que se está realizando.

En primer lugar, cuando se realizó anteriormente se desarrollo el Método Numérico por Tiempo Discreto con Matlab y RStudio para el Modelo 1 presentado en el presente capítulo. Ahora, lo realizaremos el Método Numérico por Evento Discreto con QSS en PowerDEVS. Para poder visualizar que ambas Simulaciones son similares con márgenes de Error de 0.000001. Por lo cual, también nos permitiría tener una opción diferente dentro del análisis numérico para realizar Simulaciones Computacionales. Hay que tener en cuenta, que ambos métodos presentan ventajas y desventajas ante los diferentes problemas que se pueden presentar para su respectivo análisis. Es necesario

analizar cual método conviene realizar para conseguir los mejores resultados ante la investigación del problema. [7].

N	=	2000	σ	=	0,02	ε	=	0,04
S	=	1502	β	=	0,35	w	=	0,502
I	=	100	μ	=	0,035	<i>Tiempo</i>	=	100



(F4.2)

Como se puede apreciar en las graficas (F4.1) y (F4.2), las simulaciones son similares donde se ha considerado los mismos parámetros, lo cual nos permite tener una perspectiva computacional que facilitaría una adecuada interpretación epidemiológica. Esta perspectiva epidemiológica es la parte externa de la simulación computacional, por mientras que una perspectiva computacional dentro del análisis numérico tenemos dos maneras de realizar el mismo modelo que nos brinda un resultado similar. Un detalle que hay que considerar, que debido que a los diferentes márgenes de la gráfica de la simulación parecería que las gráficas son diferentes, pero al analizar detalladamente las graficas se puede observar que las curvas de las poblaciones son similares dentro del margen de error considerado, esto se presentará en las diferentes simulaciones computacionales que se realizará.

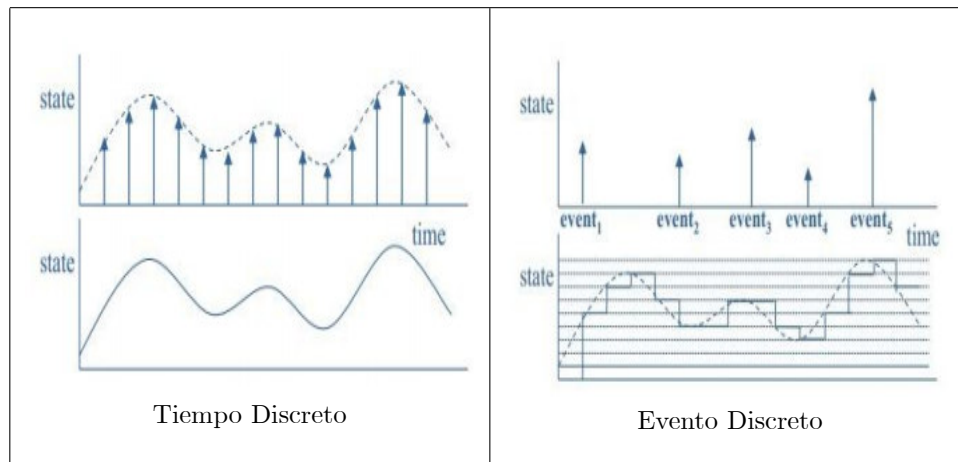
Ahora, que se ha presentado los bosquejos de las simulaciones computacionales se puede presentar un Resumen total de los Software's mencionados con anterioridad para relacionar la similitud de las simulaciones computacionales tanto por Tiempo Discreto como por Evento Discreto bajo los mismos parámetros. El Resumen lo realizaremos con el Modelo SI considerando únicamente las poblaciones epidemiológicas. Y así, avanzar más adelante con el Modelo Matemático Susceptibles-Infectados donde se considera las poblaciones epidemiológicas (Susceptibles e Infectados) y a la vez, las poblaciones demograficas por sexo (Hombres y Mujeres). Considerando un sistema de cuatro ecuaciones que interactuarán entre sí donde estas interacciones describirán el Modelo.

Más adelante, se realizará las simulaciones computacionales aplicados a los modelos matemáticos mediante las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, tema principal del trabajo; para poder complementar el respectivo estudio cualitativo realizado en el anterior capítulo. Por lo cual, la presentación de las diferentes graficas realizadas por los diferentes programas computacionales nos permite conocer las diferentes opciones computacionales que se puede escoger para lograr los objetivos trazados de la investigación. Después de realizar este complemento idóneo de nuestra investigación, se podrá realizar las respectivas conclusiones. También se podrá generar algunas discusiones científicas para poder generar más conocimiento en bien de la sociedad, y contribuir con el desarrollo de la ciencia. La investigación aunque sea pequeña, brinda un avance para otras personas que pueden seguir con el estudio de alguna problemática que afecta al bienestar de la sociedad.

4.4. Simulación Computacional de los Modelos Matemáticos

Como se ha mencionado en toda investigación que incluye los Modelos Matemáticos aplicados a la Realidad, siempre ha sido una gran ayuda las Simulaciones computacionales que nos brindan un bosquejo por el camino que va tomando el desarrollo del trabajo. Dentro los cuales los diferentes Software's permiten conocer el comportamiento numérico de las soluciones en donde se pueden situar de acuerdo a los parámetros. Dentro del estudio numérico de los Métodos Numéricos se ha estudiado enormemente el estudio mediante el Tiempo Discreto, pero también se ha desarrollado diversos métodos para este fin, entre uno de ellos, está el estudio mediante Evento Discreto. El cual también nos ayuda a resolver diversos problemas desde otra perspectiva numérica. En las sección anterior se presentó una formalización sobre la idea de aplicar DEVS al desarrollo numérico de los problemas, en este caso, el análisis numérico orientado a las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y las Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

Presentamos de una manera gráfica la perspectiva que se tiene ante una problemática. Para poder comprender como el Software realiza las operaciones computacionales ante el desarrollo de un Problema. La ayuda gráfica nos permite el desarrollo intuitivo de la manera que se puede interpolar una función para ser aproximada de acuerdo a sus cambios de acuerdo a la perspectiva del análisis matemático. La formalización matemática para la demostración que el método converge a la solución exacta mediante la solución numérica es importante, para garantizar la validez del método.



4.4.1. Simulaciones Computacionales en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Modelo Matemático SI con 2 ecuaciones

El Modelo 1, presentado en este trabajo, es un Modelo Matemático aplicado a la Epidemiología. La interacción entre Susceptibles e Infectados ante un enfermedad contagiosa mediante contacto de los individuos donde se considera las tasas de mortalidad (natural o por enfermedad).

$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \sigma N - w \cdot \beta S \cdot I - \mu S \\ I' = w \cdot \beta S \cdot I - (\alpha + \mu) I \\ S(0) = S_o \geq 0 ; I(0) = I_o \geq 0 \\ 0 \leq \sigma, \beta, \alpha, \mu, w < 1 \end{array} \right. \quad (\text{Modelo 1})$$

En primer lugar, realizaremos las respectivas Simulaciones para el *Modelo 1* en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con los diferentes Programas Computacionales tanto en Tiempo Discreto como en Evento Discreto. Consideraremos los siguientes parámetros para realizar las simulaciones computacionales con los dos métodos para hallar las soluciones aproximadas o también llamadas las soluciones numéricas.

Donde cada parámetro tiene un significado epidemiológico.

- S : *Población Susceptible Inicial*
- I : *Población Infectada Inicial*
- N : *Población No susceptible Inicial*
- σ : *Tasa de ingreso a la Población Susceptible*
- β : *Tasa de contagio de Infectados a Susceptibles*
- α : *Tasa de mortalidad natural*
- μ : *Tasa de mortalidad por la enfermedad*
- w : *Coficiente de la Estrategia de Control Efectiva*

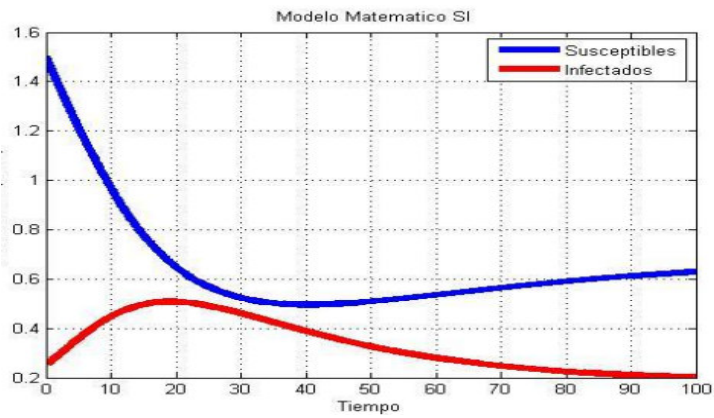
Para las simulaciones se considerará un Tiempo de Simulación de 100 meses. Donde más adelante, se realizará la respectiva interpretación epidemiológica que nos ayude a comprender mucho mejor la situación que se pueda encontrar la Epidemia.

N	=	4000	σ	=	0,01	α	=	0,03
S	=	1500	β	=	0,35	w	=	0,70
I	=	250	μ	=	0,04	<i>Tiempo</i>	=	100

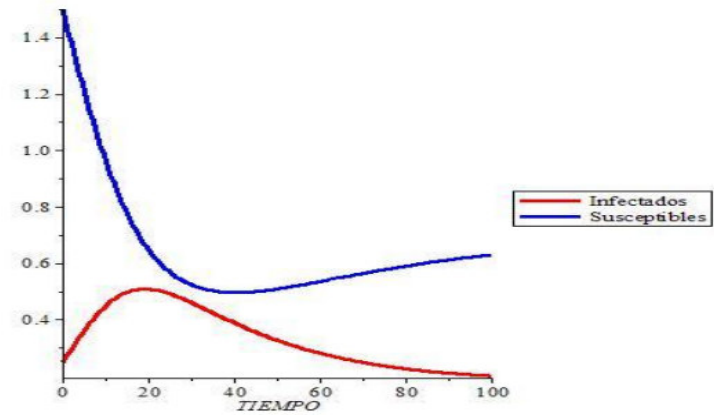
Considerando los parámetros aplicados a la Epidemiología, realizaremos las respectivas Simulaciones Computacionales. En primer lugar en Tiempo Discreto, y después en Evento Discreto. Hay que considerar que el margen de Error Absoluto es de 10^{-6} , por mientras que el Error Relativo es de 10^{-3} . Estos márgenes computacionales son considerados como márgenes estándares para poder realizar un adecuado procesamiento de operaciones internas que realiza el programa computacional para terminar la orden realizada. Por lo cual, cada software computacional lo realizará con los mismos márgenes de error.

Simulaciones mediante Tiempo Discreto

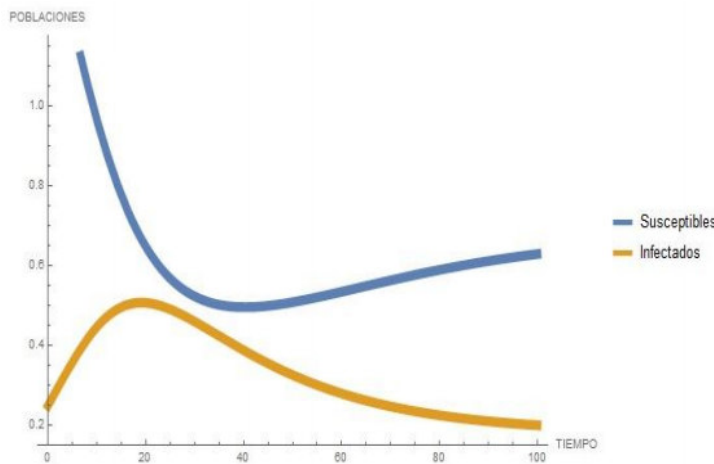
Con respecto a las Simulaciones se considerará los programas Matlab, Maple y Mathematica respectivamente. Hay que mencionar, que estos software's computacionales son bastante conocidos en el mundo de la investigación computacional, brindando facilidades sorprendentes al momento de realizar las simulaciones computacionales. Poseen herramientas que brindan un control adecuado y preciso al momento de realizar el proceso computacional.



MATLAB



MAPLE

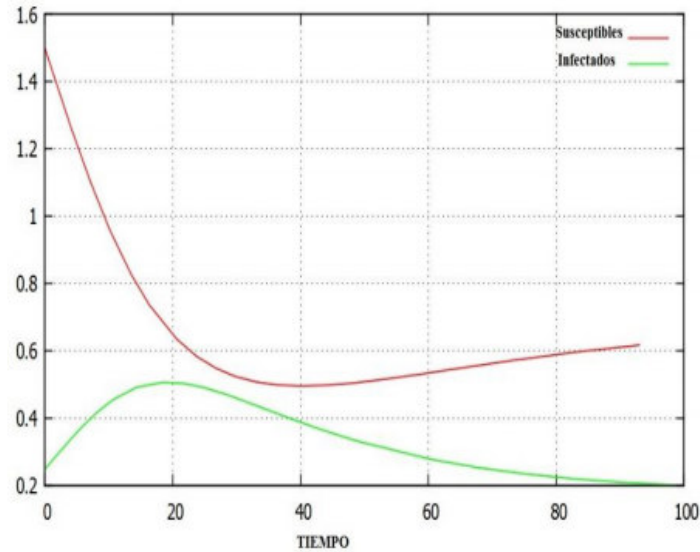


MATHEMATICA

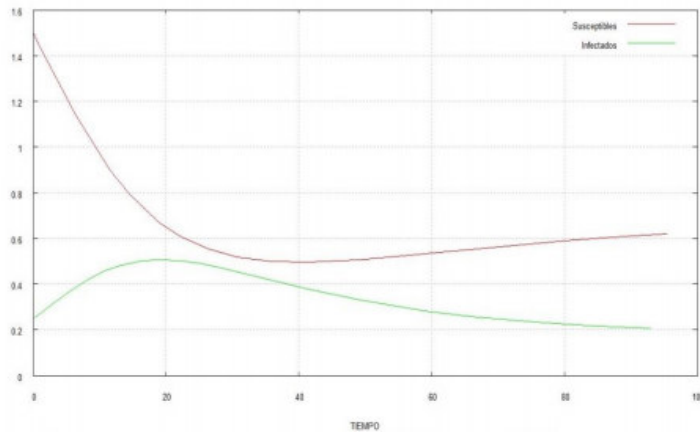
(S.T.D.)

Simulaciones mediante Evento Discreto

Con respecto a las Simulaciones se considerará los Métodos QSS en PowerDEVs. Estos programas permiten otra perspectiva numérica en el sentido computacional que realiza a diferencia de los software's más conocidos, pero sin dejar atrás el objetivo de todo programa computacional, que es brindar un adecuado proceso computacional para hallar la solución numérica que se busca.



(S.E.D.)



Relación entre las Simulaciones de Tiempo Discreto y Evento Discreto

Después de haber realizado las respectivas Simulaciones Computacionales en los diferentes programas, se puede apreciar la similitud de las graficas del mismo modelo con los mismos parámetros (S.T.D.) y (S.E.D.), lo cual indica que por ambos métodos se pueden realizar simulaciones computacionales satisfactoriamente con un margen de error aceptable para una investigación científica.

Ambos métodos poseen ventajas y desventajas ante diferentes problemas, por lo cual, en algunos problemas sería más conveniente usar un método que el otro. En esta diversidad de métodos nos permite tener diferentes perspectivas para lograr los objetivos que se busca en la investigación que se realiza.

N	=	4000	σ	=	0,01	α	=	0,03
S	=	1500	β	=	0,35	w	=	0,70
I	=	250	μ	=	0,04	<i>Tiempo</i>	=	100

Interpretación Epidemiológica de la Simulación

Con respecto a la interpretación epidemiológica a base de la Simulación Computacional ya sea mediante Tiempo Discreto o Evento Discreto, nos permite relacionar la concepción matemática del Problema mediante el Modelo Matemático con la Realidad que se afronta. De acuerdo, a los parámetros utilizados nos permite como se desarrolla durante el tiempo considerado para analizar la interacción de las variables consideradas del Modelo.

Se ha considerado inicialmente una Población de 4000 individuos No Susceptibles, es decir, que no pueden contraer la enfermedad todavía, pero tiene una tasa de Ingreso del 1% en el intervalo de tiempo considerado. Considerando del mismo modo, una Población de 1500 Susceptibles y de 250 Infectados en el tiempo inicial. Con estas poblaciones se iniciará la Simulación Computacional para saber su crecimiento o decrecimiento en el tiempo de simulación a base de los parámetros considerados. En este tiempo de simulación se ha considerado 100 meses con una tasa de contagio efectivo del 35% durante ese periodo, como las tasas de mortalidad natural y la de mortalidad por la misma enfermedad siendo 4% y 3% respectivamente. También se ha considerado un coeficiente de protección para evitar el contagio de la epidemia a un 70% de efectividad. Teniendo estas consideraciones aplicadas al Modelo se realiza la simulación computacional para poder tener un análisis epidemiológico que nos permita tener una toma de decisiones de tal manera que se pueda preveer una situación desfavorable para la sociedad.

Con respecto a la grafica de la simulación se puede interpretar que la población Susceptible tiene un descenso considerable por mientras que la población Infectada comienza a crecer, esta evolución se da hasta un umbral aproximadamente en un intervalo entre el mes 20 y el mes 40, por lo cual después del mes 40, la población Susceptible estaría creciendo de nuevo hasta estabilizarse, por mientras, que la población Infectada va disminuyéndose considerablemente. Entonces, una adecuada consideración es tener una mayor medida para la protección de los Susceptibles, debido que en el tiempo, la interacción los Infectados no podrán expandirse, lo cual se podría controlar la enfermedad.

Modelo Matemático SI con 4 ecuaciones

El Modelo 2, presentado en este trabajo, es un Modelo Matemático aplicado a la Epidemiología. La interacción entre Susceptibles e Infectados ante un enfermedad contagiosa mediante contacto de los individuos donde se considera las tasas de mortalidad (natural o por enfermedad) es la misma que en el Modelo 1, con la diferencia significativa que ya no se considera únicamente las Poblaciones Epidemiológicas sino también se considera las Poblaciones demográficas por sexo.

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_h = \sigma_h H_{NS} - w\beta_m I_m S_h - \mu S_h \\ I'_h = w\beta_m I_m S_h - \alpha I_h - \mu I_h \\ S'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h I_h S_m - \mu S_m \\ I'_m = \beta_h I_h S_m - \varepsilon I_m - \mu I_m \end{array} \right. \quad (\text{Modelo 2})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_h(0) = S_o^h \geq 0 \quad ; \quad I_h(0) = I_o^h \geq 0 \\ S_m(0) = S_o^m \geq 0 \quad ; \quad I_m(0) = I_o^m \geq 0 \\ 0 \leq \sigma_m, \sigma_h, \beta_m, \beta_h, \alpha, \varepsilon, \mu < 1 \end{array} \right.$$

En primer lugar, realizaremos las respectivas Simulaciones para el *Modelo 2* en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con los diferentes Programas Computacionales tanto en Tiempo Discreto

como en Evento Discreto. En esta parte, solamente utilizaremos un programa computacional de cada método, debido que se ya se ha notado la similitud de los Resultados computacionales. Del mismo modo que se realizó para el *Modelo 1*, se considerará un Tiempo de 100 días para la Simulación Computacional.

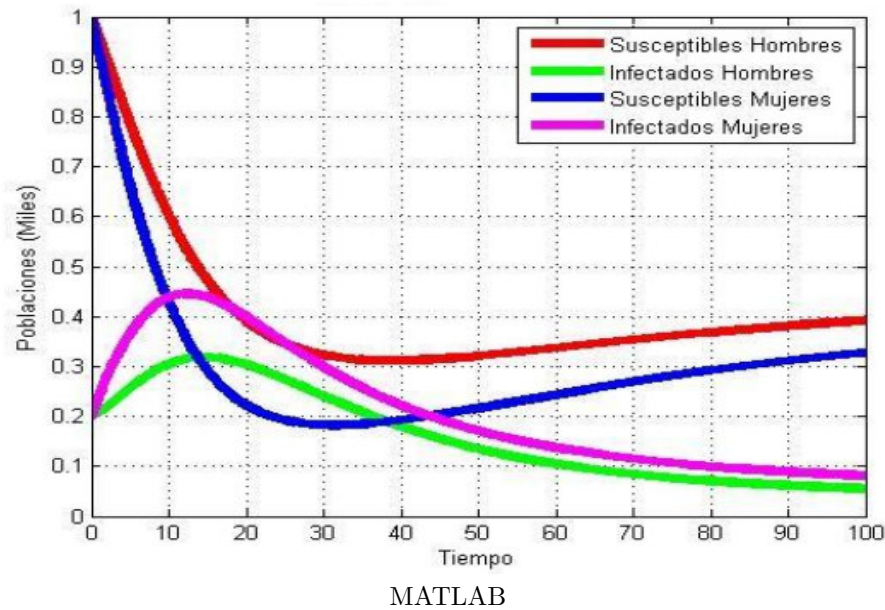
Considerando los parámetros aplicados a la Epidemiología, realizaremos las respectivas Simulaciones Computacionales. Para las Simulaciones computacionales del presente Modelo, se utilizará **MATLAB** (*Tiempo Discreto*), y **PowerDEVS** (*Evento Discreto*) para seguir presentando dos métodos que nos permiten realizar las respectivas simulaciones con un grado de precisión computacionalmente aceptable. Como se resaltó, en la investigación científica siempre hay que considerar diferentes caminos computacionales en busca de un análisis mucho más riguroso. Tanto en Tiempo Discreto como en Evento Discreto se considerará el margen de Error Absoluto: 10^{-6} , por mientras que el Error Relativo será 10^{-3} .

