Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

La topología de Zariski en el espectro primo de un módulo sobre un anillo conmutativo con unidad

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Juan Elmer VILLANUEVA ZEVALLOS

ASESOR

Dr. Alfonso PEREZ SALVATIERRA

Lima, Perú

2024

Referencia bibliográfica

Villanueva, J. (2024). *La topología de Zariski en el espectro primo de un módulo sobre un anillo conmutativo con unidad*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Juan Elmer Villanueva Zevallos
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10009112
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-1939-2580
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Alfonso Perez Salvatierra
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445739
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9944-4020
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Gabriel Armando Muñoz
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	44444774
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Wilfredo Mendoza Quispe
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	07407715
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.3 Álgebra

Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Ninguna
Ubicación geográfica de la investigación	Facultad de Ciencias Matemáticas Universidad Nacional Mayor de San Marcos Ciudad Universitaria Av. República de Venezuela s/n cuadra 34, Cercado de Lima Latitud: -12.05642315 Longitud: -77.0843326901621
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Noviembre de 2023 hasta febrero de 2024
URL de disciplinas OCDE	Matemática pura https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:00 horas del viernes 23 de febrero del 2024, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez (PRESIDENTE), Dr. Wilfredo Mendoza Quispe (MIEMBRO) y el Dr. Alfonso Perez Salvatierra (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: ***"LA TOPOLOGÍA DE ZARISKI EN EL ESPECTRO PRIMO DE UN MÓDULO SOBRE UN ANILLO CONMUTATIVO CON UNIDAD"*** *presentado por el señor Bachiller* ***Juan Elmer Villanueva Zevallos,*** *para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación sobresaliente ………………………… con un calificativo promedio de dieciocho ……(18).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez, manifestó que el señor Bachiller ***Juan Elmer Villanueva Zevallos****, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Siendo las 11:13 am horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez
PRESIDENTE

Dr. Wilfredo Mendoza Quispe
MIEMBRO

Dr. Alfonso Perez Salvatierra
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Vicerrectorado de Investigación y Posgrado
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Alfonso Perez Salvatierra en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°000185-2024-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es **"LA TOPOLOGÍA DE ZARISKI EN EL ESPECTRO PRIMO DE UN MÓDULO SOBRE UN ANILLO CONMUTATIVO CON UNIDAD",** presentado por el bachiller Juan Elmer Villanueva Zevallos, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y deSimilitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según larevisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documentoevaluado cuenta con el porcentaje de 14% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuarcon los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorioinstitucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor ____________________

DNI: 06445739

Nombres y apellidos del asesor:

Alfonso Pérez Salvatierra

La topología de Zariski en el espectro primo de un módulo sobre un anillo conmutativo con unidad

Este ejemplar corresponde a la redacción final de la tesis debidamente corregida y sustentada por **Juan Elmer Villanueva Zevallos** y aprobada por el jurado evaluador.

Lima, 23 de febrero de 2024

Jurado evaluador:

Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez	(Presidente)
Dr. Wilfredo Mendoza Quispe	(Miembro)
Dr. Alfonso Pérez Salvatierra	(Miembro asesor)

Tesis presentada a la Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, **UNMSM**, para optar el Título Profesional de **Licenciado en Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA

Villanueva, Juan

La topología de Zariski en el espectro primo de un módulo sobre un anillo conmutativo con unidad

Lima, Perú, 2024.

Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática

1. anillos 2. espacio espectral 3. espectro maximal 4. espectro primo 5. ideal maximal 6. ideal primo 7. módulos 8. submódulo maximal 9. submódulo primo 10. topología de Zariski.

Dedicatoria

Esta tesis está dedicada
a mi madre Magdalena Zevallos Cusqui
y a mi padre Martiniano Villanueva Ávila,
que se encuentran en la gloria de Dios.

Gracias por sus enseñanzas, consejos y amor incondicional.

"Pues el Señor es quien da la sabiduría;
la ciencia y el conocimiento brotan de sus labios."

Proverbios 2:6, La Sagrada Biblia

Agradecimientos

A Dios, por su presencia constante en mi vida y por haberme dado salud, fuerza y esperanza en los momentos difíciles de esta jornada.

A mi familia por su amor y dedicación; en especial, a mi hermana Natalia “Chonita”, que siempre me apoyó y creyó en mi.

A mi asesor Alfonso Pérez Salvatierra, por su apoyo, comprensión y amistad que siempre pude contar durante el período de realización de este trabajo.

A mi amigo y mentor durante el pregrado Mario Enrique Santiago Saldaña, por sus valiosas sugerencias y acompañamiento de este trabajo.

A mis amigos y compañeros de la Facultad de Ciencias Matemáticas con los cuales compartimos buenos momentos; en especial, a Alex Molina Sotomayor, por una primera lectura de este trabajo.

A los profesores de la Facultad de Ciencias Matemáticas, por el aprendizaje durante el pregrado.

A los técnicos administrativos de la Facultad de Ciencias Matemáticas que siempre fueron buenos y atentos conmigo.

Resumen

Para cualquier módulo M sobre un anillo conmutativo A con unidad, el espectro primo $\mathrm{Spec}_A(M)$ de M es la colección de todos los submódulos primos. En esta tesis, se describe una forma de topologizar $\mathrm{Spec}_A(M)$ con la topología de Zariski, que es análoga a la definida para el espectro primo de A, y se estudian algunas propiedades de este espacio topológico.

Palabras clave: anillos, espacio espectral, espectro maximal, espectro primo, ideal maximal, ideal primo, módulos, submódulo maximal, submódulo primo, topología de Zariski.

Abstract

For any module M over a commutative ring A with unity, the prime spectrum $\mathrm{Spec}_A(M)$ of M is the collection of all prime submodules. In this thesis, it is described a way to topologize $\mathrm{Spec}_A(M)$ with the Zariski topology, which is analogous to the defined for the prime spectrum of A, and some properties of this topological space are studied.

Keywords: rings, spectral space, maximal spectrum, prime spectrum, maximal ideal, prime ideal, modules, maximal submodule, prime submodule, Zariski topology.

Índice

Agradecimientos **v**

Resumen **vi**

Abstract **vii**

Introducción **xi**

Notaciones y terminología **xiv**

1. Nociones preliminares **1**
1.1. Anillos 1
1.1.1. Anillos y homomorfismos de anillos 1
1.1.1.1. Homomorfismo de anillos 3
1.1.2. Ideales y anillo cociente 4
1.1.2.1. Anillo cociente 6
1.1.3. Operaciones con ideales 7
1.1.3.1. Intersección de ideales 7
1.1.3.2. Unión de ideales 11
1.1.3.3. Suma de ideales 12
1.1.3.4. Producto de ideales 15
1.1.4. Ideales maximales e ideales primos 16
1.1.4.1. Ideales maximales 16
1.1.4.2. Ideales primos 19
1.2. Módulos 26
1.2.1. Módulos y homomorfismos de módulos 26
1.2.1.1. Homomorfismo de módulos 28
1.2.2. Submódulos y módulo cociente 29
1.2.2.1. Módulo cociente 30
1.2.3. Operaciones con submódulos 32

1.2.3.1. Intersección de submódulos 32
1.2.3.2. Unión de submódulos 35
1.2.3.3. Suma de submódulos 36
1.2.3.4. Submódulos extendidos 38
1.2.3.5. Ideal cociente 44
1.2.4. Clases de módulos y submódulos 50
1.2.4.1. Módulos sin torsión 50
1.2.4.2. Módulos fieles 50
1.2.4.3. Módulos simples 50
1.2.4.4. Módulos finitamente generados 50
1.2.4.5. Submódulos maximales 51
1.2.4.6. Módulos locales 55
1.3. Espacios topológicos 55
1.3.1. Topología 56
1.3.1.1. Conjuntos cerrados 57
1.3.1.2. Clausura de un conjunto 59
1.3.2. Base de una topología 60
1.3.3. Funciones continuas 61
1.3.4. Funciones abiertas y cerradas 62
1.3.5. Clases de espacios topológicos 62
1.3.5.1. Espacios compactos 62
1.3.5.2. Espacios T_0 67
1.3.5.3. Espacios T_1 68
1.3.5.4. Espacios irreducibles 69
1.3.5.5. Espacios conexos 71
1.3.5.6. Espacios conexos por caminos 73

2. La topología de Zariski en el espectro primo de un anillo 75
2.1. Variedad de un ideal 75
2.2. La topología de Zariski en el Spec(A) 79
2.2.1. Una base para la topología de Zariski en el Spec(A) . . 80
2.3. Propiedades topológicas del Spec(A) 81

3. Submódulos primos 93
3.1. Teoría general de los submódulos primos 93
3.1.1. Submódulos primos 93
3.1.2. El espectro primo de un módulo 97

3.1.3. Módulos primos . . . 99
3.2. Existencia del $\operatorname{Spec}_A(M)$ . . . 100
3.2.1. El p-módulo de Prüfer . . . 100
3.2.2. El espectro del cuerpo de fracciones de un dominio . . 103
3.3. Submódulos primos de la forma IN . . . 105

4. La topología de Zariski en el espectro primo de un módulo 108
4.1. Variedad de un submódulo . . . 108
4.2. La topología de Zariski en el $\operatorname{Spec}_A(M)$ . . . 113
4.3. Relacionando los espacios $\operatorname{Spec}_A(M)$ y $\operatorname{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ . . 115
4.4. Propiedades topológicas del $\operatorname{Spec}_A(M)$ . . . 120
4.4.1. Una base para la topología de Zariski en el $\operatorname{Spec}_A(M)$. 120
4.4.2. Compacidad y conexidad de $\operatorname{Spec}_A(M)$ . . . 122
4.4.3. Subconjuntos cerrados irreducibles de $\operatorname{Spec}_A(M)$ y sus puntos genéricos . . . 129
4.4.4. $\operatorname{Spec}_A(M)$ como un espacio espectral . . . 135

Bibliografía 138

Índice analítico 141

Introducción

En la geometría algebraica y el álgebra conmutativa, la *topología de Zariski* es una topología definida por una familia de variedades algebraicas que satisface los axiomas de los conjuntos cerrados de una topología. Esta topología fue introducida por Oscar Zariski,* como una topología sobre el conjunto de valoraciones de un cuerpo de funciones algebraicas (cf. [27]).

La colección de todos los ideales primos de un anillo conmutativo con unidad es llamado *espectro primo.* En [1], y un mejor tratado en [5], se construye una topología sobre el espectro primo, llamada *topología de Zariski*, donde un conjunto cerrado es la colección de ideales primos que contienen a un ideal dado. Esta topología, ofrece una forma geométrica de interpretar las propiedades algebraicas de un anillo, utilizando el lenguaje de la topología.

Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado y n un número natural. Sea $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n indeterminadas $x_1, \ldots, x_n$. El teorema de los ceros de Hilbert, establece una correspondencia biyectiva entre las variedades algebraicas irreducibles de $\mathbb{K}^n$ y el espectro primo de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, en que a los "puntos" $\{(a_1, \ldots, a_n)\}$ de $\mathbb{K}^n$ le corresponden los ideales maximales $\langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle$ de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (véase en [15]). Esto, a su vez, permite generalizar la topología de Zariski en el espectro primo de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ hacia la topología de Zariski en el espectro primo de un anillo conmutativo con unidad.

Debido a la importancia obtenida al asociar a cada anillo su espectro primo, una idea natural es extender la topología de Zariski hacia un "espectro primo" de un módulo sobre un anillo conmutativo con unidad. El primer paso para conseguir esto, fue dado por John Dauns. En [11], se introduce el concepto de *submódulo primo* de un módulo sobre un anillo, como una generalización del concepto de ideal primo de un anillo. Posteriormente, en [8], [9], [20] y [21], se estudian varias propiedades de los submódulos primos de módulos sobre un

***Oscar Zariski** nació el 24 de abril de 1899 en Kobryn, Bielorrusia; y falleció el 4 de julio de 1986 en Brooklyn, Estados Unidos de América. Creador de la llamada *topología de Zariski*, fue uno de los matemáticos más importantes del siglo XX (texto extraído y editado de [22]).

anillo conmutativo con unidad. La colección de todos los submódulos primos es llamado *espectro primo*. En la literatura, la primera generalización de la topología de Zariski para módulos definidos sobre un anillo conmutativo con unidad, fue dado por T. Duraivel. En [13], se introduce una topología en el espectro primo de un módulo, que continua siendo llamada *topología de Zariski*, la cual generaliza la topología de Zariski definida sobre del espectro primo de un anillo. En [10], se estudia el espectro primo de un módulo desde el punto de vista de los espacios espectrales. Actualmente, existen otras generalizaciones de la topología de Zariski definidas en el espectro primo de un módulo sobre un anillo conmutativo con unidad (véase, por ejemplo, [10] y [19]). El propósito principal de esta tesis es disertar sobre la topología dada en [13], así como de algunas propiedades de la misma.

