UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICAS

Teorema de Branges

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas

AUTOR

Jhonny Edward Pérez Armijo

ASESOR

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro

Lima – Perú

2013

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

____

Mg. Claudio Balcázar Huapaya

____

Lic. Saúl Rojas Cauti

____

Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro

Lima – Perú

2013

FICHA CATALOGRÁFICA

JHONNY EDWARD PÉREZ ARMIJO

Teorema de Branges

Microsoft Word 2007, (Lima) 2011.

xi, 52 p. 29,7 cm. (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2011)

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas

1, Matemática.

I. UNMSM/FdeCM II. Título (serie)

DEDICATORIAS

- A ti Natalie y Angela, porque son mi gran inspiración.
- A Juan, mi siempre querido padre, por sus consejos y apoyo incondicional.
- A Sonia mi madre, por su apoyo y paciencia.
- A mis queridos hermanos Fernando, Ronald y Carla, gracias por estar siempre a mi lado.

AGRADECIMIENTOS

- Al Dr. Pedro Celso Contreras Chamorro, por asesorarme en la elección, elaboración y desarrollo de la presente tesis, y por su paciencia brindada desde los cursos de pre-grado.
- Al Mg. Claudio Balcázar Huapaya y Lic. Saúl Rojas Cauti por ser miembros del Jurado de la presente Tesis, y por la paciencia brindada.
- Al Mg. Tomás Núñez Lay, por sus importantes sesiones y consejos.
- A mis amigos y compañeros Germán Mendoza, Juan Rodríguez, Iván Ayerve, Joel Rojas, David Livia, etc. por la gran amistad, apoyo y ánimos constantes.

Jhonny Edward Pérez Armijo

RESUMEN

Teorema de Branges

JHONNY EDWARD PÉREZ ARMIJO

Junio – 2013

Asesor : Pedro Celso Contreras Chamorro.

Título Obtenido : Licenciado en Matemáticas.

Presentaremos la demostración del Teorema probado por Louis de Branges en (1984): "Si $f: D \to \mathbb{C}$ es analítica e inyectiva cuya expansión de series de potencias es dada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ con a_1 = 1, entonces $|a_n|$≤n para todo n > 1. Además si la igualdad se da para algún n > 1, entonces $f(z) = \frac{z}{(1-\alpha z)^2}$, α pertenece a $\mathbb{C}$, con $|\alpha| = 1$ y todo z en D, donde D es el disco unitario en el plano complejo". En un primer momento, presentaremos las conjeturas de Robertson y de Bieberbach una vez que la conjetura de Milin implica la de Robertson, que a su vez alude a de Bieberbach. Lo que Branges probo, en verdad fue la conjetura propuesta por Milin en (1967), que afirma: "Si $f: D \to \mathbb{C}$ es analítica e inyectiva cuya expansión de series de potencias es dada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ con a_1 = 1, entonces $\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \leq 0$ donde γ_k son los coeficientes de expansión de series de potencias de la función $\left(\frac{1}{2}\right) \log\left(z^{-1} f(z)\right)$" la cual implica la conjetura de Bieberbach.

Palabras Claves:

- Conjetura de Bieberbach, Robertson, Lebedev y Milin.
- Función de Koebe.
- Polinomios de Jacobi.
- Funciones de Branges.
- Teorema de Branges.

ABSTRACT

Brange's Theorem

<u>JHONNY EDWARD PÉREZ ARMIJO</u>

June – 2013

Adviser : Pedro Celso Contreras Chamorro.

Obtained Degree : Mathematician.

We will present the proof of Theorem proved by Louis de Branges in (1984): "If $f: D \to \mathbb{C}$ is analytic and injective whose expansion of power series is given by $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ with $a_1 = 1$, then $|a_n| \leq n$ for all $n > 1$. Moreover, if equality occurs for any $n > 1$, then $f(z) = \frac{z}{(1-\alpha z)^2}$, α belongs to $\mathbb{C}$, with $|\alpha| = 1$ and all z in D, where D is the unitary disk in the complex plane ". At first, we'll present the Robertson and Bieberbach's conjecture moreover we'll Milin's which implies Robertson's conjecture that in turn it refers to Bieberbach's.

What Branges proved, indeed was the conjecture proposed by Milin in (1967), which states:
"If $f: D \to \mathbb{C}$ is analytic and injective whose expansion of power series is given by $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ with $a_1 = 1$, then $\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0$where γ_k are the expansion coefficients of power series of the function $\left(\frac{1}{2}\right) \log\left(z^{-1} f(z)\right)$ " which implies Bieberbach's conjecture.

**Keywor
ds:**

- Bieberbach, Robertson y Milin’s Cojecture.
- Koebe’s Function.
- Jacobi’s Polynomial.
- Brange’s Function.
- Brange’s Theorem.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se demostrará la Conjetura de Milin que luego será el Teorema de Branges, en el Capítulo I se dan a conocer las nociones básicas como teoremas, lemas, proposiciones, definiciones, desigualdades, etc; que se deben de tener en cuenta para una mejor comprensión de los siguientes capítulos.

En el capítulo II se define las funciones de clase S se enuncian las Conjeturas de Bieberbach, Robertson realizando la demostración que la Conjetura Robertson implica la Conjetura de Bieberbach, luego se enuncia la Conjetura de Milin y con la ayuda de suma de sucesiones y la segunda desigualdad de Lebedev-Milin se demuestra que la Conjetura de Milin implica la Conjetura de Robertson. En el capítulo III se muestra a detalle las características de los polinomios de Jacobi que servirá para definir las funciones de Branges y así ver la relación que guardan, al finalizar el capitulo se demuestra un resultado que contiene toda la información sobre estas funciones que se utilizará en la prueba del Teorema de Branges.

Para finalizar en el capítulo IV es donde se probará el teorema de Branges usando la estrategia de introducir la función $\phi(t)$.

CAPÍTULO I

Preliminares

En este capítulo presentaremos definiciones y resultados de una variable compleja para su posterior uso.

1. Funciones Analíticas

Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y (M, d) un espacio métrico completo que de aquí en adelante consideraremos como $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{C}_\infty$.

1.1 Definición Sea la función $f: G \to M$, la derivada de f en el punto a, está definida como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si el límite existe independientemente de la manera como $h \to 0$.

En tal caso se dice que f es diferenciable en el punto a. Si f es diferenciable en todo punto de G, entonces diremos que f es diferenciable en G.

Más aún si f es una función diferenciable en G sobre M entonces $f'(a)$ define una función $f': G \to \mathbb{C}$. Si f' es continua en G entonces diremos que f es continuamente diferenciable en G.

1.2 Proposición Si $f: G \to \mathbb{C}$ es diferenciable en el punto $a \in G$ entonces f es continua en a.

Demostración. En efecto,

$$\lim_{z\to a}|f(z)-f(a)| = \left[\lim_{z\to a}\frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}\right]\left[\lim_{z\to a}|z-a|\right] = |f'(a)|.0 = 0$$

1.3 Definición Una función $f: G \to \mathbb{C}$ es analítica si f es continuamente diferenciable en G.

Es fácil ver que también se va a cumplir propiedades algebraicas:

Si $f: G \to \mathbb{C}$, $g: G \to \mathbb{C}$ analíticas y $a, b \in \mathbb{C}$, se tiene:

i. $af + bg$ es analítica en G, siendo $(af+bg)' = af' + bg'$
ii. fg es analítica en G, siendo $(fg)' = f'g + fg'$
iii. $g(z) \neq 0 \; \forall \; z \in G$; $\frac{f}{g}$ es analítica en G, siendo $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{g(z)f'(z)-f(z)g'(z)}{g(z)^2}$

1.4 Proposición (Regla de la cadena) Sean f y g funciones analíticas en G y V respectivamente, supongamos que $f(G) \subseteq V$, entonces f y $g \circ f$ es analítica en G, además:

$$(g \circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big)f'(z), \forall \; z \in G$$

Demostración: Ver [1] pág. 34

1.5 Proposición Si G es abierto, conexo y $f: G \to \mathbb{C}$ es diferenciable $f'(z) = 0$ para todo $z \in G$ entonces f es constante.

Demostración: Ver [1] pág. 37

1.6 Definición Sean $G \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y conexo en $\mathbb{C}$ y $f: G \to \mathbb{C}$ una función continua tal que $z = exp\big(f(z)\big)$ para todo $z \in G$ entonces f es una rama del logaritmo.

Nótese que G no contiene a 0. Supongamos que f es una rama del logaritmo en elconjunto conexo G y suponga que $k \in \mathbb{Z}$; sea $g(z) = f(z) + 2k\pi i$ entoncesevaluando en la exponencial tenemos; $exp\big(g(z)\big) = exp(f(z) + 2k\pi i) = exp\big(f(z)\big) = z$. Luego g también es una rama del logaritmo. Recíprocamente si f y g son dos ramas del logaritmo entonces para cada $z \in G$, $f(z) = g(z) + 2k\pi i$ para algún entero k, donde k depende de z. Veamos que en realidad el entero k es el mismo para cada z en G. En efecto, si $h(z) = \frac{1}{2\pi i}[f(z) - g(z)]$ entonces, h es continua en G y $h(G) \subset \mathbb{C}$, los enteros. Dado que G es conexo, $h(G)$ también es conexo. Por tanto existe un k en $\mathbb{Z}$ con $g(z) = f(z) + 2\pi ki$ para todo z en G. Es decir tenemos el siguiente resultado.

1.7 Proposición Si $G \subset \mathbb{C}$ es abierto, conexo y $f$es una rama del$log(z)$en G, entonces todas las ramas del $log(z)$ son las funciones $f(z) + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ahora fabricaremos al menos una rama del $log(z)$ sobre algún conjunto abierto y conexo. Sea

$$G = \mathbb{C} - \{z = (x + iy) \in \mathbb{C} \,/\, x \leq 0 \ \wedge \ y = 0\}$$

Claramente G es conexo, y cada z en G puede ser representado en forma única por $z = |z|e^{i\theta}$donde $-\pi < \theta < \pi$. Para θ en éste rango, definimos $f\left(re^{i\theta}\right) = log\, r + i\theta$. Esta función $f$es una rama del logaritmo en G. ¿Es ésta $f$analítica?

1.8 Proposición Sean G y Ω subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$. Suponga que $f\colon G \to \mathbb{C}$ y $g\colon G \to \mathbb{C}$ son funciones continuas tal que $f(G) \subseteq \Omega$ y $\mathrm{g}\big(f(z)\big) = z$ para todo $z \in G$. Además g es diferenciable y $g'(z) \neq 0$, f es diferenciable y se cumple lo siguiente:

$$f'(z) = \frac{1}{g'\big(f(z)\big)}$$

Entonces f es analítica si g es analítica.

