

**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

**Sobre el grupo de trenza para  $RP^2$**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Maribel Rosa Bravo Quispe

ASESOR

Agripino García Armas

**Lima – Perú**

**2013**

# Sobre el grupo de trenza para $\mathbb{R}P^2$

Maribel Rosa Bravo Quispe

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título profesional de Licenciada en Matemática.

Aprobada por:

---

Mg. Mario Enrique Santiago Saldaña  
Presidente del Jurado

---

Mg. Alex Molina Sotomayor  
Miembro del Jurado

---

Dr. Agripino García Armas  
Miembro Asesor

Lima - Perú

Noviembre - 2013

## FICHA CATALOGRÁFICA

MARIBEL ROSA, BRAVO QUISPE

Sobre el grupo de trenza para  $\mathbb{R}P^2$ , (Lima) 2013.  
viii, 73 p., 29,7 cm, (UNMSM, Licenciada,  
Matemática, 2013).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,  
Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática  
I. UNMSM-Facultad de Ciencias Matemáticas.  
II. Sobre el grupo de trenza para  $\mathbb{R}P^2$  (Topología  
Algebraica).

*A mi querida familia.*

# Agradecimientos

---

A Dios por todo, que me fortaleció y me dió coraje para seguir mismo así en tiempos de aflicción y flaqueza. Es Él quien me concede, por su infinita misericordia todas las cosas que tengo conquistadas hasta ahora. Por eso a Él sea dada toda honra, gloria y alabanza porque es digno!

A mis padres y hermanos, por la paciencia que tuvieron conmigo, por todo el apoyo, amor, amistad incondicional y cariño en todos estos años. Recuerden siempre que bendecida soy con sus vidas.

A mi asesor Dr. Agripino Garcia Armas, por haber confiado en mí, por sus consejos, dedicación y amistad durante todo el periodo que me asesoró. Agradezco también su paciencia y por todo el conocimiento adquirido. Gracias! Deseo todo lo mejor para usted.

A mi novio Misael, por la paciencia en los momentos que estuve distante, por apoyarme en todo y por sus oraciones. Dios te ilumine y recompense en gran manera.

A los profesores de UNMSM que participaron en mi vida universitaria, los cuales considero fundamental para mi formación. Gracias!

A mis amigos de UNMSM e ICMC, por el compañerismo brindado en todo este tiempo. Deseo todo lo bueno para cada uno de ustedes.

# Resumen

---

## Sobre el grupo de trenza para $\mathbb{R}P^2$

MARIBEL ROSA BRAVO QUISPE

NOVIEMBRE-2013

Orientador: Dr. Agripino García Armas

Título obtenido: Licenciada en Matemática

---

En este trabajo presentamos un estudio básico sobre el grupo de trenzas de Artin  $B_n$ . Introducimos los espacios de configuración  $\mathcal{F}_n(M)$  y  $\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n$  para una variedad  $M$ . En el caso  $M = \mathbb{R}^2$ , se mostrará que los grupos fundamentales de los espacios  $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$  y  $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)/\Sigma_n$  son isomorfos a los grupos de trenzas puras  $P_n$  y grupo de trenzas de Artin  $B_n$  respectivamente. Motivados por este hecho, se define el grupo de trenzas de superficies  $P_n(M)$ ,  $B_n(M)$ . Por último, concluimos haciendo un estudio a los grupos de trenza del plano proyectivo real  $P_n(\mathbb{R}P^2)$  y  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ .

PALABRAS CLAVES:      TRENZA ALGEBRAICA  
DIAGRAMAS DE TRENZA  
TRENZAS PURAS  
ESPACIO DE CONFIGURACIÓN  
PLANO PROYECTIVO REAL

# Abstract

---

## On the braid group for $\mathbb{R}P^2$

MARIBEL ROSA BRAVO QUISPE

NOVEMBER-2013

Advisor: Dr. Agripino García Armas

Degree: Licentiate in Mathematic

---

In this work we present a basic study about the group of Artin's braids,  $B_n$ . We introduce the configuration spaces  $\mathcal{F}_n(M)$  and  $\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n$  for a manifold  $M$ . In the case where  $M = \mathbb{R}^2$  we will show that the fundamental groups of the spaces  $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$  and  $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)/\Sigma_n$  are isomorphic to the group of pure braids  $P_n$  and the group of braids of Artin  $B_n$  respectively. Motivated by that fact, we will define groups of braids of surfaces  $P_n(M)$  and  $B_n(M)$ . Lastly, we will do a study of the braid groups of the real projective plane  $P_n(\mathbb{R}P^2)$  and  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ .

KEY WORDS: ALGEBRAIC BRAIDS  
BRAIDS DIAGRAMS  
PURE BRAIDS  
CONFIGURATION SPACES  
REAL PROJECTIVE PLANE

# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
<b>1 Trenza y grupo de trenza</b>	<b>3</b>
1.1 El grupo de trenzas de Artin . . . . .	3
1.2 Trenzas y Trenzas geométricas . . . . .	6
1.3 Diagramas de trenzas . . . . .	16
1.3.1 Movimientos Reidemeister para diagramas de trenzas . . . . .	22
1.4 $B_n$ es isomorfo a $B_n$ . . . . .	32
1.5 Trenzas Puras . . . . .	38
<b>2 Trenzas y espacios de configuración</b>	<b>41</b>
2.1 Espacios de configuración . . . . .	41
2.2 Trenzas sobre variedades . . . . .	47
<b>3 Grupo de trenzas del plano proyectivo real</b>	<b>51</b>
3.1 Grupo de trenzas algebraicas . . . . .	51
<b>A Resultados Básicos</b>	<b>67</b>
A.1 Método Reidemeister-Schreier . . . . .	67
A.2 Grupo Triangular . . . . .	69
A.3 Automorfismos interiores . . . . .	70
A.4 Homotopia de caminos . . . . .	70
A.5 Grupo fundamental . . . . .	71
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>

# Introducción

---

El grupo de trenzas fue introducido en 1925 por E. Artin [1], aunque su importancia en las matemáticas fue, posiblemente un siglo antes por Gauss, como lo demuestran dibujos de trenzas en sus cuadernos. Los grupos de trenza proporcionan una mezcla muy atractiva de la geometría y el álgebra, y tienen aplicaciones en una amplia variedad de áreas de matemáticas, física y recientemente en la química de polímeros y biología molecular.

El grupo de trenza de Artin toma realce en 1947, cuando él mismo publica dos artículos [2, 3] muy interesantes donde en [2] hizo riguroso las primeras ideas intuitivas del tratamiento de las trenzas del plano  $\mathbb{R}^2$  y también muestra una presentación del grupo de trenzas de  $n$  cuerdas del plano como un grupo de los  $n - 1$  generadores  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  sujeto a las relaciones:

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1},$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i - j| \geq 2.$$

Luego, en [3] determina todas las representaciones del grupo de trenzas de  $n$  cuerdas por grupos de permutaciones transitivos de  $n$  letras. El grupo de trenzas de Artin fue objeto de estudio de varios matemáticos, tal es así que en [7] apoyado de las definiciones de trenzas geométricas y sus diagramas, muestra que el grupo de trenzas de Artin es isomorfo al conjunto de las clases de isotopía de las trenzas geométricas. Este es asunto del Capítulo 1 de este texto.

Posteriormente, en 1962, Fox, Fadell y Neuwirth [5, 6] reinterpretan la definición del grupo de trenzas de  $\mathbb{R}^2$  como el grupo fundamental de espacios de configuración y además extiende esto para definir el grupo de trenzas de espacios topológicos arbitrarios. Basados en estos dos artículos, en el Capítulo 2 de este trabajo mostraremos exactamente que los grupos fundamentales de los espacios de configuración de  $n$ -tuplas no ordenadas  $(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)/\Sigma_n)$  y  $n$ -tuplas ordenadas  $(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$  de puntos distintos de  $\mathbb{R}^2$

---

son isomorfos a los grupos de trenzas de Artin  $B_n$  y trenzas puras  $P_n$  respectivamente.

La definición general que introdujo Fadell, motiva hacer un estudio para la variedad compacta  $\mathbb{R}P^2$ , conocido como el plano proyectivo real. Aquí el grupo de trenzas puras  $P_n(\mathbb{R}P^2)$  (respectivamente el grupo de trenzas  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ ) es definido como el grupo fundamental de  $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}P^2)$  (respectivamente de  $\mathcal{F}_n/\Sigma_n(\mathbb{R}P^2)$ ). Estos grupos fueron bien estudiados por Van Buskirk [11] y recientemente por Wang [12]. Siguiendo las ideas contenidas en [11] en el Capítulo 3 de este material se mostrará que  $B_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$ ,  $B_2(\mathbb{R}P^2)$  es un grupo dicíclico de orden 16,  $P_2(\mathbb{R}P^2)$  es isomorfo al grupo cuaternion  $Q_8$ , y para  $n > 2$ ,  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  es infinito.

# Trenza y grupo de trenza

En este Capítulo haremos un estudio del grupo de trenzas desde el punto de vista algebraico, utilizando operaciones que pueden interpretarse por una vía geométrica. Nuestro objetivo principal es mostrar el isomorfismo que existe entre el grupo de trenzas de Artin  $B_n$  y el grupo de trenzas  $\mathcal{B}_n$ , cuyos elementos son clases de isotopía de trenzas geométricas. Para esto hacemos uso de las herramientas fundamentales que son los diagramas de trenzas y movimientos elementales.

## 1.1 El grupo de trenzas de Artin

En esta sección presentamos definiciones algebraicas básicas que son desprendidas directamente de la obra de Artin. La definición es formulada en términos de presentación de grupo por generadores y relaciones.

**Definición 1.1.** *El grupo de trenzas de Artin  $B_n$  es el grupo generado por  $n - 1$  generadores  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  y las siguientes relaciones trenza:*

(i)  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n - 1$  con  $|i - j| \geq 2$ .

(ii)  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ .

**Observación:**

- Por definición  $B_1 = \{1\}$  es el grupo trivial.
- El grupo  $B_2$  es generado por un solo generador  $\sigma_1$  y un conjunto vacío de relaciones. Luego, cualquier elemento de  $B_2$  es potencia de  $\sigma_1$  y su inverso  $\sigma_1^{-1}$ . Así,  $B_2 = \langle \sigma_1 \rangle$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , grupo cíclico infinito.

Es inmediato observar que si  $f$  es un homomorfismo de grupos de  $B_n$  a un grupo  $G$ , los elementos  $\{s_i = f(\sigma_i)\}_{i=1,2,\dots,n-1}$  de  $G$  satisfacen las relaciones trenza. En efecto,

- Para  $i, j = 1, 2, \dots, n-1$  y  $|i-j| \geq 2$ ,

$$s_i s_j = f(\sigma_i) \cdot f(\sigma_j) = f(\sigma_i \sigma_j) = f(\sigma_j \sigma_i) = f(\sigma_j) \cdot f(\sigma_i) = s_j s_i.$$

- Para  $i = 1, 2, \dots, n-2$ ,

$$s_i s_{i+1} s_i = f(\sigma_i) \cdot f(\sigma_{i+1}) \cdot f(\sigma_i) = f(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) = f(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}) = s_{i+1} s_i s_{i+1}.$$

Los grupos de trenzas están muy relacionados con los grupos de permutaciones  $\Sigma_n$ , la primera relación entre estos dos grupos se establecerá con la siguiente proposición.

**Proposición 1.2.** *Si  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  son elementos de un grupo  $G$  satisfaciendo las relaciones trenza, entonces existe un único homomorfismo  $\varphi : B_n \rightarrow G$  tal que  $s_i = \varphi(\sigma_i)$ ; para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .*

**Demostración.** Sea  $F_n$  el grupo libre sobre el conjunto  $S = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}\}$ .  $F_n$  es definido por la siguiente propiedad sea  $i : S \rightarrow F_n$  una función, para toda función  $f : S \rightarrow H$  donde  $H$  es un grupo, existe un único homomorfismo  $h : F_n \rightarrow H$  tal que  $h \circ i = f$ . El grupo libre sobre  $S$  así definido es único módulo isomorfismos.

Se sabe además que todo grupo  $H$  es la imagen homomorfa de un grupo libre, es decir, existe un homomorfismo sobreyectivo  $\pi : F \rightarrow H$ , donde  $F$  es un grupo libre sobre cierto conjunto  $S$ . Por el teorema de isomorfismos se tiene que  $H = F/\text{Ker } \pi$ . Note que se puede mostrar que  $\text{Ker } \pi = \langle R \rangle_{\text{Nor}}$ , donde  $R \subseteq F$  y  $\langle R \rangle_{\text{Nor}}$  denota al menor grupo normal contenido en  $F$  que contiene a  $R$ . Los elementos de  $S$  se llaman generadores y los de  $R$  relaciones.

Volviendo a la prueba, se tiene que  $G$  es un grupo generado por  $n-1$  generadores  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  con relaciones que incluyen a las relaciones trenza. Ahora, sea  $F_n$  el grupo que definimos antes, la función  $f : S \rightarrow G$  que envía  $\sigma_i$  en  $s_i$  induce un homomorfismo  $\phi : F_n \rightarrow G$  tal que  $\phi(\sigma_i) = s_i$ . Se quiere construir un homomorfismo de  $B_n$  a  $G$ , para esto note que  $B_n = F_n/\langle R \rangle_{\text{Nor}}$  con

$$R = \{\dots, \sigma_i \sigma_j (\sigma_j \sigma_i)^{-1}, \dots, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i (\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1})^{-1} \dots\},$$

en  $R$  están todas las relaciones trenzas tal que en el cociente, estos elementos son iguales a 1. Como  $B_n$  es un cociente de  $F_n$ , para inducir desde  $\phi$  un homomorfismo del cociente en  $G$ , basta verificar que para todo elemento  $r$  en  $R$ , se tiene que  $\phi(r) = 1$  y como  $G$  contiene a las relaciones trenza, entonces podemos inducir un homomorfismo  $\pi : B_n \rightarrow G$  con las características requeridas. ■

**Corolario 1.3.** Para todo  $n \geq 1$ , existe un homomorfismo  $\pi : B_n \rightarrow \Sigma_n$  sobreyectivo tal que  $\pi(\sigma_i) = s_i = (i \ i+1)$  es la permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  que intercambia  $i$  con  $i+1$  y al resto de los elementos los deja fijos, estas permutaciones se conocen como transposiciones simples.

**Demostración.**  $\Sigma_n$  es generado por las  $n - 1$  transposiciones simples  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$ , es claro ver que éstas transposiciones satisfacen las relaciones trenza,

- $s_i s_j = s_j s_i$  si  $i, j = 1, 2, \dots, n - 1 ; |i - j| \geq 2$ .
- $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ .

Ahora por la proposición anterior se tiene que existe un homomorfismo de grupo  $\pi : B_n \rightarrow \Sigma_n$  tal que  $\pi(\sigma_i) = s_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Este homomorfismo es sobreyectivo, pues se sabe que  $\Sigma_n$  es generado por las transposiciones simples. ■

**Lema 1.4.** El grupo  $B_n$  con  $n \geq 3$  no es abeliano.

**Demostración.** Sea  $n \geq 3$ , primeramente note que en  $\Sigma_n$  se tiene

$$s_1 s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix} ; \quad s_2 s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

y además  $s_1 s_2 \neq s_2 s_1$ . Desde que  $\pi : B_n \rightarrow \Sigma_n$  es sobreyectivo se tiene que para  $s_i, s_j \in \Sigma_n$ , existirá  $\sigma_1, \sigma_2 \in B_n$  tal que  $s_i = \pi(\sigma_1)$  y  $s_j = \pi(\sigma_2)$ . Luego, si suponemos que  $B_n$  es abeliano para algún  $n \geq 3$ , se tiene  $\pi(\sigma_1 \sigma_2) = \pi(\sigma_2 \sigma_1)$  lo cual implica  $s_i s_j = s_j s_i$  y esto es una contradicción. ■

Por como están definidas las relaciones trenza en la Definición 1.1, es claro que la correspondencia  $i(\sigma_i) = \sigma_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n - 1$  define un homomorfismo de grupos  $i : B_n \rightarrow B_{n+1}$  llamado inclusión natural. Algunas veces será conveniente ver  $B_n$  como un subgrupo de  $B_{n+1}$  via  $i$ , en este modo se obtiene una cadena creciente  $B_1 \subset B_2 \subset B_3 \subset B_4 \dots$

$\Sigma_n$  también posee una inclusión natural en  $\Sigma_{n+1}$  que consiste en considerar una permutación  $s \in \Sigma_n$  como una permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$  que deja fijo a  $n+1$  y para los demás elementos actúa como  $s$ . Con estas acotaciones es inmediato ver que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\pi} & \Sigma_n \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\ B_{n+1} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \Sigma_{n+1} \end{array}$$

$$\bar{i} \circ \pi(\sigma_i) = \bar{i}(\pi(\sigma_i)) = \bar{i}(s_i) = s_i$$

$$\bar{\pi} \circ i(\sigma_i) = \bar{\pi}(i(\sigma_i)) = \bar{\pi}(\sigma_i) = s_i.$$

## 1.2 Trenzas y Trenzas geométricas

Hasta ahora se han presentado las nociones algebraicas básicas de los grupos de trenzas, ahora interpretaremos estos grupos en terminos geométricos.

En ésta sección y en adelante se denotará por  $I$  al intervalo cerrado  $[0, 1]$  en el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.5.** Una trenza geométrica de  $n \geq 1$  cuerdas es un conjunto  $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$  formado por  $n$  arcos disjuntos, llamadas las cuerdas de  $b$  tales que la proyección  $\pi : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$  mapea cada cuerda homeomórficamente sobre  $I$  y

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}$$

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}.$$

De la primera condición se entiende que toda cuerda de  $b$  intersecta a cada plano  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  con  $t \in I$  en exactamente un punto y de la segunda condición podemos entender que cada cuerda conecta un punto del conjunto  $\{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}$  con exactamente un punto del conjunto  $\{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}$ , es decir, la cuerda  $i$  conecta  $(i, 0, 0)$  con  $(s(i), 0, 1)$  donde  $i, s(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ . La sucesión  $(s(1), \dots, s(n))$  es una permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, n\}$  llamada permutación fundamental de  $b$ . A cada cuerda de la trenza geométrica, la orientaremos de tal modo que la orientación sobre el intervalo  $I$  por la proyección  $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$  de la cuerda será la que empieza en 0 y va hacia 1. Así la cuerda está orientada “de arriba hacia abajo”.

Un ejemplo de trenza geométrica es dado en la Figura 1.1, donde el eje  $x$  es direccionado hacia la derecha, el eje  $y$  alejándose del lector y el tercer eje (variable  $t$ ) es direccionado hacia abajo. En este ejemplo note que la permutación fundamental de esta trenza es  $(1, 3, 2, 4)$ .

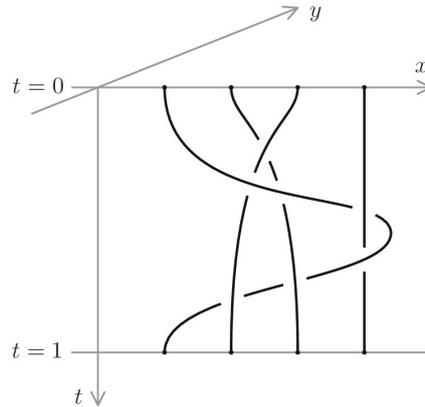


Figura 1.1: Una isotopía de diagrama de trenza

**Definición 1.6.** Dos trenzas geométricas  $b$  y  $b'$  de  $n$  cuerdas son isotópicas, denotada por  $b \sim b'$ , si existe una aplicación continua  $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ , tal que para cada  $s \in I$  la aplicación  $F_s : b \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  definida por  $F_s(x) = F(x, s)$  es un encaje, cuya imagen es una trenza geométrica de  $n$  cuerdas. Además, debe cumplirse que  $F_0(b) = b$ ,  $F_1(b) = b'$  y para cada  $s \in I$ ,  $F_s$  mantiene fijos los puntos extremos de  $b$ , es decir  $F_s = id_{\partial b}$ .

Ambas, la aplicación  $F$  y la familia de trenzas geométricas  $\{F_s(b)\}_{s \in I}$  son llamadas isotopías de  $b = F_0(b)$  a  $b' = F_1(b)$ .

**Lema 1.7.** La relación de isotopía es una relación de equivalencia.

**Demostración.**

- **Reflexiva:** Dada  $b$  una trenza geométrica de  $n$  cuerdas, basta considerar la aplicación continua

$$\begin{aligned} F &: b \times I \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times I \\ (x, t) &\mapsto F(x, t) = x. \end{aligned}$$

Así, para cada  $s \in I$ ,  $F_s : b \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ , definida por  $F_s(x) = x$  es un homeomorfismo con  $F_0(b) = b$  y  $F_1(b) = b'$ . Por tanto  $b$  es isotópico a  $b'$ .

- **Simétrica:** Sea  $b$  y  $b'$  dos trenzas geométricas. Si  $b$  es isotópico a  $b'$ , entonces existe una aplicación continua  $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ , tal que para cada  $s \in I$ , la aplicación  $F_s : b \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  dada por  $F_s(x) = F(x, s)$  es un encaje, esto es,  $F_s : b \rightarrow F_s(b)$  es un homeomorfismo. Además, para cada  $s$ ,  $F_s(b)$  es una trenza,  $F_0 = Id_b$ ,  $F_1(b) = b'$  y  $F_s = id_{\partial b}$ .

De la hipótesis se tiene que  $F_1^{-1} : b' \rightarrow b$  es un homeomorfismo, puesto que  $F_1$  lo es. Considerando la aplicación  $h : I \rightarrow I$  definida por  $h(s) = 1 - s$  se tiene el

siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} b' \times I & \xrightarrow{F_1^{-1} \times h} & b \times I \\ & \searrow \bar{F} & \downarrow F \\ & & \mathbb{R}^2 \times I, \end{array}$$

donde  $\bar{F}$  está dada por  $\bar{F}(x, s) = F(F_1^{-1}(x), h(s))$ . Como las aplicaciones  $F$  y  $F_1^{-1} \times h$  son continuas, entonces  $\bar{F}$  es también continua.

Ahora para cada  $s \in I$  se define

$$\begin{aligned} \bar{F}_s &: b' \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I \\ x &\mapsto \bar{F}_s(x) = F(F_1^{-1}(x), 1-s). \end{aligned}$$

**Afirmación:** Para cada  $s \in I$ ,  $\bar{F}_s$  es un encaje.

En efecto, sea  $s \in I$  fijo y arbitrario, vamos a probar que  $\bar{F}_s : b' \rightarrow \bar{F}_s(b')$  es un homeomorfismo.

•  $\bar{F}_s$  es biyectiva

En efecto, como  $\bar{F}_s$  es sobreyectiva, solo falta probar que  $\bar{F}_s$  sea inyectiva, para esto dados  $x, y \in b'$ , si  $\bar{F}_s(x) = \bar{F}_s(y)$  entonces  $F(F_1^{-1}(x), 1-s) = F(F_1^{-1}(y), 1-s)$ . Desde que  $F$  es inyectiva por hipótesis, se tiene  $F_{1-s}(F_1^{-1}(x)) = F_{1-s}(F_1^{-1}(y))$ . Luego, por la inyectividad de  $F_{1-s}$  resulta  $F_1^{-1}(x) = F_1^{-1}(y)$  y por último como  $F_1^{-1}$  es un homeomorfismo. Entonces se obtiene que  $x = y$ .

•  $\bar{F}_s$  es continua

En efecto, considere la aplicación  $\lambda_s$  definida por  $\lambda_s(x) = (x, s)$

$$\begin{array}{ccc} b' & \xrightarrow{\lambda_s} & b' \times I \\ & \searrow \bar{F}_s & \downarrow \bar{F} \\ & & \mathbb{R}^2 \times I. \end{array}$$

Del diagrama note que  $\bar{F}_s = \bar{F} \circ \lambda_s$  y  $\bar{F}_s(x) = \bar{F}(x, s)$ . Como  $\bar{F}$  y  $\lambda_s$  son continuas. Entonces,  $\bar{F}_s$  es también continua.

•  $\bar{F}_s^{-1}$  es continua

En efecto, se tiene que la aplicación  $\bar{F}_s : b' \rightarrow \bar{F}_s(b')$  es biyectiva, dado  $x \in b'$  tomando  $y = \bar{F}_s(x)$  por como está definido  $\bar{F}_s$  se tiene  $y = F_{1-s}(F_1^{-1}(x))$ . Como  $1-s \in I$  y  $F_{1-s}$  es un encaje, entonces  $F_{1-s}^{-1}(y) = F_1^{-1}(x)$ . Así,  $F_1 \circ F_{1-s}^{-1}(y) = x$ .

Luego, se define la aplicación inversa de  $\bar{F}_s$  como sigue,

$$\begin{aligned} \bar{F}_s^{-1} : \bar{F}_s(b') &\rightarrow b' \\ y &\mapsto F_1 \circ F_{1-s}^{-1}(y). \end{aligned}$$

Por tanto  $\bar{F}_s^{-1} = F_1 \circ F_{1-s}^{-1}$  es continua, puesto que es la composición de dos funciones continuas. Con esto queda probada la afirmación. ■

Por como está definido  $\bar{F}_s$  se tiene

$$\bar{F}_s(b') = F(F_1^{-1}(b'), 1-s) = F(b, 1-s) = F_{1-s}(b).$$

y como  $F_{1-s}(b)$  es una trenza geométrica. Entonces,  $\bar{F}_s(b')$  es también una trenza geométrica. Claramente  $\bar{F}_0 = id_{b'}$  y  $\bar{F}_s = id_{\partial b'}$ . Resta probar que  $\bar{F}_1(b') = b$ , para esto nuevamente por definición,

$$\bar{F}_1(b') = F(F_1^{-1}(b'), 1-1) = F(b, 0) = F_0(b) = b.$$

Por tanto se concluye que  $b'$  es isotópico a  $b$ .

- **Transitiva:** Sean  $b, b', b''$  trenzas geométricas de  $n$  cuerdas tal que  $b$  es isotópico a  $b'$  y  $b'$  es isotópico a  $b''$ .