La clase de submódulos primos, así como la topología de Zariski definida sobre el conjunto de ellos hacen parte de una línea de investigación activa, teniendo mucho impacto dentro del álgebra conmutativa, y en casos más generales dentro del álgebra no conmutativa (véase, por ejemplo, [2] y [7]).

Esta tesis está organizada en cuatro capítulos. Para su lectura, se asume que el lector tenga conocimientos sobre teoría de grupos y anillos, álgebra lineal y topología general, así como de conjuntos parcialmente ordenados.

En el Capítulo 1, se hace una revisión sobre la teoría necesaria para el desenvolvimiento de los capítulos subsecuentes. Este capítulo abarca tres secciones distribuidos de la siguiente manera: en la Sección 1.1, se describe la teoría de anillos conmutativos con unidad, en el que se enfatiza el estudio sobre los ideales maximales y los ideales primos. Asimismo, se estudia algunas operaciones con ideales. En la Sección 1.2, se enfoca sobre la teoría de módulos sobre anillos conmutativos con unidad, en el que se destaca el estudio de algunas operaciones con submódulos. En la Sección 1.3, se diserta sobre topología general, haciendo un estudio sobre base de un espacio, continuidad, compacidad, irreducibilidad, conexidad y los axiomas de separación T_0 y T_1.

En el Capítulo 2, se desenvuelve los resultados principales del espectro primo de un anillo conmutativo con unidad, dotado de la topología de Zariski. Una característica interesante de la topología de Zariski en un anillo conmutativo con unidad es que el espectro primo siempre es compacto y T_0, pero rara vez es T_1. Sin embargo, se dan las condiciones necesarias y suficientes en un anillo, para que su espectro primo sea T_1. También, se discuten condiciones para que su espectro primo sea irreducible o conexo.

En el Capítulo 3, se estudia la teoría de los submódulos primos. Asimismo, se establece el teorema fundamental de los submódulos primos. El propósito de este capítulo es presentar propiedades interesantes acerca de los submódulos primos, los cuales serán útiles para generalizar la topología de Zariski en el espectro primo de un anillo hacia la topología de Zariski en el espectro primo de un módulo. Una diferencia entre el espectro primo de un anillo y el espectro primo de un módulo es que en el primero caso, se tiene lo siguiente: "para cualquier anillo conmutativo con unidad, su espectro primo es no vacío si, y solamente si, el anillo es no cero". Entretanto, para un módulo señalar que: "para cualquier módulo sobre un anillo conmutativo con unidad, su espectro primo es no vacío si, y solamente si, el módulo es no cero", no es necesariamente verdad.

Finalmente, en el Capítulo 4, se define una topología en el espectro primo de un módulo. Esta es una generalización de la topología de Zariski en el espectro primo de un anillo. Además, se probará algunos resultados que son válidos en el espectro primo de un anillo. Se investigará este espacio topológico desde el punto de vista de espacios espectrales. Para terminar este capítulo, se determinarán condiciones para que el espectro primo de un módulo sea un espacio espectral.

Ciudad Universitária, 23 de febrero de 2024.

Notaciones y terminología

Salvo mención contraria, a lo largo de esta tesis, se utilizará las seguintes notaciones y terminología básica.

El símbolo $\mathbb{Z}$ denotará el conjunto de los números enteros; el símbolo $\mathbb{N}_0$ denotará el conjunto de los números enteros no negativos. Además, $\mathbb{N}$ denotará el conjunto de los números enteros positivos. El conjunto de los números racionales se indicará con el símbolo $\mathbb{Q}$, y el conjunto de los números reales se indicará con el símbolo $\mathbb{R}$.

El símbolo $\subset$ significará "es un subconjunto de"; el símbolo $\subsetneq$ será reservado para denotar una inclusión estricta. Por lo tanto, para los conjuntos X y Y, la expresión $X \subsetneq Y$, significa que $X \subset Y$ y $X \neq Y$.

El símbolo $\square$ se utilizará para indicar el final de una demostración.

El cardinal de un conjunto X, será denotado por $|\, X \,|$.

Se hace la distinción entre familia y un conjunto. Los paréntesis $(\ )$, como en $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, se utilizará para denotar una familia indexada por el conjunto Λ; aquí a_λ se considera como situado en la "posición" etiquetada por λ. Formalmente, esto es una función de Λ en algún conjunto A tal que $a_\lambda \in A$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Por otro lado, las llaves $\{\ \}$, como en $\{x_1, \ldots, x_n\}$ o $\{x \in X :$ la afirmación $P(x)$ es verdadera$\}$, se utilizará para indicar conjuntos.

Capítulo 1

Nociones preliminares

En este capítulo, se consideran la teoría y resultados necesarios para el desenvolvimento de esta tesis. Por conveniencia del lector, se escribirá algunas demostraciones relevantes.

Para un estudio más detallado sobre teoria de *anillos conmutativos* y *módulos*, véase [1], [4], [5], [6], [18], [24] y [25]. En cuanto a la teoria de *espacios topológicos*, véase [12], [14], [16], [23] y [26].

1.1 Anillos

En esta sección, se define lo que es un *anillo*. Se relacionará dos anillos, a través de un *homomorfismo* entre ellos. También, se consideran algunos de los conceptos elementales que tienen que ver con anillos, como *ideal* e *ideales primos*. Asimismo, se estudiará algunas *operaciones con ideales*.

1.1.1 Anillos y homomorfismos de anillos

Un *anillo* es una estructura algebraica formado por un conjunto y dos operaciones internas, que satisfacen ciertos axiomas.

Definición 1.1. Sea A un conjunto donde están definidas dos operaciones internas: *adición* $(+)$ y *multiplicación* $(\,\cdot\,)$. La terna $(A, +, \cdot\,)$ es un *anillo*, si satisface las siguientes condiciones:

(i) $(A, +)$ es un grupo abeliano;

(ii) para todos a, b y c en A, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

(iii) para todos a, b y c en A, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ y $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Si un anillo $(A, +, \cdot\,)$ satisface la siguiente condición:

(iv) existe un elemento $1_A \in A$ tal que $a \cdot 1_A = a = 1_A \cdot a$, para todo $a \in R$, se dice que $(A, +, \cdot\,)$ es un *anillo con unidad.*

Se denotará por 0_A el elemento neutro aditivo del grupo $(A, +)$. Es claro que

$$a \cdot 0_A = 0_A,$$

para todo a en A.

Si un anillo $(A, +, \cdot\,)$ satisface la siguiente condición:

(v) para todos a y b en A, $a \cdot b = b \cdot a$, se dice que $(A, +, \cdot\,)$ es un *anillo conmutativo.*

Si un anillo conmutativo $(A, +, \cdot\,)$ satisface la siguiente condición:

(vi) para todos los elementos a y b de A tales que $a \cdot b = 0_A$, se tenga que $a = 0_A$ o $b = 0_A$, se dice que $(A, +, \cdot\,)$ es un *anillo sin divisores de cero.*

Si $(A, +, \cdot\,)$ es un anillo conmutativo, con unidad $1_A \neq 0_A$ y sin divisores de cero, se dice que $(A, +, \cdot\,)$ es un *dominio de integridad.*

Si $(A, +, \cdot\,)$ es un anillo conmutativo y con unidad $1_A \neq 0_A$ satisfaciendo la siguiente condición:

(vii) para todo a en $A \setminus \{0_A\}$, existe a^{-1} en A tal que $a \cdot a^{-1} = 1_A$, se dice que $(A, +, \cdot\,)$ es un *cuerpo.*

Ejemplo 1.1. Sea $A = \{a\}$ un conjunto unitario. En A se definen las operaciones internas $+$ y $\cdot$ de la seguinte forma:

$$a + a = a \quad \text{y} \quad a \cdot a = a.$$

La terna $(A, +, \cdot\,)$ es un anillo conmutativo con unidad $1_A = 0_A = a$ y se denomina *anillo cero.*

Observación 1.1. Sea $(A, +, \cdot\,)$ un anillo conmutativo con unidad. Si $1_A = 0_A$, entonces $A = \{0_A\}$. En efecto, si $a \in A$, entonces

$$a = a \cdot 1_A = a \cdot 0_A = 0_A$$

y, por lo tanto, $A = \{0_A\}$.

Por el Ejemplo 1.1 y la Observación 1.1, los anillos ceros A proporcionan la única situación en la que $1_A = 0_A$.

Por un abuso de notación, se suele escribir A simplemente, en vez de $(A, +, \cdot\,)$, y se dice "A es un anillo" (para distinguir de "A es un conjunto").

Asimismo, cuando no hay confusión respecto a la operación interna $\cdot$ que se está considerando, se denotará el producto $a \cdot b$ simplemente por ab.

Para cada elemento a en un anillo A, se define inductivamente la potencia n-ésima de a como

$$a^1 = a \quad \text{y} \quad a^{n+1} = a^n \cdot a,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Si A es un anillo con unidad, se denota $a^0 := 1_A$.

1.1.1.1 Homomorfismo de anillos

Un *homomorfismo de anillos* es una función entre anillos que preserva las estructuras de ambos anillos.

Definición 1.2. Sean $(A, +_A, \cdot_A)$ y $(B, +_B, \cdot_B)$ anillos. Una función $f : A \longrightarrow B$ se dice que es un *homomorfismo* (o *homomorfismo de anillos*), si satisface las siguientes condiciones:
(i) para todos a y b en A, $f(a +_A b) = f(a) +_B f(b)$;
(ii) para todos a y b en A, $f(a \cdot_A b) = f(a) \cdot_B f(b)$.

Si un homomorfismo $f : A \longrightarrow B$, donde A y B son anillos con unidad, satisface la siguiente condición:
(iii) $f(1_A) = 1_B$, se dice que f *lleva la unidad en la unidad*.

Se define el *núcleo* de f, denotado por $\ker f$, como la imagen inversa de $\{0_B\}$ por f, es decir,

$$\ker f = f^{-1}(0_B).$$

Si $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos biyectivo, se dice que f es un *isomorfismo* (o *isomomorfismo de anillos*). Asimismo, se dice que A y B son *isomorfos* como anillos, denotado por $A \cong B$, si existe un isomorfismo $f : A \longrightarrow B$.

Todos los anillos ceros son isomorfos entre sí. Más precisamente, dos anillos ceros son isomorfos (bajo un único isomorfismo). De esta forma, existe un único anillo que consta de un solo elemento, salvo isomorfismo.

Si $f : A \longrightarrow B$ es un isomorfismo de anillos, la función $f^{-1} : B \longrightarrow A$, también, es un isomorfismo.

Cuando existe la necesidad de especificar las estructuras de los anillos A y B, un homomorfismo $f : A \longrightarrow B$, se acostumbra escribir $f : (A, +_A, \cdot_A) \longrightarrow (B, +_B, \cdot_B)$.

La condición (i) de la Definición 1.2, implica que $f : (A, +_A) \longrightarrow (B, +_B)$ es un homomorfismo de grupos abelianos. De esta forma todas las propiedades de homomorfismo de grupos abelianos son válidas para un homomorfismo de anillos.

A lo largo de esta tesis, la palabra "anillo" significará un *anillo conmutativo con unidad*, es decir, un anillo que satisface las condiciones (i) a (v) de la Definición 1.1. Asimismo, la palabra "homomorfismo" significará un *homomorfismo que lleva la unidad en la unidad*, es decir, un homomorfismo que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) de la Definición 1.2.

Sean $(A, +_A, \cdot_A)$ y $(B, +_B, \cdot_B)$ anillos. Se dice que B es un *subanillo* de A si B es un subconjunto de A, $+_A|_{B\times B} = +_B$, $\cdot_A|_{B\times B} = \cdot_B$ y $1_B = 1_A$. En este caso la inclusion $\iota_B : B \longrightarrow A$ es un homomorfismo de anillos inyectivo.