Demostración: Ver [1] pág. 39 – 40.

1.9 Corolario Una rama del logaritmo es analítica y su derivada es z^{-1}

Demostración: Consideremos$f(z) = log(z)$ definida anteriormente y $g(z) = e^z$, dado que $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$ por el teorema anterior tenemos lo siguiente:

$$[log(z)]' = \frac{1}{e^{f(z)}} = \frac{1}{z}$$

Con lo cual concluye la demostración.

□

Designamos como la rama principal a la rama del logaritmo definida anteriormente sobre $G = \mathbb{C} - \{z = (x + iy) \in \mathbb{C} \,/\, x \leq 0 \ \wedge y = 0\}$.

2. Funciones de clase *S*

2.1 Definición Sea A un abierto del plano complejo. Se dice que una función $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ es univalente si es analítica e inyectiva en A.

En el resto del trabajo denotaremos por D al disco unitario abierto centrado en el origen, y por S la clase de las funciones f que son univalentes en D y que verifican $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$.

Observemos que toda función f de clase S se puede representar en serie de potencias por

$$f(\text{z}) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

para todo z en D.

2.2 Teorema Si $f \in$ S con serie de potencias $f(\text{z}) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$, entonces $|a_2| \leq 2$. La igualdad se cumple si, y sólo si, f es una rotación de la función de Koebe.

Demostración: Ver [2] pág. 64

3. Subordinación

3.1 Definición Si G es una región incluyendo el origen y f , g son dos funciones analíticas en G, entonces f es subordinado por g si existe una función analítica $\phi: G \rightarrow G$ tal que $\phi(0) = 0$ y $f = g \circ \phi$.

3.2 Proposición Si g es una función univalente en D (disco unitario abierto centrado en el origen), entonces la función analítica f en D es subordinado por g si, y sólo si $f(0) = g(0)$ y $f(D) \subseteq g(D)$. Si f es subordinado por g y ϕ es una función tal que $f = g \circ \phi$, entonces ϕ es única.

Demostración: Ver [2] pág. 134

3.3 Proposición Si f y g son funciones analíticas en D, f es subordinado por g, y ϕ es una función que satisface $f = g \circ \phi$ y $\phi(0) = 0$, entonces para cada $r > 1$:

a)$\{f(z): |z| < r\} \subseteq \{g(z): |z| < r\}$;

b)$max\{f(z): |z| \leq r\} \leq max\{g(z): |z| \leq r\}$;

c) $(1 - |z|^2)|f'(z)| \leq (1 - |\phi(z)|^2)\left|g'\big(\phi(z)\big)\right|$;

d) $|f'(0)| \leq |g'(0)|$ se da la igualdad si y sólo si existe una constante c con $|c| = 1$ tal que $f(z) = g(cz)$para todo z.

Demostración: Ver [2] pág. 135

Ahora aplicamos estos resultados a una clase particular de funciones en D.Sea $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las funciones analíticas p en D tal que $Re\, p(z) > 0\; y\; p(0) = 1$.

3.4 Proposición Si $p \in \mathcal{P}$ y $z \in D$, entonces

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |p(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

$$y \qquad\qquad |p'(z)| \leq \frac{2}{(1 - |z|)^2}$$

Demostración: Ver [2] pág. 135

3.5 Lema (a) Si $0 < r < 1$, entonces $sup\{|h(z,t)|: |z| \leq r\ y\ 0 \leq t < \infty\}$.

(b) Para cada $k \geq 1, sup\{|\gamma_k(t)|: 0 \leq t < \infty\} < \infty$

Demostración: Ver [2] pág. 162

3.6 Lema Para cada $k \geq 1$ la función $\gamma_k: [0,\infty) \to \mathbb{C}$ es continuamente diferenciable y

$$\dot{\gamma}_k = \frac{1}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} \dot{h}(re^{i\theta}, t) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Demostración: Ver [2] pág. 162

3.7 Lema Si $T < \infty\ y\ 0 < r < 1$, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{\gamma}_k(t) z^k$$

converge absolutamente y uniformemente para $|z| \leq r\ y\ 0 \leq t \leq T$.

Demostración: Ver [2] pág. 163

4. Cadena de Loewner

Si $f: Dx[0,\infty) \to \mathbb{C}$, entonces $f'(z,t)$ se define como la derivada parcial de f con respecto a la variable compleja z, siempre que la derivada exista. La derivada de f con respecto a la variable real t es denotado por $\dot{f}(z,t)$.

4.1 Definición La cadena de Loewner es una función continua $f: Dx[0,\infty) \to \mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:

a) Para todo t en $[0,\infty)$, la función $z \to f(z,t)$ es analítica y univalente;

b) $f(0,t) = 0\ y\ f'(0,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{t}}$

;c) Para$0 \leq s \leq t < \infty, f(D,s) \subseteq f(D,t)$.

4.2 Proposición Si f es una cadena de Loewner y para cada $t \geq 0$, $\Omega(t) = f(D,t)$, entonces:

(a) Para $0 \leq s \leq t < \infty, \Omega(s) \subseteq \Omega(t)\ y\ \Omega(s) \neq \Omega(t)$

(b) Si $t_n \rightarrow t$, entonces $\Omega(t_n) \rightarrow \Omega(t)$

(c) Si $t_n \rightarrow \infty$, entonces $\Omega(t_n) \rightarrow \mathbb{C}$

Demostración: Ver [2] pág. 137

4.3 Proposición Sea $\{\ \Omega(t) : 0 \leq t < \infty\}$ una familia de regiones simplemente conexas satisfaciendo la Proposición 1.1.4 y para cada $t > 0$ sea $h_t : D \rightarrow \Omega(t)$ un mapeo de Riemann con $h_t(0) = 0$ y $h_t{}'(0) = \beta(t) > 0$. Si $h(z,t) = h_t(t)$ y $\beta_0 = \beta(0)$, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

(a) La funciónβ es continua, estrictamente creciente y $\beta(t) \rightarrow \infty\ y\ t\ \rightarrow \infty$.

$(b)\ Si\ \ \lambda(t) = \log\left[\frac{\beta(t)}{\beta_0}\right] y\ f(z,t) = \beta_0{}^{-1} h\left(z, \lambda^{-1}(t)\right)$, entonces f define cadena de Loewner con $f(D,t) = \beta_0{}^{-1}\Omega\left(\lambda^{-1}(t)\right)$.

Demostración: Ver [2] pág. 138

4.4 Proposición Si $f \in \mathcal{L}$ y $0 \leq s \leq t < \infty$, entonces existe una única función analítica $z \rightarrow \phi(z,s,t)$ definido en D con las siguientes propiedades.

(a) $\phi(z,s,t) \in D$ y $f(z,s) = f(\phi(z,s,t),t)$ para todo $z\ en\ D$.

(b) $z \rightarrow \phi(z,s,t)$ es univalente, $\phi(0,s,t) = 0, |\phi(z,s,t)| \leq |z|$ para todo z en D, y $\phi'(0,s,t) = \mathrm{e}^{\mathrm{s-t}}$.

(c) $\phi(z,s,s) = z$ para todo z en D.

(d) Si $s \leq t \leq u$, entonces $\phi(z,s,u) = \phi(\phi(z,s,t),t,u)$ para todo z en D.

Demostración: Ver [2] pág. 139

4.5 Definición La función $\phi(z,s,t)$ definido para todo z en D y $0 \leq s \leq t < \infty$ y satisface

(1.1) $$f(z,s) = f(\phi(z,s,t),t)$$

para la cadena de Loewner f es llamada la función de transición de la cadena de Loewner. Note que la función de transición es dada por la ecuación $\phi(z,s,t) = {f_t}^{-1}\big(f_s(z)\big)$.

4.6 Lema Si $f \in \mathcal{L}$, entonces para todo z en D y $0 \leq t < \infty$,

$$e^t \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z,t)| \leq e^t \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

$$e^t \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z,t)| \leq e^t \frac{|z|}{(1-|z|)^2}$$

Demostración: Ver [2] pág. 139

4.7 Lema Si f es una cadena de Loewner con función de transición ϕ, entonces la función p se define para todo z en D y $0 \leq s \leq t < \infty$ por

$$p(z,s,t) = \frac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}}\left[\frac{1-z^{-1}\phi(z,s,t)}{1+z^{-1}\phi(z,s,t)}\right]$$

$$p(z,s,t) = \frac{1+e^{s-t}}{1-e^{s-t}}\left[\frac{z-\phi(z,s,t)}{z+\phi(z,s,t)}\right]$$

pertenece a la clase $\mathcal{P}$ y $p(0,s,t) = 1$.

Demostración: Ver [2] pág. 140

4.8 Lema Si $f \in \mathcal{L}$, $|z| < 1$, y $0 \leq s \leq t < \infty$, entonces la siguiente inecuación se cumple

$$|f(z,s) - f(z,t)| \leq \frac{8|z|}{(1-|z|)^4}(e^t - e^s).$$

Demostración: Ver [1] pág. 140

4.9 Proposición El conjunto $\mathcal{L}$ de todas las cadenas de Loewner es un subconjunto compacto del espacio métrico $\mathcal{C}(Dx[0,\infty),\mathbb{C})$.

Demostración: Ver [2] pág. 141

4.10 Teorema Para toda función f_0 en S esiste una cadena de Loewner f tal que $f(z,0) = f_0(z)$ en D.

Demostración: Ver [2] pág. 141

5. La Ecuación Diferencial de Loewner

Recordemos para la cadena de Loewner f, $\dot{f}(z,t) = \frac{\partial f}{\partial t}$ y $f'(z,t) = \frac{\partial f}{\partial z}$; se define similar $\dot{\phi}(z,s,t), \phi'(z,s,t), \dot{g}(\zeta,t)\ y\ g'(\zeta,t)$

5.1 Proposición Fijando la notación anterior. La función g tiene derivadas parciales continuas y si $x(t) = \overline{\lambda(t)}$, entonces para $t \geq 0$ y ζ en $\Omega(t)$

$$\dot{g}(\xi,t) = -g(\xi,t)\left[\frac{1 + x(t)g(\xi,t)}{1 - x(t)g(\xi,t)}\right]$$

Demostración: Ver [2] pág. 144-145

5.2 Teorema Si f es una cadena de Loewner tal que f_0 es un mapeo sobre una región rasgada, entonces existe una función continua $x: [0,\infty) \to \partial D$ tal que $f(z,t)$ existe y satisface

$$\dot{f}(z,t) = \left[\frac{1 + x(s)z}{1 - x(s)z}\right] zf'(z,t)$$

Demostración: Ver [2] pág. 146

5.3 Proposición Sea f una cadena de Loewner con g_t la inversa de f_t. Entonces

$$\lim_{t\to\infty} e^t\, g(f_0(z),t)$$

converge uniformemente a f_0 en subconjuntos compactos de D.

