



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

**Elementos finitos especiales aplicados a problemas
elípticos de 2do orden con coeficientes no suaves**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Martha Hilda TIMOTEO SANCHEZ

ASESOR

Mg. Edinson Raúl MONTORO ALEGRE

Lima, Perú

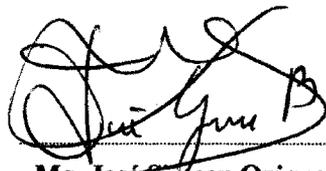
2002

**ELEMENTOS FINITOS ESPECIALES APLICADOS A PROBLEMAS ELIPTICOS
DE 2do ORDEN CON COEFICIENTES NO SUAVES**

Martha Hilda Timoteo Sánchez

Tesis presentada a consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas, de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para Obtener el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobada por:



Mg. José Simeon Quique Broncano



Mg. Martha Olinda Gonzales Bohorquez



Mg. Edinson Montoro Alegre

Lima-Perú
Marzo-2002

TIMOTEO SÁNCHEZ, MARTHA HILDA

**ELEMENTOS FINITOS ESPECIALES
APLICADOS A PROBLEMAS ELIPTICOS DE
2do ORDEN CON COEFICIENTES NO
SUAVES,(Lima)2002.**

vii, 87 pag., 21 cmx29,7 cm,(UNMSM,Licenciada,
Matemática, 2002).

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San
Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas
I. Matemática I. UNMSM/F de CM. II. Título

*A mis padres por confiar en mí
A ti madre que me enseñaste la
fuerza de la serenidad y a ser
paciente.*

*A la memoria de mi Padre quien
me enseñó a luchar
contra las adversidades
A la memoria de mis abuelos
José y Teófila*

AGRADECIMIENTOS

- *A la Mg. Roxana López que me inició en el estudio de los Métodos de Elementos Finitos.*
- *Al Mg. Edinson Montoro por su constante apoyo para la culminación de este trabajo .*
- *A mi amiga Lic. Amelia Villanueva por su aliento constante .*
- *A mi amigo Dr. Pedro Contreras Chamorro por sus consejos y en especial por nuestra gran amistad .*
- *A mis hermanos Miguel, José y Catalina quienes me ayudan a cada momento y me fortalecen con su apoyo .*

RESUMEN

ELEMENTOS FINITOS ESPECIALES APLICADOS A PROBLEMAS ELIPTICOS DE 2do ORDEN CON COEFICIENTES NO SUAVES

MARTHA HILDA TIMOTEO SÁNCHEZ

MARZO – 2002

Orientador : Mg. Edinson Montoro
Titulo obtenido : Licenciada en Matemática

En el presente trabajo se considera la solución aproximada de una ecuación diferencial elíptica con valores en la frontera y coeficientes rugosos(no suaves) unidireccionales, analizaremos el siguiente problema modelo:

$$\begin{cases} Lu(x, y) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a(x) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = f(x, y), \forall (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $\Omega = \Omega_0 = (0,1) \times (0,1)$, $f \in L^2(\Omega)$ y $a \in L^\infty(\Omega)$ es una función de x y satisface

$$0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta < \infty \quad (1.2)$$

donde α y β son constantes.

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ B(u, v) \equiv \int_{\Omega} a(\text{gradu} \cdot \text{grad}v) dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.3)$$

La formulación débil (1.3) esta dada por el problema (1.1) y tiene una única solución débil en $H_0^1(\Omega)$ (consecuencia del Teorema de Lax – Milgram). Tendremos tres métodos diferentes de acuerdo al tipo de triangulación y en cada método definiremos espacios de funciones de prueba que tengan buenas propiedades aproximativas, demostramos que sobre estos espacios se cumpla la condición del inf – sup, de esta manera garantizamos la existencia de la solución aproximada.

PALABRAS CLAVES: MÉTODOS ESPECIALES DE ELEMENTOS FINITOS
COEFICIENTES NO SUAVES
INTERPOLACIÓN

ABSTRACT

ESPECIAL FINITE ELEMENTS APPLIED TO ELLIPTIC PROBLEMS OF 2do ORDER WITH NOT SMOOTH COEFFICIENTS

MARTHA HILDA TIMOTEO SÁNCHEZ

MARZO - 2002

Advisor : Mg. Edinson Montoro Alegre
Degree obtained : Degree in Mathematic

In this work the approximate solution of an elliptic differential equation with values in the boundary and unidirectional rough coefficients (not smooth) is considered, we will analyze the following model problem:

$$\begin{cases} Lu(x, y) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a(x) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = f(x, y), \forall (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

where $\Omega = \Omega_0 = (0,1) \times (0,1)$, $f \in L^2(\Omega)$ and $a \in L^\infty(\Omega)$ is a function only of x and satisfies

$$0 < \alpha \leq a(x) \leq \beta < \infty \quad (1.2)$$

where α and β are constants.

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ B(u, v) \equiv \int_{\Omega} a(\text{gradu} \cdot \text{grad}v) dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.3)$$

The weak formulation (1.3) is obtained of problem (1.1) and that has a unique weak solution in $H_0^1(\Omega)$ (result of the Theorema Lax - Milgram). We will have three methods different in accordance with the triangulization and in each method we will define spaces of test functions with has good approximation properties, prove that over spaces are satisfies the condition inf- sup, so we guarantee the existencia of the approximate solution .

KEYS WORDS: ESPECIAL FINITE ELEMENT METHODS
NOT SMOOTH COEFFICIENTS
INTERPOLATION

INDICE

INTRODUCCION

CAPITULO I: PRELIMINARES

	Página
Distribución	1
Espacio $L^p(\Omega)$	3
Espacio de Sobolev	5
Espacio $H^k_0(\Omega), k \in \mathbb{Z}_0^+$	7
Espacio $H^{-k}(\Omega)$	9

CAPITULO II :RESULTADOS PRINCIPALES

Teorema(Proyección)	11
Teorema (Representación de Riesz)	11
Teorema(Representación de Riesz – Frechet)	12
Lema(Principio de Contracción)	12
Teorema (Lax Milgram)	13
Teorema(Generalización de Lax Milgram)	14
Teorema de Interpolación	22
Teorema (Desigualdad de Poincare)	23
Problema modelo para aplicar el teorema de Bernstein	25
Teorema de Berntein	25

CAPITULO III:ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES

Elemento Finito Triangular de Referencia	26
Elemento triangular equivalente	29
Interpolación lineal a trozos sobre triangulos	30

CAPITULO IV

Ecuación Diferencial Eliptica de Segundo Orden	32
Cambio global de variable	32
Condiciones para el cambio local de variable	35

CAPITULO V : ELEMENTOS FINITOS ESPECIALES APLICADOS A PROBLEMAS ELIPTICOS DE 2do ORDEN CON COEFICIENTES NO SUAVES

Método I	46
Método II	53
Método III	67

INTRODUCCION

En el capitulo I hacemos un resumen de propiedades del analisis funcional indicando a los espacios de sobolev.

En el capitulo II damos los principales resultados a utilizar, como lo son el Teorema de Lax-Milgram, el Teorema de Interpolación, asi mismo el resultado de Ivo Babuska donde usamos la condición de inf - sup y el resultado de Bernstein.

En el capitulo III realizamos la descripción matemática de los elementos finitos triangulares.

En el capitulo IV se define el espacio $H^L(\Omega)$, hacemos un cambio de global de variables y aplicamos el teorema de Bernstein, encontrando que la solución global esta en $H_0^1(\Omega) \cap H^L(\Omega)$,asi mismo asumimos que existe un cambio local de variables

En el capitulo V estudiaremos tres metodos distintos de elementos finitos especiales

CAPITULO I PRELIMINARES

I.1 DISTRIBUCIONES (función generalizada)

I.1.1 Soporte Compacto:

Definición

Sea $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$, Ω un conjunto abierto y función $f: \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ el soporte compacto se denota y define:

$$\text{Sop}(f) = \overline{\{x \in \Omega / f (x) \neq 0\}}$$

I.1.2 Espacio $C_0^\infty(\Omega)$

Definición:

Dado $\Omega \subseteq \mathfrak{R}^n$ abierto

$$C_0^\infty(\Omega) = \{ f \in C^\infty(\Omega) / \text{Sop}(f) \text{ es compacto} \} = D(\Omega)$$

I.1.3 Espacio $C_K^\infty(\Omega)$

Definición:

Sea K un conjunto compacto tal que $K \subset \Omega$, $C_K^\infty(\Omega)$ representa al espacio vectorial de las funciones de prueba que son nulas fuera de K .

I.1.4 Distribución

Definición:

Un funcional lineal f definido en el espacio de las funciones de prueba en Ω es una distribución en Ω cuando para todo compacto K de Ω existe una constante $c > 0$ y un entero $m \geq 0$ (dependiente de K en general), tales que

$$\begin{aligned} |(f , u)| &\leq c \| u \|_{K,m} \quad \text{para todo } u \text{ en } C_K^\infty(\Omega) \\ \text{y } \| u \|_{K,m} &= \max \{ |D^p u (x)| ; x \in K, |p| \leq m \} \end{aligned}$$

I.1.5 Ejemplo: Derivada de una Distribución

Si $u \in C^1(\bar{\Omega})$ entonces por el lema de gauss

$$\int \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv \cos \eta_i dx$$

si $v|_{\Gamma} = 0$

entonces

$$\int \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

en particular si $\varphi \in D(\Omega) : \varphi|_{\Gamma} = 0$, por tanto

$$\int \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx = - \int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Esta expresion nos sugiere considerar una distribución T en Ω y asociar a ella el funcional

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = D_i T$$

definido en $C(\Omega)$ por la expresión :

$$(D_i T, \varphi) = -(T, D_i \varphi), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

como

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\alpha x + \beta y)}{\partial x_i} &= \frac{\alpha \partial T(x)}{\partial x_i} + \frac{\beta \partial T(y)}{\partial x_i} \\ DT(\alpha x + \beta y) &= \alpha DT(x) + \beta DT(y) \end{aligned}$$

entonces $D_i T$ es una funcional lineal

Sea $K \subset \Omega$ compacto y $\varphi \in C^\infty(\Omega)$

$$\|\varphi\|_{K,m} = \max \{ |D^p \varphi(x)| ; x \in K, |p| \leq m+1 \}$$

$$\|D_i \varphi\|_{K,m} \leq \|\varphi\|_{K,m+1} \tag{I.1.5.1}$$

Como $|(D_i T, \varphi)| \leq |(T, D_i \varphi)| \leq \|D_i \varphi\|_{K,m}$ (pues T es una distribución) De (I.1.5.1)

$$|(D_i T, \varphi)| \leq c \|\varphi\|_{K,m+1}$$

entonces $D_i T$ es una distribución.

En conclusión si T es una distribución entonces DT es una distribución entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = D_j \text{ de } D_i T$$

La cual sera la distribución $D_j D_i T$ dada por

$$(D_j D_i T, \varphi) = -(D_i T, D_j \varphi) = -(-1)(T, D_j D_i \varphi), \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

en conclusión existe $D^p T$ de la distribución T y esta dada por

$$(D^p T, \varphi) = (-1)^{|p|} (T, D^p \varphi), \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{I.1.5.2}$$

I.1.6 Convergencia puntual en $D'(\Omega)$

Definición:

Una sucesión $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $D'(\Omega)$ converge para la distribución f cuando para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se verifica

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (f_m, \varphi) = (f, \varphi)$$

cuando este es el caso escribimos $\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$ en $D'(\Omega)$

observación :

Es posible construir en $C_0^\infty(\Omega)$ una topología, según la cual las distribuciones en Ω son exactamente los funcionales lineales de $C_0^\infty(\Omega)$ que son continuas en esta topología.

I.1.7 TEOREMA

$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m = f$ en $D'(\Omega)$ entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} D^p f_m = D^p f$ en $D'(\Omega)$

DEMOSTRACION:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} (D^p f_m, \varphi) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|p|} (f_m, D^p \varphi) && \text{(de I.1.5.2)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|p|} (f, D^p \varphi) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-1)^{|p|} (f, D^p \varphi) \\ \lim_{m \rightarrow \infty} (D^p f_m, \varphi) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (D^p f, \varphi) \end{aligned}$$

por tanto $\lim_{m \rightarrow \infty} D^p f_m = D^p f$ en $D'(\Omega)$

I.2 ESPACIOS $L^p(\Omega)$

I.2.1 Espacios $L^p(\Omega)$

Definición:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ medible y $0 < p < \infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \text{ medibles} / \int_{\Omega} |f|^p < \infty \right\}$$

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p \right)^{1/p}$$

I.2.2 Lema

Si $0 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ entonces $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, $\forall a \geq 0, b \geq 0$

1.2.3 Desigualdad de Holder

Para $1 \leq p, q \leq \infty$ tal que $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

1.2.4 Observación:

$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ es un espacio vectorial normado y completo i.e. $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach. Para el caso $p = 2$, es decir, en $L^2(\Omega)$ podemos definir el producto interno:

$$\langle \cdot \rangle : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f, g \in L^2(\Omega), \langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg$$

a) $\langle f, f \rangle \geq 0$

$$\langle f, f \rangle = \int_{\Omega} ff = \int_{\Omega} f^2 \geq 0$$

b) $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \alpha f + \beta g, h \rangle &= \int_{\Omega} (\alpha f + \beta g)h \\ &= \int_{\Omega} \alpha fh + \int_{\Omega} \beta gh = \alpha \int_{\Omega} fh + \beta \int_{\Omega} gh \\ &= \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \end{aligned}$$

c) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

1.2.5 Observación

Si $f = g$

$$\langle f, f \rangle = \int_{\Omega} f^2 = \|f\|_2^2 \text{ por tanto } \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

De (I.1.5) se observa que es una norma inducida, como $L^2(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interno definido entonces $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

1.2.6 Espacio $L^1_{loc}(\Omega)$

Definición

Sea f medible en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, f es localmente integrable en Ω si $\int_K |f(x)| dx < \infty \forall K \subset \Omega$ compacto.

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f \text{ medibles} / f \text{ es localmente integrable}\}$$

para $1 < p < \infty$:

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f / \int_K |f(x)|^p dx < \infty, \forall K \subset \Omega \text{ compacto.} \right\}$$

I.2.7 Observación

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$
$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

en particular $p = 2$, $L^2(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega)$

I.2.8 Observación

Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, f define una distribución T_f tal que

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \varphi \in D(\Omega) \quad (I.2.8.1)$$

La integral tiene sentido como $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ entonces f es integrable y φ continua en $\text{sop}\varphi$ entonces φf es integrable. Además se observa de (I.2.8.1) que es una forma lineal.

Si $\varphi_j \rightarrow 0$ entonces existe K compacto tal que $\text{sop}\varphi_j \subset K \forall j$

$$\text{entonces } |\langle T_f, \varphi_j \rangle| \leq (\text{sop}|\varphi_j(x)|_{x \in K}) \int_K |f(x)| dx$$

entonces $T_f \in D'(\Omega)$

I.2.9 Teorema

Si f y $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ entonces

$$T_f = T_g \text{ (en el sentido de distribuciones) si y solo si } f = g$$

Observación:

Por este teorema la aplicación que a cada $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ asocia $T_f \in D'(\Omega)$ es inyectiva y lineal, por dicha aplicación podemos identificar $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ como un subespacio vectorial de $D'(\Omega)$ (esto justifica el nombre que se le da a las distribuciones de funciones generalizadas). En conclusión consideraremos

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset D'(\Omega)$$
$$L^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$$

I.3 ESPACIOS DE SOBOLEV

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) / D^\alpha f \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

Si $p = 2$ entonces $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$

Donde $D^\alpha f$ indica derivada de f en el sentido de Distribuciones entonces diremos que $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$ si y solamente si $\exists g_\alpha \in L^2(\Omega) / D^\alpha f = g_\alpha$

Nota :Para nuestro estudio estamos considerando funciones reales es decir

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

I.3.1 ESPACIOS DE SOBOLEV $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$

$$H^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) / D^\alpha f \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq k \right\}$$

Se define el producto interno

$$(f/g)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx$$

$$\|f\|_k = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

I.3.2 Teorema

$H^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert

Demostracion:

Sea $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sucesión de Cauchy en $H^k(\Omega)$, como $f_m \in H^k(\Omega)$, $\forall m \in \mathbb{N}$ entonces $f_m \in L^2(\Omega) / D^\alpha f_m \in L^2(\Omega)$, $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\|D^\alpha f_m - D^\alpha f_n\|_2^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f_m - D^\alpha f_n\|_2^2 \leq \|f_m - f_n\|_k < \xi$$

entonces $(D^\alpha f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesion de Cauchy entonces $\exists f_\alpha \in L^2(\Omega) / D^\alpha f_m \rightarrow f_\alpha$ en $L^2(\Omega)$ en particular para $\alpha = 0$ entonces $D^0 f_m \rightarrow f_0$ en $L^2(\Omega)$ es decir $f_m \rightarrow f_0$ en $L^2(\Omega)$ entonces $f_m \rightarrow f_0$ en $D'(\Omega)$ ($L^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$) además de I.1.7

$$D^\alpha f_m \rightarrow Df_0 \text{ en } D'(\Omega) \quad (I.3.2.1)$$

Como $D^\alpha f_m \rightarrow f_\alpha$ en $L^2(\Omega)$ entonces

$$D^\alpha f_m \rightarrow f_\alpha \text{ en } D'(\Omega) \quad (I.3.2.2)$$

De (I.3.2.1) y (I.3.2.2) $D^\alpha f_0 = f_\alpha$ en $D'(\Omega)$ (unicidad del limite)

En conclusión $D^\alpha f_0 \in L^2(\Omega)$ y $f_0 \in L^2(\Omega) \rightarrow f_0 \in H^k(\Omega)$ y $f_m \rightarrow f_0$ en $H^k(\Omega)$

I.3.3 Teorema

- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es tal que $D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ (en el sentido de distribuciones) y si llamamos $\Phi_\varepsilon = \rho_\varepsilon * f$ entonces $\Phi_\varepsilon \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha \Phi_\varepsilon \rightarrow D^\alpha f$ en $L^q(\mathbb{R}^n)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ ($\Phi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$).
- Si $f \in H^k(\Omega)$ y $\text{sop} f$ es compacto en Ω entonces la adherencia de $D(\Omega)$ en $H^k(\Omega)$ contiene toda función f de $H^k(\Omega)$ con soporte compacto Ω y f en $H_0^k(\Omega)$.

I.4 ESPACIO $H_0^k(\Omega)$

Definición

Designamos por $H_0^k(\Omega)$ la adherencia de $C_0^k(\Omega)$ en $H^k(\Omega)$ es decir

$$H_0^k(\Omega) = \overline{C_0^k(\Omega)}^{H^k(\Omega)}$$

I.4.1 Corolario

$D(\Omega)$ es denso en $H_0^k(\Omega)$

Demostración:

Si $f \in H_0^k(\Omega)$ entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe $g \in C_0^k(\Omega)$, $\|f-g\|_k < \frac{\varepsilon}{2}$ como $C_0^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ entonces $g \in H^k(\Omega)$ y tiene soporte compacto entonces g pertenece a la adherencia de $D(\Omega)$ en $H^k(\Omega)$ entonces existe $h \in D(\Omega)$ / $\|g-h\|_k < \frac{\varepsilon}{2}$ estimando obtenemos:

$$\|f-h\|_k = \|f-g+g-h\|_k \leq \|f-g\|_k + \|g-h\|_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

De donde $\|f-h\|_k < \varepsilon$ entonces $\exists h \in D(\Omega)$ tal que $f \rightarrow h$

I.4.2 Teorema

$$H_0^k(\Omega)^\perp = \{u \in H^k(\Omega) , L_k u = 0\} \text{ donde}$$

$$L_k = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$$

Demostración:

(\rightarrow)

Sea $u \in H^k(\Omega)^\perp$ entonces $(u, \Phi) = 0, \forall \Phi$ función de prueba en Ω , tenemos

$$0 = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha \Phi), \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (I.4.2.1)$$

Además

$$(D^\alpha u, D^\alpha \Phi) = (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha D^\alpha \Phi) = (-1)^{|\alpha|} (u, D^{2\alpha} \Phi) \quad (I.4.2.2)$$

Por otro lado

$$(D^{2\alpha} u, \Phi) = (-1)^{|2\alpha|} (u, D^{2\alpha} \Phi) = (u, D^{2\alpha} \Phi) \quad (I.4.2.3)$$

(I.4.2.3) en (I.4.2.2)

$$(D^\alpha u, D^\alpha \Phi) = (-1)^{|\alpha|} (u, D^{2\alpha} \Phi) \quad (I.4.2.4)$$

(I.4.2.4) en (I.4.2.1)

$$0 = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha \Phi) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} (u, D^{2\alpha} \Phi) = 0 \text{ entonces } L_k u = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u$$

entonces $(L_k u, \Phi) = 0$ por tanto $L_k u = 0$

pues f tiene soporte compacto.

(\leftarrow) Sea $u \in \{f \in H^k(\Omega), L_k f = 0\}$ entonces $u \in H^k(\Omega)$ tal que $L_k u = 0$. Además sea $\Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ arbitrario

$$\begin{aligned} (u \setminus \Phi) &= \sum_{|\alpha| \leq k} (D^{2\alpha} u, D^{2\alpha} \Phi) = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} (D^{2\alpha} u, \Phi) \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \int D^{2\alpha} u(x) \Phi(x) dx \end{aligned}$$

Pero $L_k u = 0$ entonces $\sum_{|\alpha| \leq k} D^{2\alpha} u(x) = 0$ entonces $(u \setminus \Phi) = 0, \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ en conclusion $u \in H^k(\Omega)^\perp$.

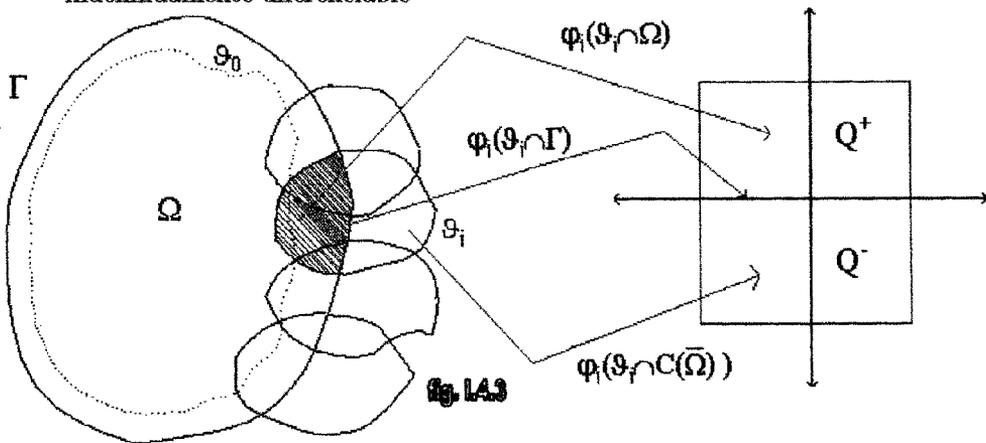
I.4.3 Abiertos regulares

Ω es un abierto regular equivale a garantizar la existencia de una familia finita de abiertos limitados de \mathbb{R}^n , representada por $\{\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m\}$ tales que $\overline{\vartheta_0} \subset \Omega$, $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m\}$ es un recubrimiento abierto de Ω y $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_m\}$ un recubrimiento abierto de Γ , satisfaciendo las siguientes condiciones:

Para cada $j = 1, 2, \dots, m$ existe una aplicación indefinidamente diferenciable

$$\varphi_j : \rightarrow Q = \{y/y = (y', y_n), |y'| < 1, -1 < y_n < 1\}$$

tal que φ_j sea inversible, para cada j , siendo su inversa : $y \rightarrow x = \varphi_j^{-1}(x)$ también indefinidamente diferenciable



Para cada $j = 1, 2, \dots, m$ tenemos

$$\begin{aligned}\varphi_j(\vartheta_j \cap \Omega) &= Q_+ = \{y/y \in Q, y_n > 0\} \\ \varphi_j(\vartheta_j \cap C(\overline{\Omega})) &= Q_- = \{y/y \in Q, y_n < 0\} \\ \varphi_j(\vartheta_j \cap \Gamma) &= Q \cap \{y/y \in \mathbb{R}^n, y_n = 0\}\end{aligned}$$

I.4.4 Teorema

Si Ω es regular y limitado entonces

$$H^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / \sigma_0 u = 0\}$$

$$\text{donde } \sigma_0 : H^1(\Omega) \xrightarrow[u \mapsto \sigma_0 u = u/\Gamma]{} L^2(\Gamma)$$

(Esta aplicación se denomina trazo de $u \in H^1(\Omega)$ sobre su frontera)

I.5 ESPACIOS $H^{-k}(\Omega)$

Definición:

Dado k un número entero tal que $k \geq 1$, representaremos $H^{-k}(\Omega)$ como el espacio dual de $H^k(\Omega)$ es decir:

$$H^{-k}(\Omega) = \{f : H^k(\Omega) \rightarrow K / f \text{ lineal y continuo}\}$$

Provisto de la norma:

$$\|f\|_{-k} = \sup \{|(f, u)|, u \in H_0^k(\Omega), \|u\|_k = 1\}$$

I.5.1 Teorema

$H^{-k}(\Omega)$ es el espacio de las distribuciones de la forma

$$f = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f_\alpha \quad \forall f_\alpha \in L^2(\Omega)$$

Demostración:

(\rightarrow) Sea $f \in H^{-k}(\Omega)$ entonces $f : H^k(\Omega) \rightarrow R / f$ lineal y continuo entonces $f|_{C_0^\infty(\Omega)} \in D'(\Omega)$ (continuemos representandola como f). Por el teorema de Riesz: Si $f : H_0^k(\Omega) \rightarrow R$ es funcional lineal continuo entonces

$$\exists u_0 \in H_0^k(\Omega) / f(u_0) = (u \setminus u_0)_k \quad \forall u \in H_0^k(\Omega)$$

como $u_0 \in H_0^k(\Omega)$ entonces $D^\alpha u_0 \in L^2(\Omega)$, $\forall |\alpha| \leq k$ sea $f_\alpha = \sum (-1)^{|\alpha|} D^\alpha u_0$ entonces $f_\alpha \in L^2(\Omega)$. $\forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega)$ tenemos

$$\begin{aligned}(f, \Phi) &= (\Phi \setminus u_0)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha \Phi, D^\alpha u_0) = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u_0, D^\alpha \Phi) \\ &= (-1)^{|\alpha|} (f_\alpha, D^\alpha \Phi) = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha f_\alpha, \Phi)\end{aligned}$$

entonces $f = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in L^2(\Omega)$

(\leftarrow) Si f es una distribución de la forma $f = \sum D^\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ entonces f funcional lineal acotada si y solo si f es continuo en $C_0^\infty(\Omega)$ relativo al producto interno de $H^k(\Omega)$ entonces f admite una extensión continua a $H_0^k(\Omega)$ y en este sentido la distribución f pertenece a $H^{-k}(\Omega)$ entonces $f \in H^{-k}(\Omega)$

I.5.2 Corolario

$$L^2(\Omega) \subset H^{-k}(\Omega)$$

Demostración:

Sea $f \in L^2(\Omega)$ entonces defino $f_\alpha = \begin{cases} f & \text{si } \alpha = (0, 0, \dots, 0) \\ 0 & \text{si } \alpha \neq (0, 0, \dots, 0) \end{cases}$

entonces $f = \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha f_\alpha$, $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ entonces $f \in H^{-k}(\Omega)$ (ver I.5.1)

Ademas sea $\Phi \in H_0^k(\Omega)$, $\|\Phi\|_k = 1$

$$\begin{aligned} |(f, \Phi)| &\leq \|f\|_2 \|\Phi\|_2 \quad (\text{Desigualdad de Cauchy}) \\ &\leq \|f\|_2 \|\Phi\|_k = \|f\|_2 \end{aligned}$$

tomando supremos tenemos

$$\|f\|_{-k} \leq \|f\|_2$$

CAPITULO II RESULTADOS PRINCIPALES

II.1 TEOREMA(Proyección)

Sea M un subespacio vectorial cerrado de Hilbert entonces $H=M\oplus M^\perp$

II.2 Teorema(Representacion de Riesz)

Si f es un funcional lineal continuo definido en el espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)_H$, existe un único $u_1 \in H$ tal que

$$\begin{aligned} 1) f(u) &= (u, u_1) \quad \forall u \in H \\ 2) \|f\| &= \|u_1\| \end{aligned}$$

Demostracion

Existencia: $f : H \rightarrow K$

- i) Si $f = 0$ basta tomar $u_1 = 0$
- ii) Si $f \neq 0$ consideremos

$$M = f^{-1}(0) = \{x \in H / f(x) = 0\}$$

como f es lineal y continua diferente de cero entonces M es un subespacio vectorial. Ademas $\{0\}$ subconjunto cerrado de K entonces $M = f^{-1}(\{0\})$ cerrado en H y $M \neq H$ entonces $M^\perp \neq \emptyset$, luego existe un vector $u_0 \in M^\perp$ tal que $\|u_0\| = 1$ (ver II.1).