Los parámetros serán los siguientes:

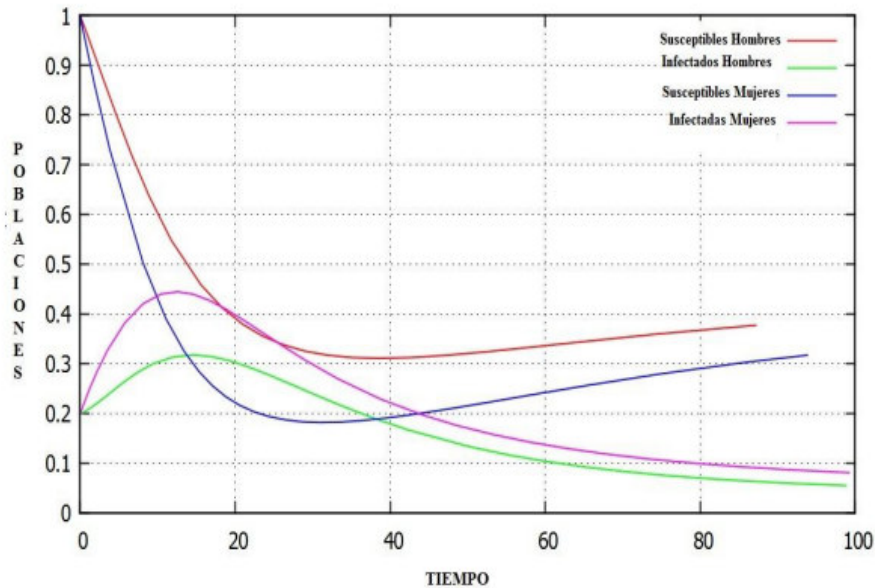
H_{NS}	=	2000	M_{NS}	=	2000	μ	=	0,04
S_h	=	1000	S_m	=	1000	w	=	0,70
I_h	=	200	I_m	=	200	T	=	100

σ_h	=	0,01	σ_m	=	0,01
β_m	=	0,35	β_h	=	0,30
α	=	0,03	ε	=	0,035

Por lo cual, primero realizaremos la simulación con MATLAB.



Luego, realizaremos los Métodos Delay QSS en PowerDEVS



Después de haber realizado la simulación computacional del Modelo con los dos programas, procederemos a realizar la interpretación epidemiológica respectiva del Modelo Matemático mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para poder dar una introducción a la Simulación Computacional del Modelo Matemático mediante Ecuaciones Diferenciales con Retardo, que es nuestro tema principal, para poder comparar ambos Modelos.

Interpretación Epidemiológica

La interpretación correspondiente a los parámetros utilizados en el *Modelo 2* son similares al *Modelo 1*, teniendo en cuenta que se tiene más parámetros para considerar. Se ha considerado una población No Susceptible, Susceptible e Infectado igual tanto para los Hombres y las Mujeres. Las tasas de ingreso a la Población Susceptible es igual para ambas poblaciones. En el sentido de la tasa de la mortalidad tanto por la enfermedad y natural son similares. La tasa de contagio de Hombre infectado a Mujer Susceptible y la de Mujer Infectada a Hombre Susceptible son similares de acuerdo a una tendencia de actividad sexual similar entre los hombres y las mujeres. [49].

Por lo cual, esta simulación se podría considerar similar al *Modelo 1*, pero se tiene una mejor perspectiva en cuanto a las poblaciones que se considera el Modelo 2, se tiene cuatro poblaciones que describen una epidemia de contagio vía sexual, de forma particular heterosexual. En cuanto al desarrollo de la epidemia de alguna enfermedad, ETS, se puede percibir que en un inicio la población de los Susceptibles (Hombres y Mujeres) tienden a decrecer para después volver a crecer y estabilizarse en una cantidad estacionaria en un largo plazo de tiempo. Por mientras que la población de los Infectados (Hombres y Mujeres) en un inicio tiende a crecer para luego llegar al umbral de la epidemia, y después decrecer y tender a una cantidad considerablemente baja por mientras que se mantenga métodos, actividades de prevención de tal manera de evitar el contagio efectivo. Esta consideración es importante saber, debido que la población Mujeres Infectadas es mayor a la población de Hombres infectados debido que se ha considerado un coeficiente de protección para evitar el contagio de la enfermedad. Esta consideración se toma debido a las recomendaciones que se tiene, ante el uso de preservativos masculinos, como primer medio efectivo, también se puede considerar en las mujeres el uso de preservativos femeninos; pero un detalle importante es que el uso simultáneo de ambos no es recomendable por lo cual en el Modelo no se considera un coeficiente de protección a ambas poblaciones. [15,30,45,51,61,62].

Finalmente, se tiene que considerar que ante un mayor coeficiente de protección efectiva ayuda significativamente a prevenir el contagio. Pero también al reducir la tasa de contagio brinda una mejor protección considerando costumbres y medios naturales para evitar el contagio de la enfermedad, en nuestro Modelo se considera únicamente el contagio por vía sexual, estas dos consideraciones nos permite mantener en niveles bajos una posible epidemia. Por otro lado, las tasas de mortalidad también deben disminuir debido que no se busca la muertes de las personas tanto susceptibles como infectadas debido que no es uno de los objetivos de la Salud Pública. Teniendo en cuenta las estadísticas que presenta la Dirección General de Epidemiología del Ministerio de Salud nos indica que el mayor porcentaje de contagio de las ETS se presentan en Lima y en Callao por lo cual se presentan Planes Estrategicos para evitar el contagio y la propagación de las ITS, siendo uno de los puntos vitales del estudio Epidemiológico aplicado a la Salud Pública. [63,64,65].

4.4.2. Simulaciones Computacionales en las Ecuaciones Diferenciales con Retardo

Después de haber realizado las Simulaciones con los Modelos 1 y 2, que matemáticamente son Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Ahora, nos centraremos en los Modelos perturbados que han sido desarrollados mediante las Ecuaciones Diferenciales con Retardo. Para estas simulaciones utilizaremos los programas computacionales Matlab y Mathematica (*Tiempo Discreto*), y PowerDEVS (*Evento Discreto*). Esto nos permitirá poder conocer el comportamiento de las Soluciones a través del tiempo determinado.

Dentro de esta sección, recalcaremos la utilización de la función propia de cada programa. Con respecto al software Matlab y Mathematica, que son software's con licencia. Introduciremos los comandos propios para realizar la Simulación del Modelo. Y con respecto al software PowerDEVS, que es un software libre, desarrollaremos el diagrama de flujo que nos permitirá realizar la simulación del Modelo.

Modelo Matemático SI con 2 ecuaciones

El *ModeloR 1*, presentado en este trabajo, es un Modelo Matemático aplicado a la Epidemiología. La interacción entre Susceptibles e Infectados ante un enfermedad contagiosa mediante contacto de los individuos donde se considera las tasas de mortalidad (natural o por enfermedad). Posee una consideración adicional a comparación del *Modelo 1*, la cual es la consideración del Retardo (τ), siendo el coeficiente constante que indicará la Historia que se tiene, la cual se está introduciendo en la Población de los Infectados.

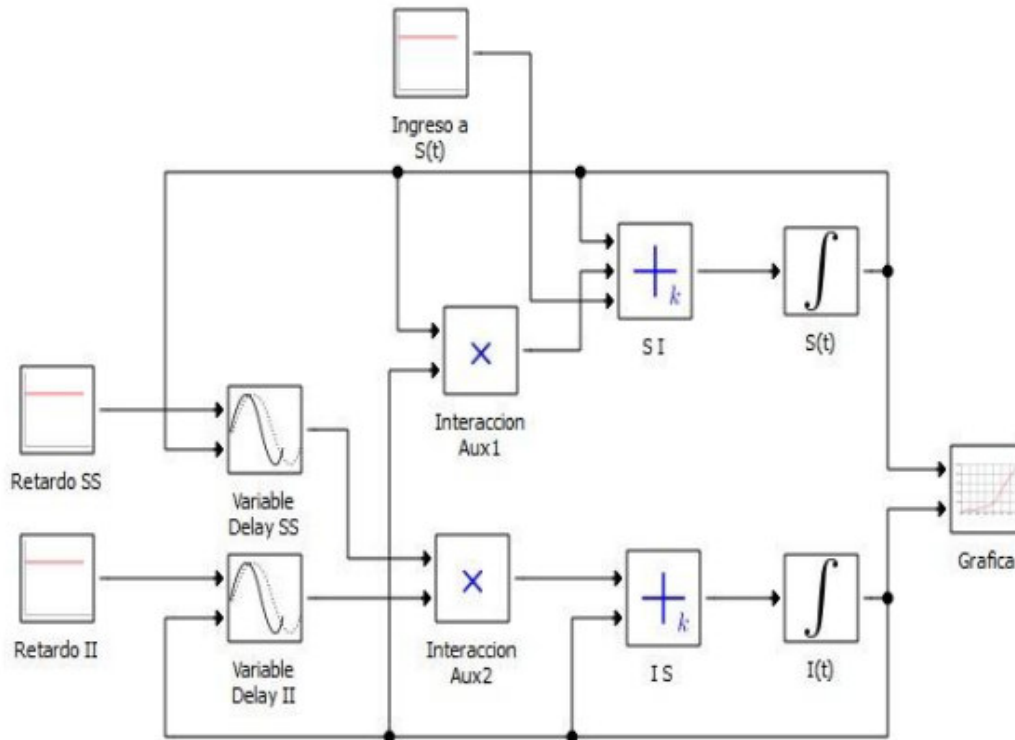
$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S \\ I' = w \cdot \beta S(t - \tau) \cdot I(t - \tau) - (\alpha + \mu)I \\ \text{con Condiciones Iniciales :} \\ S(t) = S_o \quad , \quad I(t) = \varphi_o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \tau > 0 \\ 0 \leq \sigma, w, \beta, \alpha, \mu < 1 \end{array} \right. \quad (\text{ModeloR 1})$$

En primer lugar, realizaremos las respectivas Simulaciones para el *ModeloR 1* en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con los diferentes Programas Computacionales tanto en Tiempo Discreto como en Evento Discreto. En las simulaciones computacionales se considerará un Tiempo límite de 100 meses.

N	=	4000	σ	=	0,01	α	=	0,03
S	=	1500	β	=	0,35	ϖ	=	0,60
I	=	250	μ	=	0,04	τ	=	2

Considerando los parámetros aplicados a la Epidemiología, realizaremos las respectivas Simulaciones Computacionales. En primer lugar en Tiempo Discreto, y después en Evento Discreto. Hay que considerar que el margen de Error Absoluto es de 10^{-6} , por mientras que el Error Relativo es de 10^{-3} . De la misma forma que se ha venido realizando las simulaciones anteriores.

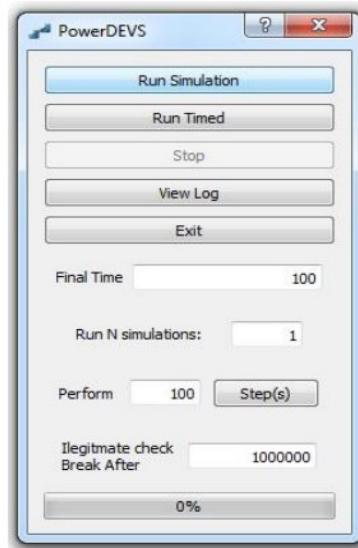
El programa Mathematica es un software similar a MATLAB, que posee comandos y funciones definidas para la realización de las simulaciones de una manera bien sencilla, donde la realización del formato del sistema que se desea simular es de una manera accesible para ser desarrollada. Con respecto, al software PowerDEVS se tiene que diseñar un digrama de entorno visual para poder realizar la simulación. El cual, se presentará a continuación para el desarrollo del Modelo.



Digrama PowerDEVS

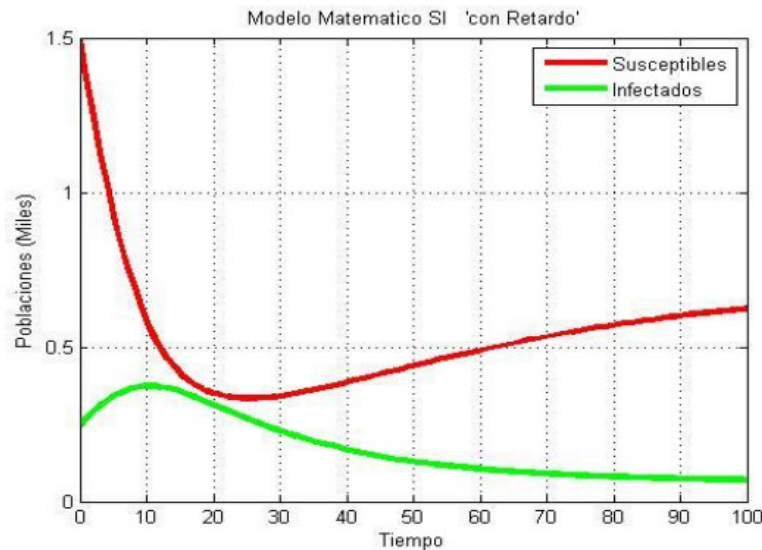
El presente Diagrama representa el proceso que realiza las interacciones que tiene las dos variables con sus respectivos parámetros internamente. Donde PowerDEVS viene a ser una herramienta de simulación de modelos o sistemas, con cierto grado de abstracción de los diferentes fenómenos que se modela involucrados en los mismos. Se hace hincapié en el análisis de sucesos, a través de la concepción de sistemas (cajas negras que realizan alguna operación).

Al realizar la Simulación, se mostrará la siguiente interfaz para introducir el Tiempo de Simulación que se requiera (Final Time), y así proceder a realizar la respectiva simulación. Para realizar la simulación se presionará en el botón *Run Simulation*.

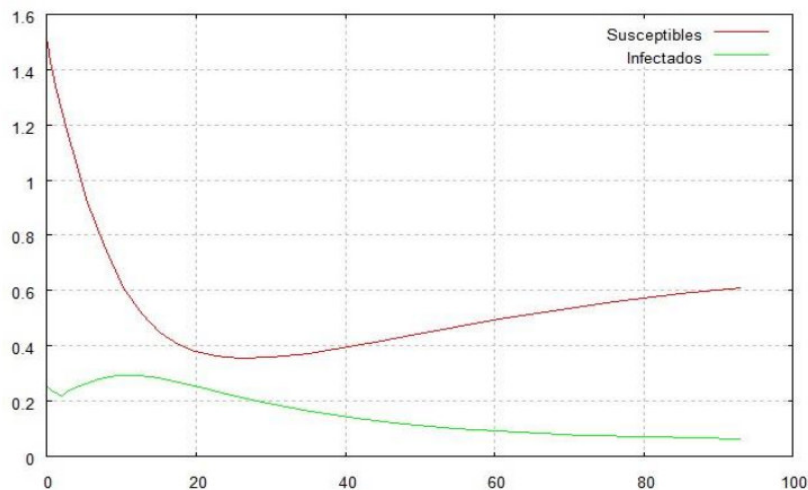


Después de haber presentado la manera de realizar las simulaciones en PowerDEVS, se procederá a realizar las Simulaciones del Modelo. En primer lugar con MATLAB, y luego con PowerDEVS para ver que ambos software's permiten realizar buenas simulaciones desde perspectivas diferentes en el campo del análisis numérico.

La Simulación con Matlab se ha realizado con su propio comando **dde23**, que permite la resolución numérica de los sistemas de Ecuaciones Diferenciales que poseen Retardos. A diferencia de su comando **ode45**, que permite la resolución numérica de los Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias mediante el método de Runge Kutta de orden cuatro. [67].



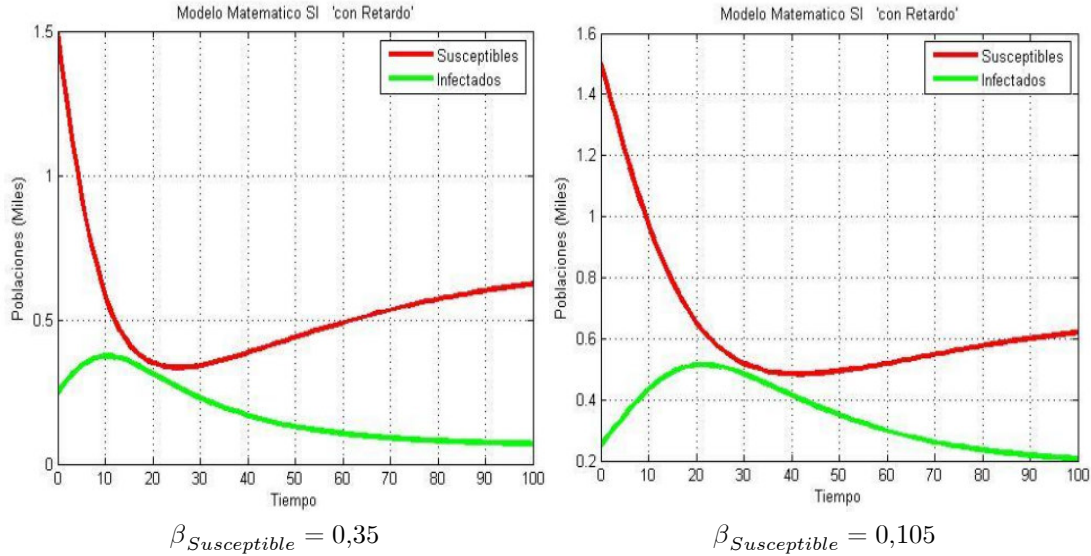
Luego, realizaremos la simulación con PowerDEVS, cuyo diagrama ya se ha desarrollado en la figura anterior para su respectiva compilación.



Después de haber realizado las dos simulaciones del mismo Modelo, nos permite poder observar que las gráficas son similares como se esperaba, las observaciones son las mismas que se realizó con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con respecto a su margen de Error. Esto nos indica que ambas formas son válidas para poder realizar Simulaciones Computacionales con una excelente aproximación a la Solución Numérica. Como se había mencionado, en el ámbito de las Simulaciones computacionales ningún método es absoluto, cada método tiene sus ventajas y desventajas ante diversos problemas.

Interpretación Epidemiológica

En la presente simulación de nuestro Modelo (*Modelo R 1*) nos muestra que ha habido un adelanto con respecto al tiempo donde la Población Infectada ha llegado a su umbral para luego ir descendiendo, con una consideración que en este caso el umbral es menor que cuando se había desarrollado mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, esto se debe al coeficiente del Retardo (τ) que en esta simulación se ha tomado $\tau = 2$, para lo cual representa dos meses antes en la Historia de los Infectados donde se considera el periodo latente antes de pasar ser considerados Infectados que puedan propagar la enfermedad, y donde también se está viendo un coeficiente de protección de tal manera que la epidemia vaya decayendo. Esta protección se ha considerado al ingreso de los individuos a la población Infectada, por lo cual, a base de los dos meses que se tiene datos del transcurso del desarrollo de la epidemia nos permite tener una mejor perspectiva de como va evolucionando la posible expansión de la enfermedad. Se ha considerado las mismas tasas y la misma cantidad de individuos de cuando se realizó las simulaciones computacionales del *Modelo 1*. La simulación nos permite describir una mejor consideración al momento de realizar una actividad de manera que la epidemia tienda a descender lo más pronto posible y con una menor cantidad de individuos contagiados. Ahora si se efectúa medidas de prevención en los Susceptibles de tal manera que se pueda descender la tasa de contagio, esto ayudaría a que a un mediano plazo la población de los Infectados se vaya desarrollando lentamente de tal manera que vaya descendiendo a tal punto que se pueda considerar erradicada la población infectada. En la siguiente gráfica nos presenta esta consideración mencionada, lo cual muestra que toda medida de protección a la población Susceptible ayuda de manera significativa ante una posible epidemia que se pueda prolongar demasiado. Teniendo en cuenta el tiempo final que se está considerando, en la gráfica de la izquierda es mayor la tasa de contagio por lo cual a través del tiempo, la población infectada va disminuyendo con mayor lentitud a comparación de la gráfica de la derecha que en el tiempo límite ya prácticamente se ha disminuido casi por totalidad.



Como siempre se ha dicho, la prevención siempre es la mejor medida ante toda posible enfermedad. Por lo cual, siempre se tiene que estar vigilantes ante cualquier brote que pueda propagarse en la población. Esta es una de las labores que tiene la Epidemiología ante la sociedad de mantener el bienestar de los ciudadanos.

Consideraremos una Simulación computacional adicional para poder visualizar un caso con respecto al coeficiente de Retardo del Modelo. En el *ModeloR 1*, se ha considerado el mismo retardo tanto para para la población Susceptible como la Infectada. Por lo cual, introduciremos dos retardos diferentes, es decir, el Modelo sería el siguiente.

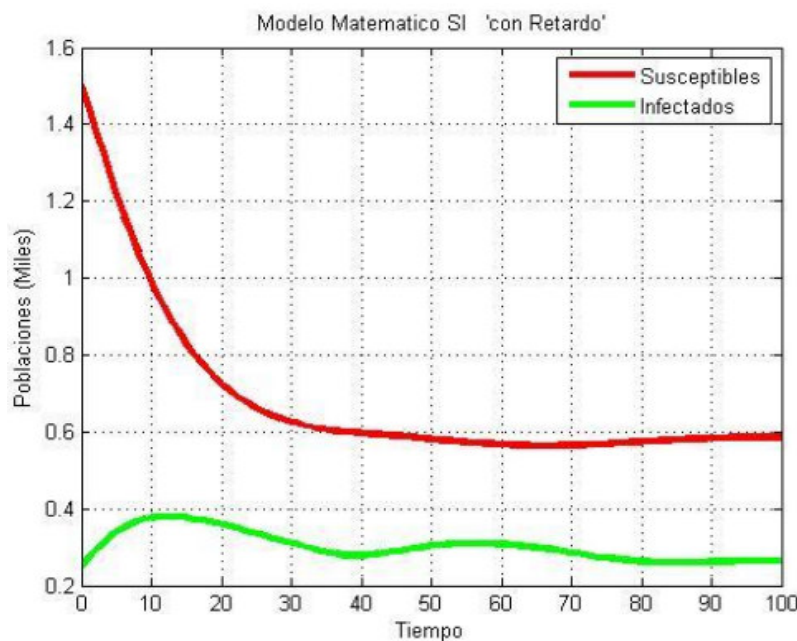
$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \sigma N - w \cdot \beta S \cdot I - \mu S \\ I' = w \cdot \beta S(t - \tau_s) \cdot I(t - \tau_i) - (\alpha + \mu) I \\ \text{con Condiciones Iniciales :} \\ S(t) = S_o \quad , \quad I(t) = \varphi_o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \tau_s, \tau_i > 0 \\ 0 \leq \sigma, \beta, \alpha, \mu, w < 1 \end{array} \right.$$

Se considerará los siguientes parámetros para realizar la Simulación.

N	=	4000	σ	=	0,01	α	=	0,03
S	=	1500	β	=	0,35	ϖ	=	0,60
I	=	250	μ	=	0,04	<i>Tiempo</i>	=	100

El coeficiente del Retardo aplicado a los Susceptibles será: $\tau_s = 3$. Esta consideración se evaluará debido a que los Susceptibles siempre están en actividad y el registro es circunstancial que se da dentro de la sociedad. Por otro lado, el coeficiente del Retardo aplicado a los Infectados será: $\tau_s = 36$. Esta consideración es la importante debido que se debe tener información detallada de las personas infectadas para poder realizar un seguimiento para una adecuada intervención en bien de

la sociedad. A mayor cantidad de datos previos que se pueda tener de los Infectados es mejor para poder analizar el desarrollo a través del tiempo.