Demostración: Ver [2] pág. 147

6. Desigualdades de Lebedev- Milin

Sea ϕ una función analítica en una vecindad de cero, con $\phi(0) = 0$ y sea;

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

su serie de potencia, además

$$\psi(z) = e^{\phi(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k$$

6.1 Lema (Primera desigualdad de Lebedev- Milin) Si $\phi \; y \; \psi$ son como se definen anteriormente, entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 \leq exp\,(\sum_{k=1}^{\infty} k|\alpha_k|^2\,)$$

si el lado derecho es finito, entonces la igualdad ocurre si, y sólo si existe un número complejo γ con $|\gamma| < 1 \; y \; \alpha_k = \frac{\gamma^k}{k}$ para todo $k \; \geq 1$.

Demostración: Ver [2] pág. 154

6.2 Lema (Segunda desigualdad de Lebedev- Milin) Si $\phi \; y \; \psi$ son como se definen anteriormente, entonces para todo $n \geq 1$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k|^2 \leq (n+1)\, exp\left\{\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\, k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k}\,)\right\}$$

Se cumple la igualdad dado un entero n si, y sólo si existe un número complejo γ con $|\gamma| = 1$ y $\alpha_k = \frac{\gamma^k}{k}$ para $1 \leq k \leq n$.

Demostración Ver [2] pág. 154

6.3 Lema (Tercera desigualdad de Lebedev- Milin) Si ϕ y ψ son como se definen anteriormente, entonces para todo $n \neq 1$

$$|\beta_n|^2 \leq exp\left\{\sum_{k=1}^{m} (k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k})\right\}$$

y se cumple la igualdad para algún entero n si, y sólo si existe un número complejo γ con $|\gamma| = 1$ y $\alpha_k = \frac{\gamma^k}{k}$ para $1 \leq k \leq n$.

Demostración: Ver [2] pág. 155

CAPÍTULO II

Conjeturas Preliminares al Teorema de Branges

En el siguiente capítulo se demostraráque la Conjetura de Milin implica la Conjetura de Bieberbach, para esto demostraremos lo siguiente:

a) La Conjetura de Robertson implica la Conjetura de Bieberbach

b) La Conjetura de Milin implica la Conjetura de Robertson,

por razones históricas primero expondremos la Conjetura de Bieberbach.

1. Definiciones

1.1 Definición Si $f$es una función de clase S, donde

S = {f funciones univalentes en D/ $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$}, su representación en series de potencias está dada por:

(2.1) $$f(\mathrm{z}) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

1.2 Definición Sea$g$ es una función en la clase S, es impar si, sólo si existe una función f en S tal que $g(z)^2 = f(z^2)$, para todo z en$D$. Sea S_- el conjunto de las funciones impares en S y si $g \in S_-$ tenemos que:

(2.2) $$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$

es su representación en serie de potencia.

Entre las funciones de clase S, hay algunas que jugarán un papel importante en este trabajo. Consideremos la familia de funciones $\{\kappa_\alpha\}$ definidas en D por

$$\kappa_\alpha(z) = \frac{z}{(1-\alpha z)^2}\ , \qquad con|\alpha| = 1$$

A κ_1 se le llama función de Koebe y para $|\alpha| = 1$, se dice que κ_α es una rotación de la función de Koebe por α, si $\bar{\alpha}\kappa_1(\alpha z) = \kappa_\alpha(z)$. El término rotación se da pues

$$\bar{\alpha}\kappa_1(\alpha z) = \frac{\bar{\alpha}(\alpha z)}{(1-(\alpha z))^2} = \frac{|\alpha|^2 z}{(1-\alpha z)^2} = \frac{z}{(1-\alpha z)^2} = \kappa_\alpha(z)$$

Se demostrará que toda rotación de la función de Koebe pertenece a la clase S, en efecto. Sabemos que

$$\left(\frac{1}{1-\alpha z}\right)' = \frac{-(-\alpha)}{(1-\alpha z)^2} = \frac{\alpha}{(1-\alpha z)^2}$$

de donde

$$\kappa_\alpha(z) = \frac{z}{(1-\alpha z)^2} = \frac{z}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha z)^2}\right) = \frac{z}{\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha z}\right)'.$$

Así

(2.3) $$\kappa_\alpha(z) = \frac{z}{\alpha}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha z)^n\right]' = \frac{z}{\alpha}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n(\alpha z)^{n-1}\alpha\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^{n-1}z^n.$$

En consecuencia, κ_α es analítica, $\kappa_\alpha(0) = 0$ y $\kappa_\alpha{}'(0) = 1.$ Además κ_α es inyectiva, pues si suponemos que$\kappa_\alpha(z) = \kappa_\alpha(w)$, entonces

$$0 = \frac{z}{(1-\alpha z)^2} - \frac{w}{(1-\alpha w)^2} = \frac{z(1-\alpha w)^2 - w(1-\alpha z)^2}{(1-\alpha z)^2(1-\alpha w)^2}$$

$$= \frac{z - w + \alpha^2 z w^2 - \alpha^2 z^2 w}{(1-\alpha z)^2(1-\alpha w)^2} = \frac{(z-w)(1-\alpha^2 z w^2)}{(1-\alpha z)^2(1-\alpha w)^2}$$

Como $|\alpha^2 zw^2| < 1$, tenemos $1 - \alpha^2 zw^2 \neq 0$, por lo tanto la igualdad anterior se cumple si, y sólo si, $z = w$. Se concluye que $\kappa_\alpha \in S$. □

2. Conjetura de Bieberbach

Si f pertenece a la clase S y tiene la representación en serie de potencias (2.1), entonces $|a_n| \leq n$, para todo n. Si hay algún entero n tal que $|a_n| = n$, entonces f es una rotación de la función de Koebe.

Si f es una rotación de la función de Koebe, entonces (2.3), muestra que $|a_n| = n$ para todos los coeficientes.

3. Conjetura de Robertson

Si $g \in S_{-}$ y tiene la representación en series de potencias dada en (2.2), entonces para cada $n \geq 1$.

(2.4) $$1 + |c_3|^2 + |c_5|^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + |c_{2n-1}|^2 \leq n$$

Si existe un entero n tal que la igualdad ocurre, entonces $g(z)^2 = f(z^2)$, donde f es una rotación de la función de Koebe.

4. Teorema: La Conjetura de Robertson implica Conjetura de Bieberbach.

Demostración

Si $g \in S_{-}$ entonces existe una función f *en* S tal que $g(z)^2 = f(z^2)$ en D.

Tenemos que $g(z) = c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

y $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

así

$$(c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)^2 = a_1 z^2 + a_2 z^4 + a_3 z^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$c_1{}^2z^2 + c_3{}^2z^6 + c_5{}^2z^{10} + \dots\dots + 2c_1c_3z^4 + 2c_1c_5z^6 + \dots = a_1z^2 + a_2z^4 + a_3z^6 \dots\dots$

$$a_1 = c_1{}^2$$

$$a_2 = 2c_1c_3$$

$$a_3 = 2c_1c_5 + c_3{}^2 \dots\dots\dots\dots$$

expandiendo e identificando los coeficientes correspondientes a las potencias de z, tenemos para todo $n \geq 1$

$$a_n = c_1c_{2n-1} + c_3c_{2n-3} + \dots\dots\dots\dots + c_{2n-1}c_1$$

Sea A = $(c_1, c_3, \dots\dots\dots\dots, c_{2n-1})$ y B = $(c_{2n-1}, \dots\dots\dots\dots c_3, c_1)$

$$a_n = \langle A,B \rangle$$

$$|a_n| = |\langle A,B \rangle| \leq |A||B|$$, pues tenemos que $|A| = |B|$

$|a_n| \leq |A|^2 = |c_1|^2 + |c_3|^2 + |c_5|^2 + \dots\dots\dots\dots + |c_{2n-1}|^2 \leq n$, pues $|c_1|^2 = 1$ ya que $a_1 = 1$ y por la Conjetura de Robertson tenemos que $|a_n| \leq n$, con esto ya estaría demostrada la primera parte.

Ahora, si para algún m ∈ ℕ se tiene que $|a_m| = m$, demostraremos que f es una rotación de la función de Koebe, en efecto:

Como $|a_m| \leq |c_1|^2 + |c_3|^2 + |c_5|^2 + \dots\dots\dots\dots + |c_{2m-1}|^2 \leq m = |a_m|$, entonces

$|c_1|^2 + |c_3|^2 + |c_5|^2 + \dots\dots\dots\dots + |c_{2m-1}|^2 = m$, entonces por la Conjetura de Robertson, tenemos $g(z)^2 = r(z^2)$ $\forall z \in D$, donde r es una rotación de la función de Koebe, entonces $r(z^2) = f(z^2)$ $\forall z \in D$, tenemos que los coeficientes de ambas series de potencias son iguales.

Entonces $r(z) = f(z), \forall z \in D$, por lo tanto f es una rotación de la función de Koebe.

□

Para establecer la Conjetura la Conjetura de Milin se requiere de notación. En el resto del capítulo se probará que la Conjetura de Milin implica la Conjetura Robertson.

Sea $f \in S$ y sea g la función correspondiente en S_{-} con $g(z)^2 = f(z^2)$ en D. Asumiendo (2.1) y (2.2) es fácil ver que $z^{-1}f$ es una función analítica sin ceros en D. Así hay una rama analítica $\left(\frac{1}{2}\right)\log(z^{-1}f(z))$ definido en D, denotamos así la función h y sea

(2.5) $$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$$

Su representación en serie de potencias en D. Tenga en cuenta que hemos optado por la rama

$$\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(z^{-1}f(z)\right)$$

que satisface $h(0) = 0$ y con esta conclusión, h es única.

5. Conjetura de Milin

Si $f \in S$, h es rama de $\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(z^{-1}f(z)\right)$ con $h(0) = 0$ y h satisface (2.5), entonces

(2.6) $$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \leq 0$$

Si se cumple la igualdad para algún entero n, entonces f es una rotación de la función de Koebe.

Para mostrar que la Conjetura de Milin implica la Conjetura de Robertson (y por lo tanto la Conjetura de Bieberbach), es necesario la prueba de las sumatorias por partes y de la segunda desigualdad de Lebedev-Milin.