AFIRMAMOS : $u_1 \in M^\perp$ y $f(u_1) = \|u_1\|^2$ Como $\overline{f(u_0)} \in K$ y $u_0 \in M^\perp$ entonces

$$\begin{aligned} u_1 &= \overline{f(u_0)}u_0 \in M^\perp \quad f(u_1) = f(\overline{f(u_0)}u_0) = \overline{f(u_0)}f(u_0) = |f(u_0)|^2 \\ &= |f(u_0)|^2 \|u_0\|^2 = \|\overline{f(u_0)}u_0\|^2 = \|u_1\|^2 \end{aligned}$$

AFIRMAMOS : $\forall w \in M^\perp$ existe $\alpha \in K / w = \alpha u_1$. Por definicion $M^\perp = \{x \in H / x \perp M\}$

Sea $w \in M^\perp$ y sea $\alpha = \frac{f(w)}{f(u_1)}$ y $u_1 \in M^\perp$ entonces

$$(w - \alpha u_1) \in M^\perp \tag{II.2.1}$$

$f(w - \alpha u_1) = f(w) - \alpha f(u_1) = f(w) - \frac{f(w)}{f(u_1)} f(u_1) = 0$ entonces

$$(w - \alpha u_1) \in M \tag{II.2.2}$$

De (II.2.1) y (II.2.2) tenemos $(w - \alpha u_1) \in M \cap M^\perp = \{0\}$ entonces $w - \alpha u_1 = 0$ por tanto $w = \alpha u_1$

Sea $u \in H = M \oplus M^\perp$ entonces $u = v + \alpha u_1, v \in M$ y $\alpha \in K$ como $v \in M$ por tanto $f(v) = 0 = (v \setminus u_1)$

esto es porque $u_1 \in M^\perp$ si y solo si $u_1 \in H / (x \setminus u_1) = 0, x \in M$ por tanto

$$f(u) = f(v) + \alpha f(u_1) = (v \setminus u_1) + \alpha (u_1 \setminus u_1) = (v + \alpha u_1 \setminus u_1) = (u \setminus u_1), \forall u \in H$$

ademas:

$$\|u_1\|^2 = f(u_1) \leq \|f\| \|u_1\|$$

entonces

$$\|u_1\| \leq \|f\| \tag{II.2.3}$$

y

$$|f(u)| \leq \|u\| \|u_1\|$$

$$\sup_{u \neq 0} \frac{|f(u)|}{\|u\|} \leq \|u_1\|$$

entonces

$$\|f\| \leq \|u_1\| \tag{II.2.4}$$

De (II.2.3) y (II.2.4)

$$\|f\| = \|u_1\|$$

II.3 Teorema de Representación de Riesz - Frechet

Sea H un espacio de Hilbert con dual H' . Sea $f \in H'$ existe $v_f \in H$ tal que

$$\langle f, v \rangle = (v_f, v)_H, \forall v \in H$$

$$\|f\|_{H'} = \|v_f\|_H$$

así la aplicación $\Phi : H'_f \xrightarrow{v_f} H$ es un isomorfismo isometrico.

II.4 Lema(Principio de Contracción)

Dado un espacio V de Banach y una aplicación $T : V \rightarrow V$, satisfaciendo

$$\|Tv_1 - Tv_2\| \leq M \|v_1 - v_2\|, \forall v_1, v_2 \in V \text{ y } M \text{ fijo}$$

$0 \leq M < 1$ existe un único $u \in V /$

$$u = Tu$$

II.5 Teorema(Lax Milgram)

Dado un espacio de Hilbert $(V, (\cdot, \cdot))$, y $a(\cdot, \cdot)$ forma bilineal continuo y coercivo y un funcional lineal continuo $F \in V'$, existe un único $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = F(v), \forall v \in V$$

Demostración:

Definimos $Au : V \rightarrow K / Au(v) = a(u, v) \quad \forall u \in V$ pues $a : V \times V \rightarrow K$
 $(u, v) \mapsto a(u, v)$

AFIRMAMOS: Au es lineal y continuo

Sea α y $\beta \in K$, v y $w \in V$

$$\begin{aligned} \text{i) } Au(\alpha v + \beta w) &= a(u, \alpha v + \beta w) = a(u, \alpha v) + a(u, \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w) \\ &= \alpha Au(v) + \beta Au(w) \end{aligned}$$

$$\text{ii) } |Au(v)| = |a(u, v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V$$

$$\text{entonces } \|Au\|_{V'} = \sup_{v \neq 0} \frac{|Au(v)|}{\|v\|} \leq c \frac{\|u\|_V \|v\|_V}{\|v\|_V}$$

$$\text{por tanto } \|Au\|_{V'} \leq c \|u\|_V < \infty$$

AFIRMAMOS : $A : V \rightarrow V'$ es una aplicacion lineal y continua con $\|A\|_{L(V, V')} \leq c$

De lo anterior $Au(v) = a(u, v)$

$$\text{i) } A(\alpha u + \beta w)(v) = a(\alpha u + \beta w, v) = \alpha a(u, v) + \beta a(w, v) = \alpha Au(v) + \beta Aw(v)$$

$$\text{entonces } A(\alpha u + \beta w) = (\alpha Au + \beta Aw)(v)$$

$$\text{ii) } \|A\|_{L(V, V')} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|_{V'}}{\|v\|_V} \leq c$$

Por el teorema de Representacion de Riesz-Frechet(ver II.3):

Para todo $\Phi \in V'$ existe un único $\tau\Phi \in V$ tal que

$$\begin{cases} \Phi(v) = (\tau\Phi, v), v \in V \\ \|\Phi\| = \|\tau\Phi\| \end{cases} \quad \text{donde } \tau : V' \rightarrow V$$

AFIRMAMOS: τ es uno a uno y lineal

$$\text{i) } \text{Sea } \tau\Phi_1 = \tau\Phi_2 \text{ y } v \in V \text{ tal que } \Phi_1(v) = (\tau\Phi_1, v), \Phi_2(v) = (\tau\Phi_2, v)$$

$$\text{entonces } \Phi_1(v) - \Phi_2(v) = (\tau\Phi_1 - \tau\Phi_2, v) = (0, v), \text{ asi que } \Phi_1(v) - \Phi_2(v) = 0$$

$$\text{entonces } \Phi_1(v) = \Phi_2(v) \text{ .Por tanto } \Phi_1 = \Phi_2$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } (\tau(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2), v) &= (\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2)(v) = \alpha(\Phi_1)(v) + \beta(\Phi_2)(v) \\ &= \alpha(\tau\Phi_1, v) + \beta(\tau\Phi_2, v) = (\alpha\tau\Phi_1 + \beta\tau\Phi_2, v) \end{aligned}$$

$$\text{entonces } (\tau(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2), v) - (\alpha\tau\Phi_1 + \beta\tau\Phi_2, v) = 0$$

$$\text{Por tanto } \tau(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2) = \alpha\tau\Phi_1 + \beta\tau\Phi_2$$

Definamos la siguiente aplicación:

$$T : V \rightarrow V / Tv := v - \rho(\tau Av - \tau F), \forall v \in V$$

necesitamos encontrar un $\rho \neq 0$ tal que la aplicación T sea una contracción

Sea $v_1, v_2 \in V$ y $v = v_1 - v_2$

$$\begin{aligned} \|Tv_1 - Tv_2\|^2 &= \|v_1 - v_2 - \rho(\tau Av_1 - \tau Av_2)\|^2 \\ &= \|v - \rho(\tau Av)\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2\rho(\tau Av, v) + \rho^2 \|\tau Av\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2 a(v, \tau Av) \\ &= \|v\|^2 - 2\rho\alpha \|v\|^2 + \rho^2 c \|v\| \|\tau Av\| \\ &\leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha \|v\|^2 + \rho^2 c \|v\| c \|v\| \\ &= \|v\|^2 - 2\rho\alpha \|v\|^2 + \rho^2 c^2 \|v\|^2 \\ \|Tv_1 - Tv_2\|^2 &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2) \|v\|^2 \end{aligned}$$

Sea $M^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 c^2 < 1$ si y solo si $\rho(\rho c^2 - 2\alpha) < 0$ entonces si elegimos un ρ tal que $\rho \in (0, \frac{2\alpha}{c^2})$ entonces $M < 1$ entonces T es una contracción por el Lema del principio de contracción existe un único $u \in V$

$$\begin{aligned} Tu &:= u - \rho(\tau Au - \tau F) = u \\ \tau Au &= \tau F \quad (\text{en } V) \\ Au &= F \quad (\text{en } V') \\ Au(v) &= F(v), \forall v \in V \\ \text{Para un } u \in V \quad a(u, v) &= F(v), \forall v \in V \end{aligned}$$

II.6 TEOREMA

Sea H_1 y H_2 espacios de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)_{H_1}$ y $(\cdot, \cdot)_{H_2}$ respectivamente.

Además sea $B(u, v)$ una forma sesquilineal (o bilineal) en $H_1 \times H_2$, para cada $u \in H_1$ y $v \in H_2$

$$|B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2} \quad (\text{II.5.1})$$

$$\sup_{v \in H_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} |B(u, v)| \geq C_3 \|u\|_{H_1} \quad (\text{II.5.2})$$

$$\sup_{u \in H_1, \|u\|_{H_1} \leq 1} |B(u, v)| \geq C_2 \|v\|_{H_2} \quad (\text{II.5.3})$$

con $C_2 > 0, C_3 > 0, C_1 < \infty$

Además sea f un funcional lineal en H_2 . Entonces existe exactamente un elemento $u_0 \in H_1$ tal que

$$B(u_0, v) = \overline{f(v)}$$

para todo $v \in H_2$ y

$$\|u_0\|_{H_1} \leq \frac{\|f\|'_{H_2}}{C_3}$$

Demostración:

Por hipótesis $|B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2}$ entonces podemos definir:

$$\Phi_u : H_2 \rightarrow \underbrace{K}_{\Phi_u(v) = \overline{B(u, v)}}$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \|\Phi_u\|_{H_2} &= \sup_{v \in H_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} |B(u, v)| \\ &\leq \sup_{v \in H_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} (C_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2}) = C_1 \|u\|_{H_1} \end{aligned}$$

entonces Φ_u es un funcional lineal acotado, es decir $\Phi_u \in H_2'$, por el teorema de Riestz (ver II.2)

$$\Phi_u(v) = (v, z)_{H_2}, z \in H_2$$

por tanto $\overline{B(u, v)} = (v, z)$ entonces $B(u, v) = (z, v)_{H_2}$ es decir, existe la aplicación R tal que $(R(u), v)_{H_2} = B(u, v)$ (como $\Phi_u \in H_2'$ y por Rietsz-Frechet (II.3) existe un

isomorfismo isométrico $\tau : H_2' \rightarrow H_2$ tal que $z \equiv \tau(\Phi_u)$)

$$\begin{aligned} \|R\|_{H_1} &= \sup_{u \in H_1, \|u\|_{H_1} \leq 1} \|R(u)\|_{H_2} \\ &= \sup_{u \in H_1, \|u\|_{H_1} \leq 1} \left(\sup_{v \in H_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} |(R(u), v)_{H_2}| \right) \\ &= \sup_{u \in H_1, \|u\|_{H_1} \leq 1} \left(\sup_{v \in H_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} |B(u, v)| \right) \\ &= \sup_{u \in H_1, \|u\|_{H_1} \leq 1} \left(\sup_{v \in H_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} (C_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_2}) \right) \\ \|R\|_{H_1} &\leq C_1 \end{aligned}$$

entonces $R : H_1 \rightarrow H_2$ es continuo , ademàs es obvio que R es lineal

Afirmamos : que $R(H_1)$ es un conjunto cerrado en H_2

Prueba

$$\|R(u)\|_{H_2} = \sup_{v \in H_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} |(R(u), v)_{H_2}| = \sup_{v \in H_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} |B(u, v)| \geq C_3 \|u\|_{H_1}$$

este resultado me indica que existe R^{-1} .

Si $\{R(u_n)\}$ es una sucesi3n de Cauchy en H_2 entonces $\{u_n\}$ es una sucesi3n de Cauchy en H_1

$$\begin{aligned} \|R(u_n) - R(u_m)\|_{H_2} &= \|R(u_n - u_m)\|_{H_2} \\ &\geq C_3 \|u_n - u_m\|_{H_1} \end{aligned}$$

entonces

$$\|u_n - u_m\|_{H_1} \leq \frac{1}{C_3} \|R(u_n) - R(u_m)\|_{H_2} < \infty$$

en conclusi3n $\{u_n\}$ es una sucesi3n de Cauchy en H_1

afirmamos : $R(H_1) = H_2$

Supongamos que $R(H_1) \neq H_2 \rightarrow R(H_1) \subset H_2$

caso I :

$R(H_1) \subset H_2$ es cerrado entonces tenemos $H_2 = R(H_1) \oplus R(H_1)^\perp$ (ver II.1). Por tanto existe un $v_0 \in H_2, v_0 \neq 0$ tal que

$$0 = B(u, v_0), \forall u \in H_1$$

ademàs de (II.5.3) existe $u' \in H_1$ tal que

$$|B(u', v_0)| \geq \frac{1}{2} C_2 \|v_0\|_{H_2}$$

$$\begin{aligned} |B(u', v_0)| &\geq \frac{1}{2} C_2 \|v_0\|_{H_2} \\ 0 &\geq \frac{1}{2} C_2 \|v_0\|_{H_2} > 0 \end{aligned}$$

entonces $\|v_0\|_{H_2} = 0$ Por tanto $v_0 = 0 (\Rightarrow \Leftarrow)$

en conclusi3n $R(H_1) = H_2$ por tanto $R(x) = y$ tiene una soluci3n para todo $y \in H_2$ del resultado anterior : $x = R^{-1}(y)$ $C_3 \|R^{-1}(y)\|_{H_1} \leq \|R(R^{-1}(y))\|_{H_2} = \|y\|_{H_2}$

entonces $\|R^{-1}(y)\|_{H_1} \leq \frac{\|y\|_{H_2}}{C_3}$

$$\begin{aligned}
\|R^{-1}\|_{H_2} &= \sup_{u \in H_2, \|u\|_{H_2} \leq 1} \|R^{-1}(u)\|_{H_1} \\
&\leq \sup_{u \in H_2, \|u\|_{H_2} \leq 1} \left(\frac{\|u\|_{H_2}}{C_3} \right) \\
\|R^{-1}\|_{H_2} &\leq \frac{1}{C_3}
\end{aligned}$$

R^{-1} es lineal y continuo.

Sea $f \in H_2'$

$$\overline{f(v)} = (v_0, v)_{H_2}$$

(ver II.2) con $\|v_0\|_{H_2} = \|f\|_{H_2'}$, como $v_0 \in H_2 \rightarrow \exists! u_0 \in H_1 / R(v_0) = u_0$ entonces

$$\begin{aligned}
\overline{f(v)} &= (v_0, v)_{H_2} \\
&= (R(u_0), v)_{H_2} \\
\overline{f(v)} &= B(u_0, v)
\end{aligned}$$

Además $\|u_0\|_{H_1} = \|R^{-1}(v_0)\|_{H_1} \leq \left(\frac{1}{C_3}\right) \|v_0\|_{H_2} = \|f\|_{H_2'}$

II.7 TEOREMA

Sea las condiciones del teorema anterior (ver II.6) satisfechas. Además que permitan que sean dados los subespacios (cerrados) $M_1 \subset H_1$ y $M_2 \subset H_2$ sea para todo $v \in M_2$

$$\sup_{u \in M_1, \|u\|_{H_1} \leq 1} |B(u, v)| \geq d_2(M_1, M_2) \|v\|_{H_2}$$

con $d_2(M_1, M_2) > 0$, y para todo $u \in M_1$

$$\sup_{v \in M_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} |B(u, v)| \geq d_3(M_1, M_2) \|u\|_{H_1}$$

con $d_3(M_1, M_2) > 0$

Sea f un funcional lineal en H_2 (dado en el teorema II.6), sea $u_0 \in H_1$ tal que cumple

$$B(u_0, v) = \overline{f(v)}$$

para todo $v \in H_2$ (tal elemento existe y es único de II.6). Permita que exista un $w \in M_1$ tal que

$$\|u_0 - w\|_{H_1} \leq \delta$$

Además existe un $\hat{u}_0 \in M_1$ tal que

$$B(\hat{u}_0, v) = \overline{f(v)}$$

Para todo $v \in M_2$. Entonces

$$\|u_0 - \hat{u}_0\|_{H_1} \leq \left[1 + \frac{C_1}{d_3(M_1, M_2)} \right] \delta$$

Demostración:

Consideremos la función $R : H_1 \rightarrow H_2$ definida anteriormente (ver II.6) tal que

$$(R(u), v)_{H_2} = B(u, v).$$

Como M_1 y M_2 son subespacios entonces son espacios de Hilbert, definiremos la aplicación $S : M_1 \rightarrow M_2$, la cual es lineal y continua tal que $(S(u), v)_{H_2} = B(u, v)$. Sean $u \in M_1$ y $v \in M_2$ entonces $u \in H_1$ y $v \in H_2$

$$\|S(u)\|_{H_2} = \sup_{v \in M_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} |(S(u), v)_{H_2}| = \sup_{v \in M_2, \|v\|_{H_2} \leq 1} |B(u, v)| \leq C_1 \|u\|_{H_1}$$

la linealidad es inmediata. Sea la aplicación proyección $P : H_2 \rightarrow M_2$ y $Q = PR$ demostraremos que $S = PR = Q, \forall u \in M_1$. Para todo $u \in M_1$ y $v \in M_2$

$$\begin{aligned} (PR(u), v)_{H_2} &= (R(u), P(v))_{H_2} \\ &= (R(u), v)_{H_2} \\ &= B(u, v) \\ &= (S(u), v)_{H_2} \\ PR &= S, \forall u \in M_1 \end{aligned}$$

igual que R podemos demostrar que $S(M_1) = M_2$ y que $\exists S^{-1}$. Por el teorema de Riestz, $\exists v_0 \in H_2 / \overline{f(v)} = (v_0, v)_{H_2}, \forall v \in H_2$ pero $M_2 \subset H_2$ eso significa que el funcional f restringido a M_2 es continuo por el mismo teorema de Rietz $\exists z_0 \in M_2 / \overline{f(v)} = (z_0, v)_{H_2}, \forall v \in M_2$ por tanto $v_0 = z_0 \in M_2$ (por la unicidad) entonces $v_0 = PR(u_0)$. Como $v_0 \in M_2$ entonces $\exists \hat{u}_0 \in M_1 / S(\hat{u}_0) = v_0$ entonces $S(\hat{u}_0) = v_0 = PR(u_0)$ entonces $\hat{u}_0 = S^{-1}PR(u_0)$ y

$$\begin{aligned}\overline{f(v)} &= (v_0, v)_{H_2} = \left(S \left(\hat{u}_0 \right), v \right)_{H_2} \\ &= B \left(\hat{u}_0, v \right), \forall v \in M_2\end{aligned}$$

sea $u_0 - w = z \in M_1$ entonces $u_0 = w + z$

$$\begin{aligned}\hat{u}_0 - u_0 &= S^{-1}PR(u_0) - u_0 = S^{-1}PR(w + z) - (w + z) \\ &= S^{-1}PR(w) + S^{-1}PR(z) - w - z \\ &= S^{-1}PR(z) - z \quad [PR(w) = S(w)]\end{aligned}$$

$$\left\| \hat{u}_0 - u_0 \right\|_{H_1} \leq \|S^{-1}PR(z)\|_{H_1} + \|z\|_{H_1} \leq \left[1 + \frac{C_1}{a_3(M_1, M_2)} \right] \delta$$

II.8 Teorema

Existe una constante $C(\Omega)$ tal que

$$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega), \quad \inf_{p \in P_K(\Omega)} \|v + p\|_{k+1,p,\Omega} \leq C(\Omega) |v|_{k+1,p,\Omega}$$

II.9 Teorema

Sea Ω y $\hat{\Omega}$ dos subconjuntos abiertos afines equivalentes de \mathfrak{R}^n . Si una función $v \in W^{m,p}(\Omega)$ para algún entero $m \geq 0$ y algún número $p \in [1, \infty)$, la función $\hat{v} = v \circ F \in W^{m,p}(\hat{\Omega})$ existe una constante $C = C(m, n)$ tal que

$$\forall v \in W^{m,p}(\Omega), \quad \left| \hat{v} \right|_{m,p,\hat{\Omega}} \leq C \|B\|^m |\det(B)|^{-\frac{1}{p}} |v|_{m,p,\Omega}$$

Donde $F \left(\hat{x} \right) = B \hat{x} + b$

analogamente:

$$\forall \hat{v} \in W^{m,p}(\hat{\Omega}), \quad |v|_{m,p,\Omega} \leq C \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{\frac{1}{p}} \left| \hat{v} \right|_{m,p,\hat{\Omega}}$$

II.10 Teorema de Interpolación

Para algún entero $k \geq 0$, $m \geq 0$ y algún número $p, q \in [1, \infty)$.