Nota 1.1. Un anillo A tiene varias propiedades con respecto a la manipulación de expresiones que involucran adición y multiplicación. Cuando se considera apenas una de las operaciones internas, muchas de esas propiedades son similares a las propiedades de los grupos y cuyas demostraciones, también, son similares. Asimismo, existen otras propiedades envolviendo las dos operaciones internas, que son fáciles de demostrar. Se supondrá el conocimiento y la veracidad de tales propiedades, por ejemplo, los resultados

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n,$$

para m y n en $\mathbb{N}_0$ y todo a en A, y el *binomio de Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

para todos a y b en A y todo n en $\mathbb{N}_0$.

1.1.2 Ideales y anillo cociente

Un *ideal* de un anillo es un subgrupo con respecto a la adición, y es absorbente con respecto a la multiplicación. El concepto de ideal es una generalización del conjunto de múltiplos de un número entero. Los ideales constituyen la subestructura más importante de un anillo.

Definición 1.3. Sean A un anillo e I un subconjunto no vacío de A. Se dice

que I es un *ideal* de A si las siguientes condiciones son satisfechas:
(i) para todos x y y en I, $x + y \in I$;
(ii) para todo x en I y todo a en A, $ax \in I$.

Ejemplo 1.2. Si A es un anillo, entonces $\{0_A\}$ y A son ideales de A. Estos ideales se denominan *ideales triviales* de A. En particular, si $A = \{0_A\}$, se tiene que A es el único ideal de A.

Ejemplo 1.3. Si $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, entonces el núcleo de f es un ideal de A.

Definición 1.4. Sean A un anillo e I un ideal de A. Se dice que I es un *ideal propio*, si este es un subconjunto propio de A.

Ejemplo 1.4. Si A es un anillo no cero, entonces $\{0_A\}$ es un ideal proprio de A.

Observación 1.2. Sea A un anillo. Si I es un ideal de A tal que $1_A \in I$, entonces $I = A$. En efecto, como I es un ideal y $1_A \in I$, dado $a \in A$, se tiene que $a = a \cdot 1_A \in I$. Luego, $a \in I$, y así $I = A$.

Un elemento u de un anillo A es llamado *unidad* (o *elemento invertible*) si existe u' en A tal que $u \cdot u' = 1_A$. El elemento u' es único con la propiedad mencionada, y se denota por u^{-1}.

Observación 1.3. Sea A un anillo. Si I es un ideal de A y u es una unidad de A tal que $u \in I$, entonces $I = A$. En efecto, como I es un ideal y $u \in I$, se tiene que $1_A = u \cdot u^{-1} \in I$. Luego, $1_A \in I$. Por lo tanto, por la Observación 1.2, $I = A$.

Observación 1.4. Si A es un anillo no cero, entonces A es un cuerpo si, y solamente si, los únicos ideales de A son los triviales.

El siguiente resultado, sigue inmediatamente de la Definición 1.3.

Proposición 1.1. *Sean A un anillo e I un subconjunto de A. Las siguientes condiciones son equivalentes*:
(1) *I es un ideal de A*;
(2) (i) *I es no vacío*;
(ii) *para todos x y y en I y todo a en A, $x + ay \in I$*;
(3) (i) $0_A \in I$;
(ii) *para todos x y y en I y todo a en A, $x + ay \in I$.*

1.1.2.1 Anillo cociente

Sea A un anillo. Dado un ideal I de A, se define una relación de equivalencia $\sim_I$ en A por

$$a \sim_I b \quad \text{si} \quad a - b \in I,$$

llamada *congruencia módulo I*.

La clase de equivalencia módulo I del elemento $a \in A$, se denota por $[a]$, es decir,

$$[a] = \{b \in A : \, b \sim_I a\} = \{a + x : \, x \in I\}.$$

Se define el *conjunto cociente de A por el ideal I* como el conjunto de todas las clases de equivalencia módulo I de los elementos de A, y se denota por A/I. Así,

$$A/I = \{[a] : \, a \in A\}.$$

Al conjunto A/I, de modo natural, se dota de una estructura de anillo, con las operaciones heredadas de A, de la siguiente manera:

$$[a] + [b] := [a + b] \quad \text{y} \quad [a] \cdot [b] := [ab],$$

para todos a y b en A. Este nuevo anillo $(A/I, +, \cdot)$ se denomina *anillo cociente de A por I*; su elemento cero es $[0_A]$, su elemento identidad es $[1_A]$ y el opuesto de una clase $[a]$ es $[-a]$.

Observación 1.5. Sea A un anillo. Si I es un ideal A, entonces A/I es cero si, y solamente si, $I = A$.

Ejemplo 1.5. Sea A un anillo. Sean I y J ideales de A tales que $I \subset J$. El conjunto

$$J/I = \{[a] : \, a \in J\},$$

es un ideal del anillo cociente A/I.

Observación 1.6. Sea A un anillo. Si I y J son ideales de A tales que $I \subset J$, entonces

$$(A/I)/(J/I) \cong A/J.$$

Existe una conexión muy importante entre los homomorfismos de anillos, ideales y anillos cocientes, este es el llamado *teorema de la correspondencia* para anillos.

Teorema 1.1 (Teorema de la correspondencia)**.** *Sean A un anillo e I un ideal de A. La función*

$$\begin{array}{rccc} \theta: & \{J : J \text{ es un ideal de } A \text{ e } I \subset J\} & \longrightarrow & \{\mathcal{J} : \mathcal{J} \text{ es un ideal de } A/I\} \\ & J & \longmapsto & J/I \end{array}$$

es biyectiva.

Demostración. Véase en [24, Observación 2.39]. □

1.1.3 Operaciones con ideales

En esta subsección, se estudiará ciertas operaciones en anillos, las cuales serán utilizadas a lo largo de esta tesis.

1.1.3.1 Intersección de ideales

Proposición 1.2. *Sea A un anillo. Si $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia indexada de ideales de A, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es un ideal de A.*

Demostración. Si $\Lambda = \varnothing$, la intersección es A el cual es un ideal de A. Supóngase ahora que $\Lambda \neq \varnothing$. Como $0_A \in I_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $0_A \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Sean ahora $x, y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ y $a \in A$. Para finalizar la demostración, se mostrará que $x+ay \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. En efecto, como $x, y \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, se tiene que $x, y \in I_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Sea $\mu \in \Lambda$. Teniendo en vista que $x, y \in I_\mu$ y siendo I_μ un ideal de A, concluyese que $x + ay \in I_\mu$. Puesto que $\mu \in \Lambda$ es arbitrário, se obtiene que $x + ay \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Esto muestra que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es un ideal de A. □

Ideal generado por un conjunto

Sean A un anillo y H un subconjunto de A. Sea $\mathscr{H}$ la familia de todos los ideales de A que contienen a H. Tenga en cuenta que $\mathscr{H} \neq \varnothing$, ya que $A \in \mathscr{H}$. Se define el *ideal de A generado por H*, denotado por $\langle H \rangle$, como la intersección de todos los ideales pertenecientes a la familia $\mathscr{H}$, es decir,

$$\langle H \rangle = \bigcap_{I\in\mathscr{H}} I.$$

De esta forma, $\langle H \rangle$ es un ideal de A (por la Proposición 1.2) y $H \subset \langle H \rangle$. Más aún, $\langle H \rangle$ es el menor ideal de A que contiene a H.

Si $H=\varnothing$, se tiene que $\langle H\rangle=\{0_A\}$. Si $H=\{h_1,\ldots,h_n\}$, para algún $n\in\mathbb{N}$, se suele escribir simplemente $\langle h_1,\ldots,h_n\rangle$, en vez de $\langle\{h_1,\ldots,h_n\}\rangle$. En particular, $\langle 1_A\rangle=A$ (por la Observación 1.2).

Proposición 1.3. *Sea A un anillo. Si H es un subconjunto no vacío de A, entonces*

$$\langle H\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ih_i : n\in\mathbb{N},\, a_i\in A,\, h_i\in H,\ 1\le i\le n\right\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{H}$ la familia de todos los ideales de A que contienen a H. Considere el conjunto

$$I_0=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ih_i : n\in\mathbb{N},\, a_i\in A,\, h_i\in H,\ 1\le i\le n\right\}.$$

Es claro que $H\subset I_0$, pues $h=1_A\cdot h=\sum_{i=1}^{1}1_Ah\in I_0$, para todo $h\in H$. A continuación se mostrará que I_0 es un ideal de A. De hecho, sean $x,y\in I_0$ y $a\in A$. Entonces, existen $m,n\in\mathbb{N}$, $a_i,b_j\in A$ y $h_i,h'_j\in H$, para todos los índices $i,j\in\mathbb{N}$ tales que $1\le i\le m$ y $1\le j\le n$, con

$$x=\sum_{i=1}^{m}a_ih_i \quad \text{y} \quad y=\sum_{j=1}^{n}b_jh'_j.$$

Luego,

$$x+ay=\sum_{k=1}^{m+n}c_k\widetilde{h}_k,$$

donde

$$c_k=\begin{cases}a_k, & \text{si } 1\le k\le m;\\ ab_{k-m}, & \text{si } m+1\le k\le m+n;\end{cases}$$

y

$$\widetilde{h}_k=\begin{cases}h_k, & \text{si } 1\le k\le m;\\ h'_{k-m}, & \text{si } m+1\le k\le m+n.\end{cases}$$

Como $c_k\in A$ y $\widetilde{h}_k\in H$, para todo $k\in\mathbb{N}$ tal que $1\le k\le m+n$, sigue que $x+ay\in I_0$. Esto muestra que I_0 es un ideal de A. Por lo tanto, $I_0\in\mathscr{H}$, y así

$$\langle H\rangle\subset I_0. \tag{1.1.1 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $I \in \mathscr{H}$ un elemento arbitrário. Se mostrará que $I_0 \subset I$. En efecto, dado $z \in I_0$, existen $s \in \mathbb{N}$, $a'_i \in A$ y $h''_i \in H$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, con

$$z = \sum_{i=1}^{s} a'_i h''_i.$$

Teniendo en vista que $a'_i \in A$ y $h''_i \in H \subset I$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$; y siendo I un ideal, sigue que $z \in I$. Esto muestra que $I_0 \subset I$, para todo $I \in \mathscr{H}$. De esta forma,

$$I_0 \subset \langle H \rangle. \tag{1.1.1 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.1.1 (1)) y (1.1.1 (2)), $\langle H \rangle = I_0$. $\square$

Corolario 1.1. *Sean A un anillo y H un subconjunto de A. Si $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\langle h_1, \ldots, h_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i h_i : \, a_i \in A, \ 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{H}$ la familia de todos los ideales de A que contienen a H. Considere el conjunto

$$I_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i h_i : \, a_i \in A, \ 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, si $n = 1$ se tiene que $h_1 = 1_A \cdot h_1$; y si $n > 1$, $h_k = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} h_i$, donde

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1_A, & \text{si } i = k; \\ 0_A, & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Luego, $h_k \in I_n$ y, por lo tanto, H está contenido en I_n. A continuación se mostrará que I_n es un ideal de A. De hecho, sean $x, y \in I_n$ y $a \in A$. Entonces, existen $a_i, b_i \in A$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i, \leq n$, con

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i \quad \text{y} \quad y = \sum_{i=1}^{n} b_i h_i.$$

Luego,

$$x + ay = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i + \sum_{i=1}^{n} (ab_i)h_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + ab_i)h_i,$$

y así $x + ay \in I_n$. Esto muestra que I_n es un ideal de A. Por lo tanto, $I_n \in \mathscr{H}$, y así

$$\langle H \rangle \subset I_n. \tag{1.1.2 (1)}$$

Por otro lado, por la Proposición 1.3, todo elemento de I_n pertenece a $\langle H \rangle$, es decir,

$$I_n \subset \langle H \rangle. \tag{1.1.2 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.1.2 (1)) y (1.1.2 (2)), $\langle H \rangle = I_n$. □

Definición 1.5. Sean A un anillo y $x \in A$. El ideal $\langle x \rangle$ se denomina *ideal principal de A generado por x.*

Dados un anillo A y $x \in A$, por el Corolario 1.1, se tiene

$$\langle x \rangle = \{ax : a \in A\}.$$

En particular,

$$\langle 0_A \rangle = \{a \cdot 0_A : a \in A\} = \{0_A\}.$$

Nótese que $\langle x \rangle = \langle -x \rangle$, para todo $x \in A$.

