Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Unicidad de la solución de un PVI utilizando el teorema de punto fijo con condición especial de Lipschitz

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Melissa Kassandra YGNACIO AYALA

ASESOR

Mg. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2023

Referencia bibliográfica

Ygnacio M. Unicidad de la solución de un PVI utilizando el teorema de punto fijo con condición especial de Lipschitz [Tesis de pregrado]. Lima: Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática; 2023.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Melissa Kassandra Ygnacio Ayala
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	47831070
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0007-8850-5968
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Willy David BARAHONA MARTÍNEZ
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9177-1561
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09197486
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional

Grupo de investigación	EDOACBI
Agencia de financiamiento	Ninguna.
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: -12.05611582267559 Longitud: -77.08468053573509
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Mayo 2023 – octubre 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023) MODALIDAD PRESENCIAL

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 09:15 horas del viernes 03 de noviembre del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023): Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (PRESIDENTE), Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci (MIEMBRO) y el Mg. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE UN PVI UTILIZANDO EL TEOREMA DE PUNTO FIJO CON CONDICIÓN ESPECIAL DE LIPSCHITZ**", presentado por la señorita **Bachiller MELISSA KASSANDRA YGNACIO AYALA**, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación sobresaliente.........., con un calificativo promedio de dieciocho (18)

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que la participante **Bachiller MELISSA KASSANDRA YGNACIO AYALA**, en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 10:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
PRESIDENTE

Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
MIEMBRO

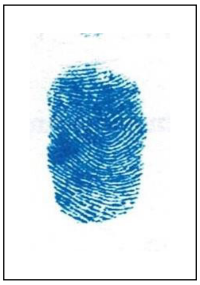
Mg. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Yo Willy David, Barahona Martínez en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°001669-2023-D-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE UN PVI UTILIZANDO EL TEOREMA DE PUNTO FIJO CON CONDICIÓN ESPECIAL DE LIPSCHITZ, presentado por el bachiller YGNACIO AYALA MELISSA KASSANDRA, para optar el título de Licenciado en Matemática. CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 19% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título de Licenciado en Matemática.



DNI Nº. 10078450.

Mg. Willy David, BARAHONA MARTÍNEZ

DEDICATORIA

Esta tesis se dedica a mis padres, quienes siempre me han apoyado y orientado con su ejemplo para afrontar los retos sin desistir; además, me han animado constantemente a seguir progresando.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mi madre y a mi padre quienes siempre me estan apoyando y me dan el empujón cuando lo necesito, a mi hermano Junior quien me motiva a ser un ejemplo para él .

Del mismo modo, agradezco al Mg. Willy David Barahona Martínez, mi asesor, quien brindó su tiempo en la orientación del trabajo de tesis, contribuyendo así al éxito.

Expreso mi gratitud a mi alma mater UNMSM, por aceptarme como parte de su comunidad, así como a mis profesores, quienes me instaron a esforzarme para alcanzar el nivel profesional que he logrado.

Finalmente, deseo expresar mi gratitud hacia mis compañeros y amigos, cuya compañía y ánimo fueron indispensables para acompañarme en cada etapa de mi educación hasta su finalización.

RESUMEN

Unicidad de la solución de un PVI utilizando el teorema de punto fijo con condición especial de Lipschitz

Melissa Kassandra, Ygnacio Ayala

Octubre - 2023

Asesor : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Título obtenido : Licenciada en Matemática.

En el presente trabajo de tesis, abordare el estudio del teorema de punto fijo con una condición especial de Lipschitz con restricción, que nos garantice la unicidad de la solución de un PVI considerando una contracción especial restringida. ¿Existe una condición especial de Lipschitz con la cual el teorema de Picard es válido?

Para lograr nuestro objetivo seguiremos las ideas desarrolladas en [1], desarrollando didacticamente cada una de las demostraciones que presenta dicho trabajo.

Palabras claves:

Teorema de punto fijo, Condición especial de Lipschitz , Teorema de Picard, Solución única de un PVI.

ABSTRACT

Uniqueness of the solution of a PVI using the fixed point theorem with Lipschitz's special condition

Melissa Kassandra, Ygnacio Ayala

October - 2023

Adviser : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Obtained : Graduate in Mathematics.

In this thesis work, I will address the study of the fixed point theorem with a special Lipschitz condition with restriction, which guarantees the uniqueness of the solution of a PVI considering a contraction restricted special. Is there a special Lipschitz condition under which Picard's theorem is valid?

To achieve our goal, we will follow the ideas developed in [1], didactically developing each of the demonstrations presented in said work.

Keywords:

Fixed point theorem, Lipschitz's special condition, Picard's theorem, Unique solution of a PVI.

ÍNDICE GENERAL

Introducción

Un resultado fundamental para las ecuaciones diferenciales y el análisis matemático, es el teorema de Picard. Este teorema nos permite garantizar la existencia y unicidad de soluciones (EUS) a EDOs con condiciones iniciales específicas. La importancia del teorema de Picard radica en varios aspectos:

Existencia de soluciones: El teorema de Picard asegura que, bajo ciertas condiciones, una ecuación diferencial ordinaria tiene al menos una solución. Esto es esencial para demostrar que los problemas de valor inicial(PVI) tienen solución, lo que es fundamental en aplicaciones en física, ingeniería, economía y otras disciplinas.

Unicidad de soluciones: El teorema de Picard también garantiza que si una solución existe, entonces es única en el intervalo especificado. Esto es esencial para asegurarse de que no haya múltiples soluciones que satisfagan las mismas condiciones iniciales, lo que simplifica el análisis y la solución de problemas.

Convergencia de métodos numéricos: En el contexto de la solución numérica de ecuaciones diferenciales, el teorema de Picard es fundamental para demostrar la convergencia del método de Euler o del método de Runge-Kutta. Esto permite garantizar que a medida que se refina la discretización del problema, las soluciones numéricas convergen a la solución exacta.

Base teórica para investigaciones posteriores: El teorema de Picard sienta las bases para investigaciones más avanzadas en el campo de las ecuaciones diferenciales.

La teoría de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos se construye sobre estos resultados fundamentales, lo que permite abordar problemas más complejos y abstractos.

