**UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E. A. P. DE MATEMÁTICA

# Curvas planas

TESIS

para optar el título profesional de Licenciado de Matemática

AUTOR

Frank Collantes Sánchez

**Lima-Perú**

**2010**

Dedico este trabajo
a mi querida familia
y a mi querido saludo.

# Índice general

RESUMEN

CURVAS PLANAS

FRANK COLLANTES SANCHEZ

ENERO 2010

Orientador: Dr. Agripino Garcia Armas.
Título obtenido: Licenciado en Matemáticas

---

Hacemos un estudio del anillo de las series de potencias formales, para luego definir las curva algebroide plana, Demostramos el teorema de Newton-Puiseux que da como resultados la parametrizacion de una curva plana.

Finalmente estudiamos la resolución de singularidades de una curva plana, usando las transformaciones cuadraticas u explosiones.

PALABRAS CLAVES: ANILLO DE SERIES DE POTENCIAS

INDICE DE INTERSECCION DE UNA CURVA PLANA

TRANSFORMACIONES CUADRÁTICAS

RESOLUCION DE SINGULARIDADES

# ABSTRACT

PLANES CURVES

FRANK COLLANTES SANCHEZ

JANUARY 2010

---

We study formality power series ring, after that we are defining plane algebroid curves. We prove of Newton-Puiseux Theorem who us allow to work whith curve planes parametrics.

Finished we can to study the resolution of singularity of plane algebroid curves by a finite number of quadratic transformations.



KEY WORDS: RING OF POWER SERIES

INTERSECTION NUMBER OF ALGEBROID CURVES

THE QUADRATIC TRANSFORMATIONS

RESOLUTION OF SINGULARITY

# INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es exponer algunos resultados básicos sobre la teoria de las curvas planas irreducibles que posteriormente sirvan para desarrollar investigación sobre la teoría de de singularidades de curvas algebroides planas ya sea representadas en forma de Weierstrass o en su forma parametrizada.

Nuestro interes por el tema tuvo sus inicios en un minicurso dado en julio del 2000 por el profesor Abramo Hefez, donde se abordaron muchos de los puntos tratados en esta tesis.

En el primer capítulo desarrollamos el anillo de las series de potencias formales, estudiamos los homomorfismmos y damos las condiciones para tener un automorfismo. Luego terminamos demostrando un teorema clásico conocido como el lema de Hensel.

El en capítulo dos demostramos un resultado probado por Stickelbergel en 1887 que nos servira para demostrar el teorema preparación de Weierstrass.

En el capítulo tres estudiamos las curvas algebroides planas y demostramos un teorema clásico, el teorema de Newton-Puiseux, cuya consecuencia nos permite escribir una curva algebroide plana en su forma paramétrica.Finalizamos este capitulo probando el lema de la unitangente, que es un resultado clásico en la teoria de las curvas planas.

En el capítulo cuatro estudiamos algunos resultados del álgebra lineal que servirán para darle un caracter formal a la definición de el índice de intersección de curvas planas, luego damos algunos resultados que nos permiten hallar numericamente el índice de intersección.

En el capítulo cinco exponemos las transformaciones cuadráticas o explosiones que sirven para desingularizar una curva algebroide planas.

# Capítulo 1

# SERIES DE POTENCIAS

En este capítulo introducimos los anillos de series de potencias y estudiaremos algunas de sus propiedades básicas.

## 1.1. Anillo de Series de Potencias

Sea $K$ un cuerpo y $X_1$,$X_2$,..., $X_r$ indeterminadas sobre $K$. Denotamos por

$$S = K[[X_1, X_2, \dots, X_r]],$$

el conjunto de las sumas formales de tipo,

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + P_2 \cdots ,$$

donde cada $P_i$ es un polinomio homogeneo de grado $i$, en las indeterminadas $X_1$,$X_2$,..., $X_r$ con coeficientes en $K$.

Sean $f = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$ y $g = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \cdots$ elementos de $S$, tenemos por definición

$$f = g \iff P_i = Q_i, \ \forall i = 1, 2 \dots .$$

Se define en $S$ las siguientes operaciones :

$$f + g = \sum_{i=0}^{\infty} \big( P_i + Q_i \big)$$

y

$$fg = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} P_j Q_{i-j}.$$

**Definición 1.1** *El conjunto $S$ con las operación de adición y de producto sera llamado* ***el anillo de las series de potencias formales en $r$ indeterminadas y con coeficientes en $K$.***

Se observa que este anillo es conmutativo y tiene elemento unidad, ademas este anillo posee al cuerpo $K$ y a los anillos de polinómios $K[X_1, \ldots X_r]$, como súbanillos.

Los elementos de $S$, pueden ser también representados de la forma

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=i} a_{i_1,i_2,\ldots,i_r} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots x_r^{i_r},$$

con $a_{i_1,i_2,\ldots,i_r} \in K$

Si $K$ es el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o el cuerpo $\mathbb{C}$ de lo números complejos, podemos considerar el súbanillo $A = K\{X_1, \ldots, X_r\}$ de $S$, formado por las series absolutamente convergentes en una vecindad del punto $(0, \ldots, 0)$. En otras palabras, $A$ es formados por las series

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=i} a_{i_1,i_2,\ldots,i_r} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots x_r^{i_r},$$

tal que existe un número positivo $\rho$, para la cual es convergente la serie

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_r=i} |a_{i_1,i_2,\ldots,i_r}| \rho^{i_1+i_2+\cdots+i_r}.$$

Veremos en la próxima proposición, como determinar los elementos invertibles de $S$.

**PROPOSICIÓN 1.2** *El elemento $f = P_0 + P_1 + \cdots$ en $S$ es invertible, si solo si, $P_0 \neq 0$.*

**Demostración.** Supongamos que $f$ sea invertible y sea $f^{-1} = Q_0 + Q_1 + \cdots$, el inverso de $f$ en $S$. Entonces

$$1 = ff^{-1} = P_0Q_0 + (P_1Q_0 + P_0Q_1) + \cdots, \tag{1.1}$$

luego $P_0Q_0 = 1$ y por tanto $P_0 \neq 0$.

Recíprocamente, si $P_0 \neq 0$, sigue que el inverso $f^{-1} = Q_0 + Q_1 + \cdots$, de $f$, satisface la ecuación 1.1 y puedes ser efectívamente determinada por las relaciones:

$$
\begin{aligned}
&P_0Q_0 = 1,\\
&P_1Q_0 + P_0Q_1 = 0,\\
&\vdots\\
&P_nQ_0 + P_{n-1}Q_1 + \cdots + P_1Q_{n-1} + P_0Q_n = 0,
\end{aligned}
$$

que tambien nos da las fórmulas recurrentes abajo, para calcular los $Q_n$ y por tanto $f^{-1}$

$$
\begin{aligned}
&Q_0 = P_0^{-1},\\
&Q_1 = -P_1P_0^{-1}Q_0,\\
&\vdots\\
&Q_n = -P_0^{-1}(P_nQ_0 + P_{n-1}Q_1 + \cdots + P_1Q_{n-1}).
\end{aligned}
$$

□

**Definición 1.3** *Sea* $f = P_n + P_{n+1} + \cdots \in S \setminus \{0\}$, *donde cada* $P_j$, *es un polinomio homogeneo de grado* $j$ *y* $P_n \neq 0$. ***El polinomio homogeneo*** $P_n$ ***es llamado la forma inicial de*** $f$. *Al número entero* $n$ ***es llamamado la directo de*** $f$***,*** *y denotado por* $n = \textit{dir}(f)$. *Si* $f = 0$, *ponemos* $\textit{dir}(f) = \infty$.

De acuerdo con la proposición 1.2, se tiene que $f \in S$ es invertible si e solamente si, $\text{dir}(f) = 0$.

La directo de las series de potencias, mantienen las siguientes propiedades:

**PROPOSICIÓN 1.4** *Sean* $f, g \in S$. *Se tiene que:*

1. $\textit{dir}(fg) = \textit{dir}(f) + \textit{dir}(g)$.
2. $\textit{dir}(f \pm g) \geq \text{mín}\{\textit{dir}(f), \textit{dir}(g)\}$, *con igualdad ocurriendo siempre que* $\textit{dir}(f) \neq \textit{dir}(g)$.

**Demostración.** Sea $f = P_m + P_{m+1} + \cdots$ y $g = Q_n + Q_{n+1} + \cdots$ con $\text{dir}(f) = m$ y $\text{dir}(g) = n$.

1. Tenemos que $fg = P_mQ_n + P_{m+1}Q_n + \cdots$, donde $\text{grd}(P_mQ_n) = m + n$, sigue por definición de la directo que

$$\text{dir}(fg) = m + n = \text{dir}(f) + \text{dir}(g).$$

2. Tenemos que

$$f \pm g = (P_m + P_{m+1} + \cdots) \pm (Q_n + Q_{n+1} + \cdots).$$

Si $m = n$, entonces $\mathrm{dir}(f \pm g) \geq \mathrm{mín}\{m, n\}$.
Si $m \neq n$, entonces $\mathrm{dir}(f \pm g) = \mathrm{mín}\{m, n\}$.

$\square$

La noción de la directo de $f$ para las series de potencias desenpeña un papel semejante a la noción del grado de un polinomio.

**PROPOSICIÓN 1.5** *El anillo $S$ es un dominio de integridad.*

**Demostración.** Si $f, g \in S \setminus \{0\}$ entonces por proposición 1.4 tenemos que

$$\mathrm{dir}(fg) = \mathrm{dir}(f) + \mathrm{dir}(g) < \infty$$

y por tanto $fg \neq 0$.

$\square$

Denotamos por $\mathcal{M}_S = \langle X_1, X_2, \ldots, X_r \rangle$ el ideal generado por $X_1, X_2, \ldots, X_r$

**PROPOSICIÓN 1.6** *El ideal $\mathcal{M}_S$ es el único ideal máximal de $S$ y es tal que*

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_S^i = (0)$$

**Demostración.** Sea $U$ un ideal de $S$, tal que

$$\mathcal{M}_S \subsetneq U \subset S.$$

Entonces existe $f \in U$, tal que $f \notin \mathcal{M}_S$. Sigue que $f$ es invertible, luego $ff^{-1} = 1 \in U$, concluyendo que $U = S$. Consecuentemente la primera afirmación es verdadera.

Para terminar la prueba, observe que si

$$f \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_S^i,$$

entonces $f \in \mathcal{M}_S^i$ para cada $i \in \mathbb{N}$, luego si

$$f = P_0 + P_1 + \cdots + P_i + \cdots ,$$

donde los $P_i, i \in \mathbb{N}$ es un polinomio homogeneo de grado $i$, sigue que

$$P_0 + P_1 + \cdots \in \mathcal{M}_S^j \iff P_0 = P_1 = \ldots = P_{j-1} = 0$$

lo que termina el resultado.

$\square$

## 1.2. Sustituciones en Series de Potencias

Denotaremos por $S$ al anillo $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ y por $R$ al anillo $K[[Y_1, \ldots, Y_s]]$. Sus respectivos ideales maximales seran denotados por $\mathcal{M}_S$ y $\mathcal{M}_R$.

Sea $\Phi\colon R \to S$ un homeomorfismos de $K$-álgebras. Luego la restricción de $\Phi$ al anillo de polinomios $K[Y_1, \ldots, Y_s]$ es tambien un homeomorfismos de $K$-álgebras y por tanto es totalmente determinado por los valores

$$g_i = \Phi(Y_i),\ i = 1, \ldots, s,$$

de modo que si $P(Y_1, \ldots, Y_s) \in K[Y_1, \ldots, Y_s]$, entonces

$$\Phi(P(Y_1, \ldots, Y_s)) = P(g_1, \ldots, g_s).$$

Para estudiar los homeomorfismos de $R$ en $S$ somos entonces llevados a estudiar el problema de sustituir en una serie arbitraria $f \in R$, las indeterminadas $Y_1, \ldots, Y_s$ por series de potencias $g_1, \ldots, g_s \in S$. En particular, es siempre posible subtituir algunos de los $Y_1, \ldots, Y_s$ por $0$. Más en general no siempre es posible efectuar esta subtitución, pues el resultado no siempre puede estar definido en $S$. Por ejemplo, si

$$f(X) = 1 + X + X^2 + \cdots \in K[[X]],$$

¿Quien seria $f(1)$ ?.

Mas generalmente, dados $g_1, \ldots g_s \in S$, tal que

$$g_i(0) = c \in K \setminus \{0\}$$

para algun $i$. Entonces tomando

$$f(Y_1, \ldots, Y_s) = 1 + c^{-1}Y_i + c^{-2}Y_i^2 + \cdots ,$$

sigue que $f(g_1, \ldots, g_s)$ no esta definido como elemento de $S$, pues caso contrario,

$$f(g_1, \ldots, g_s)(0, \ldots, 0) = 1 + 1 + \cdots \in S,$$

lo que es una contradicción.

Entretanto veremos en adelante que es siempre posible sustituir las indeterminadas $Y_1, \ldots, Y_s$ por series de potencias $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{M}_S$, en cualquier $f \in R$, obteniendo una serie de potencias

$$f(g_1 \ldots g_s) \in S$$

Para formalizar este tipo de operación, vamos a desenvolver algunos requisitos.

**Definición 1.7** *Sea $i$ un número natural dado y $f, h \in R$, se define*

$$f \cong h\textit{mod}\mathcal{M}_R^i \iff f - h \in \mathcal{M}_R^i,$$

*y se lee $f$ **es congruente a** $h$ **módulo** $\mathcal{M}_R^i$.*

Una formulación equivalente a la de arriba es la siguiente:

$$f \cong h\text{mod}\mathcal{M}_R^i \iff \text{dir}(f-h) \geq i.$$

Se verifica fácilmente que acabamos de definir una relación de equivalencia en $R$, cuyas propiedades relacionamos en el resultado que sigue.

**PROPOSICIÓN 1.8** *Sean $f, h, h_1, h_2, f_1, f_2, f_3, \ldots,$ elementos de $R$ y sea $g_1, \ldots, g_s$ elementos de $\mathcal{M}_S$*

1. *Si $f_1 \cong f_2\textit{mod}\mathcal{M}_R^i$ y $h_1 \cong h_2\textit{mod}\mathcal{M}_R^i$, entonces*

$$f_1 \pm h_1 \cong f_2 \pm h_2\textit{mod}\mathcal{M}_R^i, \quad \text{y} \quad f_1h_1 \cong f_2h_2\textit{mod}\mathcal{M}_R^i.$$

2. *Si, $\forall N \geq 0$, $\exists i \geq N$ tal que $f \cong h\textit{mod}\mathcal{M}_R^i$, entonces $f = h$.*
3. *Si $f_1$ y $f_2$ son polinomios, entonces*

$$f_1 \cong f_2\textit{mod}\mathcal{M}_R^i \Longrightarrow f_1(g_1, \ldots, g_s) \cong f_2(g_1, \ldots, g_s)\textit{mod}\mathcal{M}_S^i.$$

4. *Se para todo $i \in \mathbb{N}$, se tiene que $f_{i+1} \cong f_i\textit{mod}\mathcal{M}_R^i$, entonces existe un único $f \in R$ tal que*

$$f \cong f_i\textit{mod}\mathcal{M}_R^i, \ \forall i = 1, 2, \ldots$$

**Demostración.** Supongamos que $f, h, h_1, h_2, f_1, f_2, f_3, \ldots,$ elementos de $R$ y sea $g_1, \ldots, g_s$ elementos de $\mathcal{M}_S$.

1. Si $f_1 \cong f_2\text{mod}\mathcal{M}_R^i$ y $h_1 \cong h_2\text{mod}\mathcal{M}_R^i$, entonces $f_1 - f_2 \in \mathcal{M}_R^i$ y $h_1 - h_2 \in \mathcal{M}_R^i$, luego $(f_1 \pm h_1) - (f_2 \pm h_2) \in \mathcal{M}_R^i$, por tanto

$$f_1 \pm h_1 \cong f_2 \pm h_2\text{mod}\mathcal{M}_R^i.$$

Por otro lado $h_1(f_1 - f_2) \in \mathcal{M}_R^i$ y $f_2(h_1 - h_2) \in \mathcal{M}_R^i$ sigue $f_1h_1 - f_2h_2 \in \mathcal{M}_R^i$, consecuentemente

$$f_1h_1 \cong f_2h_2\text{mod}\mathcal{M}_R^i.$$

2. Sea $f \equiv h \text{mod} \mathcal{M}_R^i$ para todo $i \geq 0$, sigue $f - h \in \mathcal{M}_R^i$, $\forall i$, luego $f - h \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_R^i$. Por la proposición 1.6 $f - h = 0$ y consecuentemente $f = h$.

3. Si $f$ es un polinomio y $g_1, \ldots g_s \in \mathcal{M}_S$, es claro que $f(g_1, \ldots, g_s) \in S$. La condición $f_1 \cong f_2 \text{mod} \mathcal{M}_R^i$ significa que

$$f_1 - f_2 = P_i + \cdots + P_d,$$

donde cada $P_j$ es un polinomio de grado $j$. Sigue entonces que

$$f_1(g_1, \ldots, g_s) - f_2(g_1, \ldots, g_s) = P_i(g_1, \ldots, g_s) + \cdots + P_d(g_1, \ldots, g_s).$$

Como la $\text{dir}(g_1) \geq 1$,. . ., $\text{dir}(g_s) \geq 1$, sigue que

$$\text{dir}(P_j(g_1, \ldots, g_s)) \geq j \geq i,$$

y por tanto por la proposición 1.4

$$\text{dir}(f_1(g_1, \ldots, g_s) - f_2(g_1, \ldots, g_s)) \geq i,$$

probando asi el resultado.

4. Para cada $i = 1, 2, \ldots$ escribimos $f_i = P_{i,0} + P_{i,1} + \cdots$ donde cada $P_{i,j}$ es un polinomio homogeneo de grado $j$.

Como para todo $i$ se tiene que

$$f_{i+1} \cong f_i \text{mod} \mathcal{M}_R^i,$$

sigue que

$$P_{i,j} = P_{i+1,j}, \forall j, 0 \leq j \leq i - 1.$$

Definiendo

$$f = P_{1,0} + P_{2,1} + \cdots + P_{i+1,i} + \cdots ,$$

sigue que

$$f \cong f_i \text{mod} \mathcal{M}_R^i, \forall i = 1, 2, \ldots$$

Verificaremos que $f$ es único.Suponga que $g \in R$ sea tal que

$$g \cong f_i \text{mod} \mathcal{M}_R^i, \forall i = 1, 2, \ldots$$

Luego $g \cong f_i \cong f \text{mod} \mathcal{M}_R^i$, para todo $i = 1, 2, \ldots$ que por el item 2 termina que $g = f$.

□

**PROPOSICIÓN 1.9** *Sean* $f, h \in S$, *la función*

$$d(f,h) = \rho^{-\mathit{dir}(f-h)},$$

*donde* $\rho$ *es un número real mayor que* $1$*, es una métrica en* $S$*.*

**Demostración.** Sean $f, h, g \in S$, verificaremos los tres itenes de la definición

1. $d(f,h) \geq 0$ y $d(f,h) = 0$, si solo si, $f = h$.

   En efecto, si $\rho > 1$, entonces $0 < (\frac{1}{\rho}) < 1$, luego

   $$d(f,h) = \rho^{-\text{dir}(f-h)} = (\frac{1}{\rho})^{\text{dir}(f-h)} \geq 0.$$

   Por otro lado

   $$d(f,h) = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{\rho})^{\text{dir}(f-h)} = 0 \Leftrightarrow \text{dir}(f-h) = \infty \Leftrightarrow f - h = 0.$$

2. $d(f,g) = d(g,f)$.

   En efecto, sabemos que

   $$\text{dir}(f-h) = \text{dir}(-(f-h)) = \text{dir}(h-f),$$

   sigue que

   $$(\frac{1}{\rho})^{\text{dir}(f-h)} = (\frac{1}{\rho})^{\text{dir}(h-f)}.$$

   Esto es

   $$d(f,h) = d(h,f)$$

3. $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$.