Sea $W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ y $W^{m,q}(\hat{\Omega})$ espacios de sobolev que satisfacen la inclusión

$$W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{\Omega}) \quad (\text{II.10.1})$$

y sea $\hat{\Pi} \in L \left\{ W^{k+1,p}(\hat{\Omega}); W^{m,q}(\hat{\Omega}) \right\}$ una aplicación tal que

$$\forall \hat{P} \in P_k(\hat{\Omega}), \hat{\Pi}\hat{P} = \hat{P} \quad (\text{II.10.2})$$

Para algún conjunto abierto Ω que es equivalente afin al conjunto $\hat{\Omega}$, sea la aplicación Π_Ω definida por

$$(\Pi_\Omega v)^\wedge = \hat{\Pi}\hat{v} \quad (\text{II.10.3})$$

Para toda función $\hat{v} \in W^{k+1,p}(\hat{\Omega})$ y $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$ en la correspondencia

$$\begin{aligned} (\hat{v}: \hat{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}) &\rightarrow (v = \hat{v} \circ F^{-1} : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}) \\ \Omega &= F(\hat{\Omega}) / F : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega \end{aligned}$$

entonces existe una constante $C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega})$ tal que ,para toda equivalencia afin en el conjunto Ω :

$$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega), |v - \Pi_\Omega v|_{m,q,\Omega} \leq C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega}) (\text{area}(\Omega))^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |v|_{k+1,p,\Omega}$$

con $h = \text{diam}(\Omega)$, $\rho = \sup \{ \text{diam}(S) ; S \text{ es una bola contenida en } \Omega \}$

Demostración:

i) $\forall v \in W^{k+1,p}(\hat{\Omega}), \forall \hat{P} \in P_k(\hat{\Omega})$

$$\begin{aligned} \hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v} + \hat{P} - \hat{P} - \hat{\Pi}\hat{v} &= (\hat{v} + \hat{P}) - (\hat{\Pi}\hat{P} + \hat{\Pi}\hat{v}) = (\hat{v} + \hat{P}) - \hat{\Pi}(\hat{P} + \hat{v}) = \\ &= (I - \hat{\Pi})(\hat{P} + \hat{v}) \end{aligned}$$

Donde $I : W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{\Omega})$ es continua(de II.10.1), y se cumple(ver II.8)

$$\begin{aligned} \left| \hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v} \right|_{m,q,\hat{\Omega}} &\leq \left\| (I - \hat{\Pi}) \right\|_{L(W^{k+1,p}(\hat{\Omega}); W^{m,q}(\hat{\Omega}))} \inf_{\hat{P} \in P_k(\hat{\Omega})} \left\| \hat{v} + \hat{P} \right\|_{k+1,p,\hat{\Omega}} \\ &\leq C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega}) \left| \hat{v} \right|_{k+1,p,\hat{\Omega}} \end{aligned}$$

ii) Además tenemos $(\Pi_\Omega v)^\wedge = \hat{\Pi}\hat{v}$ pues $\Pi_\Omega : W^{k+1,p}(\Omega) \xrightarrow{v} W^{m,p}(\Omega)$ por tanto (de II.10.3)

$$\Pi_\Omega v \circ F = (\Pi_\Omega v)^\wedge = \hat{\Pi}\hat{v} / \Pi_\Omega v \circ F : \hat{\Omega} \xrightarrow{F} \Omega \xrightarrow{\Pi_\Omega v} \mathfrak{R} \quad (\text{II.10.4})$$

De (II.10.4) obtenemos $(v - \Pi_{\Omega}v)^{\wedge} = (v - \Pi_{\Omega}v) \circ F = v \circ F - \Pi_{\Omega}v \circ F = \hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v}$ y del resultado en II.9 tenemos

$$\begin{aligned} |v - \Pi_{\Omega}v|_{m,q,\Omega} &\leq C \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{\frac{1}{q}} |(v - \Pi_{\Omega}v)^{\wedge}|_{m,q,\hat{\Omega}} \quad (\text{II.10.5}) \\ &\leq C \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{\frac{1}{q}} \left| \hat{v} - \hat{\Pi}\hat{v} \right|_{m,q,\hat{\Omega}} \end{aligned}$$

utilizando nuevamente II.9 tenemos

$$\left| \hat{v} \right|_{k+1,p,\hat{\Omega}} \leq C \|B\|^{k+1} |\det(B)|^{\frac{-1}{p}} |v|_{k+1,p,\Omega} \quad (\text{II.10.6})$$

De (II.10.5) y (II.10.6)

$$\begin{aligned} |v - \Pi_{\Omega}v|_{m,q,\Omega} &\leq C_1 \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{\frac{1}{q}} |(v - \Pi_{\Omega}v)^{\wedge}|_{m,q,\hat{\Omega}} \\ &\leq C_1 \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{\frac{1}{q}} C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega}) \left| \hat{v} \right|_{k+1,p,\hat{\Omega}} \\ &\leq C_1 \|B^{-1}\|^m |\det(B)|^{\frac{1}{q}} C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega}) C_2 \|B\|^{k+1} |\det(B)|^{\frac{-1}{p}} |v|_{k+1,p,\Omega} \end{aligned}$$

además

$$\|B\| \leq \frac{h}{\hat{\rho}}, \quad \|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\rho} \quad y \quad \det(B) = \frac{\text{area}(\Omega)}{\text{area}(\hat{\Omega})}$$

entonces

$$\begin{aligned} |v - \Pi_{\Omega}v|_{m,q,\Omega} &\leq C_1 \left(\frac{\hat{h}}{\rho}\right)^m \left(\frac{\text{area}(\Omega)}{\text{area}(\hat{\Omega})}\right)^{\frac{1}{q}} C(\hat{\Pi}, \hat{\Omega}) C_2 \left(\frac{h}{\hat{\rho}}\right)^{k+1} \left(\frac{\text{area}(\Omega)}{\text{area}(\hat{\Omega})}\right)^{\frac{-1}{p}} |v|_{k+1,p,\Omega} \\ |v - \Pi_{\Omega}v|_{m,q,\Omega} &\leq C_1 \left(\hat{\Pi}, \hat{\Omega}\right) \left(\frac{\text{area}(\Omega)}{\text{area}(\hat{\Omega})}\right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |v|_{k+1,p,\Omega} \end{aligned}$$

II.11 Observación

(K, P, Σ) denota un elemento finito donde P el espacio de funciones real valuadas definidas sobre K y $\forall p \in P : p = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$ siendo p_i funciones base

Definimos $\Pi v = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$, Πv denota el P -interpolante de v . Consideraremos que $\text{dom}\Pi = C^0(K)$ por lo que sobre el espacio $P \subset \text{dom}\Pi$ el operador de interpolación se reduce a la identidad, es decir $\forall p \in P : \Pi p = p$

Σ es el conjunto finito de puntos nodales considerados sobre el elemento finito,.

II.12 Teorema

Sea $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ y (K, P, Σ) dos elementos finitos equivalentes con grados de libertad de la forma $\hat{p}(\hat{a}_i)$, donde los \hat{a}_i son los nodos de \hat{K} ($p \in \hat{P}$) y de la forma $p(a_i)$, donde los a_i son los nodos de K ($p \in P$) respectivamente. Entonces si $\hat{p}_i, 1 \leq i \leq N$, son las funciones bases de el elemento finito \hat{K} , las funciones $p_i, 1 \leq i \leq N$, son las funciones bases de el elemento finito K . Los operadores de interpolación Π y $\hat{\Pi}$ son tal que

$$(\Pi v)^\wedge = \hat{\Pi} \hat{v}$$

para cualquiera función $\hat{v} \in \text{dom } \hat{\Pi}$ y $v \rightarrow \text{dom } \Pi$ asociados por la correspondencia

$$\hat{v} \in \text{dom } \hat{\Pi} \rightarrow v = \hat{v} \circ F^{-1} \in \text{dom } \Pi$$

II.13 Sea $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ un elemento finito. Si se tiene las siguientes inclusiones, para algún entero $m \geq 0$ y $k \geq 0$ y para algún número $p, q \in [1, \infty)$

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \subset C^0(\hat{K}) \tag{II.13.1}$$

$$W^{k+1,p}(\hat{K}) \subset W^{m,q}(\hat{K}) \tag{II.13.2}$$

$$P_k(\hat{K}) \subset \hat{P} \subset W^{m,q}(\hat{K}) \tag{II.13.3}$$

existe una constante $C(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ tal que, para todo elemento finito equivalente afin (K, P, Σ) y toda función $v \in W^{k+1,p}(K)$

$$|v - \Pi_K v|_{m,q,K} \leq C(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}) (\text{area}(K))^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,p,K} \tag{II.13.4}$$

Donde $\Pi_K v$ denota el P_k - interpolante de la función v y

$$h_K = \text{diam}(K)$$

$$\rho_K = \text{Sup} \{ \text{diam}(S); S \text{ una bola contenida en } K \}$$

Demostración

Sea $\hat{p} \in P_k(\hat{K})$ entonces $\hat{p} \in \hat{P}$, por tanto $\hat{\Pi}\hat{p} = \hat{p}$ (ver II.11), $\forall \hat{p} \in P_k(\hat{K})$ (de (II.13.3)).

Sea \hat{v} una función en el espacio $W^{k+1,p}(\hat{K})$ entonces $\hat{v} \in C^0(\hat{K}) = \text{dom } \hat{\Pi}$ (de II.11), así obtenemos

$$\hat{\Pi}\hat{v} = \sum_i \hat{v}(\hat{a}_i) \hat{p}_i \quad (\hat{P} \text{- interpolante de } \hat{v})$$

Además de (II.13.1)

$$\left\| \hat{\Pi}\hat{v} \right\|_{m,q,\hat{K}} \leq \sum_i \left| \hat{v}(\hat{a}_i) \right| \left\| \hat{p}_i \right\|_{m,q,\hat{K}} \leq C \left\| \hat{p}_i \right\|_{m,q,\hat{K}} \left\| \hat{v} \right\|_{0,\infty,\hat{K}} \leq C(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}) \left\| \hat{v} \right\|_{k+1,p,\hat{K}}$$

Donde Π_K denota el P_k - interpolante y $\hat{\Pi}$ denota el \hat{P} - interpolante y están relacionados por la correspondencia

$$(\Pi_K v)^\wedge = \hat{\Pi}\hat{v} \quad \forall v \in \text{dom}\Pi_K$$

(ver II.12) Aplicando el teorema anterior obtenemos (II.13.4).

II.14 Teorema (Desigualdad de Poincaré):

Sea Ω un abierto acotado de \mathfrak{R}^n entonces existe una constante $c = c(\Omega) > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n \|D_i u\|^2 \geq c \|u\|^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración:

Sea $a > 0$ y $\Omega =]-a, a]^n$ un cubo n -dimensional y $\Phi \in D(\Omega)$ Y sea $x \in \mathfrak{R}^n$:

$$x = (x', x) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

$$\Phi(x', x_n) = \Phi(x', x_n) - \Phi(x', -r) (\Phi(x', -a) = 0) \rightarrow \Phi(x', x_n) = \int_{-a}^{x_n} \frac{\partial \Phi(x', t)}{\partial x_n} dt$$

$$\begin{aligned} |\Phi(x', x_n)| &\leq \int_{-a}^{x_n} \left| \frac{\partial \Phi(x', t)}{\partial x_n} \right| dt \\ &\leq \left(\int_{-a}^{x_n} 1^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-a}^{x_n} \left| \frac{\partial \Phi(x', t)}{\partial x_n} \right|^2 dt \right)^{1/2} \\ &< |x_n + a|^{1/2} \left(\int_{-a}^a \left| \frac{\partial \Phi(x', t)}{\partial x_n} \right|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq (2a)^{1/2} \left(\int_{-r}^r \left| \frac{\partial \Phi(x', t)}{\partial x_n} \right|^2 dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$|\Phi(x', x_n)|^2 \leq (2a) \left(\int_{-a}^a \left| \frac{\partial \Phi(x', t)}{\partial x_n} \right|^2 dt \right) \quad (\text{II.14.1})$$

integrando respecto a x' :

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \dots \int_{-a}^a |\Phi(x', x_n)|^2 dx_1 \dots dx_{n-1} &= \int_{|-a, a|^{n-1}} |\Phi(x', x_n)|^2 dx \\ &\leq (2a) \int_{|-a, a|^{n-1}} \int_{-a}^a \left| \frac{\partial \Phi(x', t)}{\partial x_n} \right|^2 dt dx' \quad (\text{de II.12.1}) \end{aligned}$$

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a \int_{-a}^a \dots |\Phi(x', x_n)|^2 dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \leq (2a) \int_{|-a, a|^n} \left| \frac{\partial \Phi(x', t)}{\partial x_n} \right|^2 dy \quad (\text{II.14.2})$$

además

$$\begin{aligned} |\Phi|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\Phi(x)|^2 dx \\ &= \int_{|-a, a|^n} |\Phi(x', x_n)|^2 dx' dx_n = \int_{-a}^a \left(\int_{|-a, a|^{n-1}} |\Phi(x', x_n)|^2 dx' \right) dx_n \\ &\leq (2a) \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \Phi(x', t)}{\partial x_n} \right|^2 dy \int_{-a}^a dx_n \quad (\text{de II.14.2}) \\ &= (2a)^2 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \Phi(y)}{\partial x_n} \right|^2 dy = (2a)^2 \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \\ |\Phi|_{L^2(\Omega)} &\leq (2a) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

análogamente se obtiene para $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$

$$|\Phi|_{L^2(\Omega)} \leq (2a) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{L^2(\Omega)}$$

Sumando

$$\sum_{i=1}^n |\Phi|_{L^2(\Omega)} \leq (2a) \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{L^2(\Omega)}$$

por tanto

$$\begin{aligned} |\Phi|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{2a}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{2a}{n} \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Holder para} \\ \text{sumatorias} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$|\Phi|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2a}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por densidad se sigue el teorema para $u \in H_0^1(\Omega)$.

II.15 PROBLEMA MODELO PARA APLICAR EL TEOREMA DE BERNSTEIN

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -a_{11}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a_{12}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - a_{22}(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{II.15.1})$$

donde Ω es un dominio convexo acotado en \mathbb{R}^2 con una frontera Lipchitz y a trozos de clase C^2 y donde las funciones $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ satisfacen

$$\nu \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x, y) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^2 \xi_i^2 \quad \forall (x, y) \in \Omega, \forall (\xi_i, \xi_j) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{II.15.2})$$

con $a_{21} = a_{12}$, donde ν y μ son constantes positivas.

II.15.1 TEOREMA DE BERNSTEIN

Para cada $f \in L^2(\Omega)$, el problema (II.15.1) tiene una única solución $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Por lo tanto, existe una constante $C(v, u)$, dependiendo de v y u pero independiente de f , tal que

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C(v, u) \|f\|_{0,\Omega}$$

La primera aplicación del Teorema de Bernstein (ver bibliografía [8], [9]) está dado para problemas (1.1) donde $\Omega = \Omega_0$ y $a(x, y) = a(x)$. Para lo cual definimos el espacio:

$$H^L(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : a(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in H^1(\Omega) \right\}$$

con la norma

$$\|u\|_{L,\Omega}^2 = \|u\|_{1,\Omega}^2 + |u|_{L,\Omega}^2$$

Donde

$$|u|_{L,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \left(a \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|^2 + a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|^2 + \frac{1}{a} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^2 \right) dx dy$$

CAPITULO III ELEMENTOS FINITOS TRIANGULARES

III.1 ELEMENTO FINITO TRIANGULAR DE REFERENCIA

Designaremos a un elemento finito triangular de referencia al triángulo \tilde{K} de vértices $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$. Dividiremos los lados en k partes iguales, donde $k \geq 1$, obteniéndose una partición de $N = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ puntos de la forma $\frac{1}{k}(i, j)$ con enteros i, j no negativos tales que $0 \leq i + j \leq k$. Estos puntos se llaman nodos o puntos nodales y al conjunto de ellos $\tilde{\Sigma}(k)$, mallado principal de orden k .

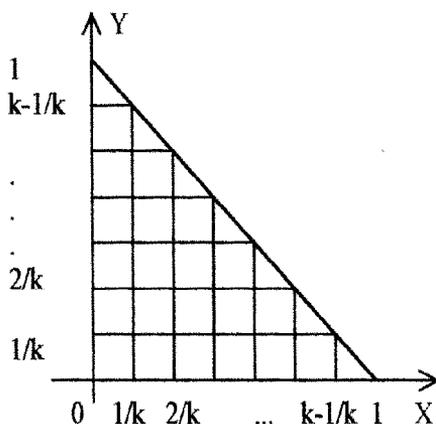


Fig. III.1

Debido a que existe una correspondencia biunívoca entre $\tilde{\Sigma}(k)$ y el conjunto de multíndices $\alpha \in N^3 / |\alpha| = k$ establecida por $w = \frac{1}{k}(i, j)$ entonces $\alpha = (i, j, k - i - j)$ que permite subindicar cada nodo con su correspondiente multíndice, esto es w_α en lugar de w .

III.1.1 Grados de Libertad

Interpolar una función continua $u : \tilde{K} \rightarrow \mathfrak{R}$ mediante un polinomio p exige el cumplimiento de un número finito de condiciones en los puntos de interpolación, en particular estas condiciones sobre los nodos son llamados grados de libertad del nodo correspondiente.

Ejm. Sea $u \in C^1$, $p \in P$ que interpola a u en nodos de referencia de tal manera que para un nodo w , tiene 1 solo grado de libertad.

$$u(w) = p(w), \quad \forall w \in \tilde{\Sigma}(k)$$

Fijemos una función $u \in C(\tilde{K})$ y sea $\tilde{\Sigma}(k)$ el mallado principal de orden k , deseamos encontrar un polinomio p que interpole u sobre el mallado $\tilde{\Sigma}(k)$ y que

satisfaga el número de grados de libertad por cada nodo. Esto se reduce a la búsqueda de un isomorfismo entre un cierto espacio de polinomios \mathbb{P} y \mathfrak{R}^M , siendo M el número total de grados de libertad al recorrer todos los nodos de $\tilde{\Sigma}(k)$, por lo que debe cumplirse que $\dim \mathbb{P} = M$.

III.1.2 Interpolación de Lagrange en el triángulo de referencia

La interpolación de Lagrange exige que:

$$u(w) = p(w), \forall w \in \tilde{\Sigma}(k)$$

teniendo un grado de libertad por cada nodo, donde

$$M = N = \text{card} \left(\tilde{\Sigma}(k) \right) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

siendo un espacio de polinomios con esta dimensión $\mathbb{P}_k = \mathbb{P}_k(x_1, x_2)$ con coeficientes reales de grado menor o igual que k .

III.1.3 Función Evaluación

El isomorfismo buscado es la función de evaluación:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}: \mathbb{P}_k &\rightarrow \mathfrak{R}^N \\ p &\mapsto \tilde{\varepsilon}(p) = (p(\tilde{w}_1), p(\tilde{w}_2), \dots, p(\tilde{w}_N)) \end{aligned} \quad (\text{III.1.3.1})$$

$\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_N$ son todos los nodos de $\tilde{\Sigma}(k)$.

Probaremos que $\tilde{\varepsilon}$ es un isomorfismo lineal

i) $\tilde{\varepsilon}$ es lineal :

$$\tilde{\varepsilon}(p+q) = \tilde{\varepsilon}(p) + \tilde{\varepsilon}(q) \quad (\text{III.1.3.2})$$

ii) $\tilde{\varepsilon}$ es 1 a 1 (III.1.3.3)

por demostrar que $\tilde{\varepsilon}(p) = 0 \rightarrow p = 0$

Supongamos que $\tilde{\varepsilon}(p) = 0 \rightarrow (p(\tilde{w}_1), p(\tilde{w}_2), \dots, p(\tilde{w}_N)) = (0, 0, 0, \dots, 0)$

$$p(\tilde{w}_l) = 0, \forall l = 1, 2, \dots, N \quad (\text{III.1.3.4})$$

como $p \in \mathbb{P}_k \mapsto p = p(x, y)$. Si consideramos $y = 0$ tenemos $p(x, 0)$ polinomio en x , donde $\partial(p(x, 0)) \leq k$, (de (III.1.3.4)), $p(x, 0) = 0$ por tanto $p(x, y) = yq_1(x, y)$ con $\partial(q_1(x, y)) \leq k - 1$.

Si consideramos $y = \frac{1}{x}$ entonces $p\left(x, \frac{1}{k}\right)$ se anula en k nodos, de donde

$$p\left(x, \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} q_1\left(x, \frac{1}{k}\right)$$

entonces $q_1\left(x, \frac{1}{k}\right)$ se anula en k nodos pero $\partial\left(q_1\left(x, \frac{1}{k}\right)\right) \leq k - 1$ entonces

$q_1\left(x, \frac{1}{k}\right) = 0$ entonces $p(x, y) = y\left(y - \frac{1}{k}\right) q_2(x, y)$, $\partial\left(q_2(x, y)\right) \leq k - 2$ así sucesivamente obtenemos:

$$p(x, y) = y\left(y - \frac{1}{k}\right)\left(y - \frac{2}{k}\right) \dots \left(y - \frac{k-1}{k}\right) c$$

$$\text{además } 0 = p(0, 1) = \underbrace{1\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{k}\right)}_{\neq 0} c \rightarrow c = 0$$

$$p(x, y) = 0$$

3) $\tilde{\varepsilon}$ es suryectiva : sea $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathfrak{R}^N$ basta tomar un $p \in \mathbb{P}_k$ tal que

$$p(w_\alpha) = \alpha_l, \forall l = 1, 2, \dots, N \quad (\text{III.1.3.5})$$

De (III.1.3.2), (III.1.3.3) y (III.1.3.4) concluimos que ε es un isomorfismo. Como $\tilde{\varepsilon}$ es un isomorfismo para cada $u \in C(\tilde{K})$ existe un único polinomio $p \in \mathbb{P}_k$ que lo interpole sobre el mallado $\tilde{\Sigma}(k)$, esto es :

$$p(w_i) = u(w_i), \forall i = 1, 2, \dots, N..$$

igualmente hay una base en \mathbb{P}_k correspondiente a la base canonica de \mathfrak{R}^N que la denotamos $\{p_j, \forall j = 1, 2, \dots, N\}$

III.1.4 Descripción concreta de la base

Describiremos la base para el caso $k=1$

$$\text{Donde } \mathbb{P}_1 = \{\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3\}$$

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{p}_1) = (\tilde{p}_1(\tilde{w}_1), \tilde{p}_1(\tilde{w}_2), \tilde{p}_1(\tilde{w}_3)) = (1, 0, 0)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{p}_2) = (\tilde{p}_2(\tilde{w}_1), \tilde{p}_2(\tilde{w}_2), \tilde{p}_2(\tilde{w}_3)) = (0, 1, 0)$$

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{p}_3) = (\tilde{p}_3(\tilde{w}_1), \tilde{p}_3(\tilde{w}_2), \tilde{p}_3(\tilde{w}_3)) = (0, 0, 1)$$

$\forall i = 1, 2, 3$ entonces

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(w_1) &= 1 & \tilde{p}_1(w_2) &= 0 & \tilde{p}_1(w_3) &= 0 \\ \tilde{p}_2(w_1) &= 0 & \tilde{p}_2(w_2) &= 1 & \tilde{p}_2(w_3) &= 0 \\ \tilde{p}_3(w_1) &= 0 & \tilde{p}_3(w_2) &= 0 & \tilde{p}_3(w_3) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{III.1.4.1})$$

Donde $\tilde{w}_1 = (0, 0)$, $\tilde{w}_2 = (1, 0)$ y $\tilde{w}_3 = (0, 1)$ para que se cumpla (III.1.4.1) \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 y \tilde{p}_3 deben de tener la siguiente forma: x

$$p_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = 1 - \tilde{x} - \tilde{y} \quad p_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x} \quad p_3(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{y}$$

Si $p \in \mathbb{P}_1$ entonces

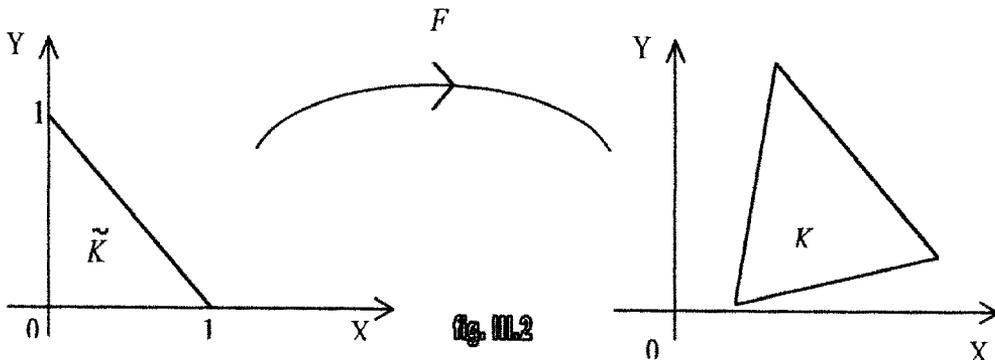
$$p(\tilde{x}, \tilde{y}) = \beta_1(1 - \tilde{x} - \tilde{y}) + \beta_2\tilde{x} + \beta_3\tilde{y} = \alpha_1 + \alpha_2\tilde{x} + \alpha_3\tilde{y}$$

entonces $p \in \ell\{1, \tilde{x}, \tilde{y}\}$

III.2 ELEMENTO TRIANGULAR EQUIVALENTE

Si tenemos una clase de transformaciones invertibles $T: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ de tal manera que su inversa permanezca en la misma clase y si \mathbb{P} es el espacio de polinomios interpolantes para un elemento finito de referencia entonces $p \circ T^{-1}$ debe estar en $\mathbb{P}, \forall p \in \mathbb{P}$. Para nuestro caso tenemos un elemento triangular \tilde{K} el espacio de polinomios es \mathbb{P}_k y la clase de transformaciones que satisface las condiciones antes señaladas es la clase de transformaciones afines invertibles: $F = Ax + b$ donde b es un vector fijo de \mathfrak{R}^2 y A una matriz invertible de 2×2 . Por lo tanto un elemento triangular equivalente con \tilde{K} será el triángulo $K = F(\tilde{K})$. Por ejemplo podemos considerar la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} x &= (x_3 - x_1)\tilde{x} + (x_2 - x_1)\tilde{y} + x_1 & \text{de donde} & & \tilde{x} &= \gamma_1 + \gamma_2x + \gamma_3y \\ y &= (y_3 - y_1)\tilde{x} + (y_2 - y_1)\tilde{y} + y_1 & & & \tilde{y} &= \delta_1 + \delta_2x + \delta_3y \end{aligned}$$



III.2.1 Interpolación de Lagrange en el triángulo K

Fijado un elemento triangular $K = F(\tilde{K})$ y su mallado principal $\Sigma(k) = F(\tilde{\Sigma}(k))$ deseamos interpolar una función $u \in C(K)$ mediante un polinomio sobre el mallado principal. Podemos considerar la siguiente función evaluación

$$\begin{aligned} \varepsilon : P_k &\rightarrow \mathfrak{R}^N \\ p &\mapsto \varepsilon(p) = (p(w_1), p(w_2), \dots, p(w_N)) \end{aligned}$$

siendo $w_i = F(\tilde{w}_i)$ con $\tilde{w}_i \in \tilde{\Sigma}(k)$. De aquí $\varepsilon(p) = \tilde{\varepsilon}(p \circ F)$ donde $\tilde{\varepsilon}$ es el isomorfismo (de III.1.3.1), como F es una transformación afín invertible entonces ε es un isomorfismo.