Diversos trabajos proporcionan el estudio de los teoremas de punto fijo y sus aplicaciones [3], las diferentes formas de presentar el teorema de Picard [4],[5], así como las generalizaciones respectivas [6],[7]. Estos trabajos iniciales usaremos como instrumentos que nos harán llegar a la meta (objetivo general) y de manera especial tomamos la idea propuesta en [1]. La exposición detallada y didáctica de cada uno de los teoremas será de gran utilidad tanto para los estudiantes de matemáticas y ciencias básicas como para los investigadores interesados en abordar y mejorar el estudio presente.

El teorema de Picard con condiciones en lo pequeño o condiciones especiales se refiere a una versión más generalizada del teorema de Picard con la cual garantizamos la EUS de un PVI con condiciones menos restrictivas que las condiciones habituales de continuidad y diferenciabilidad.

En lugar de requerir que los coeficientes de la ecuación diferencial sean continuamente diferenciables o incluso continuos, este teorema se aplica a situaciones donde los coeficientes son menos regulares. Se utilizan condiciones en lo pequeño o condiciones especiales para establecer la EUS.

Las condiciones en lo pequeño suelen incluir restricciones sobre la “pequeñez” de los coeficientes o cómo varían localmente en función de la variable independiente o de la solución. Estas condiciones pueden involucrar límites, desigualdades, o propiedades específicas de los coeficientes en un entorno local.

Por ejemplo, un teorema de Picard con condiciones en lo pequeño podría establecer que si los coeficientes de una ecuación diferencial son acotados en un intervalo pequeño alrededor de un punto inicial, entonces existe y es única una solución en un intervalo también pequeño alrededor de ese punto.

1 Preliminares

El teorema de Picard proporciona un enfoque fundamental para garantizar la existencia y unicidad de soluciones de un PVI para una EDO. A lo largo del tiempo, se han desarrollado variantes y nuevos enfoques para este estudio, especialmente en situaciones más generales o cuando las condiciones del teorema de Picard no se cumplen. A continuación, se mencionan algunas de estas variantes y enfoques:

1) Teorema de Picard-Lindelöf (Teorema de Existencia y Unicidad de Cauchy-Kowalevski): Esta variante generaliza el teorema de Picard y se aplica a EDO de primer orden, con coeficientes continuamente diferenciables, para las cuales se garantiza la EUS locales. Se utiliza para PVI más generales que no cumplen las condiciones habituales del teorema de Picard.

2) Teorema de existencia de Peano: En lugar de requerir que los coeficientes de la EDO sean continuamente diferenciables, el teorema de Peano establece la existencia de soluciones para coeficientes que son continuos, pero no necesariamente diferenciables. Esto relaja las restricciones y se aplica en situaciones en las que la regularidad de los coeficientes es menor.

3) Teorema de existencia y unicidad de Carathéodory: Este teorema se aplica a EDO con coeficientes discontinuos o no necesariamente continuos. Establece condiciones bajo las cuales aún se puede garantizar la EUS. Se basa en la noción de soluciones "inclusas" y es especialmente útil en problemas con coeficientes no tan regulares.

4) Teorema de punto fijo de Banach: En lugar de demostrar la EUS directamente, el teorema de punto fijo de Banach se utiliza para establecer la existencia de soluciones como un problema de punto fijo en un espacio métrico adecuado. Esto se aplica a EDO abstractas y a menudo se utiliza en el contexto de sistemas dinámicos.

5) Teoría de conjuntos convexos y compactos: En algunos casos, la teoría de conjuntos convexos y compactos se utiliza para garantizar la EUS de un PVI en espacios de Banach. Esto se aplica a EDO en espacios funcionales, lo que permite tratar problemas más abstractos y avanzados.

1.1. Definiciones Previas

Consideramos las siguientes definiciones y propiedades que nos permitiran abordar nuestro trabajo:

Definición 1. ***(Métrica).***
"Dado un conjunto $X \neq \emptyset$ y la función $d : X \times X \longrightarrow X$, decimos que d es métrica sobre X si y solo si se cumple : $\forall x, y, z \in X$"

i) Las distancias son no negativas y el único punto a distancia cero de x es el mismo x.

$$x \neq y \Longrightarrow d(x, y) > 0$$

$$x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0$$

ii) La distancia es una función simétrica

$$d(x, y) = d(y, x)$$

iii) La distancia satisface la "desigualdad triangular"

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

Ejemplo 1. *Sea $X = \mathbb{R}$, demuestre que $d(x, y) = |x - y|$ es una métrica sobre X*

i) Sea:

$$x \neq y \Longrightarrow d(x, y) = |x - y| > 0$$

$$x = y \Longrightarrow d(x, y) = d(x, x) = |x - x| = |0| = 0$$

ii) La distancia es una función simétrica

$$d(y, x) = |y - x| = |x - y| = d(y, x)$$

iii) La distancia satisface la desigualdad triangular

$$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| = |(x-z)+(z-y)|$$

Usando :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$$d(x,y) \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$$

Entonces : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (desigualdad triangular)

Definición 2. ***(Espacio Métrico (e.m.)).***

“ Un e.m. es un par (X,d) donde X es un conjunto no vacío y d es una función real definida en $X \times X$, llamada distancia o métrica, y que satisface los siguientes axiomas:”

i) $d(x,y) \geq 0, \quad \forall x,y \in X$ *y* $\quad d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y,$

ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y$

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

Ejemplo 2. ***(Espacio métrico discreto).***

Dado un conjunto no vacío cualquiera X definimos la métrica discreta d en X mediante:

$$d(x,y) \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

donde (X,d) es un espacio métrico

Definición 3. ***(Problema de Valor Inicial (PVI)).***

Un PVI de una EDO de $n-$énesimo orden:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1})$$

Consiste en encontrar una solución de dicha ecuación diferencial en un intervalo I, *que satisfaga en el punto x_0 de I, las n condiciones siguientes:*

$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y_1$$
$$y''(x_0) = y_2$$
$$\vdots$$
$$y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$$

Ejemplo 3. *Demostrar que la función*

$$\phi(x) = senx - cosx$$

es solución del siguiente PVI:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$
$$y(0) = -1$$
$$y'(0) = -1$$

i) $\phi''(x) + \phi'(x) = 0$

donde:

$$\phi'(x) = senx - cosx$$
$$\phi''(x) = -senx + cosx$$

Sustituyendo en i)

$$-senx + cosx) + (senx - cosx) = 0$$
$$0 = 0(identidad)$$

Luego, $\phi(x)$ es solución de la EDO:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

ii) $\phi'(0) = -1$

$$sen(0) - cos(0) = -1$$

$$0 - 1 = -1$$

$$-1 = -1$$

$$cos(0) + sen(0) = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 = 1$$

$$\phi'(0) = 1$$

Por (i) y (ii) la función ϕ es solución del PVI dado.