   En efecto, por la proposición 1.4 item 2. tenemos que

   $$\text{dir}((f-g)+(g-h)) \geq \text{mín}\{\text{dir}(f-g), \text{dir}(g-h)\},$$

   y supongamos que

   $$\text{mín}\{\text{dir}(f-g), \text{dir}(g-h)\} = \text{dir}(f-g).$$

   Luego

   $$d(f,h) = (\frac{1}{\rho})^{\text{dir}(f-h)} = (\frac{1}{\rho})^{\text{dir}((f-g)+(g-h))} \leq (\frac{1}{\rho})^{\text{dir}(f-g)} = d(f,g),$$

   y por tanto

   $$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h).$$

Luego la proposición esta demostrada.

$\square$

**Definición 1.10** *Para cada* $f \in S$, *se definen los conjuntos*

$$V_i(f) = B(f, \rho^{-i}) = \{h \in S/d(h,f) < \rho^{-i}\} = \{f + \mathcal{M}_S^i\},\ i \in \mathbb{N}$$

*llamados* ***el sistema fundamental de vecindades de*** $f$.

Observe que, estas vecindades definen una topología para $S$

**PROPOSICIÓN 1.11** *El espacio métrico* $S$ *es completo.*

**Demostración.** Verificaremos que toda sucesión $\{f_i\}$ de Cauchy es convergente.

Sea $\mathcal{M}_S^i$ una vecindad del origen en $S$. Como $\{f_i\}$ es de cauchy, existe $N > 0$, tal que para $i > N$, se tiene que $f_{i+1} - f_i \in \mathcal{M}_S^i$ luego $f_{i+1} \cong f_i \text{mod} \mathcal{M}_S^i$, sigue que por la proposición 1.8 item 4 existe $f \in S$ tal que

$$f \equiv f_i \text{mod} \mathcal{M}_S^i,\ \forall i \geq N.$$

Luego $f - f_i \in \mathcal{M}_S^i$ que para $i > N$, y

$$\lim_{i \to \infty} f_i = f.$$

$\square$

**Definición 1.12** *Diremos que* $A \subset S$ ***es un conjunto denso*** *si*

$$\forall f \in S,\ \{f + \mathcal{M}_S^i\} \cap A \neq \emptyset$$

*para todo* $i \in \mathbb{N}$

La proposición 1.8 nos permite definir la operación composición o subtitución de series de potencias. Veremos a seguir como proceder.

**PROPOSICIÓN 1.13** *Dados* $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{M}_S$, *y dado* $f$ *cualquiera en* $R$, *es siempre posible subtituir* $Y_1, \ldots, Y_s$ *por* $g_1, \ldots g_s$ *en* $f$.

**Demostración.** Sea $f_i$ un polinomio cualquiera en $R$ tal que

$$f \cong f_i \mathrm{mod} \mathcal{M}_R^i,$$

por ejemplo, el truncamiento de $f$ hasta el grado $i-1$ cumple la condición arriba.

Como

$$f_{i+1} \cong f \mathrm{mod} \mathcal{M}_R^{i+1}$$

y ademas

$$\mathcal{M}_R^{i+1} \subset \mathcal{M}_R^i, \tag{1.2}$$

sigue que

$$f_{i+1} \cong f_i \mathrm{mod} \mathcal{M}_R^i,$$

luego por la proposición 1.8 item 3,

$$f_{i+1}(g_1, \ldots, g_s) \cong f_i(g_1, \ldots, g_s) \mathrm{mod} \mathcal{M}_S^i.$$

Poniendo

$$h_i = f_i(g_1, \ldots, g_s) \in S,$$

tenemos que

$$h_{i+1} \cong h_i \mathrm{mod} \mathcal{M}_S^i,$$

e por tanto por la proposición 1.8 item 4, existe un único $h \in S$ tal que

$$h \cong h_i \mathrm{mod} \mathcal{M}_S^i.$$

Vamos ahora provar que $h$ independe de la elección de los polinomios $f_i$. Sean $f'_i$ otros polinomios tal que

$$f \cong f'_i \mathrm{mod} \mathcal{M}_R^i$$

y sea $h'$ la serie construida de modo análogo a $h$, es decir $h'_i = f'_i(g_1, \ldots, g_s)$. Entonces

$$f_i \cong f'_i \mathrm{mod} \mathcal{M}_R^i,$$

y por tanto por la proposición 1.8 item 3

$$h_i = f_i(g_1, \ldots, g_s) \cong f'_i(g_1, \ldots, g_s) \mathrm{mod} \mathcal{M}_S^i$$

Por tanto para todo $i$

$$h \cong h_i \cong h'_i \cong h' \mathrm{mod} \mathcal{M}_S^i,$$

y consecuentemente, por la proposición 1.8 item 2, sigue que $h = h'$.

$\square$

La serie de potencias de $h$ cuya existencia y unicidad acabamos de probar será denotada por $f(g_1, \ldots, g_s)$ y será llamado la **compuesta de** $f$ **con** $(g_1, \ldots, g_s)$.

A partir de las consideraciones arriba, tenemos el siguiente resultado:

**PROPOSICIÓN 1.14** *Dados* $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{M}_S$ *la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} S_{g_1,\ldots,g_s}: & K[[Y_1, \ldots, Y_s]] & \longrightarrow & K[[X_1, \ldots, X_s]] \\ & f & \rightarrow & S_{g_1,\ldots,g_s}(f) = f(g_1, \cdots, g_s) \end{array}$$

*es un homeomorfismo de* $K$*-álgebras de* $R$ *en* $S$. *Recíprocamente, todo homeomorfismo de* $K$*-álgebras de* $R$ *en* $S$ *es de este tipo.*

Mostraremos el lema y la proposición siguiente, que nos servirán en la siguiente sección

**LEMA 1.15** *Si* $f \in R$ *y* $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{M}_S$, *entonces*

$$\textit{dir}(S_{g_1,\ldots,g_s}(f)) = \textit{dir}(f(g_1, \ldots, g_s)) \geq \textit{dir}(f) \min_i \{\textit{dir}(g_i)\}$$

**Demostración.** Sea $f \in R$ con $\text{dir}(f) = m$, y sea $g_k \in \mathcal{M}_S$ tal que

$$1 \leq \text{dir}(g_k) = n = \min_i \{\text{dir}(g_i)\}.$$

Entonces la forma inicial de $f$ es

$f(X_1, \ldots, X_r) = F_m(X_1, \ldots, X_r) +$polinomios homogeneos de grado mayor que m,

donde

$$F_m(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{i_1+\cdots+i_r=m} a_{i_1,\ldots,i_r} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}.$$

Sigue que $\text{dir}(S_{g_1,\ldots,g_s}(f)) = \text{dir}(f(g_1, \ldots, g_s)) = \text{dir}(F_m(g_1, \ldots, g_s))$

$$= \text{dir}(\sum_{i_1+\cdots+i_r=m} a_{i_1,\ldots,i_r} g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r}) \geq \min\{\text{dir}(g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r}) / i_1 + \cdots + i_r = m\}$$

$$= \min\{i_1 \text{dir}(g_1) + \cdots + i_r \text{dir}(g_r) / i_1 + \cdots + i_r = m\} \geq m \min_i \{\text{dir}(g_i)\}$$

lo que prueba el resultado.

$\square$

**PROPOSICIÓN 1.16** *El homeomorfismo* $S_{g_1,\dots,g_r}$ *es continuo.*

**Demostración.** De hecho, para $V_j(S_{g_1,\dots,g_r}(f))$, una vecindad de $S_{g_1,\dots,g_r}(f)$ existe una vecindad $V_j(f)$ tal que, si $h \in V_j(f)$, sigue $h \in f + \mathcal{M}_R^j$, entonces

$$h \cong f \text{mod} \mathcal{M}_R^j,$$

luego por la proposición 1.13 y el lema 1.15 se tiene

$$h(g_1, \dots, g_r) \cong f(g_1, \dots, g_r) \text{mod} \mathcal{M}_S^j,$$

por tanto

$$h(g_1, \dots, g_r) \in f(g_1, \dots, g_r) + \mathcal{M}_S^j.$$

Consecuentemente $h(g_1, \dots, g_r) \in V_j(S_{g_1,\dots,g_r}(f))$ y $S_{g_1,\dots,g_r}$ es continuo.

□

## 1.3. Automorfismos

En la sección anterior , precisamente en la proposición 1.14, vimos que dado un endomorfismo $\Phi$ de $S$, existen $g_1, \dots, g_r$ tal que $\Phi = S_{g_1,\dots,g_r}$. Veremos ahora que condiciones debemos imponer a los $g_1, \dots, g_r$ para que $\Phi$ seja un $K$-automorfismo.

Primero, observe que todo $K$-automorfismo de $S$ debe preservar la directo. De hecho por el lema 1.15 sigue que para $f \in S$, que

$$\text{dir}(f) \leq \text{dir}(\Phi(f)) \leq \text{dir}(\Phi^{-1}(\Phi(f))) = \text{dir}(f), \tag{1.3}$$

lo que prueba nuestra afirmación.

Como $\Phi(X_i) = g_i$, para $i = 1, \dots, r$, sigue entonces que $\text{dir}(g_i) = 1$, para todo $i = 1, \dots, r$. Sean $L_1, \dots, L_r$ respectivamente las formas iniciales de $g_1, \dots, g_r$, que son los polinomios homogeneos de grado $1$ en $X_1, \dots, X_r$.

Supongamos que exista una relación de dependencia lineal sobre $K$ no trivial,

$$a_1 L_1 + \dots + a_r L_r = 0.$$

Luego tomando

$$f = a_1 X_1 + \dots + a_r X_r,$$

seguiría que

$$\text{dir}(S_{g_1,\ldots,g_s}(f)) > \text{dir}(f) = 1,$$

lo que termina que $S_{g_1,\ldots,g_s}$ no es un $K$-automorfismo de $S$.

Consecuentemente, una condición necesaria para que $S_{g_1,\ldots,g_s}$ sea un $K$-automorfismo de $S$ es que las formas iniciales de los $g_i$ sean formas lineales linealmente independiente sobre $K$.

A fin de mostrar que las condiciones arriba son tambien suficientes, necesitamos del lema que sigue.

**LEMA 1.17** *Un subanillo $A$ de $S$ es denso en $S$, si y solamente si, para todo polinomio homogeneo $P \in K[X_1,\ldots,X_r]$, existe un elemento en $A$ cuya forma inicial es $P$.*

**Demostración.** Suponga que $A$ es denso en $S$, y sea $P \in K[X_1,\ldots,X_r] \subset S$, un polinomio de grado $d$. Luego $\forall\, n > d$ tal que

$$\{P + \mathcal{M}_S^n\} \cap A - \{P\} \neq \emptyset.$$

Por tanto existe $f \in A$ y $f - P \in \mathcal{M}_S^n$, sigue $\text{dir}(f - P) \geq n > d$. Consecuentemente $P$ es la forma inicial de $f$.

Recíprocamente, sea $f = F_m + F_{m+1} + \cdots \in S$, con $F_m$ polinomio homogeneo de grado $m$, sigue que

$$\exists\, g = F_m + G_{m+1} + \cdots \in A, \tag{1.4}$$

luego $\text{dir}(g - f) \geq m + 1$ sigue que $g - f \in \mathcal{M}_S^{m+1}$, consecuentemente

$$g \in f + \mathcal{M}_S^{n+1}, \tag{1.5}$$

por tanto de 1.4 y de 1.5 $A$ es denso en $S$.

□

Si $L_1,\ldots,L_r$ son formas lineales en $S$, linealmente independientes sobre $K$, entonces $T = S_{L_1,\ldots,L_r}$ es un $K$-automorfismo de $S$.

De hecho, si

$$L_i = a_{i,1}X_1 + \cdots + a_{i,r}X_r \qquad i = 1,\ldots,r$$

Y si $A$ es una matriz $(a_{i,j})$, entonces $T^{-1} = S_{M_1,\ldots,M_r}$, donde

$$M_i = b_{i,1}X_1 + \cdots + b_{i,r}X_r \qquad i = 1,\ldots,r.$$

y $(b_{i,j})$ es la matriz inversa de $(a_{i,j})$.

**PROPOSICIÓN 1.18** *Sean* $g_1, \dots, g_r \in S$ *con formas lineales* $L_1, \dots, L_r$ *y linealmente independiente sobre* $K$. *Entonces* $S_{g_1,\dots,g_r}$ *es un* $K$*-automorfimo de* $S$.

**Demostración.** Vamos inicialmente probar que $S_{g_1,\dots,g_r}$ es inyectora. Sea

$$0 \neq f = P_n + P_{n+1} + \cdots ,$$

con $P_i$ polinomios homogeneos de grado $i$ y $P_n \neq 0$, entonces el término inicial de $S_{g_1,\dots,g_r}(f)$ es $S_{L_1,\dots,L_r}(P_n)$. De hecho basta observar que este último elemento es no nulo, pues

$$0 \neq P_n = S^{-1}_{L_1,\dots,L_r}(S_{L_1,\dots,L_r}(P_n)).$$

De esto sigue inmediatamente de 1.3 que

$$\text{dir}(S_{g_1,\dots,g_r}(f)) = \text{dir}(S_{L_1,\dots,L_r}(P_n)) = \text{dir}(P_n) = \text{dir}(f), \tag{1.6}$$

provando la inyectividad de $S_{g_1,\dots,g_r}$.

Vamos ahora probar que $S_{g_1,\dots,g_r}$ es sobreyectora. Para esto basta probar que su imagen $A = K[[g_1, \dots, g_r]]$ es cerrada y densa en $S$.

Sea $P \in K[X_1, \dots, X_r]$ un polinomio homogeneo cualquiera. Considere

$$Q = S^{-1}_{L_1,\dots,L_r}(P) \in S,$$

luego $P = S_{L_1,\dots,L_r}(Q)$ es la forma inicial de $S_{g_1,\dots,g_r}(Q) \in A$, lo que en vista del lema 1.17 implica que $A$ es denso en $S$.

Probaremos que $A$ es cerrado en $S$. Sea $h \in S$ tal que

$$h = \lim f_i(g_1, \dots, g_r),$$

donde $f_i \in S$ debemos probar que $h \in A$.

Por 1.6 y por el hecho de que $S_{g_1,\dots,g_r}$ es un homeomorfismo, tenemos que

$$\text{dir}(f_i - f_j) = \text{dir}(S_{g_1,\dots,g_r}(f_i) - S_{g_1,\dots,g_r}(f_j)),$$

luego $(f_i)$ es una sucesión de Cauchy en $S$ y por tanto existe $f \in S$ tal que

$$f = \lim_{i \to \infty} f_i.$$

Por la proposición 1.16 sigue que

$$h = \lim f_i(g_1, \dots, g_r) = S_{g_1,\dots,g_r}(\lim f_i) = S_{g_1,\dots,g_r}(f) \in A.$$

$\square$

## 1.4. Lema de Hensel

En esta sección establecemos un importante criterio de reducibilidad en $K[[X]][Y]$, donde $K$ es un cuerpo y $X$ , $Y$ son indeterminadas.

**LEMA 1.19** *Sean $p$ y $q$ polinomios no constantes relativamente primos en $K[Y]$ de grados respectivamente $r$ y $s$. Dado un polinomio $F$ en $K[Y]$, de grado menor que $r+s$, existen dos únicos polinomios $g,h \in K[Y]$ con grd$(h) < r$ y grd$(g) < s$, tal que*

$$F = gp + hq.$$

**Demostración.** Como $p$ y $q$ son relativamente primos en $K[Y]$, existen polinomios $\phi, \psi \in K[Y]$, tal que $1 = \phi p + \psi q$, luego

$$F = F\phi p + F\psi q. \tag{1.7}$$

Para $F\psi$ y $p$, por el algoritmo de la división, existen $\rho, h \in K[Y]$ talque,

$$F\psi = p\rho + h, \tag{1.8}$$

con grd$(h) <$ grd$(p) = r$.

Subtituyendo 1.8 en 1.7, tenemos que

$$F = (F\phi + \rho q)p + hq = gp + hq,$$

donde

$$g = F\phi + \rho q.$$

y grd$(g) < s$, pues grd$(p) = r$ y

$$\text{grd}(g) + \text{grd}(p) = \text{grd}(gp) = \text{grd}(F - hq) \leq \text{máx}\{\text{grd}(F), \text{grd}(hq)\} < r + s.$$

Unicidad: Suponga que

$$gp + hq = g'p + h'q,$$

con grd$(h)$, grd$(h') < r$ y grd$(g)$, grd$(g') < s$. Luego

$$(g - g')p = (h' - h)q.$$

Como $p$ y $q$ son relativamente primos, entonces $p$ divide $h' - h$, por razones de grado, esto implica que $h' - h = 0$, que por su vez implica que $g - g' = 0$.

□

**TEOREMA 1.20 (LEMA DE HENSEL)** *Sea $f$ un polinomio en $K[[X]][Y]$ mónico, tal que $f(0,Y) = p(Y)q(Y)$, donde $p(Y)$ y $q(Y)$ son coprimos y no constantes en $K[Y]$ de grado respectívamente $r$ y $s$. Entonces existen dos únicos polinomios $g, h \in K[[X]][Y]$ de grados respectívamente $r$ y $s$, tal que $f = gh$, con $g(0,Y) = p(Y)$ y $h(0,Y) = q(Y)$.*

**Demostración.** Sea $f$ es mónico en $K[[X]][Y]$, si $n = \text{grd}_Y(f)$, entonces

$$n = \text{grd}(f(0,Y)) = r + s.$$

Escribimos

$$f = f_0(Y) + Xf_1(Y) + X^2 f_2(Y) + \cdots ,$$

donde $f_0(Y) = f(0,Y)$ tiene grado $n$ y cada $f_i(Y), i \geq 1,$ es un polinomio en $K[Y]$ de grado menor que $n$. Queremos determinar

$$g(X,Y) = p(Y) + Xg_1(Y) + X^2 g_2(Y) + \cdots ,$$

y

$$h(X,Y) = q(Y) + Xh_1(Y) + X^2 h_2(Y) + \cdots ,$$

donde los $g_i(Y)'s, i \geq 1$, tiene sus grados menores que $r$ y los $h_i(Y)'s, i \geq 1$, tienen sus grados menores que $s$, tal que

$$f = gh. \tag{1.9}$$

De 1.9 sigue, para $i \geq 1$, que

$$f_i(Y) = p(Y)h_i(Y) + g_1(Y)h_{i-1}(Y) + \cdots + g_i(Y)q(Y). \tag{1.10}$$

Podemos ahora resolver la ecuación 1.10 en $g_i(Y)$ y $h_i(Y)$ recursivamente. De hecho, supongamos que tengamos determinamos $g_j(Y)$ y $h_j(Y)$ de grados respectívamente menores que $s$ y $r$, para todo $j \leq i-1$, entonces de 1.10, obtenemos

$$p(Y)h_i(Y) + q(y)g_j(Y) = f_i(Y) - g_1(Y)h_{i-1}(Y) - \cdots - g_{i-1}(Y)h_1(Y),$$

lo que en virtud del lema 1.19 puede ser resolvido de modo único en $g_i(Y)$ y $h_i(Y)$ de grados respectívamente menores que $s$ y $r$.

□

De modo mas general mente, estableciendo una ordenación para los monomios de $S = K[[X_1, \ldots, X_r]]$, se puede demostrar el lema de Hensel para polinomios en $S[Y]$.

La demostración que dimos arriba es constructiva pues es posible construir las series $g$ y $h$ paso a paso.

**COROLARIO 1.21** *Sea $K$ un cuerpo algebraicamente cerrado y $u = u(X)$ una unidad en $K[[X]]$. Si $n$ es un entero positivo que no es múltiplo de la característica de $K$, entonces existe un elemento invertible $v$ de $K[[X]]$ tal que $u = v^n$*

**Demostración.** Como $u$ es invertible tenemos que $u(0) \neq 0$. Definiendo

$$f(X,Y) = Y^n - u(X) \in K[[X]][Y],$$

tenemos que

$$f(0,Y) = Y^n - u(0) = \prod_{i=1}^{n}(Y - a_i),$$

donde los $a_i$, $i = 1, \ldots, n$ son las raices $n$-esimas de $u(0)$ (todas distintas por la hipótesis sobre la caracteristica de $K$ ). Por el lema de Hensel, existen $g_1, \ldots, g_n \in K[[X]][Y]$ tal que $g_i(Y,0) = Y - a_i$ y $f = g_1 \ldots g_n$.

Como el grado de $f$ como polinomio en $Y$ es $n$, sigue que el grado de cada $g_i$ en $Y$ es 1, y por tanto $g_i = Y - a_i(X)$, donde $a_i(0) = a_i \neq 0$. Como $g_1(X, a_1(X)) = 0$, sigue que $f(X, a_1(X)) = 0$ y asi

$$u = (a_1(X))^n.$$

El resultado sigue tomando $v = a_1(X)$.