III.2.2 Descripción concreta de la base en el triángulo K

Si $\{p_\alpha / \alpha \in N^3 \text{ y } |\alpha| = k\}$ es una base para \mathbb{P}_k entonces $p_\alpha \circ F = \tilde{p}_\alpha$ es la base para este caso. Por ejemplo obtendremos el polinomio que interpola en K para el caso $k = 1$.

$$\begin{aligned} q(x, y) &= (p \circ F^{-1})(x, y) \\ &= p(F^{-1}(x, y)) \\ &= p(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ &= p(\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y, \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 y) \\ &= \alpha_1 + \alpha_2(\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y) + \alpha_3(\delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 y) \\ q(x, y) &= \rho_1 + \rho_2 x + \rho_3 y \end{aligned}$$

III.3 Interpolación lineal a trozos sobre triángulos

Supongamos que Ω consiste de una colección de elementos triangulares y que nosotros consideramos tal una interpolación lineal sobre un elemento finito típico K .

$$v_h(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y \text{ para } (x, y) \in K$$

Determinamos las tres constantes de las condiciones

$$\begin{aligned} v_1 &= v_h(x_1, y_1) = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 \\ v_2 &= v_h(x_2, y_2) = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 \\ v_3 &= v_h(x_3, y_3) = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 \end{aligned}$$

Donde (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ son las coordenadas de los tres vertices de el triángulo K . Resolviendo el sistema para a_1, a_2 y a_3 , encontramos

$$a_1 = \frac{1}{2A_K} [v_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + v_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + v_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)]$$

$$a_2 = \frac{1}{2A_K} [v_1 (y_2 - y_3) + v_2 (y_3 - y_1) + v_3 (y_1 - y_2)]$$

$$a_3 = \frac{1}{2A_K} [v_1 (x_3 - x_2) + v_2 (x_1 - x_3) + v_3 (x_2 - x_1)]$$

Donde A_K es el area del elemento K . Reemplazando a_1, a_2 y a_3 obtenemos

$$v_h(x, y) = v_1 \Psi_1^K(x, y) + a_2 \Psi_2^K(x, y) + a_3 \Psi_3^K(x, y)$$

Donde $\Psi_i^K(x, y)$

$$\Psi_1^K(x, y) = \frac{1}{2A_K} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

$$\Psi_2^K(x, y) = \frac{1}{2A_K} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]$$

$$\Psi_3^K(x, y) = \frac{1}{2A_K} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]$$

Estas funciones lineales están mostrados en la fig.III.3. Notemos que

$$\Psi_i^K(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3$$

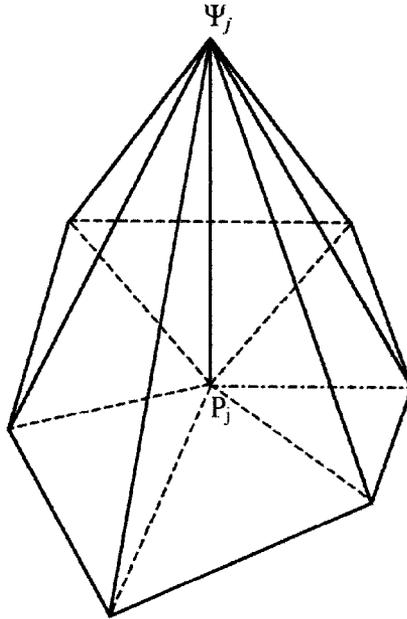


Fig. III.3

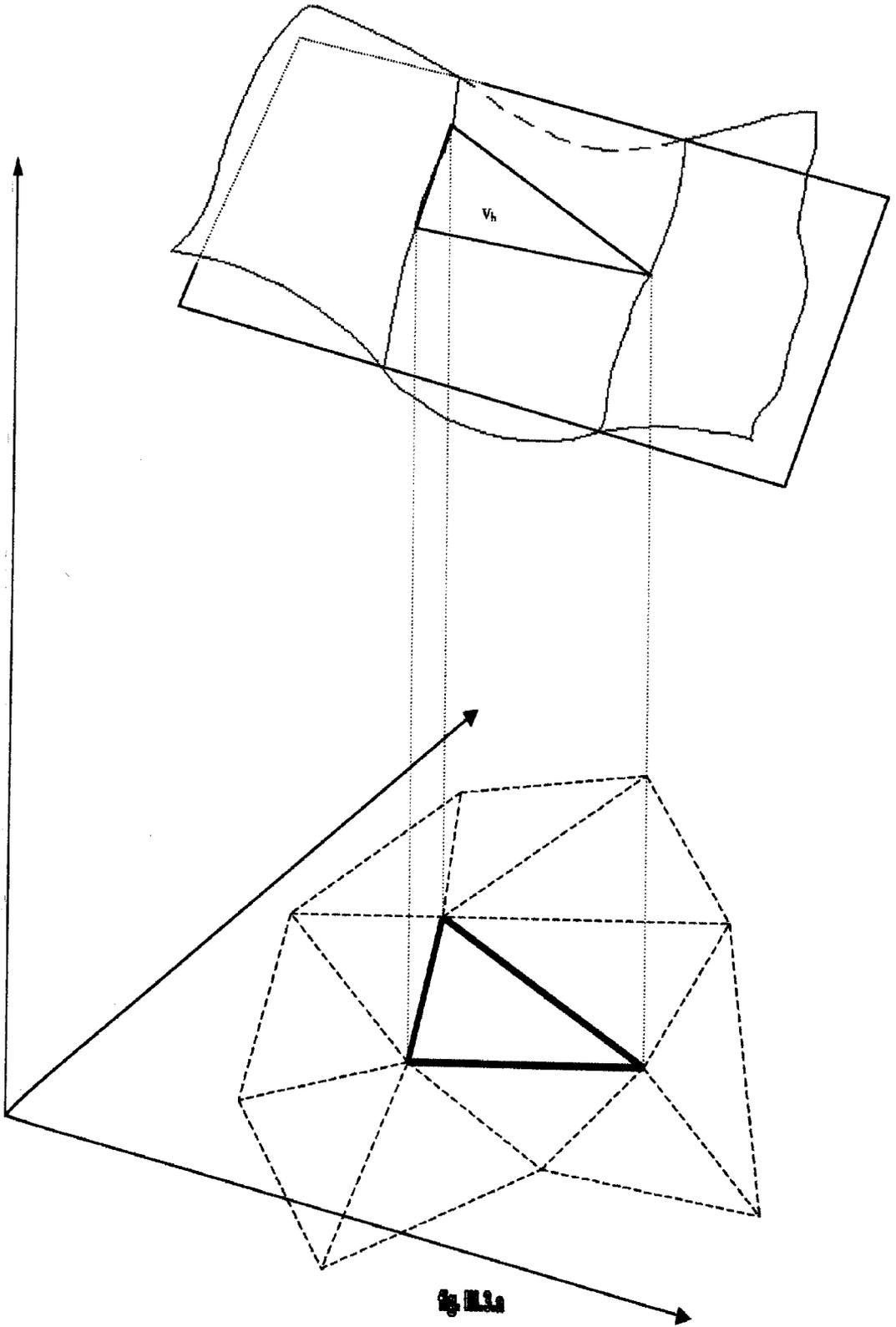


fig. III.3.1

CAPITULO IV

IV.1 ECUACION DIFERENCIAL ELIPTICA DE SEGUNDO ORDEN

$$\begin{cases} Lu(x, y) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right) = f(x, y), \forall (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (IV.1.1)$$

Ω dominio acotado en \mathbb{R}^2 , $f \in L^2(\Omega)$ y $a \in L^\infty(\Omega)$ satisfaciendo

$$0 < \alpha \leq a(x, y) \leq \beta < \infty \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (IV.1.2)$$

Donde α y β son constantes y donde $a(x, y) = a(x)$ entonces definimos

$$\begin{aligned} B(u, v) &\equiv \int_{\Omega} a(x) \text{gradu.gradv} dx dy \\ &= \int_{\Omega} \left[a(x) \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a(x) \partial u(x, y)}{\partial x} \right) v(x, y) dx dy - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x) \partial u(x, y)}{\partial y} \right) v(x, y) dx dy \\ B(u, v) &= \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a(x) \partial u(x, y)}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a(x) \partial u(x, y)}{\partial y} \right) \right] v(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$B(u, v) = \int_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy \quad \text{De(IV.1.1)}$$

La formulaci3n d3bil del problema IV.1.1 es

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ B(u, v) \equiv \int_{\Omega} a(\text{gradu.gradv}) dx dy = \int_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (IV.1.3)$$

IV.2 CAMBIO GLOBAL DE VARIABLES

IV.2.1 TEOREMA

Supongamos que $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y $a(x, y) = a(x)$. Entonces para cada $f \in L^2(\Omega)$ la soluci3n de (IV.1.1) esta en $H_0^1(\Omega) \cap H^L(\Omega)$. Por lo tanto, existe una constante $C = C(\alpha, \beta)$, dependiendo de α y β pero independiente de f , tal que

$$\|u\|_{L, \Omega} \leq C(\alpha, \beta) \|f\|_{0, \Omega} \quad (IV.2.1.1)$$

DEMOSTRACION:

Sea u la 3nica soluci3n a (IV.1.1) en $H_0^1(\Omega)$. Utilizando el siguiente cambio de variable:

$$F(x, y) = (\tilde{x}(x), \tilde{y}(y)), \quad \text{donde } \tilde{x}(x) = \int_0^x \frac{ds}{a(s)}, \quad \tilde{y}(y) = y \quad (IV.2.1.2)$$

y la notaci3n

$$\tilde{u}(\tilde{x}(x), \tilde{y}(y)) = u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (IV.2.1.3)$$

obtendremos:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(0) &= \int_0^1 \frac{ds}{a(s)} = 0, & \tilde{x}(1) &= \int_0^1 \frac{ds}{a(s)} \\ \tilde{y}(0) &= 0, & \tilde{y}(1) &= 1\end{aligned}$$

Como $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \longrightarrow \tilde{\Omega} = (0, \int_0^1 \frac{ds}{a(s)}) \times (0, 1)$

Supongamos que $\tilde{u} \in H^2(\tilde{\Omega}) \longrightarrow \tilde{u} \in L^2(\tilde{\Omega}) / D^\alpha \tilde{u} \in L^2(\tilde{\Omega}), 0 \leq |\alpha| \leq 2$ entonces α va ha tener las siguientes componentes: $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2)$ y $(2, 0)$ obteniendo

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} u^2 dx dy &= \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u}^2 \left(\frac{1}{a}\right) d\tilde{x} d\tilde{y} \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dy &= \int_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\right)^2 d\tilde{x} d\tilde{y} \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx dy &= \int_{\tilde{\Omega}} a \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}\right)^2 d\tilde{x} d\tilde{y} \\ \int_{\Omega} \left(a \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dy &= \int_{\tilde{\Omega}} a \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\right)^2 d\tilde{x} d\tilde{y} \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)^2 dx dy &= \int_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\right)\right)^2 d\tilde{x} d\tilde{y} \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(a \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)^2 dx dy &= \int_{\tilde{\Omega}} a \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}\right)\right)^2 d\tilde{x} d\tilde{y} \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)^2 dx dy &= \int_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}\right)\right)^2 d\tilde{x} d\tilde{y} \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)^2 dx dy &= \int_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}\right)^2 (a) d\tilde{x} d\tilde{y}\end{aligned}$$

entonces $u \in H^L(\Omega)$

La formulación débil (IV.1.3) de (IV.1.1) es transformado por el cambio de variable por :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} a \text{gradu} \cdot \text{grad} v dx dy &= \int_{\tilde{\Omega}} f v dx dy \\ \int_{\Omega} \left[a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy &= \int_{\tilde{\Omega}} f v dx dy \\ \int_{\tilde{\Omega}} \left[\tilde{a} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \frac{1}{\tilde{a}}\right) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \frac{1}{\tilde{a}}\right) \tilde{a} + \tilde{a} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} 1\right) \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} 1\right) \tilde{a} \right] d\tilde{x} d\tilde{y} &= \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f} \tilde{v} a d\tilde{x} d\tilde{y} \\ \int_{\tilde{\Omega}} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{a}^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right] d\tilde{x} d\tilde{y} &= \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f} \tilde{v} a d\tilde{x} d\tilde{y}\end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} \in H_0^1(\tilde{\Omega}) \\ \int_{\tilde{\Omega}} \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{a}^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right] d\tilde{x} d\tilde{y} = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f} \tilde{v} a d\tilde{x} d\tilde{y} \quad \forall \tilde{v} \in H_0^1(\tilde{\Omega}) \end{array} \right. \quad (\text{IV.2.1.3})$$

(IV.2.1.3) es la formulación variacional de:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} - a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} = a \tilde{f} & \text{en } \tilde{\Omega} \\ \tilde{u} = 0 & \text{en } \partial \tilde{\Omega} \end{cases} \quad (\text{IV.2.1.4})$$

entonces para todo $\tilde{f} \in L^2(\tilde{\Omega})$ (IV.2.1.4) tiene una única solución en $\tilde{u} \in H^2(\tilde{\Omega}) \cap H_0^1(\tilde{\Omega})$ (ver II.12.1) por tanto existe una constante $C(\alpha, \beta)$ tal que

$$\|\tilde{u}\|_{2, \tilde{\Omega}} \leq C(\alpha, \beta) \|\tilde{f}\|_{0, \tilde{\Omega}}$$

como \tilde{u} es único entonces es el mismo que satisface (IV.2.1.3). Retornando a las variables originales obtenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L, \Omega}^2 &= \int_{\Omega} u^2 dx dy + \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy + \int_{\Omega} \left(a \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|^2 + \frac{1}{a} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^2 \right) dx dy \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u}^2 \tilde{a} d\tilde{x} d\tilde{y} + \int_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{1}{\tilde{a}} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right|^2 + \tilde{a} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|^2 \right) d\tilde{x} d\tilde{y} + \\ &\quad \int_{\tilde{\Omega}} \left(\left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right|^2 \right) d\tilde{x} d\tilde{y} \end{aligned}$$

Como $\alpha \leq a(x, y) \leq \beta \rightarrow \alpha \leq \tilde{a}(\tilde{x}(x), \tilde{y}(y)) \leq \beta \rightarrow \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\tilde{a}} \leq \frac{1}{\alpha}$ entonces

$$\begin{aligned} \|u\|_{L, \Omega}^2 &\leq \beta \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{u}^2 d\tilde{x} d\tilde{y} + \int_{\tilde{\Omega}} \left(\frac{1}{\alpha} \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right|^2 + \beta \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|^2 \right) d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &\quad + \int_{\tilde{\Omega}} \left(\left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right|^2 \right) d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &\leq \max\left(\beta, \frac{1}{\alpha}\right) \left(\int_{\tilde{\Omega}} \left[|\tilde{u}|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \right|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right|^2 \right] d\tilde{x} d\tilde{y} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max\left(\beta, \frac{1}{\alpha}\right) \|\tilde{u}\|_{2, \tilde{\Omega}}^2 \leq \max\left(\beta, \frac{1}{\alpha}\right) C^2(\alpha, \beta) \|\tilde{u}\|_{2, \tilde{\Omega}}^2 \\
&\leq \beta^2 \max\left(\beta, \frac{1}{\alpha}\right) C^2(\alpha, \beta) \|f\|_{0, \Omega}^2 \\
\|u\|_{L, \Omega} &\leq C(\alpha, \beta) \|f\|_{0, \Omega}
\end{aligned}$$

El resultado en IV.2.1 ha sido demostrado haciendo cambio de variables y aplicando el resultado de Berstein. El cambio global de variables existe porque $a(x, y)$ son variables globales en una dirección: $a(x, y) = a(x)$. Demostraremos un segundo resultado en el que se asume la existencia de un cambio local de variables.

IV.3 CONDICIONES PARA EL CAMBIO LOCAL DE VARIABLES

Sea $\Sigma \subset \Omega$ abierto y asumamos que se tiene un sistema de coordenadas ortogonales curvilineas (ξ, η) definido en Σ . Es decir consideremos que Σ y (ξ, η) cumplen las siguientes condiciones:

i) Las funciones ξ, η estan definidas en $\bar{\Sigma}$ y son dos veces continuamente diferenciables.

ii) $(\xi, \eta) : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ es uno a uno y sobre

iii) $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \geq \gamma > 0$ sobre Σ

iv) $\text{grad } \xi \cdot \text{grad } \eta = 0$ en Σ

v) Σ es un rectangulo en ξ, η , esto es, $\Sigma' = \left(\xi_{\Sigma}^1, \xi_{\Sigma}^2\right) \times \left(\eta_{\Sigma}^1, \eta_{\Sigma}^2\right)$ y

vi) $\bar{\Sigma} \cap \partial\Omega = \begin{cases} \Phi, \text{ en este caso todos los lados de } \Sigma \text{ son llamados} \\ \text{lados interiore} \\ \text{o} \\ \text{la unión de uno de uno o mas lados de } \Sigma, \text{ en este caso} \\ \text{estos lados son llamados lados fronteras y los otros} \\ \text{lados son llamados lado sinteriores} \end{cases}$

la unión de los lados interiores es denotado por E.

Además supongamos que

$$a(x, y) = a'(\xi) \quad , \forall (x, y) \in \Sigma \quad (\text{IV.3.1})$$

donde usaremos la notación, para toda función w definida en Σ ,

$$w'(\xi(x, y), \eta(x, y)) = w(x, y) \quad , (x, y) \in \Sigma$$

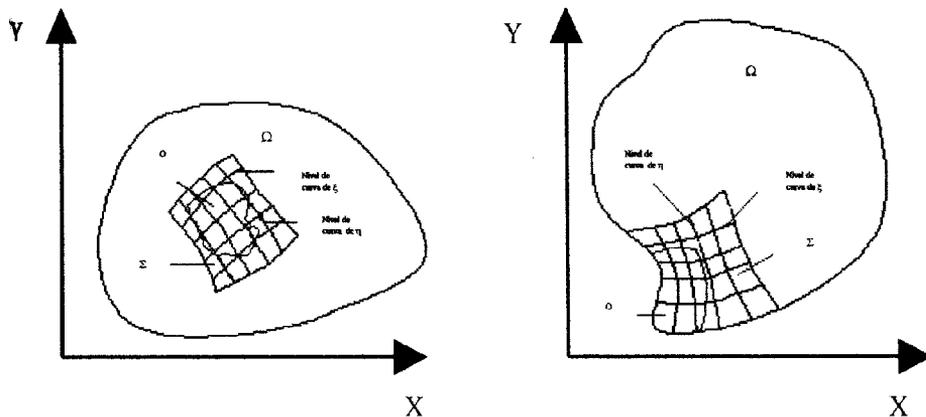


fig.IV.3

IV.3.1 TEOREMA

Sea u la solución en $H_0^1(\Omega)$ de (IV.1.1), donde asumimos que $f \in L^2(\Omega)$ y que $a(x,y)$ satisface las condiciones (IV.1.2) y (IV.3.1). Donde Σ , (ξ, η) satisface las condiciones (i) al (vi) de arriba. Sea $O \subset \Sigma$ abierto y satisface $O \subset \Sigma$ si $\bar{\Sigma} \cap \partial\Omega = \Phi$ y $\partial O \cap \partial\Sigma \subset \partial\Omega$ si $\bar{\Sigma} \cap \partial\Omega \neq \Phi$ y sea O' la imagen de O sobre la aplicación (ξ, η) . Entonces existe una constante $C = C(\alpha, \beta, \xi, \eta, d)$ dependiendo en $\alpha, \beta, \xi, \eta, y d$ pero independiente de f , tal que

$$\left(\int_{O'} \left[a' \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a' \frac{\partial u'}{\partial \xi} \right) \right|^2 + a' \left| \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi \partial \eta} \right|^2 + \frac{1}{a'} \left| \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} \right|^2 \right] d\xi d\eta \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{0,\Omega}$$

Donde

$$d = \begin{cases} \text{dist}(O, E) & \text{si } E \neq \Phi \\ 1 & \text{si } E = \Phi \end{cases}$$

Demostración:

Sea u la solución en $H_0^1(\Sigma)$, consideremos u/Σ satisface

$$\begin{cases} u \in H^1(\Sigma) \\ \int_{\Sigma} a \text{grad} u \cdot \text{grad} v dx dy = \int_{\Sigma} f v dx dy \quad \forall \tilde{v} \in H_0^1(\Sigma) \end{cases} \quad (\text{IV.3.1.1})$$

donde $u'(\xi(x, y), \eta(x, y)) = u(x, y)$

Además

$$\begin{aligned}
\text{gradu.gradv} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}, \\
&= \left(\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\
&= \left[\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
&\quad \left[\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \\
&= \left[\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
&\quad \left[\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \\
&= \left[\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] + \\
&\quad \left[\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \\
&= \frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \\
&\quad + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] \\
&= \frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \xi} |\text{grad}\xi|^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right) \text{grad}\xi \cdot \text{grad}\eta + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} |\text{grad}\eta|^2
\end{aligned}$$

De (iv) obtenemos

$$\text{gradu.gradv} = \frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \xi} |\text{grad}\xi|^2 + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} |\text{grad}\eta|^2 \quad (\text{IV.3.1.2})$$

Introduciendo el cambio de variables tenemos

$$\int_{\Sigma} \text{gradu.gradv} dx dy = \int_{\Sigma} f v dx dy$$

$$(\text{IV.3.1.3}) \int_{\Sigma'} a \left[\frac{\partial u'}{\partial \xi} \frac{\partial v'}{\partial \xi} |\text{grad}\xi|^2 + \frac{\partial u'}{\partial \eta} \frac{\partial v'}{\partial \eta} |\text{grad}\eta|^2 \right] \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} d\xi d\eta = \int_{\Sigma'} f' v' \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} d\xi d\eta,$$

$$\forall v' \in H_0^1(\Omega)$$

Ahora introduciremos un segundo cambio de variable

$$\tilde{\xi} = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dt}{a'(t)}, \quad \tilde{\eta} = \eta \quad (\text{IV.3.1.3})$$

$$\text{de donde } \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi} = \frac{1}{a'(\xi)}, \quad \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \eta} = 1, \quad \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \eta} = 0$$

Donde ξ_0^1 es la ξ -coordenada del lado izquierdo de Σ' y usaremos la notación

$\tilde{w}' \left(\tilde{\xi}(\xi, \eta), \tilde{\eta}(\xi, \eta) \right) = w'(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in \Sigma'$, para toda función w' en Σ' y $\tilde{\Sigma}'$ es la imagen de Σ' sobre la aplicación

$(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, utilizando esta notación obtenemos: ζ

$$u'(\xi, \eta) = \tilde{u}' \left(\tilde{\xi}(\xi, \eta), \tilde{\eta}(\xi, \eta) \right) \text{ y } v'(\xi, \eta) = \tilde{v}' \left(\tilde{\xi}(\xi, \eta), \tilde{\eta}(\xi, \eta) \right)$$

Como

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} &= \int_{\xi}^{\xi} \frac{dt}{a'(t)} & \text{entonces } \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial n} &= 0 & \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi} &= \frac{1}{a'(\xi)} \\ \tilde{\eta} &= n & \text{entonces } \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial n} &= 1 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial u'}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial u'}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial v'}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial v'}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \eta} \text{ además } \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})} = \begin{vmatrix} a' & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a'$$