Interpretación Epidemiológica

Esta simulación nos permite una mejor concepción del problema, la dinámica de crecimiento de la población de Infectados crece con un menor umbral a consideración de la anterior simulación, del mismo modo, la epidemia se va controlando de manera paulatinamente debido que actualmente la prevención de contagio se realiza de diversas maneras para los Susceptibles, por otro lado, una adecuada estrategia de control para las personas Infectadas es mantenerlo con tratamientos, esto es debido que la Salud Pública busca el bienestar de los ciudadanos ante todo. La población Susceptible descendió al inicio pero fue una población mucho menor que en la anterior simulación, lo que luego esta se estabilizará a través del tiempo. Cabe resaltar que en ambas simulaciones la población Susceptible tenderá a estabilizarse en una población constante. Este detalle, se ha demostrado matemáticamente.

En el desarrollo de alguna enfermedad, son pocas las enfermedades que se puede erradicar directamente y con prontitud, siempre se puede intervenir para evitar el contagio por mientras que se puede realizar medios de control de tal manera que vaya descendiendo hasta que no haya la enfermedad, pero siempre se tiene que considerar que en algún momento en este descenso podría generarse algún brote por algún motivo, pero ante este hecho, siempre una acción inmediata permitiría otra vez el descenso. La vigilancia constante de enfermedades que atacan en momentos inesperados y que pueden generar brotes casi inmediatos son los que se necesitan estudios especializados, acciones oportunas para generar siempre control y prevención. La Epidemiología tiene una gran labor con la sociedad en el índole de la salud, debido que la persona es la prioridad de la nación y su bienestar. [64].

Finalmente, se ha terminado el estudio cualitativo y con su análisis epidemiológico guiado por las simulaciones computacionales. Esto es el comienzo del estudio epidemiológico para poder ayudar a la sociedad y su bienestar. La ciencia avanza para ayudar y aumentar la calidad de vida de cada ciudadano ante los problemas de la salud que pueden afectar en cualquier momento, por lo cual, es siempre estar preparados para afrontar con prontitud por el bien de la Nación. El Modelo

matemático nos permite una visión general o detallada de alguna problemática, en nuestro caso las Enfermedades Infecciosas que está dentro de la Epidemiología.

Modelo Matemático SI con 4 ecuaciones

El *ModeloR 2*, presentado en este trabajo, es un Modelo Matemático aplicado a la Epidemiología. La interacción entre Susceptibles e Infectados ante un enfermedad contagiosa mediante contacto de los individuos donde se considera las tasas de mortalidad (natural o por enfermedad). Posee una consideración adicional a comparación del *Modelo 2*, la cual es la consideración del Retardo (τ), siendo el coeficiente constante que indicará la Historia que se tiene, la cual se está introduciendo en la Población de los Infectados. Como ya se había mencionado la descripción que tiene el Modelo 2, es similar a la del Modelo 1. De esta manera, el ModeloR 1 tiene esencialmente una similitud con el ModeloR 2, con la misma diferencia y extensión. El Retardo está en la interacción de la población Masculina tanto en los Susceptibles como los Infectados. Esto es debido que la población masculina posee una actividad mucho más activa que la fememina, manteniendo la consideración que la estrategia de control está enfocada en la población masculina.

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_h = \sigma_h H_{NS} - \beta_m \cdot w \cdot S_h \cdot I_m - \mu S_h \\ I'_h = \beta_m \cdot w \cdot S_h(t - \tau) \cdot I_m(t - \tau) - (\alpha + \mu) I_h \\ S'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - \mu S_m \\ I'_m = \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - (\varepsilon + \mu) I_m \\ \\ S_h(t) = S_h^o(t), \quad I_h(0) = I_h^o(t) : [-\tau, 0] \longrightarrow [0, \infty+) \\ S_m(0) = S_m^o(t), \quad I_m(0) = I_m^o(t) \\ \\ \tau > 0 \\ 0 \leq \sigma_h, \sigma_m, w, \beta_h, \beta_m, \alpha, \mu, \varepsilon < 1 \end{array} \right. \quad (\text{ModeloR 2})$$

El Tiempo de Simulación seguirá siendo el mismo que se ha realizado en todas las Simulaciones computacionales, para poder mantener el mismo tiempo de desarrollo de la enfermedad. El coeficiente de Retardo seguirá siendo $\tau = 2$, para mantener esta consideración como en el Modelo anterior. Con respecto a los demás parámetros se considerarán los siguientes.

H_{NS}	=	2000	M_{NS}	=	2000	μ	=	0,04
S_h	=	1000	S_m	=	1000	w	=	0,70
I_h	=	200	I_m	=	200	τ	=	2

σ_h	=	0,01	σ_m	=	0,01
β_m	=	0,35	β_h	=	0,30
α	=	0,03	ε	=	0,035

Considerando los parámetros aplicados a la Epidemiología, realizaremos las respectivas Simulaciones Computacionales. En primer lugar en Tiempo Discreto, y después en Evento Discreto. Hay que considerar que el margen de Error Absoluto es de 10^{-6} , por mientras que el Error Relativo es de 10^{-3} . Del mismo modo que se realizó en el ModeloR1, se procederá a realizar el respectivo diagrama en PowerDEVS para desarrollar la Simulación computacional.

El presente Diagrama representa el proceso que realiza las interacciones que tiene las cuatro variables con sus respectivos parámetros internamente.

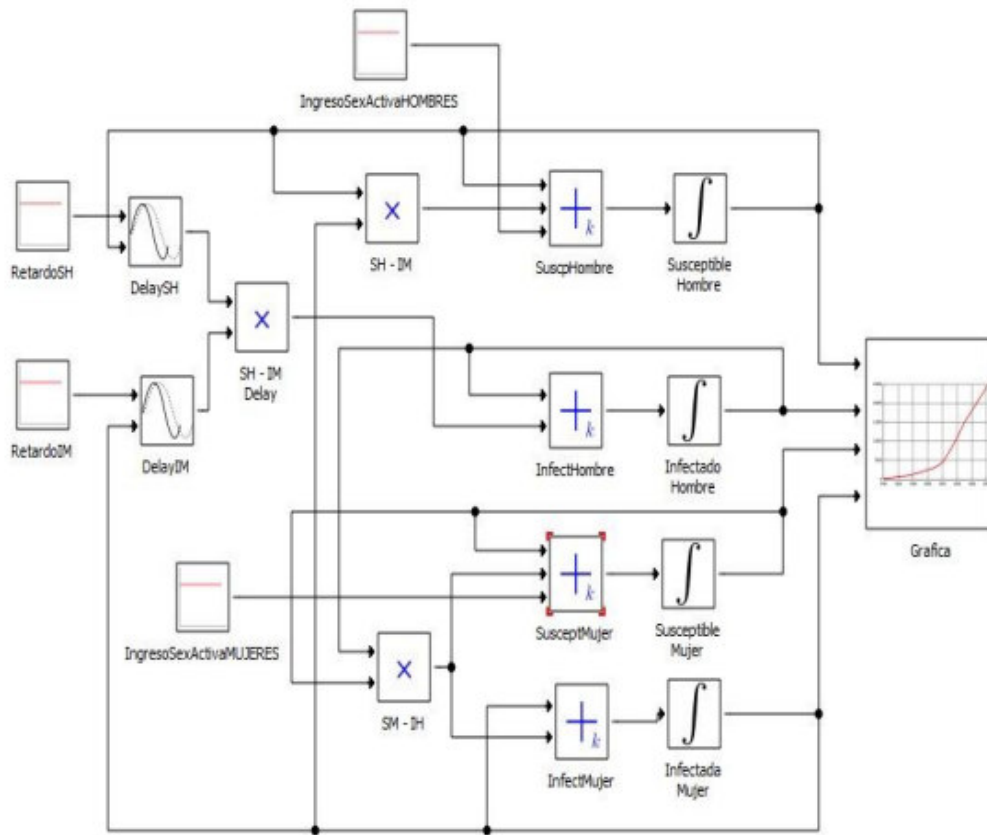
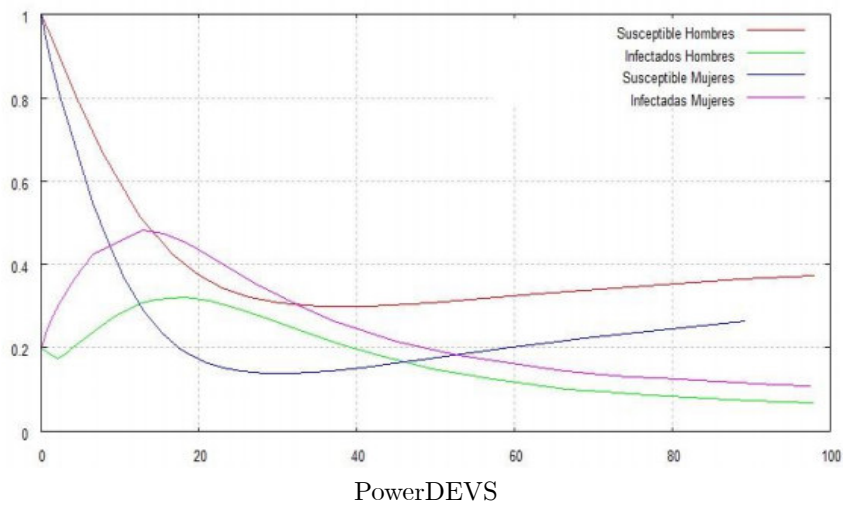
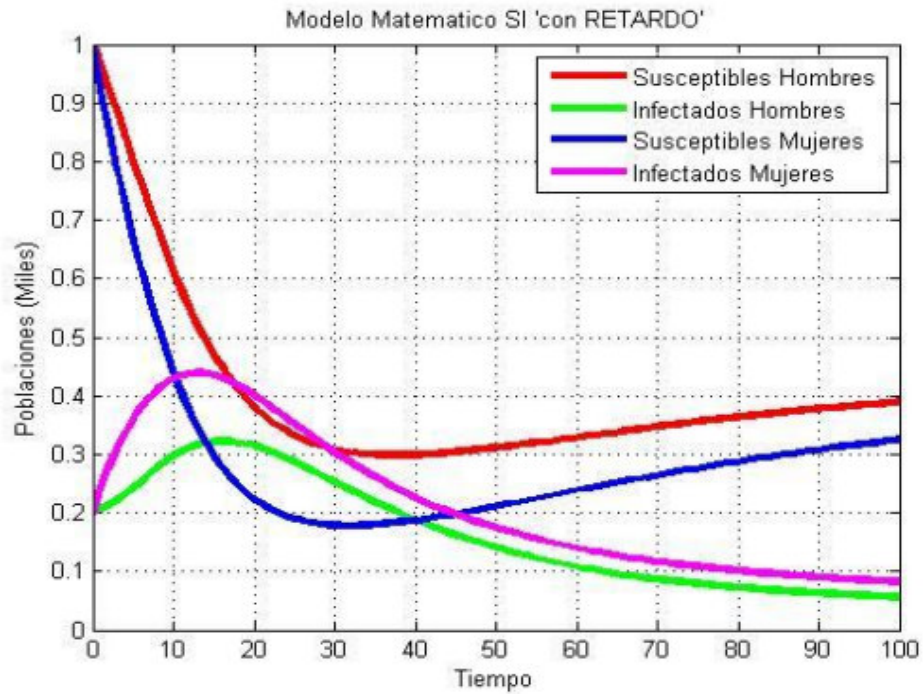


Diagrama PowerDEVS

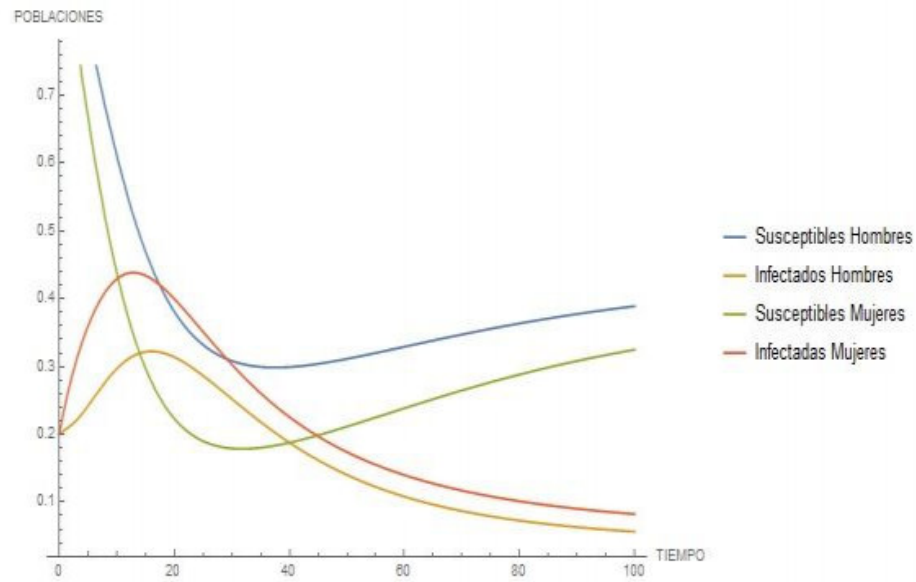
Teniendo el diagrama de PowerDEVS, se podrá realizar la respectiva simulación del Modelo.



Procederemos a realizar las simulaciones con Matlab y Mathematica para complementar la parte del desarrollo numérico computacional.



MATLAB



MATHEMATICA

Interpretación Epidemiológica

El desarrollo de la Epidemia durante un tiempo prolongado siempre es riesgoso ante las personas que son susceptibles cuando entran en contacto con las personas infectadas. Cuanto se tiene una consideración más detallada del comportamiento poblacional de las personas diferenciadas por sexo y su estado epidemiológico nos permite tener una mejor concepción del estado de la epidemia y como se puede ir controlando con una mayor efectividad.

En la simulación nos permite observar el decaimiento de las dos poblaciones susceptibles tanto de hombres como mujeres, por mientras que las poblaciones infectadas van creciendo. Un detalle considerable es un mayor crecimiento de la población de mujeres infectadas en cuanto a la de hombres debido al coeficiente de estrategia de control efectiva. Esta consideración se realiza solo en hombres debido que la protección de las ETS se da por métodos no naturales, como los preservativos masculinos, y una interacción con los preservativos femeninos aún se está difundiendo su utilización, por otro lado, la interacción de ambos a veces surge que puede generar que no protejan a la pareja por alguna ruptura de cualquiera de ambos preservativos, bajo esta concepción solamente se está enfocando la estrategia de control en los Hombres. Y teniendo una adecuada estrategia de control hacia los hombres, también se está protegiendo a las mujeres, solo teniendo la consideración de la protección por medio de los preservativos. Esto permite un considerable descenso en el crecimiento de las poblaciones infectadas donde llegan a un umbral menor que mostrado en el anterior Modelo, teniendo la historia de los infectados varones para una adecuada prevención efectiva.

En el modelo se ve una exposición más alta a la población femenina con mayores cambios en su densidad poblacional en cuanto a la densidad población masculina en los primeros días de evolución de la enfermedad, esto mostraría que una estrategia de control tanto de prevención e intervención a los primeros días del desarrollo de la enfermedad permitiría mejores resultados a mediano plazo en cuanto a una epidemia. En el transcurso del tiempo en que se desarrolla la enfermedad llega un momento que las poblaciones de infectados tanto de Hombres como mujeres van descendiendo debido a la estrategia de control realizada, mientras que la población de susceptibles tanto de hombres y mujeres van creciendo hasta llegar una densidad poblacional casi constante mientras que la población de infectados van descendiendo considerablemente. Después de esta consideración de intervención se debe mantener un control orientado a prevención para que no haya un nuevo brote de la enfermedad. Tomando en cuenta el desarrollo de las poblaciones epidemiológicas siempre en busca del bienestar de la sociedad. La interacción que hay entre las poblaciones susceptibles con las No susceptibles va generando un aumento considerable en cuanto a la exposición de contraer la enfermedad, cualquier ETS considerada que se transmita por vía sexual. Actualmente, hay una exposición mucho más temprana a contraer alguna enfermedad, por lo cual debe ser el primer objetivo mantener una estrategia de prevención efectiva de tal manera que la población susceptible no contraiga la enfermedad al entrar en contacto con la población infectada. Un adecuado seguimiento de la población infectada permitiría tener registros útiles para considerar tiempos de intervención y prevención simultáneamente. En el presente modelo, se tiene más consideración a la población masculina debido que en nuestra sociedad es una población mucho más propensa a una actividad sexual que la femenina considerando la edad de inicio y la constante actividad sexual. [61,64].

Realizar una estrategia de control efectiva en las poblaciones permite generar una estabilidad controlada en el desarrollo de la enfermedad, lo cual debe llevar siempre a realizarse actividades sociales para promover la prevención, y un conocimiento para adecuadas intervenciones en el ambiente social y epidemiológico.

Consideraremos una Simulación computacional adicional para poder visualizar un caso con respecto al coeficiente de Retardo del Modelo. En el *ModeloR 2*, se ha considerado el mismo retardo tanto para para la población Susceptible como la Infectada. Por lo cual, introduciremos dos retardos diferentes, es decir, el Modelo sería el siguiente.

$$\left\{ \begin{array}{l}
S'_h = \sigma_h H_{NS} - \beta_m \cdot w \cdot S_h \cdot I_m - \mu S_h \\
I'_h = \beta_m \cdot w \cdot S_h(t - \tau_s) \cdot I_m(t - \tau_i) - (\alpha + \mu) I_h \\
S'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - \mu S_m \\
I'_m = \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - (\varepsilon + \mu) I_m \\
\\
\text{con Condiciones Iniciales :} \\
\\
S_h(t) = S_h^o \quad , \quad I_h(t) = \varphi_h^o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\
S_m(t) = S_m^o \quad , \quad I_m(t) = I_m^o \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\
\\
\tau_s, \tau_i > 0 \\
0 \leq \sigma_h, \sigma_m, w, \beta_h, \beta_m, \alpha, \mu, \varepsilon < 1
\end{array} \right. \quad (\text{ModeloR 2})$$

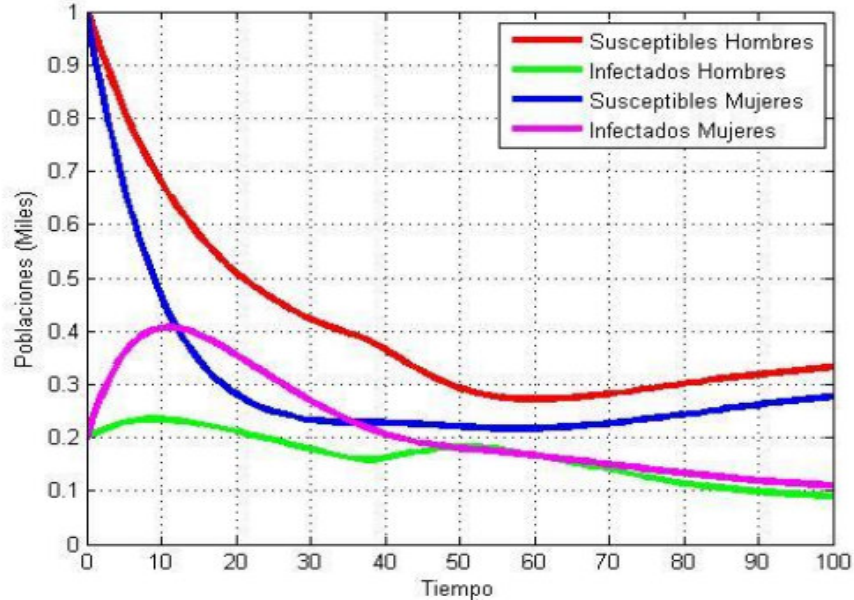
Considerando los mismos parámetros que en la anterior Simulación computacional.

H_{NS}	=	2000	M_{NS}	=	2000	μ	=	0,04
S_h	=	1000	S_m	=	1000	w	=	0,70
I_h	=	200	I_m	=	200	T	=	100

σ_h	=	0,01	σ_m	=	0,01
β_m	=	0,35	β_h	=	0,30
α	=	0,03	ε	=	0,035

El coeficiente del Retardo aplicado a los Susceptibles Hombres será: $\tau_1 = 3$. Esta consideración se evaluará debido a que los Susceptibles siempre están en actividad y el registro es circunstancial que se da dentro de la sociedad, también se ha mostrado estudios que hay un tiempo de actividad de parte del virus en un promedio de tres meses. Por otro lado, El coeficiente del Retardo aplicado a los Infectadas Mujeres será: $\tau_2 = 36$. Esta consideración es la importante debido que se debe tener información detallada de las personas infectadas para poder realizar un seguimiento para una adecuada intervención en bien de la sociedad. A mayor cantidad de datos previos que se pueda tener de los Infectados es mejor para poder analizar el desarrollo a través del tiempo. Esta consideración es la más importante debido que en nuestra sociedad se tiene una gran actividad sexual por parte de la población masculina tanto en *Encuentros casuales* con trabajadoras sexuales o bien con otro tipo de personas. Por otro lado, la población de infectados hombres se considera que la interacción es inmediata para el contagio de la población susceptible femenina. [64,65].

Nuestras consideraciones dentro la concepción del sexo biológico (Hombre y Mujer) tenemos que distinguir algunas perspectivas sociales. Para la mujer, la adopción de riesgos y la vulnerabilidad a la infección se ven incrementadas por normas que hacen que esté poco indicado que tenga una buena información acerca de la sexualidad o que proponga el empleo del preservativo; por la relación habitual que existe entre el consumo de sustancias tóxicas y el intercambio de relaciones sexuales por drogas o dinero; y por el recurso al trabajo sexual por parte de las mujeres migrantes, las refugiadas y otras que sufren la desintegración de la familia. Para el hombre, el riesgo y la vulnerabilidad se ven aumentados por las normas que le dificultan el reconocimiento de deficiencias en sus conocimientos sobre la sexualidad; por la relación que existe entre socializar y consumir alcohol. Para los jóvenes, las normas que desincentivan el acceso a la información y los servicios que fomentan unas relaciones sexuales más seguras; que prescriben la virginidad femenina (lo cual puede favorecer prácticas alternativas como las relaciones sexuales anales); y que empujan a los varones jóvenes a tener “conquistas” sexuales más pronto y con más frecuencia, también aumentan su riesgo y vulnerabilidad a la infección. [81].