□

# Capítulo 2

# TEOREMA DE PREPARACIÓN

En este capítulo continuaremos estudiando las propiedades algebraicas de los anillos de series de potencias. El objetivo central de este capítulo es apresentar el teorema de preparación de Weierstrass, que consiste en preparar una serie de potencias

$$f(X,Y) = F_n(X,Y) + F_{n+1}(X,Y) + \cdots F_j(X,Y) + \cdots \in K[[X,Y]],$$

con directo $n$ y $F_j(X,Y)$ polinomios homogeneos de grado $j$; en una serie polinomial de la forma

$$f(X,Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_j(X)Y^{n-j} + \cdots + a_n(X),$$

donde los $a_j(x) \in K[[X]]$.

Y muchas de sus aplicaciones las encontraremos en los capítulos subsiguientes.

## 2.1. Teorema de la División

En lo que sigue continuaremos a denotar el anillo $K[[X_1,\ldots,X_r]]$ por $S$.

**Definición 2.1** *Diremos que* $f \in S$ ***es regular de orden*** $m$***, con respecto a la indeterminada*** $X_j$***,*** *si* $f(0,\ldots,X_j,\ldots,0)$ *es exactamente divisible por* $X_j^m$*. En otras palabras,* $f$ *es regular de orden* $m$*, con respecto a* $X_j$*, si escribiendo*

$$f = P_n + P_{n+1} + \cdots + P_m + \cdots\ ,$$

*se tenga para algun* $c \in K^*$*,*

$$P_n + \cdots + P_m = cX_j^m + \quad \text{terminos de grado menor en } X_j.$$

*Diremos que* $f$ ***es regular en*** $X_j$ *cuando* $f$ *es regular con relación a* $X_j$ *de orden* $n = dir(f)$*. En este caso:* $dir(f) = dir(f(0,\ldots,X_j,\ldots,0))$.

El resultado siguiente es consecuencia directa de las definiciones.

**LEMA 2.2** *Dados* $f, g \in S$, *entonces* $fg$ *es regular con relación a* $X_j$ *de una cierta orden, si solamente si,* $f$ *y* $g$ *son regulares con relación a* $X_j$, *de determinadas ordenes.*

**Demostración.** Sea $fg$ regular con relación a $X_j$ de orden $m$, sigue por definición que

$$X_j^m u(X_j) = fg(0,\dots,X_j,\dots,0) = f(0,\dots,X_j,\dots,0)g(0,\dots,X_j,\dots,0),$$

donde $u(X_j)$ es una unidad. Sea

$$l = \text{dir}(f(0,\dots,X_j,\dots,0)) \text{ y } s = \text{dir}(g(0,\dots,X_j,\dots,0))$$

, sigue que

$$f(0,\dots,X_j,\dots,0) = X_j^l u_f(X_j),$$

donde $u_f(X_j)$ es una unidad y

$$g(0,\dots,X_j,\dots,0) = X_j^s u_g(X_j),$$

con $u_g(X_j)$ unidad. Por tanto $f$ y $g$ son regulares con relación a $X_j$ de órdenes $l$ y $s$ respectivamente.

Recíprocamente, supongamos que $f$ y $g$ sean regulares con relación a $X_j$ de òrdenes $l$ y $s$ respectívamente, sigue por definición que

$$X_j^l u_f = f(0,\dots,X_j,\dots,0),$$

donde $u_f$ unidad y

$$X_j^s u_g = g(0,\dots,X_j,\dots,0),$$

con $u_g$ unidad. Sigue que

$$X_j^{l+s} u_f u_g = fg(0,\dots,X_j,\dots,0),$$

por tanto $fg$ es regular con relación a $X_j$ de orden $l+s$.

$\square$

El teorema que sigue, probado por Stickelbergel en 1887, desempeña un papel fundamental en la teoría de singularidades. Este teorema, inspirado en el Teorema de Preparación de Weierstrass de 1860, tiene como corolario el própio teorema de preparación.

Denotamos a seguir por $S'$ el anillo $K[[X_1,\dots,X_{r-1}]]$.

**TEOREMA 2.3 (TEOREMA DE LA DIVISIÓN)** *Sea* $F \in \mathcal{M}_S \subset S$, *regular de orden* $m$ *con respecto a* $X_r$. *Dado cualquier* $G \in S$, *existen* $Q \in S$ *y* $R \in S'[X_r]$ *con* grd$_{X_r}(R) < m$, *unívocamente determinados por* $F$ *y* $G$, *tal que*

$$G = FQ + R.$$

**Demostración.** Escriba $G = \sum_{i=0}^{\infty} A_i X_r^i$ como elemento de $S'[[X_r]]$, y sea

$$R_{-1} = \sum_{i=0}^{m-1} A_i X_r^i.$$

Escriba $F$ en su descomposición en componentes homogeneas:

$$F = F_n + \cdots F_m + F_{m+1} + \cdots$$

Seja

$$P = F_n + \cdots + F_m = cX_r^m + \text{terminos en } X_r \text{ de grado } < m, \qquad (2.1)$$

donde $c \in K^*$. Tenemos entonces necesariamente,

$$1 \leq n \leq \text{dir}(P) \leq m.$$

Escriba $H = G - R_{-1}$ en su descomposición en componentes homogeneas:

$$G - R_{-1} = H = H_m + H_{m+1} + \cdots$$

Vamos a construir recursivamente polinomios $q_0, q_1, \cdots,$ y $R_0, R_1, \cdots$ en $K[X_1, \ldots, X_r]$, no necesariamente homogeneos, con

$$\text{grd}_{X_r} R_i < m,$$

y tal que dir$(q_i) \leq i$ y dir$(R_i) \geq 1 + i$, de tal modo que

$$G = FQ + R,$$

donde $Q = q_0 + q_1 + \cdots$, y $R = R_{-1} + R_0 + R_1 + \cdots$. Estos polinomios seran univocamente determinados por $F$ y $G$, lo que probará el teorema.

Para $H_m \in S'[[X_r]]$ y $P \in S'[[X_r]]$ que tiene la forma 2.1 , con $c \in K^*$, sigue por el algoritmo de la división que existe un único $q_0 = q_0(X_1, \ldots, X_{r-1}) \in S'$ y $R_0$ tal que

$$H_m = Pq_0 + R_0$$

y

$$\text{grd}_{X_r} R_0 = \text{grd}_{X_r}(H_m - q_0 P) < m.$$

Note para referencia futura que

$$q_0(0,\ldots,0) = \begin{cases} = 0, \ siH_m(0,\ldots,0,X_r) = 0 \\ \neq 0, \ siH_m(0,\ldots,0,X_r) \neq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Es claro que dir$(q_0) \geq 0$ y que dir$(R_0) \geq 1$

Siendo el coeficiente lider $c$ de $P$ en $X_r$ invertible, y viendo a $P$ como polinomio en $K[X_1,\ldots,X_{r-1}][X_r]$. Para $H_{m+1} - q_0 F_{m+1}$ y $P$ por el algoritmo de la división, existe un único polinomio $q_1 \in K[X_1,\ldots,X_{r-1}][X_r]$ y $R_1$, tal que

$$H_{m+1} - q_0 F_{m+1} = q_1 P + R_1$$

y

$$\text{grd}_{X_r} R_1 = \text{grd}_{X_r}(H_{m+1} - q_0 F_{m+1} - q_1 P) < m.$$

Es claro que dir$(q_1) \geq 1$, pues caso contrario, la desigualdad arriba seria falsa. De alli se tiene que dir$(R_1) \geq 2$.

Por el mismo argumento usado anteriormente, para $H_{m+2} - q_0 F_{m+2} - q_1 F_{m+1}$ y $P$ existe un único polinomio $q_2 \in K[X_1,\ldots,X_{r-1}][X_r]$ y $R_2$, tal que

$$H_{m+2} - q_0 F_{m+2} - q_1 F_{m+1} = P q_2 + R_2$$

y

$$\text{grd}_{X_r} R_2 = \text{grd}_{X_r}(H_{m+2} - q_0 F_{m+2} - q_1 F_{m+1} - q_2 P) < m.$$

Es claro que dir$(q_2) \geq 2$, pues caso contrario la desigualdad arriba seria falsa. De alli tenemos que dir$(R_2) \geq 3$. Asi, construimos las sucesiones $q_0, q_1, \ldots$ y $R_0, R_1, \ldots$, de modo que

$$H - F(q_0 + q_1 + \cdots) = R_0 + R_1 + \cdots,$$

y por tanto

$$G = F(q_0 + q_1 + \cdots) + R_{-1} + R_0 + R_1 + \cdots,$$

y el resultado sigue poniendo $Q = q_0 + q_1 + \cdots$ y $R = R_{-1} + R_0 + R_1 + \cdots$.

$\square$

Note que la demostración que dimos al teorema de la división es constructiva, permitiendo construir las series $Q$ y $R$ hasta una orden deseada.

**TEOREMA 2.4 (TEOREMA DE PREPARACION DE WEIERSTRASS)** *Sea dada una serie $F \in S$, regular con relación a $X_r$ de orden $m$. Entonces existen $U \in S$ invertible y $A_1, \ldots, A_m$, con dir$(A_i) \geq 1$, para $i = 1, \ldots, m$, univocamente determinados por $S$, tal que*

$$FU = X_r^m + A_1 X_r^{m-1} + A_2 X_r^{m-2} + \cdots + A_m.$$

*Ademas, si $F$ es regular en $X_r$, es decir , $m =$ dir$(F)$, entonces dir$(A_i) \geq i$, para $i = 1, \ldots, m$.*

**Demostración.** La demostración de la existencia sigue del teorema de la división, tomando $G = X_r^m$, $U = Q$ y $A_1 X_r^{m-1} + A_2 X_r^{m-2} + \cdots + A_m = -R$. El hecho de ser $U$ invertible sigue de 2.2 pues en este caso $q_0 \neq 0$. Como $X_r^m$ divide $F(0, \ldots, 0, X_r)$, debemos tener $A(0, \ldots, 0) = \cdots = A_m(0, \ldots, 0) = 0$.

Finalmente, si $F$ es regular en $X_r$, entonces

$$\mathrm{dir}(X_r^m + A_1 X_r^{m-1} + A_2 X_r^{m-2} + \cdots + A_m) = \mathrm{dir}(F.U) = \mathrm{dir}(F) = m,$$

sigue que $\mathrm{dir}(A_i) \geq i$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

La unicidade sigue inmediatamente de la unicidad del teorema de la división.

□

**COROLARIO 2.5 (TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLICITA)** *Sea $F$ un elemento de $S$ tal que $F(0, \ldots, 0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial X_r}(0, \ldots, 0) \neq 0$. Entonces existe*

$$\phi(X_1, \ldots, X_{r-1}) \in S',\ \phi(0, \ldots, 0) = 0,$$

*tal que*

$$F(X_1, \ldots, X_{r-1}, \phi(X_1, \ldots, X_{r-1})) = 0$$

*como elemento de $S'$.*

**Demostración.** La condición

$$\frac{\partial F}{\partial X_r}(0, \ldots, 0) \neq 0,$$

equivale afirmar que $F$ es regular en $X_r$ y de directo 1, luego por el teorema de preparación de Weierstrass, existe una unidad $U \in S$ tal que

$$FU = X_r + A_1,$$

con $A_1 \in S'$ y $A_1(0, \ldots, 0) = 0$. El resultado sigue ahora tomando $\phi(X_1, \ldots, X_{r-1}) = -A_1$ y observando que $U(0, \ldots, 0) \neq 0$.

$\square$

La condición de $F$ ser regular no es tan restrictiva como parece a primera vista. A continuación mostraremos, admitiendo $K$ infinito, que con un cambio lineal de coordenadas, podemos transformar una colección finita de series de potencias en $S$ en series regulares en una de las indeterminadas, escojida arbitrariamente. Caso $K$ sea finito, no se puede garantizar la existencia del cambio lineal de coordenadas, mas es siempre posible encontrar un $K$-automorfismo de $S$ que transforma una colección finita de series de potencias en $S$ en series regulares en una de las indeterminadas.

**LEMA 2.6** *Sea $K$ un cuerpo infinito. Dada una familia finita $\mathcal{F}$ de polinomios homogeneos no nulos, $K[Y_1, \ldots, Y_r]$, existe una transformación lineal $(Y_1, \ldots, Y_r) = T(X_1, \ldots, X_r)$, definida por*

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

*Con los $\alpha_i \in K$ y $\alpha_r \neq 0$, tal que para toda $F \in \mathcal{F}$, de grado $n$, existe $c_F \in K^*$ tal que*

$$F(T(X_1, \ldots, X_r)) = c_F X_r^n + \text{terminos de grado menor en} X_r.$$

**Demostración.** Como $\mathcal{F}$ es finito y $K$ es infinito, existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in K^r$ tal que

$$F(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq 0, \forall F \in \mathcal{F}.$$

usando la transformación indicada en 2.3, para los valores arriba de $\alpha_i$, $i = 1, \ldots, r$, tenemos que

$$Y_1^{m_1} \cdots Y_r^{m_r} = (X_1 + \alpha_1 X_r)^{m_1} \cdots (X_{r-1} + \alpha_{r-1} X_r)^{m_{r-1}} (\alpha_r X_r)^{m_r}$$

$$= \alpha_1^{m_1} \cdots \alpha_r^{m_r} X_r^{m_1 + \cdots + m_r} + \text{terminos de grado menor en } X_r.$$

Luego para cada $F \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$F(T(X_1, \ldots, X_r)) = F(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) X_r^n + \text{ terminos de grado menor en} X_r.$$

$\square$

Obtenemos inmediatamente de esto el siguiente corolário:

**COROLARIO 2.7** *Sea $K$ un cuerpo infinito. Dada una familia finita $\mathcal{F}$ de elementos no nulos, en $S = K[[X_1, \ldots, X_r]]$, existe un cambio lineal de coordenadas en $S$ de modo que todos los elementos de $\mathcal{F}$, en estas nuevas coordenadas, sean regulares en la última indeterminada.*

Con el auxilio del corolario arriba, obtenemos el siguiente corolario del teorema de preparación de Weierstrass.

**COROLARIO 2.8** *Sea $F \in S \setminus \{0\}$ de directo $n$. Existen un $K$-automorfismo $T$ de $S$, una unidad $U \in S$ y $A_1, \ldots, A_n \in S'$ tal que dir$(A_i) \geq i$, para $i = 1, \ldots, n$ y*

$$T(F).U = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \cdots + A_n.$$

El polinomio $X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + A_2 X_r^{n-2} \cdots + A_n$ asociado a $F$, obtenido despues de un cambio lineal eventual de coordenadas en $F$, será considerada una preparación para el estudio de $F$, pues estudiar un polinomio es bien mas simple que una serie. Mas generalmente, dado un número finito de series no invertibles en $S$, vimos arriba que existe un cambio de coordenadas que permite preparar simultaneamente estas series.

## 2.2. Factorización de Series de Potencias

En esta sección estudiaremos las propiedades de factorización en el anillo $S$.

**Definición 2.9** *Un* ***pseudo polinomio en*** $X_r$, *es una serie de potencias en $S$ de la forma*

$$P(X_1, \ldots, X_r) = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \cdots + A_n \in S'[X_r]$$

*tal que $n \geq 1$ y dir$(A_i) \geq 1$, para $i = 1, \ldots, n$.*

*Un* ***polinomio de Weierstrass en*** $X_r$, *es una serie de potencias en $S$ de la forma*

$$P(X_1, \ldots, X_r) = X_r^n + A_1 X_r^{n-1} + \cdots + A_n \in S'[X_r]$$

*tal que $n \geq 1$ y dir$(A_i) \geq i$, para $i = 1, \ldots, n$.*

**LEMA 2.10** *Sean $F_1, \ldots, F_s$ polinomios mónicos en $S'[X_r]$. Entonces $F_1 \ldots F_s$ es un pseudo polinomio (resp. polinomio de Weierstrass), si solamente si, cada $F_i$ $i = 1, \ldots, s$, es un pseudo polinomio (resp. polinomio de Weierstrass).*

**Demostración.** Basta probar el resultado para $s = 2.$ Sean $F_1 = X_r^m + A_1X_r^{m-1} + \cdots A_m$ y $F_2 = X_r^n + B_1X_r^{n-1} + \cdots + B_n,$ luego

$$F_1F_2 = X_r^{m+n}+(A_1+B_1)X_r^{m+n-1}+\cdots+(A_i+A_{i-1}B_i+\cdots+A_1B_{i-1}+B_i)X_r^{m+n-i}+\cdots$$

Si $F_1$ y $F_2$ son pseudo polinomio (resp. de Weierstrass), entonces

$$\text{dir}(A_i + A_{i-1}B_1 + \cdots + A_1B_{i-1} + B_i) \geq 1(\text{resp. } \geq i),$$

lo que prueba que $F_1F_2$ es un pseudo polinomio(resp. polinomio de Weierstrass).

Reciprocamente, suponga que $F_1F_2$ sea un pseudo polinomio(resp. de Weierstrass ).Luego

$$F_1F_2 = X_r^{m+n} + C_1X_r^{m+n-1} + \cdots + C_{m+n},$$

con dir$(C_i) \geq 1$ sigue

$$X_r^{m+n} = (X_r^m + A_1(0)X_r^{m-1} + \cdots + A_m(0))(X_r^n + B_1(0)X_r^{n-1} + \cdots + B_n(0)), \tag{2.4}$$

lo que claramente solo es posible si $A_i(0) = B_j(0) = 0,\ \forall i, j$ y por tanto $F_1$ y $F_2$ son pseudo polinomios.

Si ademas $F_1F_2$ es de Weierstrass, tenemos de 2.4 que

$$\text{dir}(F_1) + \text{dir}(F_2) = \text{dir}(F_1F_2) = \text{dir}((F_1F_2)(0, \ldots, 0, X_r)) = m + n.$$

Como dir$(F_1) \leq m$, dir$(F_2) \leq n,$ sigue de la igualdad arriba que dir$(F_1) = m$ y dir$(F_2) = n.$ Esto en particular, termina que $F_1$ y $F_2$ son de Weierstrass pues caso contrario, dir$(F_1) < m$ o dir$(F_2) < n.$

$\square$

**LEMA 2.11** *Sea $F \in S'[X_r]$ un pseudo polinomio. Entonces $F$ es reducible en $S,$ si solamente si, $F$ es reducible en $S'[X_r]$*

**Demostración.** Supongamos $F$ reducible en $S,$ luego existen $F_1, F_2$ en $S,$ no unidad tal que

$$F = F_1F_2.$$

Como $F_1F_2$ es un pseudo polinomio, el es regular en una cierta orden con respecto a $X_r,$ luego por e lema 2.2, tenemos que $F_1$ y $F_2$ son regulares de determinadas órdenes mayores o iguales a 1.

Por el teorema de preparación de Weierstrass, existen unidades $U_1, U_2 \in S$ tal que $H_1 = F_1U_1$ e $H_2 = U_2F_2$ son pseudo polinomios de grado mayores o iguales a 1. Poniendo $U = U_1U_2,$ tenemos que $U$ es invertible y

$$FU = (F_1U_1)(F_2U_2) = H_1H_2.$$

Como $H_1$ y $H_2$ son pseu polinomios, se tienen por el lema 2.10 que $FU$ es un pseudo polinomio. Como tambien tenemos $1.F = F$, donde $F$ es pseudo polinomio, por la unicidad del teorema de preparación de Weierstrass sigue que $F = H_1H_2$, esto es $F$ es reducible en $S'[X_r]$.

Recíprocamente, supongamos que $F \in S'[X_r]$ sea un pseudo polinomio reducible en este anillo y de grado $d$. Luego existen $H_1$ y $H_2$, mónicos de grados respectivamente $m$ y $n$, en $S'[X_r]$ tal que

$$F = H_1H_2.$$

con $m, n \geq 1$ y $m + n = d$. Sigue por el lema 2.10 que $H_1$ y $H_2$ son pseudo polinomios de grados mayores o iguales a 1. Luego ellos no son invertibles en $S$ y por tanto $F$ es reducible en $S$.