Un dominio de integridad en el que todos los ideales son principales es llamado *dominio de ideales principales.*

Observación 1.7. Si A es un anillo, entonces

$$A/\langle 0_A \rangle \cong A.$$

Observación 1.8. Sea A un anillo. Sean I y J ideales de A tales que $I \subset J$. Si $J = \langle a \rangle$, para algún $a \in A$, entonces $J/I = \langle [a] \rangle$. En particular, si A es un dominio de ideales principales, por el teorema de la correspondencia para anillos, A/I es un dominio de ideales principales.

Ejemplo 1.6. El anillo $\mathbb{Z}$ es un dominio de ideales principales. Más precisamente, todo ideal de $\mathbb{Z}$ es de la forma $\langle n \rangle$, para algún número entero no negativo n.

Sea n un número entero no negativo. El anillo cociente de $\mathbb{Z}$ por $\langle n \rangle$, se denota $\mathbb{Z}_n$ y es llamado *anillo de los enteros módulo n*. Así,

$$\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\langle n \rangle.$$

Para todo entero positivo n, se tiene que $\mathbb{Z}_n = \{[a] : 0 \leq a \leq n-1\}$. Además, $\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo si, y solamente si, n es un número primo. También, $\mathbb{Z}_n$ es un dominio de integridad si, y solamente si, n es un número primo.

Ejemplo 1.7. Sean $s \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_s$ números primos positivos diferentes y $k_1, \ldots, k_s$ números enteros positivos. Sea $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$. El conjunto de ideales de $\mathbb{Z}$ que contienen a $\langle n \rangle$ es

$$\{\langle p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s} \rangle : m_i \in \mathbb{Z},\, 0 \leq m_i \leq k_i,\, 1 \leq i \leq s\}.$$

En efecto, si I es un ideal de $\mathbb{Z}$ tal que $\langle n \rangle \subset I$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I = \langle m \rangle$. Entonces, m divide $p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$. Luego, $m = p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}$, para algunos $m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}$ tales que $0 \leq m_i \leq k_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$. Así, $I = \langle p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s} \rangle$. Por otro lado, todo ideal de la forma $\langle p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s} \rangle$ con $m_i \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq m_i \leq k_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, contiene $\langle n \rangle$.

Ejemplo 1.8. Sean $s \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_s$ números primos positivos diferentes y $k_1, \ldots, k_s$ números enteros positivos. Considérese el anillo cociente $\mathbb{Z}_n$, donde $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$. El conjunto de ideales del anillo cociente $\mathbb{Z}_n$ es

$$\left\{\left\langle \left[p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}\right] \right\rangle : m_i \in \mathbb{Z},\, 0 \leq m_i \leq k_i,\, 1 \leq i \leq s\right\}.$$

En efecto, por el Ejemplo 1.7, el conjunto de ideales de $\mathbb{Z}$ que contienen a $\langle n \rangle$ es

$$\{\langle p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s} \rangle : m_i \in \mathbb{Z},\, 0 \leq m_i \leq k_i,\, 1 \leq i \leq s\}.$$

Consecuentemente, por el teorema de la correspondencia para anillos, el conjunto de ideales de $\mathbb{Z}_n$ es

$$\left\{\left\langle \left[p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}\right] \right\rangle : m_i \in \mathbb{Z},\, 0 \leq m_i \leq k_i,\, 1 \leq i \leq s\right\}.$$

1.1.3.2 Unión de ideales

En general, la unión de una familia de ideales no es un ideal. Por ejemplo, $H := \langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle$ no es un ideal de $\mathbb{Z}$; ya que 2 y 3 pertenecen a H, pero 5 no está en H. Entretanto, si la familia es totalmente ordenada la unión de la familia es también un ideal.

Proposición 1.4. *Sea A un anillo. Si $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia indexada no vacía de ideales totalmente ordenada de A, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es un ideal de A.*

Demostración. Dado un elemento $\mu \in \Lambda$ fijo, se tiene que $0_A \in I_\mu$ y, por lo tanto, $0_A \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Sean ahora $x, y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ y $a \in A$. Para finalizar la demostración, se mostrará que $x+ay \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. En efecto, como $x, y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, existen $\kappa, \mu \in \Lambda$ tales que $x \in I_\kappa$ y $y \in I_\mu$. Siendo $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia indexada totalmente ordenada, existe $\eta \in \{\kappa, \mu\}$ tal que $I_\kappa \subset I_\eta$ e $I_\mu \subset I_\eta$. Luego, $x, y \in I_\eta$. Teniendo en vista que I_η es un ideal de A, concluyese que $x + ay \in I_\eta$. Por lo tanto,

$$x + ay \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda.$$

Esto muestra que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ es un ideal de A. □

1.1.3.3 Suma de ideales

Sean A un anillo y $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia indexada de ideales de A. Se define la *suma* $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ de la familia $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, como el ideal de A generado por $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, es decir,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \left\langle \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \right\rangle.$$

Si $\Lambda = \varnothing$, entonces $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \langle \varnothing \rangle = \langle 0_A \rangle$. Si $\Lambda = \{1, \ldots, n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, se suele escribir simplemente $\sum_{i=1}^{n} I_i$, en vez de $\sum_{\lambda\in\{1,\ldots,n\}} I_\lambda$. En particular, para $n = 2$ se acostumbra escribir $I_1 + I_2$, en vez de $\sum_{i=1}^{2} I_i$.

Dados dos ideales I y J de un anillo de A, se dice que su suma $I + J$ es *directa*, denotado por $I \oplus J$, si $I \cap J = \langle 0_A \rangle$.

Proposición 1.5. *Sea A un anillo. Si $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia indexada no vacía de ideales de A, entonces*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_{\lambda_i} : n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \Lambda,\ c_{\lambda_i} \in I_{\lambda_i},\ 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{H}$ la familia de todos los ideales de A que contienen a

$H := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Considere el conjunto

$$I = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_{\lambda_i} : n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \Lambda,\ c_{\lambda_i} \in I_{\lambda_i},\ 1 \le i \le n \right\}.$$

Dado $\lambda \in \Lambda$ fijo, $c_\lambda = \sum_{i=1}^{1} c_\lambda \in I$, para todo $c_\lambda \in I_\lambda$. Es decir, $I_\lambda \subset I$, para todo $\lambda \in \Lambda$ y, por lo tanto, $H \subset I$. A continuación se mostrará que I es un ideal de A. De hecho, sean $x, y \in I$ y $a \in A$. Entonces, existen $m, n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i, \mu_j \in \Lambda$, $c_{\lambda_i} \in I_{\lambda_i}$ y $c_{\mu_j} \in I_{\mu_j}$, para todos los índices $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le n$, con

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_{\lambda_i} \quad \text{y} \quad y = \sum_{j=1}^{n} c_{\mu_j}.$$

Luego,

$$x + ay = \sum_{k=1}^{m+n} d_k,$$

donde

$$d_k = \begin{cases} c_{\lambda_k}, & \text{si } 1 \le k \le m; \\ ac_{\mu_{k-m}}, & \text{si } m+1 \le k \le m+n. \end{cases}$$

Como $d_k \in I_{\lambda_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \le k \le m+n$, sigue que $x + ay \in I$. Esto muestra que I es un ideal de A. Por lo tanto, $I \in \mathscr{H}$, y así

$$\langle H \rangle \subset I. \tag{1.1.3 (1)}$$

Por otro lado, por la Proposición 1.3, todo elemento de I pertenece a $\langle H \rangle$, es decir,

$$I \subset \langle H \rangle. \tag{1.1.3 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.1.3 (1)) y (1.1.3 (2)), $\langle H \rangle = I$. □

Corolario 1.2. *Sea A un anillo. Si $n \in \mathbb{N}$ e $I_1, \ldots, I_n$ son ideales de A, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i : c_i \in I_i,\ 1 \le i \le n \right\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{H}$ la familia de todos los ideales de A que contienen a

$H := \bigcup_{i=1}^{n} I_i$. Considere el conjunto

$$J_n := \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i : c_i \in I_i,\ 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Dado $k \in \{1, \ldots, n\}$, sea $c_k \in I_k$. Si $n = 1$, se tiene que $k = 1$ y $c_1 = \sum_{i=1}^{1} c_i$; y si $n > 1$, $c_k = \sum_{i=1}^{n} c_i$, donde

$$c_i = \begin{cases} c_k, & \text{si } i = k; \\ 0_A, & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Luego, $c_k \in J_n$, para todo $c_k \in I_k$. Es decir, $I_k \subset J_n$, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ y, por lo tanto, $H \subset J_n$. A continuación se mostrará que J_n es un ideal de A. De hecho, sean $x, y \in J_n$ y $a \in A$. Entonces, existen $c_i, d_i \in I_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$, con

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i \quad \text{y} \quad y = \sum_{i=1}^{n} d_i.$$

Luego,

$$x + ay = \sum_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n} ad_i = \sum_{i=1}^{n} (c_i + ad_i).$$

Como $c_i + ad_i \in I_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$, concluyese que $x + ay \in J_n$. Esto muestra que J_n es un ideal de A. Por lo tanto, $J_n \in \mathscr{H}$, y así

$$\langle H \rangle \subset J_n. \tag{1.1.4 (1)}$$

Por otro lado, por la Proposición 1.5, todo elemento de J_n pertenece a $\langle H \rangle$, es decir,

$$J_n \subset \langle H \rangle. \tag{1.1.4 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.1.4 (1)) y (1.1.4 (2)), $\langle H \rangle = J_n$. $\square$

Ejemplo 1.9. Sean A un anillo e I un ideal de A. Si a es un elemento de A y $[a]$ es su clase de equivalencia módulo I, entonces $\langle [a] \rangle = (\langle a \rangle + I)/I$. En efecto, como $a \in \langle a \rangle \subset \langle a \rangle + I$, sigue que $[a] \in (\langle a \rangle + I)/I$ y, por lo tanto, $\langle [a] \rangle \subset (\langle a \rangle + I)/I$. Para establecer la inclusión contraria, sea $\alpha \in (\langle a \rangle + I)/I$. Entonces, existen $x \in \langle a \rangle$ y $y \in I$ tales que $\alpha = [x + y]$. Como $[y] = [0_A]$

y $x = ra$, para algún $r \in A$, se tiene que $\alpha = [x] + [y] = [ra] = [r] \cdot [a]$. Luego, $\alpha \in \langle [a] \rangle$. Esto implica que $(\langle a \rangle + I)/I \subset \langle [a] \rangle$. Por lo tanto, $\langle [a] \rangle = (\langle a \rangle + I)/I$.

1.1.3.4 Producto de ideales

Sea A un anillo. Si I y J son ideales de A, se define el *producto de I por J*, denotado por IJ, como el ideal de A generado por $\{ab : a \in I, b \in J\}$, es decir,

$$IJ = \langle \{ab : a \in I, b \in J\} \rangle.$$

Proposición 1.6. *Sea A un anillo. Si I y J son ideales de A, entonces*

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{H}$ la familia de todos los ideales de A que contienen a $H := \{ab : a \in I, b \in J\}$. Considere el conjunto

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J, 1 \leq i \leq n \right\}.$$

Es claro que $H \subset K$, pues $ab = \sum_{i=1}^{1} ab \in K$, para todos $a \in I$ y $b \in J$. A continuación se mostrará que K es un ideal de A. De hecho, sean $x, y \in K$ y $a \in A$. Entonces, existen $m, n \in \mathbb{N}$, $a_i, a'_j \in I$ y $b_i, b'_j \in J$, para todos los índices $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$, con

$$x = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i \quad \text{y} \quad y = \sum_{j=1}^{n} a'_j b'_j.$$

Luego,

$$x + ay = \sum_{k=1}^{m+n} a''_k b''_k,$$

donde

$$a''_k = \begin{cases} a_k, & \text{si } 1 \leq k \leq m; \\ aa'_{k-m}, & \text{si } m+1 \leq k \leq m+n; \end{cases}$$

y

$$b''_k = \begin{cases} b_k, & \text{si } 1 \leq k \leq m; \\ b'_{k-m}, & \text{si } m+1 \leq k \leq m+n. \end{cases}$$

Como $a''_k \in I$ y $b''_k \in J$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq m+n$, sigue que $x + ay \in K$. Esto muestra que K es un ideal de A. Por lo tanto, $K \in \mathscr{H}$, y así

$$\langle H \rangle \subset K. \tag{1.1.5 (1)}$$

Por otro lado, por la Proposición 1.3, todo elemento de K pertenece a $\langle H \rangle$, es decir,

$$K \subset \langle H \rangle. \tag{1.1.5 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.1.5 (1)) y (1.1.5 (2)), $\langle H \rangle = K$. □

1.1.4 Ideales maximales e ideales primos

En esta subsección, se estudiará los conceptos de *ideal maximal* e *ideal primo*, los cuales son fundamentales para las aplicaciones de la teoría de anillos a la geometría algebraica. En particular, los ideales primos forman la clase más importante de ideales en la teoría de anillos.