5.1 Lema Si $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ sucesiones en $\mathbb{C}$ y definimos

$$\mathbb{X}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{X}_k\,(\, y_k - \, y_{k+1}\,) + \mathbb{X}_n y_n \qquad y$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k\,(\, y_k - \, y_{k+1}\,) + \mathbb{X}_n y_{n+1}$$

Demostración

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k\,(\, y_k - \, y_{k+1}\,) + \mathbb{X}_n y_{n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{X}_k\,(\, y_k - \, y_{k+1}\,) + \mathbb{X}_n(y_n - \, y_{n+1}) + \mathbb{X}_n y_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{X}_k\,(\, y_k - \, y_{k+1}\,) + \mathbb{X}_n y_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{X}_k\, y_k - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{X}_k\, y_{k+1} + (\mathbb{X}_{n-1} + x_n) y_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (\,\mathbb{X}_{k-1} + \, x_k) y_k - \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{X}_k\, y_{k+1}\,) + \mathbb{X}_{n-1} y_n + \, x_n y_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{X}_{k-1}\, y_k - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{X}_k \;\, y_{k-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k\, y_k\,) + \, x_n y_n + \, \mathbb{X}_{n-1} y_n$$

$$= (\mathbb{X}_0\, y_1 + \mathbb{X}_1\, y_2 + \ldots + \mathbb{X}_{n-2}\, y_{n-1}) - (\mathbb{X}_1\, y_2 + \ldots + \mathbb{X}_{n-2}\, y_{n-1} + \mathbb{X}_{n-1}\, y_n)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (x_k\, y_k\,) + \, \mathbb{X}_{n-1} y_n = -\mathbb{X}_{n-1}\, y_n + \sum_{k=1}^{n} (x_k\, y_k\,) + \, \mathbb{X}_{n-1}\, y_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k \,(\, y_k - \, y_{k+1}\,) + \, \mathbb{X}_n y_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k$$

por otro lado tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{X}_k \,(\, y_k - \, y_{k+1}\,) + \, \mathbb{X}_n(y_n - \, y_{n+1}) + \, \mathbb{X}_n \, y_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{X}_k \,(\, y_k - \, y_{k+1}\,) + \mathbb{X}_n \, y_n$$

□

5.2 Lema Si $\{x_k\}$ sucesión en $\mathbb{C}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} (\, n + 1 - k) x_k = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_k$$

Demostración

$$\mathbb{X}_1 = x_1$$

$$\mathbb{X}_2 = x_1 + \;\; x_2$$

$$\mathbb{X}_3 = x_1 + \;\; x_2 + \; x_3$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{X}_n = x_1 + \;\; x_2 + \; x_3 + \; \ldots \ldots \ldots . + x_n$$

(2.7) $$\mathbb{X}_m = \sum_{k=1}^{m} x_k$$

entonces

$$\sum_{m=1}^{n} \mathbb{X}_m = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_k$$

al sumar por columnas en el arreglo triangular

$$\sum_{m=1}^{n} \mathbb{X}_m = nx_1 + (n-1)x_2 + \dots\dots\dots\dots.. + x_n$$

(2.8) $$\sum_{m=1}^{n} \mathbb{X}_m = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)x_k$$

de (2.7) y (2.8) se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} (n+1-k)x_k = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_k$$

□

La siguiente desigualdad que estudiaremos es la segunda de una colección de tres desigualdades que relacionan los coeficientes de su serie de potencia con la de su exponencial.

Sea ϕ una función analítica en una vecindad de cero, con $\phi(0) = 0$ y sea;

(2.9) $$\phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$$

su serie de potencia, sea

(2.10) $$\psi(z) = e^{\phi(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k$$

En el resto del capítulo sólo usaremos la segunda desigualdad, la cual demostraremos, ahora para la prueba de la primera y tercera desigualdad ver [2] página 155.

5.3 Lema (Segunda desigualdad de Lebedev- Milin) Si $\phi\ y\ \psi$ son como se definen anteriormente, entonces para todo $n \geq 1$.

(2.11) $$\sum_{k=0}^{\infty}|\beta_k|^2 \leq (n+1)\, exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\, k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{k})\right\}$$

Se cumple la igualdad dado un entero n si, y sólo si existe un número complejo γ con $|\gamma| = 1\ y\ \alpha_k = \frac{\gamma^k}{k}$ para $1 \leq k \leq n$.

Demostración

Sea $\varphi: D \to \mathbb{C}$ analítica con $\varphi(0) = 0$

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k z^k,$$

así mismo

$$\psi(z) = e^{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k$$

$$\psi'(z) = \varphi'(z)e^{\varphi(z)}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}k\beta_k z^{k-1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}k\alpha_k z^{k-1}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k\right)$$

$$\beta_1 + 2\beta_2 z + 3\beta_3 z^2 + \ \ldots = (\alpha_1 + 2\alpha_2 z + 3\alpha_3 z^2 + \ \ldots)(\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ \ldots\ldots)$$

$$\beta_1 + 2\beta_2 z + 3\beta_3 z^2 +. = \alpha_1\beta_0 + (\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_0)z + (\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + 3\alpha_3\beta_0)z^2 + \ \ldots$$

$$\beta_1 = \alpha_1\beta_0$$

$$2\beta_2 = \alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_0$$

$$3\beta_3 = \alpha_1\beta_2 + 2\alpha_2\beta_1 + 3\alpha_3\beta_0$$

$$m\beta_m = \alpha_1\beta_{m-1} + 2\alpha_2\beta_{m-2} + \ \dots\dots\dots.\dots..+m\alpha_m\beta_0$$

$$m\beta_m = \sum_{k=1}^{m} k\alpha_k\beta_{m-k}$$

$$m^2|\beta_m|^2 \ \leq \left(\sum_{k=1}^{m} k^2|\alpha_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m}|\beta_{m-k}|^2\right)$$

por la Desigualdad de Cauchy Schwartz

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} k^2|\alpha_k|^2\right)\left(\sum_{k=0}^{m-1}|\beta_k|^2\right)$$

tomando: $A_m \ = \sum_{k=1}^{m} k^2|\alpha_k|^2 \ \ y \ B_{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1}|\beta_k|^2$

donde

$$B_m = \sum_{k=0}^{m}|\beta_k|^2$$

$$m^2|\beta_m|^2 \leq A_m B_{m-1}\,, \qquad \forall \text{ m} \geq 1$$

para$n \geq 1$ fijo, $\quad B_n = \ B_{n-1} + |\beta_n|^2 \ \leq \ B_{n-1} + \ \frac{A_n B_{n-1}}{n^2}$

$$= \ B_{n-1}\left(1+\frac{A_n}{n^2}\right) = \ B_{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}+\frac{A_n}{n(n+1)}\right)$$

$$= \ B_{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\frac{n}{n+1}+\frac{A_n-n}{n(n+1)}+\frac{n}{n(n+1)}\right]$$

$$= \ B_{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left[\ 1+\frac{A_n-n}{n(n+1)}\right]$$

$$B_n \ \leq \ B_{n-1}\left(\frac{n+1}{n}\right) exp\left\{\frac{A_n-n}{n(n+1)}\right\},$$

pues $\quad 1 + x \leq e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

Aplicando el mismo resultado para B_{n-1}

$$B_{n-1} \leq B_{n-2}\left(\frac{n}{n-1}\right) exp\left\{\frac{A_{n-1}-(n-1)}{(n-1)n}\right\}$$

$$B_{n-2} \leq B_{n-3}\left(\frac{n-1}{n-2}\right) exp\left\{\frac{A_{n-2}-(n-2)}{(n-2)(n-1)}\right\}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$B_{1} \leq B_{0}\left(\frac{2}{1}\right) exp\left\{\frac{A_{1}-1}{1.2}\right\}$$

notemos

(#) $$B_0 = |\beta_0|^2 = 1$$

luego

$$B_n \leq B_0\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)\ldots\ldots\ldots\left(\frac{2}{1}\right) exp\left\{\frac{A_n-n}{n(n+1)}+\frac{A_{n-1}-(n-1)}{(n-1)n}+\ \ldots+\frac{A_1-1}{1.2}\right\}$$

$$B_n \leq (n+1)exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k-k}{k(k+1)}\right\}$$

$$= (n+1)exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

$$= (n+1)exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k(k+1)}+1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right\}$$

entonces

(2.12) $$B_n \leq (n+1)exp\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k(k+1)}+1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right\}$$

usando el Lema 5.1 de este capítulo y tomando las siguientes sucesiones

$$x_k = \frac{1}{k(k+1)}, \qquad y_k = A_k$$

para

$$\mathbb{X}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

luego $$\mathbb{X}_n = 1 - \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{X}_k\,(\,y_k - y_{k+1}\,) + \mathbb{X}_n\, y_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k+1}\right)(A_k - A_{k+1}) + \ (1 - \frac{1}{n+1})A_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{k+1}\right)[-\,(k+1)^2|\alpha_{k+1}|^2] + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} -k(\,k+1)|\alpha_{k+1}|^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2$$

$$= \sum_{k=2}^{n} -(\,k-1)k|\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2$$

$$= -(1-1^2)|\alpha_1|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\,k - k^2)|\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2$$

tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} k|\alpha_k|^2 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k^2|\alpha_k|^2$$

luego

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k(k+1)}+1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}k|\alpha_k|^2-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k^2|\alpha_k|^2\ +1-\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ \frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}(n+1)k|\alpha_k|^2-\sum_{k=1}^{n}k^2|\alpha_k|^2+(n+1)-\sum_{k=1}^{n}(\frac{n+1}{k})-\ 1\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left[\ (n+1)k|\alpha_k|^2-k^2|\alpha_k|^2+1-\frac{n+1}{k}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left[(n+1-k)k|\alpha_k|^2-\frac{(n+1-k)}{k}\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\left[\ k|\alpha_k|^2-\frac{1}{k}\right]$$

por el Lema 5.2 de este capitulo

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\ k|\alpha_k|^2-\frac{1}{k}\ )$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k(k+1)}+1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\ k|\alpha_k|^2-\frac{1}{k}\ )$$

reemplazando en (2.12)

$$B_n\ \leq(n+1)exp\ \left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{k(k+1)}+1-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n}|\beta_k|^2\leq(n+1)exp\ \left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\ k|\alpha_k|^2-\frac{1}{k}\ )\right\}$$

Para el caso de la igualdad, es preciso recordar que se han usado 2 desigualdades (Desigualdad de Cauchy Schwartz y la exponencial $1+x\leq e^x$)