Existen las aplicaciones continuas  $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  y  $\bar{F} : b' \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  tales que para cada  $s \in I$ ,

$$\begin{aligned} F_s : b &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times I & \bar{F}_s : b' &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times I \\ x &\mapsto F_s(x) = F(x, s) & x &\mapsto \bar{F}_s(x) = \bar{F}(x, s). \end{aligned}$$

Las aplicaciones  $F_s$  y  $\bar{F}_s$  son encajes cuyas imágenes  $F_s(b)$  y  $\bar{F}_s(b')$  son trenzas geométricas. Además,  $F_0 = id_b$ ,  $\bar{F}_0 = id_{b'}$ ,  $F_1(b) = b'$ ,  $\bar{F}_1(b') = b''$ ,  $F_s = id_{\partial b}$  y  $\bar{F}_s = id_{\partial b'}$ .

Ahora considerando las aplicaciones  $h : [0, 1/2] \rightarrow I$  definida por  $h(s) = 2s$  y  $\bar{h} : [1/2, 1] \rightarrow I$  dada por  $\bar{h}(s) = 2s - 1$  en los diagramas siguientes,

$$\begin{array}{ccc} b \times [0, 1/2] & \xrightarrow{id_b \times h} & b \times I \\ & \searrow F \circ (id_b \times h) & \downarrow F \\ & & \mathbb{R}^2 \times I. \end{array} \quad \begin{array}{ccc} b \times [1/2, 1] & \xrightarrow{F_1 \times \bar{h}} & b' \times I \\ & \searrow \bar{F} \circ (F_1 \times \bar{h}) & \downarrow \bar{F} \\ & & \mathbb{R}^2 \times I. \end{array}$$

Note que  $F \circ (id_b \times h)$  y  $F_1 \times \bar{h}$  son continuas en  $[0, 1/2]$  y  $[1/2, 1]$  respectivamente.

Como  $b \times I = b \times [0, 1/2] \cup b \times [1/2, 1]$ . Defina

$$\tilde{F} : b \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times I$$

$$\tilde{F}(x, s) = \begin{cases} F(x, 2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \bar{F}(F_1(x), 2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Note que para  $s = 1/2$ , se tiene

- $F(x, 1) = F_1(x)$
- $\bar{F}(F_1(x), 0) = \bar{F}_0(F_1(x)) = F_1(x)$  (esto es porque  $F_1(x) \in b'$ ).

Claramente  $\tilde{F}$  es continua en  $b \times I$ . Para cada  $s \in I$ ;

$$\tilde{F}_s : b \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$$

$$x \mapsto \tilde{F}_s(x) = \tilde{F}(x, s)$$

**Afirmación:** Para cada  $s \in I$ ,  $\tilde{F}_s$  es un encaje.

En efecto, sea  $s \in I$  fijo y arbitrario. Se probará que  $\tilde{F}_s : b \rightarrow \tilde{F}_s(b)$  es un homeomorfismo.

•  **$\tilde{F}_s$  es biyectiva**

**caso I:** Si  $0 \leq s \leq 1/2$ .

Sean  $x, y \in b$ . Si  $\tilde{F}_s(x) = \tilde{F}_s(y)$  entonces  $F(x, 2s) = F(y, 2s)$  y esto es  $F_{2s}(x) = F_{2s}(y)$ . Como  $F_{2s}$  es inyectiva, entonces  $x = y$ . Así,  $\tilde{F}_s$  es inyectiva y por tanto  $\tilde{F} : b \rightarrow \tilde{F}_s(b)$  es biyección.

**caso II:** Si  $1/2 \leq s \leq 1$ .

Sean  $x, y \in b$ . Si  $\tilde{F}_s(x) = \tilde{F}_s(y)$  entonces  $F_{2s-1}(x) = F_{2s-1}(y)$ . Como  $F_{2s-1}$  es inyectiva, entonces  $F_1(x) = F_1(y)$  y por ser la aplicación  $F_1$  inyectiva entonces se tiene  $x = y$ . Así,  $\tilde{F}_s$  es inyectiva y por tanto se tiene la biyección sobre su imagen.

•  **$\tilde{F}_s$  es continua**

En efecto, ésto es inmediato de ver desde que  $\tilde{F}$  es continuo.

•  **$\tilde{F}_s^{-1}$  es continua**

En efecto, dado  $(x, s) \in b \times I$ . Haciendo  $y = \tilde{F}(x, s)$ . Para los valores de  $s$  tales que  $0 \leq s \leq 1/2$ , por como está definido  $\tilde{F}$  se tiene  $y = F_{2s}(x)$  y de esto se desprende

$x = F_{2s}^{-1}(y)$ . Ahora si  $1/2 \leq s \leq 1$ , entonces usando la definición de  $\tilde{F}$  se tiene que  $x = F_1^{-1} \circ \bar{F}_{2s-1}^{-1}(y)$ . Luego se define la aplicación inversa de  $\tilde{F}_s$  como sigue,

$$\tilde{F}_s^{-1} : \tilde{F}_s(b) \longrightarrow b$$

$$\tilde{F}_s^{-1}(y) = \begin{cases} F_{2s}^{-1}(y) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ F_1^{-1} \circ \bar{F}_{2s-1}^{-1}(y) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Note que para  $s = 1/2$ , se tiene  $F_1^{-1} \circ \bar{F}_0^{-1}(y) = F_1^{-1}(y)$  y desde que  $F_{2s}^{-1}$ ,  $\bar{F}_{2s-1}^{-1}$  y  $F_1^{-1}$  son continuas. Entonces, es claro que  $\tilde{F}_s^{-1}$  es continua y con esto queda finalizada la afirmación. ■

**Afirmación:**  $\tilde{F}_s(b)$  es trenza geométrica.

En efecto, si  $0 \leq s \leq 1/2$  se tiene

$$\tilde{F}_s(b) = F(b, 2s) = F_{2b}(b),$$

y  $F_{2b}(b)$  es una trenza geométrica por hipótesis. Ahora si  $1/2 \leq s \leq 1$ , entonces

$$\tilde{F}_s(b) = \bar{F}(F_1(b), 2s - 1) = \tilde{F}_{2s-1}(F_1(b)) = \bar{F}_{2s-1}(b'),$$

y como  $\bar{F}_{2s-1}(b')$  es trenza geométrica por hipótesis. Entonces, se tiene probada la afirmación. ■

Claramente se puede ver que  $\tilde{F}_0 = id_b$  y que  $\tilde{F}_s$  mapea todo punto final de  $b$  sobre sí mismo y por último para probar que  $\tilde{F}_1(b) = b''$  hacemos uso de definiciones y se tiene,

$$\tilde{F}_1(b) = \tilde{F}_1(b, 1) = \bar{F}(F_1(b), 1) = \bar{F}_1(F_1(b)) = F_1(b') = b''.$$

Así,  $b$  es isotópico a  $b''$ . Por lo tanto la relación de isotopía es una relación de equivalencia. ■

**Definición 1.8.** Sean  $b_1$  y  $b_2$  dos trenzas geométricas de  $n$  cuerdas, definimos el producto  $b_1 b_2$  como el conjunto de puntos  $(x, y, t) \in R^2 \times I$  tales que  $(x, y, 2t) \in b_1$  para  $t \in [0, 1/2]$  y  $(x, y, 2t - 1) \in b_2$  para  $t \in [1/2, 1]$ .

No es difícil ver que  $b_1 b_2$  es una trenza geométrica de  $n$  cuerdas. Un ejemplo del producto de dos trenzas geométricas de tres cuerdas es el siguiente:

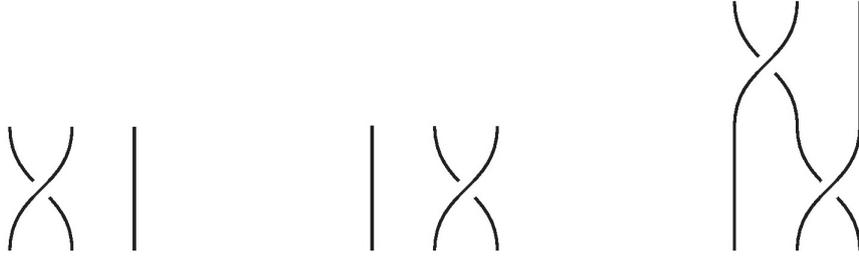


Figura 1.2: Dos trenzadas geométricas y su producto

**Lema 1.9.** Si  $b_1$  y  $b_2$  son isotópicas a las trenzadas geométricas  $b'_1$  y  $b'_2$  respectivamente. Entonces  $b_1 b_2$  es isotópico a  $b'_1 b'_2$ .

*Demostración.* De la primera parte de la hipótesis,  $b_1$  es isotópico a  $b'_1$ , se tiene que existe una aplicación continua  $F : b_1 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  tal que para cada  $s \in I$ ,

$$\begin{aligned} F_s & : b_1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I \\ x & \mapsto F_s(x) = F(x, s) \end{aligned}$$

es un encaje cuya imagen  $F_s(b_1)$  es trenza geométrica, también  $F_1(b_1) = b'_1$ ,  $F_0 = id_{b_1}$  y  $F_s$  mapea todo punto final sobre sí mismo. De la segunda parte de la hipótesis,  $b_2$  es isotópico a  $b'_2$ , se tiene que existe la aplicación continua  $\bar{F} : b_2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  tal que para cada  $s \in I$ ,

$$\begin{aligned} \bar{F}_s & : b_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I \\ x & \mapsto \bar{F}_s(x) = \bar{F}(x, s) \end{aligned}$$

es un encaje cuya imagen  $\bar{F}_s(b_2)$  es trenza geométrica,  $\bar{F}_1(b_2) = b'_2$ ;  $\bar{F}_0 = id_{b_2}$  y  $\bar{F}_s = id_{\partial b_2}$ . Defina

$$\begin{aligned} \alpha & : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I & \beta & : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I \\ (x, y, t) & \mapsto \alpha(x, y, t) = (x, y, \frac{t}{2}) & ; & & (x, y, t) & \mapsto \beta(x, y, t) = (x, y, \frac{t+1}{2}), \end{aligned}$$

dos aplicaciones continuas. Ahora considerando,

$$A = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I / (x, y, 2t) \in b_1; 0 \leq t \leq 1/2\}$$

y

$$B = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I / (x, y, 2t - 1) \in b_1; 1/2 \leq t \leq 1\},$$

claramente  $b_1 b_2 \times I = A \times I \cup B \times I$ . Ahora defina

$$\tilde{F} : b_1 b_2 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times I$$

$$\tilde{F}(x, y, t, s) = \begin{cases} \alpha \circ F_s(x, y, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta \circ \bar{F}_s(x, y, 2t - 1) \circ \bar{F}_{2s-1}^{-1}(y) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que para  $t = 1/2$ ,

$$\alpha \circ F_s(x, y, 1) = \alpha(x, y, 1) = (x, y, 1/2)$$

$$\beta \circ \bar{F}_s(x, y, 0) = \beta(x, y, 0) = (x, y, 1/2).$$

Es inmediato ver que  $\tilde{F}$  es continua. Ahora para cada  $s \in I$ , defina

$$\tilde{F}_s : b_1 b_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$$

$$\bar{x} \mapsto \tilde{F}_s(\bar{x}) = \tilde{F}(\bar{x}, s)$$

**Afirmación:** Para cada  $s \in I$ ,  $\tilde{F}_s$  es un encaje.

En efecto, sea  $s \in I$  fijo y arbitrario. Se mostrará que  $\tilde{F}_s : b_1 b_2 \rightarrow \tilde{F}_s(b_1 b_2)$  es un homeomorfismo.

- $\tilde{F}_s$  es biyectiva

Es suficiente probar la inyectividad pues sabemos que toda función es biyectiva sobre su imagen. Sean  $(x, y, t)$  y  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in b_1 b_2$ .

- Si  $0 \leq t \leq 1/2$  y  $0 \leq \bar{t} \leq 1/2$ .

Si  $\tilde{F}_s(x, y, t) = \tilde{F}_s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ . Entonces,  $\alpha(F_s(x, y, 2t)) = \alpha(F_s(\bar{x}, \bar{y}, 2\bar{t}))$ . Como  $\alpha$  es inyectiva, entonces  $F_s(x, y, 2t) = F_s(\bar{x}, \bar{y}, 2\bar{t})$  y desde que  $F_s$  es un homeomorfismo se tiene  $(x, y, t) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ .

- Si  $1/2 \leq t \leq 1$  y  $1/2 \leq \bar{t} \leq 1$ .

El procedimiento es análogo a lo anterior.

- Si  $t = 0$  y  $1/2 \leq \bar{t} \leq 1$ .

Se tiene  $(x, y, 0) \neq (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ . Si suponemos que  $\tilde{F}_s(x, y, 0) = \tilde{F}_s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ . Entonces,  $\alpha(F_s(x, y, 0)) = \beta(\bar{F}_s(\bar{x}, \bar{y}, 2\bar{t} - 1))$ . Como  $\bar{F}_s(\bar{x}, \bar{y}, 2\bar{t} - 1) \in \mathbb{R}^2 \times I$ , entonces identificamos  $\bar{F}_s(\bar{x}, \bar{y}, 2\bar{t} - 1) = (x', y', z')$ . Así,  $\alpha(x, y, 0) = \beta(x', y', z')$ , luego  $(x, y, 0) = (x', y', \frac{z'+1}{2})$  de donde se tiene  $z' = -1$  y esto es una contradicción pues la verdad  $0 \leq z' \leq 1$ . Por tanto,  $\tilde{F}_s(x, y, 0) \neq \tilde{F}_s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ .

- Si  $0 \leq t \leq 1/2$  y  $\bar{t} = 1$ .

Se procede como el caso anterior.

- Si  $0 < t < 1/2$  y  $1/2 < \bar{t} < 1$ .

Claramente  $(x, y, t) \neq (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ . Si suponemos que  $\tilde{F}_s(x, y, t) = \tilde{F}_s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ . Entonces,  $\alpha(F_s(x, y, 2t)) = \beta(F_s(\bar{x}, \bar{y}, 2\bar{t} - 1))$ . Haciendo la identificación  $F_s(x, y, 2t) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  y  $F_s(\bar{x}, \bar{y}, 2\bar{t} - 1) = (x', y', z')$  se tiene  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{\tilde{z}}{2}) = (x', y', \frac{z'+1}{2})$  de donde se obtiene,  $\tilde{z} = z' + 1$ .

Por otro lado, como  $2t \neq 0, 1$  y  $2\bar{t} - 1 \neq 0, 1$ , note que  $\tilde{z}$  y  $z'$  no son coordenadas de un punto frontera. Así,  $z' \in \langle 0, 1 \rangle$  de donde resulta  $1 < \tilde{z} < 2$  y esto es una contradicción. Así,  $\tilde{F}_s(x, y, t) \neq \tilde{F}_s(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ . Por tanto se concluye que  $\tilde{F}_s$  es inyectiva.

- $\tilde{F}_s$  es continua.

Esto es verdad desde que  $\tilde{F}$  es continua

- $\tilde{F}_s^{-1}$  es continua

Haciendo  $y = (y_1, y_2, y_3) = \tilde{F}_s(x, y, t)$ .

- Si  $0 \leq t \leq 1/2$ .

$$(y_1, y_2, y_3) = \alpha \circ F_s \circ f(x, y, t).$$

Luego,

$$\alpha^{-1}(y_1, y_2, y_3) = F_s \circ f(x, y, t) = F_s(f(x, y, t)) \in F_s(b_1),$$

de esto se tiene,

$$f^{-1} \circ F_s^{-1} \circ \alpha^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (x, y, t).$$

Ahora como  $\alpha^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, 2y_3) \in F_s(b_1) \subset \mathbb{R}^2 \times I$ , resulta  $0 \leq y_3 \leq 1/2$ .

- Si  $1/2 \leq t \leq 1$ .

$$(y_1, y_2, y_3) = \beta \circ \bar{F}_s \circ g(x, y, t).$$

Luego,

$$\beta^{-1}(y_1, y_2, y_3) = \bar{F}_s \circ g(x, y, t) \in \bar{F}_s(b_2),$$

Así,

$$g^{-1} \circ \bar{F}_s^{-1} \circ \beta^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (x, y, t).$$

Por otro lado, como  $\beta^{-1}(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, 2y_3 - 1) \in \bar{F}_s(b_2) \subset \mathbb{R}^2 \times I$ , resulta  $1/2 \leq y_3 \leq 1$ .

Se define,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_s^{-1} : \tilde{F}_s(b_1 b_2) &\longrightarrow b_1 b_2 \\ \tilde{F}_s^{-1}(y_1, y_2, y_3) &= \begin{cases} f^{-1} \circ F_s^{-1} \circ \alpha^{-1}(y_1, y_2, y_3) & \text{si } 0 \leq y_3 \leq 1/2 \\ g^{-1} \circ \bar{F}_s^{-1} \circ \beta^{-1}(y_1, y_2, y_3) & \text{si } 1/2 \leq y_3 \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Se aprecia de inmediato que ésta función así definida es continua. Por lo tanto  $\tilde{F}_s^{-1}$  es un encaje.

En lo que sigue, mediante cálculos se mostrará que  $\tilde{F}_s(b_1 b_2)$  es trenza geométrica.

$$\begin{aligned} \tilde{F}_s(b_1 b_2) &= \{\tilde{F}_s^{-1}(x, y, t)/(x, y, t) \in b_1 b_2\} \\ &= \{\tilde{F}_s^{-1}(x, y, t)/(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I; 0 \leq t \leq 1/2 \wedge (x, y, 2t) \in b_1\} \cup \\ &\quad \{\tilde{F}_s^{-1}(x, y, t)/(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I; 1/2 \leq t \leq 1 \wedge (x, y, 2t - 1) \in b_2\} \\ &= \{\alpha(F_s(x, y, 2t)) \in \mathbb{R}^2 \times I/(x, y, 2t) \in b_1\} \cup \\ &\quad \{\beta(\bar{F}_s(x, y, 2t - 1)) \in \mathbb{R}^2 \times I/(x, y, 2t - 1) \in b_2\} \\ &= \{\alpha(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})/(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in F_s(b_1)\} \cup \{\beta(x', y', z')/(x', y', z') \in \bar{F}_s(b_2)\} \\ &= \{\alpha(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}/2)/(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in F_s(b_1)\} \cup \{\beta(x', y', (z' + 1)/2)/(x', y', z') \in \bar{F}_s(b_2)\} \\ &= \{(\bar{x}, \bar{y}, s) \in \mathbb{R}^2 \times I/(\bar{x}, \bar{y}, 2s) \in F_s(b_1); 0 \leq s \leq 1/2\} \cup \\ &\quad \{(x', y', s') \in \mathbb{R}^2 \times I/(x', y', 2s' - 1) \in \bar{F}_s(b_2); 1/2 \leq s' \leq 1\} \\ &= F_s(b_1)\bar{F}_s(b_2). \end{aligned}$$

Como por hipótesis  $F_s(b_1)$  y  $\bar{F}_s(b_2)$  son trenzas geométricas. Entonces,  $\tilde{F}_s(b_1 b_2)$  es también trenza geométrica. Mediante cálculos similares no es difícil mostrar que  $\tilde{F}_1(b_1 b_2) = b'_1 b'_2$ ,  $\tilde{F}_0 = Id_{b_1 b_2}$  y  $\tilde{F}_s = id_{\partial b_1 b_2}$ , esto es,  $\tilde{F}_s$  mapea todo punto frontera de  $b_1 b_2$  sobre sí mismo. Así se concluye que  $b_1 b_2$  es isotópico a  $b'_1 b'_2$ . ■

### Observación:

- Teniendo en vista el Lema 1.7, si  $b$  es una trenza geométrica, se denota la  $\sim$ -clase de equivalencia módulo isotopía de  $b$  por  $[b]$  y será llamada trenza de  $n$  cuerdas.
- Denotamos por  $\mathcal{B}_n$  al conjunto de todas las trenzas de  $n$  cuerdas.
- Teniendo en vista el Lema 1.9 se dice que la correspondencia  $(b, b') \mapsto bb'$  define una multiplicación sobre el conjunto de trenzas de  $n$  cuerdas y éste producto está bien definido en  $\mathcal{B}_n$ .

**Definición 1.10.** Definimos la operación multiplicación “ $\cdot$ ” sobre el conjunto de trenzas por:

$$\begin{aligned} \cdot &: \mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_n \\ ([b], [b']) &\mapsto [b] \cdot [b'] = [bb']. \end{aligned}$$

Más adelante se mostrará que el conjunto de trenzas de  $n$  cuerdas,  $\mathcal{B}_n$ , con ésta operación multiplicación es un grupo canónicamente isomorfo al grupo de trenzas  $B_n$ , éste último viene a ser justamente la parte principal de este capítulo. Para ello, primero necesitaremos de algunos lemas y definiciones previas.

### 1.3 Diagramas de trenzas

Describir una trenza muchas veces puede llegar a ser complicado y confuso, especialmente cuando tenemos una trenza con gran número de cuerdas, ó con un gran número de cruces. Es por ello que en esta sección se define una herramienta que nos facilita de una manera sencilla la visualización de una trenza geométrica a travez de diagramas planos, que conserve la información suficiente que nos permita recuperar la trenza. Además, presentaremos un teorema tipo Reidemeister para diagramas de trenzas el cual simplifica el problema de determinar la isotopía de dos trenzas geométricas y permite probar que  $B_n$  es un grupo isomorfo a  $\mathcal{B}_n$ .

**Definición 1.11.** Un diagrama de trenza de  $n$  hebras es un conjunto  $D \subset \mathbb{R} \times I$  formado por la unión de  $n$  arcos llamados hebras de  $D$  tales que:

- La proyección  $\pi : \mathbb{R} \times I \rightarrow I$  mapea cada hebra homeomórficamente a  $I$ .
- Cada punto de  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1\}$  es un punto extremo de una sola hebra.
- Cada punto de  $D$  pertenece a lo más a dos hebras. En cada intersección de dos hebras, estas se encuentran transversalmente, donde una de las hebras queda distinguida como: que pasa “por encima” y la otra pasa “por debajo”.

**Observación:**

- La segunda condición dice que cada punto de  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0\}$  es unido con un único punto de  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{1\}$  igual que como lo hacen las trenzas geométricas.
- Un punto de intersección de dos hebras en  $D$  es llamada un punto doble o un punto cruce de  $D$ .

- La tercera condición quiere decir que en cada cruce, hay un vecindad donde todo se ve como el conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ . También gracias a la compactibilidad de las hebras, no es difícil ver que el número de cruces de  $D$  es finito.

Un ejemplo de un diagrama de trenza es presentado en la Figura 1.3. Cabe notar que éste gráfico es simplemente la proyección de la trenza geométrica de la Figura 1.1 al plano  $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$ .

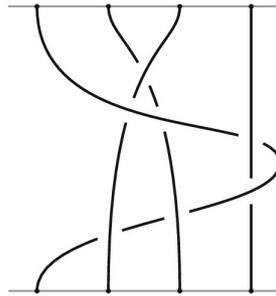


Figura 1.3: Un diagrama de trenza de cuatro hebras

Gráficamente las hebras que van por debajo en un punto cruce es representado por una línea rota cerca del cruce y las hebras que van por arriba en un punto cruce es representado por una línea continua como se aprecia en la Figura 1.4.

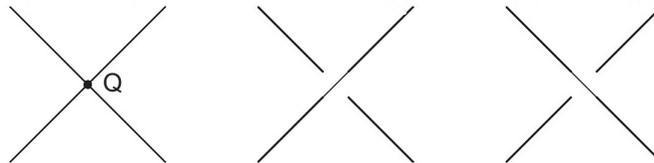


Figura 1.4: Un punto doble y las dos posibles modificaciones

Los diagramas de trenzas fácilmente dan lugar a trenzas geométricas, para esto sólo basta considerar la identificación obvia  $\mathbb{R} \times I = \mathbb{R} \times \{0\} \times I$ . Una vez identificado  $D \subset \mathbb{R} \times \{0\} \times I$ , tomamos una pequeña vecindad de todo cruce en  $D$  y ligeramente empujamos la hebra que está por debajo de la otra dentro de  $\mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle \times I$ , esto es, incrementando la segunda coordenada mientras que la primera y tercera coordenada quedan intactas. Éste procedimiento transforma  $D$  en una trenza geométrica de  $n$  cuerdas bien definida, digamos que éste sea  $b$ , cuya clase de equivalencia módulo isotopía será denotada por  $\beta(D) = [b]$ . Luego,  $\beta(D)$  se conoce como la Trenza presentada por  $D$ . Claramente de la construcción se tiene que la proyección al plano  $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$  de  $\beta(D)$  es  $D$ . No es difícil ver que a toda trenza  $\beta$  se le puede asociar un diagrama de trenza, para esto sólo basta tomar una trenza geométrica representante tal que la proyección a

$\mathbb{R} \times \{0\} \times I$  posea a lo más puntos dobles (puntos con dos pre imágenes) y entonces la proyección misma será el diagrama buscado, por supuesto este diagrama presenta a  $\beta$ .

**Definición 1.12.** Dos diagramas de trenzas de  $n$  hebras  $D$  y  $D'$  son Isotópicos si existe una función continua  $F : D \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I$  tal que para cada  $s \in I$ , el conjunto  $D_s = F(D, s) \subset \mathbb{R} \times I$  es un diagrama de trenzas de  $n$  hebras. Además,  $D_0 = D$ ,  $D_1 = D'$  y  $F$  mapea los cruces de  $D$  en los cruces de  $D'$  preservando el dato que pasa por encima o por debajo, mateniendo también la cantidad de cruces.

La familia de diagramas de trenzas  $\{F_s(D) = D_s\}_{s \in I}$  se llama isotopía entre  $D$  y  $D'$ . Un ejemplo de una isotopía es dada en la Figura 1.5.