1.1.4.1 Ideales maximales

En esta subsubsección, se define el concepto de *ideal maximal* en un anillo.

Definición 1.6. Sea A un anillo. Se dice que el ideal $\mathfrak{m}$ de A es un *ideal maximal*, si $\mathfrak{m}$ es un elemento maximal, con respecto a la inclusión, del conjunto de ideales propios de A.

El siguiente teorema, caracteriza los ideales maximales en términos de la estructura de su anillo cociente.

Teorema 1.2. *Sea A un anillo. Si $\mathfrak{m}$ es un ideal de A, entonces $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A si, y solamente si, $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo.*

Demostración. Véase en [24, Lema 3.3]. □

Corolario 1.3. *Si A un anillo, entonces $\langle 0_A \rangle$ es un ideal maximal de A si, y solamente si, A es un cuerpo.*

Demostración. Es inmediato del Teorema 1.2 y de la Observación 1.7. □

Corolario 1.4 ([24, Ejercicio 3.4])**.** *Sea A un anillo. Si I y $\mathfrak{m}$ son ideales de A tales que $I \subset \mathfrak{m}$, entonces $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A si, y solamente si, $\mathfrak{m}/I$ es un ideal maximal de A/I.*

Demostración. Por la Observación 1.6, se tiene que $(A/I)/(\mathfrak{m}/I) \cong A/\mathfrak{m}$. Ahora, el resultado sigue del Teorema 1.2. □

Corolario 1.5. *Sea A un anillo. Si I es un ideal propio de A, entonces $\mathcal{M}$ es un ideal maximal de A/I si, y solamente si, existe un único ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A tal que $I \subset \mathfrak{m}$ y $\mathcal{M} = \mathfrak{m}/I$.*

Demostración. Es inmediato del teorema de la correspondencia para anillos y del Corolario 1.4. □

Ejemplo 1.10. Todo ideal maximal de $\mathbb{Z}$ es de la forma $\langle p \rangle$, para algún número primo positivo p. En efecto, para un número no negativo p, se tiene que $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo si, y solamente si, p es un número primo. Luego, para un número no negativo p, por el Teorema 1.2, se tiene que $\langle p \rangle$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z}$ si, y solamente si, p es un número primo.

El siguiente teorema muestra que todo anillo no cero siempre posee al menos un deal maximal. Como muchos teoremas de existencia general, la prueba se basa en el Lema de Zorn. Sin embargo, en muchos anillos específicos, los ideales maximales pueden ser encontrados, independientemente del Lema de Zorn.

Teorema 1.3 (Krull [1, Teorema 1.3])**.** *Todo anillo no cero, posee al menos un ideal maximal.*

Demostración. Sean A un anillo no cero y Σ el conjunto de ideales propios de A. Como A es un anillo no cero, por el Ejemplo 1.4, el conjunto Σ es no vacío. Asimismo, Σ es parcialmente ordenado respecto a la relación de inclusión. Ahora, si Ω es un conjunto totalmente ordenado no vacío de Σ, por la Proposición 1.4, $J := \bigcup_{I\in\Omega} I$ es un ideal de A. Puesto que $I \neq A$, para todo $I \in \Omega$, por la Observación 1.2, $1_A \notin I$, para todo $I \in \Omega$. Así, $1_A \notin J$ y, por lo tanto, $J \in \Sigma$. Además, es claro que J es una cota superior para Ω. Entonces, por el Lema de Zorn, Σ tiene un elemento maximal, es decir, existe un ideal maximal de A. □

Corolario 1.6 ([1, Corolario 1.4]). *Sea A un anillo. Si I es un ideal propio de A, entonces existe un ideal maximal de A conteniendo a I.*

Demostración. Como $I \neq A$, por la Observación 1.5, el anillo cociente A/I no es cero. Entonces, por el Teorema 1.3, existe un ideal maximal $\mathcal{M}$ de A/I. Luego, por el Corolario 1.5, existe un único ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A tal que $I \subset \mathfrak{m}$ y $\mathcal{M} = \mathfrak{m}/I$. □

Un anillo que posee un único ideal maximal es llamado *anillo local*.

El espectro maximal de un anillo

Definición 1.7. Sea A un anillo. Se define el *espectro maximal de A*, denotado por $\mathrm{Max}(A)$, como el conjunto de todos los ideales maximales de A.

Expresado en forma conjuntista,

$$\mathrm{Max}(A) = \{\mathfrak{m} : \ \mathfrak{m} \text{ es un ideal maximal de } A\}.$$

Observación 1.9. Si A es un anillo, entonces $\mathrm{Max}(A) = \varnothing$ si, y solamente si, $A = \{0_A\}$. En efecto, supóngase inicialmente que $\mathrm{Max}(A) = \varnothing$. Luego, si A es un anillo no cero, por el Teorema 1.3, existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A y, por lo tanto, $\mathrm{Max}(A) \neq \varnothing$, una contradicción. Esto muestra que $A = \{0_A\}$. Reciprocamente, si A es un anillo cero, entonces A no posee ideales propios y, por lo tanto, no existe ideales maximales. Esto implica que $\mathrm{Max}(A) = \varnothing$.

Ejemplo 1.11. Sea A un anillo. Si I es un ideal propio de A, entonces

$$\mathrm{Max}(A/I) = \{\mathfrak{m}/I : \ \mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A) \text{ e } I \subset \mathfrak{m}\}.$$

En efecto, esto sigue del Corolario 1.5.

Ejemplo 1.12. El espectro maximal de $\mathbb{Z}$ es

$$\mathrm{Max}(\mathbb{Z}) = \{\langle p \rangle : \ p \text{ es un número primo positivo}\}.$$

En efecto, esto sigue del Ejemplo 1.10.

Ejemplo 1.13. Sean $s \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_s$ números primos positivos diferentes y $k_1, \ldots, k_s$ números enteros positivos. Si $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$, entonces

$$\mathrm{Max}(\mathbb{Z}_n) = \{\langle [p_i] \rangle : \ 1 \leq i \leq s\}.$$

En efecto, por el ejemplos 1.7 y 1.10, el conjunto de ideales maximales de $\mathbb{Z}$ que contienen a $\langle n \rangle$ es $\{\langle p_i \rangle : 1 \leq i \leq s\}$. Luego, por el Ejemplo 1.11 y por la Observación 1.8, concluyese que $\mathrm{Max}(\mathbb{Z}_n) = \{\langle [p_i] \rangle : 1 \leq i \leq s\}$.

1.1.4.2 Ideales primos

En esta subsubsección, se define el concepto de *ideal primo* en un anillo.

Definición 1.8. Sea A un anillo. Se dice que el ideal propio $\mathfrak{p}$ de A es un *ideal primo*, si para todos a y b en A tales que $ab \in \mathfrak{p}$, se tenga que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$.

Teorema 1.4. *Sea A un anillo. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal propio de A, entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A si, y solamente si, para todos ideales I y J de A tales que $IJ \subset \mathfrak{p}$, se tenga que $I \subset \mathfrak{p}$ o $J \subset \mathfrak{p}$.*

Demostración. Supóngase inicialmente que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A. Sean I y J ideales de A tales que $IJ \subset \mathfrak{p}$ e $I \not\subset \mathfrak{p}$. Se probará que $J \subset \mathfrak{p}$. En efecto, como $I \not\subset \mathfrak{p}$, existe $a \in I$ tal que $a \notin \mathfrak{p}$. Ahora, dado $b \in J$, se tiene que $ab \in IJ \subset \mathfrak{p}$ y, por lo tanto, $ab \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, sigue que $b \in \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $J \subset \mathfrak{p}$.

Reciprocamente, sean a y b en A tales que $ab \in \mathfrak{p}$. Entonces, $\langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle \subset \mathfrak{p}$. Luego, por la hipótesis, sigue que $\langle a \rangle \subset \mathfrak{p}$ o $\langle b \rangle \subset \mathfrak{p}$. Como $a \in \langle a \rangle$ y $b \in \langle b \rangle$, concluyese que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. Esto muestra que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A. □

El siguiente teorema, caracteriza los ideales primos en términos de la estructura de su anillo cociente.

Teorema 1.5. *Sea A un anillo. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal de A, entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A si, y solamente si, $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad.*

Demostración. Véase en [24, Lema 3.23]. □

Corolario 1.7 ([24, Observación 3.25 (i)])**.** *Todo ideal maximal es un ideal primo.*

Demostración. En efecto, si $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de un anillo A, por el Teorema 1.2, $A/\mathfrak{m}$ es un cuerpo y, por lo tanto, un dominio de integridad. Luego, por el Teorema 1.5, $\mathfrak{m}$ es un ideal primo de A. □

Corolario 1.8 ([1, pág. 3]). *Si A es un anillo, entonces $\langle 0_A \rangle$ es un ideal primo de A si, y solamente si, A es un dominio de integridad.*

Demostración. Es inmediato del Teorema 1.5 y de la Observación 1.7. □

Corolario 1.9 ([24, Lema 3.28]). *Sea A un anillo. Si I y $\mathfrak{p}$ son ideales de A tal que $I \subset \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A si, y solamente si, $\mathfrak{p}/I$ es un ideal primo de A/I.*

Demostración. Por la Observación 1.6, se tiene que $(A/I)/(\mathfrak{p}/I) \cong A/\mathfrak{p}$. Ahora, el resultado sigue del Teorema 1.5. □

Corolario 1.10. *Sea A un anillo. Si I es un ideal propio de A, entonces $\mathcal{P}$ es un ideal primo de A/I si, y solamente si, existe un único ideal primo $\mathfrak{p}$ de A tal que $I \subset \mathfrak{p}$ y $\mathcal{P} = \mathfrak{p}/I$.*

Demostración. Es inmediato del teorema de la correspondencia y del Corolario 1.9. □

Ejemplo 1.14. Todo ideal primo no zero de $\mathbb{Z}$ es de la forma $\langle p \rangle$, para algún número primo positivo p. En efecto, para un número no negativo p, se tiene que $\mathbb{Z}_p$ es un dominio de integridad si, y solamente si, p es un número primo. Luego, para un número no negativo p, por el Teorema 1.5, se tiene que $\langle p \rangle$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}$ si, y solamente si, p es un número primo.

Proposición 1.7. *Sea A un anillo. Si I es un ideal propio de A, entonces existe un ideal primo de A conteniendo a I.*

Demostración. Como I es un ideal propio de A, por el Corolario 1.6, existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A tal que $I \subset \mathfrak{m}$. Por otro lado, por el Corolario 1.7, $\mathfrak{m}$ es un ideal primo, y esto finaliza la demostración. □

Conjunto multiplicativamente cerrado

Definición 1.9. Sean A un anillo y S un subconjunto de A. Se dice que S es un *conjunto multiplicativamente cerrado* de A si las siguientes condiciones son satisfechas:

(i) $1_A \in S$;

(ii) para todos r y s en S, $rs \in S$.

Ejemplo 1.15. Sea A un anillo. Si x es un elemento de A, entonces

$$S = \{x^n : n \in \mathbb{N}_0\}$$

es un conjunto multiplicativamente cerrado de A.

Teorema 1.6 ([24, Teorema 3.44])**.** *Sean A un anillo e I un ideal de A. Si S es conjunto multiplicativamente cerrado de A tal que $I \cap S = \varnothing$, entonces existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A tal que $I \subset \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$.*

Demostración. Sea Σ el conjunto de ideales J de A tales que $I \subset J$ y $J \cap S = \varnothing$. Como I es un ideal de A tal que $I \subset \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, el conjunto Σ es no vacío. Asimismo, Σ es parcialmente ordenado respecto a la relación de inclusión. Ahora, si Ω es un conjunto totalmente ordenado no vacío de Σ, por la Proposición 1.4, $K := \bigcup_{J \in \Omega} J$ es un ideal de A. Teniendo en cuenta que $I \subset J$, para todo $J \in \Omega$, sigue que $I \subset K$. Por otro lado, puesto que $J \cap S = \varnothing$, para todo $J \in \Omega$, se tiene que

$$K \cap S = \left(\bigcup_{J \in \Omega} J \right) \cap S = \bigcup_{J \in \Omega} (J \cap S) = \varnothing$$

y, por lo tanto, $K \in \Sigma$. Además, es claro que K es una cota superior para Ω. Entonces, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $\mathfrak{p}$ en Σ.