$\square$

**TEOREMA 2.12** *El anillo $S$ es un dominio de factorización única.*

**Demostración.** Probaremos primero que $S'[X_r]$ es un anillo euclidiano. En efecto, para $f \in S'[X_r]$ la funcion $\text{grd}_{X_r}(f)$ tiene las siguientes propiedades:

1. Para $\text{grd}_{X_r}(f) \leq \text{grd}_{X_r}(fg)$
2. Para $f, g \in S'[X_r]$ existe $T, R \in S'[X_r]$ tal que $f = TG + R$, tal que $\text{grd}_{X_r}(R) < \text{grd}_{X_r}(G)$

Que son ciertas por su definición y por el teorema de la división y asi $S'[X_r]$ es un anillo euclidiano. Como consecuencia inmediata $S'[X_r]$ es un dominio de factorización única.

Sea $f \in S$, si $f$ es unidad no hay nada que probar. Si $f$ no es unidad, luego por el teorema de preparación de Weierstrass, existe una unidad $v$, tal que $fv$ es un pseudo polinomio en $S'[X_r]$, luego el se descompone en términos irreducibles en $S'[X_r]$ y esta descomposición es única. Consecuentemente por el lema 2.11 $f$ se descompone en términos irreducibles en $S$, probando asi el teorema.

$\square$

**COROLARIO 2.13** *Suponga que $F \in S'[X_r]$ sea un polinomio de Weierstrass con respecto a la indeterminada $X_r$. Si $F = F_1 \cdots F_s$ es la descomposición de $F$ en factores irreducibles en $S$, entonces podemos escojer una descomposición en que cada $F_i$ es un polinomio de Weierstrass.*

**Demostración.** De hecho, por el teorema 2.12 y por el lema 2.11 podemos obtener una descomposición

$$F = F_1 \cdots F_s,$$

donde cada $F_i$ es irreducible en $S'[X_r]$. Como $F$ es mónico, podemos suponer que los $F_i$ son mónicos. Luego por el lema 2.10 cada $F_i$ es un polinomio de Weierstrass.

$\square$

# Capítulo 3

# CURVAS PLANAS

Varios de los resultados que estableceremos en este capítulo y en los capítulos subsiguientes son válidos en cuerpos algebraicamente cerrados de caracteristica arbitraria. Como usaremos con frecuencia el teorema de Newton-Puiseux, válido solamente en característica cero, haremos esta restricción en lo restante de este trabajo. Por tanto, a partir de este momento vamos asumir que $K$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

## 3.1. Curvas Algebróides Planas

**Definición 3.1** *Una **curva algebróide plana** es una clase de equivalencia de elementos no nulos del ideal maximal $\mathcal{M}$ de $K[[X,Y]]$ módulo la relación de asociado.*

*Si $f \in \mathcal{M} \setminus \{0\} \subset K[[X,Y]]$, denotaremos por $(f)$ la curva algebroide determinada por $f$ es decir*

$$(f) = \big\{uf; \text{u es una unidad de} K[[X,Y]]\big\}.$$

*Por tanto, $(f) = (g)$, si y solamente si, existe $u \in K[[X,Y]]$ invertible tal que $f = u.g$.*

*Diremos que $f(X,Y) = 0$**, es la ecuación de la curva** $(f)$. El punto $P : X = Y = 0$ se le llamará **el origen de** $(f)$.*

**Definición 3.2** *Una curva algebroide plana $(f)$ diremos que **es irreducible**, si la serie $f$ es irreducible en $K[[X,Y]]$, caso contrario, diremos que la curva **es reducible**.*

*Sea $(f)$ una curva algebroide plana reducible y considere la descomposición de $f$ en factores irreducibles en $K[[X,Y]]$,*

$$f = f_1 f_2 \cdots f_h.$$

*Las curvas algebroides planas*

$$(f_j) : f_j(X,Y) = 0 \text{ para } j = 1, \ldots, h$$

*arriba definidas son llamadas de* ***ramos de la curva*** $(f)$.

*La curva* $(f)$ *será dicha* ***reduzida*** *, si* $(f_i) \neq (f_j)$ *para* $i \neq j$, *o sea , siempre que* $f_i$ *y* $f_j$ *no son asociados si* $i \neq j$.

**Definición 3.3** *Sea* $F_m$ *la forma inicial de* $(f)$ *diremos que* $P$ *es un* $m$-***punto directo*** *de* $(f)$ *y denotamos* $m = dir_P(f)$. *Es cierto que*

$$dir_P(f) = \sum_{i=1}^{h} dir_P(f_i)$$

*Una curva algebroide plana* $(f)$
*textbf es regular si su origen* $P$ *es* simple *es decir* $dir_P(f) = 1$. *La curva será* singular *si* $dir_P(f) > 1$.

Muchas de las propiedades de una curva son preservadas por cambio de coordenadas en $K[[X,Y]]$, a travez de un $K$-automorfismo. Esto sirve de motivación para la próxima definición .

**Definición 3.4** *Dadas dos curvas algebroides planas* $(f)$ *y* $(g)$, *con* $f, g \in \mathcal{M} \setminus \{0\} \subset K[[X,Y]]$, *diremos que* ***ellas son equivalentes*** *, escribiendo* $(f) \approx (g)$, *si existir un* $K$-*automorfismo* $\phi$ *de* $K[[X,Y]]$ *tal que*

$$(\phi(f)) = g.$$

En otras palabras, $(f)$ y $(g)$ son equivalentes , si existieren un $K$-automorfismo $\phi$ y una unidad $u$ de $K[[X,Y]]$ tal que

$$\phi(f) = u.g.$$

El carácter reducible o irreducible de una curva, bien como su directo, entre muchas otras propiedades, se conservan por equivalencia de curvas.

Es un problema central en esta teoría y todavía en abierto, realizar la clasificación de las curvas algebroides planas módulo la relación de equivalencia $\approx$ definida arriba. Hasta el presente momento, no existe ningun algoritmo que permita decidir si dos curvas algebroides planas son o no equivalentes.

Para poder evaluar la dificultad de este problema, considere las siguientes curvas algebroides:

$$f = Y^2 - X^3,$$

$$g = (-x^3 - 6X^2 - 12X - 8)Y^3 + (-3X^3 - 12X^2 - 12X + 9)Y^2 +$$
$$(-3X^3 - 6X^2 - 12X)Y - X^3 + 4X^2.$$

¿Que podemos decir a propósito de la equivalencia o no de estas curvas? Es dificil responder a esta pregunta a priori pues las dos series tienen ecuaciones bien diferentes. La única cosa que conguimos decir de inmediato es que ellas poseen el mismo directo. Pues bien , la serie $g$ fue construida de modo que

$$\Phi(f) = g,$$

donde

$$\Phi(X, Y) = (X + 2Y + XY, 2X - 3Y),$$

y por tanto $f \approx g$.

## 3.2. Teorema de Newton-Puiseux

El teorema de esta sección, en el caso de los cuerpos numéricos, fue utilizado por Newton para estudiar puntos singulares de curvas, sin la preocupación con problemas de convergencia. En 1850, Puisuex en un largo trabajo, recupera y profundiza el método de Newton en el contexto de funciones de variable compleja, demostrando asi la convergencia de las series envolvidas. El punto de vista que adoptamos es de Newton, donde no hay preocupación con los casos de convergencia, pues nos colocamos en el cuadro de la geometría formal.

Dada una curva algebroide $(f)$ de directo $n$, por el teorema de preparación de Weierstrass, sabemos que ella es equivalente a una curva algebroide definida por un polinomio de Weierstrass

$$P = P(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X),$$

donde $a_i(X) \in K[[X]]$ y dir$(a_i(X)) \geq i$, para $i = 1, \ldots, n$

Denotamos por $K((X))$ al cuerpo de fracciones de $K[[X]]$. Por tanto para estudiar las propiedades de la curva $(f)$, es de gran utilidad conocer las raices del polinomio $P$ en el cierre algebrico de $K((X))$. Esta será la estrategia que adoptaremos para estudiar las curvas algebraicas planas, y para esto caracterizamos en esta sección el cierre algebraico $\overline{K((X))}$ de $K((X))$.

Es claro que $K((X))$ es el conjunto de las series formales de Laurent con coeficientes en $K$, osea las series formales del tipo.

$$b_{-l}X^{-l}+b_{-l+1}X^{-l+1}+\cdots+b_{-1}X^{-1}+b_0+b_1X+b_2X^2+\cdots .$$

Ademas $\overline{K((X))}$ debe contener las raices de la ecuación $Y^n-X=0,$ para todo $n$ entero positivo. Luego debe contener elementos de la forma $X^{\frac{1}{n}}$, sujetos a las relaciones de tipo.

1. $X^{\frac{1}{1}}=X,$
2. $(X^{\frac{s}{rn}})^r=X^{\frac{s}{n}},\ \forall n,s\in\mathbb{Z},\ n,r>0.$

Asi, obtenemos extensiones $K((X^{\frac{1}{n}}))$ de $K((X))$, que mostraremos en seguida seran galoisiana finita.

**Definición** Sea $K\backslash k$ una extensión de cuerpos. Si el grupo

$$G(K\backslash k)=\{\sigma:\ K\to K,\ \sigma \text{ es un K}-\text{automorfismo}\}$$

es finito y el cuerpo fijo de $G(K\backslash k)$ es $k,$ o sea,

$$\{a\in K\mid \sigma(a)=a \text{ para todo } \sigma\in \text{G(K\textbackslash k)}\}=k,$$

entonces esta extensión es llamada *galoisiana* y $G(K\backslash k)$ es su *grupo de Galois*.

Denotamos por $\mu_n$ el grupo multiplicativo de las raices $n$-ésima de la unidad en $K,$ que es un grupo cíclico de orden $n$, por ser un subgrupo del grupo multiplicativo de un cuerpo.

**LEMA 3.5** *La extensión $K((X^{\frac{1}{n}}))/k((X))$ es galoisiana con grupo de Galois isomorfo al grupo $\mu_n$*

**Demostración.** Escriba $G=G(K((X^{\frac{1}{n}}))/k((X))),$ y sea $\sigma\in G,$ entonces

$$(\sigma(X^{\frac{1}{n}}))^n=\sigma((X^{\frac{1}{n}})^n)=\sigma(X)=X. \tag{3.1}$$

Como $\sigma(X^{\frac{1}{n}})\in K((X^{\frac{1}{n}}))$ podemos escribir,

$$\sigma(X^{\frac{1}{n}})=\sum_{i=i_0}^{\infty}b_iX^{\frac{i}{n}},$$

donde $b_{i_0}\neq 0.$ sigue de 3.1 que $X=(\sigma(X^{\frac{1}{n}}))^n=(b_{i_0}X^{\frac{i_0}{n}}+b_{i_0+1}X^{\frac{i_0+1}{n}}+\cdots)^n,$ luego $i_0=1,$ $b_1^n=1$ y $b_i=0$ para todo $i>1.$ Denotando $b_1$ por $b_\sigma,$ se tiene

$$\sigma(X^{\frac{1}{n}})=b_\sigma X^{\frac{1}{n}},$$

donde $b_\sigma \in \mu_n$.

La aplicación

$$\begin{array}{rccc} h: & G & \longrightarrow & \mu_n \\ & \sigma & \to & h(\sigma) = b_\sigma \end{array}$$

es un isomorfismo. En efecto, si $\rho, \sigma \in G$, entonces

$$b_{\rho\circ\sigma} X^{\frac{1}{n}} = \rho \circ \sigma(X^{\frac{1}{n}}) = \rho(\sigma(X^{\frac{1}{n}})) = \rho(b_\sigma X^{\frac{1}{n}}) = b_\sigma \rho(X^{\frac{1}{n}}) = b_\rho b_\sigma X^{\frac{1}{n}},$$

luego

$$h(\rho \circ \sigma) = b_{\rho\circ\sigma} = b_\rho b_\sigma = h(\rho)h(\sigma),$$

por tanto $h$ es un homeomorfismo.

Suponga ahora que $h(\sigma) = h(\rho)$, sigue que $b_\sigma = b_\rho$. Como

$$\sigma(\sum b_i X^{\frac{i}{n}}) = \sum b_i b_\sigma^i X^{\frac{i}{n}} = \sum b_i b_\rho^i X^{\frac{i}{n}} = \rho(\sum b_i X^{\frac{i}{n}}),$$

sigue que $\sigma = \rho$ y por tanto $h$ es inyectivo.

Sea $b \in \mu_n$, sigue por la definicion de los $\sigma$ que

$$bX^{\frac{1}{n}} = \sigma(X^{\frac{1}{n}}),$$

para algun $\sigma \in G$. Luego $h(\sigma) = b$, y por tanto $h$ es sobreyectivo. Consecuentemente $G$ es isomorfo a $\mu_n$.

Provemos ahora que el cuerpo fijo de $G$ es precisamente $K((X))$. Suponga que $\sum_{i\geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}} \in K((X^{\frac{1}{n}}))$ sea invariante por la acción de los elementos de $G$, esto es para todos $\zeta \in \mu_n$ se tiene que

$$\sum_{i\geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}} = \sum_{i\geq i_0} b_i \zeta^i X^{\frac{i}{n}}.$$

Luego $b_i = b_i\zeta^i$ para todo $i \geq i_0$. Si $\zeta$ es raiz primitiva de $\mu_n$, entonces $b_i = 0$ para todo $i$ no divisible por $n$. Luego tenemos que

$$\sum_{i\geq i_0} b_i X^{\frac{i}{n}} = \sum_{kn\geq i_0} b_{kn} X^{\frac{kn}{n}} \in K((X)),$$

lo que termina la prueba.

$\square$

En la demostración del lema arriba, tuvimos oportunidad de describir la acción de $\mu_n = G(K((X^{\frac{1}{n}}))/k((X)))$ sobre $K((X^{\frac{1}{n}}))$. Para comodidad del lector, destacamos abajo la acción.

Sea

$$\varphi(X^{\frac{1}{n}}) = b_{-r}X^{\frac{-r}{n}} + \cdots + b_{-1}X^{\frac{-1}{n}} + b_0 + b_1X^{\frac{1}{n}} \cdots + b_sX^{\frac{s}{n}} + \cdots \in K((X^{\frac{1}{n}})),$$

entonces $\rho \in \mu_n$ actua sobre $\varphi(X^{\frac{1}{n}})$ del siguiente modo:

$$\rho * \varphi(X^{\frac{1}{n}}) = \varphi(\rho X^{\frac{1}{n}}) =$$

$$b_{-r}\rho^{-r}X^{\frac{-r}{n}} + \cdots + b_{-1}\rho^{-1}X^{\frac{-1}{n}} + b_0 + b_1X^{\frac{1}{n}} + \cdots + b_s\rho^sX^{\frac{s}{n}} + \cdots ,$$

El lema arriba tambien nos garantiza que los cuerpos $K((X^{\frac{1}{n}}))$ estan todos contenidos en $\overline{K((X))}$. Podemos entonces definir

$$K((X))^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} K((X^{\frac{1}{n}})) \subset \overline{K((X))}$$

Es claro que los elementos de $K((X))^*$ pueden ser escritos en la forma

$$\alpha = b_1X^{\frac{p_1}{q_1}} + b_2X^{\frac{p_2}{q_2}} + \cdots , \tag{3.2}$$

con $b_1, b_2, \cdots \in K$, $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, $q_i > 0$, para todo $i$ y $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2} < \ldots ,$ donde el conjunto

$$\{\frac{p_i}{q_i},\ i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

admite un denominador comun.

**Definición 3.6** *En las condiciones anteriores en la serie 3.2, si $b_1 \neq 0$, entonces el número racional $\frac{p_1}{q_1}$ es llamado de **orden en** $X$ **de** $\alpha$ y será denotado por ord$(\alpha)$.*

Es claro que dados $\alpha, \beta \in K((X))^*$ tenemos que

1. ord$(\alpha\beta) =$ ord$(\alpha) +$ orden$(\beta)$,
2. ord$(\alpha \pm \beta) \geq \text{mín}\{$ord$(\alpha),$ ord$\beta\}$, con igualdad si ord$(\alpha) \neq$ ord$(\beta)$.

Por comodidad, definimos ord$(0) = \infty$.

Definimos tambien

$$K[[X]]^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} K[[X^{\frac{1}{n}}]].$$

Portanto todo elemento $\alpha$ de $K[[X]]^*$ es de la forma 3.2 con ord$(\alpha) \geq 0$.

**LEMA 3.7** $K((X))^*$ *es un subcuerpo de* $\overline{K((X))}$.

**Demostración.** Si $f, g \in K((X))^*$, entonces existen $r, s \in \mathbb{N}$ tal que $f \in K((X^{\frac{1}{r}}))$ y $g \in K((X^{\frac{1}{s}}))$. Como $K((X^{\frac{1}{r}})) \subset K((X^{\frac{1}{rs}}))$ y $K((X^{\frac{1}{s}})) \subset K((X^{\frac{1}{rs}}))$, tenemos que $f + g$, $fg$ y $\frac{f}{g}$ (si $g \neq 0$) estan en $K((X^{\frac{1}{rs}})) \subset K((X))^*$.

$\square$

**TEOREMA 3.8 (TEOREMA DE NEWTÓN-PUISEUX)** *Se tiene que* $\overline{K((X)))} = K((X))^*$

**Demostración.** Como todo elemento de $\alpha \in K((X))^*$ es de la forma 3.2, sigue que el elemento $b_j X^{\frac{p_j}{q_j}} \in K((X))^*$ algébrico sobre $K((X))$ y consecuentemente $\alpha$ es algébrico sobre $K((X))$.

Basta probar que $K((X))^*$ es algebraicamente cerrado. Para esto basta mostrar que todo polinomio en $K((X))^*[Y]$ de grado mayor o igual a 2 es reducible. Sea

$$p(X,Y) = a_0(X)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) \in K((X))^*[Y],$$

con $n \geq 2$ y $a_0(X) \neq 0$. Podemos, sin perdida de generalidad, suponer que $a_0(X) = 1$. Usaremos el cambio de variable para desembarazar $p(X,Y)$ del termino de grado $n-1$. Esto es hecho considerando un $K$-isomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & K[[X,Y]] & \longrightarrow & K[[X,Z]] \\ & X & \rightarrow & X \\ & Y & \rightarrow & Z - n^{-1}a_1(X) \end{array}$$

y tomando

$$q(X,Z) = \Phi(p(X,Y)) = p(X, Z - n^{-1}a_1(X))) = Z^n + b_2(X)Z^{n-2} + \cdots + b_n(X),$$

donde $b_i(X) \in K((X))^*$, para $i = 2, \cdots, n$.

Si $b_i(X) = 0$, para todo $i = 2, \ldots, n$, sigue que $q$ es reducible en $K((X))^*[Z]$, y por tanto $p$ es reducible en $K((X))^*[Y]$.

Suponga ahora que existe un índice $i$ tal que $b_i(X) \neq 0$. El próximo paso será efectuar una otra tranformación para transformar el polinomio $q(X,Z)$ en un elemento de $K[[W]]^*[Z]$ para algun $W$. Denotando por $u_i$ el orden de $b_i(X)$, suponga

$$u = \text{mín}\{\frac{u_i}{i} / 2 \leq i \leq n\}.$$

Sea $r$, tal que $u = \frac{u_r}{r}$ y considere la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & K((X))^*[Z] & \longrightarrow & K((W))^*[Z] \\ & f(X,Z) & \rightarrow & f(W^r, ZW^{u_r}) \end{array}$$

Es fácil de verificar que $\Psi$ es un isomorfismo de $K$-álgebras y que preserva los grados como polinomio en $Z$. Sea

$$h(W,Z) = W^{-nu_r}\Psi(q(X,Z)) = W^{-nu_r}q(W^r, ZW^{u_r}) = Z^n + \sum_{i=2}^{n} c_i(W)Z^{n-i}. \tag{3.3}$$

donde $c_i(W) = b_i(W^r)W^{-iu_r}$. Tenemos entonces que ord$(c_i) = ru_i - iu_r \geq 0$, con igualdad para $i = r$. Asi, $c_r(0) \neq 0$ y $c_i(W) \in K[[W]]^*$, $2 \leq i \leq n$. Luego existe un entero positivo $k$ tal que

$$h(W^k, Z) = Z^n + \sum_{i=2}^{n} c_i(W^k)Z^{n-i} \in K[[W]][Z].$$

Como $c_r(0) \neq 0$, y la caracteristica de $K$ es cero, tenemos que

$$h(0,Z) = Z^n + c_r(0)Z^{n-r}\overline{h_1}(Z)\overline{h_2}(Z),$$

luego por el Lema de Hensel, existen $h_1(W,Z)$, $h_2(W,Z) \in K[[W]][Z]$ de grados mayores o iguales a uno en $Z$, tal que

$$h(W^k, Z) = h_1(W,Z)h_2(W,Z).$$

De esto y de 3.3 sigue que

$$\Psi(q(X,Z)) = W^{nu_r}h(W,Z) = W^{nu_r}h_1(W^{\frac{1}{k}}, Z)h_2(W^{\frac{1}{k}}, Z),$$

y por tanto

$$q(X,Z) = \Psi^{-1}(W^{nu_r}h_1(W^{\frac{1}{k}}, Z)h_2(W^{\frac{1}{k}}, Z)) =$$
$$X^{\frac{nu_r}{r}}\Psi^{-1}(h_1(W^{\frac{1}{k}}, Z))\Psi^{-1}(h_2(W^{\frac{1}{k}}, Z)).$$

Consecuentemente, $q(X,Z)$ es reducible en $K((X))^*[Z]$, esto es existen $q_1(X,Z)$ y $q_2(X,Z)$ en $K[[X,Z]]$, tal que $q(X,Z) = q_1(X,Z)q_2(X,Z)$. Luego

$$p(X,Y) = \Phi^{-1}(q(X,Z)) = (\Phi^{-1}(q_1(X,Z)))(\Phi^{-1}(q_2(X,Z))),$$

y por tanto reducible en $K((X))^*(Y)$.