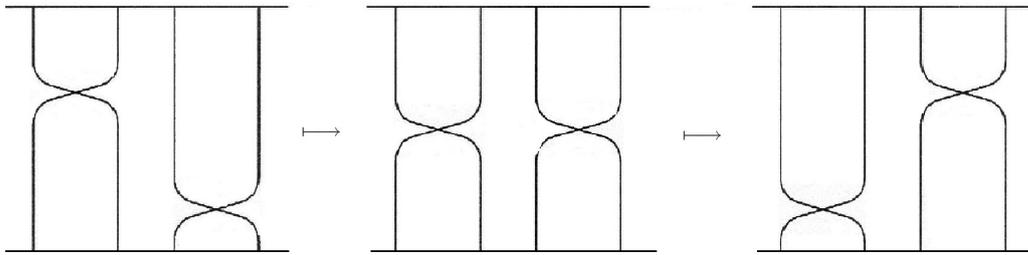


Figura 1.5: Una isotopía de diagrama de trenza

**Lema 1.13.** Si  $D$  es isotópico a  $D'$ . Entonces  $\beta(D) = \beta(D')$ .

**Demostración.** Se tiene que existe una aplicación continua  $F : D \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I$ , tal que para cada  $s \in I$ ,  $D_s = F(D, s) \subset \mathbb{R} \times I$  es un diagrama de trenza,  $D_0 = D$ ,  $D_1 = D'$  y  $F$  mapea los cruces de  $D$  en los cruces de  $D'$ . Como todo diagrama puede presentar una trenza, entonces digamos que los diagramas  $D$  y  $D'$  presentan a las trenzas  $\beta(D)$  y  $\beta'(D')$  cuyos representantes de éstas trenzas son las trenzas geométricas  $b$  y  $b'$  respectivamente. Digamos que para cada  $s \in I$ , el diagrama  $D_s$  presenta a la trenza más simple, con representante  $b_s$ , esto quiere decir que en toda vecindad del punto cruce las segundas coordenadas de los puntos de  $b_s$  satisface  $|x - y| \leq 1/n$ , para  $n$  suficientemente grande. Note aquí que  $b_0 = b$  y  $b_1 = b'$ .

Nuestro objetivo se reduce a probar la isotopía entre  $b$  y  $b'$ , pues con ello se concluye la igualdad de las clases de equivalencia módulo isotopía de  $b$  y  $b'$  y esto es  $\beta(D) = \beta(D')$ .

**Afirmación:**  $b$  es isotópico a  $b'$ .

En efecto, considero la aplicación  $\bar{F} : b \times I \rightarrow b_s$ , dada por  $\bar{F}(x, y, t, s) = (x_s, y_s, t_s)$  tal que  $(x_s, y_s) = F(x, t, s)$ .

- $\bar{F}$  es continua

En efecto, sea  $(a, b, c, s) \in b \times I$ , punto fijo y arbitrario. Cabe notar que el punto  $(a, c, s) \in D \times I$ . Sea  $\varepsilon > 0$ , por la continuidad de  $F$  en el punto  $(a, c, s)$  se tiene que existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{si } (x, t, w) \in D \times I \quad \wedge \quad \|(x, t, w) - (a, c, s)\| < \delta \implies \|F(x, t, w) - F(a, c, s)\| < \varepsilon/2. \quad (1.1)$$

Ahora si  $(x, y, t, w) \in b \times I$  y  $\|(x, y, t, w) - (a, b, c, s)\| < \delta/2$ . Entonces

$$\|(x, t, w) - (a, c, s)\| < \delta/2$$

Luego, de (1.1) se tiene  $\|F(x, t, w) - F(a, c, s)\| < \varepsilon/2$ .

Por otro lado, por como esta definido  $\bar{F}$

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, y, t, w) &= (x_w, y_w, t_w); \quad \text{donde } (x_w, t_w) = F(x, t, w) \\ \bar{F}(a, b, c, s) &= (a_s, b_s, c_s); \quad \text{donde } (a_s, c_s) = F(a, c, s). \end{aligned}$$

Así,

$$\|\bar{F}(x, y, t, w) - \bar{F}(a, b, c, s)\| = |x_w - a_s| + |y_w - b_s| + |t_w - c_s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Haciendo  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\|\bar{F}(x, y, t, w) - \bar{F}(a, b, c, s)\| < \varepsilon.$$

Por tanto  $\bar{F}$  es continua. Ahora para cada  $s \in I$ , sea

$$\begin{aligned} \bar{F}_s : \quad b &\rightarrow b_s \subset \mathbb{R}^2 \times I \\ (x, y, t) &\mapsto \bar{F}_s(x, y, t) = (x_s, y_s, t_s) \end{aligned}$$

- $\bar{F}_s$  es un encaje

En efecto, sea  $s \in I$  fijo arbitrario, probaremos que la aplicación  $\bar{F}_s$  es un homeomorfismo. Es suficiente probar la inyectividad, para ello procedemos de la forma siguiente:

- Dados  $(x, y, t), (x, \bar{y}, t) \in b$  puntos con el mismo punto cruce. Es claro que  $(x, y, t) \neq (x, \bar{y}, t)$ . Como  $(x, t)$  es punto doble (punto con dos pre imágenes) en  $D$ , entonces desde que  $F$  preserva puntos dobles se tiene que  $(x_s, t_s) = F(x, t, s) \in D_s$  es también punto doble en  $D_s$ . Luego,

$$\bar{F}_s(x, y, t) = (x_s, y_s, t_s) \neq (x_s, \bar{y}_s, t_s) = \bar{F}_s(x, \bar{y}, t).$$

• Sean  $(x, y, t), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}) \in b$  tal que  $\bar{F}(x, y, t) = \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ . Entonces,  $(x_s, y_s, t_s) = (\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{t}_s)$  donde  $(x_s, t_s) = F(x, t, s)$  y  $(\bar{x}_s, \bar{t}_s) = F(\bar{x}, \bar{t}, s)$ . Note que los puntos del diagrama  $D_s$ ,  $(x_s, t_s)$  y  $(\bar{x}_s, \bar{t}_s)$  son iguales pero no son puntos dobles (pues si fuesen puntos dobles entonces  $(x_s, y_s, t_s) \neq (\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{t}_s)$  y eso no está aconteciendo). Por la preservación de  $F$  respecto a los puntos dobles, se tiene que  $(x, t)$  y  $(\bar{x}, \bar{t})$  no son puntos dobles. Como  $F(x, t, s) = F(\bar{x}, \bar{t}, s)$ , entonces  $(x, t) = (\bar{x}, \bar{t})$ . Luego,  $(x, y, t) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ . Así,  $\bar{F}_s$  es inyectiva. Por tanto  $\bar{F}_s : b \rightarrow \bar{F}_s(b)$  es biyección. Ahora defina

$$\begin{aligned} \bar{F}_s^{-1} : \quad \bar{F}_s(b) &\rightarrow b \\ (x_s, y_s, t_s) &\mapsto (x, y, t), \end{aligned}$$

donde  $F(x, t, s) = (x_s, t_s)$ . Procediendo de forma análoga como se mostró la continuidad de  $\bar{F}$ , se tiene  $\bar{F}_s^{-1}$  es continua. Por tanto  $\bar{F}_s^{-1}$  es un encaje.

Claramente se puede ver que  $\bar{F}_s(b) = b_s$  es trenza geométrica,  $\bar{F}_s = id_{\partial b}$  y  $\bar{F}_1(b) = b_1 = b'$ .

Resta probar que  $\bar{F}_0 = id_b : b \rightarrow b$ . Para ello, sea  $(x, y, t) \in b$ . Note que  $(x, t) \in D$  y desde que  $F_0(D) = D$  se tiene

$$\bar{F}_0(x, y, t) = (x_0, y_0, t_0) \in b_0 = b, \text{ donde } (x_0, y_0) = F(x, t, 0) = F_0(x, t) = (x, t).$$

Así,  $x_0 = x$  y  $t_0 = t$ .

– Si  $(x, t) \in D$  no es punto doble.

Por la preservación de  $F$  se tiene también que  $(x_0, t_0)$  no es punto doble. Entonces  $(x, y, t) = (x_0, y_0, t_0)$  lo cual implica

$$\bar{F}_0(x, y, t) = (x, y, t).$$

– Si  $(x, t) \in D$  es punto doble.

Digamos que la segunda coordenada del punto  $(x, y, t)$  está mas cerca del lector que la segunda coordenada del punto  $(x_0, y_0, t_0)$ . En este caso note que el punto diagrama  $(x, t)$  vá por delante del punto  $(x_0, y_0)$ . Por la biyección

de  $\bar{F}_0$  se tiene,

$$\bar{F}_0(x, y, t) = (x, y, t) \quad \wedge \quad \bar{F}_0(x_0, y_0, t_0) = (x_0, y_0, t_0)$$

ó

$$\bar{F}_0(x, y, t) = (x_0, y_0, t_0) \quad \wedge \quad \bar{F}_0(x_0, y_0, t_0) = (x, y, t).$$

Si fuese verdad la segunda expresión, entonces por como está definido  $\bar{F}_0$  se tiene,  $(x_0, t_0) = F(x, t, 0)$  y  $(x, t) = F(x_0, t_0, 0)$ . Ahora como el punto  $(x, t)$  vá por encima de  $(x_0, t_0)$ . Entonces por la preservación de  $F$ , el punto  $F(x, t, 0) = (x_0, t_0)$  vá por encima de  $F(x_0, t_0, 0) = (x, t)$  y esto es una contradicción. Por tanto  $\bar{F}_0(x, y, t) = (x, y, t)$ .

Con todo los cálculos previos se concluye que  $b$  es isotópico a  $b'$ . ■

Por último, así como se presentó el producto de trenzas geométricas, también podemos presentar el producto de diagramas: Sean  $D_1$  y  $D_2$  dos diagramas de trenzas, su producto  $D_1 D_2$  se obtiene juntando las hebras de  $D_1$  y  $D_2$  de manera de tener  $D_1$  seguido de  $D_2$ . Claramente, si  $D_1$  presenta la trenza  $\beta_1$  y  $D_2$  presenta la trenza  $\beta_2$ , entonces  $D_1 D_2$  presenta el producto  $\beta_1 \beta_2$ .

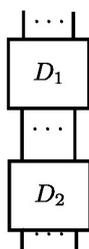


Figura 1.6: Producto de diagrama de trenza

### 1.3.1 Movimientos Reidemeister para diagramas de trenzas

En la sección anterior se mostró que diagramas isotópicos presentan trenzas iguales. La pregunta que uno se podría formular ahora es: si tenemos dos trenzas geométricas isotópicas ¿Cómo están relacionados sus diagramas? El teorema que se presentará líneas abajo, juntamente con algunas definiciones previas resuelve ésta interrogante.

Son llamados movimientos de Reidemeister a las transformaciones de los diagramas de trenzas  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  mostradas en Figura 1.7 y Figura 1.8. Así como también a las transformaciones inversas  $\Omega_2^{-1}$  y  $\Omega_3^{-1}$ .

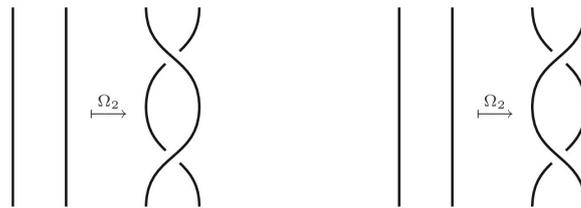


Figura 1.7: El movimiento de Reidemeister  $\Omega_2$

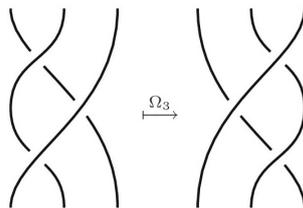


Figura 1.8: El movimiento de Reidemeister  $\Omega_3$

Al igual que con los diagramas de cadenas, los movimientos de Reidemeister modifican una porción del diagrama en un disco dentro de  $\mathbb{R} \times I$ , dejando la parte restante del diagrama inalterado. El movimiento  $\Omega_2^{-1}$  involucra dos hebras y crea dos cruces adicionales y el movimiento  $\Omega_3^{-1}$  involucra tres hebras preservando el número de cruces. Todas éstas transformaciones de diagrama de trenza preservan las trenzas correspondientes hasta isotopía.

**Definición 1.14.** *Dos diagramas de trenzas  $D$  y  $D'$  son  $R$ -equivalentes si  $D$  puede ser transformado en  $D'$  por una sucesión finita de isotopías y movimientos de Reidemeister  $\Omega_2^{\pm 1}$ ,  $\Omega_3^{\pm 1}$ .*

**Teorema 1.15.** *Dos diagramas de trenzas presentan trenzas geométricas isotópicas sí y solamente sí, sus diagramas son  $R$ -equivalentes.*

**Demostración.**

**Paso 1:** Considere una trenza geométrica  $b$  de  $n$  cuerdas. Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , denote a la  $i$ -cuerda de  $b$ , esto es, la cuerda que parte de  $(i, 0, 0)$  como  $b_i$ . Cada plano  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  con  $t \in I$  intersecta a  $b_i$  en un sólo punto y éste será denotado por  $b_i(t)$ .

Sea  $\rho$  la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^3$ . Dado un número real  $\varepsilon > 0$ , denotamos por  $\mathcal{C}_{b_i, \varepsilon}$  a la  $\varepsilon$ -vecindad cilíndrica de  $b_i$  definida como sigue

$$\mathcal{C}_{b_i, \varepsilon} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times I / \rho(x, t, b_i(t)) < \varepsilon\}.$$

Esta vecindad intersecta a cada plano  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  a lo largo del disco abierto de radio  $\varepsilon$  centrado en  $b_i(t)$ . Con lo anterior, procedemos a escoger un valor positivo tal que permita que todas las vecindades cilíndricas de las cuerdas sean disjuntas.

Para distintos  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  la función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$  dada por  $f(t) = \rho(b_i(t), b_j(t))$  es continua, con dominio compacto y valores positivos. Note aquí que la función siempre alcanza su valor mínimo, por ende fijamos

$$|b| = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i < j \leq n} \min_{t \in I} \rho(b_i(t), b_j(t)) > 0.$$

**Afirmación:** Las  $|b|$ -vecindades cilíndricas de las cuerdas de  $b$  son dos a dos disjuntas.

En efecto, para distintos  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  suponga que  $\mathcal{C}_{b_i, |b|} \cap \mathcal{C}_{b_j, |b|} \neq \emptyset$ .

Entonces, existe  $x \in \mathcal{C}_{b_i, |b|} \cap \mathcal{C}_{b_j, |b|}$ . Luego, si  $x \in \mathbb{R}^2 \times \{t_0\}$  con  $t_0 \in I$ , se tiene  $\rho(x, b_i(t_0)) < |b|$  y  $\rho(x, b_j(t_0)) < |b|$ . Así,

$$\min_{t \in I} \rho(b_i(t), b_j(t)) \leq \rho(b_i(t_0), b_j(t_0)) \leq \rho(b_i(t_0), x) + \rho(x, b_j(t_0)) < 2|b|. \quad (1.2)$$

Luego,

$$2|b| = \min_{1 \leq i < j \leq n} \min_{t \in I} \rho(b_i(t), b_j(t)) < 2|b|,$$

esto es una contradicción. Por tanto los cilindros  $\mathcal{C}_{b_i, |b|}$  y  $\mathcal{C}_{b_j, |b|}$  son disjuntos para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . ■

Ahora para cualquier par de trenzas geométricas  $b, b'$  de  $n$  cuerdas y cualquier  $i = 1, 2, \dots, n$ , considere la función  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  definida por  $f'(t) = \rho(b_i(t), b'_i(t))$  al igual que antes, ésta función es continua, tiene dominio compacto y es garantizada la existencia de su valor máximo. Para fines prácticos denotemos por  $\mathfrak{B}_n$  al conjunto de todas las trenzas geométricas de  $n$  cuerdas. Ahora Defina

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &: \mathfrak{B}_n \times \mathfrak{B}_n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (b, b') &\mapsto \tilde{\rho}(b, b') = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t \in I} \rho(b_i(t), b'_i(t)).\end{aligned}$$

Desde que la función  $\rho$  es una métrica es inmediato ver que  $\tilde{\rho}$  satisface los axiomas de métrica. En efecto,

(1) Sean  $b, b' \in \mathfrak{B}_n$ .

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(b, b') &= \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t \in I} \rho(b_i(t), b'_i(t)) = 0 \\ \iff &\rho(b_i(t), b'_i(t)) = 0, \quad \forall t \in I; \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \iff &b_i(t) = b'_i(t), \quad \forall t \in I; i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \iff &b = b'.\end{aligned}$$

(2) Sean  $b, b' \in \mathfrak{B}_n$ .

$$\tilde{\rho}(b, b') = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t \in I} \rho(b_i(t), b'_i(t)) = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t \in I} \rho(b'_i(t), b_i(t)) = \tilde{\rho}(b', b)$$

(3) Sean  $b, b', b'' \in \mathfrak{B}_n$

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(b, b'') &= \max_{1 \leq i \leq n} \max_{t \in I} \rho(b_i(t), b''_i(t)) = \rho(b_k(t_0), b''_k(t_0)), \quad \text{para algún } k, t_0 \in I \\ &\leq \rho(b_k(t_0), b'_k(t_0)) + \rho(b'_k(t_0), b''_k(t_0)) \\ &\leq \tilde{\rho}(b, b') + \tilde{\rho}(b', b'').\end{aligned}$$

Así,  $\tilde{\rho}$  es una métrica en el conjunto de las trenzas geométricas que adicionalmente satisface

$$|b| \leq |b'| + \tilde{\rho}(b, b') \tag{1.3}$$

En efecto, suponiendo que  $|b'| = \frac{1}{2}\rho(b'_i(t), b'_j(t))$  para algún  $t \in I$  y distintos  $i, j = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned}|b| &= \frac{1}{2}\rho(b_i(t), b_j(t)) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\rho(b_i(t), b'_i(t)) + \rho(b'_i(t), b'_j(t)) + \rho(b'_j(t), b_j(t))\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\tilde{\rho}(b, b') + 2|b'| + \tilde{\rho}(b', b)\right) \\ &= |b'| + \tilde{\rho}(b, b').\end{aligned}$$

**Paso 2:** Una trenza geométrica es poligonal si sus cuerdas se conforman de segmentos lineales consecutivos.

Toda trenza geométrica  $b$  de  $n$  cuerdas puede ser aproximada por una trenza poligonal en el sentido que para todo  $\varepsilon > 0$  existe una trenza poligonal  $b_P$  tal que  $\tilde{\rho}(b, b_P) < \varepsilon$ . La  $i$ -cuerda de esta trenza poligonal es formada tomando un entero  $N \geq 2$  y uniendo los puntos consecutivos de la forma  $b_i\left(\frac{k}{N}\right)$  con  $k = 0, 1, \dots, N$ . Gráficamente esto se puede ver como una línea quebrada denotada por  $b_i^N$  con puntos extremos  $b_i^N(0) = b_i(0) = (i, 0, 0, 0)$  y  $b_i^N(1) = b_i(1)$ . Para  $N$  suficientemente grande esta línea quebrada está en la  $|b|$ -vecindad cilíndrica de  $b_i$ . En efecto,  $b_i^N, b_i$  son vistas como aplicaciones continuas y más aún uniformemente continuas por estar definidas en un conjunto compacto  $I$ . Luego, para  $|b|/2$ ,

$$\exists \delta_1 > 0 \text{ tal que si } t, \bar{t} \in I \wedge |t - \bar{t}| < \delta_1 \implies \rho(b_i^N(t), b_i^N(\bar{t})) < |b|/2 \quad (1.4)$$

$$\exists \delta_2 > 0 \text{ tal que si } t, \bar{t} \in I \wedge |t - \bar{t}| < \delta_2 \implies \rho(b_i(t), b_i(\bar{t})) < |b|/2. \quad (1.5)$$

Considerando  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  y por la propiedad arquimediana, existe  $N_0 > 0$  tal que  $\frac{1}{N_0} < \delta$ . Para  $N$  suficientemente grande,  $N > N_0$ , se tiene  $\frac{1}{N} < \delta$ . Luego, para  $t \in \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right]$  con  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  fijo arbitrario, satisface

$$\left|t - \frac{k}{N}\right| \leq \frac{1}{N} < \delta.$$

Así, de (1.4) y (1.5) se obtiene

$$\rho(b_i^N(t), b_i^N(k/N)) < |b|/2 \quad \wedge \quad \rho(b_i(t), b_i(k/N)) < |b|/2.$$

Luego,

$$\rho(b_i^N(t), b_i(t)) \leq \rho(b_i^N(t), b_i^N\left(\frac{k}{N}\right)) + \rho(b_i^N\left(\frac{k}{N}\right), b_i\left(\frac{k}{N}\right)) + \rho(b_i\left(\frac{k}{N}\right), b_i(t)) < \frac{|b|}{2} + 0 + \frac{|b|}{2} = |b|.$$

Ahora como  $k$  fue tomado arbitrariamente, entonces para todo  $t \in I$  se tiene

$$\rho(b_i^N(t), b_i(t)) < |b|.$$

Con lo cual se quiere decir que  $b_i^N$  pertenece a la  $|b|$ -vecindad cilíndrica de  $b_i$ . Luego, podemos concluir que para  $N$  suficientemente grande las líneas quebradas  $b_1^N, b_2^N, \dots, b_n^N$  son disjuntas y forman una trenza poligonal,  $b^N$ , aproximada a  $b$ .

**Observación 1.16.** Procediendo de manera casi similar al análisis anterior se puede mostrar

que para cualquier  $\varepsilon > 0$  y  $N$  suficientemente grande,

$$\tilde{\rho}(b, b^N) < \varepsilon. \tag{1.6}$$

La Figura 1.9 muestra una aproximación poligonal de la trenza en Figura 1.1.

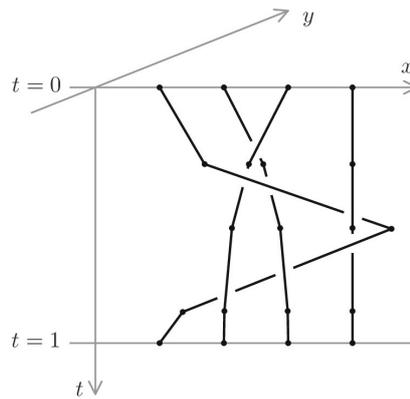


Figura 1.9: Trenza geométrica poligonal

Con la introducción de las trenzas geométricas poligonales, la demostración se basará en analizar qué sucede con las trenzas poligonales al aplicarse isotopías. Para esto se reformulará la noción de isotopía de trenzas en el marco poligonal, aquí se introduce los llamados  $\Delta$ -movimientos para trenzas poligonales.

Sean  $A, B, C$  tres puntos en  $\mathbb{R}^2 \times I$  tal que la tercera coordenada de  $A$  sea estrictamente menor a la de  $B$  y la de  $B$  estrictamente menor a la de  $C$ . El movimiento  $\Delta(ABC)$  se aplicará a una trenza poligonal  $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$  cuando esta intersecte al triángulo  $ABC$  precisamente en el segmento  $AC$ . Así, el movimiento  $\Delta(ABC)$  reemplaza  $AC$  por  $AB \cup BC$  manteniendo el resto de la trenza intacta; ver Figura 1.10.

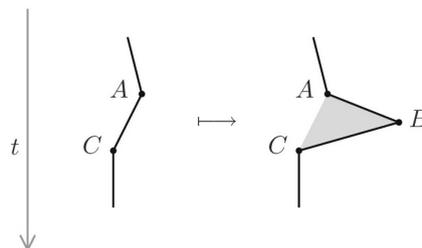


Figura 1.10: Un  $\Delta$ -movimiento

El movimiento inverso  $(\Delta(ABC))^{-1}$  se aplica a la trenza poligonal cuando esta intersecciona al triángulo  $ABC$  en  $AB \cup BC$ . Este movimiento reemplaza los segmentos  $AB \cup BC$  por  $AC$ . Los movimientos  $\Delta(ABC)$  y  $(\Delta(ABC))^{-1}$  son llamados  $\Delta$ -movimientos.

No es difícil notar que dos trenzas poligonales relacionadas por una secuencia de  $\Delta$ -movimientos son isotópicas. Lo recíproco también se puede obtener y se muestra a continuación.

**Afirmación 1.17.** *Si dos trenzas poligonales  $b$  y  $b'$  son isotópicas, entonces  $b'$  puede obtenerse a partir de  $b$  mediante una secuencia finita de  $\Delta$ -movimientos.*

En efecto, primeramente se mostrará que si dos trenzas poligonales  $b, b'$  con los mismos puntos frontera, satisfacen la siguiente desigualdad:  $\tilde{\rho}(b, b') < \frac{|b|}{10}$ . Entonces, existe una sucesión de  $\Delta$ -movimientos que transforma  $b$  en  $b'$ . Veamos esto, empezamos analizando sólo la  $i$ -ésima cuerda de cada trenza; considere la  $i$ -cuerda  $b_i$  formada por  $k \geq 1$  segmentos consecutivos con vértices  $A_0 = (i, 0, 0)$ ,  $A_1, \dots, A_k \in \mathbb{R}^2 \times I$  y denote  $b_i = A_0 A_1 \dots A_k$ . Similarmente asuma que  $b'_i = B_0 B_1 \dots B_L$  con  $L \geq 1$  y  $B_0, B_1, \dots, B_L \in \mathbb{R}^2 \times I$ . Note que  $A_0 = B_0$  y  $A_k = B_L \in \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ . Subdividiendo  $b_i$  y  $b'_i$  en segmentos más pequeños se puede asegurar que  $k = L$  y la longitud euclidiana de los segmentos  $A_j A_{j+1}, B_j B_{j+1}$  es más pequeño que  $|b|/10$  para  $j = 0, 1, \dots, k-1$ . La condición  $\tilde{\rho}(b, b') < |b|/10$  asegura que

$$\tilde{\rho}(A_j, B_j) < \frac{|b|}{10} \quad \forall j = 1, 2, \dots, k \quad (1.7)$$

es decir el segmento horizontal  $A_j B_j$  tiene longitud menor que  $|b|/10$ . Observe que el movimiento  $(\Delta(A_0 A_1 A_2))^{-1}$  transforma  $b_i = A_0 A_1 \dots, A_k$  en la cuerda  $A_0 A_2 A_k = B_0 A_2 \dots A_k$  y también el movimiento  $\Delta(B_0 B_1 A_2)$  transforma este último en la cuerda  $B_0 B_1 A_2 \dots A_k$ . Continuando por inducción y aplicando los movimientos

$$(\Delta(B_j A_{j+1} A_{j+2}))^{-1}, \Delta(B_j B_{j+1} A_{j+2}),$$

para  $j = 0, 1, \dots, k-2$ , se consigue transformar  $b_i$  en  $b'_i$ . Usando (1.7) y la condición  $\tilde{\rho}(b, b') < |b|/10$  se tiene que las cuerdas intermedias y los triángulos  $B_j A_{j+1} A_{j+2}$  y  $B_j B_{j+1} A_{j+2}$  para  $j = 0, 1, \dots, n-2$ , pertenecen a la  $|b|$ -vecindad cilíndrica de  $b_i$ . Por tanto estas cuerdas intermedias son disjuntas respecto a las otras cuerdas de  $b$ . Aplicando estas transformaciones para  $i = 1, 2, \dots, n$  se obtiene una sucesión de  $\Delta$ -movimientos que transforma  $b$  en  $b'$ .