Definición 4. ***(Función de Lipschitz).***
Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que f es Lipschitz si $\exists k \geq 0$ tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \forall x, y \in A$$

Ejemplo 4. *Dada la función $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, f es Lipschitz ya que*

$$|f(x) - f(y)| = |c - c| = 0 \leq 0|x - y|$$

donde $k = 0$

Definición 5. ***(Condición de Lipschitz).***
Se dice que una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface una condición de Lipschitz en $D \subset \mathbb{R}$ y en la variable y si existe una constante $L > 0$ tal que :

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Teniendo en cuenta que (t, y_1) y (t, y_2) estan en D, la constante L recibe el nombre de constante de Lipschitz para f.

Ejemplo 5. *Mostrar que $f(t, y) = t|y|$ satisface una condición de Lipschitz en*

$$D = \{(t, y)/1 \leq y \leq 4\}$$

Por cada par de puntos $(t, y_1), (t, y_2)$ en D tenemos que:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |(t, |y_1| - (t, |y_2|| = |t|||y_1| - |y_2|| \leq |t||y_1 - y_2|$$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |(t, |y_1| - (t, |y_2|| = |t|||y_1| - |y_2|| \leq 2|y_1 - y_2|$$

donde 2 es la constante de Lipschitz

Tomando en cuenta que:

$$|y_1| = |(y_1 - y_2) + y_2| \Longrightarrow |y_1| - |y_2| \leq |y_1 - y_2|$$

$$|y_2| = |(y_2 - y_1) + y_1| \Longrightarrow |y_2| - |y_1| \leq |y_2 - y_1|$$

$$|y_2| = |(y_2 - y_1) + y_1| \Longrightarrow -(|y_1| - |y_2|) \leq |y_1 - y_2|$$

entonces :

$$||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|$$

Definición 6. ***(Contracción).***
"Una contracción o aplicación contractiva de un espacio métrico es una aplicación matemática f de un e.m. (X, d) en sí mismo $f : X \longrightarrow X$ con la propiedad de que existe un número $k < 1$ y no negativo tal que para todo x, y en X:

$$d(f(x) - f(y)) \leq kd(x, y)$$

"

El mínimo valor de k que satisface la relación anterior se llama constante de Lipschitz de f.

Ejemplo 6. *Sea : $f(x) = x^2$, definida en: $f : [0; \frac{1}{4}] \to \mathbf{R}$.*
Demostrar que : $k \in [0; 1\rangle$.

En efecto, utilizando la fórmula de contracción, tenemmos :

$$d(f(x) - f(y)) \leq kd(x, y)$$

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

$$|x^2 - y^2| \leq k|x - y|$$

$$|x-y| \leq k$$

sabemos, que:

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$0 \leq y \leq \frac{1}{4}$$

entonces :

$$0 \leq x+y \leq \frac{1}{2}$$

Reemplazando en la fórmula de contracción se tiene que:

$$k = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, f es una función contractiva.

Definición 7. ***(Función uniformemente continua).***

Una función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua, si $\forall x, y \in D$ se cumple que

$$|f(x) - f(y)| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Ejemplo 7. *La función: $Id_R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (función identidad), es uniformemente continua.*

En efecto, sea:

$$Id_R : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow x$$

Para $\epsilon > 0$ arbitrario pequeño, elegimos un $\delta = \epsilon$.
Sean $x, y \in \mathbb{R}$ donde : $|x-y| < \delta$
entonces:

$$|f(x) - f(y)| = |x-y| < \delta = \epsilon$$

por lo tanto, tenemos que:

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Definición 8. ***(Espacio métrico cuasiconvexo).***

Un espacio métrico V es cuasiconvexo si existe una constante positiva C, tal que por cada par de puntos $x, y \in V$, estos pueden estar unidos por un camino continuo con una longitud no mayor que C veces la distancia entre esos dos puntos $x, y \in V$.

Definición 9. ***(Punto fijo).***
El número real x representa un punto fijo de $g(x)$ si cumple que $g(x) = x$

Si deseamos hallar los puntos fijos de $g(x)$ se debe resolver la ecuación $g(x) = 0$.

Ejemplo 8. *Hallar los puntos fijos de $g(x) = x^2$*

Para hallar los puntos fijos de g, entonces resolvemos la ecuación $x^2 = x$.
As; tenemos que : $x^2 - x = 0$, entonces $x(x-1) = 0$ donde los puntos fijos son $x = 0$ y $x = 1$
Geométricamente, un punto fijo de una función es la intersección entre la gráfica de la función y la recta $y = x$.

Definición 10. ***(Teorema de Picard).***
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz y continua respecto a la variable espacial y $(t_0; x_0) \in \Omega$, entonces: "

I. *Existe $\alpha > 0$ donde la ecuación diferencial.*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo $\langle t_0 - \alpha; t_0 + \alpha \rangle$.

II. *Para el α hallado en el item anterior, existe $r > 0$ tal que si*

$$\|(t_1, x_1) - (t_0, x_0)\| < r, \quad (t_1, x_1) \in \Omega$$

se cumple que la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$

tiene una única solución definida en el intervalo $\langle t_1 - \alpha; t_1 + \alpha \rangle$.

"

Ejemplo 9. *Consideremos la ecuación diferencial :*

$$\dot{x} = \sqrt{|x|} = f(t,x) \tag{1.1}$$

Existe, una solución estacionaria $x(t) = 0$ y las soluciones tendrán que ser no decrecientes, ya que $\dot{x}$ es siempre mayor o igual a cero.
Dado que la derivada de la raíz tiende a infinito en cero, tenemos que:

$$\frac{\|f(t,x) - f(t,y)\|}{\|x-y\|} = \frac{\|\sqrt{|x|} - \sqrt{|y|}\|}{\|x-y\|} \tag{1.2}$$

tiende al infinito cuando x tiende a cero. Tomando $y = 0$, observamos que f no cumple la condición de Lipschitz en $x = 0$.