$\square$

El teorema arriba no es verdadero en característica positiva. En este caso se sabe que $K((X))^*$ es un subcuerpo própio de $\overline{K((X))}$.

**Observación i)** Sea $p(X,Y)=\sum_{i=0}^{n} a_i(X)Y^{n-i} \in K((X))^*[Y]$, con $a_0(X) \neq 0$. Suponga que $\text{ord}(a_i(X)-a_0(X)) \geq 1$, para $i=1,\ldots,n$. Si $\alpha \in K((X))^*$ es una raiz de $p(X,Y)$, entonces $\text{ord}(\alpha) > 0$. En particular, esto es siempre verificada cuando $p(X,Y)$ es un pseudo polinomio en $K[[X]][Y]$.

En efecto,

$$\text{ord}(\frac{a_i(X)}{a_0(X)}) = \text{ord}(a_i(X)) - \text{ord}(a_0(X)) \geq 1,$$

para todo $i$. Ademas

$$-\alpha^n = \frac{a_n(X)}{a_0(X)} + \frac{a_{n-1}(X)}{a_0(X)}\alpha + \cdots + \frac{a_1(X)}{a_0(X)}\alpha^{n-1},$$

sigue que, para algun $i_0 = 1,\ldots,n$,

$$n\text{ord}(\alpha) \geq \min_i\{\text{ord}(\frac{a_i(X)}{a_0(X)}\alpha^{n-i})\} = \min_i\{\text{ord}(\frac{a_i(X)}{a_0(X)}) + (n-i)\text{ord}(\alpha)\} =$$

$$= \text{ord}(\frac{a_{i_0}(X)}{a_0(X)}) + (n-i_0)\text{ord}(\alpha) \geq 1 + (n-i_0)\text{ord}(\alpha).$$

Luego $i_0\text{ord}(\alpha) \geq 1$ y por tanto $\text{ord}(\alpha) \geq \frac{1}{i_0} > 0$.

Si impusieramos que

$$\text{ord}(a_i(X)) - \text{ord}(a_0(X)) \geq i, \text{ para } i = 1,\ldots,n,$$

entonces toda raiz $\alpha \in K((X))^*$ de $p(X,Y)$ es tal que $\text{ord}(\alpha) \geq 1$. Esto siempre ocurre cuando $p(X,Y)$ es un polinomio de Weierstrass con cono tangente $(Y^n)$.

## 3.3. Extensión del Cuerpo de las Series de Laurent

**LEMA 3.9** *Sea* $\alpha \in K((X))^* \setminus K((X))$ *y sea* $n = \min\{q/\alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\}$. *Escriba* $\alpha = \varphi(X^{\frac{i}{n}})$. *Si* $\xi, \rho \in \mu_n$, *con* $\xi \neq \rho$, *entonces* $\xi * \alpha \neq \rho * \alpha$.

**Demostración.** Se tiene que $n \geq 2$ pues $\alpha \notin K((X))$. Escriba

$$\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq i_0} b_i X^{\frac{1}{n}}$$

y suponga que $\varphi(\rho X^{\frac{1}{n}}) = \varphi(\xi X^{\frac{1}{n}})$. Entonces $\rho^i b_i = \xi^i b_i$ para todo $i$. Luego $\xi^i = \rho^i$ para todo $i$, con $b_i \neq 0$.

Sea $d$ el máximo común divisor de $n$ y de los $i$ tal que $b_i \neq 0$. Entonces $d = 1$, pues caso contrario, tendriamos $\alpha \in K((X^{\frac{1}{n'}}))$, donde $n' = \frac{n}{d} < n$, lo que es un absurdo,

Sigue entonces que existen $b_{i_1} \neq 0, \ldots, b_{i_k} \neq 0$ y $v, v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}$ tal que $vn + v_1 i_1 + \cdots + v_k i_k = 1$, luego

$$\xi = (\xi^n)^v (\xi^{i_1})^{v_1} \cdots (\xi^{i_k})^{v_k} = (\rho^n)^v (\rho^{i_1})^{v_1} \cdots (\rho^{i_k})^{v_k} = \rho,$$

demostrando asi el lema.

$\square$

El próximo resultado nos describirá las extensiones algebraicas principales de $K((X))$, o sea los cuerpos $K((X))(\alpha)$, obtenidos por la adjunción a $K((X))$ de un elemento algébrico $\alpha$. En esta situación, de la teoria general de las extensiones de cuerpos, sabemos que

$$K((X))(\alpha) = K((X))[\alpha] = \{P(\alpha),\ P \in K((X))[Y]\}.$$

**TEOREMA 3.10** *Sea* $\alpha \in K((X))^* \backslash K((X))$ *y sea* $n = \text{mín}\{q \in \mathbb{N}/\alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\}$. *Escriba* $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}})$ *y defina* $\alpha_i = \xi^i * \alpha = \varphi(\xi^i X^{\frac{1}{n}})$, *donde* $\xi$ *es un generador de* $\mu_n$. *Se tiene que*

1. $K((X))[\alpha] = K((X^{\frac{1}{n}}))$.
2. *El polinomio mínimo de* $\alpha$ *sobre* $K((X))$ *tiene grado* $n$ *y es dado por*

$$g(X, Y) = \prod_{i=1}^{n} (Y - \alpha_i).$$

3. *Suponga que* $\alpha \in K[[X]]^*$ *con ord*$(\alpha) \geq 1$ *(respectivamente ord*$(\alpha) \geq 0$*), entonces* $g(X, Y) \in K[[X]][Y]$ *y es de Weierstrass (respectivamente, un pseudo polinomio ).*

**Demostración.**

1. Sea $G = G(K((X^{\frac{1}{n}}))/K((X)))$ y $G' = G(K((X^{\frac{1}{n}}))/K((X))[\alpha])$. Por el lema 3.9 se tiene que

$$G' = \{\rho \in G | \rho * \alpha = \alpha\} = \{1\},$$

donde $K((X^{\frac{1}{n}})) = K((X))[\alpha]$,

2. Como los $\alpha_i$ son los transformados de $\alpha$ por elementos de $G$, sigue que $g(X,Y) \in K((X))[Y]$ y como

   $$\text{grd}(g(X,Y)) = [G(K((X)))[\alpha] : K((X))] = |G(K((X)))[\alpha]/K((X))| = n,$$

   sigue que $g(X,Y)$ es irreducible en $K((X))[Y]$ y tiene grado $n$ y

   $$g(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i).$$

3. Si $S_j$, $j = 1,\ldots,n$, son los polinomios simétricos elementales, entonces los coeficientes de $g(X,Y)$ son dados por

   $$(-1)^j S_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in K[[X]]^* \cap K((X)) = K[[X]].$$

   Como ord$(\alpha) \geq 1$ (resp. ord$(\alpha) \geq 0$), tenemos para todo $j = 1,\ldots,n$ que

   $$\text{ord}((-1)^j S_j(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)) \geq j, (\text{resp. } \geq 0)$$

   por tanto, $g(X,Y) \in K[[X]][Y]$ y es de Weierstrass (resp. pseudo polinomio).

□

**COROLARIO 3.11** *Toda extensión algebraica finita de $K((X))$ es de la forma $K((X^{\frac{1}{n}}))$. para algun $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

**Demostración.** En efecto, como la característica de $K((X))$ es cero, sigue que toda extensión algebraica finita de $K((X))$ posee elemento primitivo y por tanto es de la forma $K((X))[\alpha]$. Luego el resultado sigue del teorema 3.10 item 1.

□

**COROLARIO 3.12** *Sea $f \in K((X))[Y]$ mónico e irreducible de grado $n \geq 1$, y sea $\alpha \in K((X))^*$ una raiz cualquiera de $f$.*

1. *Entonces* $\min\{q \in \mathbb{N} | \alpha \in K((X^{\frac{1}{q}}))\} = n$.

2. *Sean $\xi$ un generador de $\mu_n$, y $\alpha_i = \varphi(\xi^i X^{\frac{1}{n}})$, donde $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) \in K((X^{\frac{1}{n}}))$. Entonces*

   $$f(X,Y) = \prod_{i=1}^{n}(Y - \alpha_i).$$

3. *Suponga que* $f$ *sea un pseudo polinomio (resp. polinomio de Weierstrass) en* $K[[X]][Y]$*. Si* $Y = \alpha$ *es una raiz de* $f$ *en* $K((X))^*$*, entonces* $\alpha \in K[[X]]^*$ *y ord*$(\alpha) > 0$ *(resp. ord*$(\alpha) \geq 1$*).*

**Demostración.** Los iten 1. y 2. siguen del inmediatamente del teorema 3.10 mientras que 3. sigue de la observación i).

$\square$

**Observación ii)** Si $f(X,Y) \in K[[X,Y]]$ es un pseudo polinomio de grado $n$, por el corolario 3.11 , existe una extensión $K((X)))[\alpha]$ donde ella es resolvida, es decir existe

$$\varphi(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq 1} b_i X^{\frac{1}{n}} \in K[[X]]^*,$$

tal que $f(X, \varphi(X^{\frac{1}{n}})) = 0$. Diremos en este caso que

$$(f) = \begin{cases} X = T^n \\ Y = \sum_{i \geq 1} b_i T^i, \end{cases} \tag{3.4}$$

es una parametrización de $f(X,Y)$, pues $f(T^n, \varphi(T)) = 0$ en $K[[T]]$. Note que la condición de

$$\varphi(X^{\frac{1}{n}}) \in K[[X^{\frac{1}{n}}]],$$

donde

$$n = \text{mín}\{q \in \mathbb{N},\ \varphi(X^{\frac{1}{q}}) \in K((X^{\frac{1}{q}}))\},$$

implica que en 3.4 $n$ y los índices $i$ para los cuales $b_i \neq 0$, son primos entre si.

**Definición 3.13** *Una parametrización de* $f(X,Y)$ *como en 3.4 y con la propiedad arriba, será llamada de* parametrización primitiva.

Note tambien que obtenemos todas las raizes de $f(X,Y)$ en $K((X))^*$, tomando

$$\zeta^i * \varphi(X^{\frac{1}{n}}) = \varphi(\zeta^i X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq 1} \zeta^i b_i X^{\frac{i}{n}},\ \zeta \in \mu_n.$$

Existe un algoritmo, debido a Newtón, para determinar una parametrización como 3.4 de una curva algebroide $f$.

La relación entre la ecuación de una recta y su parametrización es muy compleja, como podemos ver en los ejemplos que siguen.

**Ejemplo 1** La curva dada por

$$f = Y^8 - 4X^3Y^6 - 8X^5Y^5 + (6X^6 - 26X^7)Y^4 + (-24X^9 + 16X^8)Y^3 + (36X^{10}$$

$-4X^9 - 20X^{11})Y^2 + (-8X^{11} + 16X^{12} - 8X^{13})Y + 21X^{14} + X^{12} + 6X^{13} - X^{15}$,

posee una parametrización

$$(f) = \begin{cases} X = T^8 \\ Y = T^{12} + T^{14} - T^{15}. \end{cases}$$

**Ejemplo 2**

La curva

$$(g) = (Y^3 - 9X^3Y - X^4),$$

posee una parametrización, cuyos términos hasta la potencia 11 de $T$ en $Y$ son dados abajo.

$$(g) = \begin{cases} X = T^3 \\ Y = T^4 + 3T^5 - 9T^7 + 27T^8 - 324T^{10} + 1215T^{11} + \cdots , \end{cases}$$

**Observación iii)** Como el anillo $K[[X]]$ es un domino de factorización única, siendo $K((X))$, su cuerpo de fracciones, tenemos que todo polinomio irreducible en $K[[X]][Y]$ es irreducible en $K((X))[Y]$.

En el caso particular en que $f \in K[[X,Y]]$, con $f(0,0) = 0$, deduciremos una condición necearia para su irreducibilidad de importancia geométrica fundamental.

**LEMA 3.14 (DE LA UNITANGENTE)** *Sea $f \in K[[X,Y]]$ con $f(0,0) = 0$ irreducible. Entonces la forma inicial de $f$ es del tipo*

$$F_m = (aX + bY)^m,$$

*con $a, b \in K$, no ambos nulos.*

**Demostración.** Si fuera necesario, después de un cambio lineal de coordenadas, lo que no afecta el tipo de cono tangente, por el Teorema de Preparación de Weierstrass podemos suponer que existe un polinomio de Weierstrass $p = p(X,Y)$ en $K[[X]][Y]$ de grado $n$, y un elemento unitario $u$ de $K[[X,Y]]$ tal que

$$up = f.$$

Como $f$ es irreducible, sigue que $p$ es irreducible en $K[[X,Y]]$, luego por el lema 2.11 tenemos que $p$ es irreducible en $K[[X]][Y]$, por tanto por la observación iii) $p$ es irreducible en $K((X))[Y]$, y por el corolario 3.12, sigue que

$$p(X,Y) = \prod_{k=1}^{n} (Y - \varphi(\zeta^k X^{\frac{1}{n}})),$$

donde $\varphi(X^{\frac{1}{n}}) \in K((X^{\frac{1}{n}}))$ y $\zeta$ es una raiz $n$-esima primitiva de la unidad.

Escribamos
$$\varphi(X^{\frac{1}{n}}) = b_r X^{\frac{r}{n}} + b_{r+1} X^{\frac{r+1}{n}} + \cdots ,$$
con $b_r \neq 0$. Como $p$ es un polinomio de Weierstrass, por la observación i) tenemos que $\mathrm{ord}(\varphi(X^{\frac{1}{n}})) \geq 1$, y por tanto $r \geq n$. Siendo la forma inicial de $p$ la forma inicial del polinomio,

$$q(X,Y) = \prod_{k=1}^{n}(Y - \zeta^{kr} b_r X^{\frac{r}{n}}) = Y^n - (b_r X^{\frac{r}{n}} \sum_{k=1}^{n} \zeta^{kr}) Y^{n-1} + \cdots$$

$$+((-1)^i b_r^i X^{\frac{ir}{n}} \sum_{k=1}^{n} \zeta^{ikr}) Y^{n-i} + \cdots + (-1)^n b_r^n X^r.$$

Tenemos que

1. Si $r = n$, la forma lineal de $p$ es $(Y - b_m X)^m$.
2. Si $r > n$, entonces $m - i + i\frac{r}{m} > m$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Luego la forma inicial de $p$ es $Y^m$.

Como la forma inicial de $f$ es el producto de $u(0,0)(\neq 0)$, por la forma inicial de $p$, sigue que $F_m$ es de la forma $(aX + bY)^m$.

$\square$

A pesar de tener demostrado el lema de la unitangente en caracteristica cero pues usamos el teorema de Puiseux, el lema vale para $K$ algebraicamente cerrado cualquiera.

Si $f$ es reducible es decir $f = f_1 f_2 \ldots f_h$ entonces su forma inicial de $f$ es

$$F_n = \prod_{i=1}^{h}(a_i X + b_i Y)^{r_i}.$$

donde $\sum_{i=1}^{h} r_i = n$, $a_i, b_j \in K$, para $i, j = 1, \ldots, s$ y $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, si $i \neq j$, ademas $s \leq h$.

**Definición 3.15**

Cada recta $(a_i X + b_i Y)$, $i = 1, \ldots, s$ es llamada la *recta tangente* a la curva $(f)$. El conjunto de estas rectas tangentes es llamada de *cono tangente* a la curva $(f)$.

**Ejemplo**

La curva $(Y^2 - X^3)$ tiene como cono tangente a la recta $(Y)$, contada con multiplicidad 2.

La curva $(Y^2 - X^2(X+1))$ tiene como cono tangente las rectas $(Y+X)$ y $(Y-X)$.

# Capítulo 4

# ÍNDICE DE INTERSECCIÓN DE CURVAS

## 4.1. El Anillo Local de una Curva Plana

Sea $K$ un cuerpo cualquiera y sea $f \in \mathcal{M} = \langle X, Y \rangle \subset K[[X, Y]]$. Denotamos por $\langle f \rangle$ el ideal generado por $f$ en $K[[X, Y]]$.

**Definición 4.1** *Llamamos a la $K$-álgebra*

$$\mathcal{O}_f = \frac{K[[X, Y]]}{\langle f \rangle},$$

*como* ***el anillo local de la curva*** $(f)$

Cuando $f$ es irreducible, $\mathcal{O}_f$ es un dominio y en este caso, el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_f$ sera denotado por $K_f$.

El próximo resultado nos dirá que el anillo $\mathcal{O}_f$ es un importante invariante de las clases de equivalencia de curvas algebroides planas. Cuando dos $K$-álgebras locales $\mathcal{O}_f$ y $\mathcal{O}_g$, fuesen *isomorfas* escriberemos $\mathcal{O}_f \approx \mathcal{O}_g$.

**TEOREMA 4.2** *Dadas dos curvas algebroides planas $(f)$ y $(g)$, se tiene que $(f) \approx (g)$ si y solamente si $\mathcal{O}_f \approx \mathcal{O}_g$.*

**Demostración.** Denotaremos por $\bar{h}$ y por $\bar{\bar{h}}$ respectívamente, las clases residuales en $\mathcal{O}_f$ y $\mathcal{O}_g$ de un elemento $h \in K[[X, Y]]$.

Suponga inicialmente que $(f) \approx (g)$. Luego existen un automorfismo $\Phi$ y una unidad $u$ de $K[[X, Y]]$ tal que $\Phi(f) = ug$.

Es claro que la sobreyección $\pi \circ \Phi$, donde

$$\begin{array}{llllll} K[[X,Y]] & \longrightarrow^{\Phi} & K[[X,Y]] & \longrightarrow^{\pi} & \mathcal{O}_g \\ h & \rightarrow & \Phi(h) & \rightarrow & \overline{\overline{\Phi(h)}} \end{array}$$

es tal que $\ker(\pi \circ \Phi) = \langle f \rangle$, y por tanto, $\mathcal{O}_f \approx \mathcal{O}_g$.

Recíprocamente, suponga que $\mathcal{O}_f \approx \mathcal{O}_g$. Si $\text{dir}(f) = 1$, sigue que

$$f = aX + bY + \cdots \text{, con } a \neq 0 \text{ o } b \neq 0.$$

Suponga $a \neq 0$, podemos considerar un automorfismo $\Phi$ definido por la subtitución.

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & K[[X,Y]] & \longrightarrow & K[[X,Y]] \\ & X & \rightarrow & f \\ & Y & \rightarrow & Y \end{array}$$

que nos dice que $(f) \approx (X)$. En caso que $b \neq 0$ se obtiene de modo análogo que $(f) \approx (Y)$. Ademas $(X) \approx (Y)$. Sigue que si, $\text{dir}(f) = \text{dir}(g) = 1$, entonces $(f) \approx (g)$.