Considere ahora un par de trenzas poligonales isotópicas  $b$  y  $b'$ . Sea  $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  una isotopía transformando  $b = F_0(b)$  en  $b' = F_1(b)$ . Note aquí que las trenzas  $F_s(b)$ ,  $0 < s < 1$  no necesariamente son poligonales. La continuidad de  $F$  implica que la función  $(s, s') \rightarrow \tilde{\rho}(F_s(b), F_{s'}(b))$  es continua. Esta función es igual a cero cuando  $s = s'$  en  $I \times I$ , este factor y la desigualdad (1.3) implican que la función  $I \rightarrow \mathbb{R}$  que envía  $s$

a  $|F_s(b)|$  es continua. Como  $|F_s(b)| > 0$  para todo  $s \in I$ , existe un número  $\varepsilon > 0$  tal que  $|F_s(b)| > \varepsilon$ . La continuidad de la función  $(s, s') \rightarrow \tilde{\rho}(F_s(b), F_{s'}(b))$  implica que para  $N$  suficientemente grande y todo  $k = 1, 2, \dots, N$ ,

$$\left| \tilde{\rho}\left(F_{\frac{k-1}{N}}(b), F_{\frac{k}{N}}(b)\right) - \tilde{\rho}\left(F_{\frac{k}{N}}(b), F_{\frac{k}{N}}(b)\right) \right| < \frac{\varepsilon}{40}.$$

Así,  $\tilde{\rho}\left(F_{\frac{k-1}{N}}(b), F_{\frac{k}{N}}(b)\right) < \frac{\varepsilon}{40}$ . Ahora teniendo en vista la Observación 1.16 para cada  $k$  podemos aproximar cada trenza  $F_{\frac{k}{N}}(b)$  a una trenza poligonal  $p_k$  tal que  $\tilde{\rho}\left(F_{\frac{k}{N}}(b), p_k\right) < \varepsilon/84$ , donde  $p_0 = b$  y  $p_N = b'$  y así por (1.6) se tiene

$$|p_k| \geq \left| F_{\frac{k}{N}}(b) \right| - \tilde{\rho}\left(F_{\frac{k}{N}}(b), p_k\right) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{84} = \frac{83}{84}\varepsilon.$$

También

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(p_{k-1}, p_k) &\leq \tilde{\rho}\left(p_{k-1}, F_{\frac{k-1}{N}}(b)\right) + \tilde{\rho}\left(F_{\frac{k-1}{N}}(b), F_{\frac{k}{N}}(b)\right) + \tilde{\rho}\left(F_{\frac{k}{N}}(b), p_k\right) \\ &< \frac{\varepsilon}{84} + \frac{\varepsilon}{40} + \frac{\varepsilon}{84} < \frac{41}{84} \frac{\varepsilon}{10} < \frac{1}{10}|p_k|, \end{aligned}$$

para todo  $k = 1, \dots, N$ . Luego por el párrafo previo decimos que  $p_{k-1}$  puede ser transformado en  $p_k$  por una secuencia de  $\Delta$ -movimientos. Así, componiendo estas transformaciones  $b = p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_N = b'$  se obtiene la transformación  $b \mapsto b'$  mediante una sucesión de  $\Delta$ -mov y con esto queda finalizada la afirmación. ■

**Paso 3:** Una trenza poligonal es genérica si su proyección a  $\mathbb{R} \times I = \mathbb{R} \times \{0\} \times I$  tiene sólo cruces dobles transversales.

**Observación:** Podemos aproximar cualquier trenza por una trenza poligonal genérica. Aquí presentamos algunas percepciones intuitivas visuales para conseguir la trenza poligonal genérica:

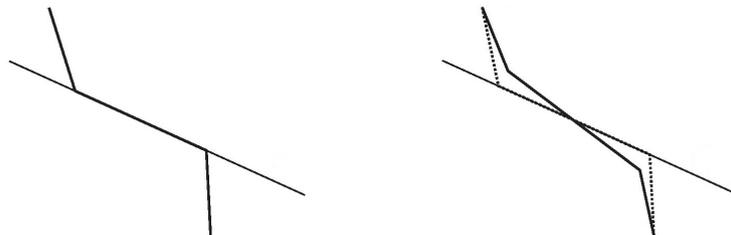


Figura 1.11: Cuando dos líneas paralelas en la trenza se cruzan, podemos inclinar ligeramente de modo que la intersección sea ahora un punto y así dar origen a dos cuerdas de una trenza poligonal genérica.

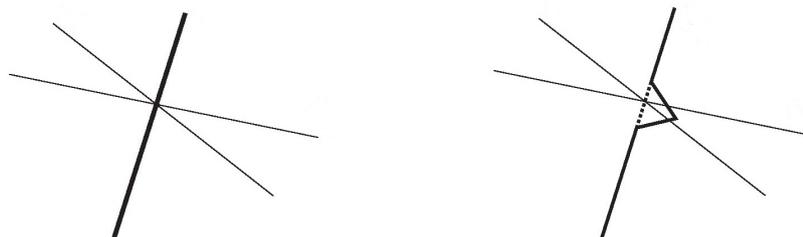


Figura 1.12: Cuando más de dos líneas se encuentran en el punto, podemos desviar todas excepto dos de las líneas alrededor del punto.

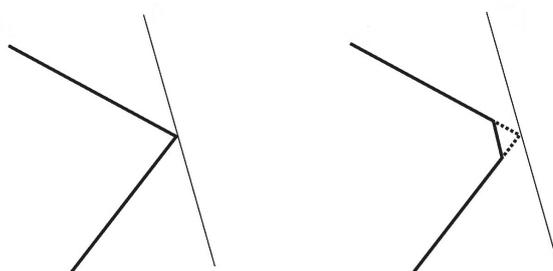


Figura 1.13: Cuando un vértice está sobre un punto de intersección simplemente truncamos el vértice.

**Afirmación 1.18.** *Si las trenzas poligonales genéricas  $b$  y  $b'$  son isotópicas, entonces  $b$  puede ser transformada en  $b'$  por una sucesión finita de  $\Delta$ -movimientos tal que todas las trenzas poligonales intermedias sean genéricas.*

En efecto, por la Afirmación 1.17 se tiene que  $b, b'$  son trenzas poligonales relacionadas por una sucesión de  $\Delta$ -mov. Luego, ligeramente deformando los vértices de las trenzas poligonales intermedias, se puede asegurar que éstas trenzas poligonales sean también genéricas.

**Afirmación 1.19.** *Los diagramas de dos trenzas poligonales genéricas relacionadas por un  $\Delta$ -movimiento son  $R$ -equivalentes.*

En efecto, considere un  $\Delta$ -movimiento  $\Delta(ABC)$  sobre una trenza poligonal genérica  $b$  produciendo una trenza poligonal  $b'$ . Elija los puntos  $A'$  y  $C'$  dentro de los segmentos  $AB$  y  $BC$  respectivamente. Luego escoja un punto  $D$  dentro del segmento  $AC$  tal que la tercera coordenada de  $D$  está estrictamente entre las terceras coordenadas de  $A'$  y  $C'$  vea la Figura 1.14.

Aplicando a  $b$  los movimientos  $\Delta(AA'D)$  y  $\Delta(DC'C)$  se consigue transformar el segmento  $AC$  en la línea quebrada  $AA'DC'C$ . Además, aplicando los movimientos

$(\Delta(A'DC'))^{-1}$  y  $\Delta(A'BC')$  se obtiene  $b'$ . Esto muestra que el movimiento  $\Delta(ABC)$  puede ser reemplazado por una sucesión de 4  $\Delta$ -movimientos a lo largo de triángulos más pequeños, donde abrian que escoger los puntos  $A', C', D$  de modo que las trenzas poligonales intermedias sean genéricas. Esta ampliación de movimiento  $\Delta(ABC)$  puede ser iterado, en este sentido subdividiendo el triángulo  $ABC$  en pequeños triángulos y ampliando  $\Delta$ -mov como composiciones de  $\Delta$ -mov a lo largo de pequeños triángulos. Así podemos reducir al caso en el cual la proyección de triángulos  $ABC$  a  $\mathbb{R} \times I$  encuentre al resto del diagrama de  $b$  a lo largo de un segmento ó a lo largo de dos segmentos con un punto cruce, como se muestra en la Figura 1.15

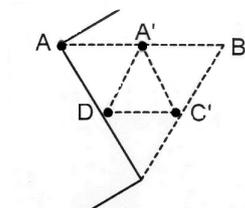


Figura 1.14:  $\Delta$ -movimientos

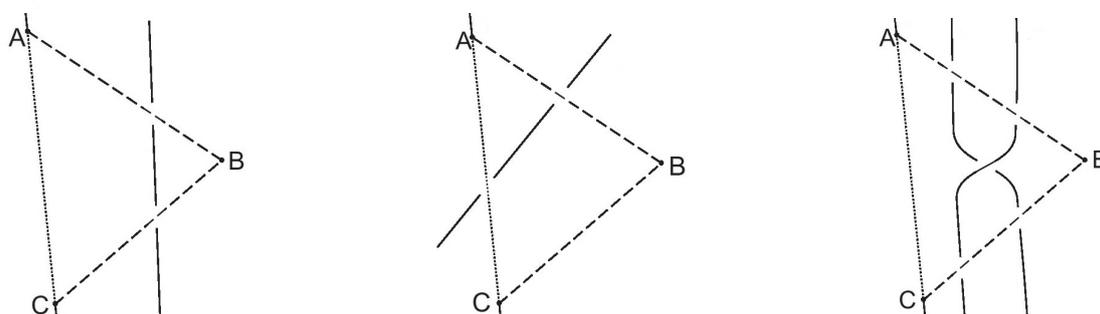


Figura 1.15: Un  $\Delta$ -movimiento donde  $\Delta(ABC)$  contiene parte de otra cuerda

- **Caso 1:** Si ambos puntos finales del segmento en cuestión está en  $AB \cup BC$  como en la Figura 1.15 a). Entonces el diagrama de  $b$  es transformado bajo  $\Delta(ABC)$  por  $\Omega_2$ . Si uno de los puntos finales del segmento está en  $AC$  y el otro está en  $AB \cup BC$  como en la Figura 1.15 b) entonces el diagrama es transformado por una isotopía.
- **Caso 2:** Si la proyección del triángulo  $ABC$  a  $\mathbb{R} \times I$  intersecta al resto del triángulo en dos segmentos teniendo un cruce como en la Figura 1.15 c), entonces similarmente se distingue varios subcasos, subdividiendo si es necesario al triángulo  $ABC$  en triángulos más pequeños y ampliando nuestro  $\Delta$ -mov como composición de  $\Delta$ -mov a lo largo de triángulos más pequeños. Podemos reducir al caso

en el que el movimiento preserva la parte del diagrama situado fuera del pequeño disco en  $\mathbb{R} \times I$  y cambia los diagramas dentro de este disco vía una de las siguientes fórmulas:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1^+ d_2^+ d_1^+ \leftrightarrow d_2^+ d_1^+ d_2^+ \quad ; \quad d_1^+ d_2^+ d_1^- \leftrightarrow d_2^- d_1^+ d_2^+ \quad ; \quad d_1^- d_2^- d_1^+ \leftrightarrow d_2^+ d_1^- d_2^- \\ d_1^- d_2^- d_1^- \leftrightarrow d_2^- d_1^- d_2^- \quad ; \quad d_1^+ d_2^- d_1^- \leftrightarrow d_2^- d_1^- d_2^+ \quad ; \quad d_1^- d_2^+ d_1^+ \leftrightarrow d_2^+ d_1^+ d_2^- \end{array} \right. \quad (1.8)$$

donde  $d_1^\pm$  y  $d_2^\pm$  son los diagramas de trenza de tres hebras mostradas en Figura 1.16.



Figura 1.16: Los diagramas  $d_1^+$ ,  $d_1^-$ ,  $d_2^+$ ,  $d_2^-$

Note que la transformación  $d_1^+ d_2^+ d_1^+ \leftrightarrow d_2^+ d_1^+ d_2^+$  es justamente  $\Omega_3$ , para las otras 5 transformaciones, la  $R$ -equivalencia está establecido por los siguientes sucesiones de movimientos:

$$\begin{aligned} \omega &= (d_1^+ d_2^+ d_1^+ \xrightarrow{\Omega_2} d_2^+ d_1^+ d_2^+) \\ \gamma &= (d_1^+ d_2^+ d_1^- \xrightarrow{\Omega_2} d_2^- d_1^+ d_2^+ d_1^- \xrightarrow{\Omega_3^{-1}} d_2^- d_1^+ d_2^+ d_1^- \xrightarrow{\Omega_2^{-1}} d_2^- d_1^+ d_2^+) \\ \mu &= (d_1^- d_2^- d_1^+ \xrightarrow{\Omega_2} d_1^- d_2^- d_1^+ d_2^+ d_2^- \xrightarrow{\omega^{-1}} d_1^- d_1^+ d_2^+ d_1^- d_2^- \xrightarrow{\Omega_2^{-1}} d_2^+ d_1^- d_2^-) \\ &= (d_1^- d_2^- d_1^- \xrightarrow{\Omega_2} d_2^- d_2^+ d_1^- d_2^- d_1^- \xrightarrow{\gamma^{-1}} d_2^- d_1^- d_2^- d_1^+ d_1^- \xrightarrow{\Omega_2^{-1}} d_2^- d_1^- d_2^-) \\ &= (d_1^+ d_2^- d_1^- \xrightarrow{\Omega_2} d_1^+ d_2^- d_1^- d_2^- d_2^+ \xrightarrow{\mu^{-1}} d_1^+ d_1^- d_2^- d_1^- d_2^+ \xrightarrow{\Omega_2^{-1}} d_2^- d_1^- d_2^+) \\ &= (d_1^- d_2^+ d_1^+ \xrightarrow{\Omega_2} d_1^- d_2^+ d_1^+ d_2^+ d_2^- \xrightarrow{\Omega_3^{-1}} d_1^- d_1^+ d_2^+ d_1^+ d_2^- \xrightarrow{\Omega_2^{-1}} d_2^+ d_1^+ d_2^-) \end{aligned}$$

Así, en (1.8) los diagramas en los lados izquierdo y derecho son  $R$ -equivalente.

**Ejemplo 1.20.** Sea una trenza geométrica de tres cuerdas cuyo diagrama se muestra en la Figura 1.17.

Claramente se observa que diagramas relacionados por un  $\Delta$ -mov conteniendo un cruce dentro del triángulo  $ABC$  son ellos  $R$ -equivalentes y esto es obtenido haciendo uso de (1.8) y los movimientos  $\Omega_2, \Omega_3$ .

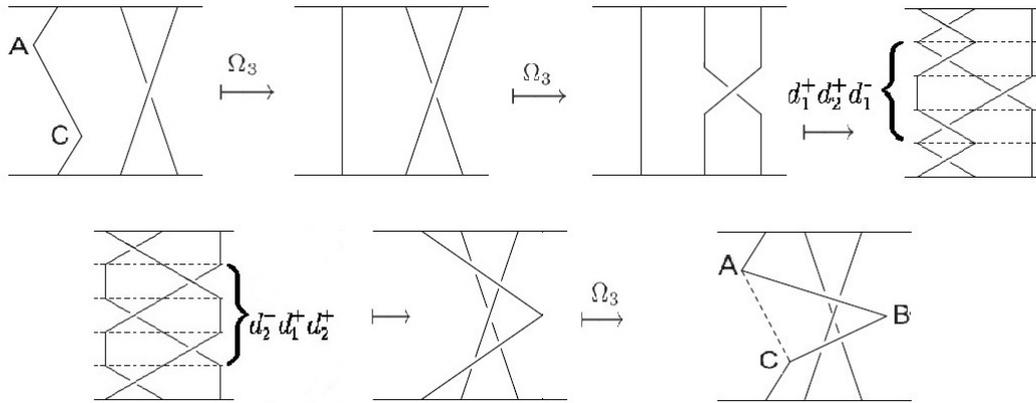


Figura 1.17: Diagramas equivalentes

**Paso 4:** Volviendo a la prueba del Teorema 1.15. Si  $D$  y  $D'$  son diagramas de trenzas  $R$ -equivalentes, existirá una sucesión finita de isotopía y movimientos Reidemeister  $\Omega_2^\pm, \Omega_3^\pm$  que transforma  $D$  en  $D'$ . Como la relación de isotopía es transitiva y los movimientos Reidemeister preservan isotopía, entonces  $D$  y  $D'$  son isotópicos. Luego, por el Lema 1.13 resulta  $\beta(D) = \beta(D')$ .

Recíprocamente, considere dos diagramas de trenza  $D_1$  y  $D_2$  presentando trenzas geométricas isotópicas  $b_1$  y  $b_2$  respectivamente y cuya clase de isotopía es denotada por  $\beta(D_1)$  y  $\beta(D_2)$  respectivamente. Para  $i = 1, 2$ , modificando  $D_i$  cerca de sus puntos cruces (si éste fuese necesario) y aproximando el resto de  $D_i$  por líneas quebradas como en el paso 2, se obtiene el diagrama  $D'_i$  de la trenza poligonal genérica  $b^i$ . Si la aproximación es bastante cerca, entonces  $D'_i$  es isotópica a  $D_i$ . Así, las trenzas geométricas  $b^1$  y  $b_1$  son isotópicas como también lo son  $b^2$  y  $b_2$ . Ahora desde que  $b_1$  es isotópico a  $b_2$ , por transitividad de la isotopía se tiene  $b^1$  es isotópico a  $b^2$ . La afirmación 1.18 implica que  $b^1$  puede ser transformado en  $b^2$  por una sucesión finita de  $\Delta$ -mov. Haciendo uso de la Afirmación 1.19 se tiene que los diagramas  $D'_1$  y  $D'_2$  son  $R$ -equivalentes.

Por otro lado, como  $D_1$  es isotópico a  $D'_1$  y  $D'_2$  es isotópico a  $D_2$ , entonces  $D_1$  y  $D_2$  son  $R$ -equivalentes. Por tanto el teorema queda demostrado. ■

## 1.4 $\mathcal{B}_n$ es isomorfo a $B_n$

**Definición 1.21.** Sea  $e$  la  $n$ -trenza geométrica que tiene todas sus cuerdas como segmentos rectos. La trenza geométrica  $e$  es llamada la identidad o trenza geométrica trivial y es denotada por  $1_n$ .

**Lema 1.22.** Para cualquier trenza geométrica  $b$ , se tiene que  $b1_n \sim b$  y  $1_nb \sim b$ .

**Demostración.** Fije un diagrama para  $b$  como en la Figura 1.18 a). Se sabe que  $1_n$  y  $b1_n$  tienen diagramas como en la Figura 1.18 b) y Figura 1.18 c) respectivamente. Podemos contraer las cuerdas verticales de la parte inferior del diagrama  $b1_n$  como muestra en la Figura 1.19 y así obtener una equivalencia de diagramas. Por tanto por el Teorema 1.15 se tiene  $b1_n \sim b$  y por un argumento similar se muestra que  $1_nb \sim b$ .

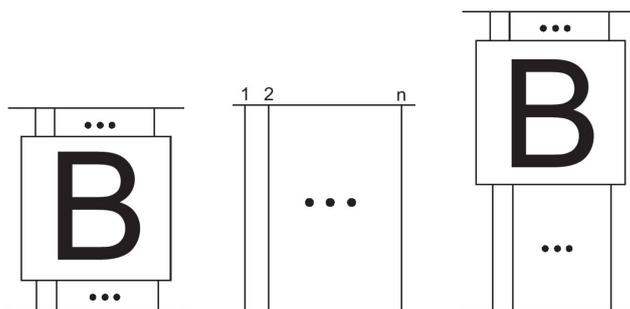


Figura 1.18: Diagramas para  $b$ ,  $1_n$  y su producto  $b1_n$

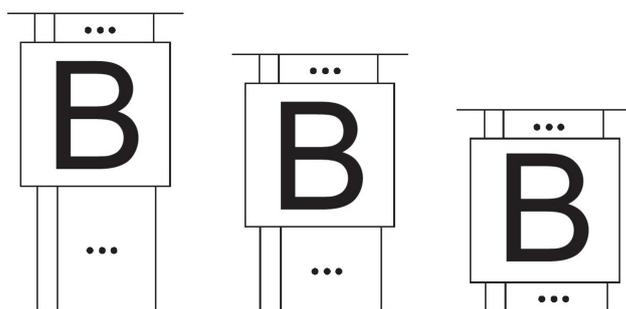


Figura 1.19: Contracción del diagrama  $b1_n$

■

**Lema 1.23.** Sea  $b_1, b_2, b_3$  trenzas geométricas. Entonces  $(b_1b_2)b_3 \sim b_1(b_2b_3)$ .

**Demostración.** Fije diagramas  $A, B, C$  para  $b_1, b_2$  y  $b_3$  respectivamente, como se muestra en la Figura 1.20. Luego la Figura 1.21 a) nos da un diagrama para  $(b_1b_2)b_3$  y similarmente la Figura 1.21 b) nos da un diagrama para  $b_1(b_2b_3)$ . Ahora como estos dos diagramas son idénticos, entonces por el Teorema 1.15, ellos representan trenzas equivalentes.

■

**Lema 1.24.** Cada  $\beta$  tiene un inverso a ambos lados  $\beta^{-1}$  en  $\mathcal{B}_n$ .

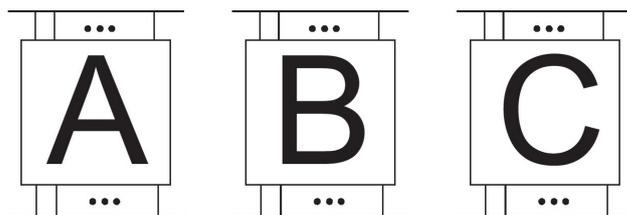


Figura 1.20: Diagramas  $A, B, C$  para las trenzas geométricas  $b_1, b_2$  y  $b_3$  respectivamente

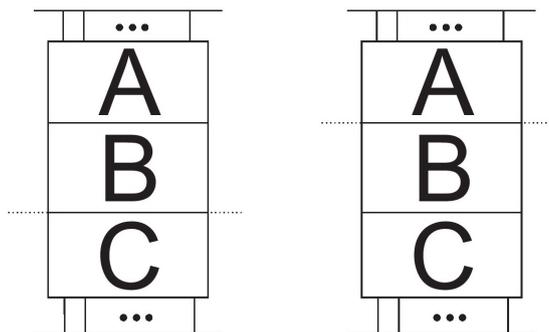


Figura 1.21: Diagrama para  $(b_1 b_2) b_3$  y diagrama para  $b_1 (b_2 b_3)$

**Demostración.** Para cada  $i = 1, \dots, n$ , se define dos trenzas geométricas elementales  $\sigma_i^+$  y  $\sigma_i^-$  representadas por diagramas de un solo cruce mostradas en la Figura 1.22.

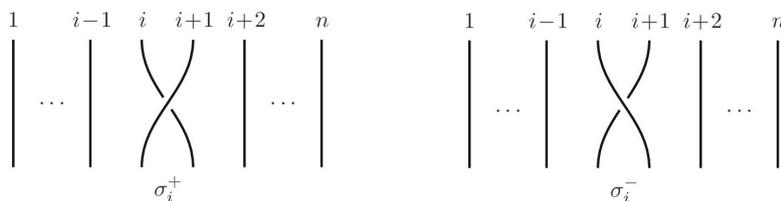


Figura 1.22: Diagramas de las trenzas geométricas elementales  $\sigma_i^+, \sigma_i^-$

Afirmamos que las trenzas  $\sigma_1^+, \dots, \sigma_n^+, \sigma_1^-, \dots, \sigma_n^- \in \mathcal{B}_n$  generan a  $\mathcal{B}_n$  como un monoide. Para ver esto considere una trenza  $\beta$  de  $n$  cuerdas representada por un diagrama  $D$ . Observe que la trenza  $\beta$  puede ser deformada de modo que todos los cruces queden espaciados y todos estén uno después del otro (mirando de arriba hacia abajo) un ejemplo de esto se ve en la Figura 1.23. En términos de diagramas esto es que las segundas coordenadas de cada cruce, que denotaremos por  $t_j \in I$ , satisfacen

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1.$$

Además, se puede disponer los cruces de tal modo que en cada franja  $\mathbb{R} \times [t_j, t_{j+1}]$  el

diagrama  $D$  se vea como el diagrama de  $\sigma_i^\varepsilon$ . Así, es claro que

$$\beta = \beta(D) = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k},$$

donde cada  $\varepsilon_j$  es  $+$  ó  $-$  y  $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Claramente  $\sigma_i^+ \sigma_i^- = \sigma_i^- \sigma_i^+ = 1$  para todo  $i$ . Por tanto  $\beta^{-1} = \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \cdots \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}$  es la inversa de  $\beta$  en  $\mathcal{B}_n$ . ■

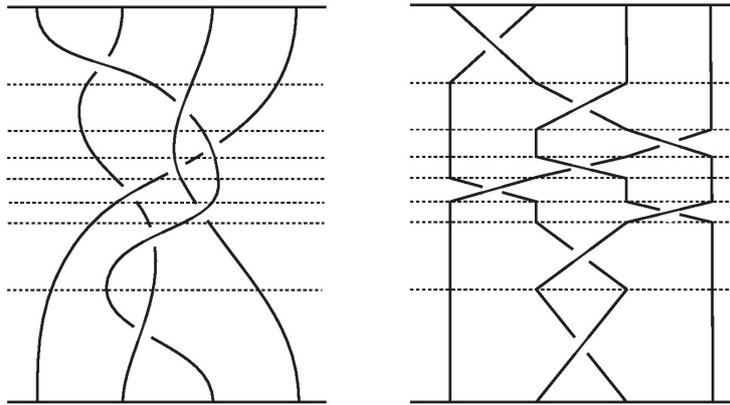


Figura 1.23: Una trenza con los planos de nivel entre cada par de cruces

Estos lemas ayudarán a probar que  $\mathcal{B}_n$  con la operación “ $\cdot$ ” como se presenta en Definición 1.10 es un grupo. Esto se ve más explícitamente en la siguiente proposición.

**Proposición 1.25.**  $\mathcal{B}_n$  es un grupo generado por  $\sigma_i^\varepsilon$  para  $\varepsilon = \pm e$   $i = 1, \dots, n-1$ .