En el primer caso la igualdad se da si, y sólo si existen constantes complejas

(2.13) $$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \dots\dots\dots, \lambda_n \ / \ \beta_{m-k} = \lambda_m k\bar{\alpha}_k$$

en el segundo caso la igualdad se da si $x = 0$ entonces $A_m - m = 0$

(2.14) $$A_m = m$$

luego

$$\lambda_m A_m = \lambda_m \sum_{k=1}^{m} k^2|\alpha_k|^2 = \lambda_m \sum_{k=1}^{m} k\alpha_k k\bar{\alpha}_k$$

y usando (2.13) tenemos:

$$= \sum_{k=1}^{m} k\alpha_k\beta_{m-k}$$

$$= m\beta_m$$

de esto tenemos

$$\lambda_m A_m = m\beta_m \text{ y por (2.14) entonces } \lambda_m = \beta_m \ ,\forall m$$

de (2.13)

Si $k = m$, entonces

(2.15) $$\beta_0 = \lambda_m m\bar{\alpha}_m = 1 \qquad \text{por (\#)}$$

Para $m = 1$, tenemos:

$$\lambda_1 = \beta_1 = \lambda_m(m-1)\bar{\alpha}_{m-1}\ ,$$

cuando $k = m - 1$ y por (2.13)

pero $$(m-1)\bar{\alpha}_{m-1} = \frac{1}{\lambda_{m-1}} \quad \text{por (2.15)}$$

luego $$\lambda_1 = \lambda_m \frac{1}{\lambda_{m-1}}$$

entonces

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}$$

así

$$\lambda_m = \lambda_1 \, \lambda_{m-1}$$

Sea $\gamma = \lambda_1$,

tenemos $\beta_m = \lambda_m = \lambda_1 \, \lambda_{m-1} = \lambda_1(\lambda_1 \lambda_{m-2}) = \ldots \ldots . \lambda_1 \, (\lambda_1)$

entonces $\beta_m = {\lambda_1}^m = \gamma^m$

despejando en (2.15) reemplazando en: $m\bar{\alpha}_m = \frac{1}{\lambda_m} = \frac{1}{{\lambda_1}^m} = \gamma^{-m}$ y $m\alpha_m = \overline{\gamma^{-m}}$

luego $$m^2|\alpha_m|^2 = |\gamma^{-m}|^2$$

como

$$m = A_m = \sum_{j=1}^{m} j^2 \left|\alpha_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left|\gamma^{-j}\right|^2$$

entonces

$$m = \sum_{j=1}^{m} \left|\gamma^{-j}\right|^2$$

ahora si $m = 1$ entonces $|\gamma| = 1$

de (2.13) $$\beta_{m-k} = \lambda_m k \bar{\alpha}_k = {\lambda_1}^m k \bar{\alpha}_k = \gamma^m \gamma^{-k} = \gamma^{m-k}$$

así

$$\bar{\alpha}_k = \frac{\beta_{m-k}}{k\lambda_m} = \frac{\gamma^{m-k}}{k\gamma^m} = \frac{\gamma^{-k}}{k}$$

entonces

$$\alpha_k = \frac{\gamma^k}{k}$$

Por lo tanto la igualdad ocurre si, y sólo si, existe γ número complejo con

$$|\gamma| = 1 \;\; y \;\;\; \alpha_k = \frac{\gamma^k}{k} \text{ para} 1 \leq k \leq n.$$

□

6. Teorema : La Conjetura de Milin implica la Conjetura de Robertson.

Demostración

$Sea\ g \in \ S_{-}$ entonces existe

$$f \ \in S \ \ / \ g(z)^2 = f(z^2) \ en\ D\ ,$$

Luego se cumple (2.1) y (2.2)

Sea $$h(z) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{f(z)}{z}\right)$$

también

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$$

note que $z \ \in D \setminus (-1,0]$

$$\left(\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right)^2 = \frac{f(\sqrt{z}^2)}{z} = \frac{f(z)}{z}$$

por otro lado tenemos:

$$\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = 1 + c_3 z + c_5 z^2 + \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^n$$

Tenemos $\quad h(z) = \log\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{1/2} = \log\left[\left(\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right)^2\right]^{1/2}$

luego

$$h(z) = \log\left(\frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}\right)$$

entonces

$$e^{h(z)} = \frac{g(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^n$$

$$exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^n$$

luego por el Lema 5.3 de este capítulo, tenemos

$$\sum_{k=0}^{n} |c_{2k+1}|^2 \leq (n+1) exp\left\{\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right)\right\}$$

por la Conjetura de Milin se tiene

$$\frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \leq 0$$

entonces por la desigualdad de la parte superior

$$\sum_{k=0}^{n} |c_{2k+1}|^2 \leq n+1,$$

pues $e^x \leq 1 \quad \forall x \leq 0$

tememos

$$1 + |c_3|^2 + |c_5|^2 + \dots\dots\dots\dots. + \left|c_{2(n+1)-1}\right|^2 \leq n+1$$

para $n+1$, está probada la primera parte de la Conjetura de Robertson.

Ahora si existe un "n" tal que $1+|c_3|^2+|c_5|^2+\ \dots\dots\dots\dots.+|c_{2n-1}|^2\ \leq n$

$$\sum_{k=0}^{n}|c_{2k+1}|^2=n+1$$

para algún $n\ \in\ \mathbb{N}$

luego

$$n+1=\ \sum_{k=0}^{n}|c_{2k+1}|^2\leq(n+1)exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\ k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right\}\ \leq n+1$$

de ahí

$$exp\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\ k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)\right\}=1$$

tenemos

$$\frac{1}{n+1}\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(\ k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)=0$$

por lo tanto f es una rotación de la función de Koebe.

□

CAPÍTULO III

Polinomios de Jacobi

1. Relación entre los polinomios de Jacobi y las funciones de Branges

1.1 Definición Para cualquier elección de los parámetros α y β > -1, los polinomios de Jacobi $\{p_n{}^{(\alpha,\beta)}\}_{n=0}^{\infty}$son aquellos polinomios que tienen las siguientes propiedades:

a) $p_n{}^{(\alpha,\beta)}$ es un polinomio de grado n.

b) Para $w(x) = (1-x)^{\alpha}(a+x)^{\beta}\, y\ \ n \neq m$

$$\int_{-1}^{1} p_n{}^{(\alpha,\beta)}(x)\, p_m{}^{(\alpha,\beta)}(x) w(x) dx = 0$$

c) $p_n{}^{(\alpha,\beta)} = \binom{n+\ \alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}$

para cualquier número z y un entero no negativo n.

$$(z)_n = z(z+1)(z+2) \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (z+n-1)$$

$$p_n{}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} \binom{n+\ \alpha}{m} \binom{n+\ \beta}{n-m} (x-1)^{n-m}(x+1)^m$$

1.2 Proposición Para todo valor admisible α, β y $-1 \leq x \leq 1$

$$p_n{}^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n p_n{}^{(\beta,\alpha)}(-x) \quad \forall n \geq 0$$

Demostración

$$p_n{}^{(\beta,\alpha)}(-x) = \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\beta}{m}\binom{n+\alpha}{n-m}(-x-1)^{n-m}(-x+1)^m$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\beta}{m}\binom{n+\alpha}{n-m}(-1)^{n-m}(x+1)^{n-m}(-1)^m(x-1)^m$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\beta}{m}\binom{n+\alpha}{n-m}(x+1)^{n-m}(x-1)^m$$

Tomando $k = n - m, \; m = n - k$

Si $m = 0 \rightarrow k = n$

$m = 1 \rightarrow k = n - 1$

$\vdots$

$m = n \rightarrow k = 0$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k$$

$$= (-1)^n p_n{}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

por lo tanto

$$p_n{}^{(\beta,\alpha)}(-x) = (-1)^n p_n{}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

□

1.3 Corolario $p_n{}^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n p_n{}^{(\beta,\alpha)}(1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{m}$

Demostración

$$p_n{}^{(\beta,\alpha)}(-1) = (-1)^n p_n{}^{(\beta,\alpha)}(1)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n+\beta}{m}\binom{n+\alpha}{n-m}(x-1)^{n-m}(x+1)^m$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n}\left[\binom{n+\beta}{0}\binom{n+\alpha}{n}(x-1)^n(x-1)^0 + \ldots\ldots\binom{n+\beta}{n}\binom{n+\alpha}{0}(x+1)^n\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n}\binom{n+\beta}{n}(1+1)^n = (-1)^n\binom{n+\beta}{n}$$

□

Las identidades siguientes aparecen en la demostración del teorema 3 de Askey y Gasper [3] pag. 717; su prueba involucra funciones hipergeométricas y no se dan aquí. Su estudio es extenso y no se verá en este trabajo solo se enunciará y usará.

1.4 Proposición Si α > -1 y $-1 \le x \le 1$, entonces $\forall m \ge 0$

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_j\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)_j(\alpha+2j+2)_{m-j}$$

$$\sum_{v=0}^{m} p_v{}^{(\alpha,\ 0)}(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m}\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)_j\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)_j(\alpha+2j+2)_{m-j}}{j!(\alpha+1)_j(m-j)!}[2(x-1)]^j$$

1.5 Teorema (Askey y Gasper) Si α ≥ -1 $y\, m \ge 0$ entonces

$$\sum_{v=0}^{m} p_v{}^{(\alpha,\ \beta)}(x) > 0 \quad -1 \le x \le 1$$

polinomios de Jacobi. Ahora las funciones de Branges. Si$n \ge 1$ y $1 \le k \le n$ defino $\forall t \ge 0$

(3.1) $$\tau_k(t) = k\sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(\mathrm{n-k}-v)!}e^{-(v+k)t}$$

y $\tau_{n+1} \equiv 0$. La relación entre los polinomios de Jacobi y las funciones de Branges es la siguiente:

1.6 Teorema Para $1 \leq k \leq n$

$$\dot{\tau}_k(t) = -ke^{-kt}\sum_{v=0}^{n-k} p_v{}^{(2k,\ 0)}(1-2e^{-t})$$

Demostración

$$\frac{\dot{\tau}_k(t)}{k} = \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(\mathrm{n-k}-v)!}-(k+v)e^{-(k+v)t}$$

$$\frac{\dot{\tau}_k(t)}{k} = -e^{-kt}\sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{v!(\mathrm{n-k}-v)!}e^{-vt}$$

(3.2) $$\frac{-\dot{\tau}_k(t)}{k}e^{kt} = \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{v!(\mathrm{n-k}-v)!}e^{-vt}$$

haciendo $\alpha = 2k,\ m = n-k\ y\ x = 1-2e^{-t}$ en la Proposición 1.4 de este capitulo tenemos