Definimos la función x_1 tal que :

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & si \qquad t \geq 0 \\ 0 & si \qquad t \leq 0 \end{cases}$$

Probaremos que : x_1 es solución de (1.1)
Si $t < 0$ se cumple que $x_1(t) = 0$, lo que es claro que es solución.
Si $t \geq 0$, $x_1(t) = \frac{t^2}{4}$, luego se demuestra que $\dot{x_1} = \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{t^2}{4}}$ es solución.
Por lo tanto, x_1 y $x(t) = 0$ son soluciones de (1.1). Además se prueba que f no cumple con la condición de Lipschitz, por lo tanto, no existe solución única.

Definición 11. ***(Teorema de punto fijo de Banach).***
Si, en un e.m. X completo tenemos una función de X en X contractiva, es decir, existe $k < 1$ tal que: $d(f(x) - f(y)) \leq kd(x,y)$ para cualquiera $x, y \in X$, entonces existe un único punto fijo $x_0 \in X$, es decir , que satisface $f(x_0) = x_0$"

1.2. Condición especial o condición en lo pequeño

Definición 12. ***(Función especial de Lipschitz).*** *"Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $L : X \to Y$ es de Lipschitz con condición especial si existe un $\delta > 0$ y un $\lambda \geq 0$, tal que, para todo $x, y \in X$, $d_X(x,y) < \delta$, tenemos:"*

$$d_Y(L(x), L(y)) \leq \lambda d_X(x,y) \tag{1.3}$$

donde la constante λ es llamada constante especial de Lipschitz de L en X.

De la definición anterior podemos concluir que, toda función especial de Lipschitz es uniformemente continua, pero la recíproca no siempre es válida.

Ejemplo 10. *"La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{|x|}$ es uniformemente continua pero no Lipschitz con condicion especial ni localmente Lipschitz."*

Autores como Garrido y Jaramillo afirman que una función uniformemente continua puede ser abordada como una función especial de Lipschitz o una función de Lipschitz local.

Toda función de Lipschitz implíca una función especial de Lipschitz, pero la recíproca no siempre se cumple [8].

Ejemplo 11. *Cualquier aplicación es Lipschitz si, y solo si, es Lipschitz en las distancias pequeñas y Lipschitz en las distancias grandes, además se sabe que toda aplicación acotada $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$, continua o no, es Lipschitz para grandes distancias.*

En efecto:
Sea $M > 0$ un número real tal que el diámetro de $f(x)$ es menor que M, entonces $d'(f(x), f(y)) \leq (M/\epsilon).d(x, y)$ siempre que $d(x, y) \geq \epsilon$.
Sin embargo la aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = n^2$ es Lipschitz en lo pequeño pero no Lipschitz. Además, esta aplicación es uniformemente continua y no es Lipschitz para grandes distancias.

A partir de ese hecho, Garrido y Jaramillo definen un espacio métrico especial. El e.m. especial determinado, es un espacio métrico con el conjunto de todas las funciones de Lipschitz e igual al conjunto de todas las funciones especiales de Lipschitz. Uno de los ejemplos de e.m. especial, es un e.m. cuasiconvexo.

Notación 1. *Denotamos por $Lip(X), LS(X), Lip_{loc}(X)$ y $U(X)$, a los conjuntos de funciones de valores reales en X que son Lipschitz, Lipschitz especial, localmente Lipschitz y uniformemente continua, respectivamente.*

Además tenemos que

$$Lip(X) \subseteq LS(X) \subset Lip_{loc}(X) \cap U(X).$$

Por otro lado se observa, que no, se puede establecer una relación entre $U(X)$ y $Lip_{loc}(X)$.

Con el siguiente ejemplo, mostramos que

$$LS(X) \neq Lip_{loc}(X) \cap U(X).$$

Ejemplo 12. *Todo mapeo acotado $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$, continuo o no, es Lipschitz para grandes distancias.*

En efecto, sea $M > 0$ un número real tal que el diámetro de $f(x)$ es menor que M, entonces $d'(f(x), f(y)) \leq (M/\epsilon).d(x, y)$ siempre que $d(x, y) \geq \epsilon$.

Definición 13. ***(Contracción con condición especial).***

*Sea una función $f : (X, d) \rightarrow (Y, p)$ se dice que es una **contracción con condición especial**, si existe $n > 0$ y $k \in [0; 1\rangle$ tal que para cada $x, y \in X$, se tienen $d(x, y) < r$.*
Tenemos:

$$p(f(x, f(y)) \leq kd(x, y)$$

La contracción con condición especial de la condición de Lipschitz toma la constante menor que 1, toda función de contracción es una contracción de condición especial pero lo contrario no siempre es cierto.

Por ejemplo:
Consideremos la función g: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, donde $g(n) = \left(\frac{1}{2}\right) n^2$, donde $n \in \mathbb{N}$.
Sea la $d(x, y) = |x - y|$ (distancia usual), $d(n, m) < r = \frac{1}{2}$, tenemos:

$$\underbrace{d(n, m)}_{|n-m|} < r = \frac{1}{2}$$
$$|n - m| < \frac{1}{2}$$

Para un caso en particular se tiene que $n = m$, entonces

$$d(g(n), g(m)) = d(g(n), g(n)) = 0 \ldots (*)$$

Como:

$$0 \leq d(n,m)$$

$$0 \leq kd(n,m)$$

Reemplazando en $(*)$:

$$d(g(n),g(m)) = d(g(n),g(n)) = 0 \leq kd(n,m)$$

entonces se tiene:

$$d(g(n),g(m)) \leq kd(n,m) \quad \text{(contracción en la condición especial en } \mathbb{N}\text{)}$$

Se tiene que la función g es una contracción por condición especial en $\mathbb{N}$ pero no es una contracción en $\mathbb{N}$.

Basándonos en los resultados de Garrido, Leung y Tang [7] dan condiciones necesarias y suficientes sobre un subconjunto B de X tal que $f|_A$ es el Lipschitz para cada función f que es Lipschitz especial en X [7].