Interpretación Epidemiológica

Esta simulación nos permite una mejor concepción del problema, la dinámica de crecimiento de la población de Infectados crece con un menor umbral a consideración de la anterior simulación, del mismo modo, la epidemia se va controlando de manera paulatinamente debido que actualmente la prevención de contagio se realiza de diversas maneras para los Susceptibles Hombres, por otro lado, una adecuada estrategia de control para los Hombres Infectados es mantenerlo con tratamientos, esto es debido que la Salud Pública busca el bienestar de los ciudadanos ante todo. La población Susceptible tanto de Hombres como de Mujeres descienden al inicio pero son poblaciones de mucho menor que en la anterior simulación, lo que luego esta se estabilizará a través del tiempo. Cabe resaltar que en ambas simulaciones la población Susceptible tenderá a estabilizarse en una población constante. Este detalle, se ha demostrado matemáticamente.

La consideración detallada sobre la Población de Hombres Susceptibles está en el coeficiente del Retardo, que base a la historia de los datos recolectados, el coeficiente de la estrategia de control va disminuyendo paulatinamente, por mientras que la población de mujeres susceptibles desciende casi de una misma densidad poblacional que en la anterior simulación computacional, con el detalle que es mucho más lento el descenso. Cuando el hombre realiza una protección efectiva para evitar el contagio también la mujer está siendo protegida. Cabe resaltar que el método no natural de evitar algún contagio es el uso de preservativos, en nuestro caso, el de preservativos masculinos únicamente, debido que el uso conjunto de los preservativos masculinos y femeninos no ayudaría a evitar el contagio debido que el uso podría causar la ruptura de alguno de ellos, lo cual aumentaría la probabilidad de contagio.

Se está considerando que la población masculina tiene una mayor tendencia de actividad sexual, por lo cual se está aplicando la estrategia de control hacia su persona mediante actividades y concientización de las implicancias que tiene contraer alguna ETS, esta perspectiva es tomado debido a los métodos no naturales mediante preservativos. La población femenina no se considera debido que una las mayores preocupaciones es sobre el embarazo no deseado, no obstante, cuando se considera actividades de prevención para ambas poblaciones. En cuestión de consideración para estrategias de control sería bien para la población femenina o bien para población masculina, es

decir, durante la actividad sexual activa es bueno usar el preservativo bien el masculino o bien el femenino. En nuestra sociedad, es mucho más conocido y difundido el preservativo masculino que el femenino, no porque el femenino no sea importante, sino debido que durante los últimos años la población se está familiarizando con los diversos métodos con mucha más prontitud, asertividad, proactividad y efectividad.

La presente simulación computacional, solamente se ha considerado los coeficientes de Retardo diferentes tanto para la población de Hombres susceptibles y la población de Mujeres infectadas, donde no se ha realizado el respectivo análisis matemático. Pero nos brinda nuevas perspectivas sobre el desarrollo de la enfermedad. Más adelante en futuros trabajos se podrá presentar resultados matemáticos donde se complementa con la simulación computacional como se ha realizado cuando se consideraba un solo coeficiente de retardo.

Capítulo 5

Discusiones y Conclusiones

En el presente capítulo, nos permitirá mostrar una relación importante entre la Matemática y la Epidemiología, más aún en la aplicación de la Salud Pública de un país que necesita tener horizontes claros para el bienestar de la nación, de una manera directa en los ciudadanos y su bienestar. El Perú no está ajeno de tener problemas con enfermedades infecciosas en los diferentes zonas geográficas; donde se necesita respuestas inmediatas, a corto, mediano y largo plazo para garantizar una adecuada intervención por el bien de la salud de las personas. Todo estudio científico que permita una mejor perspectiva en bien de la sociedad siempre será una enorme contribución para el desarrollo de la misma sociedad.

La visión que tiene la Dirección General de Epidemiología (DGE) y la Red Nacional de Epidemiología (RENACE), es de mantener una constante vigilancia Epidemiológica en Salud Pública, que permite responder oportunamente y adecuadamente frente a epidemias y otras emergencias sanitarias; brindando un adecuado soporte técnico necesario para una Gestión Sanitaria basada en evidencias científicas con lo cual contribuye al desarrollo de la salud del país. Desde esta perspectiva, la contribución del presente trabajo permitiría tener un pequeño apoyo al trabajo que viene realizando oportunamente la D.G.E. en cuanto a las enfermedades infecciosas, en particular, las Enfermedades de Transmisión Sexual (ETS).

Como se ha mencionado, el Ministerio de Salud (MINSA) mediante la Dirección General de Epidemiología (DGE), ha publicado el año pasado un pequeño pero significativo libro sobre "*Nociones Básicas de Modelamiento Matemático aplicado a la Epidemiología*", que permite poder formular y abstraer los problemas sobre epidemias considerando las poblaciones epidemiológicas (Susceptibles, Expuestos, Infectados, Recuperados). La importancia de este libro viene a ser el primer paso a la comprensión de un problema social que afecta a los ciudadanos del país, que muy bien se estudia, se recolecta datos y se va analizando de acuerdo a los datos obtenidos para poder realizar respuestas y acciones de impacto ante alguna epidemia que se pueda presentar. Para lo cual, intentar comprender lo que está sucediendo y expresarlo matemáticamente para poder buscar alguna respuesta y que pueda guiar a una toma de decisión oportuna en bien de la sociedad. El trabajo no es fácil pero se va formando camino para continuar con la investigación científica que va demostrando una gran importancia para el bienestar del país en el ámbito de la Salud Pública. [66].

Del presente libro [66], nos centraremos en el capítulo 3, de la sección 3 donde se desarrolla los diferentes Modelos Matemáticos SI (Susceptibles - Infectados) en especial con Dinámica Vital. En el libro se muestra como se desarrolla el Modelo acompañado con su respectiva Simulación Computacional lo cual genera la interpretación epidemiológica de acuerdo a los parámetros ingresados, por lo cual un adecuado estudio para obtener los parámetros lo más preciso posible brindaría una simulación más cercana a la realidad, por consiguiente una interpretación más adecuada para una intervención más oportuna.

Por lo cual, mostraremos la Tabla Resumen presentada en el Libro mencionado sobre Modelos Matemáticos Básicos más usados en Epidemiología y Salud Pública. [66].

Modelo	Diagrama de Flujo	Inmunidad	Recuperación	Ejemplo
SIR	$S \rightarrow I \rightarrow R$	Total	SÍ	<i>Sarampión</i>
SIRS	$S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$	Temporal	SÍ	<i>Gripe</i>
SI	S → I	NO	NO	VIH
SIS	$S \rightarrow I \rightarrow S$	NO	NO	<i>ETS</i>
SEIR	$S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$	Total	SÍ	<i>Ébola</i>
SEIRS	$S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$	Temporal	SÍ	<i>Rotavirus</i>

Donde las poblaciones son representadas.

- S : Población de los individuos Susceptibles
- E : Población de los individuos Expuestos
- I : Población de los individuos Infectados
- R : Población de los individuos Recuperados

En el presente trabajo se ha enfocado en el Modelo SI aplicado a las ITS, en particular al VIH/SIDA, considerando en primer lugar el modelo únicamente las poblaciones epidemiológicas, luego la extensión a las poblaciones epidemiológicas complementadas con las demográficas por sexo.

5.1. Relación entre la Matemática y la Epidemiología

Una de los grandes detalles entre el análisis matemático y la interpretación epidemiológica es el complemento adecuado e interdisciplinario que se tiene al realizar un Modelo en cualquier area de investigación, en nuestro caso, la Epidemiología de manera particular al VIH/SIDA, o alguna ITS de transmisión sexual en poblaciones sexualmente activas de manera heterosexual.

Se considerará los siguientes parámetros donde se han obtenido de la base de datos de la página <http://www.indexmundi.com/es/peru/> donde su fuente es: **CIA World Factbook**. Realizada y considerada a menos que sea indicado, toda la información en esta página es correcta hasta el 6 de julio de 2015. Lo cual se ha complementado con los datos recopilados del INEI, la ONUSIDA y el MINSA. Las poblaciones epidemiológicas han sido tomadas de manera referencial para la respectiva simulación lo que incluye de una manera particular para analizar el comportamiento de la epidemia.

Se presentará los Resultados matemáticos obtenidos en el capítulo 3 y complementados con los métodos numéricos presentados en el capítulo 4. Con respecto a los resultados y el análisis epidemiológico se centrará al Punto Libre de Infección de cada Modelo, debido que se busca en qué situaciones se puede obtener este Estado Estacionario donde la enfermedad se haya reducido lo mayor posible. Debido que siempre será el objetivo de toda actividad y medida para frenar el avance de la enfermedad que se está estudiando por el bienestar de la sociedad.

Se consideraron las diferentes tasas de supervivencia que existen cuando se estudia los modelos matemáticos epidemiológicos; estas tasas nos permiten obtener interpretaciones adecuadas para la toma de decisiones y una oportuna retroalimentación de información sobre el desarrollo de la enfermedad en el tiempo.

Para los tres primeros modelos considerados en el capítulo 3 donde solamente se consideraban únicamente las Poblaciones Epidemiológicas se utilizarán los siguientes.

- $R_S = \frac{\sigma N}{\mu}$: Tasa de Supervivencia de la población de los Susceptibles
- $R_I = \frac{\beta}{\alpha + \mu}$: Tasa de Supervivencia de la población de los Infectados
- $\tilde{R} = R_S \cdot R_I$

Para los dos últimos modelos considerados en el capítulo 3 donde solamente se consideraban las Poblaciones Epidemiológicas y también las poblaciones demográficas por sexo (Hombres y Mujeres) permitiendo una adecuada extensión de los modelos anteriores considerados para un estudio mucho más idóneo de la problemática ante alguna Enfermedad de Transmisión Sexual, las tasas de supervivencia utilizadas son las siguientes.

- $R_S^H = \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}$: Tasa de Supervivencia de la población de los Hombres Susceptibles
- $R_I^H = \frac{\beta_m}{\alpha + \mu}$: Tasa de Supervivencia de la población de los Hombres Infectados
- $R_S^M = \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}$: Tasa de Supervivencia de la población de las Mujeres Susceptibles
- $R_I^M = \frac{\beta_h}{\varepsilon + \mu}$: Tasa de Supervivencia de la población de las Mujeres Infectadas

5.1.1. Modelo SI con Dinámica Vital de 2 ecuaciones

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El Modelo presentado en el libro mencionado en el presente capítulo nos presenta el desarrollo y la interpretación epidemiológica con su debida simulación computacional para una adecuada intervención en la sociedad mediante la Salud Pública.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \beta S \cdot I - (\alpha + \mu) I \\ S(0) = S_o \geq 0 ; I(0) = I_o \geq 0 \\ 0 \leq \sigma, \beta, \alpha, \mu < 1 \end{array} \right. \quad (5.1)$$

El Modelo SI representando en la ecuación (5.1) desde la perspectiva matemática es un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el cual ya en el capítulo 3, se ha demostrado que existe una solución y es única, más aún que es positiva debido que las funciones son no negativas, debido representa poblaciones epidemiológicas. Una consideración importante de este sistema, que mediante el análisis cualitativo se determina cómo sería el comportamiento de las soluciones del sistema, es decir, en un largo periodo de tiempo, hacía donde tiende las poblaciones. Por lo cual, se ha determinado matemáticamente diferente Teoremas para garantizar la Estabilidad Local del Sistema que representa nuestro Modelo SI.

Consideraremos los siguientes parámetros y las respectivas poblaciones epidemiológicas para realizar la simulación computacional.

N	=	1500	σ	=	0,01	α	=	0,05
S	=	1485	β	=	0,25			
I	=	15	μ	=	0,04	<i>Tiempo</i>	=	150

- *Punto Libre de Infección:* $E_1 = (0,375; 0)$

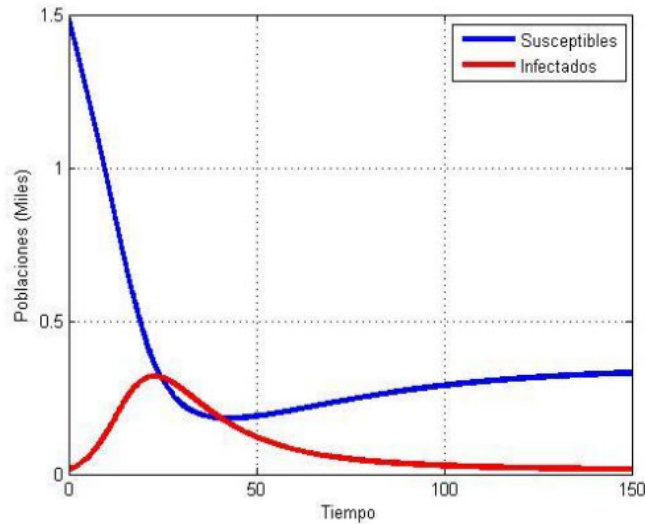
La Estabilidad del punto E_1 se cumple mediante las siguientes condiciones que satisface los parámetros considerados.

- ⊙ $\tilde{R} > 1$: $\tilde{R} = 1,0416 > 1$
- ⊙ $\tilde{R} - \frac{\mu}{\beta} R_I < 1$: $\tilde{R} - \frac{\mu}{\beta} R_I = 0,5972 < 1$

En la presente Simulación se presenta en la estabilidad local del Punto Libre de Infección donde a través del tiempo la población Susceptible tiende a una cantidad promedio constante por mientras que la población Infectada tiende a descender considerablemente hasta acercarse a cero.

Y más aún, por el Teorema de las Soluciones Uniformemente Acotadas y su respectivo corolario de la sección 1 del capítulo 3, podemos observar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t); I(t)) = (0,375; 0)$.

Un Coeficiente en la Epidemiología, es el Número Básico de Reproducción Efectiva (\mathfrak{R}_e), que nos ayuda a determinar bajo que circunstancias la Epidemia descenderá. En nuestro caso, a base de nuestros parámetros obtenemos: $\mathfrak{R}_e = 0,04$. Que indica que a un largo plazo la Epidemia descenderá lo cual corresponde con la simulación computacional.



Ecuaciones Diferenciales con Retardo

El presente Modelo SI, a diferencia del primer Modelo SI del presente capítulo, tiene otra perspectiva de análisis matemático, en el anterior Modelo se tenía mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el cual se ha perturbado con un coeficiente del Retardo, por consiguiente ahora el Modelo es un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \sigma N - \beta S \cdot I - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t - \tau) \cdot I(t - \tau) - (\alpha + \mu) I \\ \text{con Condiciones Iniciales :} \\ S(t) = S_o, I(t) = \varphi_o(t) : [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ 0 \leq \sigma, \beta, \alpha, \mu < 1 \end{array} \right. \quad (5.2)$$

El Modelo SI representando en la ecuación (5.2) desde la perspectiva matemática es un sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo, el cual ya en el capítulo 3, se ha demostrado que existe una solución y es única, más aún que es positiva debido que las funciones son no negativas, debido representa poblaciones epidemiológicas. Una consideración importante de este sistema, que mediante el análisis cualitativo se determina cómo sería el comportamiento de las soluciones del sistema, es decir, en un largo periodo de tiempo, hacia donde tiende las poblaciones. Por lo cual, se ha determinado matemáticamente diferente Teoremas para garantizar la Estabilidad Local del Sistema que representa nuestro Modelo matemático epidemiológico SI (Susceptible - Infectado).

Siendo el tema central del presente trabajo, realizaremos el resumen de los principales resultados desarrollados en el capítulo 3 para nuestro sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo que representa al Modelo Matemático Epidemiológico SI. Consideraremos los siguientes parámetros y las respectivas poblaciones epidemiológicas para realizar la simulación computacional, los cuales son los mismos considerados para el modelo anterior (5.1), solamente con la diferencia que se ha introducido el coeficiente de Retardo (τ).

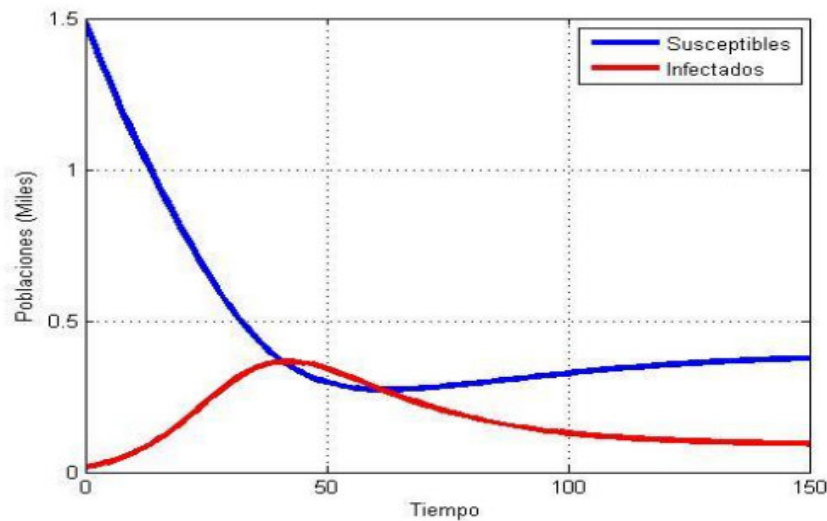
N	=	1500	σ	=	0,01	α	=	0,05
S	=	1485	β	=	0,25	τ	=	3
I	=	15	μ	=	0,04	Tiempo	=	150

- *Punto Libre de Infección:* $E_1 = (0,375; 0)$

La Estabilidad del punto E_1 se cumple mediante las siguientes condiciones que satisface los parámetros considerados.

- ⊙ $\tilde{R} > 1$: $\tilde{R} = 1,0416 > 1$
- ⊙ $\tilde{R} - \frac{\mu}{\beta} R_I < 1$: $\tilde{R} - \frac{\mu}{\beta} R_I = 0,5972 < 1$

En la presente Simulación se presenta en la estabilidad local del Punto Libre de Infección donde a través del tiempo la población Susceptible tiende a una cantidad promedio constante por mientras que la población Infectada tiende a descender considerablemente hasta acercarse a cero. Y más aún, por el Teorema de las Soluciones Uniformemente Acotadas y su respectivo corolario de la sección 2 del capítulo 3, podemos observar que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (S(t); I(t)) = (0,375; 0)$



En la presente simulación, se presente una gráfica similar a la primera donde se realizó mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Pero la consideración fundamental es el coeficiente de Retardo que permite una historia anterior al tiempo inicial, es decir, se tiene datos recopilados donde nos permite tener una consideración adecuada de la propagación de la enfermedad, por otro lado, el coeficiente de retardo considerado es el periodo latente que tiene la enfermedad antes que el contagiado pase a ser un Infectado activo que pueda transmitir la enfermedad. Esta consideración permite un concepción de un crecimiento más lento que en la primera gráfica debido que en la anterior, el contagio pasa inmediatamente a ser un infectado activo, lo cual no siempre sucede en estas enfermedades de transmisión sexual.

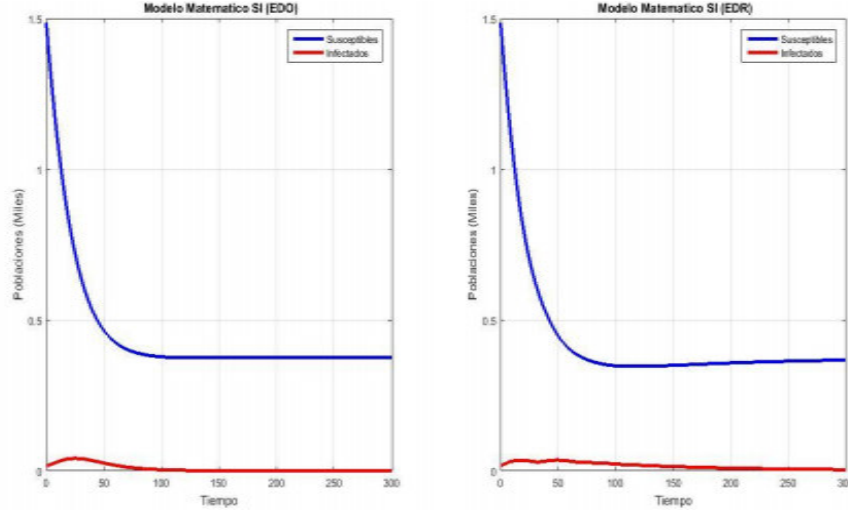
El siguiente Modelo SI, a diferencia del segundo Modelo SI del presente capítulo, tiene la consideración de un coeficiente de Protección (w).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \sigma N - w \cdot \beta \cdot S \cdot I - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = w \cdot \beta \cdot S(t - \tau) \cdot I(t - \tau) - (\alpha + \mu)I \\ \text{con Condiciones Iniciales :} \\ S(t) = S_o \quad , \quad I(t) = \varphi_o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \tau > 0 \\ 0 \leq \sigma, w, \beta, \alpha, \mu < 1 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

El Modelo SI representando en la ecuación (5.3) es una perturbación de la ecuación (5.2) donde se considera una estrategia de control. Del mismo modo, se ha demostrado que existe una solución y es única, más aún que es positiva debido que las funciones son no negativas, debido representa poblaciones epidemiológicas. Una consideración importante de este sistema, que mediante el análisis cualitativo se determina cómo sería el comportamiento de las soluciones del sistema, es decir, en un largo periodo de tiempo, hacía donde tiende las poblaciones. Por lo cual, se ha determinado matemáticamente diferente Teoremas para garantizar la Estabilidad Local del Sistema que representa nuestro Modelo matemático epidemiológico SI (Susceptible - Infectado).

Se ha considerado los siguientes parámetros del libro, para la respectiva simulación computacional. Lo cual añaderemos el coeficiente de Retardo (τ). Se considerará el coeficiente de Protección $w = 0,5$, es decir, que la población utiliza diferentes métodos naturales o no naturales, para prevenir el contagio. En la presente simulación se considerará que, el 50 % se protege de la enfermedad. Debido que que siempre se está realizando diferentes actividades para prevenir el contagio de la enfermedad por parte del Gobierno. Una consideración importante es que cuanto mayor sea la eficiencia y la eficacia de las actividades para un adecuado control de la transmisión de la enfermedad permitirá un descenso aún más rápido de la población de los infectados que llevará al crecimiento de la población susceptible a través del tiempo. Por lo cual, siempre se tiene que se estar revisando como la población conoce y previene el posible contagio de la enfermedad que se está considerando, en nuestro caso, las Enfermedades de Trasmisión Sexual (E.T.S.) de manera particular el VIH/SIDA.