(3.3) $$\sum_{v=0}^{n-k} p_v{}^{(2k\ \ 0)}(x) = \sum_{v=0}^{n-k}\frac{\left(\frac{2k+1}{2}\right)_v\left(\frac{2k+2}{2}\right)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{v!(2\mathrm{k}+1)_{\mathrm{v}}(\mathrm{n-k}-v)!}[2(-2e^{-t})]^v$$

Por otra parte

$$\left(\frac{2k+1}{2}\right)_v = \frac{(2k+1)(2k+3)\ldots\ldots(2k+2v-1)}{2^v}$$

$$\left(\frac{2k+2}{2}\right)_v = \frac{(2k+2)(2k+4)\ldots\ldots(2k+2v)}{2^v}$$

$$(2\mathrm{k}+1)_{\mathrm{v}} = (2k+1)(2k+2)(2k+3)\ldots\ldots(2k+v)$$

$$(2k+2v+2)_{n-k-v} = (2k+2v+2)(2k+2v+3)\ldots\ldots(k+v+n+1)$$

luego

$$2^{2v}\left(\frac{2k+1}{2}\right)_v\left(\frac{2k+2}{2}\right)_v = (2\mathrm{k}+1)_{2\mathrm{v}} \quad y$$

$$\frac{(2\mathrm{k}+1)_{2\mathrm{v}}}{(2\mathrm{k}+1)_{\mathrm{v}}} = (2\mathrm{k}+\mathrm{v}+1)_{\mathrm{v}}$$

reemplazando en (3.3) tenemos, entonces

$$\sum_{v=0}^{n-k} p_v{}^{(2k\ \ 0)}(x) = \sum_{v=0}^{n-k} \frac{\left(\frac{2k+1}{2}\right)_v\left(\frac{2k+2}{2}\right)_v (2k+2v+2)_{n-k-v}}{v!(2\mathrm{k}+1)_{\mathrm{v}}(\mathrm{n}-\mathrm{k}-v)!} 2^{2v}(-1)^v e^{-vt}$$

$$= \sum_{v=0}^{n-k} \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{v!(\mathrm{n}-\mathrm{k}-v)!}(-1)^v e^{-vt}$$

de (3.2) tenemos, entonces

$$\sum_{v=0}^{n-k} p_v{}^{(2k,\ 0)}(1-2e^{-t}) = \frac{-\dot{\tau}_k(t)}{k} = e^{kt}$$

por lo tanto

$$\dot{\tau}_k(t) = -ke^{-kt}\sum_{v=0}^{n-k} p_v{}^{(2k,\ 0)}(1-2e^{-t})$$

□

El siguiente resultado contiene toda la información sobre estas funciones que se utilizará en la prueba del Teorema de Branges.

2. Propiedades de las funciones de Branges

2.1 Teorema Para las funciones $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots \dots \dots \dots . . \tau_n$ definidas en (3.1) y $\tau_{n+1} \equiv 0$ se cumple lo siguiente:

(3.4) $$\tau_k - \tau_{k+1} = -\left[\frac{\dot{\tau}_k}{k} + \frac{\dot{\tau}_{k+1}}{k+1}\right]$$

(3.5) $$\tau_k(0) = n + 1 - k$$

(3.6) $$\tau_k(t) \to 0 \quad si \quad t \to \infty$$

(3.7) $$\dot{\tau} < 0$$

Demostración

Para $1 \leq k \leq n$, definimos

$$g_k(t) = \frac{e^{kt}}{k}\,\tau_k(t)\,, \qquad h_k(t) = \frac{e^{-kt}}{k}\,\tau_k(t)$$

derivando

$$\dot{g}_k(t) = e^{kt}\tau_k(t) + \frac{e^{kt}}{k}\dot{\tau}_k(t) = \left(\tau_k(t) + \frac{\dot{\tau}_k(t)}{k}\right)e^{kt}$$

$$\dot{h}_k(t) = -e^{-kt}\tau_k(t) + \frac{e^{-kt}}{k}\dot{\tau}_k(t) = \left(\frac{\dot{\tau}_k(t)}{k} - \tau_k(t)\right)e^{-kt}$$

entonces

$$e^{kt}\dot{h}_k(t) = \frac{\dot{\tau}_k(t)}{k} - \tau_k(t)$$

bastará probar que:

$$\tau_k + \frac{\dot{\tau}_k}{k} = \tau_{k+1} - \frac{\dot{\tau}_{k+1}}{k+1}$$

que equivale a probar:

$$e^{-kt}\dot{g}_k(t) = -e^{(k+1)t}\dot{h}_{k+1}(t)$$

de la definición de las funciones τ, tenemos que:

$$g_k(t) = \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(\mathrm{n}-\mathrm{k}-v)!}e^{-vt}$$

$$\dot{g}_k(t) = \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(\mathrm{n}-\mathrm{k}-v)!}-ve^{-vt}$$

$$e^{-kt}\dot{g}_k(t) = \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^{v+1} \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)(v-1)!(\mathrm{n}-\mathrm{k}-v)!}e^{-(k+v)t}$$

también tenemos:

$$h_k(t) = \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(\mathrm{n}-\mathrm{k}-v)!}e^{-(v+2k)t}$$

$$\dot{h}_k(t) = \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(\mathrm{n}-\mathrm{k}-v)!}-(v+2k)e^{-(v+2k)t}$$

$$e^{kt}\dot{h}_k(t) = \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^{v+1} \frac{(2k+v+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)v!(\mathrm{n}-\mathrm{k}-v)!}e^{-(v+k)t}$$

para k+1

$$-e^{(k+1)t}\dot{h}_{k+1}(t) = \sum_{v=0}^{n-k-1}(-1)^{v+2} \frac{(v+2k+2)_{v+1}(2k+2v+4)_{n-k-v-1}}{(k+1+v)v!(\mathrm{n}-\mathrm{k}-1-v)!}e^{-(v+k+1)t}$$

$$= \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^{v+1} \frac{(v+2k+1)_v(2k+2v+2)_{n-k-v}}{(k+v)(v-1)!(\mathrm{n}-\mathrm{k}-v)!}e^{-(v+k)t}$$

por lo tanto

$$-e^{(k+1)t}\dot{h}_{k+1}(t) = e^{kt}\dot{g}_k(t)$$

Probaremos (3.5), en el Teorema 1.6 de este capítulo y haciendo $t = 0$

$$\dot{\tau}_k(t) = -ke^{-kt}\sum_{v=0}^{n-k} p_v{}^{(2k,\ 0)}(1 - 2e^{-t})$$

$$\dot{\tau}_k(0) = -k\sum_{v=0}^{n-k} p_v{}^{(2k,\ 0)}(-1)$$

por el Corolario 1.3 de este capitulo

$$= -k\sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v\binom{v+0}{v} = -k\sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v$$

$$\frac{-\dot{\tau}_k(0)}{k} = \sum_{v=0}^{n-k}(-1)^v = (-1)^0 + (-1)^1 + \ldots\ldots+(-1)^{n-k}$$

$$\frac{-\dot{\tau}_k(0)}{k} = \begin{cases} 1\ ;\ \text{si}(n-k) \text{ es par} \\ 0\ ;\ \ \text{si}(n-k) \text{ es impar} \end{cases}$$

Así

$$\tau_k(0) - \tau_{k+1}(0) = -\left[\frac{\dot{\tau}_k(0)}{k} + \frac{\dot{\tau}_{k+1}(0)}{k+1}\right] = 1$$

pues si un cociente es 1 el otro es 0 y viceversa.

entonces $\tau_k(0) = 1 + \tau_{k+1}(0)\ \ y\ \ \tau_{n+1} \equiv 0$

haciendo $k = n$: $\tau_n(0) = 1 + \tau_{n+1}(0) = 1 + 0$

entonces $\tau_n(0) = 1 = 1 + (n - n)$

haciendo $k = n - 1$: $\tau_{n-1}(0) = 1 + 1$

entonces $\tau_n(0) = 2 = 1 + [n - (n - 1)]$

en general $\tau_k(0) = 1 + n - k = n + 1 - k$

es inmediato probar la parte (3.6) a partir de la definición.

probaremos (3.7), por Teorema 1.5 de este capitulo

$$\sum_{v=0}^{n-k} p_v{}^{(2k,\ 0)}(1-2e^{-t}) > 0$$

siempre que $$-1 \leq 1-2e^{-t} \leq 1$$

entonces

$$-ke^{-kt}\sum_{v=0}^{n-k} p_v{}^{(2k,\ 0)}(1-2e^{-t}) < 0$$

por lo tanto $\dot{\tau}_k(t) < 0\ ,\ si\ t > 0$

□

CAPÍTULO IV

Prueba del Teorema de Branges

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema de Branges que es la culminación de este trabajo.

Ahora para comenzar la parte de la prueba del Teorema de Branges, para ello vamos a crear la notación, para el resto del capítulo f es un mapeo rasgado en S y F la cadena de Loewner con $F_0 = f$. Asi la ecuación diferencial de Loewner se cumple para F.Observe que $e^{-t}F(z,t) \in S$, $\forall t \geq 0$. Por lo tanto podemos definir

$$h(z,t) = \frac{1}{2}\log\left[\frac{F(z,t)}{e^t z}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) z^k$$

donde la rama del logaritmo se elige con $h(0,t) = 0$.

1. La función $\phi(t)$

La estrategia de la prueba consiste en introducir la función

(4.1) $$\phi(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[k|\gamma_k(t)|^2 - \frac{1}{k}\right] \tau_k(t) \ para \ \ t \geq 0$$

Donde $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \ldots \ldots \ldots \tau_n$ son las funciones especiales introducidas en el capítulo anterior. Dado la función ϕ, probaremos lo siguiente:

1.1 Lema Si ϕ es la función definida en (4.1), entonces $\dot{\phi}(t) \geq 0,\ \forall t > 0$

Demostración

La prueba de este Lema es el corazón de la prueba del Teorema. En efecto la prueba del Teorema de Branges, a excepción de la igualdad, es fácil mostrar una vez asumido el Lema 1.1 de este capítulo.