Estamos interesados en descubrir la influencia de la condición Lipschitz especiales sobre el teorema de Picard. Después de definir la contracción con condición especial y sus características debido a los teoremas del punto fijo. Los resultados se aplicarán al desarrollar el teorema de Picard usando la contracción con condición especial. Utilizaremos la desigualdad de Gronwall, para demostrar la unicidad en el teorema de Picard.

Lema 1. ***(Desigualdad de Gronwall).*** *Sea g y h dos funciones continuas positivas de valor real en un intervalo $[c;d]$ y $g(c) \geq 0$, si g satisface*

$$g(x) \leq g(c) + \int_c^x h(t)g(t)dt \tag{1.4}$$

para todo $x \in [c;d]$, entonces:

$$g(x) \leq g(c)e^{\int_c^x h(t)dt} \tag{1.5}$$

Demostración:

Si $g(c) > 0$, denotaremos

$$R(x) = g(c) + \int_c^x h(t)g(t)dt \tag{1.6}$$

derivando con respecto a x

$$R^{'}(x) = h(x)g(x) \tag{1.7}$$

Además de (1.6) se cumple :

$$R(c) = g(c) \tag{1.8}$$

A continuación dividiremos a la ecuación (1.4) por $R(x)$, obteniendo

$$\frac{g(x)}{R(x)} \leq 1 \tag{1.9}$$

Multiplicamos por $h(x)$

$$\frac{g(x)h(x)}{R(x)} \leq h(x) \tag{1.10}$$

Cambiamos la variable x por t y por (1.7)

$$\frac{R^{'}(t)}{R(t)} \leq h(t)$$

Integrando ambos lados de $[c; x]$, tenemos

$$\int_c^x \frac{R^{'}(t)}{R(t)} dt = \ln(R(x)) - \ln(R(c)) \leq \int_c^x h(t)dt$$

Luego, por (1.8) se tiene:

$$\ln(R(x)) \leq \ln(g(x)) + \int_c^x h(t)dt$$

aplicando la exponencial obtenemos:

$$e^{\ln(R(x))} \leq e^{\ln(g(x)) + \int_c^x h(t)dt}$$

Finalmente de lo anterior y por (1.9) obtenemos

$$g(x) \leq R(x) \leq g(c)e^{\int_c^x h(t)dt}$$

Para $g(c) = 0$, tenemos

$$g(x) \leq \int_c^x h(t)g(t)dt$$

y cuando $g(c) > 0$, se cumple

$$g(x) \leq g(c)e^{\int_c^x h(t)dt}$$

$\blacksquare$

2 Resultados previos

Proposición 1. *Si la función f es acotada y Lipschitz en lo pequeño con $k \in [0;1\rangle$, entonces f es Lipschitz.*

Demostración:

Como $f : X \to Y$ es acotada, entonces $d(f(x), f(y)) \leq c$, donde $c > 0$ $\forall x, y \in X$

Por otro lado, como f es Lipschitz en el pequeño, entonces $\exists r > 0$, tal que $d(x, y) \leq r$, entonces:

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \tag{2.1}$$

El objetivo es probar que f es Lipschitz , es decir $d(f(x, f(y)) \leq kd(x, y) \forall x, y \in X$

Para $d(x, y) > r$, tenemos:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq c = \frac{c}{r} r \\ &\leq \frac{c}{r} d(x, y) \\ &\leq k_1 d(x, y) \end{aligned}$$

Se demuestra que:

$$d(f(x), f(y)) \leq k_1 d(x, y) \qquad \forall x, y \in X$$

entonces, f es Lipschitz. ■

Corolario 1. *Sean (X, d) y (Y, p) e.m., si X es compacto y si la función $F : X \longrightarrow Y$ es contracción por condición especial entonces F es contracción.*

Demostración:

Por hipótesis F es una contracción por condición especial, entonces F es lipschitziana lo que implica que es F es continua. Además, si X es compacto y $F : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces $f(X)$ es compacto, es decir, F es acotado.

Finalmente F es acotado y F es lipschitziana por condición especial con $k < 1$ entonces por la proposición 1 se concluye que F es una contracción. ■

Lema 2. *Sean (X, d) y (Y, p) e.m., si X es compacto y si la función $F : X \longrightarrow Y$ es Lipschitz por condición especial entonces F es Lipschitz.*

Demostración:

Demostraremos que f es continua. En efecto, como la función $f : X \to Y$ es lipschitziana por condicion especial entonces existe $r > 0$ y un $k \in [0; 1\rangle$ tal que para cada $x, y \in X$, $d(x, y) < r$, se tiene:

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

Además, con $x, y \in X$ y dado $\epsilon > 0$ tomaremos $r = \delta = \dfrac{\epsilon}{k} > 0$, se cumple:

$$\begin{aligned} d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) &\leq \underbrace{d(x, y)} \\ &< k\delta \\ &< k\left(\frac{\epsilon}{k}\right) = \epsilon \end{aligned}$$

Entonces:
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ x, y \in X,\ d(x, y) < \delta \to d(f(x), f(y)) < \epsilon$
Tenemos que f es uniformemente continua, es decir, que f es continua.

Por demostrar que f es compacta
Supongamos que $C = \{A_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de $f(x)$ en Y, es decir:

$$f(x) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

Consecuentemente,

$$X \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup f^{-1}_{i \in I}(A_i)$$

Entonces, $B = \{f^{-1}(A_i)\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de X. Por hipótesis, X es compacto por lo tanto, existe un subcubrimiento finito, es decir,

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$$

Consecuentemente:

$$f(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

lo cual implica que existe un subcubrimiento finito de $f(x)$, entonces f es compacto. Como f es continua y X es compacto entonces f es acotado.

Por otro lado, si la función es acotada y Lipschitz por condición especial con $k \in [0; 1\rangle$ entonces f es Lipschitz.

Además, por $i)$ y $ii)$ tenemos que f es acotada y f es Lipchitz por condición especial, entonces f es Lipschitz. ■

Las relaciones entre una contracción con condoción especial y la función con sus puntos fijos se discutirán en el Lema y teorema siguiente.