N	=	1500	σ	=	0,01	α	=	0,05
S	=	1485	β	=	0,25	τ	=	3
I	=	15	μ	=	0,04	w	=	0,5



La presente gráfica nos permite considerar que las E.D.R. nos da una mejor perspectiva del comportamiento de la enfermedad a través del tiempo, más aún, se considera una periodo latente de la enfermedad antes de hacerse presente en el individuo contagiado para pasar a un infectado activo. El descenso de la población susceptible es mucho menor en las E.D.R. que en las E.D.O. debido a la historia considerada del periodo latente. Como se menciono se ha considerado un coeficiente de protección del 50 %, es decir, la mitad de la población realiza una protección efectiva ante el contagio de la enfermedad, lo que ayuda considerablemente a evitar la propagación de la enfermedad. Un detalle considerable entre la gráfica de la izquierda (E.D.O.) es el crecimiento más rápido que tiene la población de infectados por mientras que la gráfica de la derecha (E.D.R.) es más lento debido al periodo latente que tiene la enfermedad, de modo particular el VIH/SIDA que tiene un periodo promedio latente de tres meses, por lo cual se ha considerado $\tau = 3$.

5.1.2. Modelo SI con Dinámica Vital de 4 ecuaciones

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Se ha ido desarrollando los Modelo SI con Dinámica Vital considerando las dos poblaciones epidemiológicas (Susceptibles e Infectados). Por lo cual, se añadirá las poblaciones demográficas por sexo (Hombres y Mujeres), para poder tener una descripción más detallada del comportamiento de la enfermedad mediante la interacción de estas cuatro poblaciones (Susceptibles Hombres, Infectados Hombres, Susceptibles Mujeres e Infectadas Mujeres).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S'_h = \sigma_h H_{NS} - w\beta_m I_m S_h - \mu S_h \\
 I'_h = w\beta_m I_m S_h - \alpha I_h - \mu I_h \\
 S'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h I_h S_m - \mu S_m \\
 I'_m = \beta_h I_h S_m - \varepsilon I_m - \mu I_m \\
 \\
 S_h(0) = S_o^h \geq 0 ; I_h(0) = I_o^h \geq 0 \\
 S_m(0) = S_o^m \geq 0 ; I_m(0) = I_o^m \geq 0 \\
 \\
 0 \leq \alpha, \beta_m, \beta_h, \sigma_h, \sigma_m, \varepsilon, \mu, w < 1
 \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Del mismo modo, se considerará los siguientes parámetros y las siguientes poblaciones para la respectiva simulación computacional. Se enfocará en el Punto Libre de Infección para su interpretación epidemiológica.

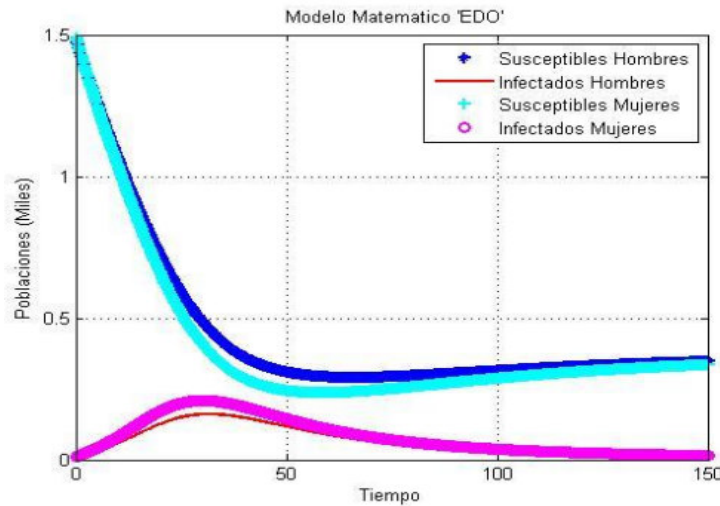
H_{NS}	=	1500	σ_h	=	0,012	M_{NS}	=	1500	σ_m	=	0,01
S_h	=	1480	β_h	=	0,25	S_m	=	1490	β_m	=	0,25
I_h	=	20	α	=	0,0350	I_m	=	10	ε	=	0,038

μ	=	0,04
w	=	0,50
Tiempo	=	150

- Punto Libre de Infección: $E_1 = (0,45; 0; 0,375; 0)$

La Estabilidad del punto E_1 se da mediante las siguientes condiciones que satisface los parámetros considerados: $w \cdot R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M = 0,9014 < 1$

Más aún, el Número Básico de Reproducción Efectiva $\mathfrak{R}_e = 0,9014$. Con lo cual nos ayuda a conocer que la Población de los Infectados (Hombres y Mujeres) con el paso del tiempo irá descendiendo por mientras que la Población de los Susceptibles (Hombres y Mujeres) irá manteniéndose constante con el paso del tiempo.



Se ve fácilmente como las poblaciones Susceptibles tanto de Hombres como Mujeres descienden para luego comenzar a crecer hasta llegar a una población promedio constante a través del tiempo, por mientras que la poblaciones Infectadas tanto Hombres como Mujeres crecen inicialmente pero luego comienzan a descender hasta llegar una población promedio casi cero.

Ecuaciones Diferenciales con Retardo

El presente Modelo SI, en el anterior Modelo se tenía mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el cual se ha perturbado con un coeficiente del Retardo, por consiguiente ahora el Modelo es un Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo. Considerando las mismas poblaciones: Susceptibles Hombres, Infectados Hombres, Susceptibles Mujeres e Infectadas Mujeres.

$$\left\{ \begin{array}{l}
S'_h = \sigma_h H_{NS} - \beta_m \cdot w \cdot S_h \cdot I_m - \mu S_h \\
I'_h = \beta_m \cdot w \cdot S_h(t - \tau) \cdot I_m(t - \tau) - (\alpha + \mu) I_h \\
S'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - \mu S_m \\
I'_m = \beta_h \cdot S_m \cdot I_h - (\varepsilon + \mu) I_m \\
\\
\text{con Condiciones Iniciales :} \\
\\
S_h(t) = S_h^o \quad , \quad I_h(t) = \varphi_h^o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\
S_m(t) = S_m^o \quad , \quad I_m(t) = I_m^o \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\
\\
\tau > 0 \\
0 \leq \sigma_h, \sigma_m, w, \beta_h, \beta_m, \alpha, \mu, \varepsilon < 1
\end{array} \right. \quad (5.5)$$

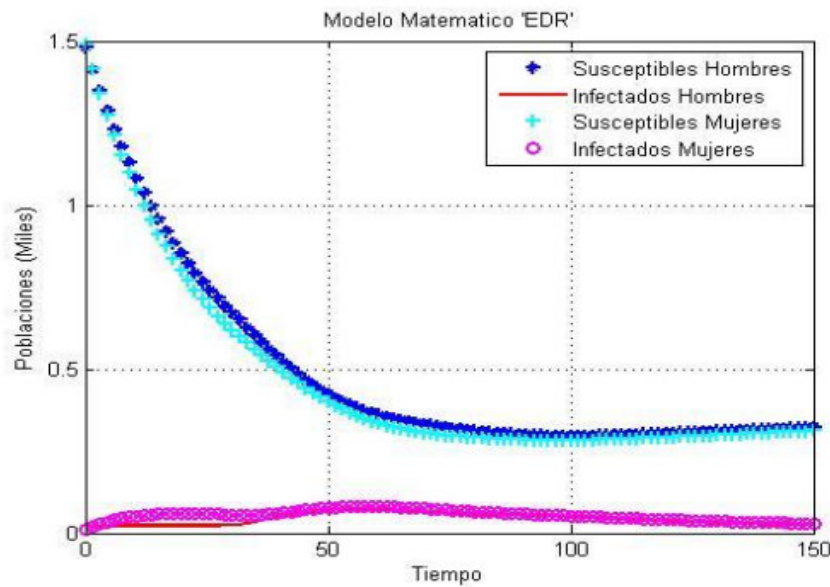
Para la simulación del presente Modelo, consideraremos el coeficiente de Retardo, $\tau = 3$. Considerando que el periodo latente del VIH/SIDA es de tres meses antes que el individuo contagiado pase a ser un infectado activo. Como se ha mencionado, solamente se ha considerado a la población masculina debido a su tendencia de vida sexual activa más promiscua que la mujer. [64,65].

H_{NS}	=	1500	σ_h	=	0,012	M_{NS}	=	1500	σ_m	=	0,01
S_h	=	1480	β_h	=	0,25	S_m	=	1490	β_m	=	0,25
I_h	=	20	α	=	0,0350	I_m	=	10	ε	=	0,038

μ	=	0,04
w	=	0,50
Tiempo	=	150

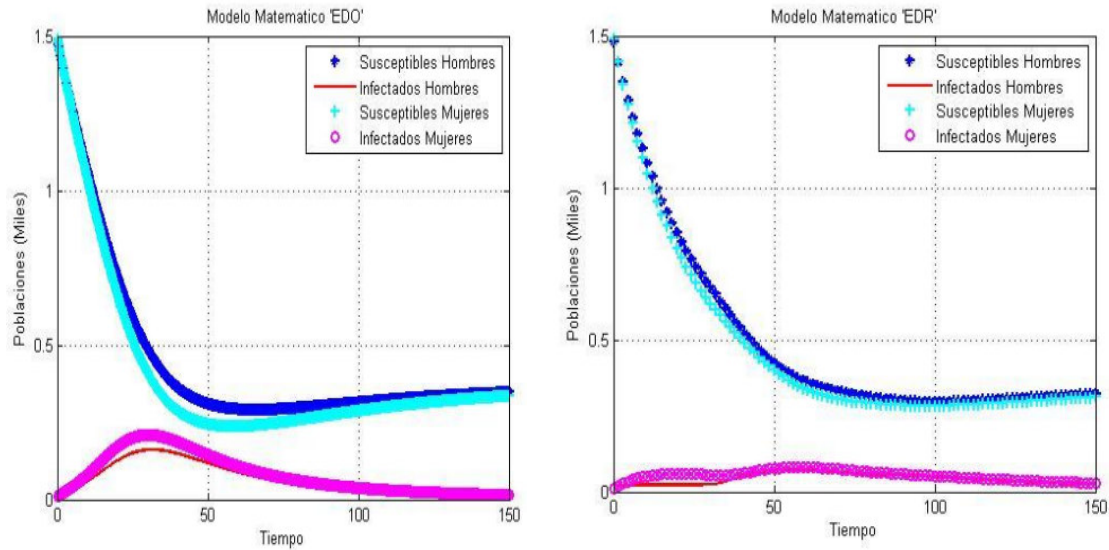
- *Punto Libre de Infección:* $E_1 = (0,45; 0; 0,375; 0)$

La Estabilidad del punto E_1 se cumple mediante los parámetros considerados: $w \cdot R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M = 0,9014 < 1$



De una manera similar, el comportamiento de las poblaciones a través del tiempo es similar a la gráfica anterior, con la diferencia marcada por la población de infectados tanto de Hombres como de Mujeres que es menor. Por ende, la población de susceptibles llega a mantenerse en una población promedio constante a un largo plazo, por mientras que la población infectada va descendiendo considerablemente.

A continuación, se presentará una comparación entre las simulaciones realizadas tanto con el Modelo desarrollado con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y el Modelo desarrollado con las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, para poder analizar las gráficas que representan las consideraciones que contienen cada modelo al estudiar la dinámica de la transmisión de la Epidemia de la Enfermedad de Transmisión Sexual (VIH/SIDA).



En la presente gráfica, tenemos la última comparación, y la más significativa con respecto al Modelo matemático que intenta predecir el comportamiento de las enfermedades de transmisión sexual (ETS), en caso particular el VIH/SIDA, donde se está realizando el modelamiento mediante las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (E.D.O.) y las Ecuaciones Diferenciales con Retardo (E.D.R.). La diferencia principal que tiene estos dos modelos, es la consideración del periodo latente de la enfermedad, pero más aún se puede apreciar en la gráfica que el crecimiento de la población de infectados es menor en la gráfica de la derecha que de la izquierda, y la población susceptible femenina no decrece más que la masculina sino se mantiene casi a un mismo nivel. El detalle más importante es el crecimiento paulatino y suave que se tiene de la población de los hombres infectados debido que solamente se están considerando la historia que se tiene. Esta consideración ayuda a ver que mediante las actividades de prevención y de control nos permite tener una disminución de los infectados, y de los contagios que se puedan suscitar. [64,65].

Después del presente Resumen del trabajo de investigación, se ha relacionado la investigación con las Ecuaciones Diferenciales con Retardo a un trabajo realizado por la Dirección General de Epidemiología (DGE), donde se ha realizado el Modelamiento Matemático aplicado a la Epidemiología con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Por lo cual, el aporte que se presenta puede ser un comienzo para una investigación más detallada con respecto a las enfermedades infecciosas. Las consideraciones tanto matemáticas como epidemiológicas son el complemento crucial e importante para la investigación científica de alguna enfermedad que pueda generar una epidemia. [66].

Las presentes discusiones sobre la perturbación sobre los modelos matemáticos nos permitirán poder seguir investigando sobre las diferentes enfermedades que afectan el bienestar de la sociedad, siendo uno de los principales objetivos de la Salud Pública. El desarrollo científico interdisciplinario dentro de la amplia concepción de alguna problemática epidemiológica abre las puertas a la preocupación de estar siempre preparados ante alguna enfermedad, en especial las ITS. [64].

Después de haber realizado los diferentes capítulos, en especial el capítulo de Discusiones, se ha desarrollado el análisis matemático de los diferentes modelos SI con Dinámica Vital complementados con su análisis numérico mediante sus Simulaciones Computacionales. Por lo cual, consideraremos los siguientes parámetros y los respectivos valores para las poblaciones consideradas anteriormente, con el detalle de las poblaciones epidemiológicas que han sido divididas en las poblaciones demográficas por sexo. Considerando del mismo modo para las Ecuaciones Diferenciales con Retardo como se realizó con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, podremos inferir una adecuada interpretación epidemiológica teniendo en cuenta las dos simulaciones computacionales.

Como ya se había mencionado las consideraciones de un periodo latente de la enfermedad en el individuo, es algo que se da en diferentes enfermedades, en nuestro caso particular el VIH/SIDA, es de vital consideración para tener en cuenta en el modelamiento matemático con lo cual nos permitirá comprender mejor la dinámica de la enfermedad en las poblaciones susceptibles. Además, ya se ha mostrado la estabilidad asintótica del Modelo, que en este caso el Teorema de Estabilidad tanto para el Sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como para el Sistema de Ecuaciones Diferenciales con Retardo poseen la misma hipótesis. Luego pasaremos a describir las diferencias que conlleva ambos Modelos mediante las simulaciones computacionales de cada Modelo en un cuadro comparativo.

La consideración que se tiene las E.D.O. en la dinámica de transmisión de la enfermedad, como ya se había mencionado, es pasar el susceptible a la población infectada instantáneamente, lo cual no sucede en muchas enfermedades, por lo cual considerar ese periodo latente es importante al realizar el modelamiento; lo cual considera las E.D.R. muy bien, permitiendo mejores resultados a comparación de las E.D.O. para las enfermedades de transmisión sexual donde no se considere que la población infectada pueda recuperarse totalmente; lo que no ocurre con el VIH/SIDA debido que cuando se contrae la enfermedad no hay una cura absoluta y completa, sino solamente el control del avance de la enfermedad mediante Retrovirales. [65].

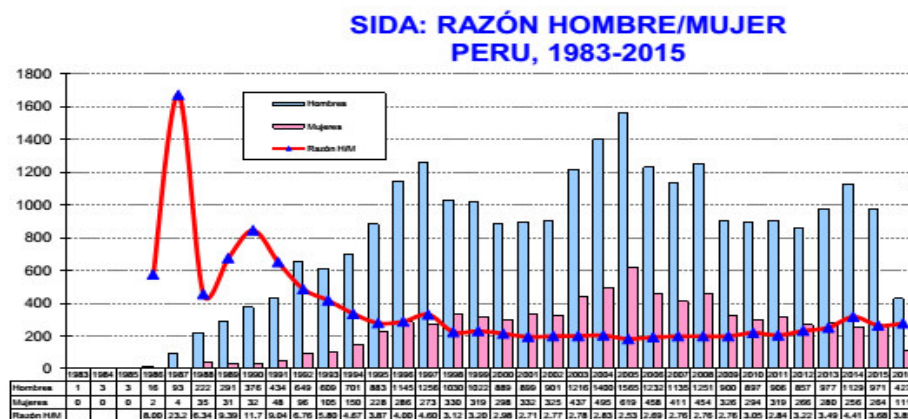
Una consideración importante con respecto al Teorema de Estabilidad para el Punto Libre de Infección tanto para el Sistema de E.D.O. como de E.D.R. parecería ser el mismo para ambos sistemas, y se podría decir, que así es; pero hay que tener en cuenta el coeficiente de Retardo (τ), es decir, el análisis cualitativo que se realiza para conocer el comportamiento de las soluciones a un largo plazo que está garantizado que el Modelo es estable bajo las hipótesis del Teorema de estabilidad, pero en los dos sistemas se considera la estabilidad local, lo que en el sistema de E.D.O. podría suscitarse la estabilidad mucho más lento pero en ese largo plazo lo consigue, por mientras que en el sistema E.D.R. se podría conseguir esa estabilidad a un menor tiempo, pero cabe resaltar que en un largo tiempo también consigue su estabilidad. Con respecto a este detalle, el Teorema de Estabilidad compartido que tienen ambos Modelos permiten la Estabilidad para cada sistema. Otra consideración de τ , es que en muchos casos, el presente coeficiente podría ser un punto de Bifurcación, lo cual en el presente análisis no se ha dado debido que se ha estudiado la Estabilidad Absoluta del Sistema, lo que nos indica que $\tau > 0$, que es el coeficiente más importante en todo el análisis de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

El coeficiente de Retardo posee propiedades que permiten poder conocer la historia pasada de la función con respecto al tiempo inicial, lo cual ayuda a saber sobre los datos recopilados que se tiene ante alguna enfermedad, y más aún se tiene los datos necesarios para poder estudiar correctamente

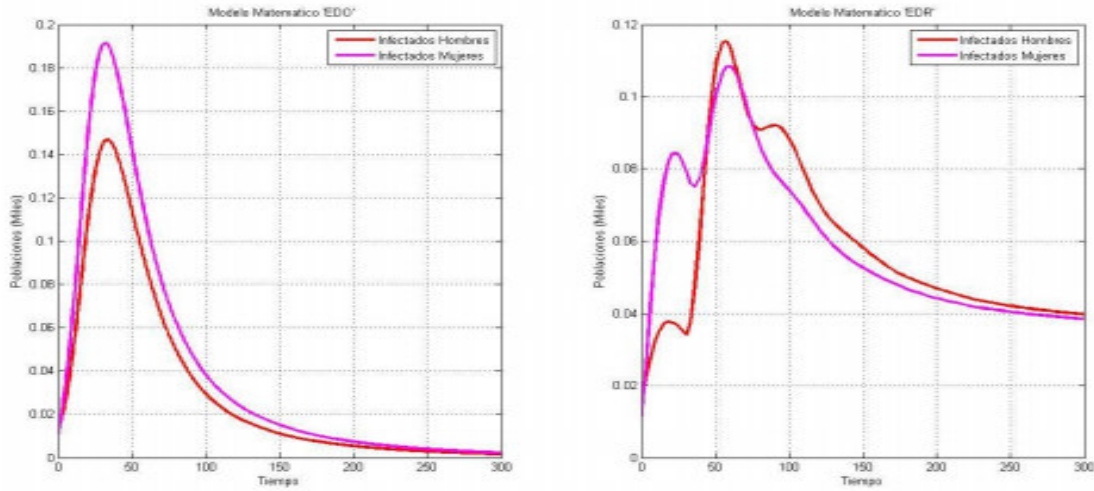
con el Modelo. Siempre se ha tenido a la persona como algo que trasciende todo, por ende, la misión de la Salud Pública debe proteger, salvaguardar tanto a la población susceptible como la infectada enfocado a la situación que afrontan. Los diferentes planes, actividades y métodos que se puedan brindar a los ciudadanos con la misión de mantener la salud de cada individuo que tiene derecho a una atención oportuna, digna, especializada. Siempre la prevención será mejor que el control de la enfermedad cuando se tiene la población infectada. [61,65].

Por último, la consideración numérica de las soluciones aproximadas es de vital importancia para un adecuado y acertado complemento del análisis cualitativo. En el presente trabajo, se ha realizado dos técnicas de los métodos numéricos, los cuales se ha mostrado en el capítulo anterior con detalle. Los métodos Delay QSS mediante PowerDEVS nos ha permitido una aproximación adecuada donde su tiempo de procesamiento es 0,0053 segundos. Por mientras, que Matlab y Mathematica poseen un tiempo de procesamiento de 0,0062 y 0,0049 segundos respectivamente. Pero hay que considerar que el primer programa es de Libre acceso, por mientras que los dos últimos son programas que poseen licencia. Hay muchos programas que nos permiten hallar las soluciones aproximadas. Se ha seleccionado las más conocidas y comerciales dentro del Método Numérico por Tiempo Discreto; por mientras que el primer programa realiza las operaciones computacionales mediante el Método Numérico por Eventos Discretos (DEVS). Esto nos conlleva, a tener un mejor conocimiento de las herramientas que se pueden utilizar para poder conocer posibles escenarios en la que se puede situar la enfermedad, y así poder ver los medios necesarios de tal manera que no se produzcan. Por lo cual, el desarrollo tecnológico y computacional que ha ido creciendo enormemente en los últimos años nos brinda un gran soporte técnico y una ayuda fundamental para la investigación científica dentro del campo de la Epidemiología y la Salud Pública.

La importancia de la relación entre la Matemática y la Epidemiología que se ha ido mostrando a través del presente trabajo, es de considerar diferentes medios científicos de investigación para poder realizar oportunas intervenciones mediante políticas de estado que busquen el bienestar de la sociedad. Por lo cual, ahora relacionaremos el Modelo matemático con los datos recopilados por el MINSA. Como se había desarrollado en una de las simulaciones presentadas en el capítulo 4 referente al Modelo Matemático con dos diferentes retardos nos permite una percepción más cercana los datos recopilados y presentados por el Boletín de la Dirección General de Epidemiología (DGE), donde la fuente recopilada es del "Centro Nacional de Epidemiología, Prevención y Control de Enfermedades - MINSA", la cual está aplicada a la Enfermedad de Transmisión Sexual del VIH/SIDA. [72].



(Figura 1)



(Figura 2)

La gráfica considerada en nuestro Modelo matemático SI con Retardo Discreto para las poblaciones epidemiológicas distribuidas en las poblaciones demográficas por sexo (Hombres y Mujeres) donde el tiempo está en meses para un contraste con el tiempo que va transcurriendo que se presenta en la Figura 2. La respectiva simulación muestra resultados similares a los datos recopilados por la DGE como se presenta en la Figura 1. Lo que mostraría una ayuda significativa para continuar con la investigación para tener modelos mucho más cercanos a la realidad. También se ha añadido la simulación en el Modelo matemático SI sin Retardo (Ecuaciones Diferenciales Ordinarias) donde se podrá apreciar la diferencia entre ambos modelos, mejor dicho la influencia epidemiológica que aporta el coeficiente de Retardo.