De (IV.3.1.3) obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Sigma}} a' \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi} \right) |\text{grad} \tilde{\xi}|^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{\eta}} \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{\eta}} \right) |\text{grad} \tilde{\eta}|^2 \right] \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \\ &= \int_{\tilde{\Sigma}} \tilde{f}' \tilde{v}' \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Sigma}} a' \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{\xi}} \right) \left(\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \xi} \right)^2 |\text{grad} \tilde{\xi}|^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{\eta}} \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{\eta}} \right) |\text{grad} \tilde{\eta}|^2 \right] \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} a' d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \\ &= \int_{\tilde{\Sigma}} \tilde{f}' \tilde{v}' \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} a' d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Sigma}} (a')^2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{\xi}} \right) \left(\frac{1}{a'} \right)^2 |\text{grad} \tilde{\xi}|^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{\eta}} \right) \left(\frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{\eta}} \right) |\text{grad} \tilde{\eta}|^2 \right] \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \\ &= \int_{\tilde{\Sigma}} \tilde{f}' \tilde{v}' \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} a' d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Sigma}} \left(\frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{\xi}} |\text{grad} \tilde{\xi}|^2 + \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{\eta}} (a')^2 |\text{grad} \tilde{\eta}|^2 \right) \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \\ &= \int_{\tilde{\Sigma}} \tilde{f}' \tilde{v}' a' \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \end{aligned} \tag{IV.3.1.4}$$

De (IV.2.1.3)

$$\tilde{a}'_1 = a'_1(\xi, \eta) = |\text{grad} \tilde{\xi}|^2 \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \quad \text{y} \quad \tilde{a}'_2 = a'_2(\xi, \eta) = |\text{grad} \tilde{\eta}|^2 \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$$

Obtenemos de (IV.3.1.4)

$$\int_{\tilde{\Sigma}'} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \xi} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{n}} \right) d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} = \int_{\tilde{\Sigma}'} \tilde{f}' \tilde{v}' \tilde{a}' \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \quad \forall \tilde{v}' \in H_0^1(\tilde{\Sigma}')$$

(IV.3.1.5)

Ahora sea $\tilde{\Phi}' \in C^\infty(\tilde{\Sigma}')$ con $\tilde{\Phi}'(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = 0$ para $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in \partial \tilde{\Sigma}'$. Como $\tilde{v}' \in H_0^1(\tilde{\Sigma}')$ entonces $\tilde{\Phi}' \tilde{v}' \in H_0^1(\tilde{\Sigma}')$, podemos reemplazar \tilde{v}' por $\tilde{\Phi}' \tilde{v}'$ en (IV.3.1.4)

$$\int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \xi} \left(\tilde{\Phi}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \xi} + \tilde{v}' \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \xi} \right) + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{n}} \left(\tilde{\Phi}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{n}} + \tilde{v}' \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \tilde{n}} \right) \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}$$

$$= \int_{\tilde{\Sigma}'} \tilde{f}' \tilde{v}' \tilde{\Phi}' \tilde{a}' \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}$$

$$\int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \xi} \tilde{\Phi}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \xi} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{n}} \tilde{\Phi}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{n}} \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} = \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{f}' \tilde{v}' \tilde{\Phi}' \tilde{a}' \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}$$

$$- \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \xi} \tilde{v}' \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} - \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[(\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \tilde{n}} \tilde{v}' \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}$$

$$\int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \xi} \tilde{\Phi}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \xi} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{n}} \tilde{\Phi}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{n}} + \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \xi} \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \xi} + \right.$$

$$\left. (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \tilde{n}} \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{n}} \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} = \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{f}' \tilde{v}' \tilde{\Phi}' \tilde{a}' \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} - \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \xi} \tilde{v}' - \right.$$

$$\left. (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \tilde{n}} \tilde{v}' + \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \xi} \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \xi} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \tilde{n}} \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{n}} \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}$$

Finalmente obtenemos

$$\int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{a}'_1 \frac{\partial(\tilde{\Phi}' \tilde{u}')}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \xi} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial(\tilde{\Phi}' \tilde{u}')}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{n}} \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} = \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{f}' \tilde{v}' \tilde{\Phi}' \tilde{a}' \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} - \right.$$

$$\left. \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \xi} \tilde{v}' - (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}'}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \tilde{n}} \tilde{v}' + \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \xi} \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \xi} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}'}{\partial \tilde{n}} \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{v}'}{\partial \tilde{n}} \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}$$

(IV.3.1.6)

Además tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\Sigma}'} \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} &= - \int_{\tilde{\Sigma}'} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{u}' \right) \tilde{v} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \\
 &= \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[- \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} \right) \tilde{u}' \tilde{v} \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{v} \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}
 \end{aligned} \tag{IV.3.1.7}$$

y

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\Sigma}'} (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} &= - \int_{\tilde{\Sigma}'} \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left((\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \tilde{u}' \right) \tilde{v} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \\
 &= - \int_{\tilde{\Sigma}'} \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left((\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \right) \tilde{u}' \tilde{v} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \\
 &\quad - \int_{\tilde{\Sigma}'} (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} \tilde{v} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}
 \end{aligned} \tag{IV.3.1.8}$$

reemplazando (IV.3.1.7), (IV.3.1.8) en (IV.3.1.6)

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{a}'_1 \frac{\partial(\tilde{\Phi} \tilde{u}')}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial(\tilde{\Phi} \tilde{u}')}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}} \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} &= \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{f}' \tilde{v}' \tilde{\Phi}' \tilde{a}' \frac{\partial(x,y)}{\partial(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})} \right. \\
 &\quad - \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{v}' - (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\eta}} \tilde{v}' - \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} \right) \tilde{u}' \tilde{v}' \\
 &\quad \left. - \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}} \tilde{v}' \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} + \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[- \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left((\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \right) \tilde{u}' \tilde{v}' \right. \\
 &\quad \left. - (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} \tilde{v}' \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}
 \end{aligned}$$

esto a su vez es igual a:

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{a}'_1 \frac{\partial(\tilde{\Phi} \tilde{u}')}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial(\tilde{\Phi} \tilde{u}')}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}} \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} &= \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{f}' \tilde{\Phi}' \tilde{v}' \frac{\partial(x,y)}{\partial(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})} \right. \\
 &\quad \left. 2 \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} - 2 (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\eta}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} \right) \tilde{u}' \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left((\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} \right) \tilde{u}' \right] \tilde{v}' d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}
 \end{aligned}$$

$$\int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{a}'_1 \frac{\partial(\tilde{\Phi} \tilde{u}')}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial(\tilde{\Phi} \tilde{u}')}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\eta}} \right] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} = \int_{\tilde{\Sigma}'} \left[\tilde{f}' \tilde{\Phi}' \tilde{v}' \frac{\partial(x,y)}{\partial(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2 \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} - 2 (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\eta}} \\
& - \tilde{u}' \operatorname{div}_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}}, (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\eta}} \right) \tilde{v} \Big] d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}
\end{aligned}$$

denotemos

$$F \equiv \tilde{f}' \tilde{\Phi}' \tilde{a}' \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} - 2 \tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}} - 2 (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{n}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\eta}} - \tilde{u}' \operatorname{div}_{\tilde{\xi}, \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\xi}}, (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\eta}} \right)$$

(IV.3.1.9)

en conclusión obtenemos la siguiente igualdad:

$$\int_{\tilde{\Sigma}'} \left(\tilde{a}' \frac{\partial(\tilde{\Phi}' \tilde{u}')}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial(\tilde{\Phi}' \tilde{u}')}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{n}} \right) d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} = \int_{\tilde{\Sigma}'} F \tilde{v} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} \quad (\text{IV.3.2.0})$$

escribiendo $w = \tilde{u}' \tilde{\Phi}'$, de (IV.3.2.0) obtenemos:

$$\begin{cases} w \in H_0^1(\tilde{\Sigma}') \\ \int_{\tilde{\Sigma}'} \left(\tilde{a}' \frac{\partial w}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\xi}} + (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial(w)}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{n}} \right) d \tilde{\xi} d \tilde{\eta} = \int_{\tilde{\Sigma}'} F \tilde{v} d \tilde{\xi} d \tilde{\eta}, \tilde{v} \in H_0^1(\tilde{\Sigma}') \end{cases} \quad (\text{IV.3.2.1})$$

$w \in H_0^1(\tilde{\Sigma}')$, porque $\tilde{\Phi}'(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = 0$ para $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in \partial \tilde{\Sigma}'$. $F \in L^2(\tilde{\Sigma}')$ porque $\tilde{u}' \in H^1(\tilde{\Sigma}')$, las funciones ξ, η son de C^2 , y $\tilde{a}' = \tilde{a}'(\tilde{\xi})$ esta acotado. El sistema (IV.3.2.1) es simplificado por la siguiente fórmula variacional

$$\begin{cases} w = 0 \text{ en } \partial(\tilde{\Sigma}') \\ -\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial w}{\partial \tilde{\xi}} \right) - \tilde{a}'^2(\tilde{\xi}) \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_2 \frac{\partial w}{\partial \tilde{\eta}} \right) = F \text{ en } \tilde{\Sigma}' \end{cases} \quad (\text{IV.3.2.2})$$

La ecuación en (IV.3.2.2) se puede reformular:

$$-\tilde{a}'_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{\xi}^2} - (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tilde{\eta}^2} = F + \frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial w}{\partial \tilde{\xi}} + (\tilde{a}')^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial w}{\partial \tilde{\eta}} \equiv G \quad (\text{IV.3.2.3})$$

Denotemos por W la única solución en $H^2(\tilde{\Sigma}') \cap H_0^1(\tilde{\Sigma}')$ de

$$-\tilde{a}'_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{\xi}^2} - (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{\eta}^2} = G \quad (\text{IV.3.2.4})$$

Del resultado de II.12.1, W satisface la siguiente desigualdad:

$$\|W\|_{2,\tilde{\Sigma}'} \leq C(\alpha, \beta, \xi, \eta) \|G\|_{0,\tilde{\Sigma}'}$$

Ahora probaremos que $w = W$

De (IV.3.2.4) obtenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial W}{\partial \tilde{\xi}} \right) - \tilde{a}' \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_2 \frac{\partial W}{\partial \tilde{\eta}} \right) &= -\tilde{a}'^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{\xi}^2} - (\tilde{a}')^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{\eta}^2} \\ &\quad - \frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial W}{\partial \tilde{\xi}} - (\tilde{a}')^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial W}{\partial \tilde{\eta}} \\ &= G - \frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial W}{\partial \tilde{\xi}} - (\tilde{a}')^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial W}{\partial \tilde{\eta}} \quad \left(\text{De IV.3.2.3} \right) \\ &= F + \frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial w}{\partial \tilde{\xi}} + (\tilde{a}')^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial w}{\partial \tilde{\eta}} \\ &\quad - \frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial W}{\partial \tilde{\xi}} - (\tilde{a}')^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial W}{\partial \tilde{\eta}} \end{aligned}$$

(IV.3.2.5)

Restando (IV.3.2.3) - (IV.3.2.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial w}{\partial \tilde{\xi}} \right) + \tilde{a}' \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_2 \frac{\partial w}{\partial \tilde{\eta}} \right) - \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial w}{\partial \tilde{\xi}} \right) - \tilde{a}' \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_2 \frac{\partial w}{\partial \tilde{\eta}} \right) &= F + \frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial w}{\partial \tilde{\xi}} \\ + (\tilde{a}')^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial w}{\partial \tilde{\eta}} - \frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \tilde{\xi}} \frac{\partial W}{\partial \tilde{\xi}} - (\tilde{a}')^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial W}{\partial \tilde{\eta}} - F \end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial (W-w)}{\partial \tilde{\xi}} \right) + \tilde{a}' \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_2 \frac{\partial (W-w)}{\partial \tilde{\eta}} \right) = \frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \tilde{\xi}} \left(\frac{\partial (W-w)}{\partial \tilde{\xi}} \right) + \tilde{a}' \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\eta}} \left(\frac{\partial (W-w)}{\partial \tilde{\eta}} \right)$$

Sea $U=W-w$, usando (IV.3.2.2) y (IV.3.2.5) tenemos:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial U}{\partial \tilde{\xi}} \right) - \tilde{a}' \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_2 \frac{\partial U}{\partial \tilde{\eta}} \right) = -\frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \tilde{\xi}} \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{\xi}} \right) - \tilde{a}' \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\eta}} \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{\eta}} \right) \text{ en } \tilde{\Sigma}' \\ U = 0 \text{ en } \partial \tilde{\Sigma}' \end{cases} \quad (\text{IV.3.2.6})$$

para demostrar que $W = w$, probaremos que $U = 0$

Sea $T : H^{-1}(\tilde{\Sigma}') \rightarrow H_0^1(\tilde{\Sigma}')$ el operador solución correspondiente al problema (IV.3.2.2), tal que $TF = w$ entonces de (IV.3.2.6) obtenemos:

$$U = T \left(-\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \tilde{\xi}} \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{\xi}} \right) - \tilde{a} \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \tilde{\eta}} \left(\frac{\partial U}{\partial \tilde{\eta}} \right) \right) \equiv AU \quad (\text{IV.3.2.7})$$

$T : H^{-1}(\tilde{\Sigma}') \rightarrow H_0^1(\tilde{\Sigma}')$ es acotado $H^0(\tilde{\Sigma}') = L^2(\tilde{\Sigma}')$ es compacto contenido en $H^{-1}(\tilde{\Sigma}')$ entonces $A : H_0^1(\tilde{\Sigma}') \rightarrow H_0^1(\tilde{\Sigma}')$ es compacto. Supongamos que $U \neq 0$ entonces de (IV.3.2.7) se observa que 1 es autovalor de A entonces $1 = \bar{1}$ es autovalor de A^* , sea v su autovector.

AFIRMAMOS : Podemos elegir $v' \in H^2(\tilde{\Sigma}') \cap H_0^1(\tilde{\Sigma}')$ tal que

$$\|v - v'\|_{1, \tilde{\Sigma}'} < \|v\|_{1, \tilde{\Sigma}'}$$

de estas condiciones afirmamos que $(v, v')_{H^1(\tilde{\Sigma}')} \neq 0$

$$\sum_{|\alpha| \leq 1} \left((D^\alpha v)^2 - 2D^\alpha v D^\alpha v' + (D^\alpha v')^2 \right) d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} < \int_{\tilde{\Sigma}'} \sum_{|\alpha| \leq 1} |D^\alpha v|^2$$

$$0 \leq \int_{\tilde{\Sigma}'} \sum_{|\alpha| \leq 1} (D^\alpha v')^2 < 2 \int_{\tilde{\Sigma}'} \sum_{|\alpha| \leq 1} D^\alpha v D^\alpha v'$$

$$\text{entonces } (v, v')_{H^1(\tilde{\Sigma}')} = \int_{\tilde{\Sigma}'} \sum_{|\alpha| \leq 1} D^\alpha v D^\alpha v' > 0$$

por la alternativa de Fredholm se observa que el problema:

$$(I - A)Z = v' \quad (\text{IV.3.2.8})$$

no tiene solución en $H_0^1(\tilde{\Sigma}')$.

De (IV.3.2.8) y (IV.3.2.7)

$$v' = IZ - AZ = Z - T \left(-\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \tilde{\xi}} \left(\frac{\partial Z}{\partial \tilde{\xi}} \right) - \tilde{a} \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \tilde{\eta}} \left(\frac{\partial Z}{\partial \tilde{\eta}} \right) \right) \quad (\text{IV.3.2.9})$$

De (IV.3.2.9)

$$T \left(-\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \tilde{\xi}} \left(\frac{\partial Z}{\partial \tilde{\xi}} \right) - \tilde{a} \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \tilde{\eta}} \left(\frac{\partial Z}{\partial \tilde{\eta}} \right) \right) = Z - v' \quad (\text{IV.3.3.0})$$

reemplazando en (IV.3.3.0) en (IV.3.2.0)

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial(Z-v')}{\partial \xi} \right) - \tilde{a}'^2 \left(\tilde{\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_2 \frac{\partial(Z-v')}{\partial \tilde{\eta}} \right) &= -\frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \xi} \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) - \tilde{a}'^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\eta}} \left(\frac{\partial Z}{\partial \tilde{\eta}} \right) \\
-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) - \tilde{a}'^2 \left(\tilde{\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_2 \frac{\partial Z}{\partial \tilde{\eta}} \right) &= -\frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \xi} \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi} \right) - \tilde{a}'^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \tilde{\eta}} \left(\frac{\partial Z}{\partial \tilde{\eta}} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right) \\
&\quad - \tilde{a}'^2 \left(\tilde{\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_2 \frac{\partial v'}{\partial \tilde{\eta}} \right) \\
-\tilde{a}'_1 \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \tilde{a}'^2 \tilde{a}'_2 \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{\eta}^2} &= -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tilde{a}'_1 \frac{\partial v'}{\partial \xi} \right) - \tilde{a}'^2 \left(\tilde{\xi} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{\eta}} \left(\tilde{a}'_2 \frac{\partial v'}{\partial \tilde{\eta}} \right)
\end{aligned}$$

Del resultado en II.12.1 ,esta ecuación tiene una solución Z en $H^2 \left(\tilde{\Sigma}' \right) \cap H_0^1 \left(\tilde{\Sigma}' \right)$ entonces Z es solución de (IV.3.3.0) y solución de (IV.3.2.8),esto es una contradicción , pues (IV.3.2.8) no tiene solución en $H_0^1 \left(\tilde{\Sigma}' \right)$; este resultado se obtuvo de suponer que $U \neq 0$ en conclusión $U = 0$ entonces $w = W$.

Por tanto $w = W \in H^2 \left(\tilde{\Sigma}' \right)$ y

$$\|w\|_{2, \tilde{\Sigma}'} \leq C(\alpha, \beta, \xi, \eta) \|G\|_{0, \tilde{\Sigma}'} \quad (\text{IV.3.3.1})$$

Ahora la función $\tilde{\Phi}'$ puede elejirse como una función cortante satisfaciendo $\tilde{\Phi}' = 1$ en \tilde{O}' tal que $|D \tilde{\Phi}'| \leq C(\tilde{d}')^{-1}$ y $|D^2 \tilde{\Phi}'| \leq C(\tilde{d}')^{-2}$ donde C es una constante positiva y

$$\tilde{d}' = \begin{cases} \text{dist} \left(\tilde{O}', \tilde{E}' \right) & \text{si } \tilde{E}' \neq \phi \\ 1 & \text{si } \tilde{E}' = \phi \end{cases}$$

De (IV.3.2.2) , (IV.3.1.9) y (IV.3.1.5) tenemos

$$\begin{aligned}
\|G\|_{0, \tilde{\Sigma}'} &= \left\| F + \frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} + (\tilde{a}')^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \tilde{\eta}} \right\|_{0, \tilde{\Sigma}'} \\
&\leq \|F\|_{0, \tilde{\Sigma}'} + \left\| \frac{\partial \tilde{a}'_1}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right\|_{0, \tilde{\Sigma}'} + \left\| (\tilde{a}')^2 \frac{\partial \tilde{a}'_2}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \tilde{\eta}} \right\|_{0, \tilde{\Sigma}'}
\end{aligned}$$

obteniendose

$$\|G\|_{0, \tilde{\Sigma}'} \leq C(\alpha, \beta, \xi, \eta) (\tilde{d}')^{-2} \|f\|_{0, \Omega}$$

entonces de (IV.3.3.1) obtenemos

$$\|\tilde{u}\|_{2,\tilde{\mathcal{O}}} \leq \|w\|_{2,\tilde{\Sigma}'} \leq C(\alpha, \beta, \xi, \eta, \tilde{d}') \leq \|f\|_{0,\Omega}$$

realizando la transformación

$$\left(\int_{\mathcal{O}'} \left[a' \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \left(a' \frac{\partial u'}{\partial \xi} \right) \right|^2 + a' \left| \frac{\partial^2 u'}{\partial \xi \partial \eta} \right|^2 + \frac{1}{a'} \left| \frac{\partial^2 u'}{\partial \eta^2} \right|^2 \right] d\xi d\eta \right)^{1/2} \leq C(\alpha, \beta, \xi, \eta, d) \|f\|_{0,\Omega}$$

CAPITULO V
ELEMENTOS FINITOS ESPECIALES APLICADOS A PROBLEMAS
ELIPTICOS DE 2do ORDEN CON COEFICIENTES NO SUAVES

V.1 METODO I

Para $0 < h \leq 1$, sea C_h triangulización de Ω por triangulos curvilineos(cerrados) T de diametro menor igual que h , donde $T \subset \Omega$, cada triángulo es la preimagen de un triangulo ordinario $\tilde{T} \subset \tilde{\Omega}$ sobre la aplicación (IV.2.1.2) Correspondiente a C_h tenemos una triangulización \tilde{C}_h de $\tilde{\Omega}$ por triangulos usuales. Asumimos que $\{C_h\}_{0 < h \leq 1}$ satisface una condición angular mínima :

$$\frac{h_{\tilde{T}}}{\rho_{\tilde{T}}} \leq \sigma, \forall \tilde{T} \in \tilde{C}_h \quad \forall 0 < h \leq 1 \quad (V.1.1')$$

Donde cualquier conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}^2$:

$$h_S = \text{diametro de } S \quad (V.1.2')$$

$$\rho_S = \text{diametro del disco más grande contenido en } \bar{S} \quad (V.1.3')$$

Definimos el espacio de funciones aproximadas asociado a C_h :

$$S_h = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_T \in L \left\{ 1, \int_0^x \frac{dt}{a(t)}, y \right\} \forall T \in C_h, v \text{ es continuo en los nodos de } C_h, v = 0 \text{ en los nodos frontera} \right\} \quad (V.1.4')$$

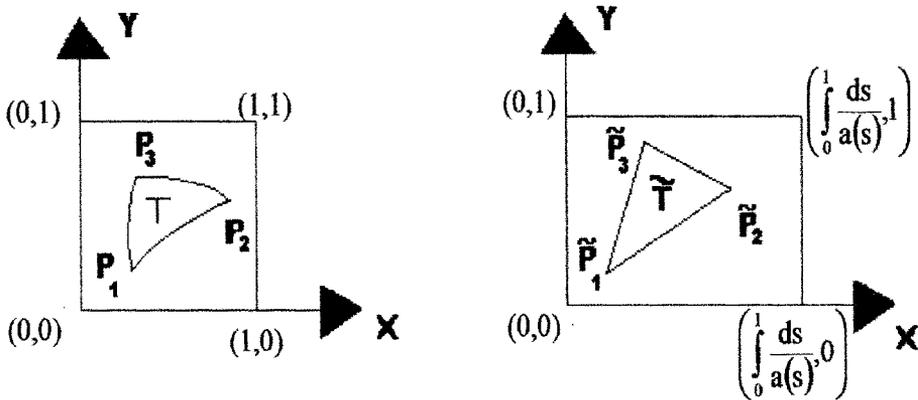


fig. V.1

AFIRMACION : $S_h \subset H_0^1(\Omega)$

Sea $v \in S_h$ entonces

$$\int_{\Omega} |v(x, y)|^2 dx dy = \int_{\tilde{\Omega}} |\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 \tilde{a} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{C}}_h} \int_{\tilde{T}} |\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 d\tilde{x}d\tilde{y} \\
&\leq \beta \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{C}}_h} \int_{\tilde{T}} |\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y})|^2 d\tilde{x}d\tilde{y} \right) \\
&= \beta \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{C}}_h} \int_{\tilde{T}} |a + b\tilde{x} + c\tilde{y}|^2 d\tilde{x}d\tilde{y} \right) \\
&\leq 2\beta \left(\sum_{\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{C}}_h} \int_{\tilde{T}} (a^2 + b^2\tilde{x}^2 + c^2\tilde{y}^2) d\tilde{x}d\tilde{y} \right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

por tanto $v \in H^1(\Omega)$ y $v = 0$ en los nodos frontera entonces $v \in H_0^1(\Omega)$ (ver I.4.4).

Sea la aproximación por elementos finitos u_h a u se define por:

$$\begin{cases} u_h \in S_h \\ B(u_h, v) = \int_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in S_h \end{cases} \quad (\text{V.1.5}')$$

B es definido en (IV.1.3)

AFIRMACION : B es una forma bilineal acotada

$$\begin{aligned}
|B(u, v)| &\leq \int_{\Omega} \beta |\text{grad}u \cdot \text{grad}v| dx dy \\
&\leq \int_{\Omega} \beta |\text{grad}u| |\text{grad}v| dx dy \\
&= \beta \left(\int_{\Omega} |\text{grad}u|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\text{grad}v|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \beta \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx dy + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 dx dy + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
|B(u, v)| &\leq \beta \|u\|_{1, \Omega} \|v\|_{1, \Omega}
\end{aligned}$$

en conclusion $B(u, v)$ es acotado.