2.1. Resultados a tomar en cuenta

Lema 3. *"Sea (X, d) un espacio métrico y $x_0 \in X$. Sea $f : X \longrightarrow X$ es una contracción por la condición especial y $f(x_0) = x_0$, entonces existe un δ positivo tal que" :*

$$f(B(x_0, \delta) \subseteq B(x_0, \delta)$$

Demostración:

Sea f una contracción por condición especial, existe un $k \in [0; 1\rangle$ tal que

$$d(f(m), f(n)) \leq kd(m, n) \tag{2.2}$$

Además existe un $\delta \geq 0$ tal que :

$$d(m, n) \leq \delta \tag{2.3}$$

para cada $m, n \in X$.

Dado $y \in F(B(x_0, \delta))$ entonces, existe un $x \in (B(x_0, \delta)$ tal que

$$y = f(x)$$

luego, por la condición :

$$f(x_0) = x_0$$

$$d(y, x_0) = d(f(x), f(x_0)) \tag{2.4}$$

Además, por (2.2) y (2.3) obtenemos:

$$d(f(x), f(x_0)) \leq kd(x, x_0)$$

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(x, x_0)$$

$$d(f(x), f(x_0)) < \delta \tag{2.5}$$

de (2.4) y (2.5)

$$d(y, f(x_0)) < \delta$$

es decir :

$$y \in B(x_0, \delta).$$

■

La recíproca del lema anterior, no siempre se cumple.

En efecto :

Sea $X = (0, 2)$ con la métrica definida por :

$$d(u, v) = |u - v| \text{ para todo } u, v \in X$$

Consideremos la función $F : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$F(x) = \frac{x - 1}{3}$$

Entonces, sean $x, y \in (0, 2)$

$$\Big|F(x) - F(y)\Big| = \left|\frac{x-1}{3} - \frac{y-1}{3}\right|$$

$$|F(x) - F(y)| = \frac{1}{3}|x - y|$$

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{2}{3}|x - y|$$

Además, $|x-y| < 2$ para cada $x, y \in (0, 2)$, es decir F es una contracción por condición especial.

Luego, consideremos $\delta = 2$ y $x_0 = 1$, entonces :
$F(B(1,2)) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subseteq B(1,2)$.

Así, tenemos que no siempre se cumple la igualdad. Por lo tanto, la recíproca del lema, no siempre es cierta.

Teorema 1. *"Dado (X, d) un e.m. completo y $x_0 \in X$. Sea $F : X \longrightarrow X$ es una contracción en lo pequeño con constante r tal que :*
$\overline{B(x_0, r)} \subseteq B(x_0, r)$
Entonces existe $u \in \overline{B(x_0, r)}$ como punto fijo de F. Además, sea $u \in B(x_0, r)$ entonces u es un único punto fijo de F en $B(x_0, r)$"

Demostración:
Sea F una contracción por condición especial, existe $k \in [0; 1 >$ y $r > 0$ para cada $m, n \in X$ con $d(m, n) < r$ se tiene:

$$d(f(m), f(n)) \leq kd(m, n)$$

Definimos :
$x_1 = f(x_o)$ y $x_p = f(x_{p-1})$ para cada $p \in \mathbb{N}, p > 1$.
Por la hipótesis se tiene:

$$x_p \in B(x_o, r), \forall p \in \mathbf{N}$$

luego, tenemos :

$$\begin{aligned}
d(x_{p+1}, x_p) &= d(f(x_p, f(x_{p-1})) \leq kd(x_p, x_{p-1}) \leq k^p d(x_1, x_0) \leq k^p r \\
&= d(f(x_p, f(x_{p-1})) \leq kd(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \\
&= d(f(x_p, f(x_{p-1})) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
&= d(f(x_p, f(x_{p-1})) \leq k^2 d(f(x_{n-2}), f(x_{n-3})) \\
&= d(f(x_p, f(x_{p-1})) \leq k^3 d(x_{n-2}, x_{n-3})
\end{aligned}$$

Continuando el proceso se cumple :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0) < k^n r.$$

■

Como corolario, para $n \geq p$ tenemos un $r \in \mathbb{N}$, con $n = p + r$.

Por lo tanto :

$$d(X_n, X_p) : d(X_{p+r}, X_p) < r(k^{p+r-1} + k^{p+r-2} + ... + k^p) \leq rk^p \sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

Sea $k \in [0; 1\rangle$, la sucesión (x_n) es de Cauchy en X. La completitud de X implica la existencia de $v \in X$ tal que (x_p) converge de v en X .

Desde que, $x_p \in B(x_o, r)$ para cada p , entonces $v \in \overline{B(x_0, r)}$. De la hipótesis : $f(v) \in B(x_o, r)$ se tiene:

$$d(v, f(v)) \leq d(v, x_{po}) + d(x_{po}, x_{o+1}) + d(x_{po+1}, f(v)) \leq (1 + k)d(v, x_{po}) + d(x_{po}, x_{po+1})$$
$$< (1 + k)\varepsilon + 2\varepsilon = (k + 3)\varepsilon$$

Significa que v es un punto fijo de la función F. Además , sea $w \in B(x_o, r)$ con $f(w) = w$, entonces :

$$d(w, v) = d(f(w), f(v)) \leq kd(v, w)$$

con $k \in [0; 1\rangle$, entonces $d(w, v) = 0$, se tiene que : $w = v$ ■

Antes de desarrollar el teorema de Picard usando Lipschitz con condición especial, consideremos que por cada $(x, y), (x, y*) \in \mathbb{R}^2$ la métrica anterior estándar usual en $\mathbb{R}^2$ con $d((x, y)(x, y*)) < r$ es igual a $|y - y*| < r$.

Definición 14. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$*

Una función $f : V \to \mathbb{R}$ dice que es Lipschitz por condición especial en la segunda componente de V , si existe un $r > 0$ y $k \geq 0$ tal que por cada (x, y), se tiene: $(x, \overset{*}{y}) \in V, |y - \overset{*}{y}| < r$, tal que

$$|f(x, y) - f(x, \overset{*}{y})| \leq k|y - \overset{*}{y}| \tag{2.6}$$

Definición 15. *Sea $V \subseteq \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$*

Una función $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ es una contracción por condición especial en la segunda componente V, si existe un $r > 0$ y $k \in [0, 1\rangle$ tal que por cada $(x, y), (x, \overset{*}{y}) \in V, |y - \overset{*}{y}| < r$, se tiene :

$$|f(x, y) - f(x, \overset{*}{y})| \leq k|y - \overset{*}{y}| \tag{2.7}$$

Consideremos el PVI

$$\begin{cases} \text{``}\dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0'' \end{cases} \tag{2.8}$$

Con f una función continua de valor real en su dominio, el teorema de Picard sigue siendo válido, si la condición de Lipschitz se reemplaza por una contracción en el pequeño. Lo importante en la demostración es elegir el valor de $\alpha > 0$ tal que la sucesión construida (ϕ_n) satisfaga:

$$|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| < r \text{ para cada } |x - x_0| < \alpha \text{ para cada } n.$$

La función f es distinto de cero en el dominio.