*Demostración.*

- $\mathcal{B}_n$  es cerrado bajo la operación “ $\cdot$ ” esto es por Definición 1.10.
- “ $\cdot$ ” es una operación asociativa en  $\mathcal{B}_n$ .

En efecto, sea  $[b_1], [b_2], [b_3] \in \mathcal{B}_n$ .

$$\begin{aligned} ([b_1] \cdot [b_2]) \cdot [b_3] &= [b_1 b_2] \cdot [b_3] = [(b_1 b_2) b_3] = [b_1 (b_2 b_3)] \quad \text{por Lema 1.23} \\ &= [b_1] \cdot [b_2 b_3] = [b_1] \cdot ([b_2] \cdot [b_3]). \end{aligned}$$

- $[1_n]$  es el elemento identidad para  $\mathcal{B}_n$ .

En efecto, sea  $[b] \in \mathcal{B}_n$

$$[1_n] \cdot [b] = [1_n b] = [b] \quad \text{por Lema 1.22}$$

$$[b] \cdot [1_n] = [b1_n] = [b] \quad \text{por Lema 1.22}$$

- Cada  $\beta$  tiene un inverso  $\beta^{-1}$  en  $\mathcal{B}_n$ .

En efecto, esto se vé claramente del Lema 1.24, donde además cada  $\beta \in \mathcal{B}_n$  se puede presentar como producto de  $\sigma_i^\varepsilon$ , para  $\varepsilon = \pm$ . Por tanto  $(\mathcal{B}_n, \cdot)$  es un grupo. ■

**Lema 1.26.** Los elementos  $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{n-1}^+ \in \mathcal{B}_n$  satisfacen las relaciones de trenza, esto es,  $\sigma_i^+ \sigma_j^+ = \sigma_j^+ \sigma_i^+$  para todo  $i, j = 1, \dots, n - 1$  con  $|i - j| \geq 2$  y  $\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ = \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ .

*Demostración.* La primera relación sigue del hecho que ambos  $\sigma_i^+ \sigma_j^+$  y  $\sigma_j^+ \sigma_i^+$  son representadas por diagramas equivalentes, que se obtiene exactamente aplicando la isotopía que se ilustra en la Figura 1.24. Luego, por el Teorema 1.15 se tiene que los representantes de las trenzas  $\sigma_i^+ \sigma_j^+$  y  $\sigma_j^+ \sigma_i^+$  son isotópicas. Así,  $\sigma_i^+ \sigma_j^+ = \sigma_j^+ \sigma_i^+$ .

Para probar la segunda relación note que los diagramas de las trenzas  $\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+$  y  $\sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+$  difieren por un movimiento Reidemeister  $\Omega_3$  (ver Figura 1.25) siendo así estos diagramas equivalentes. ■

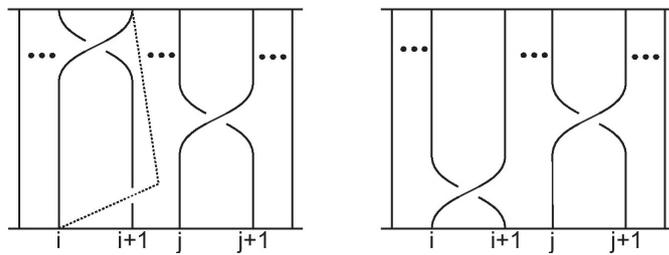


Figura 1.24: Una isotopía de  $\sigma_i^+ \sigma_j^+$  a  $\sigma_j^+ \sigma_i^+$

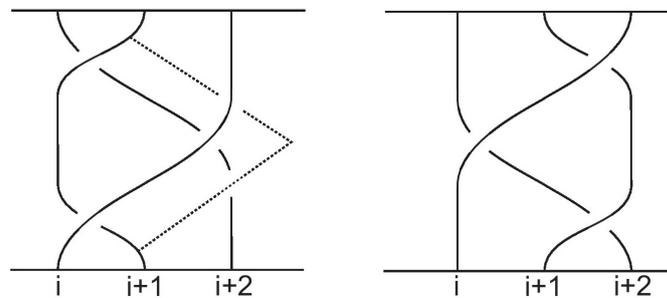


Figura 1.25: Movimiento Reidemeister  $\Omega_3$  que transforma  $\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+$  en  $\sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+$

**Teorema 1.27.** Para  $\varepsilon = \pm$ , existe un único isomorfismo  $\varphi_\varepsilon : B_n \rightarrow \mathcal{B}_n$  tal que  $\varphi_\varepsilon(\sigma_i) = \sigma_i^\varepsilon$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

*Demostración.* Haremos la demostración para  $\varepsilon = +$  (para el caso  $\varepsilon = -$  la demostración es análoga solo hay que notar que las trenzas  $\sigma_i^-$  también satisfacen las relaciones trenza y en  $B_n$  las relaciones trenza son también satisfechas por  $\sigma_i^{-1}$  para  $i = 1, \dots, n-1$ ). La Proposición 1.2 nos dice que hay un único homomorfismo  $\varphi_+ : B_n \rightarrow \mathcal{B}_n$  tal que  $\varphi_+(\sigma_i) = \sigma_i^+$  pues las trenzas  $\sigma_i^+$  satisfacen las relaciones trenza por el Lema 1.26 y como estas trenzas generan  $\mathcal{B}_n$  como grupo se tiene que  $\varphi_+$  es sobreyectivo y por ende sólo queda por verificar la inyectividad del homomorfismo, esto se probará construyendo un homomorfismo  $\psi : \mathcal{B}_n \rightarrow B_n$  tal que  $\psi \circ \varphi_+ = id_{\mathcal{B}_n}$ . Para construir  $\psi$  haremos lo siguiente: Sea  $\beta \in \mathcal{B}_n$  una trenza cualquiera, sea  $D$  un diagrama de  $\beta$  en el que las segundas coordenadas de los cruces sean todas distintas de la misma forma que lo hicimos en el Lema 1.24 y entonces  $\beta = \sigma_{j_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{j_2}^{\varepsilon_2} \dots \sigma_{j_r}^{\varepsilon_r}$  con  $j_k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  y  $\varepsilon_k = \pm$  para todo  $k = 1 \dots r$ . Luego, se define

$$\psi(D) = (\sigma_{j_1})^{\varepsilon_1} (\sigma_{j_2})^{\varepsilon_2} \dots (\sigma_{j_r})^{\varepsilon_r},$$

donde  $(\sigma_i)^+ = \sigma_i$  y  $(\sigma_i)^- = \sigma_i^-$ . Resta probar la buena definición de  $\psi$ , esto es, sólo depende de  $\beta$  y no del diagrama  $D$  que hemos escogido para representarlo y por lo tanto, que  $\psi(D)$  queda invariante si cambiamos  $D$  por isotopías y movimientos de Reidemeister.

Para las isotopías, si estas no cambian el orden de las segundas coordenadas de los cruces dejarán igual la expansión dada por  $D$ , si estas en cambio cambian el orden de los cruces entonces se debe reemplazar el término  $\sigma_i^{\varepsilon_i} \sigma_j^{\varepsilon_j}$  por  $\sigma_j^{\varepsilon_j} \sigma_i^{\varepsilon_i}$  para  $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$  con  $|i-j| \geq 2$  en la expansión de  $\beta$  y la imagen de esta nueva expansión por  $\psi$  es la misma en  $B_n$  luego  $\psi(D)$  no es afectado por isotopías de diagramas.

Ahora analicemos que sucede con los movimientos de Reidemeister, el movimiento  $\Omega_2$  remueve o introduce un término de la forma  $\sigma_i^+ \sigma_i^-$  ó  $\sigma_i^- \sigma_i^+$  y entonces  $\psi(D)$  queda igual si aplicamos este movimiento. Por último, el movimiento  $\Omega_3$  reemplaza  $\sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+$  por  $\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+$  y viceversa. Aplicando  $\psi$ , éstos términos son iguales en  $B_n$  por lo que  $\psi(D)$  no se vé alterado. Así se tiene probado que  $\psi$  esta bien definido y claramente  $\psi \circ \varphi^+ = id_{\mathcal{B}_n}$ . Luego  $\varphi^+$  es inyectiva. Por tanto se concluye que  $\varphi^+$  es biyectiva. ■

Gracias a este último teorema podemos identificar los grupos  $B_n$  y  $\mathcal{B}_n$  vía  $\psi_+$ , es decir, la trenza algebraica  $\sigma_i$  y la geométrica  $\sigma_i^+$  será lo mismo y usaremos a los

elementos de  $B_n$  para referirnos a ambos grupos, a los cuales llamaremos trenzas.

La proyección al grupo simétrico  $\pi : B_n \rightarrow \Sigma_n$  tiene ahora una interpretación geométrica obvia, sólo hay que tomar un punto de la forma  $(i, 0, 0)$  con  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , seguir la cuerda  $i$ -ésima de la trenza y fijarse en que punto de la forma  $(s(i), 0, 1)$  termina. Esto define  $s = \pi(b)$  con  $b \in B_n$ .

## 1.5 Trenzas Puras

El homomorfismo  $\pi$  introducido en el Corolario 1.3 tiene una interpretación geométrica simple, esto se genera tomando una trenza de  $n$ - cuerdas y derivando de ella una permutación de los números  $1, 2, \dots, n$ . Además, es obvio que la trenza trivial  $1_n$  reside en el núcleo de  $\pi$ , por ello nuestro principal interés ahora es prestar atención en el resto de los elementos de  $Ker(\pi)$ , ya que constituyen un interesante subconjunto de  $B_n$ .

Del Corolario 1.3, de forma conveniente para tener una fácil visualización del homomorfismo  $\pi$ , podemos decir que cualquier trenza  $\beta$  es asociada a una única permutación

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

donde indica que las cuerdas de  $\beta$  permuta puntos iniciales y finales. Note que la imagen bajo  $\pi$  de cualquier trenza  $\beta$  solo recoge parte de la información de la trenza y no es difícil ver que dado algún  $\rho \in \Sigma_n$  existen muchas y diferentes trenzas de  $n$  cuerdas que aplican a  $\rho$  via  $\pi$ .

**Definición 1.28.** Una trenza de  $n$  cuerdas  $\beta \in B_n$  es llamada trenza pura si

$$\pi(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

Como esto es la permutación identidad, entonces en lo que sigue será denotado por  $(1)$ .

Por lo tanto una trenza pura de  $n$  cuerdas es una trenza tal que para cada  $i = 1, \dots, n$  la  $i$ -cuerda comienza en el punto  $(i, 0, 0)$  y termina en  $(i, 0, 1)$ . Para  $n \geq 1$ , denotamos al conjunto de trenzas puras en  $B_n$  por  $P_n$ . Así

$$P_n = \{\beta \in B_n \mid \pi(\beta) = (1)\} = Ker(\pi).$$

Un ejemplo de una trenza pura se presenta en la Figura 1.26.

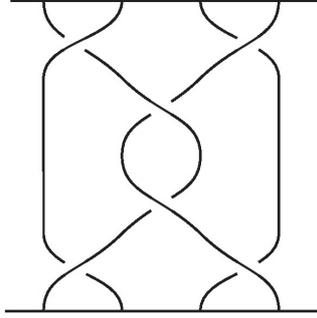


Figura 1.26: Una trenza pura de cuatro cuerdas

Note que

- $P_1 = \{\beta \in B_1 \mid \pi(\beta) = (1)\} = \{1\}$ .
- $P_2 = \langle \sigma_1^2 \rangle$ .

En efecto, sea  $\beta \in P_2$ , se tiene que  $\beta \in B_2$  y  $\pi(\beta) = (1)$ . Como  $B_n$  es grupo cíclico infinito, entonces  $\beta = \sigma_1^n$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ . Luego,  $\pi(\sigma_1^n) = (1)$  esto quiere decir que el representante de la trenza  $\sigma_1^n$  tiene cuerdas que conectan los puntos extremos  $(i, 0, 0)$  y  $(i, 0, 1)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Entonces,  $n = 2k$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Así,

$$\beta = \sigma_1^{2k} = (\sigma_1^2)^k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De esto se tiene,  $P_2 \subseteq \langle \sigma_1^2 \rangle$  y es claro la otra inclusión. Por tanto  $P_2 = \langle \sigma_1^2 \rangle$ .

**Teorema 1.29.**  $P_n$  es un subgrupo normal de  $B_n$  y  $B_n/P_n \cong \Sigma_n$ . Así,  $[B_n : P_n] = |\Sigma_n| = n!$

**Demostración.** Como  $P_n = \{\beta \in B_n \mid \pi(\beta) = (1)\}$ . Entonces  $P_n$  es un subgrupo normal por ser el núcleo del homomorfismo  $\pi$ . Luego, como  $\pi : B_n \rightarrow \Sigma_n$  es un homomorfismo sobreyectivo (ver Corolario 1.3. Entonces, por el primer teorema del isomorfismo  $B_n/\text{Ker}(\pi) \cong \text{Img}(\pi) = \Sigma_n$ . Por tanto queda probado el teorema. ■

**Teorema 1.30.** El grupo de trenzas puras  $P_n$  tiene una presentación con los generadores  $A_{i,j}$  con  $1 \leq i < j \leq n$  y relaciones:

$$A_{rs}^{-1} A_{ij} A_{rs} = \begin{cases} A_{ij} & \text{si } s < i \text{ ó } i < r < s < j \\ A_{rj} A_{ij} A_{rj}^{-1} & \text{si } s = i \\ A_{rj} A_{sj} A_{ij} A_{sj}^{-1} A_{rj}^{-1} & \text{si } i = r < s < j \\ A_{rj} A_{sj} A_{rj}^{-1} A_{sj}^{-1} A_{ij} A_{sj} A_{rj} A_{sj}^{-1} A_{rj}^{-1} & \text{si } r < i < s < j. \end{cases}$$

*Demostración.* Ver [10, ] Pag. 43-56. ■

Los generadores  $A_{ij}$  pueden ser representados geoméricamente como trenzas puras donde la  $j$ -ésima cuerda pasa por delante de las cuerdas  $(j-1), \dots, (i+1)$ , frente de la  $i$ -ésima cuerda y la continuación delante de las cuerdas  $(i+1), \dots, (j-1)$  hasta la posición  $j$ . Ver Figura 1.27.

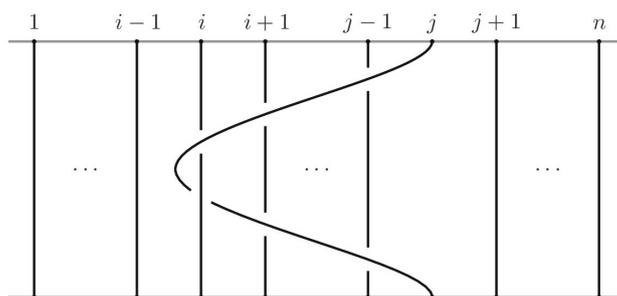


Figura 1.27: El generador  $A_{i,j}$  de  $n$ -trenzas puras

Estas trenzas pueden ser expresadas via los generadores  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  por

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1} \sigma_{j-2} \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \cdots \sigma_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^{-1}.$$

---

# Trenzas y espacios de configuración

---

En mecánica clásica y mecánica lagrangiana, el espacio de configuración es el espacio de todas las posibles posiciones instantáneas de un sistema mecánico, el cual usualmente tiene estructura de variedad diferenciable. En topología, los espacios de configuraciones fueron introducidos en 1962 por E. Fadell y L. Neuwirth en conexión con los grupos de trenzas de Artin. Desde entonces su topología ha sido intensamente estudiada, principalmente por su relación con los grupos de trenzas, en especial para los casos más generales de variedades en dimensiones mayor o igual a 2.

El interés principal de este capítulo es mostrar la relación existente entre el grupo de trenzas de Artin y el grupo fundamental del espacio de configuración de la variedad usual  $\mathbb{R}^2$ .

## 2.1 Espacios de configuración

Sea  $M$  un espacio topológico y sea  $M^n = M \times M \times \dots \times M$ , el producto de  $n \geq 1$  copias de  $M$  con la topología producto. El conjunto

$$\mathcal{F}_n(M) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M^n / x_i \neq x_j, \forall i \neq j\}$$

es un subespacio de  $M^n$ , llamado el *espacio de configuración* de  $n$ -tuplas ordenadas de puntos distintos en  $M$ .

**Observación:** Si  $M$  es una variedad topológica, entonces el espacio de configuración  $\mathcal{F}_n(M)$  es una variedad topológica de dimensión  $n \dim M$ . Claramente,

- $\mathcal{F}_n(M)$  es un espacio topológico con la topología inducida de la topología pro-

ducto  $M \times \dots \times M$ .

- $\mathcal{F}_n(M)$  es un espacio de Hausdorff.
- $\mathcal{F}_n(M)$  es localmente euclidiano.

Obsérvese que el grupo simétrico  $\Sigma_n$  actúa libremente sobre  $\mathcal{F}_n(M)$ . Entonces podemos hablar también del espacio de configuración de  $n$ -tuplas no ordenadas de puntos en  $M$ . Éste es definido como el espacio cociente

$$\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n.$$

La acción de  $\Sigma_n$  sobre  $\mathcal{F}_n(M)$  es definida de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{F}_n(M) \times \Sigma_n &\rightarrow \mathcal{F}_n(M) \\ ((x_1, \dots, x_n), \sigma) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

Decimos que un punto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{F}_n(M)$  es equivalente a un punto  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{F}_n(M)$  sí, los elementos de  $y$  son una permutación de los elementos de  $x$ , de manera más clara esto es,

$$x \sim y \iff \exists \sigma \in \Sigma_n / x \cdot \sigma = y.$$

Como resultado de ello, cuando hablamos de un punto  $x$  en  $\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n$ , en realidad se está refiriendo a una clase de equivalencia de puntos. Así, para diferenciar entre un punto en  $\mathcal{F}_n(M)$  y un punto en  $\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n$  se utilizará la notación  $[x]$  para referirnos a puntos en  $\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n$ .

Ahora cuando  $M = \mathbb{R}^2$  se tiene un resultado muy interesante, que viene a ser justamente la conexión entre las trenzas de Artin y el espacio de configuración de la variedad  $\mathbb{R}^2$ . El siguiente teorema da referencia de ello.

**Teorema 2.1.** (R. Fox, L. Neuwirth) *El grupo fundamental  $\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2), x)$  de  $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$  donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es el grupo de trenza pura  $P_n$ . El grupo fundamental  $\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)/\Sigma_n, [x])$  de  $\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)/\Sigma_n$  es el grupo de trenza  $B_n$ .*

**Demostración.** Denotemos por  $P(\mathbb{R}^2)$  al conjunto de todas las trenzas geométricas puras de  $n$  cuerdas. Sea  $b \in P(\mathbb{R}^2)$ ;  $q_n = ((1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0))$  un punto base y sea

$$S(q_n) = \{\alpha : I \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2) / \alpha(0) = \alpha(1) = q_n\}.$$

Defina

$$\begin{aligned} f : P(\mathbb{R}^2) &\rightarrow S(q_n) \\ b &\mapsto f(b) : I \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2) \\ t &\mapsto f(b)(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)), \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde la  $i$ -cuerda de  $b$  intersecta al plano  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  en el punto  $(u_i(t), t)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Así, claramente se puede observar que la  $i$ -cuerda de  $b$ , está formada por los puntos  $b_i(t) = (u_i(t), t)$  con  $t \in I$ .

**Afirmación:** La aplicación  $f$  así definida es biyectiva.

En efecto, para probar la inyectividad sean  $b$  y  $b'$  dos trenzas geométricas puras. Si  $f(b) = f(b')$ , para  $t \in I$  se tiene la igualdad  $(u_1(t), \dots, u_n(t)) = (u'_1(t), \dots, u'_n(t))$  que por definición para cada  $i = 1, \dots, n$ , los puntos  $(u_i(t), t)$  y  $(u'_i(t), t)$  son exactamente las intersecciones de las cuerdas  $b_i$  y  $b'_i$  con el plano  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  respectivamente. Luego,  $u_i(t) = u'_i(t)$  lo que implica que

$$b_i(t) = (u_i(t), t) = (u'_i(t), t) = b'_i(t) \quad \forall i; \forall t.$$

Por tanto  $b = b'$ . Para probar la sobreyectividad sea  $\alpha \in S(q_n)$ , para cada  $t \in I$  se tiene que  $\alpha(t) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$ . Así,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$  con  $\alpha(0) = \alpha(1) = q_n$  y  $\alpha_i(t) \neq \alpha_j(t)$  para todo  $i \neq j$ . Considere

$$b = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{t \in I} (\alpha_i(t), t),$$

y llame  $b_i(t) = (\alpha_i(t), t)$ . Luego, es inmediato ver que  $b = \bigcup_{i=1}^n b_i$  es una trenza geométrica pura que une los puntos  $b_i(0) = (i, 0, 0)$  a  $b_i(1) = (i, 0, 1)$  para cada  $i$ .

Por otro lado, note que el plano  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  intersecta a la trenza geométrica  $b$  justamente en los puntos del conjunto  $\{(\alpha_1(t), t), (\alpha_2(t), t), \dots, (\alpha_n(t), t)\}$ . Así,  $\alpha(t) = f(b)(t)$  para todo  $t \in I$ . Por tanto se tiene probada la afirmación. ■

Usando la biyección  $f$  y las proyecciones canónicas  $\pi : P_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow P_n(\mathbb{R}^2)$  y  $\tilde{\pi} : S(q_n) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$ .

$$\begin{array}{ccc}
P_n(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{f} & S(q_n) \\
\pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\pi} \\
P_n(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))
\end{array}$$

Defina la aplicación  $\tilde{f} : P_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2))$  como  $\tilde{f}([b]) = [f(b)]$ , donde  $b \in P_n(\mathbb{R}^2)$ .

- **Buena definición de  $\tilde{f}$**

En efecto, Sea  $b$  y  $\tilde{b}$  dos trenzas geométricas puras tal que  $[b] = [\tilde{b}]$ , nuestro propósito es mostrar que  $\tilde{f}([b]) = \tilde{f}([\tilde{b}])$ .

Note que  $f(b)$  y  $f(\tilde{b}) \in S(q_n)$ . Además, desde que  $b$  es isotópico a  $\tilde{b}$  se tiene que existe una aplicación  $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  continua tal que para cada  $s \in I$ ,  $F_s : b \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  es un encaje, además  $F_0(b) = b$ ,  $F_1(b) = \tilde{b}$  y  $F_s(b)$  se mantiene como trenza pura. De este último resulta que  $f(F_s(b))$  es un camino cerrado, esto es  $f(F_s(b)) \in S(q_n)$ . Ahora defina

$$\begin{aligned}
H & : I \times I \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2) \\
(t, s) & \mapsto H(t, s) = (f(F_s(b)))(t).
\end{aligned}$$

Claramente  $H$  es continua y además se tiene,

- $H(t, 0) = f(F_0(b))(t) = f(b)(t)$ .
- $H(t, 1) = f(F_1(b))(t) = f(\tilde{b})(t)$ .
- $H(0, s) = f(F_s(b))(0) = q_n$ .
- $H(1, s) = f(F_s(b))(1) = q_n$ .

Así, podemos decir que  $H$  es una homotopía entre los caminos  $f(b)$  y  $f(\tilde{b})$ . Usualmente denotado por  $f(b) \simeq f(\tilde{b})$ . Esto implica que  $[f(b)] = [f(\tilde{b})]$ . Así,  $\tilde{f}([b]) = \tilde{f}([\tilde{b}])$ .

- **$\tilde{f}$  es un homomorfismo**

En efecto, sea  $[b]$  y  $[\tilde{b}] \in P_n(\mathbb{R}^2)$ . Se tiene por definición de  $\tilde{f}$  y Definición 1.10

$$\tilde{f}([b] \cdot [\tilde{b}]) = \tilde{f}([b\tilde{b}]) = [f(b\tilde{b})]. \quad (2.2)$$

$$\tilde{f}([b]) \cdot \tilde{f}([\tilde{b}]) = [f(b)] \cdot [f(\tilde{b})] = [f(b) * f(\tilde{b})]. \quad (2.3)$$

donde

$$f(b) * f(\tilde{b}) : I \longrightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$$

$$(f(b) * f(\tilde{b}))(t) = \begin{cases} (f(b))(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (f(\tilde{b}))(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Nuestro propósito aquí es mostrar las igualdades de las expresiones (2.2) y (2.3). Para ello de la Definición 1.8 tenga en vista lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{b}\tilde{b} &= \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid (x, y, 2t) \in b; 0 \leq t \leq 1/2\} \\ &\cup \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I \mid (x, y, 2t - 1) \in \tilde{b}; 1/2 \leq t \leq 1\}. \end{aligned}$$

y también de (2.1) decimos

$$(f(\tilde{b}\tilde{b}))(t) = (u_1^{\tilde{b}\tilde{b}}(t), \dots, u_n^{\tilde{b}\tilde{b}}(t)) \quad y \quad (f(b))(t) = (u_1^b(t), \dots, u_n^b(t))$$

donde  $(\tilde{b}\tilde{b})_i(t) = (u_i^{\tilde{b}\tilde{b}}(t), t) \in \tilde{b}\tilde{b}$  y  $(b)_i(t) = (u_i^b(t), t) \in b$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Ahora si  $0 \leq t \leq 1/2$ , se tiene

$$(u_i^{\tilde{b}\tilde{b}}(t), 2t) \in b,$$

de donde resulta

$$(u_i^{\tilde{b}\tilde{b}}(t), 2t) = b_i(s) = (u_i^b(s), s) \quad \text{para algún } s \in [0, 1].$$

Luego, es inmediato ver que  $u_i^{\tilde{b}\tilde{b}}(t) = u_i^b(2t)$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Así,

$$(f(\tilde{b}\tilde{b}))(t) = (f(b))(2t). \quad (2.4)$$

Por otro lado, si  $1/2 \leq t \leq 1$ , procediendo de la misma manera que el caso anterior resulta

$$(f(\tilde{b}\tilde{b}))(t) = (f(\tilde{b}))(2t - 1) \quad (2.5)$$

Luego, de (2.4) y (2.5) se tiene  $f(\tilde{b}\tilde{b}) = f(b) * f(\tilde{b})$ . Por tanto  $[f(\tilde{b}\tilde{b})] = [f(b) * f(\tilde{b})]$ .

- **$\tilde{f}$  es biyección**

En efecto, primeramente defina

$$\begin{aligned}\tilde{g} : \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)) &\rightarrow P_n(\mathbb{R}^2) \\ [\alpha] &\mapsto \tilde{g}([\alpha]) = [f^{-1}(\alpha)]\end{aligned}$$

para cada  $\alpha \in S(q_n)$ .