V.1.1 TEOREMA: Existe una constante $\delta(\alpha)$, independiente de h tal que para todo $0 < h \leq 1$,

$$\inf_{\substack{v \in S_h \\ \|v\|_{1, \Omega} = 1}} \sup_{\substack{w \in S_h \\ \|w\|_{1, \Omega} = 1}} |B(v, w)| \geq \delta(\alpha)$$

Demostración :

tenemos que $B(u, v) = B(v, u)$ entonces la forma bilineal es simétrica

$B(u, v) = \int_{\Omega} a \text{grad} u \cdot \text{grad} v \, dx dy = \int_{\Omega} a \text{grad} v \cdot \text{grad} u \, dx dy = B(v, u)$. Demostraremos que

$$|B(v, v)| \geq \delta(\alpha) \|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in S_h, 0 < h \leq 1$$

Sea $v \in S_h$ entonces $v \in H_0^1(\Omega)$

$$B(v, v) = \int_{\Omega} a \text{grad} v \cdot \text{grad} v \, dx dy = \int_{\Omega} a \left[\left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 \right] dx dy \quad \text{entonces}$$

$$\begin{aligned} |B(v, v)| &\geq B(v, v) \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 \right] dx dy \\ &= \alpha \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 \right) + \alpha \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy \\ &\geq \alpha \int_{\Omega} \left(\frac{c_0}{2} |v|^2 \right) dx dy + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy \quad (\text{Desigualdad de Poincaré}) \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \delta(\alpha) = \min \left\{ \frac{\alpha c_0}{2}, \frac{\alpha}{2} \right\}$$

entonces

$$|B(v, v)| \geq \delta(\alpha) \int_{\Omega} \left(|v|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy = \delta(\alpha) \|v\|_{1,\Omega}^2$$

Sea $v = w \in S_h$ entonces $|B(v, w)| \geq \delta(\alpha) \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega}$ Por tanto $|B(v, w)| \geq \delta(\alpha) \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega}$

$$\sup_{\substack{w \in S_h \\ \|w\|_{1,\Omega}=1}} |B(v, w)| \geq \delta(\alpha) \|v\|_{1,\Omega}$$

$$\sup_{\substack{v \in S_h \\ \|v\|_{1,\Omega}=1}} \sup_{\substack{w \in S_h \\ \|w\|_{1,\Omega}=1}} |B(v, w)| \geq \delta(\alpha)$$

Este teorema nos garantiza que existe solución única (ver II.7)

Observación:

Ahora supongamos que $u \in H^L(T)$ entonces $\tilde{u} \in H^2(\tilde{T})$ (ver II.2.1).

Definimos el espacio $L\left\{1, \int_0^x \frac{dt}{a(t)}, y\right\}$ interpolante de u en T por:

$$\begin{aligned} d_T u &= \alpha + \beta \int_0^x \frac{dt}{a(t)} + \sigma y \\ d_T u(P_i) &= u(P_i) \end{aligned}$$

V.1.2 TEOREMA

Existe una constante $C = C(\alpha, \beta)$, dependiendo de α y β pero independiente de T y u tal que

$$|u - d_T u|_{1,T} \leq C \frac{h_T^2}{\rho_T} |u|_{L,T} \quad \forall u \in H^L(T)$$

Donde h_T^2 , ρ_T son definidos en (V.1.3') y (V.1.4').

Demostración:

$$\begin{aligned} |u - d_T u|_{1,T}^2 &= \int_T \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha (u - d_T u)|^2 dx dy \\ &= \int_T \left| \frac{\partial (u - d_T u)}{\partial x} \right|^2 dx dy + \int_T \left| \frac{\partial (u - d_T u)}{\partial y} \right|^2 dx dy \\ &= \int_{\tilde{T}} \left| \frac{\partial (\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u})}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right|^2 \tilde{a} d \tilde{x} d \tilde{y} + \int_{\tilde{T}} \left| \frac{\partial (\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u})}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \right|^2 \tilde{a} d \tilde{x} d \tilde{y} \\ &= \int_{\tilde{T}} \left| \frac{\partial (\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u})}{\partial \tilde{x}} \frac{1}{\tilde{a}} \right|^2 \tilde{a} d \tilde{x} d \tilde{y} + \int_{\tilde{T}} \left| \frac{\partial (\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u})}{\partial \tilde{y}} \right|^2 \tilde{a} d \tilde{x} d \tilde{y} \\ &= \int_{\tilde{T}} \left| \frac{\partial (\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u})}{\partial \tilde{x}} \right|^2 \frac{1}{\tilde{a}} d \tilde{x} d \tilde{y} + \int_{\tilde{T}} \left| \frac{\partial (\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u})}{\partial \tilde{y}} \right|^2 \tilde{a} d \tilde{x} d \tilde{y} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \int_{\tilde{T}} \left| \frac{\partial (\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u})}{\partial \tilde{x}} \right|^2 d \tilde{x} d \tilde{y} + \beta \int_{\tilde{T}} \left| \frac{\partial (\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u})}{\partial \tilde{y}} \right|^2 d \tilde{x} d \tilde{y} \\ |u - d_T u|_{1,T}^2 &\leq \max \left(\beta, \frac{1}{\alpha} \right) |\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u}|_{1,\tilde{T}}^2 \end{aligned}$$

Donde $d_{\tilde{T}} \tilde{u} \in L\{1, \tilde{x}, \tilde{y}\}$ interpolante de \tilde{u} en el triángulo \tilde{T} . Como $\tilde{u} \in H^2(\tilde{T})$, aplicaremos el teorema de interpolación lineal (considere una biyección $G(\tilde{K}) = \tilde{\tilde{K}}$):

$$|\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u}|_{1,\tilde{T}} \leq C \frac{h_{\tilde{T}}^2}{\rho_{\tilde{T}}} |\tilde{u}|_{2,\tilde{T}}$$

donde C es una constante. Además: $|\tilde{u}|_{2,\tilde{T}} = |u|_{L,T}$

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}|_{2,\tilde{T}}^2 &= \int_{\tilde{T}} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha \tilde{u}|^2 = \int_{\tilde{T}} \left(|D^{(2,0)} \tilde{u}|^2 + |D^{(0,2)} \tilde{u}|^2 + |D^{(1,1)} \tilde{u}|^2 \right) d\tilde{x} d\tilde{y} \\
&= \int_{\tilde{T}} \left(\left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} \right|^2 \right) d\tilde{x} d\tilde{y} \\
&= \int_T \left(\left| a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} a \right) \right|^2 + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^2 + \left| a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|^2 \right) \frac{1}{a} dx dy \\
&= \int_T \left(a \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} a \right) \right|^2 + a \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right|^2 + \frac{1}{a} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|^2 \right) dx dy \\
|\tilde{u}|_{2,\tilde{T}}^2 &= |u|_{L,T}^2 \tag{V.1.2.1}
\end{aligned}$$

combinando los resultados tenemos:

$$\begin{aligned}
|u - d_T u|_{1,T}^2 &\leq \max\left(\beta, \frac{1}{\alpha}\right) |\tilde{u} - d_{\tilde{T}} \tilde{u}|_{1,\tilde{T}}^2 \leq \max\left(\beta, \frac{1}{\alpha}\right) \left(C \frac{h_{\tilde{T}}^2}{\rho_{\tilde{T}}} |\tilde{u}|_{2,\tilde{T}} \right)^2 \\
&= \max\left(\beta, \frac{1}{\alpha}\right) C^2 \frac{h_{\tilde{T}}^4}{\rho_{\tilde{T}}^2} |u|_{L,T}^2
\end{aligned}$$

$$|u - d_T u|_{1,T} \leq C \left(\max\left(\beta, \frac{1}{\alpha}\right) \right)^{\frac{1}{2}} \frac{h_{\tilde{T}}^2}{\rho_{\tilde{T}}} |u|_{L,T}$$

Definimos ahora el S_h interpolante de $u \in H^L(\Omega)$ por

$$\begin{cases} d_h u \in S_h \\ d_h u(P) = u(P) \quad \text{Para todos los nodos } P \in C_h \end{cases}$$

V.1.3 TEOREMA

Existe una constante $C = C(\alpha, \beta, \sigma)$, dependiendo de α, β , y σ pero independiente de u y h tal que

$$\|u - d_h u\|_{1,\Omega} \leq Ch |u|_{L,T} \quad \forall u \in H^L(\Omega), 0 < h \leq 1$$

Demostración:

Como $u \in H^L(\Omega)$ entonces $u \in H^1(\Omega)$ y $d_h u \in H_0^1(\Omega)$ entonces $(u - d_h u) \in H^1(\Omega)$, utilizaremos la desigualdad de Poincare:

$$\begin{aligned}
\|u - d_h u\|_{1,\Omega}^2 &= \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 1} |D^\alpha (u - d_h u)|^2 dx dy \\
&= \sum_{T \in C_h} \int_T \sum_{|\alpha| \leq 1} |D^\alpha (u - d_T u)|^2 dx dy \\
&= \sum_{T \in C_h} \int_T \left(\left| \frac{\partial (u - d_T u)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial (u - d_T u)}{\partial y} \right|^2 + |u - d_T u|^2 \right) dx dy \\
&\leq \sum_{T \in C_h} C_1 \int_T \left(\left| \frac{\partial (u - d_T u)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial (u - d_T u)}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy \\
&= C_1 \sum_{T \in C_h} \int_T \left(\left| \frac{\partial (u - d_T u)}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial (u - d_T u)}{\partial y} \right|^2 \right) dx dy \\
&= C_1 \sum_{T \in C_h} |u - d_T u|_{1,T}^2 \\
&\leq C_1 \sum_{T \in C_h} \left(C(\alpha, \beta)^2 \frac{h_T^4}{\rho_T^2} |u|_{L,T}^2 \right) \\
&= C_1 C(\alpha, \beta)^2 \sum_{T \in C_h} \left(\left(\frac{h_T}{\rho_T} \right)^2 h_T^2 |u|_{L,T}^2 \right) \\
&= C_1 C(\alpha, \beta)^2 \sum_{T \in C_h} \left(\sigma^2 h_T^2 |u|_{L,T}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u - d_h u\|_{1,\Omega}^2 &\leq C_1 C(\alpha, \beta)^2 \sigma^2 \left[C_2 \max_{T \in C_h} \left(h_T^2 |u|_{L,T}^2 \right) \right] \\
&\leq C_1 C(\alpha, \beta)^2 \sigma^2 \left[C_2 \left(\max \left(\frac{1}{\alpha}, 1 \right) h \right)^2 |u|_{L,T}^2 \right] \\
\|u - d_h u\|_{1,\Omega} &\leq C(\alpha, \beta, \sigma) h |u|_{L,\Omega}
\end{aligned}$$

Donde

$$h_T \leq \max \left(\frac{1}{\alpha}, 1 \right) h_T \leq \max \left(\frac{1}{\alpha}, 1 \right) h \quad \forall T \in C_h \quad (\text{V.1.3.1})$$

Demostremos (V.1.3.1):

Sea $T \in C_h$ y \tilde{T} el que se obtiene por la aplicacion (II.2.1.2):

$$\tilde{x}(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{ds}{a(s)}, \quad \tilde{y}(y_1) = y_1, \quad \tilde{x}(x_2) = \int_0^{x_2} \frac{ds}{a(s)}, \quad \tilde{y}(y_2) = y_2 \quad :$$

$$\frac{x_1}{\beta} \leq \int_0^{x_1} \frac{ds}{a(s)} \leq \frac{x_1}{\alpha} \quad \text{entonces} \quad \frac{x_1}{\beta} \leq \tilde{x}(x_1) \leq \frac{x_1}{\alpha}$$

$$\frac{x_2}{\beta} \leq \int_0^{x_2} \frac{ds}{a(s)} \leq \frac{x_2}{\alpha} \text{ entonces } -\frac{x_2}{\alpha} \leq \tilde{x}(x_2) \leq -\frac{x_2}{\beta}$$

Supongamos $x_1 > x_2$ entonces $-\left(\frac{x_2}{\alpha} - \frac{x_1}{\beta}\right) < \tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2) < \frac{x_1}{\alpha} - \frac{x_2}{\beta}$ además

$$-\left(\frac{x_1}{\alpha} - \frac{x_2}{\beta}\right) < -\left(\frac{x_2}{\alpha} - \frac{x_1}{\beta}\right) \text{ Por tanto } \left| \tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2) \right| \leq \frac{x_1}{\alpha} - \frac{x_2}{\beta}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2))^2 &\leq \left(\frac{x_1}{\alpha} - \frac{x_2}{\beta}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\beta}\right)^2 - 2\frac{x_1 x_2}{\alpha \beta} \\ &= \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^2 + \frac{x_2}{\alpha \beta} \left(\frac{\alpha x_2}{\beta} - 2x_1\right) \\ &\leq \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^2 + \frac{x_2}{\alpha^2} (x_2 - 2x_1) = \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha}\right)^2 - \frac{2x_1 x_2}{\alpha^2} \\ (\tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2))^2 &\leq \left(\frac{x_1}{\alpha} - \frac{x_2}{\alpha}\right)^2 \end{aligned}$$

Utilizando esta estimación obtenemos:

$$\begin{aligned} h_T^2 &= (\tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2))^2 + (\tilde{y}(y_1) - \tilde{y}(y_2))^2 \\ &\leq \left(\frac{x_1}{\alpha} - \frac{x_2}{\alpha}\right)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ h_T^2 &= \frac{1}{\alpha^2} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Si } \frac{1}{\alpha} \leq 1 \text{ entonces } h_T^2 \leq (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq h_T^2$$

$$\text{Si } 1 \leq \frac{1}{\alpha} \text{ entonces } h_T^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{\alpha^2} (y_1 - y_2)^2 \leq \frac{1}{\alpha^2} h_T^2$$

En conclusion

$$h_T \leq \max\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right) h_T \leq \max\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right) h \quad \forall T \in C_h$$

V.1.4 TEOREMA

Para $f \in L^2(\Omega)$ sea u la solución a (IV.1.1) y sea u_h la solución de (V.1.5'), con S_h definido en (V.1.4'). Entonces existe una constante $C = C(\alpha, \beta, \sigma)$ dependiendo de α, β , y σ pero independiente de f y h tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch \|f\|_{0,\Omega}, 0 < h \leq 1$$

Demostración:

- 1) u solución de (IV.1.1) entonces $u \in H_0^1(\Omega)$ y $H^L(\Omega)$ (ver IV.2.1)
 2) $u_h, v \in S_h$ entonces $u_h, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \int_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ B(u_h, v) &= \int_{\Omega} f v dx dy \quad \forall v \in S_h \end{aligned} \quad (V.1.4.1)$$

Sea $X \in S_h$ y $u_h \in S_h$ entonces X y $u_h \in H_0^1(\Omega)$ así denotemos a $X - u_h = w_h \in H_0^1(\Omega)$ entonces de (V.1.4.1)

$$\begin{aligned} B(u, w_h) &= B(u_h, w_h) \\ \text{entonces } B(u - u_h, w_h) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(u - u_h, X - u_h + u - u) &= 0 \\ B(u - u_h, u - u_h) &= B(u - u_h, u - X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) \|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq |B(u - u_h, u - u_h)| = |B(u - u_h, u - X)| \\ &\leq C_2 \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|u - X\|_{1,\Omega} \\ \delta(\alpha) \|u - u_h\|_{1,\Omega}^2 &\leq C_2 \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|u - X\|_{1,\Omega} \\ \|u - u_h\|_{1,\Omega} &\leq C_3 \inf_{X \in S_h} \|u - X\|_{1,\Omega} \end{aligned} \quad (V.1.4.2)$$

Utilizando (V.1.4.2), (V.1.3) y (IV.2.1) tenemos:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega} &\leq C_3 \inf_{X \in S_h} \|u - X\|_{1,\Omega} = C_3 \|u - d_h u\|_{1,\Omega} \leq C_3 C_4 h |u|_{L,\Omega} \\ &\leq Ch \|u\|_{L,\Omega} \leq Ch \|f\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

V.2 METODO II

Para $h = \frac{1}{n}, n = 2, 3, \dots$. Sea C_h triangulaciones uniformes de Ω con nodos $(x_i, y_j) = (ih, jh), i, j = 0, \dots, n$. mostrados en la fig.V.2

Usaremos en nuestro análisis el espacio definido:

$$H_h^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u|_T \in H^1(T) \quad \forall T \in C_h\} \text{ con la norma:}$$

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,h}^2 &= \int_{\Omega} u^2 dx dy + |u|_{1,h}^2 \\ \|u\|_{1,h}^2 &= \int_{\Omega} u^2 dx dy + \sum_{T \in C_h} \int_T |\text{grad} u|^2 dx dy \end{aligned}$$

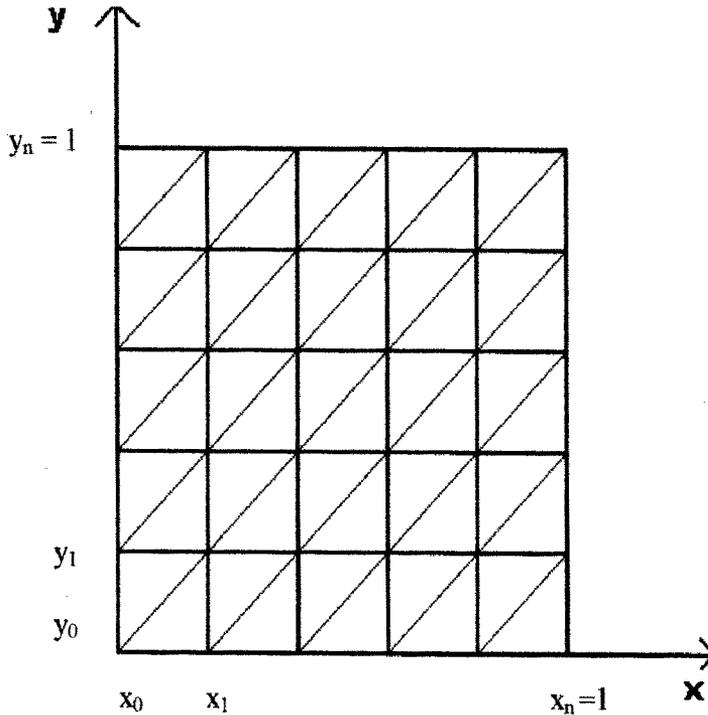


fig. V.2

AFIRMACIÓN: $H_h^1(\Omega)$ son espacios de Hilbert

Sea $(u_k)_{k \in N}$ una sucesión de cauchy en $H_h^1(\Omega)$ entonces

$$\|u_k - u_j\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_k - u_j\|_{1,h} < \xi_1$$

como $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert: $\exists u \in L^2(\Omega) / u_k \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$ entonces $u_k/T \xrightarrow{L^2(T)} u/T$ además $u_k \in H_h^1(\Omega), \forall k \in N$ de donde $u_k/T \in H^1(T), \forall k \in N$, $H^1(T)$ es un espacio de Hilbert, por tanto $\exists v \in H^1(T) / u_k/T \xrightarrow{L^2(T)} v$, por la unicidad del límite $u/T = v \in H^1(T)$ obtenemos $u \in H_h^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|u_k - u\|_{1,h}^2 &= \int_{\Omega} (u_k - u)^2 dx dy + \sum_{T \in C_h} \int_T |\text{grad}(u_k - u)|^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega} (u_k - u)^2 dx dy + \sum_{T \in C_h} \int_T \left[\left| \frac{\partial(u_k - u)}{\partial x} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial(u_k - u)}{\partial y} \right|^2 \right] dx dy \\ &\leq \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in C_h} \|u_k/T - u/T\|_{1,T}^2 \\ &< \xi_1 + \xi_2 = \xi \end{aligned}$$

Definimos la forma bilineal B_h en $H_h^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ por

$$B_h(u, v) = \sum_{T \in C_h} \int_T a \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, dx dy$$

AFIRMACION: $B_h(u, v)$ es acotado en $H_h^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, con una cota que es independiente de h .

Si $u \in H_h^1(\Omega)$ entonces $u \in L^2(\Omega) : u|_T \in H^1(T) \forall T \in C_h$ por tanto $u|_T \in L^2(T)$

$$\begin{aligned} |B_h(u, v)| &\leq \sum_{T \in C_h} \int_T |a \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v| \, dx dy \\ &\leq \beta \sum_{T \in C_h} \left[\int_T |\operatorname{grad} u| |\operatorname{grad} v| \, dx dy \right] \\ &\leq \beta \sum_{T \in C_h} \left[\left(\int_T |\operatorname{grad} u|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_T |\operatorname{grad} v|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ |B_h(u, v)| &\leq C(\beta) \end{aligned}$$

Claramente se tiene $B_h(u, v) = B(u, v)$, para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Ahora definimos los siguientes espacios:

$$\begin{aligned} S_{1,h} &= \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_T \in L \left\{ 1, \int_0^x \frac{dt}{a(t)}, y \right\} \forall T \in C_h, v \text{ es continua en los} \right. \\ &\quad \left. \text{nodos de } C_h, v = 0 \text{ en la frontera} \right\} \\ &\quad \text{y} \\ S_{2,h} &= \left\{ v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in L \{1, x, y\}, v|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \end{aligned}$$

AFIRMACION: $S_{1,h} \subset H_h^1(\Omega)$ y $S_{2,h} \subset H_0^1(\Omega)$

Sea $v \in S_{1,h}$ entonces $v \in L^2(\Omega) : v|_T \in L \left\{ 1, \int_0^x \frac{dt}{a(t)}, y \right\} \forall T \in C_h, v$ es continua en los nodos de $C_h, v = 0$ en los nodos frontera por tanto

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 \int_0^x \frac{dt}{a(t)} + \alpha_3 y, \forall (x, y) \in T \\ \text{de donde } \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= \frac{\alpha_2}{a(x)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \alpha_3, \forall (x, y) \in T \\ \text{entonces } \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} &\text{ y } v \in L^2(T) \text{ entonces } v \in H^1(T) \end{aligned}$$

Por tanto

$$S_{1,h} \subset H_h^1(\Omega)$$

Sea $v \in S_{2,h}$ entonces $v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_T \in L\{1, x, y\}, v|_{\partial\Omega} = 0$ podemos escribir

$$v(x, y) = \sum_{T \in C_h} v|_T(x, y) X_T(x, y)$$

entonces

$$D^\alpha v(x, y) = \sum_{T \in C_h} D^\alpha(v|_T(x, y)) X_T(x, y)$$

en conclusión $v \in H_0^1(\Omega)$. ($X_T(x, y)$ es la función característica).

La aproximación por elementos finitos u_h a u se define por:

$$\begin{cases} u_h \in S_{1,h} \\ B_h(u, v) = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in S_{2,h} \end{cases} \quad (\text{V.2.1})$$

V.2.1 TEOREMA

Existe una constante positiva $\delta = \delta(\alpha, \beta)$ tal que

$$\inf_{\substack{v \in S_{1,h} \\ \|v\|_{1,\Omega}=1}} \sup_{\substack{w \in S_{2,h} \\ \|w\|_{1,\Omega}=1}} |B(v, w)| \geq \delta(\alpha, \beta), \quad \forall 0 < h \leq 1 \quad (\text{V.2.1.1})$$

Demostración:

Sea $a_h : (0, 1) \rightarrow \mathfrak{R}$ denota media armonica a trozos de $a(x)$ definido por

$$a_h|_{I_i} = \frac{h}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \quad (\text{V.2.1.2})$$

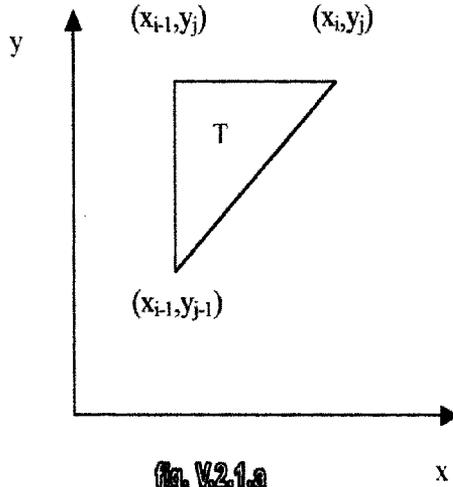
Donde $I_i = (x_{i-1}, x_i)$. Para cualquier $u \in S_{1,h}$, sea $v \in S_{2,h}$ definido por

$$v(P) = u(P) \quad \forall \text{nodo } P \text{ de } C_h \quad (\text{V.2.1.3})$$

Verificaremos ahora las siguientes relaciones:

$$a \frac{\partial u}{\partial x} = a_h \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Primero consideraremos un triángulo T del siguiente tipo(ver fig. V.2.1.a):



Como $v \in S_{2,h}$ entonces $v(x, y) = \alpha_1 + \beta_1 x + \tau_1 y$ para todo $(x, y) \in T$ (V.2.1.4), además por definición debe cumplirse

$$\begin{aligned} v(x_{i-1}, y_{j-1}) &= u(x_{i-1}, y_{j-1}) \\ v(x_{i-1}, y_j) &= u(x_{i-1}, y_j) \\ v(x_i, y_j) &= u(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (\text{V.2.1.5})$$

(V.2.1.4) en (V.2.1.5)

$$u(x_{i-1}, y_{j-1}) = v(x_{i-1}, y_{j-1}) = \alpha_1 + \beta_1 x_{i-1} + \tau_1 y_{j-1} \quad (\text{V.2.1.6})$$

$$u(x_{i-1}, y_j) = v(x_{i-1}, y_j) = \alpha_1 + \beta_1 x_{i-1} + \tau_1 y_j \quad (\text{V.2.1.7})$$

$$u(x_i, y_j) = v(x_i, y_j) = \alpha_1 + \beta_1 x_i + \tau_1 y_j \quad (\text{V.2.1.8})$$

De (V.2.1.6) – (V.2.1.7)

$$u(x_{i-1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_j) = \tau_1 (y_{j-1} - y_j) \quad (\text{V.2.1.9})$$

De (V.2.1.7) – (V.2.1.8) tenemos $u(x_{i-1}, y_j) - u(x_i, y_j) = \beta_1 (x_{i-1} - x_i)$ (V.2.1.10)

De (V.2.1.6)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= u(x_{i-1}, y_{j-1}) - \beta_1 x_{i-1} - \tau_1 y_{j-1} \\ &= u(x_{i-1}, y_{j-1}) - \left[\frac{u(x_{i-1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{x_{i-1} - x_i} \right] x_{i-1} - \\ &\quad \left[\frac{u(x_{i-1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_j)}{y_{j-1} - y_j} - \frac{u(x_{i-1}, y_j)}{y_{j-1} - y_j} \right] y_{j-1} \end{aligned} \quad (\text{V.2.1.11})$$