Se afirma que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A. En efecto, como $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ y $1_A \in S$ (ya que S es un conjunto multiplicativamente cerrado de A), sigue que $1_A \notin \mathfrak{p}$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p}$ es un ideal propio de A. Ahora, sean x y y en A tales que $x \notin \mathfrak{p}$ y $y \notin \mathfrak{p}$. Se probará que $xy \notin \mathfrak{p}$. Como $I \subset \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p} + \langle x \rangle$ e $I \subset \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p} + \langle y \rangle$, por la maximalidad de $\mathfrak{p}$ en Σ, se tiene que $(\mathfrak{p} + \langle x \rangle) \cap S \neq \varnothing$ y $(\mathfrak{p} + \langle y \rangle) \cap S \neq \varnothing$. Entonces, existen $a, b \in A$ y $u, v \in \mathfrak{p}$ tales que $r := u + ax \in S$ y $s := v + by \in S$. Utilizando nuevamente el hecho que S es un conjunto multiplicativamente cerrado de A, sigue que

$$rs = (u + ax)(v + by) = [uv + (by)u + (ax)v] + (ab)(xy)$$

pertenece a S. Como $uv + (by)u + (ax)v \in \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, concluyese que $xy \notin \mathfrak{p}$. Esto muestra que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A tal que $I \subset \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$. □

El espectro primo de un anillo

Definición 1.10. Sea A un anillo. Se define el *espectro primo de A*, denotado por $\operatorname{Spec}(A)$, como el conjunto de todos los ideales primos de A.

Expresado en forma conjuntista,

$$\operatorname{Spec}(A) = \{\mathfrak{p} : \ \mathfrak{p} \text{ es un ideal primo de } A\}.$$

Observación 1.10. Si A es un anillo, entonces $\operatorname{Max}(A) \subset \operatorname{Spec}(A)$. En efecto, si A es un anillo cero, por la Observación 1.9, $\operatorname{Max}(A) = \varnothing \subset \operatorname{Spec}(A)$. Ahora, si A es un anillo no cero, el resultado es consecuencia inmediata del Corolario 1.7.

Observación 1.11. Si A es un anillo, entonces $\operatorname{Spec}(A) = \varnothing$ si, y solamente si, $A = \{0_A\}$. En efecto, supóngase inicialmente que $\operatorname{Spec}(A) = \varnothing$. Luego, si A es un anillo no cero, por la Proposición 1.7, existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A tal que $\langle 0_A \rangle \subset \mathfrak{p}$ y, por lo tanto, $\operatorname{Spec}(A) \neq \varnothing$, una contradicción. Esto muestra que $A = \{0_A\}$. Reciprocamente, si A es un anillo cero, entonces A no posee ideales propios y, por lo tanto, no existe ideales primos. Esto implica que $\operatorname{Spec}(A) = \varnothing$.

Ejemplo 1.16. Sea A un anillo. Si I es un ideal propio de A, entonces

$$\operatorname{Spec}(A/I) = \{\mathfrak{p}/I : \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \text{ e } I \subset \mathfrak{p}\}.$$

En efecto, esto sigue del Corolario 1.10.

Ejemplo 1.17. El espectro primo de $\mathbb{Z}$ es

$$\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) = \operatorname{Max}(\mathbb{Z}) \,\dot\cup\, \{\langle 0 \rangle\}.$$

En efecto, esto sigue de los ejemplos 1.12 y 1.14, y de los corolarios 1.3 y 1.8.

Ejemplo 1.18. Sean $s \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_s$ números primos positivos diferentes y $k_1, \ldots, k_s$ números enteros positivos. Si $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$, entonces

$$\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n) = \operatorname{Max}(\mathbb{Z}_n).$$

En efecto, por el ejemplos 1.7 y 1.14, el conjunto de ideales primos de $\mathbb{Z}$ que contienen a $\langle n \rangle$ es $\{\langle p_i \rangle : 1 \leq i \leq s\}$. Luego, por el Ejemplo 1.16 y por la Observación 1.8, concluyese que $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n) = \{\langle [p_i] \rangle : 1 \leq i \leq s\}$. Así, por el Ejemplo 1.13, $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n) = \operatorname{Max}(\mathbb{Z}_n)$.

El radical de un ideal

Definición 1.11. Sean A un anillo e I un ideal de A. Se define el *radical del ideal* I, denotado por $\operatorname{rad} I$, como el conjunto de todos los elementos a en A tales que a^n pertenezca a I, para algún entero positivo n.

Expresado en forma conjuntista,

$$\operatorname{rad} I = \{a \in A : a^n \in I, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Lema 1.1 ([24, Lema 3.46]). *Sea A un anillo. Si I es un ideal de A, entonces* $\operatorname{rad} I$ *es un ideal de A conteniendo a I.*

Demostración. Es claro que $I \subset \operatorname{rad} I$, pues $a = a^1 \in I$, para todo $a \in I$; es decir, $a \in \operatorname{rad} I$, para todo $a \in I$. A continuación se mostrará que $\operatorname{rad} I$ es un ideal de A. En efecto, sean $x, y \in \operatorname{rad} I$ y $a \in A$. Entonces, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $x^m \in I$ y $y^n \in I$. Luego, por el binomio de Newton,

$$(x + ay)^{m+n-1} = \sum_{i=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{i} x^{m+n-1-i} a^i y^i.$$

Ahora, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m+n-1\}$, se tiene lo siguiente: si $i \leq n-1$ entonces $n - 1 - i \geq 0$, y si $i \geq n$ entonces $i - n \geq 0$. Luego,

$$u := \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{i} x^{n-1-i} a^i y^i$$

y

$$v := \sum_{i=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{i} x^{m+n-1-i} a^i y^{i-n}$$

son elementos de A. Como

$$(x + ay)^{m+n-1} = ux^m + vy^n,$$

concluyese que $(x + ay)^{m+n-1} \in I$, ya que x^m y y^n pertenecen al ideal I. Así, $\operatorname{rad} I$ es un ideal de A. □

La siguiente proposición da una definición alternativa del radical de un ideal.

Proposición 1.8. *Sea A un anillo. Si I es un ideal de A, entonces el radical de I es la intersección de todos los ideales primos de A que contienen a I.*

Demostración. Sea $\mathscr{P}$ la familia de todos los ideales primos de A que contienen a I. Sea a un elemento de $\operatorname{rad} I$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \in I$. Ahora, si $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}$, entonces $a^n \in \mathfrak{p}$. Siendo $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, sigue que $a \in \mathfrak{p}$ y, por lo tanto, $a \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}} \mathfrak{p}$. Esto muestra que

$$\operatorname{rad} I \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}} \mathfrak{p}. \tag{1.1.6 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $a \in \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}} \mathfrak{p}$. Entonces, $a \in \mathfrak{p}$, para todo ideal $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}$. Se probará que $a \in \operatorname{rad} I$. En efecto, procediendo por el absurdo, supóngase que $a \notin \operatorname{rad} I$. Considere el conjunto multiplicativamente cerrado $S = \{a^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ de A. Como $a \notin \operatorname{rad} I$, entonces $a^m \notin I$, para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Así, $I \cap S = \varnothing$. Por lo tanto, por el Teorema 1.6, existe un ideal primo $\mathfrak{q}$ de A tal que $I \subset \mathfrak{q}$ y $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$. Esto implica que $\mathfrak{q} \in \mathscr{P}$ y, por lo tanto, $a \in \mathfrak{q} \cap S$, contradiciendo el hecho que $\mathfrak{q} \cap S = \varnothing$. Esto muestra que

$$\bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}} \mathfrak{p} \subset \operatorname{rad} I. \tag{1.1.6 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.1.6 (1)) y (1.1.6 (2)), $\operatorname{rad} I = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathscr{P}} \mathfrak{p}$. □

Corolario 1.11. *Sea A un anillo. Si I es un ideal de A, entonces* $\operatorname{rad} I \subset \mathfrak{p}$, *para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ que contiene a I.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A que contiene I. Por la Proposición 1.8, se tiene que $\operatorname{rad} I$ es la intersección de todos los ideales primos de A que contienen a I y, por lo tanto, $\operatorname{rad} I \subset \mathfrak{p}$. □

Corolario 1.12. *Sea A un anillo. Si I es un ideal propio de A, entonces* $\operatorname{rad} I$ *es un ideal propio de A.*

Demostración. Como I es un ideal propio de A, por la Proposición 1.7, existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A conteniendo a I. Luego, por el Corolario 1.11, $\operatorname{rad} I \subset \mathfrak{p} \subsetneq A$ y, por lo tanto, $\operatorname{rad} I$ es un ideal propio de A. □

Un ideal I de un anillo A, se dice que es un *ideal radical* si coincide con su radical, es decir, si $\operatorname{rad} I = I$.

Proposición 1.9. *Todo ideal primo de un anillo es radical. En particular, todo ideal maximal de un anillo es radical.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de un anillo A. Por el Lema 1.1, $\mathfrak{p} \subset \operatorname{rad} \mathfrak{p}$. Por otro lado, por el Corolario 1.11, se tiene que $\operatorname{rad} \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\operatorname{rad} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, es decir, $\mathfrak{p}$ es un ideal radical.

Ahora, si $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A, por el Corolario 1.7, $\mathfrak{m}$ es un ideal primo de A. Luego, por lo visto anteriormente, $\mathfrak{m}$ es un ideal radical. □

El nilradical de un anillo

Un elemento x de un anillo A es llamado *nilpotente*, si existe n en $\mathbb{N}$ tal que $x^n = 0_A$. Por ejemplo, en todo anillo A, 0_A es un elemento nilpotente, pues $0_A^1 = 0_A$.

En un dominio de integridad A, el único elemento nilpotente es 0_A. Entretanto, en el anillo $\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$, los elementos nilpotentes son $[0]$ y $[2]$.

Observación 1.12. Sea A un anillo A. Si x es un elemento nilpotente de A, entonces $1_A - x$ es una unidad en A. En efecto, siendo x un elemento nilpotente de A, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0_A$. Como

$$1_A = 1_A - x^n = (1_A - x) \sum_{i=0}^{n-1} x^i,$$

concluyese que $1_A - x$ es una unidad en A.

Definición 1.12. Sean A un anillo e I un ideal de A. Se define el *nilradical de A*, denotado por $\aleph_A$, como el conjunto de todos los elementos nilpotentes de A.

Expresado en forma conjuntista,

$$\aleph_A = \{a \in A : \; a^n = 0_A, \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Observación 1.13. El nilradical de un anillo A es el radical del ideal $\langle 0_A \rangle$. En particular, el nilradical de A es un ideal de A.

La siguiente proposición da una definición alternativa del nilradical de un anillo.

Proposición 1.10. *El nilradical de un anillo A es la intersección de todos los ideales primos de A.*

Demostración. Como todo ideal primo de A contiene el ideal $\langle 0_A \rangle$, por la Proposición 1.8, sigue que $\mathrm{rad}\langle 0_A \rangle$ es la intersección de todos los ideales primos de A. Entretanto, por la Observación 1.13, se tiene que $\aleph_A = \mathrm{rad}\langle 0_A \rangle$, y esto finaliza la demostración. $\square$

1.2 Módulos

En esta sección, se define lo que es un *módulo*. Se relacionará dos módulos, a través de un *homomorfismo* entre ellos. También, se estudiará una subestructura llamada *submódulo*. Asimismo, se estudiará algunas *operaciones con submódulos*.

1.2.1 Módulos y homomorfismos de módulos

Un *módulo* sobre un anillo es una generalización del concepto de espacio vectorial sobre un cuerpo, donde los correspondientes escalares son los elementos del anillo.

Definición 1.13. Sea A un anillo. Un *módulo sobre* A o un A*-módulo* es una cuaterna $(M, +, A, \cdot\,)$, donde $(M, +)$ es un grupo abeliano y $\cdot : A \times M \longrightarrow M$ es una operación externa, satisfaciendo las siguientes condiciones:
(i) para todo a en A, y, para todos m y n en M, $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$;
(ii) para todos a y b en A, y, para todo m en M, $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$;
(iii) para todos a y b en A, y, para todo m en M, $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$;
(iv) para todo m en M, $1_A \cdot m = m$.