El Modelo en las E.D.O. se considera el paso de los susceptibles a la población de los Infectados de manera instantánea por mientras que en el Modelo en las E.D.R. se considera el Retardo que considera el periodo latente que tiene la enfermedad antes de poder transmitir la enfermedad. El análisis epidemiológico que presenta en las E.D.O. es una curva suave que representa un brote que comienza en presencia de la enfermedad en sus inicios en medio de las poblaciones infectadas, pero con el paso del tiempo va descendiendo significativamente hasta el estado de que no haya ningún infectado. Por otro lado, el análisis epidemiológico que presenta en las E.D.R. es una curva que crece en sus inicios pero desciende significativamente, pero también vuelve a crecer levemente para luego seguir con descenso significativo hasta que llegue a estabilizarse las poblaciones infectadas en lo mínimo posible, por lo cual, las E.D.R. permiten un análisis más cercano a la realidad de la enfermedad que se está estudiando debido que los Infectados en la mayoría de los casos se mantienen presentes en la sociedad, pero siguen el tratamiento indicado para que no se propague la enfermedad, en nuestro caso, el VIH/SIDA. [68,69].

Por lo cual, las consideraciones del Modelo nos permite tener una concepción de como se desarrollando el crecimiento o decrecimiento de las poblaciones infectadas con el VIH/SIDA, una de las Enfermedades de Transmisión Sexual, el cual el Modelo está describiendo su comportamiento en el tiempo. El Modelo puede ir perturbándose más para poder asemejarse más a la realidad que se está modelando. Cuánto el Modelo sea más cercano a la problemática que se intenta resolver nos permitiría decidir mejores soluciones y realizar métodos, actividades y controles con mayor impacto por el bien de la sociedad cuando se enfrenta a las diversas enfermedades.

5.2. Conclusiones

Finalmente, después de haber realizado el estudio de los diferentes Modelos presentados para las enfermedades de transmisión sexual (ETS) para poblaciones heterosexuales. Cabe recordar que se empezó a estudiar la problemática con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias donde la transición de una población a otra es instantánea. Por otro lado, luego se perturbó los modelos en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para representarlos mediante las Ecuaciones Diferenciales con Retardo donde el coeficiente de Retardo (τ) modelaba adecuadamente las enfermedades donde hay un periodo latente antes de pasar a ser un infectado con la capacidad de poder transmitir la enfermedad mediante el contacto sexual.

Se ha realizado diferentes estudios para el presente Modelo matemático, donde se ha demostrado que el Sistema matemático posee una solución y es única. Luego, el análisis cualitativo para poder conocer el comportamiento de las soluciones y a la vez, se ha complementado con los métodos numéricos para poder hallar las soluciones aproximadas o soluciones numéricas. Ambas áreas del estudio nos permite modelar adecuadamente problema, e interdisciplinariamente para poder lograr los objetivos trazados de la presente investigación.

Una de las consideraciones importantes sobre este Modelo Matemático que se ha desarrollado es la parte del coeficiente de Retardo (discreto) debido a lo que significa en el desarrollo de alguna enfermedad, es decir, actualmente se tiene datos recopilados de las enfermedades que están presentes en la sociedad, y cómo van afectando y de qué manera se ha ido contrarrestando, todo estos detalles se pueden representar mediante el coeficiente de retardo (τ); en nuestro modelo se ha considerado un valor constante, pero también se ha podido considerar una función que represente el desarrollo de los datos. Por eso, en el caso de algunas enfermedades de transmisión sexual que poseen un periodo latente antes de poder ser contagiadas, las Ecuaciones Diferenciales con Retardo son las Ecuaciones Diferenciales más adecuadas para estudiar esta problemática. Las ecuaciones diferenciales ordinarias no serían las más idóneas debido que su consideración es de un paso instantáneo para poder realizar el contagio. Por lo cual, para un buen comienzo del Modelamiento matemático ha sido idóneo haberlo realizado por las E.D.O. ha sido un comienzo apropiado para luego poder realizarlo por las E.D.R. Esta consideración es debido que en las diferentes E.T.S. se tiene que el paso de un Susceptible a ser Infectado puede ser instantáneo o también puede haber un periodo latente que posee la enfermedad. [32,36].

Ahora, presentaremos una tabla resumen de los diferentes Modelos Matemáticos que se han desarrollado tanto en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (donde la transmisión de la enfermedad es de manera instantánea) como en las Ecuaciones Diferenciales con Retardo (donde la transmisión de la enfermedad se realiza después de un periodo de incubación). La estabilidad local de los puntos estacionarios (Punto Libre de Infección y Punto Endémico) en el Sistema de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias por mientras la estabilidad asintótica de los puntos estacionarios (Punto Libre de Infección y Punto Endémico) en el Sistema de las Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

Modelo Matemático SI de 2 poblaciones

Considerando los Modelos matemáticos representados para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en (5.1), y para las Ecuaciones Diferenciales con Retardo en (5.2) se obtiene los siguientes resultados que nos permiten diferenciar los diferentes enfoques del modelamiento matemático para representar la dinámica de transmisión de la enfermedad (VIH/SIDA). Siendo de gran utilidad la estabilidad que ambos modelos poseen; donde las E.D.O. se ha obtenido la Estabilidad Local, por mientras que en las E.D.R. se ha obtenido la Estabilidad Asintótica y más aún se ha demostrado las Soluciones Oscilatorias que presentan las Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

Para lo cual, presentaremos algunas variables auxiliares.

- $R_S = \frac{\sigma N}{\mu}$ Tasa de Supervivencia de los Susceptibles
- $R_I = \frac{\beta}{\alpha + \mu}$ Tasa de Supervivencia de los Infectados
- $\tilde{R} = R_S \cdot R_I$
- $R = \sigma \beta N - \mu(\alpha + \mu)$
- $d = \alpha + \mu$
- $K_1 = (\mu d)^2 + (\mu y)^2$
- $K_2 = (\mu d + R - y^2)^2 + y^2 \left(\alpha + 2\mu + \frac{R}{d}\right)^2$

Modelo EDO (5.1)	Punto Libre de Infección	Punto Endémico
<i>Punto Crítico</i>	$E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0\right)$	$E_2 = \left(R_I^{-1}; (\tilde{R} - 1)\frac{\mu}{\beta}\right)$
<i>Existencia</i>	Ninguna	$\tilde{R} > 1$
<i>Estabilidad Local</i>	$\tilde{R} < 1$	$\tilde{R} > 1$

Modelo EDR (5.2)	Punto Libre de Infección	Punto Endémico
<i>Punto Crítico</i>	$E_1 = \left(\frac{\sigma N}{\mu}; 0\right)$	$E_2 = \left(R_I^{-1}; (\tilde{R} - 1)\frac{\mu}{\beta}\right)$
<i>Existencia</i>	Ninguna	$\tilde{R} > 1$
<i>Estabilidad Asintótica</i>	$\tilde{R} < 1$	$K_1 < K_2$

Modelo Matemático SI de 4 poblaciones

Considerando los Modelos matemáticos SI estructurados por Sexo (Hombres y Mujeres) representados para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en (5.3), y para las Ecuaciones Diferenciales con Retardo en (5.4) se obtiene los siguientes resultados que nos permiten diferenciar los diferentes enfoques del modelamiento matemático para representar la dinámica de transmisión de la enfermedad (VIH/SIDA). Siendo de gran utilidad la estabilidad que ambos modelos poseen; donde las E.D.O. se ha obtenido la Estabilidad Local, por mientras que en las E.D.R. se ha obtenido la Estabilidad Asintótica y más aún se ha demostrado las Soluciones Oscilatorias.

Para lo cual, presentaremos algunas variables auxiliares.

- $R_S^H = \frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}$ Tasa de Supervivencia de los Susceptibles Hombres
- $R_I^H = \frac{\beta_h}{\alpha + \mu}$ Tasa de Supervivencia de los Infectados Hombres
- $R_S^M = \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}$ Tasa de Supervivencia de los Susceptibles Mujeres
- $R_I^M = \frac{\beta_m}{\varepsilon + \mu}$ Tasa de Supervivencia de los Infectados Mujeres
- $\mathfrak{R} = R_S^H \cdot R_I^H \cdot R_S^M \cdot R_I^M$
- $d_1 = \alpha + \mu$

- $d_2 = \varepsilon + \mu$
- $R_1 = w\sigma_m\beta_m\sigma_h\beta_h M_{NS}H_{NS} - \mu^2(\alpha + \mu)(\varepsilon + \mu)$
- $R_2 = w\sigma_m\beta_m M_{NS} + \mu(\varepsilon + \mu)$
- $R_3 = (\alpha + \mu)(\sigma_m\beta_m M_{NS} + \mu(\varepsilon + \mu)w)$
- $R_4 = \sigma_h\beta_h H_{NS} + \mu(\varepsilon + \mu)$
- $\hat{a} = (2\mu + d_1 + d_2) + \frac{R_1}{R_3} + \frac{\beta_m R_1}{d_2 R_4}$
- $\hat{b} = (2\mu d_2 + d_1 d_2) + \frac{\mu}{R_4}(\mu + 2d_1) + \frac{R_1}{R_3}\left(d_1 + \mu + \frac{\beta_m R_1}{d_2 R_4}\right) + \frac{R_1}{R_4}\left(\beta_m + \beta_m\mu + \frac{\beta_m d_1}{d_2} + \frac{d_2}{R_3}\right)$
- $\hat{c} = \frac{R_1 R_1}{R_4 R_3}\left(\beta_m + \frac{\beta_m d_1}{d_2}\right) + \frac{R_1}{R_4}\left(\beta_m\mu + \frac{\beta_m d_1}{d_2}\right) + \frac{R_1}{R_3}(\mu d_1 + \mu d_2 + d_1 d_2) + \mu^2 d_1 + 2\mu d_2 + d_1 d_2$
- $\hat{d} = \frac{R_1}{R_4}(\beta_m\mu d_1 + \beta_m d_1) + \mu d_1 d_2 \frac{R_1}{R_3} + \mu^2 d_1 d_2$
- $\overline{K}_1 = \frac{w\beta_m\beta_h}{(\alpha+\mu)(\varepsilon+\mu)R_4}$
- $\overline{K}_2 = \left(\frac{(\varepsilon+\mu)(\alpha+\mu)R_4^2}{\beta_h\beta_m R_2} - \frac{R_1^2}{\mu^2 w R_4}\right)$
- $\widetilde{K}_1 = w^2 \left(\frac{R_3^*}{R_2^*}\right)^2 (y + \mu)^2$
- $\widetilde{K}_2 = (y^4 - \hat{b}y^2 + \hat{d})^2 + (\hat{c}y - \hat{a}y^3)^2$

Modelo EDO (5.3)	Punto Libre de Infección	Punto Endémico
<i>Punto Crítico</i>	$\widetilde{E}_1 = \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0\right)$	$\widetilde{E}_2 = \left(\frac{d_2 R_4}{\beta_h R_2}, \frac{R_1}{\beta_h R_3}, \frac{R_3}{\beta_m R_4}, \frac{R_1}{d_2 R_4}\right)$
<i>Existencia</i>	Ninguna	$R_1 > 0$
<i>Estabilidad Local</i>	$\Re < 1$	$\frac{R_2^2}{\mu^2} \neq \frac{R_4 R_3}{\beta_m}$ $0 < \overline{K}_1 \cdot \widetilde{K}_1 < \frac{1}{4}$

Modelo EDR (5.4)	Punto Libre de Infección	Punto Endémico
<i>Punto Crítico</i>	$\widetilde{E}_1 = \left(\frac{\sigma_h H_{NS}}{\mu}; 0; \frac{\sigma_m M_{NS}}{\mu}; 0\right)$	$\widetilde{E}_2 = \left(\frac{d_2 R_4}{\beta_h R_2}, \frac{R_1}{\beta_h R_3}, \frac{R_3}{\beta_m R_4}, \frac{R_1}{d_2 R_4}\right)$
<i>Existencia</i>	Ninguna	$R_1 > 0$
<i>Estabilidad Asintótica</i>	$\Re < 1$	$\hat{a}\hat{b} > \hat{c}, \hat{a}\hat{b}\hat{c} > \hat{a}^2\hat{d} + \hat{c}^2$ $\widetilde{K}_1 < \widetilde{K}_2$

Finalmente se ha presentado las diferentes tablas donde se puede apreciar el resumen de ambos Modelos con respecto al estudio de su Estado Estacionario tanto en el Punto Libre de Infección como el Punto Endémico donde se ha demostrado las claras diferencias que presentan cada modelo con respecto al enfoque se ha determinado para la construcción del Modelo.

Con respecto a las simulaciones se ha tenido dos áreas de donde se ha realizado el análisis numérico, el tiempo discreto y el evento discreto, ambos métodos brindan un análisis numérico significativo para el fin que se busca que es aproximar el desarrollo de las poblaciones a través del tiempo que se considere.

En el presente trabajo se ha utilizado varios programas computacionales entre los más conocidos: MATLAB, Mathematica, Maple (programas que poseen licencia), también están los programas RStudio y Python (programas de libre acceso) todos desarrollan el proceso numérico de tiempo discreto. Por otro lado, también se ha realizado las simulaciones computacionales por los métodos Delay QSS en PowerDEVS que realiza el proceso numérico por eventos discretos; y además es de libre acceso. Las consideraciones que uno siempre tiene en cuenta al realizar una investigación que requiere cálculos numéricos computacionales es un adecuado programa que los pueda realizar, pero también con la consideración si puede utilizar libremente o se tiene que pagar alguna licencia para su utilización. En la actualidad, se tiene diferentes programas computacionales de libre acceso que permiten realizar las simulaciones computacionales de una precisión computacional significativa para la investigación que se desea realizar. [46,67].

Finalmente podremos realizar las siguientes conclusiones puntuales.

- Las Ecuaciones Diferenciales con Retardo nos permiten realizar un mejor modelamiento matemático para las enfermedades de transmisión sexual (ETS) cuando estas tengan un periodo latente antes de pasar a la población de infectados, aptos para propagar la enfermedad, que las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- El coeficiente de Retardo que representa adecuadamente la Historia cuando la enfermedad tiene un periodo latente, es decir, los datos recopilados con anterioridad permite un mejor modelamiento de la enfermedad (ETS) lo cual hace que las Ecuaciones Diferenciales con Retardo sea el área adecuada de la matemática para aplicarlo a la Epidemiología.
- La estabilidad del Modelo matemático tanto en las E.D.O. como en las E.D.R. para el estado estacionario, donde se encuentra Libre de Infección, se da en el producto de las Tasas de Supervivencia de cada población considerada, donde si este producto es menor que uno, entonces el Modelo es asintóticamente estable.
- Las consideraciones de los Teoremas de las Soluciones Uniformemente Acotadas y de estabilidad en el estado estacionario Libre de Infección en el Modelo SI con Retardo Discreto para las poblaciones Epidemiológicas permiten describir bajo qué condiciones se puede llegar a ese escenario. Más aún se ha demostrado las condiciones para que se presenten Soluciones Oscilatorias debido que mucho de las Enfermedades de Transmisión Sexual no tienen un descenso directo sino tiende a crecer por momentos y decrecer después por lo cual matemáticamente es necesario tener soluciones oscilatorias decrecientes hasta que se lleguen a su convergencia descrita por el estado estacionario considerado.
- El coeficiente de la Estrategia de Control efectiva (w) es lo que permite una considerable reducción en la propagación de la enfermedad; por lo cual siempre se tiene que incrementar con el tiempo, la eficiencia y la eficacia de las diversas actividades de prevención y control para el bienestar de la Sociedad dentro la misión que tiene la Salud Pública dentro del país. Y relacionado con el coeficiente de Retardo complementa una mejor perspectiva del problema en cuanto a la historia que se tiene de la enfermedad cuando posee un periodo latente.
- La tasa de contagio cuanto sea menor y se tenga un coeficiente de estrategia de control adecuado permitirá que la propagación de la enfermedad se mantenga en niveles bajos por mientras que los susceptibles puedan ir creciendo hasta estabilizarse en el tiempo.
- Las tasas de mortalidad de una manera ayuda al descenso de los infectados, pero no se busca que la tasa de mortalidad natural, y también la tasa de mortalidad por la enfermedad se incrementen sino más bien que disminuya debido que es uno de los objetivos fundamentales de la Salud Pública. Por consiguiente, la importancia que tiene la sensibilidad de la tasa de contagio y del coeficiente de la Estrategia de control dentro del Modelo es de vital importancia para un adecuado análisis epidemiológico en bien de la sociedad.

- En el análisis cualitativo del Modelo matemático en E.D.R. se realizó finalmente por la *Estabilidad Asintótica*, o como el autor Hal Smith lo denomina Estabilidad Absoluta, donde el sistema es asintóticamente estable para todo $\tau > 0$. Esto quiere decir que el coeficiente de Retardo que determina en muchos casos un punto de Bifurcación no se tiene resultados matemáticos para poder afirmar para qué valores del Retardo (τ) puede hacer que la convergencia sea más rápida o más lenta, o incluso que diverga. Este detalle lo complementamos con las simulaciones computacionales realizadas.
- Las E.D.R. son Ecuaciones Diferenciales que poseen Soluciones Oscilatorias que permiten un mejor modelamiento del problema epidemiológico, en nuestro caso particular el VIH/SIDA, debido a la construcción que se realiza para determinar las soluciones del Sistema a diferencia de las E.D.O. que no poseen esta propiedad intrínsecamente en su análisis cualitativo.
- Los Métodos Numéricos desarrollados por Tiempo Discreto y los Métodos Numéricos por Eventos Discretos poseen ventajas y desventajas. La adecuada utilización del método numérico dependerá de las consideraciones del problema que se debe realizar las simulaciones computacionales para optimizar el tiempo a realizarse, y los resultados requeridos para la investigación.
- El análisis numérico tanto por Tiempo discreto como por Eventos discretos nos permitieron realizar simulaciones computacionales similares bajo las mismas consideraciones y en el mismo error absoluto ($E_{abs} = 10^{-6}$) de su procesamiento computacional. Brindando dos formas de realizar las simulaciones donde se obtiene buenos resultados computacionales.
- La utilización de los programas computacionales más comerciales debido a su gran precisión y facilidad de uso como Matlab y Mathematica (programas con licencia) tienen sus límites computacionales debido a un gran número de operaciones que causan un gran costo computacional que en algunas ocasiones no pueden terminar de realizarlas debido las perspectiva del tiempo discreto, por mientras que los métodos Delay QSS en PowerDEVS (programa de libre acceso) pudieron completar las operaciones debido a la perspectiva de los eventos discretos en los sistemas que se están simulando. Esta consideración computacional se relaciona directamente con el análisis matemático realizado al Sistema de Ecuaciones Diferenciales.
- El modelamiento matemático brinda una cercanía a los datos estadísticos recopilados, para lo cual, cuando el Modelo tenga más consideraciones significativas de cómo se interactúa las diferentes poblaciones para que se propague la enfermedad podrá mostrarnos mejores resultados; y por ende, una mejor toma de decisiones para afrontar oportunamente la propagación de la enfermedad que se está estudiando.
- La simulación representada en la *Figura 2* del Modelo matemático en contraste a la *Figura 1* de los datos recopilados por la D.G.E. se tiene que considerar el respectivo análisis matemático y estadístico donde se considere el margen de error. El margen de error en el análisis de los datos nos determinará un adecuado modelo que pueda ser confiable con los datos recopilados a través de los años. Pero no quita el apoyo que el modelo está brindando para tener una percepción de lo qué pueda suceder más adelante con la enfermedad.
- El complemento de una investigación interdisciplinaria de las diferentes áreas de la ciencia permitiría poder profundizar la realidad sensible con la que se afronta las enfermedades de transmisión sexual (ETS) mediante las diferentes actividades de tal manera que se prevenga, se controle la propagación de las enfermedades, y así lograr mantener niveles bajos a través del tiempo.

5.3. Trabajos Futuros

Una de las consideraciones fundamentales sobre las Enfermedades de Transmisión Sexual (ETS) es la introducción de una población que es el punto de quiebre entre las poblaciones susceptibles femeninas, el cual es la población bisexual que se relaciona tanto con hombres como con mujeres, este detalle es importante abordarlo de una manera más cuidadosa debido que se relaciona con tres poblaciones susceptibles que son la Femenina, la Masculina, y de manera especial con la Homosexual masculina (o también conocida "gay"). Por lo cual, permite una propagación mucho mayor y con una incidencia mayor a la heterosexual. [81].

Del presente trabajo que se ha estudiado a las poblaciones epidemiológicas (Susceptibles e Infectados) en primer lugar. Luego se ha extendido la consideración de las poblaciones demográficas por sexo (Hombre y Mujer) en las poblaciones Epidemiológicas lo cual ha ayudado a diversificar el estudio epidemiológico. Se podría aún más extender el estudio ya no de las poblaciones demográficas por sexo sino ya por *género*, es decir, ya no se consideraría solamente Hombre y Mujer sino se consideraría Hombre, Mujer, Bisexual y "gay", un detalle que no se considerará son las mujeres homosexuales o también llamadas lesbianas debido que en la sociedad no tiene una gran relevancia en las enfermedades de transmisión sexual. Esta nueva consideración perturbaría aún más el Modelo presentado tanto por las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como las Ecuaciones Diferenciales con Retardo. [81,82].

Una propuesta sería la formulación del Modelo que se ha desarrollado, en primer lugar por las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y luego realizar la perturbación del Modelo a las Ecuaciones Diferenciales con Retardo.