De (V.2.1.9), (V.2.1.10) y (V.2.1.11) en (V.2.1.5)

$$v(x, y) = u(x_{i-1}, y_{j-1}) - \left[\frac{u(x_{i-1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{x_{i-1} - x_i} \right] x_{i-1} - \left[\frac{u(x_{i-1}, y_{j-1}) - \frac{u(x_{i-1}, y_j)}{y_{j-1} - y_j} \right] y_{j-1} + \left[\frac{u(x_{i-1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{x_{i-1} - x_i} \right] x + \left[\frac{u(x_{i-1}, y_{j-1}) - \frac{u(x_{i-1}, y_j)}{y_{j-1} - y_j} \right] y$$

además : $h = x_i - x_{i-1} = y_j - y_{j-1}$

$$v(x, y) = u(x_{i-1}, y_{j-1}) - \left[\frac{u(x_{i-1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} \right] x_{i-1} - \left[\frac{u(x_{i-1}, y_{j-1}) - \frac{u(x_{i-1}, y_j)}{h} \right] y_{j-1} + \left[\frac{u(x_{i-1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} \right] x + \left[\frac{u(x_{i-1}, y_{j-1}) - \frac{u(x_{i-1}, y_j)}{h} \right] y$$

$$v(x, y) = u(x_{i-1}, y_{j-1}) \left(1 - \frac{y}{h} + \frac{y_{j-1}}{h} \right) + u(x_{i-1}, y_j) \left(\frac{x_{i-1} - y_{j-1} + y - x}{h} \right) + u(x_i, y_j) \left(\frac{x}{h} - \frac{x_{i-1}}{h} \right) \quad (\text{V.2.1.12})$$

Si $u \in S_{1,h}$ entonces $u_T \in L \left\{ 1, \int_0^x \frac{dt}{a(t)}, y \right\}$ tal que

$$u(x, y) = \alpha_2 + \beta_2 \int_0^x \frac{dt}{a(t)} + \tau_2 y \quad (\text{V.2.1.13})$$

reemplazando en (V.2.1.13)

$$u(x_{i-1}, y_{j-1}) = \alpha_2 + \beta_2 \int_0^{x_{i-1}} \frac{dt}{a(t)} + \tau_2 y_{j-1} \quad (\text{V.2.1.14})$$

$$u(x_{i-1}, y_j) = \alpha_2 + \beta_2 \int_0^{x_{i-1}} \frac{dt}{a(t)} + \tau_2 y_j \quad (\text{V.2.1.15})$$

$$u(x_i, y_j) = \alpha_2 + \beta_2 \int_0^{x_i} \frac{dt}{a(t)} + \tau_2 y_j \quad (\text{V.2.1.16})$$

De (V.2.1.14)-(V.2.1.15)

$$u(x_{i-1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_j) = \tau_2 (y_{j-1} - y_j) \quad (\text{V.2.1.17})$$

De (V.2.1.15) – (V.2.1.16)

$$u(x_{i-1}, y_j) - u(x_i, y_j) = -\beta_2 \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)} \right) \quad (\text{V.2.1.18})$$

De (V.2.1.14)

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= u(x_{i-1}, y_{j-1}) - \beta_2 \int_0^{x_{i-1}} \frac{dt}{a(t)} - \tau_2 y \\ \alpha_2 &= u(x_{i-1}, y_{j-1}) - \left[\frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \right] \int_0^{x_{i-1}} \frac{dt}{a(t)} - \left[\frac{u(x_{i-1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_{j-1})}{h} \right] y \end{aligned} \quad (\text{V.2.1.19})$$

De (V.2.1.17), (V.2.1.18) y (V.2.1.19) en (V.2.1.13) entonces

$$u(x, y) = u(x_{i-1}, y_{j-1}) \left(1 - \frac{y - y_{j-1}}{h} \right) + u(x_{i-1}, y_j) \left(\frac{y - y_{j-1}}{h} - \frac{\int_{x_{i-1}}^x \frac{dt}{a(t)}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \right) + u(x_i, y_j) \left(\frac{\int_{x_{i-1}}^x \frac{dt}{a(t)}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \right) \quad (\text{V.2.1.20})$$

De (V.2.1.12) y (V.2.1.13) obtenemos:

$$\begin{aligned} a(x) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{h} \frac{h}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} = a_h(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in T \end{aligned} \quad (\text{V.2.1.21})$$

Para triangulos similar a la fig. V.2.1.b la prueba es similar, probándose que también se cumple la relación (V.2.1.21).

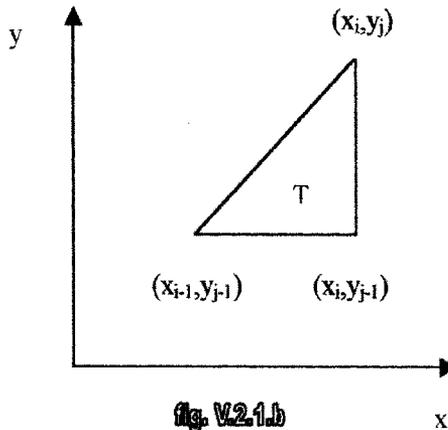


fig. V.2.1.b

Utilizando (V.2.1.21) y la desigualdad de Poincaré y:

$$\begin{aligned} \alpha &\leq a(t) \leq \beta \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{\beta} &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)} \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{h}{\beta} &\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)} \leq \frac{h}{\alpha} \\ \alpha &\leq \frac{h}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \leq \beta \\ \alpha &\leq a_h(x) \leq \beta\end{aligned}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}B_h(u, v) &= \sum_{T \in C_h} \int_T \left\{ a \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy \\ &= \sum_{T \in C_h} \int_T \left\{ a_h \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + a \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy \\ &= \sum_{T \in C_h} \int_T \left\{ a_h \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + a \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ &\geq \alpha \sum_{T \in C_h} \int_T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ &\geq \alpha \sum_{T \in C_h} \int_T \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ &\geq \alpha \sum_{T \in C_h} \int_T |\text{grad } v|^2 dx dy = \alpha |v|_{1,\Omega}^2 \\ B_h(u, v) &\geq \frac{\alpha}{2} \|v\|_{1,\Omega}^2\end{aligned}\tag{V.2.1.22}$$

Para completar la prueba tenemos que acotar $\|v\|_{1,\Omega}$ en terminos de $\|u\|_{1,\Omega}$. Utilizando la relación (V.2.1.21) se obtiene:

$$\begin{aligned}|u|_{1,h}^2 &= \sum_{T \in C_h} \int_T \left\{ \left(\frac{a_h}{a} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ &\leq \sum_{T \in C_h} \int_T \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ &\leq \sum_{T \in C_h} \int_T \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ |u|_{1,h}^2 &\leq \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 |v|_{1,\Omega}^2\end{aligned}$$

En el triangulo T que muestra la figura (V.2.1.a)

$\left| \left(1 - \frac{y-y_{j-1}}{h} \right) \right| \leq 1$, $\left| \left(\frac{y-y_{j-1}}{h} - \frac{\int_{x_{i-1}}^x \frac{dt}{a(t)}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \right) \right| \leq 1$ y $\left| \left(\frac{\int_{x_{i-1}}^x \frac{dt}{a(t)}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \right) \right| \leq 1$ además por la propiedad

$|a+b+c|^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \int_T |u|^2 dx dy &= \int_T \left| u(x_{i-1}, y_{j-1}) \left(1 - \frac{y-y_{j-1}}{h} \right) + u(x_{i-1}, y_j) \left(\frac{y-y_{j-1}}{h} - \frac{\int_{x_{i-1}}^x \frac{dt}{a(t)}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \right) + u(x_i, y_j) \left(\frac{\int_{x_{i-1}}^x \frac{dt}{a(t)}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \right) \right|^2 dx dy \\ &\leq \int_T 3 \left\{ |u(x_{i-1}, y_{j-1})|^2 \left| 1 - \frac{y-y_{j-1}}{h} \right|^2 + |u(x_{i-1}, y_j)|^2 \left| \frac{y-y_{j-1}}{h} - \frac{\int_{x_{i-1}}^x \frac{dt}{a(t)}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \right|^2 + |u(x_i, y_j)|^2 \left| \frac{\int_{x_{i-1}}^x \frac{dt}{a(t)}}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dt}{a(t)}} \right|^2 \right\} dx dy \\ &= \int_T 3 \left\{ |u(x_{i-1}, y_{j-1})|^2 + |u(x_{i-1}, y_j)|^2 + |u(x_i, y_j)|^2 \right\} dx dy \\ &= 3 \frac{h^2}{2} \left\{ |u(x_{i-1}, y_{j-1})|^2 + |u(x_{i-1}, y_j)|^2 + |u(x_i, y_j)|^2 \right\} \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \int_T |v|^2 dx dy &= \int_T \left| u(x_{i-1}, y_{j-1}) \left(1 - \frac{y-y_{j-1}}{h} \right) + u(x_{i-1}, y_j) \left(\frac{y-y_{j-1}}{h} - \frac{(x-x_{i-1})}{h} \right) + u(x_i, y_j) \left(\frac{(x-x_{i-1})}{h} \right) \right|^2 dx dy \\ &\geq \int_T \left(|u(x_{i-1}, y_{j-1})|^2 \left| 1 - \frac{y-y_{j-1}}{h} \right|^2 + |u(x_{i-1}, y_j)|^2 \left| \frac{y-y_{j-1}}{h} - \frac{(x-x_{i-1})}{h} \right|^2 + |u(x_i, y_j)|^2 \left| \frac{(x-x_{i-1})}{h} \right|^2 \right) dx dy \end{aligned}$$

Sea $\min \left\{ \left| 1 - \frac{y-y_{j-1}}{h} \right|^2, \left| \frac{(y-y_{j-1})-(x-x_{i-1})}{h} \right|^2, \left| \frac{(x-x_{i-1})}{h} \right|^2 \right\} = d_{ij}$ entonces

$$\int_T |v|^2 dx dy \geq d_j \int_T \left(|u(x_{i-1}, y_{j-1})|^2 + |u(x_{i-1}, y_j)|^2 + |u(x_i, y_j)|^2 \right) dx dy$$

de donde obtenemos:

$$\frac{h^2}{2} \left(|u(x_{i-1}, y_{j-1})|^2 + |u(x_{i-1}, y_j)|^2 + |u(x_i, y_j)|^2 \right) \leq \frac{1}{d_{ij}} \int_T |v|^2 dx dy$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 \int_T |u|^2 dx dy &\leq 3 \frac{h^2}{2} \{ |u(x_{i-1}, y_{j-1})|^2 + |u(x_{i-1}, y_j)|^2 + |u(x_i, y_j)|^2 \} \\
 \int_T |u|^2 dx dy &\leq 3 \left(\frac{1}{d_j} \int_T |v|^2 dx dy \right) \\
 \int_T |u|^2 dx dy &\leq C \int_T |v|^2 dx dy \\
 \sum_{T \in C_h} \int_T |u|^2 dx dy &\leq C \sum_{T \in C_h} \int_T |v|^2 dx dy \\
 \int_{\Omega} |u|^2 dx dy &\leq C \int_{\Omega} |v|^2
 \end{aligned}$$

En triangulos como el de la fig. V.2.1.b se obtiene la misma estimación. Las desigualdades anteriores prueban:

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{1,h}^2 &= \int_{\Omega} u^2 dx dy + |u|_{1,h}^2 \\
 &\leq C \int_{\Omega} |v|^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 |v|_{1,h}^2 \\
 \|u\|_{1,h}^2 &\leq \left(C + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) \|v\|_{1,\Omega}^2
 \end{aligned} \tag{V.2.1.23}$$

Sea $\delta(\alpha, \beta) = C + \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2$. De (V.2.1.21) y (V.2.1.23) obtenemos

$$\begin{aligned}
 B_h(u, v) &\geq \frac{\alpha}{2} \|v\|_{1,\Omega}^2 \geq \frac{\alpha}{2} \|v\|_{1,\Omega} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta(\alpha, \beta)}} \|u\|_{1,h} \right) \\
 B_h(u, v) &\geq \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\delta(\alpha, \beta)}} \right) \|v\|_{1,\Omega} (\|u\|_{1,h})
 \end{aligned}$$

Este teorema nos permite asegurar que existe solución única en $S_{1,h}$ (ver II.7)

V.2.2 Definiremos para $u \in H^L(\Omega)$, sea $d_h u$ la $S_{1,h}$ interpolante de u definida por:

$$\begin{cases} d_h u \in S_{1,h} \\ d_h u(P) = u(P) \quad \forall \text{ nodo } P \text{ de } C_h \end{cases} \tag{V.2.2.1}$$

V.2.3 TEOREMA

Existe una constante $C = C(\alpha, \beta)$, dependiendo de α y β , pero independiente de u y h tal que

$$\|u - d_h u\|_{1,h} \leq C(\alpha, \beta) h |u|_{L,\Omega} \quad \forall u \in H^L(\Omega), 0 < h \leq 1$$

Demostración:

Sea $T \in C_h$ y R_T el rectángulo más pequeño conteniendo T . Sea \tilde{T} y \tilde{R}_T la imagen de T y R_T sobre la aplicación (IV.2.1.2). Sea $u \in H^L(\Omega) \iff u \in H^1(\Omega)$ tal que $a(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in H^1(\Omega)$. Por el teorema de interpolación (ver II.11):

$$\left| \tilde{u} - d_h \tilde{u} \right|_{i, \tilde{R}_T} \leq C \frac{h_{\tilde{R}_T}^2}{\rho_{\tilde{R}_T}^i} |\tilde{u}|_{2, \tilde{R}_T} \quad i = 0, 1$$

CASO I:

$$\begin{aligned} \left| \tilde{u} - d_h \tilde{u} \right|_{0, \tilde{R}_T} &= \int_{\tilde{R}_T} \left| \tilde{u} - d_h \tilde{u} \right|^2 d\tilde{x} d\tilde{y} = \int_{R_T} |u - d_h u|^2 \frac{\partial(x, y)}{\partial(\tilde{x}, \tilde{y})} dx dy \\ &= \int_{R_T} |u - d_h u|^2 \frac{1}{a} dx dy \\ &\geq \frac{1}{\beta} \int_{R_T} |u - d_h u|^2 dx dy = \frac{1}{\beta} |u - d_h u|_{0, R_T} \\ |u - d_h u|_{0, R_T} &\leq \beta \left| \tilde{u} - d_h \tilde{u} \right|_{0, \tilde{R}_T} \end{aligned} \quad (V.2.3.1)$$

CASO II

$$\begin{aligned} \left| \tilde{u} - d_h \tilde{u} \right|_{1, \tilde{R}_T} &= \int_{\tilde{R}_T} \left[\left(\frac{\partial(\tilde{u} - d_h \tilde{u})}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\tilde{u} - d_h \tilde{u})}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &= \int_{R_T} \left[\left(\frac{\partial(u - d_h u)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial(u - d_h u)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \right)^2 \right] \frac{\partial(x, y)}{\partial(\tilde{x}, \tilde{y})} dx dy \\ &= \int_{R_T} \left[\left(\frac{\partial(u - d_h u)}{\partial x} a \right)^2 + \left(\frac{\partial(u - d_h u)}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{1}{a} dx dy \\ &= \int_{R_T} a \left(\frac{\partial(u - d_h u)}{\partial x} \right)^2 dx dy + \int_{R_T} \frac{1}{a} \left(\frac{\partial(u - d_h u)}{\partial y} \right)^2 dx dy \\ &\geq \alpha \int_{R_T} \left(\frac{\partial(u - d_h u)}{\partial x} \right)^2 dx dy + \frac{1}{\beta} \int_{R_T} \left(\frac{\partial(u - d_h u)}{\partial y} \right)^2 dx dy \\ \left| \tilde{u} - d_h \tilde{u} \right|_{1, \tilde{R}_T} &\geq \min \left(\alpha, \frac{1}{\beta} \right) |u - d_h u|_{1, R_T}^2 \end{aligned} \quad (V.2.3.2)$$

Asi como en (V.1.2.1) se cumple para R_T

$$\left| \tilde{u} \right|_{2, \tilde{R}_T}^2 = |u|_{L, R_T}^2 \quad (\text{V.2.3.3})$$

Además

$T \subset R_T$ entonces $|u - d_h u|_{i, T} \leq |u - d_h u|_{i, R_T}$ $i=0,1$

$$\begin{aligned} |u - d_h u|_{i, T}^2 &\leq C_2(\alpha, \beta) \left| \tilde{u} - \tilde{d}_h u \right|_{i, \tilde{R}_T}^2 \\ &\leq C_1(\alpha, \beta) \frac{h_{\tilde{R}_T}^4}{\rho_{\tilde{R}_T}^{2i}} \left| \tilde{u} \right|_{2, \tilde{R}_T}^2 = C_1(\alpha, \beta) \frac{h_{\tilde{R}_T}^4}{\rho_{\tilde{R}_T}^{2i}} |u|_{L, R_T}^2 \quad (\text{V.2.3.4}) \end{aligned}$$

De (V.2.3.4) – (V.2.3.3) obtenemos:

$$|u - d_h u|_{i, T} \leq C(\alpha, \beta) \frac{h_{\tilde{R}_T}^2}{\rho_{\tilde{R}_T}^i} |u|_{L, R_T} \quad i = 0, 1$$

Sea $R_{\tilde{T}}$ y R_T el que se obtiene por la aplicacion (IV.2.1.2)

$\tilde{x}(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{ds}{a(s)}$, $\tilde{y}(y_1) = y_1$, $\tilde{x}(x_2) = \int_0^{x_2} \frac{ds}{a(s)}$, $\tilde{y}(y_2) = y_2$:

$$\frac{x_1}{\beta} \leq \int_0^{x_1} \frac{ds}{a(s)} \leq \frac{x_1}{\alpha} \text{ entonces } \frac{x_1}{\beta} \leq \tilde{x}(x_1) \leq \frac{x_1}{\alpha}$$

$$\frac{x_2}{\beta} \leq \int_0^{x_2} \frac{ds}{a(s)} \leq \frac{x_2}{\alpha} \text{ entonces } -\frac{x_2}{\alpha} \leq \tilde{x}(x_2) \leq -\frac{x_2}{\beta}$$

entonces $-\left(\frac{x_1}{\beta} - \frac{x_2}{\alpha}\right) \leq \tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2) \leq \frac{x_1}{\alpha} - \frac{x_2}{\beta}$

Supongamos que $x_1 > x_2$ entonces $\frac{x_1}{\alpha} - \frac{x_2}{\beta} < \frac{x_1}{\beta} - \frac{x_2}{\alpha}$ entonces $\left| \tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2) \right| \geq \left(\frac{x_1}{\beta} - \frac{x_2}{\alpha} \right)$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2) \right)^2 &\geq \left(\frac{x_1}{\beta} - \frac{x_2}{\alpha} \right)^2 = \left(\frac{x_1}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{\alpha} \right)^2 - 2 \frac{x_1 x_2}{\beta \alpha} \\ &= \left(\frac{x_1}{\beta} \right)^2 + \frac{x_2}{\alpha \beta} \left(\frac{\beta x_2}{\alpha} - 2x_1 \right) \\ &\geq \left(\frac{x_1}{\beta} \right)^2 + \frac{x_2}{\beta^2} (x_2 - 2x_1) = \left(\frac{x_1}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{\beta} \right)^2 - \frac{2x_1 x_2}{\beta^2} \\ \left(\tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2) \right)^2 &\geq \left(\frac{x_1}{\beta} - \frac{x_2}{\beta} \right)^2 \end{aligned}$$

mediante esta estimación obtenemos:

$$\begin{aligned}\rho_{R_T}^2 &= \left(\tilde{x}(x_1) - \tilde{x}(x_2) \right)^2 + \left(\tilde{y}(y_1) - \tilde{y}(y_2) \right)^2 \\ &\geq \left(\frac{x_1}{\beta} - \frac{x_2}{\beta} \right)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ \rho_{R_T}^2 &= \frac{1}{\beta^2} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}\text{Si } \frac{1}{\beta} \geq 1 \text{ entonces } \rho_{R_T}^2 &\geq (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \geq \rho_{R_T}^2 \\ \text{Si } 1 \geq \frac{1}{\beta} \text{ entonces } \rho_{R_T}^2 &\geq \frac{1}{\beta^2} (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{\beta^2} (y_1 - y_2)^2 \geq \frac{1}{\beta^2} \rho_{R_T}^2\end{aligned}$$

En conclusion

$$\rho_{R_T} \geq \min \left(1, \frac{1}{\beta} \right) \rho_{R_T} \quad \forall T \in C_h$$

igualmente que en el metodo I obtenemos:

$$h_{R_T} \leq \max \left(\frac{1}{\alpha}, 1 \right) h_{R_T} \quad \forall T \in C_h$$

tenemos:

$$\begin{aligned}\|u - d_h u\|_{1,h}^2 &= \int_{\Omega} (u - d_h u)^2 dx dy + \sum_{T \in C_h} \int_T |\text{grad}(u - d_h u)|^2 dx dy \\ &= \sum_{T \in C_h} |u - d_h u|_{0,T}^2 + \sum_{T \in C_h} |u - d_h u|_{1,T}^2 \\ &= \sum_{T \in C_h} \left[|u - d_h u|_{0,T}^2 + |u - d_h u|_{1,T}^2 \right] \\ &\leq \sum_{T \in C_h} \left[\left(C h_{R_T}^2 |u|_{L,R_T} \right)^2 + \left(C \frac{h_{R_T}^2}{\rho_{R_T}^1} |u|_{L,R_T} \right)^2 \right] \\ &\leq \sum_{T \in C_h} \left[C^2 h_{R_T}^4 |u|_{L,R_T}^2 + C^2 \frac{h_{R_T}^4}{\rho_{R_T}^2} |u|_{L,R_T}^2 \right] \\ &\leq C^2 \sum_{T \in C_h} |u|_{L,R_T}^2 \left[\left(\max \left(\frac{1}{\alpha}, 1 \right) h_{R_T} \right)^4 \left(1 + \frac{1}{\left(\min \left(\frac{1}{\beta}, 1 \right) \rho_{R_T} \right)^2} \right) \right]\end{aligned}$$

además

$$h_{R_T} = \sqrt{2}h$$

$$\rho_{R_T} = \frac{h}{2}$$

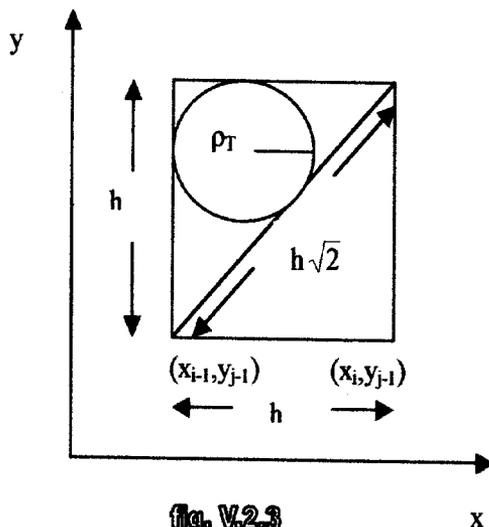


fig. V.2.3

Por tanto

$$\begin{aligned} \|u - d_h u\|_{1,h}^2 &\leq C_1(\alpha) \sum_{T \in \mathcal{C}_h} |u|_{L,R_T}^2 \left(\max\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right) \sqrt{2}h \right)^4 \left(1 + \frac{1}{\left(\min\left(\frac{1}{\beta}, 1\right) \frac{h}{2}\right)^2} \right) \\ &\leq C_1(\alpha) \sum_{T \in \mathcal{C}_h} |u|_{L,R_T}^2 \left(\max\left(\frac{1}{\alpha}, 1\right) \right)^4 \left(\frac{4 \left(\min\left(\frac{1}{\beta}, 1\right)\right)^2 h^4 + 16h^2}{\left(\min\left(\frac{1}{\beta}, 1\right)\right)^2} \right) \\ &\leq C_2(\alpha, \beta) h^2 |u|_{L,\Omega}^2 \\ \|u - d_h u\|_{1,h} &\leq C(\alpha, \beta) h |u|_{L,\Omega} \end{aligned}$$

V.2.4 PROYECCION

Para algún $u \in H_h^1(\Omega)$ definiremos $P_h(u)$ por

$$\begin{cases} P_h u \in S_{1,h} \\ B_h(P_h u, v) = B_h(u, v) \quad \forall v \in S_{2,h} \end{cases} \quad (\text{V.2.4.1})$$

Claramente $P_h(u)$ es la proyección sobre $S_{1,h}$, esta proyección es uniformemente acotada en h ; de (V.2.1.11) y (V.2.1.1) tenemos

$$\|P_h u\|_{1,h} \leq \delta(\alpha, \beta)^{-1} \sup_{\substack{v \in S_{2,h} \\ \|v\|_{1,\Omega} = 1}} |B_h(P_h u, v)| \leq C(\alpha, \beta) \quad \forall u \in H_h^1(\Omega)$$

Para u solución de (IV.1.1) y u_h la solución de (V.2.1) tenemos para algún $\mathcal{X} \in S_{1,h}$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,h} &= \|u - P_h u\|_{1,h} = \|(u - \mathcal{X}) - P_h(u - \mathcal{X})\|_{1,h} \\ &\leq [1 + C(\alpha, \beta)] \|u - \mathcal{X}\|_{1,h} \end{aligned}$$

Entonces hemos probado que existe una constante $C = C(\alpha, \beta)$ tal que

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq [1 + C(\alpha, \beta)] \|u - \mathcal{X}\|_{1,h} \quad (\text{V.2.4.2})$$

V.2.5 TEOREMA

Para $f \in L^2(\Omega)$, sea u la solución a (IV.1.1) y sea u_h la solución de (V.2.1.1). Entonces existe una constante $C = C(\alpha, \beta)$ tal que

$$\|u - u_h\|_{1,h} \leq Ch \|f\|_{0,\Omega} \quad 0 < h \leq 1$$

Demostración:

Como consecuencia de (V.2.4.2), (V.2.3) y (IV.2.1) obtenemos:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,h} &\leq C \inf_{\chi \in S_{1,h}} \|u - \chi\|_{1,h} = C \|u - d_h u\|_{1,h} \leq Ch \|u\|_{L,\Omega} \leq Ch \|u\|_{L,\Omega} \leq \\ &Ch \|f\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

V.3 METODO III

V.3.1 TRIANGULIZACION

Utilizaremos triangulación con triángulos ordinarios. Para $0 < h \leq 1$, sea C_h la triangulación de Ω por triángulos ordinarios de diámetro $\leq h$ y supongamos que $\{C_h\}_{0 < h \leq 1}$ satisfacen las siguientes desigualdades:

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \quad \forall T \in C_h \text{ (condición angular mínima)} \quad (\text{V.3.1.1})$$

$$\frac{h}{h_T} \leq \nu \quad \forall T \in C_h \text{ (condición casi uniforme)} \quad (\text{V.3.1.2})$$

Donde

$C_h = \{T \in \Omega/T \text{ triángulo ordinario y } \dim T \leq h\}$, h_T y ρ_T definidos como en el método I.