3 Problema principal

Teorema 2. *Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio,(x_0, y_0) un punto interior de D y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Si la función f es continua en D satisface la contracción por condición especial en la segunda componente en D, entonces existe un positivo α una función única.*
$\phi : |x_0 - \alpha, x_0 + \alpha| \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que ϕ es una solución del PVI en (2.8) en $|x_0 - \alpha, x_0 + \alpha|$.

Demostración:

Sea $(x_0; y_0)$ un punto interior de D, entonces existen números positivos $a, b \in \mathbb{R}$ tal que:

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subseteq D \tag{3.1}$$

Sea f continua en E y E es compacto, entonces $|f|$ alcanza su máximo. Tomamos:

$$M = \text{máx}\{|f(x; y)| : (x; y) \in E\}$$

Sea F una contracción por condición especial en el segundo componente en D. existe un $r > 0$ y $k \in [0; 1\rangle$ tal que para todo $(x; y)$, $(x; \overset{*}{y}) \in D$, donde $d\Big((x; y), (x; \overset{*}{y})\Big) < r$, se tiene:

$$|f(x; y) - f(x; \overset{*}{y})| \leq k|y - \overset{*}{y}| \tag{3.2}$$

Tomar $\alpha = \text{mín}\left\{a, \dfrac{b}{(b+M)}, \dfrac{r}{M}, \dfrac{r^2}{(r+1)k}\right\}$.

Definimos: $\phi(x_0) = y_0$ con

$$\phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{n-1}(t))dt, \qquad x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \text{ para } n = 1, 2, 3 \ldots \tag{3.3}$$

Usando el método de inducción se prueba que para cada $|x - x_0| < \alpha$, tenemos:

$$(i)\ |\phi_n(x_0) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi_{n-1}(t))|dt \leq M|x - x_0| \leq M\alpha \leq b \text{ para } n = 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

$$(ii)\ |\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \leq \frac{k^n M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq b\frac{(k|x - x_0|)^n}{n!} \text{ para cada } n \tag{3.5}$$

De (3.4) y considerando que $k \in [0, 1\rangle$ y $\alpha < 1$, usando el método de inducción, podemos deducir que para cada $|x - x_0| < \alpha$ y para cada n

$$|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \leq \frac{k^n M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M\alpha\alpha^n \leq M\alpha < r \tag{3.6}$$

consideremos que:

$$|\phi_1(x) - \phi_0(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi_0(t))| dt \leq M|x - x_0|$$

$$\begin{aligned}
|\phi_2(x) - \phi_1(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi_1(t)) - f(t, \phi_0(t))| dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} k|\phi_1(t) - \phi_0(t)| dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} kM|t - x_0| dt \\
&\leq kM\frac{1}{2}|x - x_0|^2
\end{aligned}$$

supongamos que la fórmula se cumple para $n = m$, es decir:

$$|\phi_{m+1}(x) - \phi_m(x)| \leq \frac{k^m M|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \tag{3.7}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
|\phi_{m+2}(x) - \phi_{m+1}(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \phi_{m+1}(t)) - f(t, \phi_m(t))| dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} k|\phi_{m+1}(t) - \phi_m(t)| dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} k\frac{k^m M|t - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} dt \\
&= k\frac{k^m M|x - x_0|^{m+2}}{(m+2)!} = \frac{k^{m+1} M|x - x_0|^{m+2}}{(m+2)!}
\end{aligned}$$

el método de inducción se cumple para cada n además, para cada $|x - x_0| < \alpha$ y para cada n tenemos .

$$|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)| \leq \frac{k^n M|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq b\frac{(k|x - x_0|)^n}{(n)!} \leq b\frac{(k\alpha)^n}{n!} \tag{3.8}$$

por lo tanto:

$$|\phi_{n+1}(x) - \phi_0(x)| = \left| \sum_{i=o}^{n} \phi_{i+1}(x) - \phi_i(x) \right| \leq \sum_{i=o}^{n} b\frac{(k|x - x_0|)^i}{(i)!} \leq \sum_{i=o}^{n} b\frac{(k\alpha)^i}{(i)!} \tag{3.9}$$

Sea la serie

$$\sum_{n=o}^{n=\infty} \frac{(k\alpha)^n}{(i)!}$$

es convergente a través de Weierstrass se comprueba que la sucesión $(\phi_n(x))$ converge uniformemente a un función ϕ en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ para cada n , ϕ_n es continua en

$[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Además:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} \phi_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} \phi_n(t)dt \tag{3.10}$$

Por lo tanto, para cada $x \in |x_0 - \alpha, x_0 + \alpha|$

$$\begin{aligned}\phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_{n+1}(x) &= y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_n(t))dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, \phi_n(t))dt\end{aligned}$$

Esto significa que:

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \tag{3.11}$$

Para cada $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Sea f es continua, entonces ϕ es diferenciable en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$

Ademas $\phi(x_0) = y_0$, esto significa que ϕ es una solución de PVI (2.8) en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$

Unicidad

Sea ϕ y ψ dos soluciones del PVI (2.8) en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

$$\phi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \tag{3.12}$$

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))dt \tag{3.13}$$

para cada $x \in |x_0 - \alpha, x_0 + \alpha|$

$$|\phi(x) - \psi(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, \phi(t))dt \int_{x_0}^{x} -f(t, \psi(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^{x} k|\phi(t) - \psi(t)|dt \tag{3.14}$$

Usando la desigualdad de Gronwall con $g(x) = |\phi(x) - \psi(x)|$ y $h(x) = k$ para cada $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$, obtenemos: $0 \leq |\phi(x) - \psi(x)| \leq 0$. Por lo tanto tenemos:

$$\phi(x) = \psi(x) \text{ para cada } x \in [x_0, x_0 + \alpha]$$

Del mismo modo para cada $x \in [x_0 - \alpha, x_0]$

Por lo tanto, $\psi = \phi$ en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ■

Observación: El teorema 2 sigue siendo válido si la condición de contracción por condición especial en la segunda componente en D es reemplazado por la contracción por condición especial.