Ejemplo 1.19. Sean A un anillo y $M = \{m\}$ un conjunto unitario. En M se definen una operación interna $+$ y una operación externa $\cdot$ de la seguinte forma:
$$m + m = m \quad \text{y} \quad a \cdot m = m,$$
para todo a en A. La cuaterna $(M, +, A, \cdot\,)$ es un A-módulo y se denomina A*-módulo cero.*

Por un abuso de notación, se suele escribir M simplemente, en vez de $(M, +, A, \cdot\,)$, y se dice "M es un A-módulo" (para distinguir de "M es un conjunto"). Asimismo, cuando no hay confusión respecto a la operación externa $\cdot$ que se está considerando, se denotará el producto escalar $a \cdot m$ simplemente por am.

Ejemplo 1.20. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial es un $\mathbb{K}$-módulo.

Ejemplo 1.21. Todo anillo es un módulo sobre sí mismo, donde la operación externa es la multiplicación del anillo. Es decir, si A es un anillo entonces A es un A-módulo.

Ejemplo 1.22. Todo grupo abeliano $(G,+)$, es un $\mathbb{Z}$-módulo con la operación externa $\cdot$, definida de la seguinte forma:

$$n\cdot g=\begin{cases} ng, & \text{si } n>0;\\ 0_G, & \text{si } n=0;\\ (-n)g, & \text{si } n<0; \end{cases}$$

para todo g en G y $n\in\mathbb{Z}$. Más aún, $\cdot:\mathbb{Z}\times G\longrightarrow G$ es la única operación externa que convierte a $(G,+)$ en un $\mathbb{Z}$-módulo.

Ejemplo 1.23. Sea A un anillo y sea $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia indexada no vacía de A-módulos. El producto cartesiano $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ es un A-módulo, con las operaciones de adición y multiplicación por escalar, definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}+(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}&=(m_\lambda+n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},\\ a(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}&=(am_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},\end{aligned}$$

para todos $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},(n_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ y $a\in A$. Este nuevo A-módulo es llamado el *producto directo* de la familia $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$; su elemento cero es $(0_{M_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ y el opuesto de una familia $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es $(-m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Si $\Lambda=\{1,\dots,s\}$, para algún $s\in\mathbb{N}$, se suele escribir simplemente $\prod_{i=1}^{s} M_i$, en vez de $\prod_{\lambda\in\{1,\dots,s\}} M_\lambda$. En particular, para $n=2$ se acostumbra escribir $M_1\times M_2$, en vez de $\prod_{i=1}^{2} M_i$.

Nota 1.2. Las condiciones de la Definición 1.13, tienen varias propiedades con respecto a la manipulación de expresiones que involucran adición y multiplicación escalar, muchas de ellas similares a las propiedades de los espacios vectoriales, cuyas demostraciones, también, son similares. Se supondrá el conocimiento y la veracidad de tales propiedades, por ejemplo, el resultado

$$0_A\cdot m=0_M,\quad \text{para todo } m \text{ en } M.$$

1.2.1.1 Homomorfismo de módulos

Un *homomorfismo de módulos* es una generalización del concepto de transformación lineal, en particular, conserva las estructuras de ambos módulos.

Definición 1.14. Sea A un anillo. Sean $(M, +_M, A, \cdot_M)$ y $(N, +_N, A, \cdot_N)$ A-módulos. Una función $f : M \longrightarrow N$ se dice que es un *homomorfismo* (o *homomorfismo de módulos*), si satisface las siguientes condiciones:
(i) para todos m y m' en M, $f(m +_M m') = f(m) +_N f(m')$;
(ii) para todos a en A y m en M, $f(a \cdot_M m) = a \cdot_N f(m)$.

Se define el núcleo de f, denotado por $\ker f$, como la imagen inversa de $\{0_N\}$ por f, es decir,
$$\ker f = f^{-1}(0_N).$$

Si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de A-módulos biyectivo, se dice que f es un *isomorfismo*. Asimismo, se dice que M y N son *isomorfos* como módulos, denotado por $M \cong N$, si existe un isomorfismo $f : M \longrightarrow N$.

Todos los A-módulos ceros son isomorfos entre sí. Más precisamente, dos A-módulos ceros son isomorfos (bajo un único isomorfismo). De esta forma, existe un único A-módulo que consta de un solo elemento, salvo isomorfismo.

Si $f : M \longrightarrow N$ es un isomorfismo de A-módulos, la función $f^{-1} : N \longrightarrow M$, también, es un isomorfismo.

Cuando existe la necesidad de especificar las estructuras de los A-módulos M y N, un homomorfismo $f : M \longrightarrow N$, se acostumbra escribir $f : (M, +_M, A, \cdot_M) \longrightarrow (N, +_N, A, \cdot_N)$.

Observación 1.14. Las condiciones de la Definición 1.14, tienen varias propiedades con respecto a la manipulación de expresiones que involucran adición y multiplicación escalar, muchas de ellas similares a las propiedades de las transformaciones lineales, cuyas demostraciones, también, son similares. Se supondrá el conocimiento y la veracidad de tales propiedades, por ejemplo, los resultados
$$f(0_M) = 0_N$$
y
$$f(m - m') = f(m) - f(m'), \quad \text{para todos } m \text{ y } m' \text{ en } M.$$

1.2.2 Submódulos y módulo cociente

Un *submódulo* de un módulo sobre un anillo es un subgrupo con respecto a la adición, y es absorbente con respecto a la multiplicación escalar. El concepto de submódulo es una generalización de la noción de subespacio vectorial. Los submódulos constituyen la subestructura más importante de un módulo sobre un anillo.

Definición 1.15. Sea A un anillo. Sean M un A-módulo y N un subconjunto no vacío de M. Se dice que N es un *submódulo* de M si las siguientes condiciones son satisfechas:
(i) para todos m y n en N, $m + n \in N$;
(ii) para todo m en N y todo a en A, $am \in N$.

Ejemplo 1.24. Sea A un anillo. Si M es un A-módulo, entonces $\{0_M\}$ y M son submódulos de M. Estos submódulos se denominan *submódulos triviales* de M. En particular, si $M = \{0_M\}$, se tiene que M es el único submódulo de M.

Ejemplo 1.25. Sea A un anillo. Si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de A-módulos, entonces el núcleo de f es un submódulo de M.

Si M es un A-módulo, se denotará por $\mathscr{S}_A(M)$ al conjunto de submódulos de M.

Ejemplo 1.26. Sea A un anillo. Los submódulos de A considerado como módulo sobre sí mismo, son los ideales de A. Es decir,

$$\mathscr{S}_A(A) = \{I : I \text{ es un ideal de } A\}.$$

Ejemplo 1.27. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, los submódulos de V son los subespacios vectoriales de V. Es decir,

$$\mathscr{S}_{\mathbb{K}}(V) = \{W : W \text{ es un subespacio vectorial de } V\}.$$

Definición 1.16. Sea A un anillo. Sean M un A-módulo y N un submódulo de M. Se dice que N es un *submódulo propio* si este es un subconjunto propio de M.

Ejemplo 1.28. Sea A un anillo. Si M es un A-módulo no cero, entonces $\langle 0_M \rangle_A$ es un submódulo propio de M.

El siguiente resultado, sigue inmediatamente de la Definición 1.16.

Proposición 1.11. *Sea A un anillo. Sean M un A-módulo y N un subconjunto de M. Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) *N es un submódulo de M*;

(2) (i) *N es no vacío*;

  (ii) *para todos m y n en N y todo a en A, $m + an \in N$*;

(3) (i) $0_M \in N$;

  (ii) *para todos m y n en N y todo a en A, $m + an \in N$.*

1.2.2.1 Módulo cociente

Sean A un anillo y M un A-módulo. Dado un submódulo N de M, se define una relación de equivalencia $\sim_N$ en M por

$$m \sim_N n \quad \text{si} \quad m - n \in N,$$

llamada *congruencia módulo N*.

La clase de equivalencia del elemento $m \in M$, se denota por $[m]$, es decir,

$$[m] = \{n \in M : n \sim_N m\} = \{m + x : x \in N\}.$$

Se define el *conjunto cociente de M por el submódulo N* como el conjunto de todas las clases de equivalencia de elementos de M, y se denota por M/N. Así,

$$M/N = \{[m] : m \in M\}.$$

Al conjunto M/N, de modo natural, se dota de una estructura de A-módulo, con las operaciones heredadas de M, de la siguiente manera:

$$[m] + [n] := [m + n] \quad \text{y} \quad a \cdot [m] := [am],$$

para todos $m, n \in M$ y $a \in A$. Este nuevo módulo $(M/N, +, A, \cdot)$ se denomina *A-módulo cociente de M por N*; su elemento cero es $[0_M]$ y el opuesto de una clase $[m]$ es $[-m]$.

La aplicación natural

$$\begin{array}{rccc} \pi : & M & \longrightarrow & M/N \\ & m & \longmapsto & [m] \end{array}$$

es un homomorfismo sobreyectivo con $\ker \pi = N$, el cual es llamado *proyección canónica.*

Ejemplo 1.29. Sean A un anillo e I un ideal de A. El conjunto cociente A/I es un A-módulo con las operaciones

$$[x] + [y] := [x + y] \quad \text{y} \quad a \cdot [x] := [ax],$$

para todos $x, y, a \in A$.

Observación 1.15. Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo de M, entonces M/N es un A-módulo cero si, y solamente si, $N = M$.

Ejemplo 1.30. Sean A un anillo y M un A-módulo. Sean N y K submódulos de M tales que $N \subset K$. El conjunto

$$K/N = \{[m] : \, m \in K\},$$

es un submódulo del A-módulo cociente M/N.

A continuación se enuncia, sin su demostración, el *teorema fundamental de los homomorfismos para módulos*, el cual es un resultado importante en la teoría de módulos. Este teorema establece un isomorfismo entre módulos y módulos cociente, a partir de un homomorfismo sobreyectivo.

Teorema 1.7 (Teorema fundamental de los homomorfismos)**.** *Sea A un anillo. Sean M y N dos A-módulos. Si $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo sobreyectivo, entonces existe un único isomorfismo $\overline{f} : M/\ker f \longrightarrow N$ tal que $f = \overline{f} \circ \pi$, donde $\pi : M \longrightarrow M/\ker f$ es la proyección canónica.*

La construcción del isomorfismo cuya existencia afirma el teorema fundamental de los homomorfismos, se puede expresar mediante el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \\
M/\ker f \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Observación 1.16. Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N y K son submódulos de M tales que $N \subset K$, entonces

$$(M/N)/(K/N) \cong M/K.$$

Existe una conexión muy importante entre los homomorfismos de módulos, submódulos y módulos cocientes, este es el llamado *teorema de la correspondencia* para módulos.

Teorema 1.8 (Teorema de la correspondencia)**.** *Sea A un anillo. Sean M un A-módulo y N un submódulo de M. La función*

$$\begin{array}{rccc} \Theta: & \{K \in \mathcal{S}_A(M) : N \subset K\} & \longrightarrow & \mathcal{S}_A(M/N) \\ & K & \longmapsto & K/N \end{array}$$

es biyectiva.

Demostración. Véase en [24, Ejercicio 6.24]. □

Ejemplo 1.31. Sea A un anillo. Si I es un ideal de A, entonces

$$\mathcal{S}_A(A/I) = \{J/I : J \text{ es un ideal de } A \text{ e } I \subset J\} = \mathcal{S}_{A/I}(A/I).$$

En efecto, la primera igualdad es consecuencia del teorema de la correspondencia para módulos y del Ejemplo 1.26; mientras que la segunda igualdad es consecuencia del teorema de la correspondencia para anillos y del Ejemplo 1.26.

1.2.3 Operaciones con submódulos

En esta subsección, se estudiará ciertas operaciones en módulos sobre anillos, las cuales serán utilizadas a lo largo de esta tesis.