Para concluir la prueba, supongamos que $\text{dir}(g) \geq 2$. Sea el isomorfismo $\overline{\Phi}$ tal que

$$\begin{array}{rccc} \overline{\Phi}: & \mathcal{O}_f & \longrightarrow & \mathcal{O}_g \\ & \overline{X} & \rightarrow & \overline{\overline{T_1}} \\ & \overline{Y} & \rightarrow & \overline{\overline{T_2}} \end{array}$$

con $T_1, T_2 \in \mathcal{M}$. Defina el homeomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & K[[X,Y]] & \longrightarrow & K[[X,Y]] \\ & X & \rightarrow & T_1 \\ & Y & \rightarrow & T_2 \end{array}$$

Para $\overline{\overline{X}}, \overline{\overline{Y}} \in \mathcal{O}_g$ existe $R(\overline{X}, \overline{y}), S(\overline{X}, \overline{y}) \in \mathcal{O}_f$, tal que

$$\overline{\Phi}(R(\overline{\overline{X}}, \overline{\overline{Y}})) = R(\overline{\overline{T_1}}, \overline{\overline{T_2}}) = \overline{X},$$

$$\overline{\Phi}(S(\overline{\overline{X}}, \overline{\overline{Y}})) = S(\overline{\overline{T_1}}, \overline{\overline{T_2}}) = \overline{Y}.$$

Luego $\overline{\overline{X}} - R(\overline{\overline{T_1}}, \overline{\overline{T_2}}) = \langle g \rangle$ y $\overline{\overline{Y}} - S(\overline{\overline{T_1}}, \overline{\overline{T_2}}) = \langle g \rangle$, sigue que

$$\begin{array}{ll} X - R(T_1, T_2) \in \langle g \rangle & \subset \mathcal{M}^2 \\ Y - S(T_1, T_2) \in \langle g \rangle & \subset \mathcal{M}^2. \end{array}$$

Luego $\text{dir}(X - R(T_1, T_2)) \geq 2$ sigue por proposición 1.4 que $\text{dir}(X) = \text{dir}(R(T_1, T_2)) = 1$ y $\text{dir}(Y) = \text{dir}(S(T_1, T_2)) = 1$. Si $L_{T_1}, L_{T_2}$ son las formas lineales de $T_1, T_2$ sigue que $\text{dir}(R(T_1, T_2)) = \text{dir}(R(L_{T_1}, L_{T_2})) = 1$ y $\text{dir}(S(T_1, T_2)) = \text{dir}(S(L_{T_1}, L_{T_2})) = 1$. Luego $\{L_{T_1}, L_{T_2}\}$, son linealmente independientes y consequentemente

$$\begin{aligned} T_1 = &\quad aX + bY + \cdots \\ T_2 = &\quad cX + dY + \cdots . \end{aligned}$$

con $ad - bc \neq 0$. Por la proposición 1.18 $\Phi$ es un automorfismo de $K[[X, Y]]$ tal que

$$\bar{\bar{0}} = \overline{\Phi}(\bar{f}) = \bar{\bar{f}}(T_1, T_2).$$

lo que implica que $\Phi(f) = \langle g \rangle$ y por tanto

$$\Phi(f) = hg. \tag{4.1}$$

Por otro lado, $\Phi^{-1}$ induce la transformación $\overline{\Phi}^{-1}$ y portanto

$$\Phi^{-1}(g) = h'f.$$

Sigue de la igualdad arriba que $g = \Phi(h')\Phi(f)$, que con 4.1 implica que

$$\Phi(f) = h\Phi(h')\Phi(f).$$

Esto implica que $h$ es una unidad, mostrando asi que $(f) \approx (g)$.

**COROLARIO 4.3** *Si* $\mathcal{O}_f \approx \mathcal{O}_g$, *entonces* *dir*$(f) =$ *dir*$(g)$.

**Demostración.** Si $\mathcal{O}_f \approx \mathcal{O}_g$, sigue del teorema 4.2 que $(f) \approx (g)$, luego existe un automorfismo $\Phi$ tal que $\Phi(f) = ug$ donde $u$ es una unidad en $K[[X, Y]]$, por tanto

$$\text{dir}(f) = \text{dir}(\Phi(f)) = \text{dir}(ug) = \text{dir}(g)$$

□

El anillo $\mathcal{O}_f$ posse un único ideal máximal $\mathcal{M}_f = \langle x, y \rangle$ imagen de $\mathcal{M} \subset K[[X, Y]]$ por el homomorfismo canónico

$$\pi : K[[X, Y]] \longrightarrow \mathcal{O}_f.$$

De hecho, todo elemento $u$ en $\mathcal{O}_f \setminus \mathcal{M}_f$ es clase residual de un elemento $U$ de $K[[X, Y]] \setminus \mathcal{M}$, que es invertible, de modo que $u^{-1}$ es la clase residual módulo $\langle f \rangle$ de $U^{-1}$. Se tiene que para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\pi(\mathcal{M}^i) = \mathcal{M}_f^i = \mathcal{M}^i + \langle f \rangle,$$

y tambien que
$$\pi^{-1}(\mathcal{M}_f^i) = \mathcal{M}^i.$$

Una $K$-álgebra $\mathcal{O}_f$, cuando $f$ tiene una buena ecuación con respecto a la indeterminada $Y$, posee tambien una importante estructura de $K[[X]]$-módulo, como podemos ver en el resultado que sigue.

**PROPOSICIÓN 4.4** *Sea $f \in K[[X]][Y]$ regular de orden $m$ en $Y$. Entonces $\mathcal{O}_f$ es un $K[[X]]$-módulo libre de posto $m$ generado por las clases residuales $y^i$ de $Y^i$, $i = 0, \ldots, m-1$ en $\mathcal{O}_f$. En otras palabras,*

$$\mathcal{O}_f = K[[X]] \oplus K[[X]]y \oplus \cdots \oplus K[[X]]y^{m-1}$$

**Demostración.** Por el teorema de división , para $g \in K[[X, Y]]$ y $f \in K[[X]][Y]$ existe $q$ y $r = a_0(X) + a_1(X)Y + \cdots + a_{m-1}(X)Y^{m-1}$ que puede ser escrito como
$$g = fq + a_0(X) + a_1(X)Y + \cdots + a_{m-1}(X)Y^{m-1},$$
donde $a_0(X), a_1(X), \ldots, a_{m-1}(X) \in K[[X]]$. Luego

$$\bar{g} = a_0(X) + a_1(X)y + \cdots + a_{m-1}(X)y^{m-1},$$

y portanto $\mathcal{O}_f$ es un $K[[X]]$-módulo generado por $1, y, \ldots, y^{m-1}$.

Vamos provar que estos elementos son libres sobre $K[[X]]$. Suponga que se tenga una relación no trivial en $\mathcal{O}_f$, sobre $K((X))$,

$$b_0(X) + b_1(X)y + \cdots + b_{m-1}(X)y^{m-1} = \overline{0}$$

Luego existe $q \in K[[X]][Y]$ tal que

$$b_0(X) + b_1(X)Y + \cdots + b_{m-1}(X)Y^{m-1} = qf.$$

Como $X$ no divide $f$, salvo dividirnos todos los $b_i(X)$ y $q$ por $X$, podemos suponer que $b_j(0) \neq 0$, para algun $j$. Evaluando la expresión arriba en $X = 0$, tenemos que

$$b_0(0) + b_1(0)Y + \cdots + b_{m-1}(0)Y^{m-1} = q(0, Y)f(0, Y).$$

Como $Y^m$ divide $f(0, Y) \neq 0$, sigue que

$$b_0(0) = b_1(0) = \ldots b_{m-1}(0) = q(0, Y) = 0.$$

Y que por su vez contradice el hecho de $b_j(0) \neq 0$. Por tanto $b_i(X) = 0$ para $i = 1, \ldots m-1$

$\square$

Volvamos a la situación en que $K$ es algebraicamente cerrado de característica cero.

El resultado que sigue desempeñará un papel importante en la próxima sección.

**TEOREMA 4.5** *Sea $f$ un polinomio de Weierstrass irreducible de grado $n$. Si $D$ es el discriminante de $f(X,Y)$, entonces*

$$DK[[X^{\frac{1}{n}}]] \subset \mathcal{O}_f.$$

**Demostración.** Sea $\varphi \in K[[X^{\frac{1}{n}}]]$ una raiz de $f$. Considere el diagrama

$$\begin{array}{ccc} K[[X^{\frac{1}{n}}]] \subset & K((X^{\frac{1}{n}})) & = K((X))[\varphi] \\ \bigcup & & | \\ K[[X]] \subset & & K((X)) \end{array}$$

Recuerde que $K((X))[\varphi]/K((X))$ es una extensión galoisiana con grupo de galois $\mu_n$, el grupo de las raices n-sima de la unidad (Lema 3.5 y teorema 3.10). Sea $\beta \in K[[X^{\frac{1}{n}}]]$. Como elemento de $K((X))[\varphi]$ ponemos $\beta$ en la forma

$$\beta = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(X)\varphi^i,\ a_i(X) \in K((X)). \tag{4.2}$$

Denotando por $\zeta$ un generador de $\mu_n$ y usando las notaciones

$$\beta_j = \zeta^j * \beta \text{ y } \varphi_j = \zeta^j * \varphi,$$

aplicando los $\zeta^j$ la igualdad 4.2 y obtenemos el sistema

$$\beta_j = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(X)\varphi_j^i,\ j = 0, \ldots, n-1, \tag{4.3}$$

cuyo determinante es el de Vandermonde.

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_0^0 & \cdots & \varphi_0^{n-1} \\ \varphi_1^0 & \cdots & \varphi_1^{n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n-1}^0 & \cdots & \varphi_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{r<s}(\varphi_r - \varphi_s) = \Delta.$$

Sigue que $\Delta^2 = D_Y(f) = D$.

Por la regla de Kramer, el sistema 4.3 nos dice

$$a_i(X) = \Delta^{-1} M_i.$$

donde

$$M_i = \det \begin{pmatrix} \varphi_0^0 & \cdots & \beta_0 & \cdots & \varphi_0^{n-1} \\ \varphi_1^0 & \cdots & \beta_1 & \cdots & \varphi_1^{n-1} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{n-1}^0 & \cdots & \beta_{n-1} & \cdots & \varphi_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in K[[X^{\frac{1}{n}}]],$$

es el determinante del sistema 4.3 donde subtituimos la $i$-ésima columna por los primeros terminos de 4.3.

De alli sigue que

$$Da_i(X) = \Delta^2 a_i(X) = \Delta M_i \in K[[X^{\frac{1}{n}}]],$$

y como

$$\zeta^j * Da_i(X) = Da_i(X),\ \forall j = 0, \ldots, n-1.$$

sigue que

$$Da_i(X) \in K[[X]].$$

Como $\beta = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(X)\varphi^i$ tenemos que

$$D\beta = \sum_{i=0}^{n-1} Da_i(X)\varphi^i \in \sum_{i=0}^{n-1} K[[X]]\varphi^i = \mathcal{O}_f.$$

Esto implica que

$$K[[X^{\frac{1}{n}}]] \subset \frac{1}{D}\mathcal{O}_f,$$

y por tanto

$$DK[[X^{\frac{1}{n}}]] \subset \mathcal{O}_f,$$

$\square$

Supongamos ahora que $f = f(X,Y)$ sea un polinomio de Weierstrass en $K[[X]][Y]$ irreducible de grado $n$, tenemos que existe una serie de potencias $\varphi(T) \in K[[T]]$, correspondiendo a una raiz cualquiera de $f$ en $K[[X]]^*$, tal que en $K[[T]]$ tengamos

$$f(T^n, \varphi(T)) = 0.$$

Las otras raices de $f$ nos daran las parametrizaciones $(T^n, \psi(T))$ de $(f)$, donde $\psi(T) = \varphi(\zeta T)$, con $\zeta$ una raiz $n$-esima de la unidad.

A partir de estos obtenemos el siguiente resultado.

**PROPOSICIÓN 4.6** *Sea* $f$ *un polinomio de Weierstrass irreducible de grado* $n$ *y sea* $(T^n, \varphi(T))$ *una parametrización de la curva algebroide plana* $(f)$*. La aplicación*

$$\begin{array}{rccc} H_\varphi : & K[[X,Y]] & \longrightarrow & K[[T]] \\ & g & \to & g(T^n, \varphi(T)) \end{array}$$

*es un homeomorfismo de* $K$*-álgebras cuyo núcleo es* $\langle f \rangle$*.*

**Demostración.** Sea $g$ un elemento en el núcleo de $H_\varphi$. Por el teorema de división de Weierstrass

$$g = qf + r,$$

donde $r \in K[[X]][Y]$ de grado menor que $n$. Como $g(X, \alpha) = 0$, donde $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}}) \in K[[X]]^*$, sigue que $r(X, \alpha) = 0$, lo que sigue que $r$ es divisible por el polinomio mínimo de $\alpha$ que es precisamente $f$, luego $r = 0$ y portanto $g = fq \in \langle f \rangle$.

□

De la proposición sigue que $H_\varphi$ induce un homeomorfismo inyector de $K$-álgebras

$$H_\varphi : \mathcal{O}_f \longrightarrow K[[T]],$$

realizando $\mathcal{O}_f$ como subálgebra de $K[[T]]$. Si $\psi(T) = \varphi(\zeta T)$, tenemos que $H_\psi(\mathcal{O}_f)$ es la imagen de $H_\varphi(\mathcal{O}_f)$ por el automorfismo

$$\begin{array}{rccc} h_\zeta : & K[[T]] & \longrightarrow & K[[T]] \\ & P(T) & \to & P(\zeta T) \end{array}$$

**Definición 4.7** *Se define la* ***valorización asociada a*** $f$ *como siendo la función*

$$\begin{array}{rccc} v_f : & \mathcal{O}_f \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & \bar{g} & \to & \mathit{ord}(H_\varphi(\bar{g})) \end{array}$$

*pongase* $v_f(0) = \infty$*. Es claro, por el comentario arriba, que* $v_f$ *no depende de la elección de* $\varphi$*.*

La función $v_f$ posee trivialmente las siguientes propiedades : Para todos $\bar{g}, \bar{h} \in \mathcal{O}_f$, se tiene que

1. $v_f(\bar{g}\bar{h}) = v_f(\bar{g}) + v_f(\bar{h})$,
2. $v_f(\bar{1}) = 0$
3. $v_f(\bar{g} + \bar{h}) \geq \text{mín}\{v_f(\bar{g}), v_f(\bar{h})\}$, con igualdad valiendo si $v_f(\bar{g}) \neq v_f(\bar{h})$

## 4.2. Complementos de Algebra Lineal

En esta sección apresentamos algunos resultados sobre cocientes y sucesiones exactas de espacios vectoriales que no son usualmente encontrados en texto de algebra lineal.

Sea $U, V, W$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $K$. Consideremos un diagrama de la forma

$$W \longrightarrow^{\psi} V \longrightarrow^{\varphi} U, \tag{4.4}$$

donde $\psi$ y $\varphi$ son homeomorfismos de espacios vectoriales. Diremos que este diagrama forma una *sucesión*. Una sucesión puede ser formada con mas de dos homeomorfismo.

**Definición 4.8** *Diremos que 4.4 es una* ***sucesión exacta*** *si*

$$\textit{im}(\psi) = \ker(\varphi).$$

*Una sucesión exacta del tipo*

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow^{\psi} U,$$

*nos dice que* $\psi$ ***es inyectora****, mientras que una sucesión exacta del tipo*

$$W \longrightarrow^{\varphi} V \longrightarrow 0,$$

*nos dice que es* ***sobreyectora****.*

Suponga que $W$ sea un subespacio del espacio vectorial $V$. Entonces

$$\frac{V}{W} = \{\bar{v} = v + W, v \in V\},$$

es un espacio vectorial, ademas de eso, si $\dim_K V < \infty$, entonces

$$\dim_K \frac{V}{W} = \dim_K V - \dim_K W. \tag{4.5}$$

La igualdad arriba sigue del hecho de que, si $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ es una base de $V$, donde $v_1, \ldots, v_m$, es una base de $W$, entonces $\bar{v}_{m+1}, \ldots, \bar{v}_n$ es una base de $\frac{V}{W}$.

Admitiremos al lector familiarizado con el teorema del isomorfismo para espacios vectoriales.

**PROPOSICIÓN 4.9** *Suponga que tengamos una sucesión exacta de espacios vectoriales*

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow^{\psi} V \longrightarrow^{\varphi} U \longrightarrow 0.$$

*Entonces* $V$ *es de dimensión finita si y solamente si,* $U$ *y* $W$ *son de dimensión finita. En este caso,*

$$dim_K V = dim_K W + dim_K U.$$

**Demostración.**
Como la sucesión es exacta se tiene que

$$\dim_K W = \dim_K \psi(W) = \dim_K \ker(\varphi),$$

y por el teorema del isomorfismo, sigue que

$$\frac{V}{\ker(\varphi)} \simeq U,$$

lo que en vista de 4.5 implica que

$$\dim_K V = \dim_K \ker(\varphi) + \dim_K(U) = \dim_K W + \dim_K U.$$

□

**PROPOSICIÓN 4.10** *Sea* $W \subset V \subset U$ *una cadena de espacios vectoriales tal que* $\dim_K \frac{U}{W} < \infty$. *Entonces*

$$\dim_K \frac{U}{W} = \dim_K \frac{V}{W} + \dim_K \frac{U}{V}.$$

**Demostración.** Esto ocurre de la proposición 4.5 y de la sucesión exacta,

$$0 \longrightarrow \frac{V}{W} \longrightarrow \frac{U}{W} \longrightarrow \frac{U}{V} \longrightarrow 0.$$

□

**PROPOSICIÓN 4.11 (TEOREMA DEL ISOMORFISMO DE NOETHER)** *Sean* $V$ *y* $W$ *subespacios de un espacio vectorial* $U$*. Entonces*

$$\frac{V}{V \cap W} \simeq \frac{V+W}{W}.$$

**Demostración.** La aplicación

$$\begin{array}{ccc} V+W & \longrightarrow & \frac{V}{V\cap W} \\ v+w & \rightarrow & \bar{v} \end{array}$$

es bien definida, sobreyectora y su núcleo es $W$. El resultado ahora sigue del teorema del isomorfismo.

$\square$

**TEOREMA 4.12** *Sea $V$ un espacio vectorial y sea $L : V \longrightarrow V$ una transformación lineal inyectora. Sea $W$ un subespacio vectorial de $V$ tal que $L(W) \subset W$. Tenemos que*

1.
$$\frac{V}{W} \simeq \frac{L(V)}{L(W)}.$$

2. *Si $\frac{V}{W}$ y $\frac{V}{L(V)}$ son de dimensión finita, entonces*
$$\dim_K \frac{W}{L(W)} = \dim_K \frac{V}{L(V)}.$$

**Demostración.**

1. Considere la sucesión,
$$0 \longrightarrow W \longrightarrow^{j} V \longrightarrow^{\bar{L}} \frac{L(V)}{L(W)} \longrightarrow 0,$$
donde $j$ es un homeomorfismo inclusión, y $\bar{L}$ es el homomorfismo inducido por $L$. Esta sucesión es exacta pues $L$ siendo inyectora, se tiene que
$$\ker(\bar{L}) = \{v \in V, L(v) \in L(W)\} = W,$$
demostrando asi el item 1.

2. Considere las cadenas de inclusiones.
$$W \subset W + L(V) \subset V,$$
y
$$L(W) \subset W \cap L(V) \subset L(V).$$

De $1$ y de la hipótesis de $2$ tenemos que

$$\dim_K \frac{L(V)}{L(W)} = \dim_K \frac{V}{W} < \infty,$$

obtenemos, por la proposición 4.10 las siguientes igualdades.

$$\begin{array}{ccccc} dim_K \frac{V}{W} & = & dim_K \frac{W+L(V)}{W} & + dim_K \frac{V}{W+L(V)} \\ \| & & \| & \\ dim_K \frac{L(V)}{L(W)} & = & dim_K \frac{L(V)}{W \cap L(V)} & + dim_K \frac{W+L(V)}{L(W)}, \end{array}$$

donde la igualdad

$$\dim_K \frac{W + L(V)}{W} = \dim_K \frac{L(V)}{W \cap L(V)},$$

sigue del teorema del isomorfismo de Noether.