3.1. Resultado principal

Teorema 3. *Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\not\vDash} : a < x < b, y \in \mathbb{R}\}$. Sea (x_0, y_0) un punto interior de D y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en D y satisface la contracción con condición especial en la segunda componente en D, entonces existe una única función ϕ como la solución del PVI en (2.8) en (a, b) . Además sea $a = -\infty$ y $b = +\infty$ entonces la solución única ϕ del PVI en (2.8) existe en $\langle -\infty, \infty \rangle$.*

Demostración:

Del teorema 2 tenemos que existe un $\alpha_0 > 0$, una solución única φ_0 del PVI en (2.8) en $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$

i) Considerando $x_1 = x_0 - \alpha$ y $y_1 = \varphi_0(x_0 - \alpha_0)$, es claro que (x_1, y_1) es un punto interior de D. Por el teorema 2 existe un $\alpha_1 > 0$ y una solución única φ_1 en $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ del problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_1) = y_1 \end{cases} \tag{3.15}$$

i) Tomando $x_2 = x_0 + \alpha$ y $y_2 = \varphi_0(x_0 + \alpha_0)$, es claro que (x_2, y_2) es un punto interior de D. Por el teorema 2 existe un $\alpha_2 > 0$ y una solución única φ_2 en $[x_0 + \alpha_0, x_0 + \alpha_0 + \alpha_2]$

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_2) = y_2 \end{cases} \tag{3.16}$$

Continuando tenemos $\alpha_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

$$x_{2k+1} = x_{2k-1} + \alpha_{2k-1},\ x_{2k} = x_{2(k-1)} + \alpha_{2(k-1)},\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

(i) Una solución única φ_1 en $[x_0 - \alpha_0 - \alpha_1, x_0 - \alpha_0]$

(ii) Soluciones únicas $\varphi_{2k}, k \in \mathbb{N}$,

$$\left[x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{2i}, x_0 + \sum_{i=0}^{k} \alpha_{2i} \right]$$

(iii) $\varphi_{2k+1}, k \in \mathbb{N}$,

$$\left[x_0 - \alpha_0 - \sum_{i=0}^{k} \alpha_{2i+1}, x_0 + \alpha_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{2i+1} \right]$$

Tenemos una solución única φ donde

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \in [x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0] \\ \varphi_1(x), & x \in [x_0 - \alpha_0 - \alpha_1, x_0 - \alpha_0] \\ \varphi_{2k}(x), & x \in \left[x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{2i}, x_0 + \sum_{i=0}^{k} \alpha_{2i}\right] \text{ para algún } k \in \mathbb{N} \\ \varphi_{2k+1}(x), & x \in \left[x_0 - \alpha_0 - \sum_{i=0}^{k} \alpha_{2i+1}, x_0 + \alpha_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{2i+1}\right] \\ & \text{para algún} k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\varphi(x_0) = y_0$$

Para cada $k = 1, 2, 3 \ldots$

$$\left[x_0 - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_{2i-1}, x_0 + \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_{2i}\right] \subseteq \left[x_0 - \alpha_0 - \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{2i-1}, x_0 + \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_{2i}\right]$$

Sea $a_k = x_{2k-1}$ y $b_k = x_{2k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Tenemos:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \quad \lim_{k\to\infty} b_k = b$$

$\blacksquare$

4 Conclusiones y/o Sugerencias

- El Teorema 2 ha presentado un teorema de punto fijo que implica una contracción en un dominio reducido. La demostración del Teorema de Picard desarrollado se encuentra en el Teorema 3, donde se construye una sucesión de funciones de manera similar a la aproximación de Picard. Es crucial encontrar un valor α que garantice, que la condición de contracción siga cumpliéndose para cada valor de n.

- El teorema de Picard tiene varias variantes y se pueden utilizar enfoques alternativos para abordar la EUS de PVI en diferentes situaciones, con diferentes niveles de regularidad en los coeficientes. Estas perspectivas amplían la utilidad de la teoría de ecuaciones diferenciales y son fundamentales para dar solución a una diversidad de problemas prácticos y teóricos de las matemáticas y ciencias aplicadas.

- El teorema de Picard es fundamental tanto en matemáticas como en ciencias aplicadas, ya que establece de manera sólida la existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones diferenciales. Esta base esencial es crucial para la modelización y resolución de problemas en diversas disciplinas.

- El teorema de Picard con condiciones en lo pequeño o condiciones especiales es una generalización del teorema de Picard clásico que permite lidiar con coeficientes de ecuaciones diferenciales menos regulares, utilizando restricciones locales o condiciones específicas para asegurar la EUS. Esto es útil en situaciones en las que los coeficientes no cumplen las condiciones habituales de continuidad o diferenciabilidad.

Bibliografía

[1] Indrati, C. R. (2023). Fixed-Point Theorems Involving Lipschitz in the Small. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2023). Hindawi Limited.

[2] Muntean, A. (2015). Técnica del punto fijo, una opción útil para la resolución exacta de algunos sistemas de ecuaciones no lineales. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18(2), 375-392.

[3] García Álvaro, D. (2020). Teoremas del punto fijo y aplicaciones.

[4] Amann, H. (2011). Ordinary differential equations: an introduction to nonlinear analysis (Vol. 13). Walter de gruyter.

[5] Mawhin, J., & Rouche, N. (1973). Equations differentielles ordinaires, Tome 1: théorie générale.

[6] Adachi, Y. (1995). A generalization of the big Picard theorem. Kodai Mathematical Journal, 18(3), 408-424.

[7] Hussain, N., Kutbi, M. A., & Salimi, P. (2014). Fixed point theory in $\alpha-$complete metric spaces with applications. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2014, pp. 1-11). Hindawi Limited.

[8] Garrido, M. I., & Jaramillo, J. A. (2008). Lipschitz-type functions on metric spaces. Journal of mathematical analysis and applications, 340(1), 282-290.