**Buena definición de  $\tilde{g}$ :** Sea  $\alpha, \beta \in S(q_n)$  tal que  $[\alpha] = [\beta]$ .

Observe que se tiene los caminos  $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\alpha(0) = \alpha(1) = q_n$ ;  $\beta(0) = \beta(1) = q_n$ . Desde que  $\alpha \simeq \beta$  se tiene que para cada  $s \in I$  existe una aplicación continua  $H_s : I \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)$  tal que

- $H_0(t) = \alpha(t)$
- $H_1(t) = \beta(t)$
- $H_s(0) = \alpha(0) = q_n$
- $H_s(1) = \alpha(1) = q_n$ .

Así,  $H_s \in S(q_n)$  y para no recargar, por simple notación digamos que

$$H_s(t) = \{(H_s)_1(t), \dots, (H_s)_n(t)\} \quad \text{donde cada } (H_s)_i(t) \in \mathbb{R}^2,$$

y

$$\alpha(t) = \{\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)\} \quad \text{donde cada } \alpha_i(t) \in \mathbb{R}^2$$

Por otro lado, se sabe que  $f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta) \in P_n(\mathbb{R}^2)$ . Debemos mostrar que  $f^{-1}(\alpha) \simeq f^{-1}(\beta)$  y para ellos construimos la aplicación

$$\begin{aligned}F : f^{-1}(\alpha) \times I &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times I \\ (x, s) &\mapsto F(x, s) = ((H_s)_i(t), t)\end{aligned}$$

donde  $x = (\alpha_i(t), t)$ . Claramente  $F$  es continua y es inmediato ver que para cada  $s \in I$  la aplicación  $F_s : f^{-1}(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  definida por  $F_s(x) = F(x, s)$  es un encaje. Además,  $F_0(f^{-1}(\alpha)) = f^{-1}(\alpha)$ ,  $F_1(f^{-1}(\alpha)) = f^{-1}(\beta)$  y para cada  $s \in I$ ,  $F_s$  mantiene fijos los puntos extremos de  $f^{-1}(\alpha)$ . De esto se concluye que  $f^{-1}\alpha$  y  $f^{-1}\beta$  son isotópicos. Por tanto  $[f^{-1}(\alpha)] = [f^{-1}(\beta)]$  y es garantizada la buena definición de  $\tilde{g}$ .

Ahora sea  $[\alpha] \in \pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^n))$  y  $[b] \in P_n(\mathbb{R}^2)$ . Se tiene

$$\tilde{f} \circ \tilde{g}([\alpha]) = \tilde{f}([f^{-1}(\alpha)]) = [f(f^{-1}(\alpha))] = [Id(\alpha)] = [\alpha].$$

$$\tilde{g} \circ \tilde{f}([b]) = \tilde{g}([f(b)]) = [f^{-1}(f(b))] = [b] = Id_{P_n(\mathbb{R}^2)}([b]).$$

Así,

$$\tilde{f} \circ \tilde{g} = Id_{\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^n))} \quad \text{y} \quad \tilde{f} \circ \tilde{g} = Id_{P_n(\mathbb{R}^2)}.$$

Por tanto se concluye que la isotopía de trenzas puras corresponde a la homotopía de lazos en  $(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2), q_n)$ . Así claramente,

$$\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2), q_n) \cong P_n(\mathbb{R}^2).$$

Para probar la segunda parte de éste teorema, considere  $q \in \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)/\Sigma_n$  representada por el conjunto desordenado

$$\{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

El isomorfismo es obtenido de la siguiente manera: Considere  $b \in \mathbb{R}^2 \times I$  una trenza geométrica con permutación  $\tau$ , que no es la permutación identidad y defina

$$\begin{aligned} f : B(\mathbb{R}^2) &\rightarrow S(q_n) \\ b &\mapsto f(b) : I \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)/\Sigma_n \\ t &\mapsto f(b)(t) = (u_{\tau(1)}(t), u_{\tau(2)}(t), \dots, u_{\tau(n)}(t)), \end{aligned}$$

donde la  $i$ -cuerda de  $b$  intersecta al plano  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  en el punto  $(u_{\tau(i)}(t), t)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Observe que la  $i$ -cuerda de  $b$ , está formada por los puntos  $b_i(t) = (u_{\tau(i)}(t), t)$  con  $t \in I$ .

Procediendo de manera similar como se efectuó en la primera parte, no es difícil mostrar que

$$\pi_1(\mathcal{F}_n(\mathbb{R}^2)/\Sigma_n, q_n) \cong B_n(\mathbb{R}^2).$$

■

## 2.2 Trenzas sobre variedades

Motivados por el Teorema 2.1 podemos generalizar la definición de los grupos de trenza  $P_n$  y  $B_n$  sustituyendo los espacios de configuración del plano  $\mathbb{R}^2$  por los de una variedad arbitraria  $M$ .

**Definición 2.2.** Si  $M$  es una variedad, se define el grupo de trenzas puras y el grupo de trenzas de  $M$ , como los grupos fundamentales de los espacios de configuraciones:

$$P_n(M) = \pi_1(\mathcal{F}_n(M)) \quad \text{y} \quad B_n(M) = \pi_1(\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n).$$

respectivamente.

Esta definición coincide con la definición geométrica intuitiva que se estudió en la sección 1.2. Para ver ello, escogemos  $z_0 = (z_1, z_2, \dots, z_n)$  como punto base en  $\mathcal{F}_n(M)$ , donde  $z_i \in M$ . Entonces, un elemento de  $\pi_1(\mathcal{F}_n(M))$  es una clase de homotopia de una aplicación continua  $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}_n(M)$  con  $f(0) = f(1) = z_0$ . La proyección  $p_i : M^{(n)} \rightarrow M$  dado por  $p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  induce una aplicación continua  $f_i = p_i \circ f : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $f_i(0) = p_i \circ f(0) = p_i(z_0) = z_i = f_i(1)$ . Por tanto, la clase de homotopia de  $f_i$  es un elemento de  $\pi_1(M, z_i)$ . Note que este lazo es la  $i$ -cuerda en  $M \times [0, 1]$  dado por las coordenadas  $(f_i(t), t)$  para  $0 \leq t \leq 1$ . Ver Figura 2.1.

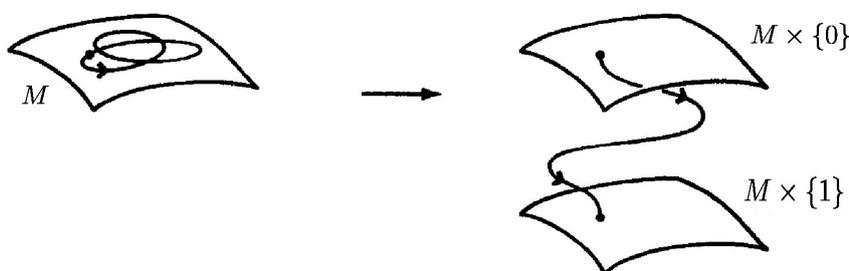


Figura 2.1: Un lazo en  $M$  que representa una cuerda en  $M \times [0, 1]$

Así, tenemos un conjunto de  $n$  cuerdas  $d_1, d_2, \dots, d_n$  que une los  $n$  puntos  $\{z_1 \times \{0\}, z_2 \times \{0\}, \dots, z_n \times \{0\}\}$  con los  $n$  puntos  $\{z_1 \times \{1\}, z_2 \times \{1\}, \dots, z_n \times \{1\}\}$  en  $M \times [0, 1]$ . Además, estas  $n$  cuerdas son disjuntas. En efecto, supongase que las cuerdas  $d_i$  y  $d_j$  se encuentren en algún punto, entonces existe un  $t_0$  con  $0 \leq t \leq 1$  tal que  $f_i(t_0) = f_j(t_0)$ . Luego,  $f(t_0) = (f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_n(t_0)) \notin \mathcal{F}_n(M)$  y esto es una contradicción. Por tanto,  $b = d_1 \cup d_2 \cup \dots \cup d_n$  es una trenza geométrica de  $n$  cuerdas donde cada cuerda  $d_i$  une  $z_i \times \{0\}$  al punto  $z_i \times \{1\}$ . Por tanto  $b$  es una trenza geométrica pura de  $n$  cuerdas, representada por el camino  $f$ .

**Afirmación:** Dos caminos  $f$  y  $f'$  en  $\mathcal{F}_n(M)$  son homotópicos si, y solamente si, las trenzas geométricas que estos representan son isotópicas.

En efecto, si  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  y  $f' = (f'_1, f'_2, \dots, f'_n)$  son caminos que representan a las trenzas  $b$  y  $b'$  en  $M \times [0, 1]$  con  $i$ -cuerdas  $b_i(t) = (f_i(t), t)$  y  $b'_i(t) = (f'_i(t), t)$ ;  $t \in [0, 1]$  respectivamente. Si  $f$  y  $f'$  son homotópicos entonces se tiene que  $f_i$  es homotópico a  $f'_i$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Luego, existe una homotopia  $H_i : I \times I \rightarrow M$  tal que  $H_i(t, 0) = f_i(t)$ ,  $H_i(t, 1) = f'_i(t)$  y  $H_i(0, s) = H_i(1, s) = z_i$ .

Claramente existe una colección de isotopias  $\{F_1(t, s), F_2(t, s), \dots, F_n(t, s)\}$  donde

$$F_i : b_i \times I \rightarrow M \times I$$

$$(b_i(t), s) \mapsto (H_i(t, s), t)$$

y

$$\{F_1(b_1(t), 0), F_2(b_2(t), 0), \dots, F_n(b_n(t), 0)\} = \{b_1(t), b_2(t), \dots, b_n(t)\}$$

$$\{F_1(b_1(t), 1), F_2(b_2(t), 1), \dots, F_n(b_n(t), 1)\} = \{b'_1(t), b'_2(t), \dots, b'_n(t)\}$$

$$\{F_1(b_1(0), s), F_2(b_2(0), s), \dots, F_n(b_n(0), s)\} = ((z_1, 0), (z_2, 0), \dots, (z_n, 0))$$

$$\{F_1(b_1(1), s), F_2(b_2(1), s), \dots, F_n(b_n(1), s)\} = ((z_1, 1), (z_2, 1), \dots, (z_n, 1)).$$

Así, podemos decir que para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , cada cuerda  $b_i$  de  $b$  es isotópico a la correspondiente cuerda  $b'_i$  de  $b'$ . Por tanto,  $b$  es isotópico a  $b'$

Recíprocamente, si  $b$  y  $b'$  son trenzas geométricas isotópicas en  $M \times I$ , no es difícil ver que a partir de las correspondientes isotopías de cada cuerda de las trenzas se obtiene las homotopías entre las coordenadas de los caminos  $f$  y  $f'$ . Por tanto queda probada la afirmación. ■

Luego, por la afirmación se tiene mostrado que la clase de homotopía del camino cerrado  $f$  en  $\mathcal{F}_n(M)$  es la misma que la clase de isotopía de la correspondiente trenza pura  $b$ . En otras palabras  $\pi_1(\mathcal{F}_n(M), z_0) = \{[f] / f : I \rightarrow \mathcal{F}_n(M); f(0) = f(1) = z_0\}$ , grupo de clases de homotopías de lazos basados en  $z_0$ , es el grupo de trenzas puras  $P_n(M)$ . Para mostrar que cualquier elemento de  $\pi_1(\mathcal{F}_n(M))$  representa una trenza de  $n$  cuerdas en la variedad  $M$  se requiere de herramientas que no es tratado en este trabajo. El lector interesado puede revisar [6].

Si consideramos a  $M$  como una superficie (variedad bidimensional) entonces podemos describir esta igualdad como sigue:

Primeramente, elijamos un punto base  $(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathcal{F}_n(M)$  y sea  $[f] \in \pi_1(\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n)$  representado por el lazo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n$ . Como  $p : \mathcal{F}_n(M) \rightarrow \mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n$  es un cubrimiento, en muchos casos existe una elevación  $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}_n(M)$ ,  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$  tal que  $p \circ \lambda = f$  y donde  $\lambda(0) = (q_1, \dots, q_n)$ ,  $\lambda(1) = (q_{\gamma(1)}, \dots, q_{\gamma(n)})$ ;  $\gamma \in \Sigma_n$ . Además,  $[\lambda(0)] = [\lambda(1)]$  es un punto base en  $\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n$ . Teniendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{F}_n(M) \\ & \nearrow \lambda & \downarrow p \\ [0, 1] & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n \end{array}$$

Para la existencia de  $\lambda$  se particiona el intervalo  $[0, 1]$ ;  $0 = a_0 < \dots < a_n = 1$ , Luego,

se define  $\lambda^i$  por inducción en  $[0, a_i]$ . Dado que  $f([a_i, a_{i+1}]) \subset S_i$  abierto en  $\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n$ , por ser  $p$  un cubrimiento se tiene que  $p^{-1}(S_i) = \cup U_i$  y  $p : U_i \rightarrow S_i$  es un homeomorfismo, por lo que existe un único  $U \in \{U_i\}$  tal que  $\lambda(a_i) \in U$  y cualquier extensión  $\lambda^{i+1}$  debe aplicar  $[a_i, a_{i+1}]$  (arco conexo) en  $U$  y como  $p : U \rightarrow S_i$  es homeomorfismo existe una única  $\varphi : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow U$ ;  $p \circ \varphi = f|_{[a_i, a_{i+1}]}$  entonces  $\varphi = (p|_U)^{-1} \circ f$  por lo que

$$\lambda^{i+1}(s) = \begin{cases} \lambda^i(s) & 0 \leq s \leq a_i \\ \varphi(s) & a_i \leq s \leq a_{i+1}. \end{cases}$$

Así  $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ ;  $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$  para  $i \neq j$ ,  $0 \leq t \leq 1$  se puede considerar como una  $n$ -trenza con cuerdas  $\lambda_i(t)$  empezando en  $q_i$  y finalizando en  $q_{\gamma(i)}$  en un cilindro de  $M$ . Por tanto  $[f] \in \pi_1(\mathcal{F}_n(M)/\Sigma_n)$  está asociado biunívocamente con  $[\lambda] \in B_n(M)$ .

# Grupo de trenzas del plano proyectivo real

En este capítulo se mostrará la naturaleza exacta del grupo de trenzas del plano proyectivo real de  $n$  cuerdas, que tendrá distintas presentaciones según sea el número de cuerdas. Se probará que para  $n = 1$  éste grupo es cíclico de orden 2, así mismo para  $n = 2$  se mostrará la relación con el grupo cuaternion y por fin se finaliza mostrando que para valores de  $n > 2$  el grupo de trenzas del plano proyectivo real es infinito.

## 3.1 Grupo de trenzas algebraicas

El grupo de trenzas algebraicas del plano proyectivo real de  $n$  cuerdas,  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ , es definido por el grupo de  $2n - 1$  generadores  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  sujeto a las siguientes relaciones:

- (i)  $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$  para  $|i - j| \geq 2$  y  $i, j = 1, 2, \dots, n - 1$ .
- (ii)  $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ .
- (iii)  $\sigma_i \rho_j = \rho_j \sigma_i$  si  $j \neq i, i + 1$ ;  $1 \leq i \leq n - 1$ ;  $1 \leq j \leq n$ .
- (iv)  $\rho_i = \sigma_i \rho_{i+1} \sigma_i$  si  $1 \leq i \leq n - 1$ .
- (v)  $\rho_{i+1}^{-1} \rho_i^{-1} \rho_{i+1} \rho_i = \sigma_i^2$  si  $1 \leq i \leq n - 1$ .
- (vi)  $\rho_1^2 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \dots \sigma_2 \sigma_1$ .

Una pregunta inmediata es saber como son estos generadores, para ello empezaremos dando una idea gráfica de los mismos.

Primeramente, el generador  $\sigma_i$  puede interpretarse como la trenza que intercambia las cuerdas  $i$  con  $i + 1$ , como se aprecia en la Figura 3.1.



Figura 3.1: Un diagrama para  $\sigma_i$  y para  $\sigma_i^{-1}$

Geoméricamente, el generador  $\rho_i$  se puede interpretar por la construcción siguiente: una el punto inicial de la cuerda  $i$  ubicada sobre el disco superior  $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$  con el punto  $P$  ubicado sobre la frontera de  $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$  en el nivel  $\mathbb{D}^2 \times \{t\}$  esto genera un arco el cual denotaremos por  $\alpha_i$ . Luego coloque un segundo punto  $P'$  sobre  $\mathbb{D}^2 \times \{t\}$  de tal manera que  $P$  y  $P'$  sean simétricas sobre el centro del plano de nivel  $\mathbb{D}^2 \times \{t\}$  y finalmente una el punto  $i$  ubicado sobre el disco inferior con el punto  $P'$ . Esto genera un nuevo arco que denotaremos por  $\alpha'_i$ . Ver Figura 3.2.

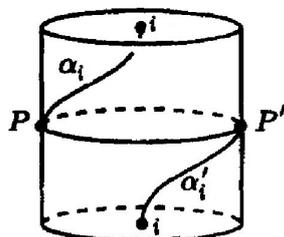


Figura 3.2:  $\rho_i = \alpha_i \cup \alpha'_i$

Luego identificando el disco con la forma del plano proyectivo real  $\mathbb{R}P^2$ , note que  $P$  y  $P'$  son el mismo punto. Por tanto después de la identificación se tiene que  $\rho_i = \alpha_i \cup \alpha'_i$  es un arco simple en  $\mathbb{R}P^2 \times [0, 1]$  y observe que este arco no es la trenza trivial. Así,  $\rho_i$  es un generador no trivial de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ . Ver Figura 3.3.

Seja  $\pi$  una aplicación que actua de  $\mathcal{B}_n(\mathbb{R}P^2)$  sobre el grupo simétrico de grado  $n$  y definido como sigue,

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{B}_n(\mathbb{R}P^2) &\longrightarrow \Sigma^n \\ \sigma_i &\longmapsto \pi(\sigma_i) = (i, i + 1) \\ \rho_j &\longmapsto \pi(\rho_j) = (1). \end{aligned}$$

Note que así definido la aplicación  $\pi$  es un homomorfismo.

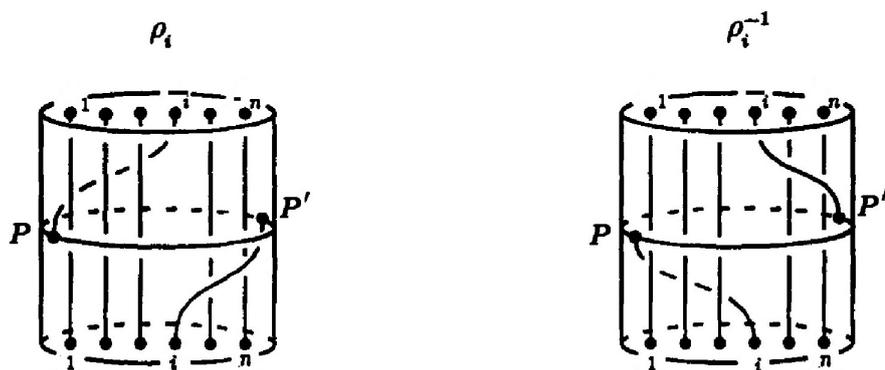


Figura 3.3: El generador  $\rho_i$  y su inverso  $\rho_i^{-1}$

Se denota por  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  al subgrupo de todos los elementos de  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  que consiste de todas las  $n$ -trenzas  $\beta$  con la propiedad  $\pi(\beta)(1) = 1$ , es decir,  $\pi(\beta)$  deja al número 1 invariante.

Se dice que dos  $n$ -trenzas  $\beta_1$  y  $\beta_2$  pertenecen a la misma clase lateral derecha si y solo si  $\beta_1\beta_2^{-1} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  y también  $\pi(\beta_1)(1) = \pi(\beta_2)(1)$ . Cada clase lateral derecha  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)\beta$  de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  en  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  consiste de  $n$ -trenzas  $\gamma$  con  $\pi(\gamma)(1) = k$  para algún  $k$  con  $1 \leq k \leq n$ . Por tanto, existen  $n$  distintas clases laterales derechas de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  en  $B_n(\mathbb{R}P^2)$ .

Los elementos  $M_i = \sigma_i\sigma_{i-1}\dots\sigma_1$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ),  $M_0 = 1$  sirven como representantes de clase lateral derecha de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$ , esto es ya que la permutación  $\pi(M_i)$  actúa de la misma forma que la imagen bajo  $\pi$  de cualquier elemento de la clase  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)M_i$ .

**Proposición 3.1.**  $B_1(\mathbb{R}P^2)$  es cíclico de orden 2.

**Demostración.** Sea  $P_1$  un punto sobre  $\mathbb{R}P^2$  y  $A_1 = P_1 \times \{0\}$  punto sobre  $\mathbb{R}P^2 \times \{0\}$ .

**Afirmación:**  $B_1(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2, P_1)$ .

En efecto, considere la proyección natural

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}P^2 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}P^2 \times \{0\} \\ (x, t) &\longmapsto (x, 0). \end{aligned}$$

Si dos trenzas de 1 cuerda  $\beta$  y  $\beta'$  son isotópicas, entonces  $p(\beta)$  y  $p(\beta')$  son homotópicas (rel  $P_1$ ) y por tanto  $p$  induce un homomorfismo

$$p_* : B_1(\mathbb{R}P^2) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^2, A_1).$$

Luego para cada lazo  $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}P^2 \times \{0\}$  con  $f(0) = f(1) = A_1$ , se asigna a la trenza de una cuerda  $\beta \in \mathbb{R}P^2$  para  $0 \leq t \leq 1$ , por

$$\beta(t) = (f(t), t) \in \mathbb{R}P^2 \times [0, 1].$$

Desde que  $p(\beta(t)) = f(t)$ , la aplicación  $p_*$  es un homomorfismo sobreyectivo.

Para probar la inyectividad suponga que  $p_*(\beta) = [1]$  y como  $p_*(\beta) = [f]$ , entonces  $f$  es contractible, luego existe una aplicación continua

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}P^2 \times \{0\}$$

tal que

- $H(s, 0) = H(s, 1) = H(0, t) = A_1$ , para  $0 \leq t \leq 1$ .
- $H(1, t) = f$ .

Para cada  $s$  con  $0 \leq s \leq 1$ , la aplicación  $(H(s, t), t) \in \mathbb{R}P^2 \times [0, 1]$  con  $0 \leq t \leq 1$ , es denotada por  $\gamma_s$ , trenza de una cuerda en  $\mathbb{R}P^2$ . En particular  $\gamma_0$  es la trenza trivial y  $\gamma_1 = \beta$ . Desde que  $(H(s, t), t)$  puede ser extendido a una isotopía conectando la trenza trivial  $\gamma_0 = 1$  y  $\gamma_1 = \beta$ , sigue que  $\beta$  es isotópico a 1. Así,  $p_*$  es un isomorfismo, i.e,  $B_1(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2 \times \{0\}, A_1) (\cong \pi_1(\mathbb{R}P^2, P_1))$ .

Por otro lado, como  $\pi_1(\mathbb{R}P^2, P_1) \cong \mathbb{Z}_{(2)}$  (ver [8, Pag. 211]). Entonces  $B_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_{(2)}$ . ■

**Proposición 3.2.**  $B_2(\mathbb{R}P^2)$  es un grupo finito de orden 16.

**Demostración.**  $B_2(\mathbb{R}P^2)$  tiene la presentación:

$$G = \langle \sigma_1, \rho_1, \rho_2 \mid \rho_1 = \sigma_1 \rho_2 \sigma_1, \rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2 \rho_1 = \sigma_1^2, \rho_1^2 = \sigma_1^2 \rangle, \quad (3.1)$$

usando la relación  $\rho_2 = \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1}$  y  $\rho_1^2 = \sigma_1^2$  se tiene,

$$\sigma_1^2 \rho_2^2 = \sigma_1^2 \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \rho_1 \sigma_1^{-2} \rho_1 \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \rho_1 \rho_1^{-2} \rho_1 \sigma_1^{-1} = 1.$$

De la tercera relación  $\rho_2^{-1} \rho_1^{-1} \rho_2 \rho_1 = \sigma_1^2$  se obtiene  $\sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} = \rho_1 \sigma_1^{-1} \rho_1$ . Así,

$$\begin{aligned} \rho_2 \sigma_1 \rho_2 &= \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} \sigma_1 \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} = \rho_1 \sigma_1^{-1} \rho_1 \\ &= \sigma_1 \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} \sigma_1 \sigma_1^{-1} \rho_1 \sigma_1^{-1} \sigma_1 = \sigma_1 \rho_2 \sigma_1 \rho_2 \sigma_1. \end{aligned}$$

Luego  $G$  puede ser expresado de la siguiente forma (por simplicidad escribimos  $\sigma$  por  $\sigma_1$  y  $\rho$  por  $\rho_2$ )

$$\begin{aligned} G &= \langle \sigma, \rho \mid \rho\sigma\rho = \sigma\rho\sigma\rho\sigma; \sigma^2\rho^2 = 1 \rangle \\ &= \langle \sigma, \rho \mid R_1 = \sigma^{-1}\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho\sigma\rho = 1; R_2 = \rho^2\sigma^2 = 1 \rangle \end{aligned}$$

Ahora sea  $H$  la cerradura normal de  $\sigma$  (ver Definición A.1). Entonces por el Teorema A.2 se obtiene,

$$G/H = \langle \sigma, \rho \mid \rho\sigma\rho = \sigma\rho\sigma\rho\sigma, \rho^2\sigma^2 = 1; \sigma = 1 \rangle = \langle 1, \rho \mid \rho^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}/(2),$$

y el conjunto de representantes de clases laterales derecha de  $H$  en  $G$  es  $\{1, \rho\}$ . Usando el método Reidemeister-Schreier (ver Apéndice) se consigue mostrar una presentación para el subgrupo  $H$ , veremos explícitamente esto.