Consecuentemente, obtenemos

$$\dim_K \frac{V}{W + L(V)} = \dim_K \frac{W \cap L(V)}{L(W)} < \infty. \tag{4.6}$$

Como por hipótesis, $\dim_K \frac{V}{L(V)} < \infty$, de la cadena

$$L(V) \subset W + L(V) \subset V,$$

obtenemos de proposición 4.10

$$\dim_K \frac{V}{L(V)} = \dim_K \frac{V}{W + L(V)} + \dim_K \frac{W + L(V)}{L(V)}.$$

Del teorema del isomorfismo de Noether tenemos que para $W \subset V$ y $L(V) \subset V$,

$$\dim_K \frac{W}{W \cap L(V)} = \dim_K \frac{W + L(V)}{L(V)} < \infty. \tag{4.7}$$

De la proposición 4.10 y de la cadena abajo

$$L(W) \subset W \cap L(V) \subset W,$$

obtenemos que

$$\dim_K \frac{W}{L(W)} = \dim_K \frac{W}{W \cap L(V)} + \dim_K \frac{W \cap L(V)}{L(W)} < \infty. \tag{4.8}$$

Por tanto de 4.6 y de 4.7 en 4.8 el resultado sigue.

□

## 4.3. Índice de Intersección

En esta sección introducimos un medio de exprimir numéricamente el grado u orden de contacto de dos curvas algebroides planas, esto será hecho a travez de la noción fundamental de **índice de intersección**.

Sea $K$ un cuerpo cualquiera. Denotaremos como de costumbre, a $\mathcal{M}$ como el ideal máximal de $K[[X,Y]]$.

**PROPOSICIÓN 4.13** *Sean* $f, g \in \mathcal{M}$. *Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $f$ *y* $g$ *son relativamente primos.*
2. *La dimensión de* $\frac{K[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle}$, *como* $K$*-espacio vectorial, es finita.*

**Demostración.** Las condiciones arriba son preservadas por automorfismos de $K[[X,Y]]$ y por multiplicación de $f$ y $g$ por unidades de $K[[X,Y]]$. Por tanto, podemos suponer que $f$ y $g$ son polinomios de Weierstrass.

1. $\Rightarrow$ 2. Siendo $f$ y $g$ primos entres si en $K[[X,Y]]$, tenemos que ellos son primos entre si en $K[[X]][Y]$, y por tanto en $K((X))[Y]$. Luego existen elementos $\varphi, \psi \in K((X))[Y]$ tal que

$$\varphi f + \psi g = 1$$

Eliminando los denominadores en $K[[X]]$ en la expresión arriba, tenemos que

$$\varphi' f + \psi' g = c(X),$$

para algunos $\varphi', \psi' \in K[[X]][Y]$ y $c(X) \in K[[X]]$, con $c(X) \neq 0$, podemos escribir $c(X) = X^r u$, donde $r \geq 1$ y $u(0) \neq 0$. Por tanto

$$X^r \in \langle f, g\rangle.$$

Suponga que $\text{grd}_Y(f) = n$, entonces por el teorema de la división de Weierstrass, para todo $h \in K[[X,Y]]$, existen elementos $q \in K[[X,Y]]$ y $a_0(X)$, $\ldots$,$a_{n-1}(X) \in K[[X]]$, tal que

$$h = fq + a_0(X) + \cdots + a_{n-1}(X)Y^{n-1}.$$

De alli sigue que la imagen $\bar{h}$ de $h$ en $\frac{K[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle}$ esta en el $K$-espacio vectorial generado por $\bar{X}^i\bar{Y}^j$, $0 \leq i \leq r-1$ y $0 \leq j \leq n-1$. Luego 2 esta probado.

2. $\Rightarrow$ 1. Suponga que $f$ y $g$ no sean primos entre si en $K[[X,Y]]$. Existe entonces $h \in K[[X]][Y]$ no invertible y de Weierstrass tal que $f = hf_1$

y $g = hg_2$. Luego $\langle f, g\rangle \subset \langle h\rangle$. Se tiene que $\bar{1}, \bar{X}, \bar{X}^2, \ldots,$ son elementos de $K[[X,Y]]/\langle h\rangle$ linealmente independientes sobre $K$, pues caso contrario, existiria un polinomio $P(X) \in K[X]$ tal que $P(X) = h_1 h$, tal que $h_1 \in K[X,Y]$, lo que no es posible dado que $h$ es de Weierstrass.

Consecuentemente de la hipótesis 2. y de la proposición 4.10 que

$$\dim_K \frac{K[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle} \geq \dim_K \frac{K[[X,Y]]}{\langle h\rangle} = \infty.$$

Lo que es un absurdo. Por tanto $f$ y $g$ son relativamente primos.

□

**Definición 4.14** *Sean $f, g \in \mathcal{M}$. Se define el* ***índice de intersección de*** $f$ ***y*** $g$ *como siendo*

$$I(f,g) = \dim_K \frac{K[[X,Y]]}{\langle f,g\rangle}$$

*Alternativamente, podemos definir el índice de intersección como sigue*

$$I(f,g) = \dim_K \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'\rangle},$$

*donde $g'$ denota la clase residual de $g$ en $\mathcal{O}_f$.*

*Diremos que dos curvas algebroides $(f)$* ***y*** *$(g)$* ***son transversales****, si $(f)$ y $(g)$ son regulares y sus rectas tangentes son distintas.*

En el próximo teorema usaremos la notación $z'$ para representar la imagen de $z \in K[[X,Y]]$ en $\mathcal{O}_f$.

**TEOREMA 4.15** *Sean $f, g, h \in \mathcal{M}$, $\Phi$ un automorfismo de $K[[X,Y]]$ y $u$ y $v$ unidades de $K[[X,Y]]$. El índice de intersección posee las siguientes propiedades:*

1. *$I(f,g) < \infty$, si solamente si, $f$ y $g$ son primos entre si en $K[[X,Y]]$.*
2. *$I(f,g) = I(g,f)$.*
3. *$I(\Phi(f), \Phi(g)) = I(uf, vg) = I(f,g)$.*
4. *$I(f,gh) = I(f,g) + I(f,h)$.*
5. *$I(f,g) = 1$, si solamente si, $(f)$ y $(g)$ son transversales.*

*6.* $I(f, g - hf) = I(f, g)$.

**Demostración.**

1. Sigue inmediatamente de la proposición 4.13

2. Sigue de la definición

3. Se tiene que $\langle f, g\rangle = \langle uf, vg\rangle$ luego por definición $I(uf, vg) = I(f, g)$. Ademas $(f) \sim (\phi(f))$, sigue por teorema 4.2 que $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_{\phi(f)}$ y por teorema 4.12
$$I(f, g) = \dim_K \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'\rangle} = \dim_K \frac{\mathcal{O}_{\phi(f)}}{\langle \phi(g)'\rangle} = I(\phi(f), \phi(g))$$

4. Basta probar que es exacta la siguiente sucesión de $K$-espacios vectoriales.
$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_f}{\langle h'\rangle} \longrightarrow^{\psi} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'h'\rangle} \longrightarrow^{\varphi} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'\rangle} \longrightarrow 0 \tag{4.9}$$
donde la aplicación $\varphi$ es inducida por la proyección $\tilde{\varphi}$ :
$$\mathcal{O}_f \longrightarrow^{\tilde{\varphi}} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g'\rangle} \longrightarrow 0.$$
Note que
$$\ker(\varphi) = \frac{\langle g'\rangle}{\langle g'h'\rangle}.$$
La aplicación $\psi$ es definida por
$$\psi(\overline{z'}) = \overline{\overline{g'z'}},$$
donde una barra representa la clase residual modulo $\langle h'\rangle$, en cuanto que la dupla barra representa la clase residual módulo $\langle h'g'\rangle$. La aplicación $\psi$ es claramente un homomorfismo de $K$-espacios vectoriales.
Para probar que $\psi$ es inyectora, suponga que $\psi(\bar{z'}) = 0$ y note que
$$0 = \psi(\overline{z'}) = \overline{\overline{g'z'}} \Rightarrow g'z' \in \langle g'h'\rangle.$$
Luego existe $\alpha' \in \mathcal{O}_f$ tal que
$$g'z' = \alpha' g'h'.$$
que por su vez implica que existe $\beta \in K[[X, Y]]$ tal que
$$g(z - \alpha h) = gz - \alpha gh = \beta f.$$

Como $f$ y $g$ no tiene factores comunes, sigue que $f$ divide $z - \alpha h$, lo que muestra que $\overline{z'} = 0$. Esto es $\psi$ es inyectiva

Ademas observe que

$$\mathrm{im}(\psi) = \frac{\langle g' \rangle}{\langle g'h' \rangle} = \ker(\varphi),$$

luego la secuencia 4.9 y por la proposición 4.9 el resultado sigue.

5. Suponga que $f$ y $g$ sean regulares con tangentes distintas. Luego despues de un cambio lineal de coordenadas podemos suponer que $f = X + f_1$ y $g = Y + g_1$, donde $f_1, g_1 \in \mathcal{M}^2$. Podemos entonces escribir

$$f = Xu + Yf_2,$$

y

$$g = Yv + Xg_2,$$

donde $u$ y $v$ son unidades y $f_2, g_2 \in \mathcal{M}$. Tenemos entonces que

$$Y(v - u^{-1}g_2 f_2) = Yv - u^{-1}Yg_2 f_2 = g - u^{-1}g_2 f \in \langle f, g \rangle.$$

Como

$$(v - u^{-1}g_2 f_2)(0,0) = v(0,0) \neq 0,$$

sigue que $v - u^{-1}g_2 f_2$ es una unidad y por tanto $Y \in \langle f, g \rangle$. De modo análogo se muestra que $X \in \langle f, g \rangle$. Sigue entonces que $\langle f, g \rangle = \langle X, Y \rangle$, y por tanto,

$$I(f,g) = \dim_K \frac{K[[X,Y]]}{\langle f, g \rangle} = \dim_K \frac{K[[X,Y]]}{\langle X, Y \rangle} = 1.$$

Recíprocamente, si $\mathrm{dir}(f) \geq 2$ o $\mathrm{dir}(g) \geq 2$, o todavia si $(f)$ y $(g)$ son regulares y poseen la misma recta tangente , podemos despues de un cambio lineal de coordenadas, suponer que

$$f = Yf_1 + f_2$$

y

$$g = Yg_1 + g_2.$$

con $f_2, g_2 \in \mathcal{M}^2$ y $f_1, g_1 \in K[[X,Y]]$. Luego

$$\langle f, g \rangle \subset \langle Y \rangle + \mathcal{M}^2$$

y portanto.

$$\dim_K \frac{K[[X,Y]]}{\langle f, g \rangle} \geq \dim_K \frac{K[[X,Y]]}{\langle Y \rangle} + \mathcal{M}^2 = 2.$$

6. Sigue de $\langle f, g\rangle = \langle f, g - hf\rangle$ y de la definición.

$\square$

Las propiedades establecidas en el teorema 4.15 determinan univocamnete el índice de intersección de las curvas algebraicas planas, esto es el contenido del próximo resultado.

**TEOREMA 4.16** *Sea $I'$ una función*

$$\begin{array}{rccc} I': & \mathcal{M}\times\mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{N}\cup\{\infty\} \\ & (f,g) & \to & I'(f,g) \end{array}$$

*que posee las propiedades del 1 al 6 del teorema 4.15. Entonces $I' = I$.*

**Demostración.**

La demostración será hecha por inducción sobre el valor de $I'(f,g)$.

Podemos suponer que $f, g \in \mathcal{M}\setminus\{0\}$ son primos entre si en $K[[X,Y]]$, pues caso contrario tendriamos de 1, que $I'(f,g) = I(f,g) = \infty$.

Si $I'(f,g) = 1$ entonces por 5 $f$ y $g$ son transversales y por teorema 4.15 item 5 sigue que $I(f,g) = 1$.

Suponga por hipótesis de inducción que :

$$I'(f,g) \leq r-1 \Rightarrow I'(f,g) = I(f,g).$$

Sean $f, g \in \mathcal{M}\setminus\{0\}$ tal que $I'(f,g) = r$.

Sea $\Phi$ un automorfismo de $K[[X,Y]]$ tal que $\Phi(f)$ y $\Phi(g)$ sean asociados respectivamente a polinomios de Weierstrass $p$ y $q$. Por la propiedad 3 tenemos que

$$I'(f,g) = I'(p,q),$$

y por el teorema 4.15 item 3

$$I(f,g) = I(p,q).$$

Suponga que $\text{grd}_Y(p) = n$ y $\text{grd}_Y(q) = m$, por la propiedad 2 podemos suponer que $n \leq m$. Defina

$$q_1 = q - Y^{m-n}p = Xq_2,$$

donde $q_2 \in K[[X,Y]]$.

Si $q_2$ es una unidad, entonces por las propiedades 6, 3 y 4 tenemos que

$$I'(p,q) = I'(p,q_1) = I'(p,Xq_2) = I'(p,X) = I'(Y^n,X) = n.$$

Del mismo modo por el teorema 4.15 item 6, 3 y 4 se tiene que

$$I(p,q) = I(p,q_1) = I(p,Xq_2) = I(p,X) = I(Y^n,X) = n.$$

Y por tanto $I'(p,q) = I(p,q) = n$.

Suponga que $q_2$ no sea una unidad, luego por las propiedades 6 y 4

$$r = I'(p,q) = I'(p,q_1) = I'(p,X) + I'(p,q_2) \tag{4.10}$$

Ademas $I'(p,X) < I'(p,q) = r$ y $I'(p,q_2) < I'(p,q) = r$, luego por la hipótesis de inducción y el teorema 4.15 item 4 y 6 tenemos que

$$I'(p,X) + I'(p,q_2) = I(p,X) + I(p,q_2) = I(p,q) = r \tag{4.11}$$

Luego de 4.10 y 4.11 termina que

$$I'(f,g) = I(f,g).$$

$\square$

En realidad el teorema de arriba nos dice que existe un algoritmo ejecutable para calcular $I(f,g)$ para todo par de series $f$ y $g$ en $\mathcal{M}$ y preparadas a Weierstrass.

**Ejemplo**

Vamos determinar el índice de intersección de $(Y^7 - X^2)$ con $(Y^5 - X^3)$.

$$\begin{aligned} I(Y^7 - X^2, Y^5 - X^3) &= I(Y^7 - X^2 - Y^2(Y^5 - X^3), Y^5 - X^3) \\ &= I(X^2(XY^2 - 1), y^5 - X^3) = I(X^2, Y^5 - X^3) \\ &= 2I(X, Y^5 - X^3) = 2I(X, Y^5) = 10I(X,Y) = 10 \end{aligned}$$

**Observación iv)**

Sea $(f)$ una curva irreducible plana dada por un polinomio de Weierstrass de grado $n$. Suponga que las coordenadas fueran escogidas de modo que $Y$ sea la tangente de $(f)$, y considere una parametrización $(T^n, \varphi(T))$, donde $\varphi(T) \in K[[T]]$. Se tiene necesariamente por la observación i) que $\text{ord}(\varphi(T)) > n$.

Note que

$$v_f(\bar{g}) = \text{ord}(g(T^n, \varphi(T))) = \dim_K \frac{K[[T]]}{\langle g(T^n, \varphi(T)) \rangle}.$$

**TEOREMA 4.17** *Sean $f$ y $g$ polinomios de Weierstrass en $K[[X]][Y]$, con $f = f_1 \cdots f_h$, la descomposición de $f$ en factores irreducibles , que podemos suponer de Weierstrass . Entonces*

$$I(f,g) = \sum_{i=1}^{h} v_{f_i}(g)$$

**Demostración.** Si $f$ y $g$ tienen componentes en comun, nada tenemos que demostrar pues los tres términos arriba son infinitos. Supongamos entonces que $f$ y $g$ no tienen factores en comun.

Como por la propiedad 4 del teorema 4.15 tenemos que

$$I(f,g) = \sum_{i=1}^{h} I(f_i, g),$$

bastará probar que si $f$ es irreducible, entonces $I(f,g) = v_f(g)$. Considere la aplicación $K$-lineal

$$\begin{array}{rccc} L: & K[[T]] & \longrightarrow & K[[T]] \\ & h(T) & \to & h(T)g(T^n, \varphi(T)) \end{array}$$

donde $n = \mathrm{grd}_Y(f)$ y $(T^n, \varphi(T))$ es una parametrización de $f$.

Como $g$ no tiene $f$ como componente, sigue que $g(T^n, \varphi(T)) \neq 0$, y por tanto $L$ es inyectora.

Sea $W$ o $K$-subespacio vectorial $K[[T^n, \varphi(T)]](\simeq \mathcal{O}_f)$ de $V = K[[T]]$.

Tenemos entonces que

$$\frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle} \simeq \frac{K[[T^n, \varphi(T)]]}{g(T^n, \varphi(T))K[[T^n, \varphi(T)]]} = \frac{W}{L(W)}.$$

Por otro lado

$$\frac{V}{L(V)} = \frac{K[[T]]}{\langle g(T^n, \varphi(T)) \rangle}.$$

Por el teorema 4.5 se tiene que

$$\dim_K \frac{V}{W} < \infty,$$

y como

$$\dim_K \frac{V}{L(V)} = \mathrm{ord}(g(T^n, \varphi(T))) < \infty,$$

sigue del teorema 4.12 que

$$I(f,g) = \dim_K \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle} = \dim_K \frac{W}{L(W)} = \dim_K \frac{V}{L(V)} = v_f(g).$$

$\square$

**TEOREMA 4.18** *Sean* $f, g \in \mathcal{M}$. *se tiene que*

$$I(f,g) \geq \textit{dir}(f)\textit{dir}(g),$$

*con igualdad, si y solamente si,* $(f)$ *y* $(g)$ *no poseen tangentes comunes.*

**Demostración.** Sean $f = f_1 f_2 \cdots f_h$ y $g = g_1 g_2 \cdots g_s$ respectivamente la descomposición de $f$ y $g$ en factores irreducibles.

Del teorema 4.15 item 2 y 4 tenemos que

$$I(f,g) = \sum_{i,j} I(f_i, g_i). \tag{4.12}$$

Por otro lado, por la proposición 1.4 tenemos que

$$\mathrm{dir}(f)\mathrm{dir}(g) = \sum_{i,j} \mathrm{dir}(f_i)\mathrm{dir}(g_j). \tag{4.13}$$

Por tanto, de 4.12 y de 4.13, bastará probar el teorema para $f$ y $g$ irreducible.

Suponga que las coordenadas fuesen escogidas de modo que $f$ sea asociados a un polinomios de Weierstrass en $K[[X]][Y]$ y que tenga $(Y)$ como recta tangente. Sea $(T^n, \varphi(T))$, donde $n = \mathrm{ord}(f)$, una parametrización de $(f)$. Como $(Y)$ es tangente a $(f)$, tenemos que $\mathrm{ord}(\varphi(T)) > n$.

Suponga ahora que

$$g(X,Y) = (aX + bY)^m + g_{m+1}(X,Y) + \cdots$$

Tenemos entonces que

$$I(f,g) = v_f(g) = \mathrm{ord}(g(T^n, \varphi(T))$$

$$= \mathrm{ord}((aT^n + b\varphi(T))^m + g_{m+1}(T^n, \varphi(T)) + \cdots) \geq nm,$$

con igualdad si y solamente si $a \neq 0$, esto es si la recta tangente a $(g)$ no es $Y$ o sea, si la recta tangente a $(f)$ es distinta de la recta tangente a $g$ .

$\square$

# Capítulo 5

# RESOLUCIÓN DE SINGULARIDADES

En este capítulo trataremos del proceso de resolución de las singularidades de curvas algebroides irreducibles planas estudiadas por Zariski (ver [2]), y luego utilizadas por Lejeune (ver [3]).

En el caso analítico (o algebraico), este proceso consiste en transformar un germen de curva analítica plana irreducible en un germen no singular, por medio de una sucesión finita de ciertas transformaciones birracionales.

En forma de motivación, introduciremos el asunto en el contexto mas geométrico de los germenes de curvas analíticas planas, para en seguida desenvolvernos en el contexto de la geometria formal.

## 5.1. Transformaciones Cuadráticas en $\mathbb{C}^2$

**Definición 5.1** *Una **transformación quadrática o explosión centrada en el origen** es una aplicación que en algún sistema coordenadas de $\mathbb{C}^2$ es de la forma*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ & (X_1, Y_1) & \to & (X_1, X_1Y_1) \end{array}$$

*La recta*

$$E : X_1 = 0$$

*es llamada de **divisor excepcional de la explosión** y es igual al conjunto*

$$T^{-1}(0, 0).$$

Sea

$$L : Y - aX = 0$$

una recta que pasa por el origen de $\mathbb{C}^2$, entonces $T^{-1}(L)$ es la unión del divisor exepcional y de la recta $Y_1 = a$, que corta $E$, en el punto de coordenadas $(0, a)$. Por tanto, los puntos del divisor excepcional corresponden a todas las direcciones que emanan del origen de $\mathbb{C}^2$, excepto una, que es la dirección del eje $Y$.