Las poblaciones de una manera similar a los anteriores modelos serán las siguientes:

- S_h : Población de Hombres Heterosexuales Susceptibles
- I_h : Población de Hombres Heterosexuales Infectados
- S_m : Población de Mujeres Susceptibles
- I_m : Población de Mujeres Infectadas
- S_b : Población de Hombres Bisexuales Susceptibles
- I_b : Población de Hombres Bisexuales Infectados
- S_g : Población de Hombres Homosexuales Susceptibles
- I_g : Población de Hombres Homosexuales Infectados

Las tasas del Modelo serán las siguientes:

- σ_h : Tasa de Ingreso a la Pob. sexualmente activa de los Hombres.
- σ_m : Tasa de Ingreso a la Pob. sexualmente activa Mujeres.
- σ_g : Tasa de Ingreso a la Pob. sexualmente activa de los Hombres Homosexuales y Bisexuales.
- β_m : Tasa de contagio de una Mujer infectada a un Hombre Susceptible
- β_h : Tasa de contagio de un Hombre Infectado a una Mujer Susceptible
- β_{bm} : Tasa de contagio de un Hombre Bisexual Infectado a una Mujer Susceptible

- β_{bb} : Tasa de contagio de un Hombre Bisexual Infectado a un Hombre Bisexual Susceptible
- β_{mb} : Tasa de contagio de una Mujer Infectada a un Hombre bisexual Susceptible
- β_{bg} : Tasa de contagio de un Hombre Bisexual Infectado a un "Gay" Susceptible
- β_{gg} : Tasa de contagio de un Hombre Homosexual Infectado a un "Gay" Susceptible
- β_{gb} : Tasa de contagio de un Hombre Homosexual Infectado a un Hombre bisexual Susceptible
- μ : Tasa de mortalidad natural
- α : Tasa de mortalidad de los Hombres por la enfermedad
- ε : Tasa de mortalidad de las Mujeres por la enfermedad
- w : Coeficiente de la Estrategia de Control efectiva

5.3.1. Modelo en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Considerando las poblaciones y las tasas tanto de ingreso a la población sexualmente activa, de contagio y de mortalidad, y por último el coeficiente de la Estrategia de Control (parámetros) se formularía el siguiente modelo, de una manera similar a los modelos anteriores desarrollados en el presente trabajo. Cabe resaltar que se está considerando que el paso de la población susceptible a la población infectada es instantánea.

El presente modelo tiene mucho más poblaciones que el anterior modelo que se presentó en la sección 4 del capítulo 3, donde se consideraba las poblaciones demográficas por sexo (Hombre y Mujer), ahora se considerará las poblaciones demográficas por género (Hombre, Mujer, Bisexual Hombre y Homosexual Hombre (gay)). Por lo cual, la extensión generará una mejor consideración de lo que está ocurriendo con la Epidemia de las E.T.S. debido a la gran propagación de los portadores bisexuales y homosexuales en la actualidad.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S'_h = \sigma_h H_{NS} - w\beta_m I_m S_h - \mu S_h \\
 I'_h = w\beta_m I_m S_h - \alpha I_h - \mu I_h \\
 S'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h I_h S_m - \beta_{bm} I_b S_m - \mu S_m \\
 I'_m = \beta_h I_h S_m + \beta_{bm} I_b S_m - \varepsilon I_m - \mu I_m \\
 S'_b = \sigma_g H_{NS} - w\beta_{mb} I_m S_b - w\beta_{bb} I_b S_b - w\beta_{gb} I_g S_b - \mu S_b \\
 I'_b = w\beta_{mb} I_m S_b + w\beta_{bb} I_b S_b + w\beta_{gb} I_g S_b - \alpha I_b - \mu I_b \\
 S'_g = \sigma_g H_{NS} - w\beta_{bg} I_b S_g - w\beta_{gg} I_g S_g - \mu S_g \\
 I'_g = w\beta_{bg} I_b S_g + w\beta_{gg} I_g S_g - \alpha I_g - \mu I_g
 \end{array} \right. \quad (5.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 S_h(0) = S_o^h \geq 0 & I_h(0) = I_o^h \geq 0 \\
 S_m(0) = S_o^m \geq 0 & I_m(0) = I_o^m \geq 0 \\
 S_b(0) = S_o^b \geq 0 & I_b(0) = I_o^b \geq 0 \\
 S_g(0) = S_o^g \geq 0 & I_g(0) = I_o^g \geq 0
 \end{array} \right.$$

$$0 \leq \sigma_h, \sigma_m, \sigma_g, \beta_m, \beta_h, \beta_{mb}, \beta_{bm}, \beta_{bg}, \beta_{gg}, \beta_{gb}, \beta_{bb}, \mu, \alpha, \varepsilon, w < 1$$

Como se puede apreciar el modelo matemático es mucho más amplio debido que considera más poblaciones, pero también matemáticamente se hace mucho más detallado y riguroso el análisis matemático. Del mismo modo, se complementarían con las simulaciones computacionales. El Modelo matemático necesita de los parámetros para poder realizar las simulaciones, lo cual la obtención de los respectivos parámetros mediante la recolección de datos epidemiológicos. El estudio matemático

y el estudio numérico para el presente modelo sería lo adecuado para poder tener una adecuada comprensión de la posible situación que se pueda presentar la Epidemia que se está estudiando, donde se estará considerando diferentes escenarios de la dinámica de transmisión de la enfermedad. De una manera similar, habrá dos puntos críticos en el estado estacionario cuales son: el punto libre de infección y el punto endémico.

5.3.2. Modelo en Ecuaciones Diferenciales con Retardo

Considerando las poblaciones y las tasas tanto de ingreso a la población sexualmente activa, de contagio y de mortalidad, y por último el coeficiente de la Estrategia de Control (parámetros) se formularía el siguiente modelo, de una manera similar a los modelos anteriores desarrollados en el presente trabajo. Cabe resaltar que se está considerando que la población infectada tiene un periodo latente antes de pasar a la población infectada donde estará apto para poder realizar el contagio a la población susceptible.

Para el presente Modelo, se considerará los coeficientes de Retardo discreto en las poblaciones epidemiológicas de los infectados hombres tanto los heterosexuales, homosexuales y bisexuales.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S'_h = \sigma_h H_{NS} - w\beta_m I_m S_h - \mu S_h \\
 I'_h = w\beta_m I_m(t-\tau) S_h(t-\tau) - (\alpha + \mu) I_h \\
 S'_m = \sigma_m M_{NS} - \beta_h I_h S_m - \beta_{bm} I_b S_m - \mu S_m \\
 I'_m = \beta_h I_h S_m + \beta_{bm} I_b S_m - (\varepsilon + \mu) I_m \\
 S'_b = \sigma_g H_{NS} - w\beta_{mb} I_m S_b - w\beta_{bb} I_b S_b - w\beta_{gb} I_g S_b - \mu S_b \\
 I'_b = w \cdot [\beta_{mb} I_m(t-\tau) + w\beta_{bb} I_b(t-\tau) + w\beta_{gb} I_g(t-\tau)] \cdot S_b(t-\tau) - (\alpha + \mu) I_b \\
 S'_g = \sigma_g H_{NS} - w\beta_{bg} I_b S_g - w\beta_{gg} I_g S_g - \mu S_g \\
 I'_g = w \cdot [\beta_{bg} I_b(t-\tau) + w\beta_{gg} I_g(t-\tau)] \cdot S_g(t-\tau) - (\alpha + \mu) I_g
 \end{array} \right. \quad (5.7)$$

con Condiciones Iniciales :

$$\begin{array}{l}
 S_h(t) = S_h^o \quad , \quad I_h(t) = \varphi_h^o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\
 S_m(t) = S_m^o \quad , \quad I_m(t) = I_m^o \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\
 S_b(t) = S_b^o \quad , \quad I_b(t) = \varphi_b^o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\
 S_g(t) = S_g^o \quad , \quad I_g(t) = \varphi_g^o(t) \quad : \quad [-\tau, 0] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+
 \end{array}$$

$$\tau > 0$$

$$0 \leq \sigma_h, \sigma_m, \sigma_g, \beta_m, \beta_h, \beta_{mb}, \beta_{bm}, \beta_{bg}, \beta_{gg}, \beta_{gb}, \beta_{bb}, \mu, \alpha, \varepsilon, w < 1$$

Como se puede apreciar el modelo matemático es mucho más amplio debido que considera más poblaciones, pero también matemáticamente se hace mucho más detalloso y riguroso el análisis matemático. Del mismo modo, se complementarían con las simulaciones computacionales. El Modelo matemático necesita de los parámetros para poder realizar las simulaciones, lo cual la obtención de los respectivos parámetros mediante la recolección de datos epidemiológicos.

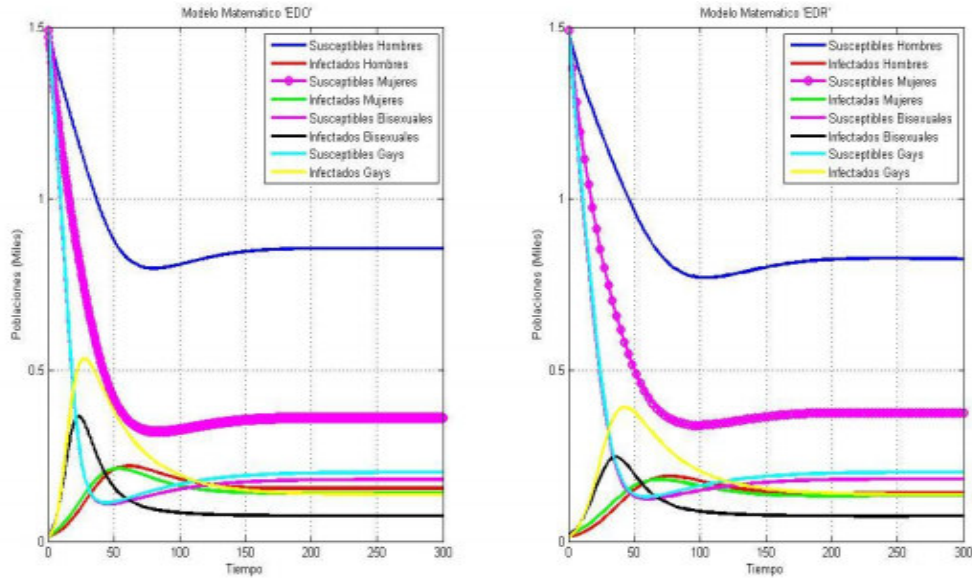
Se realizará una simulación computacional para el Modelo propuesto tanto para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como las Ecuaciones Diferenciales con Retardo, para presentar una posible extensión del Modelo desarrollado en el presente trabajo. Se tendrá en consideración un tiempo de 300 meses para el desarrollo de la dinámica de transmisión de la enfermedad.

S_h	=	1485	S_m	=	1490	S_b	=	1485	S_g	=	1490
I_h	=	15	I_m	=	10	I_b	=	15	I_g	=	10
σ_h	=	0,01	σ_m	=	0,01	σ_b	=	0,003	σ_g	=	0,003
μ	=	0,04	α	=	0,04	ε	=	0,04	w	=	0,50

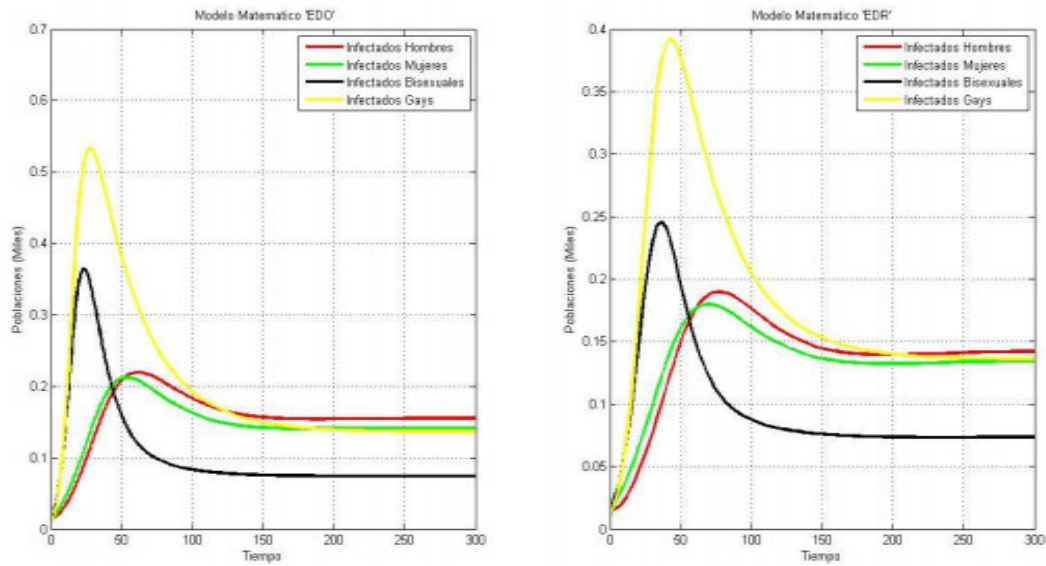
Consideraremos las siguientes tasas de contagio presentadas en el Modelo matemático.

β_m	=	0,18	β_{bm}	=	0,20	β_{bb}	=	0,20	β_{gb}	=	0,25
β_h	=	0,19	β_{mb}	=	0,15	β_{bg}	=	0,18	β_{gg}	=	0,30

La respectiva Simulación del Modelo de las cuatro poblaciones epidemiológicas divididas por las poblaciones demográficas por género.



Resaltaremos el desarrollo de las poblaciones de Infectados para una mejor visualización de la evolución de la enfermedad a través del tiempo considerado.



La presente simulación nos permite visualizar el comportamiento de cada población epidemiológica a través del tiempo considerando tanto el sistema de E.D.O. Y el sistema de E.D.R. para lo

cual, nos muestra gráficas similares teniendo en cuenta la percepción que se busca para el análisis de la enfermedad que se está estudiando. Como se había mencionado el estudio de las E.D.O. nos ayuda cuando las enfermedades tienen un paso instantáneo de susceptible a infectado, por mientras que muchas otras enfermedades tienen un periodo latente antes de ser considerados dentro de la población de infectados.

Por lo cual, en la dinámica de transmisión de las poblaciones susceptibles por medio de la interacción de los infectados, se tiene que considerar la población bisexual con mucho detalle debido que es la población que interactúa con la población femenina y con la población homosexual. El desarrollo de las poblaciones a través del tiempo, indica que la población susceptible tiene un descenso hasta un punto que luego llega a estabilizarse por mientras que las poblaciones infectadas tiene un crecimiento paulatino hasta un umbral donde después comienzan a descender hasta estabilizarse en el tiempo. Lo importante de la simulación es que nos permite intuir cuando se da este umbral y en que tiempo, por lo cual se debe disminuir mediante intervenciones por las instituciones del país para mantener en niveles bajo la epidemia que puede ocasionar la enfermedad. [81].

Estos dos modelos son una propuesta mucho más extensa que los anteriores, por lo cual se debe realizar el análisis matemático donde se puede desarrollar la respectiva estabilidad del sistema, y complementarlo con el análisis numérico respectivo. Solamente se ha presentado una simulación computacional para intentar inferir el impacto que se puede tener en la sociedad, más aun cuando los datos de la DGE presentan una mayor actividad sexual entre las poblaciones de homosexuales. [82].

Presentaremos para finalizar esta sección la consideración que se tiene mediante los estudios de la Dirección General de Epidemiología - MINSA. Lo cual, nos puede ayudar a comprender la importancia que se debe realizar sobre las Enfermedades de Transmisión Sexual (ETS) debido que la actividad sexual se realiza a más temprana edad, y por lo cual se debe realizar actividades e intervenciones con mayor eficiencia y eficacia para prevenir el contagio de las diferentes enfermedades.



De cada 20 personas mayores de 15 años infectados con VIH en el Perú en el 2010



9 (45%) serán Hombres y mujeres heterosexuales (incluyendo principalmente mujeres parejas de hombres HSH bisexuales Trabajadoras sexuales y hombres clientes de trabajadoras sexuales)

Apéndice A

Apéndice

En el presente apéndice, se presentarán las demostraciones de algunos teoremas importantes utilizados en los capítulos expuestos, adaptados de [7,46].

A.1. Prueba de Teoremas del Capítulo 4

Se definen aquí algunas herramientas que se utilizarán en los teoremas y sus pruebas. [7].

A.1.1. Estabilidad Entrada - Estado

- **Función Clase K** : Una función continua a valores reales $\alpha : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ se dice pertenecer a la clase K , si la misma es estrictamente creciente, y $\alpha(0) = 0$.
- **Función Clase L** : Una función continua a valores reales $\psi : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ se dice pertenecer a la clase L , si la misma es estrictamente decreciente, y $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$.
- **Función Clase KL** : Una función continua a valores reales $\beta : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ se dice pertenecer a la clase KL , si la misma es clase K con respecto al primer argumento, y clase L con respecto al segundo.

Estable Entrada - Estado (ISS - Input to State Stable)

Sea $\phi_a(t)$ la solución de la Ecuación Diferencial con Retardo

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau_1(x, t)); \dots; x(t - \tau_m(x, t)); u(t)) \quad (\text{A4.1})$$

para $u(t) = 0$ con una historia inicial dada por $\phi_a(t < 0)$, y sea $\phi(t)$ la solución para una entrada dada por $u(t)$ con historia inicial $\phi(t < 0)$.

Se define lo siguiente

$$\Delta\phi_0 = \sup_{t < 0} \|\phi(t) - \phi_a(t)\| \quad (\text{A4.2})$$

y

$$u_m = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\| \quad (\text{A4.3})$$

Se dice que el sistema de la ecuación (A4.1) es *Estable Entrada - Estado* sobre $\phi_a(t)$ si existe una función β clase KL , y una función α clase K tal que

$$\|\phi(t) - \phi_a(t)\| \leq \beta(\Delta\phi_0, t) + \alpha(u_m) \quad (\text{A4.4})$$

Cuando la historia inicial de $\phi(t)$ es idéntica a la de $\phi_a(t)$, se tiene $\Delta\phi_0 = 0$, y la condición de *Estable Entrada - Estado* deviene en:

$$\|\phi(t) - \phi_a(t)\| \leq \alpha(u_m) \quad (\text{A4.5})$$

En este último caso, la propiedad de ser *Estable Entrada - Estado* implica que una entrada acotada provocará una diferencia acotada entre las trayectorias del sistema forzado y del sistema libre. Adicionalmente, a medida que se hace más pequeña su cota superior, también lo hace la cota superior de la diferencia entre ambas trayectorias.

A.1.2. Demostración del Teorema 4.1

La aproximación QSS de la ecuación (4.7) está dada por:

$$x'(t) = Aq(t) + \sum_{i=1}^m A_i q(t - \tau_i) \quad (\text{A4.6})$$

Sea $\phi_a(t)$ la solución analítica de la ecuación (4.7) partiendo de una historia inicial arbitraria, y sea $\phi(t)$ la solución de la ecuación (A4.6) partiendo de la misma condición inicial $\phi(t \leq 0) = \phi_a(t \leq 0)$.

Definamos la perturbación introducida en los estados mediante la cuantización de la ecuación (A4.6) como:

$$\Delta x(t) \triangleq q(t) - x(t) \quad (\text{A4.7})$$

Ahora, reescribimos la ecuación (A4.6) como:

$$x'(t) = A(x(t) + \Delta x(t)) + \sum_{i=1}^m A_i(x(t - \tau_i) + \Delta x(t - \tau_i)) \quad (\text{A4.8})$$

Esto implica que $\phi(t)$ será también la solución de la ecuación (A4.8), verificándose:

$$\phi(t) = A(\phi(t) + \Delta x(t)) + \sum_{i=1}^m A_i(\phi(t - \tau_i) + \Delta x(t - \tau_i)) \quad (\text{A4.9})$$

Como $\phi_a(t)$ es una solución de la ecuación (4.7), lo siguiente se verificará:

$$\phi_a(t) = A\phi_a(t) + \sum_{i=1}^m A_i\phi_a(t - \tau_i) \quad (\text{A4.10})$$

Definimos ahora el error cometido por la aproximación QSS como:

$$e(t) \triangleq \phi(t) - \phi_a(t) \quad (\text{A4.11})$$

Luego, sustrayendo la ec. (A4.10) de la ec. (A4.9), el error tendrá la siguiente dinámica:

$$e'(t) = Ae(t) + \sum_{i=1}^m A_i e(t - \tau_i) + A\Delta x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i) \quad (\text{A4.12})$$

con $e(t \leq 0) = 0$.

Definiendo $B \triangleq I$, y

$$u(t) \triangleq Ax(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i) \quad (\text{A4.13})$$

la dinámica del error puede reescribirse como:

$$e'(t) = Ae(t) + \sum_{i=1}^m A_i e(t - \tau_i) + Bu(t) \quad (\text{A4.14})$$

Cuando $u(t) = 0$, esta última ecuación es idéntica a la ecuación (4.7) con la condición inicial trivial. Luego, de acuerdo a la hipótesis inicial, la solución de (A4.14) para $u(t) = 0$ es asintóticamente estable, luego la ecuación (A4.14) es Estable Entrada - Estado.

Esto es, existe una función α que es clase K que verifica $\|e(t)\| \leq \alpha(\sup_{t \geq 0} \|u(t)\|)$. Luego en cuenta que

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \|A\Delta x(t) + \sum_{i=1}^m A_i \Delta x(t - \tau_i)\| \\ \|u(t)\| &\leq \|A\| \|\Delta x(t)\| + \sum_{i=1}^m \|A_i\| \|\Delta x(t - \tau_i)\| \\ \|u(t)\| &\leq \|A\| \|\Delta Q\| + \sum_{i=1}^m \|A_i\| \|\Delta Q\| \\ \|u(t)\| &\leq (\|A\| + \sum_{i=1}^m \|A_i\|) \|\Delta Q\| \end{aligned} \quad (\text{A4.15})$$

siendo ΔQ el vector de "quantum", resulta que

$$\|e\| \leq \alpha((\|A\| + \sum_{i=1}^m \|A_i\|) \cdot \|\Delta Q\|) \triangleq \gamma(\|\Delta Q\|) \quad (\text{A4.16})$$

donde γ es una función Clase K .

Luego, el error es acotado para todo $t \geq 0$. Con esto termina la prueba del ítem 1 del teorema.

Aún más, cuando el "quantum" tiende a cero, es decir, $\|\Delta Q\| \rightarrow 0$, resulta que $\|e\| \rightarrow 0$ (esto es una propiedad de cualquier función Clase K). Con esto termina la prueba de la condición de convergencia postulada en el ítem 2.

A.1.3. Demostración del Teorema 4.2

Sea e_m un número positivo arbitrario. Sea $t_f > 0$, el primer instante en el cual la norma del error $\|e(t)\|$ alcanza el valor e_m . Luego, se tiene $\|e(t)\| < e_m$ para todo $t < t_f$.