Por el Lema 3.7 del capítulo I, sabemos que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{\gamma}_k(t) z^k$$

converge absolutamente y uniformemente en $|z| \leq r < 1$ $(r > 0)$, $0 < t < T < \infty$.Por lo tanto, podemos derivar la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k(t) z^k$$

término a término con respecto a la variable t. Asi usando la ecuación diferencial de Loewner del Teorema 5.2 del capítulo I.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dot{\gamma}_k(t) z^k = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}} \log\left[\frac{F(z,t)}{e^t z}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^t z}{F(z,t)}\left[\frac{\dot{F}(z,t)e^t z - F(z,t)e^t z}{e^{2t} z^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{F}(z,t) - F(z,t)}{F(z,t)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\dot{F}(z,t)}{F(z,t)} - 1\right]$$

(4.2) $$= \frac{1}{2}\left[z\frac{1 + x(t)z}{1 - x(t)z}\frac{\dot{F}(z,t)}{F(z,t)} - 1\right]$$

recordemos que $|x(t)| = 1$

como$|x(t)z| = |z| < 1$, ahora escribimos:

$$\frac{1+x(t)z}{1-x(t)z}$$

como serie geométrica

$$\frac{1}{1-x(t)z}=\sum_{k=0}^{\infty}(x(t))^k z^k$$

$$\frac{x(t)z}{1-x(t)z}=\sum_{k=0}^{\infty}(x(t))^{k+1}z^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}(x(t))^k z^k$$

(4.3) $$\frac{1+x(t)z}{1-x(t)z}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}(x(t))^k z^k$$

Como

$$h(z,t)=\frac{1}{2}\log\left[\frac{F(z,t)}{e^t z}\right]$$

es analítica, derivamos término a término

$$h'(z,t)=\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_k(t)z^{k-1}=\frac{1}{2}\left[\frac{e^t z}{F(z,t)}\frac{F'(z,t)e^t z-F(z,t)e^t z}{e^{2t}z^2}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{F'(z,t)}{F(z,t)}-\frac{1}{z}\right]$$

(4.4) $$\frac{F'(z,t)}{F(z,t)}=\frac{1}{z}+2\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_k(t)z^{k-1}$$

(4.4) y (4.3) en (4.2):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\dot{\gamma}_k(t)z^k=\frac{1}{2}\left\{z\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}(x(t))^k z^k\right]\left[\frac{1}{z}+2\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_k(t)z^{k-1}\right]-1\right\}$$

$$1+2\sum_{k=1}^{\infty}\dot{\gamma}_k(t)z^k=\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}(x(t))^k z^k\right]\left[1+2\sum_{k=1}^{\infty}k\gamma_k(t)z^k\right]$$

multiplicamos ahora las series en el segundo miembro e igualamos los coeficientes de z^k, para así obtener:

$$\dot{\gamma}_k(t) = [x(t)]^k + k\gamma_k(t) + 2\sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{j}.\gamma_j(t)[x(t)]^{k-j}$$

definimos ahora; para $k \geq 1$

$$b_k(t) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{j}.\gamma_j(t)[x(t)]^{-j} \;\; y\; b_0 = 0$$

Obviamos la dependencia del parámetro t, para simplificar la notación:

(4.5) $$\dot{\gamma}_k = x^k + k\gamma_k + 2\sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{j}.\gamma_j x^{k-j}$$

y también

$$b_k = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{j}.\gamma_j x^{-j}$$

$$b_k = b_{k-1} + k\gamma_k x^{-k}$$

entonces $b_k - b_{k-1} = k\gamma_k x^{-k}$

en (4.5) tenemos:$\dot{\gamma}_k = x^k + k\gamma_k + 2x^k b_{k-1}$

$$\dot{\gamma}_k = x^k(1 + k\gamma_k x^{-k} + 2b_{k-1})$$

(4.6) $$\dot{\gamma}_k = x^k(1 + b_k + b_{k-1})$$

Por otra parte

$$\frac{d}{dt}[k|\gamma_k(t)|^2] = \frac{d}{dt}[k\gamma_k(t)\overline{\gamma_k}(t)] = 2Re[k\dot{\gamma}_k(t)\overline{\gamma_k}(t)]$$

Por (4.6) tenemos

(4.7) $$= 2Re[kx^k(1 + b_k + b_{k-1})\overline{\gamma_k}(t)]$$

como $b_k - b_{k-1} = k\gamma_k x^{-k}$ entonces $\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1} = k\bar{\gamma}_k \bar{x}^{-k} = k\bar{\gamma}_k x^k$

entonces $\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1} = k\bar{\gamma}_k x^k$, luego

$$\frac{d}{dt}[k|\gamma_k(t)|^2] = 2Re\left[(1 + b_k + b_{k-1})(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})\right]$$

recordemos

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{n}\left[k|\gamma_k(t)|^2 - \frac{1}{k}\right]\tau_k(t)$$

(4.8) $$\dot{\phi}(t) = \sum_{k=1}^{n}\tau_k(t)\frac{d}{dt}[k|\gamma_k(t)|^2] + \sum_{k=1}^{n}\dot{\tau}_k(t)\left[k|\gamma_k(t)|^2 - \frac{1}{k}\right]$$

sea

$$\mathrm{I} = \sum_{k=1}^{n}\tau_k(t)\frac{d}{dt}[k|\gamma_k(t)|^2] \quad y \qquad \mathrm{II} = \sum_{k=1}^{n}\dot{\tau}_k(t)\left[k|\gamma_k(t)|^2 - \frac{1}{k}\right]$$

$$\mathrm{I} = \sum_{k=1}^{n}\tau_k(t)2Re\left[(1 + b_k + b_{k-1})(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})\right]$$

haciendo $\quad y_k = \tau_k, \quad x_k = 2Re\left[(1 + b_k + b_{k-1})(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})\right]$

aplicando el Lema 5.2 del capítulo II

$$\mathrm{I} = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{X}_k\,(\tau_k - \tau_{k+1}) + \mathbb{X}_n\tau_{n+1} \qquad pues \quad \tau_{n+1} \equiv 0$$

donde

$$\mathbb{X}_m = \sum_{k=1}^{m} 2Re\left[(1 + b_k + b_{k-1})(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})\right]$$

$$\mathbb{X}_m = \sum_{k=1}^{m} 2Re\left[\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1}\right] + \sum_{k=1}^{m} 2Re\left[(b_k + b_{k-1})(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})\right]$$

como$(b_k + b_{k-1})\left(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1}\right) = b_k\bar{b}_k - b_{k-1}\bar{b}_{k-1} - b_k\bar{b}_{k-1} + \bar{b}_k b_{k-1}$

$$= |b_k|^2 - |b_{k-1}|^2 + \bar{b}_k b_{k-1} - \overline{\bar{b}_k b_{k-1}}$$

además $\quad b_k \bar{b}_{k-1} - \bar{b}_k b_{k-1}$ es imaginario puro $\quad$ (pues z-$\bar{z}$=2iImz)

entonces $\quad 2Re\left[(b_k + b_{k-1})(\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1})\right] = 2(|b_k|^2 - |b_{k-1}|^2)$

además

(4.9) $$\mathbb{X}_m = \sum_{k=1}^{m} 2Re\left[\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1}\right] + \sum_{k=1}^{m} 2(|b_k|^2 - |b_{k-1}|^2)$$

$$\mathbb{X}_m = 2\sum_{k=1}^{m}\left[Re\ \bar{b}_k - Re\ \bar{b}_{k-1}\right] + 2\sum_{k=1}^{m}(|b_k|^2 - |b_{k-1}|^2)$$

Por la Regla Telescópica

$$\mathbb{X}_m = 2\left(Re\ \bar{b}_m - Re\ \bar{b}_0\right) + 2(|b_m|^2 - |b_0|^2)$$

$$\mathbb{X}_m = 2(Re\ b_m + |b_m|^2)$$

luego

$$\mathrm{II} = \sum_{k=1}^{n} \dot{\tau}_k(t)\left[k|\gamma_k(t)|^2 - \frac{1}{k}\right]$$

$$\mathrm{I} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{X}_k\,(\tau_k - \tau_{k+1}) = \sum_{k=1}^{m} 2[Re\ b_k + |b_k|^2]\,(\tau_k - \tau_{k+1})$$

por Teorema 2.1 del capítulo III, parte (3.4)

$$[Re\ b_k + |b_k|^2](\tau_k - \tau_{k+1}) = [Re\ b_k + |b_k|^2]\left(-\frac{\dot{\tau}_k}{k} - \frac{\dot{\tau}_{k+1}}{k+1}\right)$$

$$= -\left[Re\ (b_k)\frac{\dot{\tau}_k}{k} + Re\ (b_k)\frac{\dot{\tau}_{k+1}}{k+1} + |b_k|^2\frac{\dot{\tau}_k}{k} + |b_k|^2\frac{\dot{\tau}_{k+1}}{k+1}\right]$$

reindexando y tomando $b_0\ y\ \tau_{n+1} = 0$

$$\mathrm{I} = -2\sum_{k=1}^{n}\left[Re\,(b_k)\frac{\dot{\tau}_k}{k} + Re\,(b_k)\frac{\dot{\tau}_{k+1}}{k+1} + |b_k|^2\frac{\dot{\tau}_k}{k} + |b_k|^2\frac{\dot{\tau}_{k+1}}{k+1}\right]$$

$$\mathrm{I} = -2\left[\sum_{k=1}^{n} Re\,(b_k)\frac{\dot{\tau}_k}{k} + \sum_{k=1}^{n} Re\,(b_k)\frac{\dot{\tau}_{k+1}}{k+1} + \sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\frac{\dot{\tau}_k}{k} + \sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\frac{\dot{\tau}_{k+1}}{k+1}\right]$$

$$\mathrm{I} = -2\left[\sum_{k=1}^{n} Re\,(b_k)\frac{\dot{\tau}_k}{k} + \sum_{k=2}^{n+1} Re\,(b_{k-1})\frac{\dot{\tau}_k}{k} + \sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\frac{\dot{\tau}_k}{k} + \sum_{k=2}^{n+1}|b_{k-1}|^2\frac{\dot{\tau}_k}{k}\right]$$

al aumentar, cuando $k = 1$ (equivale aumentar $b_0 = 0$) y al quitarle el término "$n + 1$" (equivale disminuir $\tau_{n+1} = 0$).

$$\mathrm{I} = -2\left[\sum_{k=1}^{n} Re\,(b_k)\frac{\dot{\tau}_k}{k} + \sum_{k=1}^{n} Re\,(b_{k-1})\frac{\dot{\tau}_k}{k} + \sum_{k=1}^{n}|b_k|^2\frac{\dot{\tau}_k}{k} + \sum_{k=1}^{n}|b_{k-1}|^2\frac{\dot{\tau}_k}{k}\right]$$