Sea $C_f$ un germen de la curva analítica definido por un elemento $f \in M \subset \mathbb{C}\{X, Y\}$ Ahora veamos como es el conjunto $T^{-1}(C_f)$. En efecto, supongamos que la expansión $f$ este dada por:

$$f(X, Y) = F_n(X, Y) + F_{n+1}(X, Y) + \cdots$$

Asi tenemos que la ecuación de $T^{-1}(C_f)$ está dada por la serie:

$$\begin{aligned} f(T(X_1, Y_1)) &= F_n(X_1, X_1Y_1) + F_{n+1}(X_1, X_1Y_1) + \cdots + \\ &= X_1^n(F_n(1, Y_1) + X_1F_{n+1}(1, Y_1) + \cdots +) \end{aligned} \tag{5.1}$$

**Definición 5.2** *En las condiciones anteriores la serie 5.1 es llamada* ***la transformada total de*** $f$ *cuya curva asociada* $T^{-1}(C_f)$ *será llamada* ***la transformada total de*** $C_f$**.**

La curva

$$C_{f^{(1)}} : f^{(1)}(X_1, Y_1) = F_n(1, Y_1) + X_1F_{n+1}(1, Y_1) + \cdots + X_1^{j-n}F_j(1, Y_1) + \cdots ,$$

es llamada de **transformada estricta de** $C_f$. Como $T^{-1}(0, 0)$ es el divisor exepcional de la ecuación

$$E : X_1 = 0,$$

tenemos que

$$T^{-1}(C_f) = E \cup C_{f^{(1)}}.$$

**Ejemplo 1** Consideremos la curva $C_f$ donde

$$f = Y^2 - a^2X^2 - X^3 = 0,$$

con $a \neq 0$. Como la curva está definida por un polinomio, no tenemos problemas con la convergencia, luego ella está definida para todo $\mathbb{C}^2$. Se tiene que la transformada total de $C_f$ es

$$T^{-1}(C_f) : X_1^2Y_1^2 - a^2X_1^2 - X_1^3 = X_1^2(Y_1^2 - a^2 - X_1) = 0$$

Mientras que la transformada estricta de $C_f$ está dada por $C_{f^{(1)}} : Y_1^2 - a^2 - X_1 = 0$. Observe que las tangentes de $C_f$ en el origen, estan dadas por

$$F_2(X, Y) = Y^2 - a^2X^2 = (Y - aX)(Y + aX) = 0.$$

Que tiene por transformadas estrictas dos rectas horizontales que pasan por cada uno de los puntos $P_1 = (0, a)$ y $P_2 = (0, -a)$, que son justamente los puntos de intersección de $C_{f^{(1)}}$ con $E$. Observe que después de la explosión, la curva $C_f$ se transforma en una curva $C_{f^{(1)}}$ que es lisa en todos sus puntos y que sus ramos en el origen son transformados respectivamente en porciones de curva que pasan por los puntos que cortan en eje $Y$.

**Ejemplo 2** Consideremos la curva $C_f$ donde

$$f = Y^2 - X^3 = 0.$$

Aqui nuevamente tenemos una curva definida globalmente en $\mathbb{C}^2$. La transformada total de $C_f$ es

$$T^{-1}(C_f) : X_1^2 Y_1^2 - X_1^3 = X_1^2(Y_1^2 - X_1) = 0,$$

en cuanto que la transformada estricta de $C_f$ es dada por

$$C_{f^{(1)}} : Y_1^2 - X_1 = 0,$$

que tiene por tangente en el origen la recta vertical $X_1 = 0$. Observe que aqui, despues después de una explosión, conseguimos transformar $C_f$ en una curva lisa $C_{f^{(1)}}$, y como $C_f$ posee un ramo en el origen, este es tranformado en un único ramo de $C_{f^{(1)}}$ en el origen.

## 5.2. Resolución de Singularidades de Curvas Planas

A partir de ahora $K$ sera un campo algebraicamente cerrado arbitrario.

**Definición 5.3** *Una Transformación cuadrática de* $K[[X, Y]]$ *en* $K[[X_1, Y_1]]$ *es un homeomorfismo de* $K-$*álgebras definido por*

$$\begin{array}{rlcl} \sigma : & K[[X, Y]] & \rightarrow & K[[X_1, Y_1]] \\ & X & \rightarrow & X_1 \\ & Y & \rightarrow & X_1 Y_1 \end{array}$$

*o por*

$$\begin{array}{rlcl} \tau : & K[[X, Y]] & \rightarrow & K[[X_1, Y_1]] \\ & X & \rightarrow & X_1 Y_1 \\ & Y & \rightarrow & X_1 \end{array}$$

Estas transformaciones no son invertibles, pero si son birracionales, es decir definen isomorfismos entre los campos de fracciones $K((X, Y))$ y $K((X_1, Y_1))$ respectivamente de $K[[X, Y]]$ y de $K[[X_1, Y_1]]$.

El homeomorfismo $\sigma$ tiene la propiedad de transformar el ideal $\langle X, Y\rangle$ en el ideal $\langle X_1, X_1, Y_1\rangle = \langle X_1\rangle$. En el caso en que $K = \mathbb{C}$ y el anillo es el de las series convergentes $\mathbb{C}\{X, Y\}$, esto geometricamente corresponde a la condicion $T^{-1}(0,0) = E$ de la seccion anterior.

La transformada por $\sigma$ de

$$f(X,Y) = F_n(X,Y) + F_{n+1}(X,Y) + F_{n+2}(X,Y) + \cdots \in K[[X,Y]],$$

es el elemento de $K\left[[X_1, Y_1]\right]$ definido por

$$\begin{aligned} \sigma(f) = f(X_1, X_1Y_1) &= F_n(X_1, X_1Y_1) + F_{n+1}(X_1, X_1Y_1) + \cdots \\ &= X_1^n \left[F_n(1, Y_1) + X_1F_{n+1}(1, Y_1) + \cdots\right], \\ &= X_1^n f^{(1)}(X_1, Y_1). \end{aligned}$$

La serie

$$\sigma^*(f) = f^{(1)}(X,Y) = \frac{1}{X_1^n} f(X_1, X_1Y_1),$$

donde $n = \mathrm{dir}(f)$ será llamada la *transformada estricta* segun $\sigma$ o *explosión* de $(f)$.

**LEMA 5.4** *Sea* $f, g \in K\left[[X,Y]\right]$.

1. $\sigma^*(f)$ *es invertible en* $K[[X_1, Y_1]]$, *si y solamente si, el termino inicial de* $f$ *tiene la forma* $F_n = cX^n + \cdots$, *donde* $c \in K^*$ *y* $n$ *es un entero no negativo.*

2. $\sigma^*(fg) = \sigma^*(f)\sigma^*(g)$.

**Demostración.** La prueba es una simple verificación de la definición.

$\square$

**PROPOSICIÓN 5.5** *Sea* $f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) \in K[[X]][Y]$ *un polinomio de Weierstrass irreducible con tangente* $(Y)$, *supongamos que* $I(f, Y) = m$. *Entonces*

1. $\sigma^*(f)$ *es irreducible en* $K[[X_1, Y_1]]$.

2. *dir*$(\sigma^*(f)) \leq$ *dir*$(f)$.

   *Con igualdad, si y solamente* $\sigma^*(f)$ *es un polinomio de Weierstrass con relación* $Y_1$.

**Demostración.**

1. Se tiene que

$$\sigma^*(f) = Y_1^n + b_1(X_1)Y_1^{n-1} + \cdots + b_n(X_1)$$

donde

$$b_i(X_1) = \frac{a_i(X_1)}{X_1^i}.$$

Como $f$ es un polinomio de Weierstrass con tangente $Y$, tenemos que dir$(a_i(X_1)) > i,$ esto implica que dir$(b_i(X_1)) > 0,$ y por tanto $\sigma^*(f)$ es un pseudo-polinomio.

Supongamos por el absurdo $\sigma^*(f)$ sea reducible en $K[[X_1, Y_1]]$, luego existen pseudo-polinomios $P_1,\ P_2 \in K[[X_1]][Y_1]$ de grados respectivamente $n_1 \geq 1$ y $n_2 \geq 1$ tales que $n = n_1 + n_2$ y

$$\sigma^*(f) = P_1 P_2$$

multiplicando ambos miembros de la igualdad arriba por $X_1^n,$ se tiene

$$f(X,Y) = X^n \sigma^*(f)(X, \frac{Y}{X}) = X^{n_1} P_1(X, \frac{Y}{X}) X^{n_2} P_1(X, \frac{Y}{X}).$$

Como $X^{n_1} P_1(X, \frac{Y}{X}), X^{n_2} P_2(X, \frac{Y}{X}) \in K[[X,Y]],$ tenemos que $f$ es reducible en $K[[X,Y]]$ lo que es una contradicción.

2. Tenemos que

$$\text{dir}(\sigma^*(f)) = \text{dir}(Y_1^n + b_1(X_1)Y_1^{n-1} + \cdots + b_n(X_1)) \leq n$$

Si

$$\text{dir}(\sigma^*(f)) = \text{dir}(f) \Leftrightarrow \text{dir}(b_i(X_1)) > i.$$

Lo que es equivalente a decir que la forma inicial de $\sigma^*(f)$ es $Y^n$ y es de Weierstrass.

$\square$

**Definición 5.6** *Si* $dir(f) = dir(f^{(1)}),$ *iterando el procedimiento de las transformaciones cuadraticas , hasta encontrar que la directo de la transformada, en un determinado estado, sea menor aquel de la serie del estado anterior. La sucesión de explosiones obtenido de esa modo sera llamada* ***sucesión canonica de explosiones****.*

Veremos a seguir que si $f \in \mathcal{M}$ es un polinomio de Weierstrass irreducible, definiendo una singularidad de curva algebroide plana, entonces después de un número finito de explosiones veremos tener un cambio en la directo de la transformada estricta.

De modo análogo se puede definir una noción de transformada estricta $\tau^*(f)$ de $f$, segun $\tau$, y probar resultados analogos al lema 5.4 y a la proposición 5.5 cuando $f$ es de Weierstrass en $K[[Y]][X]$, irreducible y con tangente $(X)$.

Luego si $(f)$ es un polinomio de Weierstrass irreducible

$$f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) \in K[[X]][Y]$$

Se define $f^{(0)} = f$ y para $i = 1, 2 \cdots$ , denotamos por $f^{(i)}$ la transformada estricta de $f^{(i-1)}$ segun $\sigma$ o, si fuese el caso, de $uf^{(i-1)}$, segun $\tau$.

**PROPOSICIÓN 5.7** *Sea* $f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X) \in K[[X]][Y]$ *un polinomio de Weierstrass irreducible. Si*

$$i_0 = \min_{i \geq 1}\{i;\ \mathit{dir}(f^{(i)}) \neq \mathit{dir}(f^{(i-1)})\},$$

*entonces*

$$i_0 = \left[\min_{1\leq j\leq n}\left\{\frac{\mathit{dir}(a_j(X))}{j}\right\}\right],$$

*donde* $[a]$ *representa la parte entera de* $a$

**Demostración.**

Despues de $i$ explosiones, tenemos las coordenadas $(X_i, Y_i) = (X, Y_i)$.

Si $i < i_0$ , podemos escribir.

$$f^{(i)} = Y_i^n + \frac{a_1(X)}{X^i}Y_i^{n-1} + \frac{a_2(X)}{X^{2i}}Y_i^{n-2} + \cdots + \frac{a_n(X)}{X^{ni}}$$

Es claro que no se puede tener indefinidamente $\mathrm{dir}(f^{(i)}) = \mathrm{dir}(f^{(i-1)})$, pues las $n$ sucesiones

$$\mathrm{dir}(\frac{a_j(X)}{X^{ij}}), \text{ donde } j = 1, \cdots n,$$

son estríctamente decrescientes.

Sea $i_0$ el menor índice $i$ para lo cual vale la desigualdad

$$\mathrm{dir}(f^{(i)}) \neq \mathrm{dir}(f^{(i-1)}) \tag{5.2}$$

Haciendo $\alpha_j = \text{dir}(a_j(X))$ observe que la desigualdad 5.2 solo se cumple, si y solamente si, existe $j = 1, \cdots n$ tal que

$$\begin{array}{ll} \alpha_j - ij & \geq 0 \\ \alpha_j - ij + n - j & < n \end{array}$$

lo cual implica que

$$i \leq \frac{\alpha_j}{j} < i + 1$$

Si nosotros quisieramos el menor $i$ para el cual 5.2 se cumple, deveriamos tomar $i = i_0$, tal que

$$i_0 \leq \min_j \frac{\alpha_j}{j} < i_0 + 1$$

es decir :

$$i_0 = \left[ \min_{1 \leq j \leq n} \frac{\alpha_j}{j} \right].$$

□

En el caso en que

$$f = X^n + a_1(Y)X^{n-1} + \cdots + a_n(Y)$$

es un polinomio de Weierstrass irreducible en $K[[Y]][X]$, se tiene un resultado totalmente analogo. Con eso acabamos de probar el siguiente resultado.

**TEOREMA 5.8** *La sucesión canónica de explosiones de una curva algébrica irreducible cualquiera, sobre la forma de Weierstrass, conduce despues de un número finito de pasos a una curva algébrica no singular.*

La sucesión canónica de longitud mínima $\omega$, ala que se refiere el teorema es denominada *la resolución canónica* de la singularidad de una curva algebrica $(f)$.

La resolución canónica de $(f)$ determina una sucesión númerica de mayor importancia en esta teoria que es la sucesión finita de números

$$\text{dir}(f) \geq \text{dir}(f^{(1)}) \geq \cdots \geq \text{dir}(f^{(i)}) \geq \cdots \geq \text{dir}(f^{(N)}) = 1,$$

llamada la sucesión de directas de $(f)$.

**Ejemplo** Determinaremos la resolución canónica de

$$f = Y^4 - X^7.$$

En este caso se tiene que

$$f^{(1)} = \sigma^*(f) = Y_1^4 - X_1^3$$

que al multiplicar por $u = -1$ se torna en la forma de Weierstrass con relación a $X_1$. Portanto aplicando $\tau^*$ a $-f^{(1)}$ se tiene

$$f^{(2)} = X_2^3 - Y_2$$

que no es singular. La sucesión de las directos, en este caso es $\{4, 3, 1\}$.
**Observación v** Sea

$$f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X)$$

un polinomio de Weierstrass, irreducible con cono tangente $(Y^n)$. Considere

$$f^{(1)}(X_1, Y_1) = X_1^{-n} f(X_1, X_1 Y_1).$$

Suponga que $(T^n, \varphi(T))$ sea una parametrización de $(f)$, con $\text{ord}(\varphi(T)) = m > n$, luego

$$f^{(1)}(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n}) = (T^n)^{-n} f(T^n, \varphi(T)) = 0.$$

Si $\text{dir}(f^{(1)}) = \text{dir}(f) = n$, entonces $(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n})$ es una parametrización de $f^{(1)}$.

Si $n_1 = m - n = \text{dir}(f^{(1)}) < \text{dir}(f) = n$, tenemos que $uf^{(1)}$ es de Weierstrass con respecto a $X_1$. Como $\text{dir}(\varphi(T)) = m$, tenemos que

$$\frac{\varphi(T)}{T^n} = T^{n_1} v(T),$$

donde $v(T)$ es una unidad de $K[[T]]$. Sea $w(T) \in K[[T]]$ una unidad tal que $w(T)^{n_1} = v(T)$, tenemos entonces que

$$T^{n_1} v(T) = (Tw(T))^{n_1}.$$

Definiendo

$$T_1 = \rho(T) = Tw(T)$$

tenemos que $T = \rho^{-1}(T_1)$ y por tanto una parametrización de $(uf^{(1)})$ es dada por $(Y_1, X_1) = (T_1^{n_1}, \psi(T_1))$, donde $\psi(T_1) = (\rho^{-1}(T_1))^n$.

El anillo local de una curva algebroide plana se inyecta en el anillo local de su explosión, conforme veremos en el próximo resultado.

**PROPOSICIÓN 5.9** *Dado* $f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X)$, *un polinomio de Weierstrass irreducible, existe un homomorfismo natural inyector de* $\mathcal{O}_f$ *en* $\mathcal{O}_{f^{(1)}}$, *de tal modo que* $v_{f^{(1)}}$ *restricto a* $\mathcal{O}_f$, *coincide con* $v_f$.

**Demostración.**

Vamos analizar apenas el caso en que

$$f = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X)$$

es un polinomio de Weiertrass con relación a la indeterminadas $Y$, pues el caso en que $f$ esta en la forma de Weierstrass con relación a $X$ es totalmente análogo.

Observar que en esta situación $f^{(1)}$ es un pseudo polinomio, regular en $Y$ de orden $n$.

Considere el homomorfismo de $K$-algebras

$$\begin{array}{cccc} \psi : & \mathcal{O}_f & \longrightarrow & \mathcal{O}_{f^{(1)}} \\ & \overline{g(X,Y)} & \to & \overline{g(X_1, X_1Y_1)} \end{array}$$

Notar que en virtud de la proposicion 4.4 $\psi$ puede ser visto como un homomorfismo de $K[[X]]$-módulos:

$$\begin{array}{cccc} \psi : & K[[X]] \oplus \cdots K[[X]]y^{n-1} & \longrightarrow & K[[X]] \oplus \cdots K[[X]]y^{n-1} \\ & \overline{g(X,y)} & \to & \overline{g(X, Xy_1)} \end{array}$$

que es claramente inyector pues las sumas son directas.

La afirmación sobre las valorizaciones $v_{f^{(1)}}$ y $v_f$, siguen de la observación v).

$\square$

**PROPOSICIÓN 5.10** *Sean* $(f)$ *y* $(g)$ *dos curvas algebroides planas irreducibles con la misma tangente. Se tiene que*

$$I(f,g) = \textbf{\textit{dir}}(f)\textbf{\textit{dir}}(g) + I(f^{(1)}, g^{(1)}).$$

**Demostración.** Tenemos tres casos para analizar

1. Las transformaciones estrictas de $(f)$ y de $(g)$ poseen la misma directo, que las curvas originales, esto es

   dir$(f) =$ dir$(f^{(1)}) = n$ y dir$(g) =$ dir$(g^{(1)}) = n'$. Como

$$g^{(1)}(X_1, Y_1) = \frac{1}{X_1^{n'}} g(X_1, X_1Y_1),$$

de las consideraciones arriba y del teorema 4.17 tenemos que

$$\begin{aligned} I(f^{(1)}, g^{(1)}) &= v_{f^{(1)}}(g^{(1)}) = \operatorname{ord}(\tfrac{1}{(T^n)^{n'}} g(T^n \tfrac{\varphi(T)}{T^n})) \\ &= -nn' + v_f(g) = -\operatorname{dir}(f)\operatorname{dir}(g) + I(f,g), \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado.

2. Las transformaciones estrictas de $(f)$ y de $(g)$ poseen las directos menores que las curvas originales.

3. Una transformada estricta posee la directo menor y la otra posee la misma directo.

□

**TEOREMA 5.11** *Sean $f$ y $g$ dos curvas algebroides irreducibles planas. Se tiene que*

$$I(f,g) = \sum_{i=0}^{\omega} \mathit{dir}(f^{(i)})\mathit{dir}(g^{(i)}).$$

**Demostración.** Sean $f$ y $g$ dos curvas algebroides irreducibles planas. Con una sucesión finita de longitud $\omega$ de explosiones de tipo $\sigma$ y o del tipo $\tau$, conforme el caso, llegamos ala situación final en que $f^{(N)}$ y $g^{(N)}$ tiene tangentes distintas. Con esto y con el teorema 4.18 termina la prueba.

□

# Bibliografía

[1] A. Hefez - Singularidades de Curvas Irredutíveis planas, Minicurso no $6^{th}$-Workshop on Real and Complex Singulaties, USP-São Carlos, $17-21$ July, $2000$.

[2] O. Zariski - Studyes in equisingularity I, Amer. J. Math. 87, (1965), p. 507-536.

[3] M. Lejeune - Contributions a l'étude des singularités du poin de veu polygone de Newton, Thèse pour obtenir le grade de Docteur ès Science, Universitè de Paris VII, 1973.