Primeramente antes de comenzar los cálculos note que el conjunto  $M = \{1, \rho\}$  es un sistema de Schreier (ver Definición A.3) con  $M_1 = 1$  y  $M_2 = \rho$ . Por otro lado, teniendo en vista la Observación A.4, se tiene que  $\bar{\sigma} = 1$ ,  $\bar{\rho} = \rho$ ,  $\overline{\rho\sigma} = \rho$ ,  $\overline{\rho^2} = 1$  y usando la Proposición (A.5) resulta,

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= \varrho(M_1, x_1) = \varrho(1, \sigma) = \sigma\bar{\sigma}^{-1} = \sigma \\ y_{1,2} &= \varrho(M_1, x_2) = \varrho(1, \rho) = \rho\bar{\rho}^{-1} = 1 \\ y_{2,1} &= \varrho(M_2, x_1) = \varrho(\rho, \sigma) = \rho\sigma\overline{\rho\sigma}^{-1} = \rho\sigma\rho^{-1} \\ y_{2,2} &= \varrho(M_2, x_2) = \varrho(\rho, \rho) = \rho^2\overline{\rho^2}^{-1} = \rho^2, \end{aligned}$$

son elementos de  $H$ . Si escribimos  $\mathbf{a}_p = \varrho(\rho^p, \sigma)$  y  $\mathbf{b}_p = \varrho(\rho^p, \rho)$ , entonces el conjunto de generadores se puede dividir en dos partes, siendo estos:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= \varrho(1, \sigma) = \sigma & \mathbf{b}_0 &= \varrho(1, \rho) = 1 \\ \mathbf{a}_1 &= \varrho(\rho, \sigma) = \rho\sigma\rho^{-1} & \mathbf{b}_1 &= \varrho(\rho, \rho) = \rho^2 \end{aligned}$$

Note que de la relación  $R_1 = 1$  se tiene que  $\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1 = \rho\sigma\rho\sigma$ . Así,

$$\begin{aligned} R_{1,1} &= \tau(M_1 R_1 M_1^{-1}) = \tau(\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}\sigma\rho\sigma\rho\sigma) \\ &= \varrho(1, \rho^{-1})\varrho(\overline{\rho^{-1}}, \sigma^{-1})\varrho(\overline{\rho^{-1}\sigma^{-1}}, \rho^{-1})\varrho(\overline{\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}}, \sigma)\varrho(\overline{\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}\sigma}, \rho) \\ &= \varrho(\overline{\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}\sigma\rho}, \sigma)\varrho(\overline{\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}\sigma\rho\sigma}, \rho)\varrho(\overline{\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}\sigma\rho\sigma\rho}, \sigma)\varrho(\overline{\rho^{-1}\sigma^{-1}\rho^{-1}\sigma\rho\sigma\rho\sigma}, \sigma) \\ &= \mathbf{b}_0^{-1}\mathbf{a}_1^{-1}\mathbf{b}_1^{-1}\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{a}_0\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{1,2} &= \tau(M_2 R_1 M_2^{-1}) = \tau(\rho \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho \sigma) \\
&\quad \varrho(1, \rho) \varrho(\bar{\rho}, \sigma^{-1}) \varrho(\overline{\rho \sigma^{-1}}, \rho^{-1}) \varrho(\overline{\rho \sigma^{-1} \rho^{-1}}, \sigma^{-1}) \varrho(\overline{\rho \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1}}, \rho^{-1}) \\
&\quad \varrho(\overline{\rho \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1}}, \sigma^{-1}) \varrho(\overline{\rho \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1}}, \rho) \varrho(\overline{\rho \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho}, \sigma) \\
&= \mathfrak{b}_0 \mathfrak{a}_1^{-1} \mathfrak{b}_1^{-1} \mathfrak{a}_0^{-1} \mathfrak{b}_0^{-1} \mathfrak{a}_1^{-1} \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_1^{-1} \mathfrak{b}_1^{-1} \mathfrak{a}_0^{-1} \mathfrak{a}_1^{-1} \mathfrak{a}_0^{-1} \mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_0 \\
&= \rho \sigma^{-1} \rho^{-1} \rho^{-2} \sigma^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma \rho^2 \sigma = 1 \\
R_{2,1} &= \tau(M_1 R_2 M_1^{-1}) = \tau(\sigma \sigma \rho \rho) = \varrho(1, \sigma) \varrho(\bar{\sigma}, \sigma) \varrho(\bar{\sigma}^2, \rho) \varrho(\overline{\sigma^2 \rho}, \rho) = \mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_0 \mathfrak{b}_0 \mathfrak{b}_1 = \rho \sigma^2 \rho = 1 \\
R_{2,2} &= \tau(M_2 R_2 M_2^{-1}) = \tau(\rho \sigma \sigma \rho) = \varrho(1, \rho) \varrho(\bar{\rho}, \sigma) \varrho(\overline{\rho \sigma}, \sigma) \varrho(\overline{\rho \sigma^2}, \rho) = \mathfrak{b}_0 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1 = \sigma^2 \rho^2 = 1.
\end{aligned}$$

Luego de  $R_{1,2}$ ,  $R_{2,1}$ ,  $R_{2,2}$  se rescata las siguientes relaciones:

$$\mathfrak{a}_1^{-1} \mathfrak{b}_1^{-1} \mathfrak{a}_0^{-1} \mathfrak{a}_1^{-1} \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_0 = 1; \quad \mathfrak{a}_0^2 \mathfrak{b}_1 = 1; \quad \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{b}_1 = 1,$$

Teniendo en cuenta que el conjunto  $M$  es un sistema de Schreier y aplicando el Teorema A.7 se obtiene,

$$\begin{aligned}
H &= \langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 \mid \mathfrak{a}_1^{-1} \mathfrak{b}_1^{-1} \mathfrak{a}_0^{-1} \mathfrak{a}_1^{-1} \mathfrak{b}_1 \mathfrak{a}_0 = 1; \quad \mathfrak{a}_0^2 \mathfrak{b}_1 = 1; \quad \mathfrak{a}_1^2 \mathfrak{b}_1 = 1 \rangle \\
&= \langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1 \mid \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_0 \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0^2 = \mathfrak{a}_1^2 \rangle \\
&= \langle \mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1 \mid (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_0)^2 = \mathfrak{a}_0^2 = \mathfrak{a}_1^2 \rangle,
\end{aligned}$$

donde  $\mathfrak{a}_0 = \sigma$  y  $\mathfrak{a}_1 = \rho \sigma \rho^{-1}$ . Esta presentación es bien conocida y corresponde al grupo cuaternion,  $\mathbb{H}$ . En lo que sigue se mostrará que el orden del grupo cuaternion es igual a 8.

**Afirmación:**  $|\mathbb{H}| = 8$ .

En efecto, desde que  $\rho^2 \sigma^2 = 1$  se tiene  $\rho \sigma = \rho^{-1} \sigma^{-1}$ . Además, teniendo en vista que  $\rho \sigma \rho = \sigma \rho \sigma \rho \sigma$ , resulta

$$\begin{aligned}
(\rho \sigma)^4 &= \rho \sigma \rho \sigma \rho \sigma \rho \sigma = \rho \sigma \rho \rho \sigma \rho = \rho \sigma \sigma^{-2} \sigma \rho = \rho^2 = \sigma^{-2} \\
(\rho^{-1} \sigma^{-1})^4 &= \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} = \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1} \rho^{-1} \sigma^{-1} \rho^{-1} = \rho \sigma \sigma^{-2} \sigma \rho = \rho^2 = \sigma^2.
\end{aligned}$$

Como  $(\rho \sigma)^4 = (\rho^{-1} \sigma^{-1})^4$  entonces  $\sigma^4 = 1$ , esto es  $(\mathfrak{a}_0^2)^2 = 1$  lo cual ofrece que  $|\langle \mathfrak{a}_0^2 \rangle| = 2$ . Del Teorema A.9 se tiene que  $|T(2, 2, 2)| = 4$  y como  $\mathbb{H}/\langle \mathfrak{a}_0^2 \rangle \cong T(2, 2, 2)$  se concluye que  $|\mathbb{H}| = 8$ . Luego,

$$|B_2(\mathbb{R}P^2)| = |G| = 2 |\mathbb{H}| = 16.$$

Con esto queda finalizada la prueba. ■

**Proposición 3.3.**  $P_2(\mathbb{R}P^2)$  es un grupo cuaternion de orden 8.

*Demostración.* Observe que la aplicación  $\pi : B_2(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \Sigma_2$  toma  $\sigma_1$  sobre la transposición (1,2) y  $\rho_1, \rho_2$  sobre la permutación identidad. Como  $\pi$  es un homomorfismo, entonces el núcleo  $P_2(\mathbb{R}P^2)$  es un subgrupo normal de  $B_2(\mathbb{R}P^2)$  generado por los elementos  $\rho_1, \rho_2$ .

Usando la relación  $\sigma_1^2 = \rho_1^2$  de (3.1), se tiene,

$$\rho_1^{-1}\sigma_1 = \rho_1\sigma_1^{-1} \quad y \quad (\sigma_1\rho_1^{-1})^4 = \sigma_1^2 = (\rho_1^{-1}\sigma_1)^4,$$

empleando estas últimas igualdades resulta,

$$\sigma_1^2 = (\rho_1^{-1}\sigma_1)^4 = (\rho_1\sigma_1^{-1})^4 = (\rho_1\sigma_1^{-1})^{-4} = ((\rho_1\sigma_1^{-1})^4)^{-1} = (\sigma_1^2)^{-1} = \sigma_1^{-2}.$$

Así,  $\sigma_1^4 = 1$  lo cual implica que  $\rho_1^4 = 1$ . Ahora usando nuevamente  $\sigma_1^2 = \rho_1^2$  y la relación  $\rho_2 = \sigma_1^{-1}\rho_1\sigma_1^{-1}$  se obtiene,

$$\rho_2^2 = (\sigma_1^{-1}\rho_1\sigma_1^{-1})^2 = \sigma_1^{-1}\rho_1\sigma_1^{-2}\rho_1\sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-1}\rho_1\rho_1^{-2}\rho_1\sigma_1^{-1} = \sigma_1^{-2} = \rho_1^{-2} = \rho_1^2. \quad (3.2)$$

De (3.2) se tiene que  $\rho_2\rho_1 = \rho_2^{-1}\rho_1^{-1}$  y juntamente con la relación  $\rho_2^{-1}\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1 = \sigma_1^2$  resulta,

$$(\rho_2\rho_1)^2 = \rho_2\rho_1\rho_2\rho_1 = \rho_2^{-1}\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1 = \sigma_1^2 = \rho_1^2. \quad (3.3)$$

Por tanto de (3.2) y (3.3) se concluye que  $P_2(\mathbb{R}P^2) = \langle \rho_1, \rho_2 : (\rho_2\rho_1)^2 = \rho_2^2 = \rho_1^2 \rangle$  es una presentación del grupo cuaternion y como fue probado en la afirmación del teorema anterior, todo grupo cuaternion tiene orden 8. Así queda probado este lema. ■

Hasta aquí se tiene mostrado la naturaleza del grupo de trenzas  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  cuando  $n = 1, 2$ . Nuestro objetivo final es probar que para valores de  $n$  cuando  $n > 2$  el grupo de trenzas es un grupo infinito, para esto necesitamos algunos lemas previos que presentaremos en adelante.

Las identidades derivadas de las relaciones (i) a (vi) que se muestran en el siguiente lema serán bien usadas para determinar una presentación de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$ .

**Lema 3.4.** En  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  se satisface las siguientes relaciones:

$$\text{I) } \sigma_k^\varepsilon M_i = M_i \sigma_{k+1}^\varepsilon \quad (k < i, \varepsilon = \pm 1)$$

$$\text{II) } \sigma_i M_i = M_{i-1} a_{i+1}$$

$$\text{III) } \sigma_i^{-1}M_i = M_{i-1}$$

$$\text{IV) } \sigma_{i+1}M_i = M_{i+1}$$

$$\text{V) } \sigma_{i+1}^{-1}M_i = M_{i+1}a_{i+2}^{-1}$$

$$\text{VI) } \sigma_k^\varepsilon M_i = M_i \sigma_k^\varepsilon \quad (k > i + 1, \varepsilon = \pm 1)$$

$$\text{VII) } \rho_j^\varepsilon M_i = M_i (\rho_{j+1} a_{j+1})^\varepsilon \quad (j \leq i, \varepsilon = \pm 1)$$

$$\text{VIII) } \rho_{i+1}^\varepsilon M_i = M_i (a_{i+1}^{-1} a_i^{-1} \cdots a_2^{-1} \rho_1)^\varepsilon \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$\text{IX) } \rho_j^\varepsilon M_i = M_i \rho_j^\varepsilon \quad (j > i + 1, \varepsilon = \pm 1),$$

$$\text{donde } a_i = M_{i-2}^{-1} \sigma_{i-1}^2 M_{i-2}.$$

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad veamos para el caso  $\varepsilon = +1$ .

$$\text{(I) } \bullet k = i - 1 :$$

$$\begin{aligned} \sigma_k M_i &= \sigma_{i-1} \sigma_i \sigma_{i-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_i \sigma_{i-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 && [\text{Por (ii)}] \\ &= \sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \sigma_i && [\text{Por (i), i-2 veces}] \\ &= M_i \sigma_i = M_i \sigma_{k+1}. \end{aligned}$$

$$\bullet k = i - 2 :$$

$$\begin{aligned} \sigma_k M_i &= \sigma_{i-2} \sigma_i \sigma_{i-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_i \sigma_{i-2} \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 && [\text{Por (i)}] \\ &= \sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \sigma_{i-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 && [\text{Por(ii)}] \\ &= \sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \sigma_{i-1} && [\text{Por (i), i-3 veces}] \\ &= M_i \sigma_{i-1} = M_i \sigma_{k+1}. \end{aligned}$$

$$\bullet k = i - r, \text{ para algún } r \text{ con } 3 \leq r \leq i - 1.$$

$$\begin{aligned} \sigma_k M_i &= \sigma_{i-r} \sigma_i \sigma_{i-1} \cdots \sigma_{i-r} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \\ &= \sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_{i-r} \sigma_{i-(r-1)} \sigma_{i-r} \cdots \sigma_2 \sigma_1 && [\text{Por (i), r-1 veces}] \\ &= \sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_{i-(r-1)} \sigma_{i-r} \sigma_{i-(r-1)} \cdots \sigma_2 \sigma_1 && [\text{Por (ii)}] \\ &= \sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \sigma_{i-(r-1)} && [\text{Por (i), i-r-1 veces}] \\ &= M_i \sigma_{i-(r-1)} = M_i \sigma_{k+1}. \end{aligned}$$

$$\text{(II) } M_{i-1} a_{i+1} = M_{i-1} M_{i-1}^{-1} \sigma_i^2 M_{i-1} = \sigma_i \sigma_i M_{i-1} = \sigma_i M_i.$$

$$\text{(III) } \sigma_i^{-1} M_i = \sigma_i^{-1} \sigma_i \sigma_{i-1} \sigma_{i-2} \cdots \sigma_2 \sigma_1 = M_{i-1}.$$

$$(IV) \quad \sigma_{i+1}M_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i-1}\dots\sigma_2\sigma_1 = M_{i+1}.$$

$$(V) \quad M_{i+1}a_{i+2}^{-1} = M_{i+1}M_i^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}M_i = M_{i+1}M_{i+1}^{-1}\sigma_{i+1}^{-1}M_i = \sigma_{i+1}^{-1}M_i.$$

(VI) considerando  $k = i + r$ , para algún  $r$  con  $r \geq 2$ .

$$\begin{aligned} \sigma_k^{+1}M_i &= \sigma_{i+r}\sigma_i\sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\dots\sigma_2\sigma_1 \\ &= \sigma_i\sigma_{i-1}\sigma_{i-2}\dots\sigma_2\sigma_1\sigma_{i+r} \quad [\text{Por (i), } i \text{ veces}] \\ &= M_i\sigma_{i+r} = M_i\sigma_k^{+1}. \end{aligned}$$

(VII)  $j \leq i$

$$\begin{aligned} M_i\rho_{j+1}a_{j+1} &= M_i\rho_{j+1}M_{j-1}^{-1}\sigma_j^2M_{j-1} \\ &= M_iM_{j-1}^{-1}\rho_{j+1}\sigma_j^2M_{j-1} \quad [\text{Por (iii)}] \\ &= \sigma_i\sigma_{i-1}\dots\sigma_j\rho_{j+1}\sigma_j^2M_{j-1} \\ &= \sigma_i\sigma_{i-1}\dots\rho_j\sigma_j^{-1}\sigma_j^2M_{j-1} \quad [\text{Por (v)}] \\ &= \rho_j\sigma_i\sigma_{i-1}\dots\sigma_{j+1}\sigma_j^{-1}\sigma_j^2M_{j-1} \quad [\text{Por (iii), } i-j \text{ veces}] \\ &= \rho_j\sigma_i\sigma_{i-1}\dots\sigma_{j+1}\sigma_jM_{j-1} = \rho_jM_i. \end{aligned}$$

(VIII) Note que  $a_2a_3\dots a_i = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{i-2}\sigma_{i-1}^2\sigma_{i-2}\dots\sigma_2\sigma_1$ .

$$\rho_{i+1}M_i = \rho_{i+1}\sigma_iM_{i-1} = \sigma_i^{-1}\rho_iM_{i-1} = M_i a_{i+1}^{-1} a_i^{-1} \dots a_2^{-1} \rho_1.$$

(IX)  $\rho_jM_i = \rho_j\sigma_i\sigma_{i-1}\dots\sigma_1 = \sigma_i\sigma_{i-1}\dots\sigma_1\rho_j = M_i\rho_j$  [usando (iii),  $i$ -veces].

■

**Lema 3.5.**  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  es generado por  $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, a_2, a_3, \dots, a_n$  y una presentación para este subgrupo es dado por las relaciones:

$$(1) \quad \sigma_j\sigma_k = \sigma_k\sigma_j \quad (|j - k| \geq 2)$$

$$(2) \quad \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1}$$

$$(3) \quad \sigma_j a_k \sigma_j^{-1} = a_k \quad (k \neq j, j+1)$$

$$(4) \quad \sigma_j a_j \sigma_j^{-1} = a_{j+1}$$

$$(5) \quad \sigma_j a_{j+1} \sigma_j^{-1} = a_{j+1}^{-1} a_j a_{j+1}$$

$$(6) \quad \rho_1^2 = a_2 a_3 \dots a_n$$

$$(7) \quad \rho_2 a_2 \rho_2 = \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_3 \sigma_2$$

$$(8) \quad \sigma_j \rho_{j+1} \sigma_j = \rho_j$$

$$(9) \quad \rho_j \sigma_k = \sigma_k \rho_j \quad (j \neq k, k+1)$$

$$(10) \quad \rho_j a_k = a_k \rho_j \quad (j > k)$$

$$(11) \quad \rho_j^{-1} a_k \rho_j = a_j a_k a_j^{-1} \quad (1 < j < k)$$

$$(12) \quad \rho_{j+1}^{-1} \rho_j^{-1} \rho_{j+1} \rho_j = \sigma_j^2 \quad (j > 1)$$

$$(13) \quad \rho_j^{-1} \rho_1 \rho_j = \rho_1 a_j^{-1} \quad (j > 1)$$

$$(14) \quad \rho_j a_j \rho_j^{-1} = \rho_1^{-1} a_2 \cdots a_{j-1} a_j^{-1} a_{j-1}^{-1} \cdots a_2^{-1} \rho_1.$$

**Demostración.** Desde que  $M = \{M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}\}$  es un sistema de Schreier, aplicando el método Reidemeister-Schreier (ver Apéndice) se obtiene los siguientes elementos como generadores de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  (ver Observación A.6),

$$y_{k,i} = \overline{\sigma_k M_i}^{-1} \sigma_k M_i \quad (k = 1, 2, \dots, n-1, i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (3.4)$$

$$y_{n-1+j,i} = \overline{\rho_j M_i}^{-1} \rho_j M_i \quad (j = 1, 2, \dots, n, i = 0, 1, \dots, n) \quad (3.5)$$

y también son obtenidas las relaciones siguientes:

$$1 = M_i^{-1} \sigma_j \sigma_k \sigma_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i \quad (|j - k| \geq 2) \quad (3.6)$$

$$1 = M_i^{-1} \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j+1}^{-1} M_i \quad (3.7)$$

$$1 = M_i^{-1} \rho_1^{-2} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 M_i \quad (3.8)$$

$$1 = M_i^{-1} \sigma_j \rho_{j+1} \sigma_j \rho_j^{-1} M_i \quad (3.9)$$

$$1 = M_i^{-1} \rho_j \sigma_k \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i \quad (j \neq k, k+1) \quad (3.10)$$

$$1 = M_i^{-1} \sigma_j^2 \rho_j^{-1} \rho_{j+1}^{-1} \rho_j \rho_{j+1} M_i. \quad (3.11)$$

Para ser más exactos, haciendo los respectivos cálculos de la expresión (3.4) se obtiene que  $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, a_2, a_3, \dots, a_n$  son los generadores de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$ . Para obtener los generadores restantes tenga en vista que  $\pi(\rho_j)$  es la permutación identidad y en (1,2) usando las expresiones (VII), (VIII) y (IX) del Lema 3.4 resulta,

$$\overline{\rho_j M_i}^{-1} \rho_j M_i = M_i^{-1} \rho_j M_i = \begin{cases} \rho_{j+1} a_{j+1} & \text{si } j \leq i, \\ a_{i+1}^{-1} a_i^{-1} \cdots a_2^{-1} \rho_1 & \text{si } j = i+1, \\ \rho_j & \text{si } j > i+1. \end{cases}$$

Así, se puede decir que  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  son también los generadores de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$ . Apoyándose en las identidades del Lema 3.4, se mostrará que las relaciones de (3.6) a (1.8) pueden ser expresadas en términos de los generadores de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$ . En lo que sigue se realizarán algunos de estos cálculos.

$$\bullet M_i^{-1} \rho_1^{-2} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 M_i = 1$$

\* Si  $i = 0$ :

$$1 = M_0^{-1} \rho_1^{-2} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_2 \sigma_1 M_0 = \rho_1^{-2} a_2 a_3 \cdots a_n. \quad \text{[Probado (6)]}$$

\* Si  $i > 0$ :

$$\begin{aligned} 1 &= M_i^{-1} \rho_1^{-2} \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1 M_i = a_2^{-1} \rho_2^{-1} M_i^{-1} \rho_1^{-1} \sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1 M_i \\ &= a_2^{-1} \rho_2^{-1} a_2^{-1} \rho_2^{-1} M_i^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1 M_i && \text{[Por (VII)]} \\ &= a_2^{-1} \rho_2^{-1} a_2^{-1} \rho_2^{-1} M_i^{-1} M_i \sigma_2 M_i^{-1} \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_1 M_i \\ &= a_2^{-1} \rho_2^{-1} a_2^{-1} \rho_2^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_i \cdots \sigma_{n-1}^2 \cdots \sigma_{i+1} M_{i-1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 M_i && \text{[Por (VI)]} \end{aligned}$$

usando (i) y (ii) se tiene:  $M_{i-1}^{-1} \sigma_i \sigma_{i-1} \cdots \sigma_1 M_i = \sigma_i \cdots \sigma_2 a_2$ . Así reemplazando arriba se tiene probado (7).

$$\bullet M_i^{-1} \sigma_j \rho_{j+1} \sigma_j \rho_j^{-1} M_i = 1 :$$

\* Si  $j > i + 1$ :

$$\begin{aligned} 1 = M_i^{-1} \sigma_j \rho_{j+1} \sigma_j \rho_j^{-1} M_i &= \sigma_j M_i^{-1} \rho_{j+1} \sigma_j \rho_j^{-1} M_i && \text{[por (VI)]} \\ &= \sigma_j \rho_{j+1} M_i^{-1} \sigma_j \rho_j^{-1} M_i && \text{[por (IX)]} \\ &= \sigma_j \rho_{j+1} \sigma_j M_i^{-1} \rho_j^{-1} M_i && \text{[por (VI)]} \\ &= \sigma_j \rho_{j+1} \sigma_j \rho_j^{-1} M_i^{-1} M_i && \text{[por (IX)]} \\ &= \sigma_j \rho_{j+1} \sigma_j \rho_j^{-1}. && \text{[Probado (8)]} \end{aligned}$$

$$\bullet M_i^{-1} \rho_j \sigma_k \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i = 1 :$$

\* Si  $i + 1 < j < k$  ó  $i + 2 < k + 1 < j$ :

$$\begin{aligned} 1 = M_i^{-1} \rho_j \sigma_k \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i &= \rho_j M_i^{-1} \sigma_k \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i && \text{[por (IX)]} \\ &= \rho_j \sigma_k \rho_j^{-1} M_i^{-1} \sigma_k^{-1} M_i \\ &= \rho_j \sigma_k \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1}. && \text{[Probado (9)]} \end{aligned}$$

\* Si  $i + 2 = k + 1 < j$  :

$$\begin{aligned}
 1 = M_i^{-1} \rho_j \sigma_k \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i &= \rho_j M_i^{-1} \sigma_k \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i && \text{[por (IX)]} \\
 &= \rho_j a_{k+1} M_i^{-1} \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i && \text{[Por def. de } a_{k+1}\text{]} \\
 &= \rho_j a_{k+1} \rho_j^{-1} M_i^{-1} \sigma_k^{-1} M_i && \text{[por (IX)]} \\
 &= \rho_j a_{k+1} \rho_j^{-1} a_{k+1}^{-1}. && \text{[Probado (10)]}
 \end{aligned}$$

\* Si  $j < i + 1 = k$  ( $j + 1 \leq i + 1$ )

$$\begin{aligned}
 1 = M_i^{-1} \rho_j \sigma_k \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i &= \rho_{j+1} a_{j+1} M_i^{-1} \sigma_k \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i && \text{[por (VII)]} \\
 &= \rho_{j+1} a_{j+1} a_{i+2} M_k^{-1} \rho_j^{-1} \sigma_k^{-1} M_i && \text{[Por (V)]} \\
 &= \rho_{j+1} a_{j+1} a_{i+2} a_{j+1}^{-1} \rho_{j+1}^{-1} M_k^{-1} \sigma_k^{-1} M_i && \text{[por (VII)]} \\
 &= \rho_{j+1} a_{j+1} a_{i+2} a_{j+1}^{-1} a_{i+2}^{-1}. && \text{[Probado (11)]}
 \end{aligned}$$

•  $M_i^{-1} \sigma_j^2 \rho_j^{-1} \rho_{j+1}^{-1} \rho_j \rho_{j+1} M_i = 1$  :