(4.10) $$\mathrm{I} = -2\sum_{k=1}^{n}\frac{\dot{\tau}_k}{k}[Re\,(b_k) + Re\,(b_{k-1}) + |b_k|^2 + |b_{k-1}|^2]$$

luego

$$\mathrm{II} = \sum_{k=1}^{n}\dot{\tau}_k\left[k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right] = \sum_{k=1}^{n}\frac{\dot{\tau}_k}{k}[k^2|\gamma_k|^2 - 1]$$

pues $b_k - b_{k-1} = k\gamma_k x^{-k}$ y $\bar{b}_k - \bar{b}_{k-1} = k\bar{\gamma}_k x^k$

(4.11) $$\mathrm{II} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\dot{\tau}_k}{k}[|b_k - b_{k-1}|^2 - 1]$$

reemplazando (4.10) y (4.11) en (4.8)

$$\dot{\phi}(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\dot{\tau}_k}{k}[-2Re\,(b_k) - 2Re\,(b_{k-1}) - 2|b_k|^2 - 2|b_{k-1}|^2 + |b_k - b_{k-1}|^2 - 1]$$

$$\dot{\phi}(t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{\tau}_k}{k}[2Re\,(b_k) + 2Re\,(b_{k-1}) + 2|b_k|^2 + 2|b_{k-1}|^2 + 1 - |b_k - b_{k-1}|^2]$$

pues $\quad |z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2Re(z\overline{w})$

$$\dot{\phi}(t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{\tau}_k}{k}\left[2Re\,(b_k) + 2Re\,(b_{k-1}) + 2|b_k|^2 + 2|b_{k-1}|^2 + 1 - |b_k|^2 - |b_{k-1}|^2 + 2Re\left(b_k\overline{b}_{k-1}\right)\right]$$

$$\dot{\phi}(t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{\tau}_k}{k}\left[|b_k|^2 + 2Re\,(b_k) + 2Re\,(b_{k-1}) + |b_{k-1}|^2 + 1 + 2Re\left(b_k\overline{b}_{k-1}\right)\right]$$

$$\dot{\phi}(t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{\tau}_k}{k}|1 + b_k + b_{k-1}|^2$$

Por el Teorema 2.1 del capítulo III parte (3.7) $\quad \dot{\tau}_k < 0, \qquad$ para $1 \le k \le n$

$$\dot{\phi}(t) \ge 0, \quad \forall t > 0$$

$\square$

1.2 Lema Supongamos que la Conjetura de Milin es verdadera. Si $f \in S\ y\ h$ es la rama de $\left(\frac{1}{2}\right)\log(z^{-1}f(z))$

con h(0) = 0 y

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$$

entonces $$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \le 0\ , \qquad \forall n \ge 2$$

Demostración

Sea $\gamma_k = \gamma_k(0)$ el k-ésimo coeficiente de la expansión en series de potencia de $h(z,t) = h(z)$. Por Teorema 2.1 del capítulo III parte (3.5) $\tau_k(0) = n + 1 - k$ y como

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^{n} \left[k|\gamma_k(t)|^2 - \frac{1}{k} \right] \tau_k(t)$$

así
$$\phi(0) = \sum_{k=1}^{n} \left[k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right] (n + 1 - k)$$

Por el Lema 5.2 del capítulo II

$$\phi(0) = \sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{n}} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right)$$

por (3.6) $si \quad t \to \infty$ entonces $\tau_k(t) \to 0$

de la definición de ϕ, tenemos que si $t \to \infty$ entonces $\phi(t) \to 0$

luego

$$\int_0^\infty \dot{\phi}(t)\, dt = \left(\operatorname*{Lim}_{t \to \infty} \phi(t) \right) - \phi(0)$$

$$= 0 - \sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{n}} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right)$$

entonces

$$\sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{n}} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) = -\int_0^\infty \dot{\phi}(t)\, dt$$

si $t > 0$ entonces $\dot{\phi}(t) \geq 0$ por el Teorema 1.1 del presente capítulo

por lo tanto

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k} \right) \leq 0$$

□

2. Teorema de Branges

La Conjetura de Milin es verdadera es decir

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) \leq 0$$

Si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) = 0 \text{ entonces } f \text{ es una rotación de la función de Koebe.}$$

Demostración

La primera parte quedo probada en el Lema 1.2 del presente capitulo. Supongamos que f no es una rotación de la función de Koebe, donde $f \in S$. Probaremos

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) < 0\,, \qquad \forall n \geq 2$$

ya que esto sería una contradicción con $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{m=1}^{p}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) = 0.$$

Como f(z) = $z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

no es una rotación de la función de Koebe entonces por el Teorema 2.2 del capitulo I, $|a_2| < 2$

$$\exists\ \alpha \in \mathbb{R}\ /\ |a_2| < \alpha < 2$$

adoptemos la notación usada a lo largo de la demostración del Lema 1.1 del presente capítulo IV,

$$h(z,t) = \frac{1}{2}\log\left[\frac{F(z,t)}{e^t z}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)z^k$$

$$b_k = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{j}.\gamma_j x^{-j} \quad para \;\; k \geq 1 \;\; y\, b_0 = 0$$

$$F(z,t) = e^t(z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \; \dots\dots\dots\dots\dots.)$$

entonces $\quad |a_2(t)| \leq 2 \quad \forall t \geq 0$

afirmo $\gamma_1 = \frac{a_2}{2}$, en efecto de la definición de h

$$e^{-t}F(z,t) = zexp[2h(z,t)] = zexp\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k(t)z^k\right]$$

$$z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \; \dots\dots\dots\dots\dots. = zexp\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k(t)z^k\right]$$

$$1 + a_2(t)z + a_3(t)z^2 + \; \dots\dots\dots\dots\dots. = exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2\gamma_k(t)z^k\right]$$

$$1 + a_2(t)z + a_3(t)z^2 + \; \dots\dots\dots\dots\dots. = 1 + 2h + \frac{(2h)^2}{2} + \frac{(2h)^3}{3!} + \; \dots.\dots\dots..$$

$$a_2(t)z + a_3(t)z^2 + \; \dots\dots\dots\dots\dots. = 2(\gamma_1(t)z + \; \dots..) + \; \dots\dots\dots\dots\dots....$$

el coeficiente de z en ambos miembros es $a_2 = 2\gamma_1$ entonces $\gamma_1 = \frac{a_2}{2}$

de (4.6) del Lema 1.1 del presente capitulo

$$\dot{\gamma}_1 = x(1 + b_1 + b_0)$$

$$\dot{\gamma}_1 = x(1 + x^{-1}\gamma_1 + 0)$$

$$\dot{\gamma}_1 = x(1 + \frac{x^{-1}\,a_2}{2})$$

Así $$|\dot{\gamma}_1| = |x|\left|1 + \frac{x^{-1}\,a_2}{2}\right|$$

$$\leq 1 + |x^{-1}|\left|\frac{a_2}{2}\right|$$

$$= 1 + \frac{|a_2|}{2} \leq 2$$

$$|\dot{\gamma}_1| \leq 2$$

Luego $$|\gamma_1(t)| = \left|\gamma_1(0) + \int_0^t \dot{\gamma}_1(s)ds\right|$$

$$\leq |\gamma_1| + \int_0^t |\dot{\gamma}_1(s)|ds$$

$$\leq \left|\frac{a_2}{2}\right| + 2t < \frac{\alpha}{2} + 2t$$

$$|\gamma_1(t)| \leq \left|\frac{a_2}{2}\right| + 2t < \frac{\alpha}{2} + 2t$$

La expresión obtenida para $\dot{\phi}$ en el Lema 1.1 del presente capitulo y recordando $\dot{\tau}<0$ tenemos que

$$\dot{\phi} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{\tau}_k}{k} |1 + b_k + b_{k-1}|^2 \geq -\dot{\tau}_1 |1 + b_1|^2 = -\dot{\tau}_1 |1 + x^{-1}\gamma_1|^2$$

Pues $x^{-1}\gamma_1$ está en la circunferencia de radio $|\gamma_1|$ centrada en el origen; y el punto más cercano al 1 en esta circunferencia es $\frac{\alpha}{2} + 2t$

$$\geq -\dot{\tau}_1 \left(1 - \frac{\alpha}{2} - 2t\right)^2$$

entonces $$\dot{\phi} \geq -\dot{\tau}_1 \left(1 - \frac{\alpha}{2} - 2t\right)^2$$

$$-\dot{\phi}(t) \leq \dot{\tau}_1 \left(1 - \frac{\alpha}{2} - 2t\right)^2$$

Para $0 \leq t \leq \frac{2-\alpha}{4}$ y como

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left(k|\gamma_k|^2 - \frac{1}{k}\right) = -\int_0^{\infty} \dot{\phi}(t)\, dt$$

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right)\leq -\int_0^{\frac{2-\alpha}{8}}\dot{\phi}(t)\,dt$$

$$\leq -\int_0^{\frac{2-\alpha}{8}} -\dot{\tau}_1\left(1-\frac{\alpha}{2}-2t\right)^2 dt$$

$$\leq \left(\frac{2-\alpha}{2}\right)^2\int_0^{\frac{2-\alpha}{8}}\dot{\tau}_1 dt$$

Pero $\dot{\tau}_1 < 0\ y\ 2-\alpha > 0$. Por lo tanto

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(k|\gamma_k|^2-\frac{1}{k}\right) < 0$$

□

En 1991, A. Weinstein encontró una demostración más corta para la Conjetura de Milin y Lebedev. La prueba de Weinstein también necesita de la Ecuación de Diferencial de Loewner, pero utiliza los polinomios de Legendre en lugar de los de Jacobi, valiéndose de un teorema de adición que garantiza una condición de positividad similar a la que mostramos en el Teorema 4.1.3. Si bien la prueba es más breve, es esencialmente la misma que hemos mostrado en este trabajo, pues P. Todorov y H. Wilf demostraron independientemente la equivalencia entre las dos construcciones. Numerosos se han realizado en torno a este tema.

Bibliografía

[1] **Conway**, John B.; *Functions of One Complex Variable*, 2ª Edition Springer-Verlag GTM #11, 1973. (Vol. 1)

[2] **Conway**, John B.; *Functions of One Complex Variable*, 2ª Edition Springer-Verlag GTM # 11, 1973. (Vol. 2)

[3] **Ahlfors**, Lars V.; *Complex Analysis*, 3ª Edition, McGraw-Hill Kogakusha LTD, 1978.

[4] **Rudin**,Walter; *Real and Complex Analysis*, 3ª Edition, McGraw-Hill, Inc.1987.

[5] **Churchill**, Ruel V.; **Brown**, James W.; **Verhey**, Roger F.; *Complex Variables and Applications*, Third Edition, McGraw-Hill Kogakusha LTD, 1974.

[6] **Nehari** Zeev; *Conformal Mapping*, Dover Publications, Inc, 1975.