Definamos

$$\Delta x(t) \triangleq q(t) - x(t) \quad (\text{A4.17})$$

y

$$\Delta x(t) \triangleq x(t - \tau(q, t)) - x(t - \tau(x, t)) \quad (\text{A4.18})$$

Luego, puede reescribirse la aproximación DQSS de la ecuación (4.9) como

$$x'(t) = f(x(t) + \Delta x(t), x(t - \tau(x, t)) + \Delta x_\tau(t) + \Delta x(t - \tau(q, t)), t) \quad (\text{A4.19})$$

Ahora, definimos

$$u(t) \triangleq f(x(t) + \Delta x(t), x(t - \tau(x, t)) + \Delta x_\tau(t) + \Delta x(t - \tau(q, t)), t) - f(x(t), x(t - \tau(x, t)), t) \quad (\text{A4.20})$$

Luego, la aproximación DQSS de la ecuación (A4.19) se hace idéntica al sistema de la ecuación (4.8), que es *Estable Entrada - Estado* sobre la solución analítica $\phi_a(t)$. También se sabe que

$$\|\Delta x(t)\| \leq \delta Q \triangleq \|\Delta Q\| \quad (\text{A4.21})$$

para todo t . Notamos asimismo que, dado que estamos asumiendo que $\|\phi(t) - \phi_a(t)\| < e_m$ para todo $t < t_f$, luego la función f en la aproximación DQSS de la ecuación (4.9) está siendo evaluada en una región acotada, debido que

$$\|q(t)\| \leq \phi_{a_{\max}} + e_m + \delta Q \quad (\text{A4.22})$$

para todo $t < t_f$, siendo $\phi_{a_{\max}}$ una cota superior para la norma de la solución analítica $\phi_a(t)$.

Teniendo en cuenta que f es localmente Lipschitz, existe una constante L para la región dada tal que

$$\|u(t)\| \leq L(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta x_\tau(t) + \Delta x(t - \tau(q, t))\|) \quad (\text{A4.23})$$

Usando también la ecuación (A4.21) en esta última ecuación nos da como resultado

$$\|u(t)\| \leq L(2\delta Q + \|\Delta x_\tau(t)\|) \quad (\text{A4.24})$$

La función $\tau(\cdot)$ es localmente Lipschitz y está siendo evaluada en la misma región acotada. Luego, existe una constante L_τ en esa región tal que:

$$|\tau(q(t), t) - \tau(x(t), t)| \leq L_\tau \|q(t) - x(t)\| \leq L_\tau \cdot \delta Q \quad (\text{A4.25})$$

Partiendo de la ecuación (A4.18) se sabe que

$$\|\Delta x_\tau(t)\| \leq \max_{t < t_f} (\|x'(t)\|) \cdot |\tau(q(t), t) - \tau(x(t), t)| \quad (\text{A4.26})$$

Recordando que $f(\cdot)$ está siendo evaluada en una región acotada definida por la ecuación (A4.22), y que es localmente Lipschitz, resulta también acotada, y luego existe una constante positiva f_m tal que $(\|x'(t)\|) \leq f_m$ para todo $t < t_f$. Luego,

$$\|\Delta x_\tau(t)\| \leq f_m \cdot L_\tau \cdot \delta Q \quad (\text{A4.27})$$

Insertando esta última desigualdad en la ecuación (A4.24), se obtiene:

$$\|u(t)\| \leq (2L + f_m \cdot L_\tau) \cdot \delta Q \quad (\text{A4.28})$$

Dado que el sistema forzado de la ecuación (4.8) es *Estable Entrada - Estado*, y $\phi(t) - \phi_a(t) = 0$ para $t \leq 0$, luego la última ecuación implica que existe una función α clase K tal que

$$\|e(t)\| \leq \alpha((2L + f_m \cdot L_\tau) \cdot \delta Q) \quad (\text{A4.29})$$

para todo $t < t_f$.

Luego, tomando un "quantum" lo suficientemente pequeño δQ , puede hacerse

$$\|e(t)\| \leq \alpha((2L + f_m \cdot L_\tau) \cdot \delta Q) < \rho \cdot e_m \quad (\text{A4.30})$$

para cualquier $0 < \rho < 1$.

Esto contradice la suposición inicial de que el error alcanza al valor e_m en el instante t_f . Así, eligiendo el "quantum" de modo que se cumpla la ecuación (A4.30), el error nunca alcanzará e_m .

Aún más, se toma un valor arbitrariamente pequeño para e_m , siempre puede se puede encontrar un δQ tal que se verifique la ecuación (A4.30). Esto prueba la convergencia cuando $\delta Q \rightarrow 0$.

Bibliografía

- [1] LIZ EDUARDO. *Sobre Ecuaciones Diferenciales con Retraso, Dinámica de Poblaciones y Números Primos*. Materials Matemàtics. Volum 2006, treball no. 17, 24 pp. ISSN: 1887-1097. Publicación electrónica de divulgación del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona. (2006).
- [2] ITZÁ BALAM REYMUNDO ARIEL. *Método Numéricos para Sistemas de Ecuaciones Diferenciales*. Coloquio FMAT. (2008).
- [3] LIZ, EDUARDO. *Un Puente entre las Ecuaciones Diferenciales con Retardo y los Sistemas Dinámicos Discretos*. Departamento de Matemática Aplicada II, E.T.S.E. Telecomunicación, Campus Marcosende, Universidad de Vigo. (2008).
- [4] SHAMPINE L.F., THOMPSON S. *Numerical Solution of Delay Differential Equations*. Mathematics Department, Southern Methodist University, Dallas. Dept. of Mathematics & Statistics, Radford University, Radford. (2008).
- [5] KOFMAN ERNESTO; FERNÁNDEZ JOAQUÍN. *Simulación de Sistemas Continuos por Eventos Discretos*. Departamento de Control. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario. (2014).
- [6] KOFMAN ERNESTO. *Simulación de Sistemas Continuos (Notas de Clase)*. Laboratorio de Sistemas Dinámicos, Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario. (2010).
- [7] CASTRO RODRIGO. *Herramientas Integradoras para Modelado, Simulación y Control de Redes de Datos*. Departamento de Control. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario. (2010).
- [8] BURDEN L. RICHARD, FAIRES DOUGLAS. *Análisis Numérico*. Ediciones Paraninfo. (2002).
- [9] CHAPRA STEVEN, CANALE RAYMOND. *Numerical Methods for engineers*. Mc Graw Hill. (2006).
- [10] ESTRELLA GONZÁLEZ, ÁNGEL GABRIEL, GARCÍA ALMEIDA, GERARDO EMILIO, AVILA-VALES, ERIC JOSÉ. *Estabilidad Local de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Retardo y Aplicaciones*. Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Abstraction & Application 8, 38-60. (2013).
- [11] MURRAY J.D. *Mathematical Biology I: Spatial models and medical applications*. Springer. Third edition. vol 18. (2003).
- [12] MURRAY J.D. *Mathematical Biology II: Spatial models and medical applications*. Springer. Third edition. vol 18. (2003).
- [13] KUANG, Y. *Delay differential equations: with applications in population dynamics*. Academic Press. (Ed.). (1993).

- [14] SMITH HAL. *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences* (Vol. 57). Springer Science & Business Media. (2010).
- [15] CASTELLO CASTELLO JORGE. *Perspectiva de la Salud Pública en el Perú. FORO*. Academia Nacional de Medicina - Anales. (2005).
- [16] QUISPE MÉNDEZ TEÓFANES . *Notas de Clase de Cálculo en \mathbb{R}^n* . Unidad de Posgrado. Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (2015).
- [17] LIZANA MARCOS. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. Universidad de Los Andes. (2000).
- [18] SOTOMAYOR JORGE. *Licoes de Equacoes Diferenciais Ordinaria*. Instituto Matematica Pura e Aplciada. (1942).
- [19] BENAZIC TOMÉ RENATO MARIO. *Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Serie Matemática. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Ingeniería. (2006).
- [20] LAGES ELON . *Análisis Real, Volumen 1,2*. Instituto de Matemática y Ciencias Afines, UNI. Colección Textos del IMCA. (1997).
- [21] PEREZ NUÑEZ, JHELLY REYNALUZ. *Dinámica del control biológico basado en un modelo de cadena alimenticia con tres niveles tróficos*. UNMSM. (2014).
- [22] MONZÓN, PABLO. *Notas sobre estabilidad de sistemas dinámicos*. Curso de actualización. (2003).
- [23] IBÁÑEZ SIVERA, JAVIER, MARTINEZ VÁSQUEZ, JUAN, GARCÍA JAVIER. *Breve estudio de la Estabilidad y Criterios de Estabilidad en Sistemas Continuos*. ETSII. (2005).
- [24] LÓPEZ CRUZ, ROXANA. *Structuerd SI Epidemic Models with Applications to HIV Epidemic*. Arizona State University. (2006).
- [25] ROCHA NUÑEZ, JOSÉ MANUEL , LARA HERNANDEZ, ELIZABETH. *Criterio de Estabilidad de Routh*. Ingeniería de Control. Universidad Autónoma de Nuevo León. (2008).
- [26] VAN DEN DRIESSCHE P., WATMOUGH JAMES. *Further Notes on the Basic Reproduction*. Department of Mathematics and Statistics. Canada. (2000).
- [27] CASTILLO CHAVEZ CARLOS, FENGY ZHILAN, HUANGZ WENZHANG. *On the Computacion of \mathfrak{R}_o and its role on Global Stability*. (2000).
- [28] O. DIEKMANN, J.A.P. HEESTERBEEK, M.G. ROBERTS. *The Construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models*. Journal of Royal Soc. Interface 2010.
- [29] MESA MAZO M, VERGAÑO SALAZAR JUAN, SANCHEZ BOTERO CLAUDIA, MUÑOZ LOAIZA ANIBAL. *Modelo matemático para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA en una población sexualmente activa*. Universidad de Quindío, Armenio, Colombia. (2010).
- [30] PINO ROMERO NEISSER. *Modelo matemático para la dinámica de transmisión del VIH/SIDA en una población sexualmente activa en el Perú*. UNMSM. (2013).
- [31] CASTILLO CHAVEZ CARLOS, FENGY ZHILAN, HUANGZ WENZHANG. *On the Computacion of \mathfrak{R}_o and its role on Global Stability*. (2000).
- [32] HADELER K.P. *Neutral Delay Equations from and for Population Dynamics*. Arizona State University. (2008).

- [33] F. BRAUDER, J. NOHEL. *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations, An Introduction*. Dover, New York. (1989).
- [34] HALE J.K. *Ordinary Differential Equations*. Krieger, Malabar. (1980).
- [35] DRIVER RODNEY DAVID. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Mathl. Comput. Modelling Vol. 24, No. 9, pp. 63-68, (1996).
- [36] ERWIN FORDE JONATHAN. *Delay Differential Equation Model in Mathematical Biology*. The University of Michigan, (2005).
- [37] H. I. FREEDMAN. H. X. XIA. *Periodic Solutions of Single Species Model with Delay Differential Equations, Dynamical Systems and Control Science*. pages 55-74. (1994).
- [38] GOURLEY. S. A. Y KUANG YANG. *A Stage Structured Predator-Prey Model and its dependence on Maturation Delay and Death Rate*. J. Math. Biol., 49:188-200 (2004).
- [39] D. MUKHERJEE. *Stability Analysis of an SI Epidemic Model with Time Delay*. Mathl. Comput. Modelling Vol. 24, No. 9, pp. 63-68, (1996).
- [40] S. BUSENBERG K.L, COOKE, POZIO M.A. *Analysis of a model of a vertically transmitted disease*. J. Math. Biol. 17, 305-329 (1983).
- [41] S. BUSENBERG K.L, COOKE, POZIO M.A. *Vertically transmitted disease*. Biomathematics Vol. 23, Springer-Verlag (1993).
- [42] GERAGHTY EMMA. *Delay Differential Equations in Modelling Insulin Therapies for Diabetes*. University of Portsmouth. (2008).
- [43] CHEBOTAREV N. G., MEIMAN N.N. *The Routh-Hurwitz problem for polynomials and entire functions*. Trudy Mat. Inst. Steklov. (1949).
- [44] CHOW S. Y HALE J. K. *Periodic Solutions of Autonomous Equations*. J. Math. Anal. Appl. 66:495-506. (1978).
- [45] CIUPE S. M., BIVORT B.L., NELSON P. W. *Estimates of Kinetic Parameters from HIV patient data during primary infection through the Eyes of three different models*. Math. Biosci. (2009).
- [46] CASTRO RODRIGO, KOFMAN ERNESTO, CELLIER FRANCOIS E. *Quantization based Integration Method for Delay-Differential Equations*. Simulation Modelling Practice and Theory, 19(1), 314-336. (2011).
- [47] ALLEN, L. J. S. *An Introduction to Mathematical Biology*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey. (2007).
- [48] POOYA AAVANI. *Ordinary and Delay Differential Equation Models of Viral Infection With Application to HIV and Hepatitis C Virus*. Texas Tech University. (2012).
- [49] MINISTERIO DE SALUD. *Presentación: Infección de Transmisión Sexual y SIDA*. Disponible: http://www.minsa.gob.pe/portada/est_san/vih.htm. (2003).
- [50] GALA GONZÁLEZ, ÁNGELA, ET AL. *Dinámica de adquisición del VIH en su dimensión social, ambiental y cultural*. Revista Cubana de Medicina Tropical 59.2: 0-0. (2007)
- [51] IZAZOLA LICEA JOSÉ, AVILA FIGUEROA CARLOS, CÁCERES PALACIOS CARLOS, CAMARA BILALI, NUNES ANDRÉ, SAAVEDRA LÓPEZ JORGE, SIERRA MANUEL, VÍQUEZ ABEL. *Situación epidemiológica y económica del SIDA en América Latina y el Caribe*. Fundación Mexicana para la Salud. (1998).

- [52] CUETO, MARCOS. *Culpa y Coraje: Historia de las Políticas sobre el VIH/Sida en el Perú*. Vol. 7. Consorcio de investigación económica y social, (2001).
- [53] MINISTERIO DE SALUD. *Análisis de la Situación Epidemiológica del VIH /SIDA en el Perú*. Ministerio de Salud - DGE. pp. 25-27, 42-47. (2006).
- [54] AREVÁLO VARELA MARÍA TERESA, SALAZAR TORRES ISABEL CRISTINA, CORREA SÁNCHEZ DIEGO. *Adherencia al tratamiento en la infección por VIH/SIDA. Consideraciones teóricas y metodológicas para su abordaje*. Acta colombiana de psicología 11.2. (2008).
- [55] FRANCOIS E. CELLIER, KOFMAN ERNESTO. *Continuous System Simulation*. Springer (First Ed.). (2006).
- [56] ZEIGLER BERNARD. *Theory of Modeling and Simulation*. Society for Computer Simulation International, San Diego. (First Ed.). (1976).
- [57] BERGERO FEDERICO, KOFMAN ERNESTO. *PowerDEVS: a Tool for Hybrid System Modeling and Real-Time Simulation*. Wiley Interscience, New York. (First Ed.). (2011).
- [58] KOFMAN ERNESTO, LAPADULA MARCELO, PLAGIERO ESTEBAN. *PowerDEVS: a DEVS-Based Environment for Hybrid System Modeling and Simulation*. Universidad Nacional del Rosario (Argentina). Disponible: <http://www.fceia.unr.edu.ar/~kofman/files/lsd0306.pdf>. (2010).
- [59] KOFMAN ERNESTO. *Quantized - State Control. A Method for Discrete Event Control of Continuous System*. Latin American Applied Research 33(4). (2003).
- [60] BERGERO FEDERICO MARTÍN. *Simulación de Sistemas Híbridos por Eventos Discretos: Tiempo Real y Paralelismo*. Universidad Nacional del Rosario. (2012).
- [61] MINISTERIO DE SALUD. *Guía Nacional de Manejo de Infecciones de Transmisión Sexual*. Dirección General de Salud de Personas. (2006).
- [62] MINISTERIO DE SALUD. *VIH-SIDA en el Perú: Mensajes, Estrategias, Actores*. Ministerio de Salud - DGE. (2013).
- [63] GARCÍA PATRICIA, COTRINA ARMANDO, CÁRCAMO CÉSAR. *Sexo, Prevención y Riesgo. Adolescentes y sus Madres frente al VIH y las ITS en el Perú*. Ministerio de Salud - DGE. (2008).
- [64] MINISTERIO DE SALUD. *Situación Actual del Sistema de Salud en el Perú*. Ministerio de Salud - DGE. (2011).
- [65] GOBIERNO REGIONAL DEL CALLAO. *Plan Estratégico Regional Multisectorial para la Prevención y Control de ITS y VIH/SIDA. Región Callao 2010-2015*. Gerencia Regional de Salud. (2009).
- [66] MINISTERIO DE SALUD. *Nociones Básicas de Modelamiento Matemático aplicado a la Epidemiología*. Ministerio de Salud - DGE. (2015).
- [67] SHAMPINE L.F, THOMPSON S. *Solving Delay Differential Equations with dde23*. Southern Methodist University, Radford University. (2000).
- [68] MINISTERIO DE SALUD. *Análisis de la Situación Epidemiológica del VIH /SIDA en el Perú*. Ministerio de Salud, (2013).
- [69] GALA GONZÁLEZ, ÁNGELA, ET AL. *Dinámica de adquisición del VIH en su dimensión social, ambiental y cultural*. Revista Cubana de Medicina Tropical 59.2. (2007).

- [70] ALARCÓN JORGE, PUN MÓNICA, GUTIÉRREZ CÉSAR, WHITTEMBURY ÁLVARO, TEJADA ROMINA, SUÁREZ LUIS, ROSELL GUSTAVO, BÓRQUEZ ANNICK, CUCHI PALOMA. *Estimación y Análisis de la Incidencia del VIH en Población adulta del Perú: Resultados de la Aplicación del Modelo Matemático MoT*. Revista Peruana de Medicina Experimental y Salud Publica. (2012).
- [71] WOODS SAMUEL G. *Todo lo que necesitas saber sobre las Enfermedades de Transmisión Sexual*. The Rosen Publishing Group, ISBN 0-8239-3580-9. (2003).
- [72] DIRECCIÓN GENERAL DE EPIDEMIOLOGÍA. *Boletín Epidemiológico Mensual (Agosto 2016)*. Centro Nacional de Epidemiología, Prevención y Control de Enfermedades - MINSA. Disponible: http://www.dge.gob.pe/portal/docs/vigilancia/vih/Boletin_2016/agosto.pdf. (2016).
- [73] LÓPEZ CRUZ, ROXANA. *Rich Dynamics of a simple SI Model with Two Age Groups*. Syner-gismus scyentifica UTFPR, Pato Branco,Brazil. (2009).
- [74] LÓPEZ CRUZ R.; CARRILLO DÍAZ L. *Formulation of an Age Structured Population Model and its Reduction to a model with delay*. PESQUIMAT Vol X No.1. (2006).
- [75] LÓPEZ CRUZ R.; KUANG Y, TRIDANE A. *A simple SI model with two Age groups and its application to USA HIV epidemics: to treat or not to treat?*. Journal of Biological Systems. (2007).
- [76] CIUPE, S. M., DE BIVORT B.L., BORTZ D. M., NELSON P. W. *Estimates of kinetic pa-rameters from HIV patient data during primary infection through the eyes of three different models*. Math. Biosci. in press. (2002).
- [77] COOKE K., KUANG Y., LI B. *Analyses of an antiviral immune response model with time delays*. Canad. Appl. Math. Quart., 6(4):321–354. (1998).
- [78] COOKE K. L, VAN DEN DRIESSCHE P., ZOU X. *Interaction of maturation delay and non-linear birth in population and epidemic models*. Canad. Appl. Math. Quart., 6(4):321–354. (1998).
- [79] EDELSTEIN-KESHET L. *Mathematical Models in Biology*. McGraw-Hill, New York. (1998).
- [80] FREEDMAN H. I., XIA H. X. *Periodic solutions of single species models with delay*. *Differential Equations, Dynamical Systems and Control Science*. pages 55–74. (1994).
- [81] ONUSIDA. *El género y el VIH/SIDA*. ONUSIDA Actualización Técnica. (2000).
- [82] MINISTERIO DE SALUD. *Guía Nacional de Consejería en ITS/VIH y el SIDA*. Dirección General de Salud de Personas. (2006).
- [83] O. DIEKMANN, VAN GILS S.A, VERDUYN LUNEL S.M, H.-O. WALTHER. *Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*. Springer, Berlin (1995).
- [84] HALE K., VERDUYN LUNEL S.M. *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York. (1993).
- [85] B. HASSARD B., N. KAZARINOFF N., WAN Y.-H. *Theory and Applications of Hopf Bifur-cation*. Cambridge University Press ,Cambridge UK. (1981).
- [86] RUDIN W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York. (1976).
- [87] SMITH H.L. *Oscillations and multiple steady states in a cyclic gene model with repres-ion*,J.Math. Biol.25, 169–190. (1987).

- [88] ALLWRIGHT D.J. *A global stability criterion for simple control loops*. J. Math. Biol.4 (1977).
- [89] BELLMAN R., COOKE K. *Differential-Difference Equations*. Academic Press, New York. (1963).
- [90] BUSENBERG S., COOKE K.L. *The effect of integral conditions in certain equations modelling epidemics and population growth*, J. Math. Biol.10. (1980).
- [91] VELASCO HERNÁNDEZ, JORGE. *Modelos Matemáticos en la Epidemiología: enfoques y alcances*. Programa de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Computación. Instituto Mexicano del Petróleo. (2007).
- [92] ANDERSON, R. M. *Population Dynamics of Infectious Diseases: Theory and Applications*. Chapman and Hall, London-New York. (1982).
- [93] ANDERSON, R. M. & MAY, R. M. *Infectious Diseases of Humans*. Oxford: Oxford University Press. (1991).
- [94] BRAUER, F. CASTILLO-CHÁVEZ, C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. NY: Springer. (2001).
- [95] TROTTIER, H. PHILIPPE, P. *Deterministic modeling of infectious diseases: theory and methods*. The Internet Journal of Infectious Diseases. (2007).
- [96] HULLIN W, HAIHONG Z, HONGYU M, PEREISON AS. *Parameter identifiability and Estimation of HIV/AIDS Dynamics Model*. Bulletin of Mathematical Biology. (2008).
- [97] RODRIGUEZ SALINAS, JUAN JOSÉ. *Modelos Matemáticos del SIDA*. Universidad Autónoma de Nuevo León. (2001).
- [98] ISAZA NIETO PABLO. *Glosario de Epidemiología*. Academia Nacional de Medicina de Colombia - Capítulo Tolima. (2015).
- [99] INFOSIDA. *Glosario de InfoSIDA: Términos relacionados al VIH/SIDA*. Gobierno de los Estados Unidos. 8va Edición. (2015).
- [100] ONUSIDA. *Orientaciones Terminológicas de ONUSIDA*. Programa Conjunto de las Naciones Unidas sobre el VIH/SIDA. (2011).