\* Si  $j > i + 1$  :

$$\begin{aligned}
 1 = M_i^{-1} \sigma_j^2 \rho_j^{-1} \rho_{j+1}^{-1} \rho_j \rho_{j+1} M_i &= \sigma_j^2 \rho_j^{-1} M_i^{-1} \rho_{j+1}^{-1} \rho_j \rho_{j+1} M_i && \text{[Por (VI) y (IX)]} \\
 &= \sigma_j^2 \rho_j^{-1} \rho_{j+1}^{-1} \rho_j \rho_{j+1} M_i^{-1} M_i && \text{[Por (IX) 3 veces]} \\
 &= \sigma_j^2 \rho_j^{-1} \rho_{j+1}^{-1} \rho_j \rho_{j+1}. && \text{[Probado (12)]}
 \end{aligned}$$

\* Si  $j = i + 1$  :

$$\begin{aligned}
 1 = M_i^{-1} \sigma_j^2 \rho_j^{-1} \rho_{j+1}^{-1} \rho_j \rho_{j+1} M_i &= M_i^{-1} \sigma_j^2 \rho_j^{-1} \rho_{j+1}^{-1} M_i a_j^{-1} \dots a_2^{-1} \rho_1 \rho_{j+1} \\
 &= M_i^{-1} \sigma_j^2 \rho_j^{-1} M_i \rho_{j+1}^{-1} a_j^{-1} \dots a_2^{-1} \rho_1 \rho_{j+1} \\
 &= M_i^{-1} \sigma_j^2 M_i \rho_1^{-1} a_2 \dots a_j \rho_{j+1}^{-1} a_j^{-1} \dots a_2^{-1} \rho_1 \rho_{j+1} \\
 &= a_{i+2} \rho_1^{-1} a_2 \dots a_j \rho_{j+1}^{-1} a_j^{-1} \dots a_2^{-1} \rho_1 \rho_{j+1} \\
 &= a_{i+2} \rho_1^{-1} \rho_{j+1}^{-1} \rho_1 \rho_{j+1}. && \text{[Probado (13)]}
 \end{aligned}$$

• Prueba de (3):

\* Si  $k < j$

$$\begin{aligned}
 \sigma_j a_k \sigma_j^{-1} &= \sigma_j M_{k-2}^{-1} \sigma_{k-1}^2 M_{k-2} \sigma_j^{-1} = M_{k-2}^{-1} \sigma_j \sigma_{k-1}^2 M_{k-2} \sigma_j^{-1} && \text{[Por (VI)]} \\
 &= M_{k-2}^{-1} \sigma_{k-1}^2 \sigma_j M_{k-2} \sigma_j^{-1} = M_{k-2}^{-1} \sigma_{k-1}^2 M_{k-2} = a_k. && \text{[Por (i)]}
 \end{aligned}$$

\* Si  $k > j + 1$  ( $j - 1 < k - 2$ )

$$\begin{aligned}\sigma_j a_k \sigma_j^{-1} &= \sigma_j M_{k-2}^{-1} \sigma_{k-1}^2 M_{k-2} \sigma_j^{-1} = M_{k-2}^{-1} \sigma_{j-1} \sigma_{k-1}^2 M_{k-2} \sigma_j^{-1}. & [\text{Por (I)}] \\ &= M_{k-2}^{-1} \sigma_{k-1}^2 \sigma_{j-1} M_{k-2} \sigma_j^{-1} = M_{k-2}^{-1} \sigma_{k-1}^2 \sigma_{j-1} \sigma_{j-1}^{-1} M_{k-2} = a_k. & [\text{Por (i)(I)}]\end{aligned}$$

• Prueba de (4):

$$\begin{aligned}\sigma_j a_j \sigma_j^{-1} &= \sigma_j M_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^2 M_{j-2} \sigma_j^{-1} = M_{j-2}^{-1} \sigma_j \sigma_{j-1}^2 M_{j-2} \sigma_j^{-1} & [\text{Por (VI)}] \\ &= M_{j-1}^{-1} \sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_{j-1} M_{j-1} \sigma_j^{-1} = M_{j-1}^{-1} \sigma_j \sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_{j-1} M_{j-2} \sigma_j^{-1} & [\text{Por (ii)}] \\ &= M_{j-1}^{-1} \sigma_j \sigma_j \sigma_{j-1} \sigma_j M_{j-2} \sigma_j^{-1} = M_{j-1}^{-1} \sigma_j^2 \sigma_{j-1} M_{j-2} \sigma_j \sigma_j^{-1} = a_{j+1}.\end{aligned}$$

• Prueba de (5):

$$\begin{aligned}a_{j+1}^{-1} a_j a_{j+1} &= M_{j-1}^{-1} \sigma_j^{-2} M_{j-1} M_{j-2}^{-1} \sigma_{j-1}^2 M_{j-2} M_{j-1}^{-1} \sigma_j^2 M_{j-1} \\ &= \sigma_i \sigma_j^{-1} \sigma_1^{-1} \cdots \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j-1} \sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_j \sigma_{j-1} \cdots \sigma_1 \sigma_j \sigma_j^{-1} \\ &= \sigma_j M_{j-1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_{j-1}^{-1} \sigma_j^{-1} \sigma_j \sigma_{j-1} \sigma_j \sigma_j \sigma_j M_{j-1} \sigma_j^{-1} & [\text{Por (ii) 2 veces}] \\ &= \sigma_j M_{j-1}^{-1} \sigma_j^2 M_{j-1} \sigma_j^{-1}.\end{aligned}$$

■

Sea el subgrupo de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  generado por  $\rho_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  y denotado por  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}P^2)$ .

**Lema 3.6.** Si  $n > 2$ ,  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}P^2)$  es un grupo libre de rango  $n - 1$  con la presentación:

$$\{\rho_1, a_2, a_3, \dots, a_n : \rho_1^2 = a_2 a_3 \dots a_n\}.$$

**Demostración.** Es suficiente exhibir una presentación de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  en el cual la imagen de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}P^2)$  es libre de rango  $n - 1$ .

Sea  $U_n = \{v, u_2, u_3, \dots, u_n : v^2 = u_2 u_3 \dots u_n\}$  un grupo libre de rango  $n - 1$ . La presentación de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  es dado tomando para los generadores  $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, a_2, a_3, \dots, a_n, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$  los siguientes automorfismos de  $U_n$ :

$$\begin{array}{ll}\sigma_i : U_n \rightarrow U_n & a_i : U_n \rightarrow U_n \\ u_j \mapsto u_j \quad (j \neq i, i+1) & u_j \mapsto u_i u_j u_i^{-1} \\ u_i \mapsto u_{i+1} & v \mapsto u_i v u_i^{-1} \\ u_{i+1}^{-1} \mapsto u_{i+1}^{-1} u_i u_{i+1} & \\ v \mapsto v & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\rho_1 : U_n \rightarrow U_n & \rho_i : U_n \rightarrow U_n \quad (i > 1) \\
u_j \mapsto vu_jv^{-1} & u_j \mapsto w^{-1}u_jw \quad (j > i) \\
v \mapsto v & u_j \mapsto u_j \quad (j < i) \\
& u_i \mapsto w \\
& v \mapsto u_2 \dots u_{i-1}u_i^{-1} \dots u_2^{-1}v.
\end{array}$$

Estos automorfismos satisfacen todas las relaciones exhibidas en el Lema 3.5. En lo que sigue será mostrado que el grupo de automorfismos interiores de  $U_n$ , esto es,  $\text{Inn}(U_n)$  (ver Definición A.11) es generado por los automorfismos  $\rho_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Afirmación 1:**  $\text{Inn}(U_n) = \langle \rho_1, a_2, \dots, a_n \rangle$

En efecto, desde que  $T_v, T_{u_i} \in \text{Inn}(U_n)$  se tiene,

$$\begin{array}{ll}
T_v(v) = vvv^{-1} = v = \rho_1(v) & T_{u_i}(v) = u_ivu_i^{-1} = a_i(v) \\
T_v(u_i) = vu_iv^{-1} = \rho_1(u_i) & T_{u_i}(u_j) = u_iu_ju_i^{-1} = a_i(u_j).
\end{array}$$

Así,  $T_v = \rho_1, T_{u_i} = a_i \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}P^2)$ .

Recíprocamente, por como está definido los automorfismos  $\rho_1, a_2, \dots, a_n$ , se tiene que cada automorfismo de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}P^2)$  es un automorfismo interior. Por lo tanto se tiene probada la afirmación ■

**Afirmación 2:**  $\rho_1^2 = a_2a_3 \dots a_n$ .

En efecto, sea  $v \in U_n$

$$\begin{aligned}
a_2 \dots a_{n-1}a_n(v) &= a_2a_3 \dots a_{n-1}(u_nv u_n^{-1}) = a_2a_3 \dots a_{n-2}(u_{n-1}u_nv u_n^{-1}u_{n-1}^{-1}) \\
&= u_2 \dots u_nv u_n^{-1} \dots u_2^{-1} = v^2v v^{-2} = v,
\end{aligned}$$

y

$$\rho_1^2(v) = \rho_1(\rho_1(v)) = \rho_1(v) = v.$$

Ahora sea  $u_j \in U_n$  se tiene

$$\begin{aligned}
a_2 \dots a_n(u_j) &= a_2 \dots a_{n-1}(u_nu_ju_n^{-1}) = a_2a_3 \dots a_{n-2}(u_{n-1}u_nu_ju_n^{-1}u_{n-1}^{-1}) \\
&= u_2 \dots u_nu_ju_n^{-1} \dots u_2^{-1} = v^2u_jv^{-2},
\end{aligned}$$

y

$$\rho_1^2(u_j) = \rho_1(\rho_1(u_j)) = v^2 u_j v^{-2}.$$

Por tanto de las igualdades arriba se obtiene la afirmación. ■

Por definición de grupo de automorfismo interior de  $U_n$  (grupo libre) se sabe que  $\text{Int}(U_n) \cong U_n/Z(U_n)$  (ver Proposición A.12). Como  $Z(U_n)$  es sin centros para valores de  $n > 2$ . Entonces,  $\text{Int}(U_n) \cong U_n$  y por la afirmación 1 y 2, es lo mismo a decir que  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}P^2) \cong U_n$ , bajo la correspondencia  $v \leftrightarrow \rho_1$ ;  $u_i \leftrightarrow a_i$ . Con esto queda finalizada la prueba del lema. ■

**Proposición 3.7.**  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  es un grupo infinito para  $n > 2$ .

*Demostración.* Como  $\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2)$  es un subgrupo finitamente generado del grupo finitamente generado  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$ , mediante cálculos se tiene que  $\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2)$  es un subgrupo normal de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$ . Una presentación del grupo cociente  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)/\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2)$  se obtiene a partir de la presentación de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  mediante la adición de las relaciones  $\rho_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \dots, a_n = 1$ . La adición de estas relaciones anulan las relaciones (3), (4), (5), (6), (10), (11), (13) y (14) del Lema 3.5 y también observe que la relación (7) queda alterada por  $\rho_2^2 = \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-1} \sigma_{n-1} \cdots \sigma_3 \sigma_2$ .

Considerando la correspondencia  $\sigma_i \leftrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}P^2)\sigma_i$  y  $\rho_i \leftrightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}P^2)\rho_i$ , para  $i = 2, \dots, n-1$ , se tiene que  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)/\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2)$  es isomorfo al subgrupo de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  generado por los elementos  $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_2, \dots, \rho_n$  sujeto a las relaciones:

$$(1) \quad \sigma_j \sigma_k = \sigma_k \sigma_j \quad (|j - k| \geq 2)$$

$$(2) \quad \sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}$$

$$(8) \quad \sigma_j \rho_{j+1} \sigma_j = \rho_j$$

$$(9) \quad \rho_j \sigma_k = \sigma_k \rho_j \quad (j \neq k, k+1)$$

$$(12) \quad \rho_{j+1}^{-1} \rho_j^{-1} \rho_{j+1} \rho_j = \sigma_j^2 \quad (j > 1)$$

$$(7) \quad \rho_2^2 = \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{n-2} \sigma_{n-1}^2 \sigma_{n-2} \cdots \sigma_3 \sigma_2.$$

Así, el subgrupo de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)$  generado por los elementos  $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_2, \dots, \rho_n$  satisface las relaciones de (i) al (vi) (en la Sección 3.1). Por tanto este es el grupo de trenza algebraico  $B_{n-1}(\mathbb{R}P^2)$  de  $2n-3$  generadores sobre  $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{n-1}, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ . Por tanto, se tiene  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}P^2)/\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2) \cong B_{n-1}(\mathbb{R}P^2)$  y desde que  $\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2)$  es un grupo

---

libre de rango mayor que 1 (puesto que  $n > 2$ ), se tiene que  $\mathcal{A}(\mathbb{R}P^2)$  es infinito. Así concluimos que  $B_{n-1}(\mathbb{R}P^2)$  es infinito y por ende  $B_n(\mathbb{R}P^2)$  es también infinito. ■

## Resultados Básicos

En este apéndice son presentados resultados preliminares utilizados en el desenvolvimiento de este trabajo. Aunque sean omitidas las demostraciones de estos resultados, son citadas referencias que las contienen.

**Definición A.1.** Sea  $G$  un grupo y sea  $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, \dots\}$  (finito o infinito) un subconjunto de  $G$ . Entonces el más pequeño subgrupo normal de  $G$  que contiene a  $\mathcal{G}$  se llama la *cerradura normal* de  $\mathcal{G}$  en  $G$ .

**Teorema A.2.** [10, Theorem 4.2, Appendix I] Sea

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_m = 1 \rangle,$$

una presentación de un grupo  $G$ . Sea  $\{S_1, S_2, \dots, S_l\}$  un conjunto de elementos de  $G$ , donde cada  $S_i$  es una palabra en  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}$ . Además, sea  $N$  la cerradura normal de  $\{S_1, S_2, \dots, S_l\}$  en  $G$ . Entonces el grupo cociente  $G/N$  tiene una presentación de la forma:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_m = 1, S_1 = 1, S_2 = 1, \dots, S_l = 1 \rangle.$$

### A.1 Método Reidemeister-Schreier

El método Reidemeister-Schreier es muy utilizado para determinar explícitamente las presentaciones de subgrupos. Dado que el método tiene un papel fundamental en varias secciones de este trabajo, vamos describir cómo funciona el método.

Suponga que se nos da una presentación del grupo  $G$ , que podemos tomar como:

$$G = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \dots, R_m = 1 \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Dado un subgrupo  $H$  de  $G$ , para aplicar este método es necesario tener un completo sistema  $M$  de representantes de clases laterales derecha, i.e,  $M = \{M_1, M_2, \dots\}$  donde cada  $M_i$  deberá estar escrito de forma explícita como una palabra en  $x_1, x_2, \dots, x_n$  o sus inversos. Note que cada elemento,  $g$ , de  $G$  es escrito como  $g = hM_i$  para algún  $h \in H$  y  $M_i \in M$ . Además se puede escribir,

$$M_i = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k},$$

donde  $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n$  y  $\varepsilon_i = \pm 1$ . Se asumirá que  $M_1 = 1$ .

**Definición A.3.** Se dice que el conjunto  $M$  es un sistema de Schreier (o satisface la condición Schreier) si para cada  $M_i$  las siguiente  $k - 1$  partes consecutivas, iniciales de  $M_i$

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1}, x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2}, x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} x_{i_3}^{\varepsilon_3}, \dots, x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_{k-1}}^{\varepsilon_{k-1}},$$

pertenecen a  $M$ .

**Observación A.4.** Tenga en cuenta que para un elemento  $g \in G$ ,  $\bar{g}$  denota el representante de la clase lateral derecha en  $M$  de la clase  $Hg$ . Si  $g \in H$ , entonces  $\bar{g} = 1$ .

**Proposición A.5.** [10, Proposition 6.2, appendix I] Supongamos que  $G$  es un grupo cuya presentación es conocida,  $H$  un subgrupo de  $G$  y  $M$  el conjunto de los  $M_i$ , representantes de clases laterales derecha de  $H$  en  $G$ .

(1) Para todo elemento  $g \in G$  y  $M_i \in M$ , para  $i = 1, 2, \dots$ ,

$$\varrho(M_i, g) = M_i g \overline{M_i g}^{-1},$$

es un elemento de  $H$

(2) Para  $j = 1, 2, \dots, n$  y  $k = 1, 2, \dots, [G : H]$ . Sea  $y_{j,k} = \varrho(M_k, x_j)$  ( $y_{j,k}^{-1} = \varrho(M_k, x_j^{-1})$ ). Entonces  $H$  es generado por  $y_{j,k}$  y sus inversos.

**Observación A.6.** La Proposición A.5 es también válida si consideramos los  $M_i$  como representantes de clase lateral izquierda de  $H$  en  $G$  y en este caso se tendría:

(1)  $\varrho(g, M_i) = \overline{g M_i}^{-1} g M_i$ , es un elemento de  $H$ .

(2) Si  $y_{j,k} = \varrho(x_j, M_k)$ . Entonces  $H$  es generado por  $y_{j,k}$  y sus inversos.

Sea  $h$  un elemento de  $H$ , entonces  $h$  se puede escribir como  $h = x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_p}^{\varepsilon_p}$ . Se denota por  $\tau$  a la transformación

$$\tau(x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_k}^{\varepsilon_k}) = \varrho(1, x_{i_1}^{\varepsilon_1}) \varrho(\overline{x_{i_1}^{\varepsilon_1}}, x_{i_2}^{\varepsilon_2}) \dots \varrho(\overline{x_{i_1}^{\varepsilon_1} x_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots x_{i_{p-1}}^{\varepsilon_{p-1}}}, x_{i_p}^{\varepsilon_p}).$$

**Teorema A.7.** [10, Theorem 6.3] Sea  $G$  un grupo con la presentacion como en (A.1) y suponga que  $H$  es un subgrupo de  $G$ . Se  $M = \{M_1 = 1, M_2, \dots\}$  es un sistema de Schreier, entonces  $H$  tiene la siguiente presentaci3n

$$H = \langle y_{j,k} \mid R_{l,k} \text{ para } j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, [G : H] \rangle,$$

donde  $R_{l,k} = \tau(M_k R_l M_k^{-1})$ .

## A.2 Grupo Triangular

El grupo de trenzas pero muy en particular los grupos cocientes del grupo de trenzas proveen un 1rea de estudio e investigaci3n muy rico. Por lo tanto, es 1til hacerse una idea de algunos de los grupos que se pueden mostrar que son isomorfos a los grupos cocientes del grupo de trenzas. Uno de tales ejemplos, muy conocido por los ge3metras, es el llamado grupo triangular, o, equivalentemente, el grupo poliedral.

**Definici3n A.8.** Suponga que  $l, m$  y  $n$  son n1meros enteros mayores que 1, entonces el grupo definido por la presentaci3n

$$\langle a, b \mid a^l = b^m = (ab)^n = 1 \rangle$$

es llamado el grupo triangular y denotado por  $T(l, m, n)$ .

**Teorema A.9.** [10, Theorem 7.1] El grupo triangular  $T(l, m, n)$ , para  $l, m, n \geq 2$ , es finito si y solo si

$$\delta = \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 > 0. \quad (\text{A.2})$$

Adem1s, como por (A.2) uno de  $l, m, n$  debe ser igual a 2, digamos  $l = 2$ , entonces el orden de un grupo triangular finito es

$$\frac{4mn}{4 - (m - 2)(n - 2)}.$$

## A.3 Automorfismos interiores

**Definición A.10.** Sea  $(G, *)$  un grupo, se define el centro del grupo  $G$  como sigue:

$$Z(G) := \{g \in G : \forall h \in G, g * h = h * g\}.$$

**Definición A.11.** Sea  $G$  un grupo, un automorfismo de  $G$  es un homomorfismo biyectivo de  $G$  en si mismo. Sea  $x \in G$ ; la función definida por

$$\begin{aligned} f_x &: G \longrightarrow G \\ y &\mapsto f_x(y) = x^{-1}yx, \end{aligned}$$

es un automorfismo de  $G$  y se denomina automorfismo interior de  $G$  determinado por  $x$ .

El conjunto de todos los automorfismos interiores,  $f_x$  (inducido por  $x \in G$ ) forma un subgrupo normal de  $Aut(G)$  (conjunto de automorfismos) y es denotado por  $Inn(G)$ .

**Proposición A.12.** [10, Proposition 2.4, appendix I] Sea  $Z(G)$  el centro del grupo  $G$  entonces,

$$Inn(G) \cong G / Z(G).$$

Por tanto, si  $Z(G) = \{e\}$  entonces

$$G \cong Inn(G).$$

## A.4 Homotopia de caminos

Antes de definir el grupo fundamental de un espacio  $X$ , vamos a considerar caminos sobre  $X$  y una relación de equivalencia entre ellos conocida como homotopía de caminos.

**Definición A.13.** Si  $f$  y  $f'$  son aplicaciones continuas del espacio  $X$  en el espacio  $Y$ , decimos que  $f$  es homotópica a  $f'$  si existe una aplicación continua  $F : X \times I \rightarrow Y$  tal que

$$F(x, 0) = f(x) \quad y \quad F(x, 1) = f'(x)$$

para cada  $x \in X$  (aquí considere  $I = [0, 1]$ ). La aplicación continua  $F$  se conoce como homotopía entre  $f$  y  $f'$ . Si  $f$  es homotópica a  $f'$ , escribimos  $f \simeq f'$ .

En términos más simples, si pensamos en el parámetro  $t$  como representante del tiempo, entonces se dice que la homotopía  $F$  describe una deformación continua de la aplicación  $f$  en la aplicación  $f'$ , cuando  $t$  se mueve de 0 a 1.

Si  $f$  y  $f'$  son dos caminos en  $X$ , existe una relación más fuerte entre ellos que la de homotopía. Está definida como sigue:

**Definición A.14.** *Dos caminos  $f$  y  $f'$  que aplican el intervalo  $I$  en  $X$ , se dice que son homotópicos por caminos si tienen el mismo punto inicial  $x_0$  y el mismo punto final  $x_1$  y si existe una aplicación continua  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que*

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s) \quad \text{y} \quad F(s, 1) = f'(s), \\ F(0, t) &= x_0 \quad \text{y} \quad F(1, t) = x_1, \end{aligned}$$

para cada  $s \in I$  y cada  $t \in I$ . La aplicación  $F$  recibe el nombre de homotopía de caminos entre  $f$  y  $f'$  y se denota por  $f \simeq_p f'$ .

**Lema A.15.** *[9, Lema 51.1] Las relaciones  $\simeq$  y  $\simeq_p$  son relaciones de equivalencia.*

Si  $f$  es un camino, denotaremos su clase de equivalencia de homotopía de caminos por  $[f]$ .

**Definición A.16.** *Si  $f$  es un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$  y  $g$  es un camino en  $X$  de  $x_1$  a  $x_2$ , definimos el producto  $f * g$  de  $f$  y  $g$  como el camino  $h$  dado por las ecuaciones*

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, 1/2] \\ g(2s - 1) & \text{para } s \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

La aplicación  $h$  está bien definida siendo continua y además un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_2$ . La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por:

$$[f] * [g] = [f * g]. \tag{A.3}$$

## A.5 Grupo fundamental

El conjunto de las clases de homotopía de caminos en un espacio  $X$  no es un grupo con la operación "\*" (definida en (A.3)) porque el producto de dos clases de homotopía de caminos no siempre está definido. Pero si cogemos un punto  $x_0$  de  $X$  que nos sirva como punto base y tomemos aquellos caminos que comienzan y terminan en  $x_0$ . El

conjunto de sus clases de homotopía de caminos sí es un grupo con la operación "\*" y esto es garantizado por el teorema que se presentará líneas abajo. Éste grupo será denominado *grupo fundamental* de  $X$ .

**Teorema A.17.** [9, Teorema 51.2] *La operación \* tiene las siguientes propiedades:*

1. (Asociatividad). Si  $[f] * (g) * [h]$  está definida, entonces también lo está  $([f] * [g]) * [h]$  y son iguales.

2. (Neutro a izquierda y derecha). Dado  $x \in X$ , denotamos por  $e_x$  el camino constante  $e_x : I \rightarrow X$  que lleva todo  $I$  al punto  $x$ . Si  $f$  es un camino en  $X$  desde  $x_0$  hasta  $x_1$ , entonces

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \quad \text{y} \quad [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

3. (Inverso). Dado el camino  $f$  en  $X$  desde  $x_0$  hasta  $x_1$ , sea  $\bar{f}$  el camino definido por  $\bar{f}(s) = f(1 - s)$ , el cual se conoce como inverso de  $f$ . Entonces

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad \text{y} \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_1}].$$

**Definición A.18.** Sea  $X$  un espacio topológico y  $x_0$  un punto de  $X$ . un camino en  $X$  que comienza y termina en  $x_0$  se llama lazo basado en  $x_0$ . El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociada a los lazos basados en  $x_0$ , con la operación \* se denota por  $\pi(X, x_0)$ .

$$\pi(X, x_0) = \frac{S(x_0)}{\simeq} = \{[f] / f \in S(x_0)\},$$

donde  $S(x_0) = \{f / f : I \rightarrow X, f(0) = f(1) = x_0\}$ .

Claramente el Teorema A.17 nos garantiza que  $\pi(X, x_0)$  es un grupo y es denominado como *grupo fundamental* de  $X$  relativo al punto base  $x_0$ .

# Bibliografía

---

- [1] Artin, E., *Theorie der zöple*, Abh. Math. Sem., Hamburg 4 (1925), 47–72.
- [2] Artin, E., *Theory of braid*, Annals of Math., 48 (1947), 101–126.
- [3] Artin, E., *Braids and permutations*, Ann. of Math., 48 (1947), 643–649.
- [4] Conçalves, D. L and Guaschi, J., *The braid groups of the projective plane*, Algebraic Geometric Topology, 4(2004), 757–780.
- [5] Fadell, E., and Neuwirth, L., *Configuration spaces*, Math. Scand., 10(1962), 111–118.
- [6] Fox, R. H., and Neuwirth, L., *The braid groups*, Math. Scand., 10(1962), 119–126.
- [7] Kassel, C. and Turaev, V., *Braid groups*, Springer, (2008).
- [8] Kosniowski, C., *Topología Algebraica*, Reverté, (1985).
- [9] Munkres, J. R., *Topología*, segunda edición, Pearson Educación, Madrid, (2002).
- [10] Murasugi, K., and Kurpita, B. L., *A study of braids*. Kluwer Academic Publishers, (1999).
- [11] Van Buskirk, J., *Braid groups of compact 2-manifolds with elements of finite order*, Trans. Amer. Math. Soc., 122(1966), 81–97.
- [12] Wang, J. H., *On the braid groups for  $\mathbb{R}P^2$* , J. Pure Appl. Algebra 166(2002), 203–227.