Sean P_1, P_2, \dots, P_{m_h} los nodos de C_h y Ψ_j son las funciones básicas lineales a trozos asociados con el nodo $P_j = (x_j, y_j)$; $j = 1, 2, \dots, m_h$. Los Ψ_j son lineales a trozos respecto a C_h .

$$\Psi_j(P_i) = \delta_{ij} \quad (\text{V.3.1.3})$$

$$\Psi_j(P_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{V.3.1.4})$$

Para cada $j \in \{1, 2, \dots, m_h\}$ sea

$$V_j = \mathcal{L} \left\{ \Psi_j(x, y), \Psi_j(x, y) \int_{x_j}^x \frac{dt}{a(t)}, \Psi_j(x, y) (y - y_j) \right\} \quad (\text{V.3.1.5})$$

Para el espacio de aproximaciones de funciones elejimos:

$$S_h = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}; v = \sum_{j=1}^{m_h} v_j, v_j \in V_j, v = 0 \text{ en } \partial\Omega \right\} \quad (\text{V.3.1.6})$$

Además $S_h \subset H_0^1(\Omega)$. La aproximación u_h a u se define por:

$$\begin{cases} u_h \in S_h \\ B(u_h, v) = \int_{\Omega} f v dx dy, \quad \forall v \in S_h \end{cases} \quad (\text{V.3.1.7})$$

$B(u, v) \equiv \int_{\Omega} a \text{grad} u \cdot \text{grad} v dx dy, \forall u \in S_h$, satisface la condición del inf-sup por lo que existe solución única en S_h .

Demostremos que $u \in H^L(\Omega)$ puede aproximarse por una combinación lineal de $1, \int_{x_j}^x \frac{dt}{a(t)}, y - y_j$ en S_j . Donde para $j \in \{1, 2, \dots, m_h\}$, S_j es el elemento finito estrella asociado con el nodo P_j .

$$S_j = \bigcup_{\substack{T \in \mathcal{T}_h \\ P_j \in T}} T \quad (\text{V.3.1.8})$$

Sea R_j un rectángulo pequeño con lados paralelos a los ejes conteniendo S_j y sea J_j tres vértices específicos de R_j , incluyendo todos los vértices que residen en $\partial\Omega$. Para cualquier $u \in H^L(R_j)$ definimos el espacio $\mathcal{L} \left\{ 1, \int_{x_j}^x \frac{dt}{a(t)}, y - y_j \right\}$ interpolante de u asociado con P_j por:

$$\begin{cases} d_{j,h} u(x, y) = \alpha + \beta \int_{x_j}^x \frac{dt}{a(t)} + \phi(y - y_j) \\ d_{j,h} u(P) = u(P) \quad \forall P \in J_j \end{cases} \quad (\text{V.3.1.9})$$

V.3.2 Teorema

Existe una constante $C = C(\alpha, \beta)$ tal que

$$\begin{aligned} |u - d_{j,h} u|_{i, S_j} &\leq C(\alpha, \beta) \frac{h_{R_j}^2}{\rho_{R_j}^i} |u|_{L, R_j} \quad \forall i = 0, 1 \\ \forall j = 1, 2, \dots, m_h; \forall u \in H^L(\Omega); 0 < h \leq 1 \end{aligned} \quad (\text{V.3.2.1})$$

Demostración:

i) $S_j \subset R_j \rightarrow |u - d_{j,h}u|_{i,S_j} \leq |u - d_{j,h}u|_{i,R_j}$

ii) Sea $j \in \{1, 2, \dots, m_h\}$ y $u \in H^L(\Omega)$ con P_j asociado al elemento estrella S_j y el rectángulo R_j , además \tilde{S}_j y \tilde{R}_j son las imágenes de la aplicación (IV.2.1.2) de S_j y R_j . \tilde{R}_j es también un rectángulo.

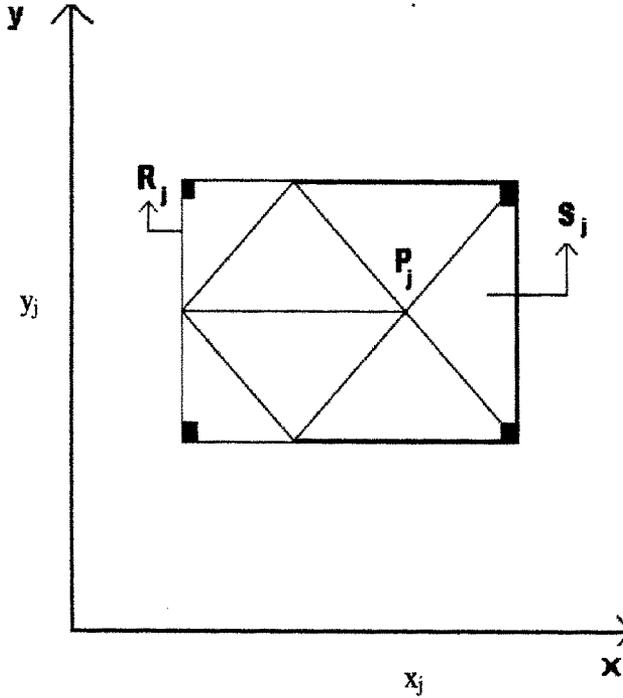


Fig. V.3.2

$$\begin{aligned} d_{j,h}u(x,y) &= (d_{j,h}\tilde{u} \circ F)(x,y) \\ &= (d_{j,h}\tilde{u})(\tilde{x}(x), \tilde{y}(y)) \\ &= \alpha + \beta \int_{x_j}^x \frac{dt}{a(t)} + \phi(y - y_j) \end{aligned}$$

es decir $d_{j,h}\tilde{u} \in L\{1, \tilde{x}, \tilde{y}\}$ además sea $P \in P_j$ y $F(p) = \tilde{p}$ entonces

$\forall P \in J_j$, en conclusión $d_{j,h}\tilde{u}$ es el polinomio interpolante de \tilde{u} .

$$\begin{aligned} d_{j,h}\tilde{u}(\tilde{p}) &= (d_{j,h}u \circ F^{-1})(\tilde{p}) \\ &= (d_{j,h}u)(F^{-1}(\tilde{p})) \\ &= (d_{j,h}u)(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u(P) \\
d_{j,h}^{\sim} \tilde{u}(\tilde{p}) &= u(F^{-1}(\tilde{p})) = \tilde{u}(\tilde{p})
\end{aligned}$$

iii) Por el teorema de interpolación :

$$\left| \tilde{u} - d_{j,h}^{\sim} \tilde{u} \right|_{i,R_j} \leq C \frac{h_{R_j}^2}{\rho_{R_j}^i} \left| \tilde{u} \right|_{2,R_j}; i = 0, 1 \quad (\text{V.3.2.2})$$

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{u} \right|_{2,R_j}^2 &= \int_{R_j} \sum_{|\alpha|=2} \left| D^\alpha \tilde{u} \right|^2 \\
\left| \tilde{u} \right|_{2,R_j}^2 &= |u|_{L,R_j}^2
\end{aligned} \quad (\text{V.3.2.3})$$

De (V.3.2.2) – (V.3.2.3) obtenemos:

$$\begin{aligned}
|u - d_{j,h} u|_{i,R_j} &\leq C_1 \left| \tilde{u} - d_{j,h}^{\sim} \tilde{u} \right|_{i,R_j} \\
|u - d_{j,h} u|_{i,R_j} &\leq C(\alpha, \beta) \frac{h_{R_j}^2}{\rho_{R_j}^i} |u|_{L,R_j}, i = 0, 1.
\end{aligned} \quad (\text{V.3.2.4})$$

Como en (IV.3.2.5) tenemos:

$$\rho_{R_j} \geq \min \left(1, \frac{1}{\beta} \right) \rho_{R_j} \quad (\text{V.3.2.5})$$

$$h_{R_j} \leq \max \left(\frac{1}{\alpha}, 1 \right) h_{R_j} \quad (\text{V.3.2.6})$$

$$\text{entonces } |u - d_{j,h} u|_{i,R_j} \leq C(\alpha, \beta) \frac{h_{R_j}}{\rho_{R_j}^i} |u|_{L,R_j}, i = 0,$$

V.3.3 Lema

Sea $\{C_h\}_{0 < h \leq 1}$ una familia de triangulaciones satisfaciendo la mínima condición angular (V.3.1.1). Sea P_1, P_2, \dots, P_{m_h} los nodos de C_h y sea S_j el elemento finito estrella asociado con P_j entonces podemos particionar el conjunto $\{P_1, P_2, \dots, P_{m_h}\}$ de nodos en un número finito de conjuntos disjuntos I_1, I_2, \dots, I_l con l dependiente de σ pero independiente de h , tal que $P_i, P_j \in I_k; i \neq j$ entonces $\overset{\circ}{S}_i \cap \overset{\circ}{S}_j = \Phi$ ($\overset{\circ}{S}_i$ denota el interior de S_i).

Demostración:

- i) Un nodo P_i tiene un número finito de arcos $\overline{P_i P_{i_k}}$, definimos $Q_i = \{P_{i_k} : k = 1, 2, \dots, \gamma_i\}$ son vecinos de P_i , con $\gamma_i \leq \gamma$ donde γ depende de σ pero es independiente de i y h .

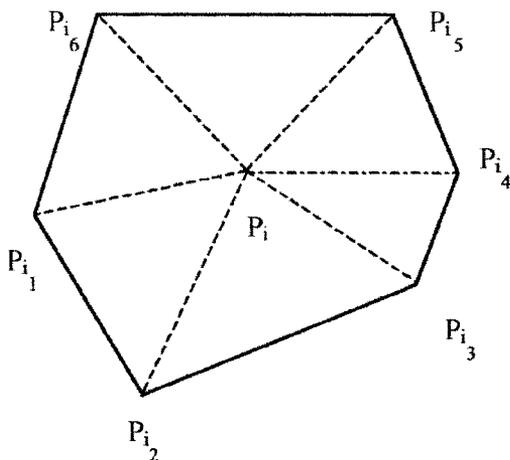


Fig. V.3.3

- ii) Sea $P_1 \in I_1$ y sea el nodo de índice más pequeño P_s en $\{P_1, P_2, \dots, P_{m_h}\} \setminus (\{P_1\} \cup Q_1)$ tal que $s \neq 1$, entonces es claro que $\overset{\circ}{S}_1 \cap \overset{\circ}{S}_s = \Phi$, nuevamente tomamos el nodo de índice más pequeño $m \neq s \neq 1$ en $\{P_1, P_2, \dots, P_{m_h}\} \setminus (\{P_1\} \cup Q_1 \cup \{P_s\} \cup Q_s)$ tal que $P_m \in I_1$ entonces es claro que $\overset{\circ}{S}_1 \cap \overset{\circ}{S}_m = \Phi$ y $\overset{\circ}{S}_s \cap \overset{\circ}{S}_m = \Phi$ así sucesivamente hasta que el conjunto $\{P_1, P_2, \dots, P_{m_h}\} \setminus (\{P_1\} \cup Q_1 \cup \{P_s\} \cup Q_s \cup \dots)$ este vacío.
- iii) Construimos I_2 haciendo lo mismo que antes, para ello consideramos el conjunto $\{P_1, P_2, \dots, P_{m_h}\} \setminus I_1$. De la mínima condición angular y de la construcción de I_1 , un nodo de I_2 tiene a lo mas $\gamma - 1$ arcos. De esta manera construimos I_3 .

El algoritmo se detiene a lo más en γ pasos.

V.3.4 Teorema

Existe una constante $C = C(\alpha, \beta, \nu, \sigma)$ dependiendo de $\alpha, \beta, \nu, \sigma$ pero independiente de h , tal que

$$\left| u - \sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j d_{j,h} u \right|_{1,\Omega} \leq Ch |u|_{L,\Omega} \quad \forall u \in H^L(\Omega), 0 < h \leq 1 \quad (\text{V.3.4.1})$$

Demostración:

Sea $u \in H^L(\Omega)$ y sea I_1, I_2, \dots, I_l partici3n de los nodos de C_h d(ver V.3.1)

AFIRMACION: $Sop\Psi_j = S_j$

donde $S_j = \bigcup_{\substack{T \in C_h \\ P_j \in T}} T$ y $Sop\Psi_j = \overline{\{x/\Psi_j(x) \neq 0\}}$

(\rightarrow) $P \in Sop\Psi_j$ entonces $\exists B_\epsilon(P)/B_\epsilon(P) \cap \{x/\Psi_j(x) \neq 0\} \neq \Phi$
entonces $P \in S_j$

(\leftarrow) $P \in S_j$ entonces $\exists T \in C_h / P \in T$ y $P_j \in T$

\rightarrow entonces suceden dos casos

1^{er} caso: Si $P = P_j$ entonces $\Psi_j(P) \neq 0 \rightarrow P \in Sop\Psi_j$

2^{do} caso: Si $P \neq P_j$ entonces como T es un conjunto cerrado entonces $\exists B_\epsilon(P)$ tal que $B_\epsilon(P) \cap T \neq \Phi$, adem1s

$$\{x/\Psi_j(x) \neq 0\} \subset T$$

$$\text{entonces } B_\epsilon(P) \cap \{x/\Psi_j(x) \neq 0\} \subset B_\epsilon(P) \cap T$$

$$\text{entonces } B_\epsilon(P) \cap \{x/\Psi_j(x) \neq 0\} \neq \Phi$$

Por tanto $P \in Sop\Psi_j$, utilizando la siguiente propiedad :

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_l|^2 \leq l(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_l^2)$$

demostraremos la desigualdad:

$$\begin{aligned} \left| u - \sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j d_{j,h} u \right|_{1,\Omega}^2 &= \left| \sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j (u - d_{j,h} u) \right|_{1,\Omega}^2 \\ &= \left| \sum_{k=1}^l \sum_{j \in I_k} \Psi_j (u - d_{j,h} u) \right|_{1,\Omega}^2 \\ &= \left| \sum_{j \in I_1} \Psi_j (u - d_{j,h} u) + \dots + \sum_{j \in I_l} \Psi_j (u - d_{j,h} u) \right|_{1,\Omega}^2 \\ &\leq \left(\left| \sum_{j \in I_1} \Psi_j (u - d_{j,h} u) \right|_{1,\Omega} + \dots + \left| \sum_{j \in I_l} \Psi_j (u - d_{j,h} u) \right|_{1,\Omega} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq l \left(\left| \sum_{j \in I_1} \Psi_j(u - d_{j,h}u) \right|_{1,\Omega}^2 + \dots + \left| \sum_{j \in I_l} \Psi_j(u - d_{j,h}u) \right|_{1,\Omega}^2 \right) \\
&= l \sum_{k=1}^l \left| \sum_{j \in I_k} \Psi_j(u - d_{j,h}u) \right|_{1,\Omega}^2 \\
&= l \sum_{k=1}^l \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=1} \left| D^\alpha \left(\sum_{j \in I_k} \Psi_j(u - d_{j,h}u) \right) \right|^2
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\left| u - \sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j d_{j,h}u \right|_{1,\Omega}^2 &\leq l \sum_{k=1}^l \left[\int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j \in I_k} \Psi_j(u - d_{j,h}u) \right) \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \int_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{j \in I_k} \Psi_j(u - d_{j,h}u) \right) \right|^2 \right] \\
&= l \sum_{k=1}^l \int_{\Omega} \sum_{j \in I_k} |\text{grad}(\Psi_j(u - d_{j,h}u))|^2 dx dy \\
&= l \int_{\Omega} \sum_{k=1}^l \sum_{j \in I_k} |\text{grad}(\Psi_j)(u - d_{j,h}u) + \Psi_j \text{grad}(u - d_{j,h}u)|^2 dx dy \\
&= l \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{m_h} |\text{grad}(\Psi_j)(u - d_{j,h}u) + \Psi_j \text{grad}(u - d_{j,h}u)|^2 dx dy \\
&= l \int_{S_j} \sum_{j=1}^{m_h} |\text{grad}(\Psi_j)(u - d_{j,h}u) + \Psi_j \text{grad}(u - d_{j,h}u)|^2 dx dy \\
&\leq 2l \sum_{j=1}^{m_h} \int_{S_j} (|\text{grad}(\Psi_j)(u - d_{j,h}u)|^2 + \\
&\quad |\Psi_j \text{grad}(u - d_{j,h}u)|^2) dx dy
\end{aligned}$$

(V.3.4.2)

De las condiciones (V.3.1.1), (V.3.1.4) obtenemos las cotas:

$$|\Psi_j| \leq 1 \text{ y } |\text{grad} \Psi_j| \leq \frac{1}{\min_{P_j \in T} \rho_T} \leq \frac{\sigma}{\min_{P_j \in T} h_T} \leq \frac{\sigma v}{h}$$

Reemplazando este resultado en (V.3.4.2) se obtiene

$$\left| u - \sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j d_{j,h} u \right|_{1,\Omega}^2 \leq 2l \sum_{j=1}^{m_h} \left\{ \frac{1}{\min_{P_j \in T} \rho_T^2} \int_{S_j} |u - d_{j,h} u|^2 dx dy + \int_{S_j} |\text{grad}(u - d_{j,h} u)|^2 dx dy \right\} \quad (\text{V.3.4.3})$$

Ahora utilizamos el resultado de (V.3.2) en (V.3.4.3)

$$\left| u - \sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j d_{j,h} u \right|_{1,\Omega}^2 \leq 2lC(\alpha, \beta) \sum_{j=1}^{m_h} \left\{ \frac{h_{R_j}^4}{\min_{P_j \in T} \rho_T^2} + \frac{h_{R_j}^4}{\rho_{R_j}^2} \right\} |u|_{L,R_j}^2 \quad (\text{V.3.4.4})$$

Asi mismo de las condiciones (V.3.1.3) y (V.3.1.4) las siguientes estimaciones son obvias:

$$h_{R_j} \leq 2 \max_{P_j \in T} h_T \leq 2h \quad , \rho_{R_j} \geq \min_{P_j \in T} \rho_T \geq \min_{P_j \in T} \frac{h_T}{\sigma} \geq \frac{h}{v\sigma}$$

acotando en (V.3.4.4) se obtiene

$$\left| u - \sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j d_{j,h} u \right|_{1,\Omega}^2 \leq C(\alpha, \beta, \sigma, v) h^2 \sum_{j=1}^{m_h} |u|_{L,R_j}^2 \quad (\text{V.3.4.5})$$

Además se cumple la siguiente estimación:

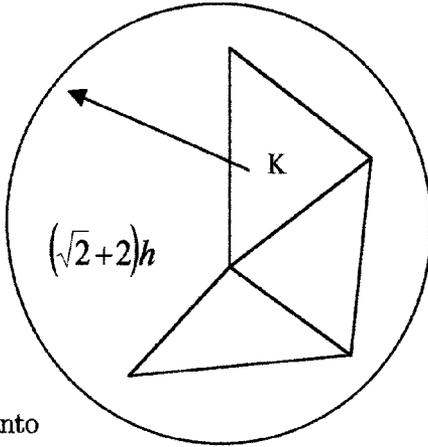
$$\sum_{j=1}^{m_h} |u|_{L,R_j}^2 \leq \sum_{T \in C_h} N_T |u|_{L,T}^2 \quad (\text{V.3.4.6})$$

donde N_T es el número de rectángulos R_j tal que $T \cap R_j \neq \Phi$. Ahora mostraremos que debajo las suposiciones (V.3.1.3) y (V.3.1.4) los números N_T están acotados independientemente de h para todo $T \in C_h$. Si $T \cap R_j \neq \Phi$ entonces P_j dentro del disco cerrado D de radio $(\sqrt{2} + 1)h$ centrado en el centro de T . Estimaremos el numero de nodos localizados dentro de D , primero estimaremos el numero \bar{N} de triangulos K que estan en el interior del disco D' de radio $(\sqrt{2} + 2)h$. Además de (V.3.1.3) y (V.3.1.4) obtenemos

$$\frac{\pi h^2}{4v^2\sigma^2} \leq \pi \frac{h_K^2}{4\sigma^2} \leq \pi \frac{\rho_K^2}{4} \leq \text{area}(K)$$

tenemos la estimación

$$\bar{N} \frac{\pi h^2}{4v^2\sigma^2} \leq \sum_{K \subset D'} \text{area}(K) \leq \text{area}(D') = \pi(\sqrt{2}+2)^2 h^2$$



Disco D' de radio $(\sqrt{2}+2)h$

fig. V.3.4

por tanto

$$\bar{N} \leq 4v^2\sigma^2 (2 + \sqrt{2})^2$$

Sea N_1 el número de nodos contenidos en el disco D y sea N_2 el número de nodos contenidos en el disco D' , ambos cumplen:

$$N_T \leq N_1 \leq N_2$$

utilizando inducción matemática se demuestra que

$$N_2 \leq 3\bar{N} \tag{V.3.4.7}$$

por tanto

$$N_T \leq 3\bar{N} \leq 12v^2\sigma^2 (2 + \sqrt{2})^2 \quad \forall T \in C_h, \quad 0 < h \leq 1$$

finalmente combinando (V.3.4.5) – (V.3.4.7) obtenemos

$$\left| u - \sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j d_{j,h} u \right|_{1,\Omega}^2 \leq C(\alpha, \beta, v, \sigma) h^2 |u|_{L,\Omega}^2$$

V.3.5 Teorema

Para $f \in L^2(\Omega)$, sea u la solución de (IV.1.1) y sea u_h la solución de (V.3.1.7). Entonces existe una constante $C = C(\alpha, \beta, \sigma, v)$ tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch \|f\|_{0,\Omega} \quad 0 < h \leq 1$$

Demostración:

De V.1.4.2 (ver V.1.4) tenemos

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C_3 \inf_{X \in S_h} \|u - X\|_{1,\Omega}$$

Además $u_h \in S_h$ y $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^L(\Omega)$ entonces $\sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j d_{j,h} u \in H_0^1(\Omega)$ pues J_j contiene todo vértice de R_j que esta en $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,\Omega} &= C_3 \inf_{X \in S_h} \|u - X\|_{1,\Omega} \\ &= C_3 \left\| u - \sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j d_{j,h} u \right\|_{1,\Omega} \\ &\leq C_3 \left| u - \sum_{j=1}^{m_h} \Psi_j d_{j,h} u \right|_{1,\Omega} \\ &\leq C(\alpha, \beta, v, \sigma) h \|u\|_{L,\Omega} \\ &\leq C(\alpha, \beta, v, \sigma) h \|u\|_{L,\Omega} \\ \|u - u_h\|_{1,\Omega} &\leq C(\alpha, \beta, v, \sigma) h \|f\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] ADAMS, R.A. (1975); Sobolev Spaces((AcademicPress,NewYork)
- [2] BREZIS, H.(1983); Analyse Fonctionnelle(Masson Paris)
- [3] CIARLET, PHILIPPE G.(1980) ; The finite element method for Elliptic problems
- [4] BRENNER SUSANNE - SCOTT RIDWAY(1994); The Mathematical Theory of finite Element Methods(Springger-Verlag) .
- [5] GIRAULT VIVETTE-RAVIART PIERRE(1979); Finite Element Approximation of the Navier Stokes Equations(Springger-Verlag)
- [6] RAVIART PIERRE-THOMAS J. (1983); Introduction al Analyse Numeriquedes Equations aux derivees partielles(Masson Paris) .
- [7] ERIC B. BECKER, GRAHAM F. CAREY, and J. TINSLEY ODEN(1981) ;Finite Elements An Introduction(Prentice Hall) .
- [8] S.N. BERNSTEIN(1910); Sur la généralisation du probleme de Dirichlet(Math. Ann)
- [9] O. LADYZHENSKAYA AND N. URAL'TSEVA(1968); Linear and Quasilinear Elliptic Equations(Academic Press)