1.2.3.1 Intersección de submódulos

Proposición 1.12. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia indexada de submódulos de M, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ es un submódulo de M.*

Demostración. Si $\Lambda = \varnothing$, la intersección es M el cual es un submódulo de M. Supóngase ahora que $\Lambda \neq \varnothing$. Como $0_M \in N_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $0_M \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. Sean ahora $m, n \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ y $a \in A$. Para finalizar la demostración, se mostrará que $m + an \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. En efecto, como $m, n \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$, se tiene que $m, n \in N_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Sea $\mu \in \Lambda$. Teniendo en vista que $m, n \in N_\mu$ y siendo N_μ un submódulo de M, concluyese que

$m+an \in N_\mu$. Puesto que $\mu \in \Lambda$ es arbitrário, se obtiene que $m+an \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. Esto muestra que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ es un submódulo de M. $\square$

Submódulo generado por un conjunto

Sea A un anillo. Sean M un A-módulo y X un subconjunto de M. Sea $\mathscr{X}$ la familia de todos los submódulos de M que contienen a X. Tenga en cuenta que $\mathscr{X} \neq \varnothing$, ya que $M \in \mathscr{X}$. Se define el *submódulo de M generado por X*, denotado por $\langle X \rangle_A$, como la intersección de todos los submódulos pertenecientes a la familia $\mathscr{X}$, es decir,

$$\langle X \rangle_A = \bigcap_{N\in\mathscr{X}} N.$$

De esta forma, $\langle X \rangle_A$ es un submódulo de A (por la Proposición 1.12) y $X \subset \langle X \rangle_A$. Más aún, $\langle X \rangle_A$ es el menor submódulo de M que contiene a X.

Si $X = \varnothing$, se tiene que $\langle X \rangle_A = \{0_M\}$. Si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$, se suele escribir simplemente $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle_A$, en vez de $\langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle_A$.

Proposición 1.13. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si X es un subconjunto no vacío de M, entonces*

$$\langle X \rangle_A = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i x_i \,:\, s \in \mathbb{N},\, a_i \in A,\, x_i \in X,\ 1 \leq i \leq s \right\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{X}$ la familia de todos los submódulos de M que contienen a X. Considere el conjunto

$$N_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i x_i \,:\, s \in \mathbb{N},\, a_i \in A,\, x_i \in X,\ 1 \leq i \leq s \right\}.$$

Es claro que $X \subset N_0$, pues $x = 1_A \cdot x = \sum_{i=1}^{1} 1_A \cdot x \in N_0$, para todo $x \in X$. A continuación se mostrará que N_0 es un submódulo de M. De hecho, sean $m, n \in N_0$ y $a \in A$. Entonces, existen $r, s \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in A$ y $x_i, x'_j \in X$, para todos los índices $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$, con

$$m = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \quad \text{y} \quad n = \sum_{j=1}^{s} b_j x'_j.$$

Luego,

$$m + an = \sum_{k=1}^{r+s} c_k \widetilde{x}_k,$$

donde

$$c_k = \begin{cases} a_k, & \text{si } 1 \leq k \leq r; \\ ab_{k-r}, & \text{si } r+1 \leq k \leq r+s; \end{cases} \quad \text{y} \quad \widetilde{x}_k = \begin{cases} x_k, & \text{si } 1 \leq k \leq r; \\ x'_{k-r}, & \text{si } r+1 \leq k \leq r+s. \end{cases}$$

Como $c_k \in A$ y $\widetilde{x}_k \in X$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq r+s$, sigue que $m + an \in N_0$. Esto muestra que N_0 es un submódulo de M. Por lo tanto, $N_0 \in \mathscr{X}$, y así

$$\langle X \rangle_A \subset N_0. \tag{1.2.1 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $N \in \mathscr{X}$ un elemento arbitrário. Se mostrará que $N_0 \subset N$. En efecto, dado $p \in N_0$, existen $t \in \mathbb{N}$, $a'_i \in A$ y $x''_i \in X$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq t$, con

$$p = \sum_{i=1}^{t} a'_i x''_i.$$

Teniendo en vista que $a'_i \in A$ y $x''_i \in X \subset N$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq t$; y siendo N un submódulo, sigue que $p \in N$. Esto muestra que $N_0 \subset N$, para todo $N \in \mathscr{X}$. De esta forma,

$$N_0 \subset \langle X \rangle_A. \tag{1.2.1 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.1 (1)) y (1.2.1 (2)), $\langle X \rangle_A = N_0$. □

Corolario 1.13. *Sea A un anillo. Sean M un A-módulo y X un subconjunto de M. Si $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$, para algún $s \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\langle x_1, \ldots, x_s \rangle_A = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i x_i : \ a_i \in A, \ 1 \leq i \leq s \right\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{X}$ la familia de todos los submódulos de M que contienen a X. Considere el conjunto

$$N_s = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i x_i : \ a_i \in A, \ 1 \leq i \leq s \right\}.$$

Dado $k \in \{1, \ldots, s\}$, si $s = 1$ se tiene que $x_1 = 1_A \cdot x_1$; y si $s > 1$, $x_k = \sum_{i=1}^{s} \delta_{ik} x_i$, donde

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1_A, & \text{si } i = k; \\ 0_A, & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Luego, $x_k \in N_s$ y, por lo tanto, X está contenido en N_s. A continuación se mostrará que N_s es un submódulo de M. De hecho, sean $m, n \in N_s$ y $a \in A$. Entonces, existen $a_i, b_i \in A$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i, \leq s$, con

$$m = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i \quad \text{y} \quad n = \sum_{i=1}^{s} b_i x_i.$$

Luego,

$$m + an = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i + \sum_{i=1}^{s} (ab_i) x_i = \sum_{i=1}^{s} (a_i + ab_i) x_i,$$

y así $m + an \in N_s$. Esto muestra que N_s es un submódulo de M. Por lo tanto, $N_s \in \mathscr{X}$, y así

$$\langle X \rangle_A \subset N_s. \tag{1.2.2 (1)}$$

Por otro lado, por la Proposición 1.13, todo elemento de N_s pertenece a $\langle X \rangle_A$, es decir,

$$N_s \subset \langle X \rangle_A. \tag{1.2.2 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.2 (1)) y (1.2.2 (2)), $\langle X \rangle_A = N_s$. □

Ejemplo 1.32. Sean p y q dos números primos positivos diferentes. El conjunto de los submódulos del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}_{pq}$ es

$$\mathscr{S}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{pq}) = \big\{ \langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}, \langle [p] \rangle_{\mathbb{Z}}, \langle [q] \rangle_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}_{pq} \big\}.$$

En efecto, esto sigue inmediatamente de los ejemplos 1.8 y 1.31.

1.2.3.2 Unión de submódulos

En general, la unión de una familia de submódulos no es un submódulo. Por ejemplo, $H := \langle 2 \rangle \cup \langle 3 \rangle$ no es un submódulo del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$. Entretanto, si la familia es totalmente ordenada la unión de la familia es también un submódulo.

Proposición 1.14. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una* *familia indexada de submódulos totalmente ordenada de M, entonces $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ es un submódulo de M.*

Demostración. Dado un elemento $\mu \in \Lambda$ fijo, se tiene que $0_M \in N_\mu$ y, por lo tanto, $0_M \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. Sean ahora $m, n \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ y $a \in A$. Para finalizar la demostración, se mostrará que $m + an \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. En efecto, como $m, n \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$, existen $\kappa, \mu \in \Lambda$ tales que $m \in N_\kappa$ y $n \in N_\mu$. Siendo $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia indexada totalmente ordenada, existe $\eta \in \{\kappa, \mu\}$ tal que $N_\kappa \subset N_\eta$ y $N_\mu \subset N_\eta$. Luego, $m, n \in N_\eta$. Teniendo en vista que N_η es un submódulo de M, concluyese que $m + an \in N_\eta$. Por lo tanto,

$$m + an \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda.$$

Esto muestra que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ es un submódulo de M. $\square$

1.2.3.3 Suma de submódulos

Sea A un anillo. Sean M un A-módulo y $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia indexada de submódulos de M. Se define la *suma* $\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ de la familia $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, como el submódulo de M generado por $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$, es decir,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = \left\langle \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \right\rangle_A.$$

Si $\Lambda = \varnothing$, entonces $\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = \langle \varnothing \rangle_A = \langle 0_M \rangle_A$. Si $\Lambda = \{1, \ldots, s\}$, para algún $s \in \mathbb{N}$, se suele escribir simplemente $\sum_{i=1}^{s} N_i$, en vez de $\sum_{\lambda\in\{1,\ldots,s\}} N_\lambda$. En particular, para $n = 2$ se acostumbra escribir $N_1 + N_2$, en vez de $\sum_{i=1}^{2} N_i$.

Dados dos submódulos N y K de un A-módulo M, se dice que su suma $N + K$ es *directa*, denotado por $N \oplus K$, si $N \cap K = \langle 0_M \rangle_A$.

Se dice que N es un sumando directo propio de M, si N es un submódulo propio de M y existe un submódulo K de M tal que $M = N \oplus K$. Por ejemplo, todo subespacio propio de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un sumando directo de V.

Proposición 1.15. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia indexada no vacía de submódulos de M, entonces*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} : \ s \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \Lambda,\ m_{\lambda_i} \in N_{\lambda_i},\ 1 \le i \le s \right\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{X}$ la familia de todos los submódulos de M que contienen a $X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. Considere el conjunto

$$N = \left\{ \sum_{i=1}^{s} m_{\lambda_i} : s \in \mathbb{N},\, \lambda_i \in \Lambda,\, m_{\lambda_i} \in N_{\lambda_i},\ 1 \leq i \leq s \right\}.$$

Dado $\lambda \in \Lambda$ fijo, $m_\lambda = \sum_{i=1}^{1} m_\lambda \in N$, para todo $m_\lambda \in N_\lambda$. Es decir, $N_\lambda \subset N$, para todo $\lambda \in \Lambda$ y, por lo tanto, $X \subset N$. A continuación se mostrará que N es un submódulo de M. De hecho, sean $m, n \in N$ y $a \in A$. Entonces, existen $r, s \in \mathbb{N}$, $\lambda_i, \mu_j \in \Lambda$, $m_{\lambda_i} \in N_{\lambda_i}$ y $m_{\mu_j} \in N_{\mu_j}$, para todos los índices $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$, con

$$m = \sum_{i=1}^{r} m_{\lambda_i} \quad \text{y} \quad n = \sum_{j=1}^{s} m_{\mu_j}.$$

Luego,

$$m + an = \sum_{k=1}^{r+s} n_k,$$

donde

$$n_k = \begin{cases} m_{\lambda_k}, & \text{si } 1 \leq k \leq r; \\ a m_{\mu_{k-r}}, & \text{si } r+1 \leq k \leq r+s. \end{cases}$$

Como $n_k \in N_{\lambda_k}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq r+s$, sigue que $m + an \in N$. Esto muestra que N es un submódulo de M. Por lo tanto, $N \in \mathscr{X}$, y así

$$\langle X \rangle_A \subset N. \tag{1.2.3 (1)}$$

Por otro lado, por la Proposición 1.13, todo elemento de N pertenece a $\langle X \rangle_A$, es decir,

$$N \subset \langle X \rangle_A. \tag{1.2.3 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.3 (1)) y (1.2.3 (2)), $\langle X \rangle_A = N$. $\square$

Corolario 1.14. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $s \in \mathbb{N}$ y $N_1, \ldots, N_s$ son submódulos de M, entonces*

$$\sum_{i=1}^{s} N_i = \left\{ \sum_{i=1}^{s} m_i : m_i \in N_i,\ 1 \leq i \leq s \right\}.$$

Demostración. Sea $\mathscr{X}$ la familia de todos los submódulos de M que contienen a $X := \bigcup_{i=1}^{s} N_i$. Considere el conjunto

$$P_s = \left\{ \sum_{i=1}^{s} m_i : \, m_i \in N_i, \; 1 \leq i \leq s \right\}.$$

Dado $k \in \{1, \ldots, s\}$, sea $m_k \in N_k$. Si $s = 1$, se tiene que $k = 1$ y $m_1 = \sum_{i=1}^{1} m_i$; y si $s > 1$, $m_k = \sum_{i=1}^{s} m_i$, donde

$$m_i = \begin{cases} m_k, & \text{si } i = k; \\ 0_M, & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Luego, $m_k \in P_s$, para todo $m_k \in N_k$. Es decir, $N_k \subset P_s$, para todo $k \in \{1, \ldots, s\}$ y, por lo tanto, $X \subset P_s$. A continuación se mostrará que P_s es un submódulo de M. De hecho, sean $m, n \in P_s$ y $a \in A$. Entonces, existen $m_i, n_i \in N_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, con

$$m = \sum_{i=1}^{s} m_i \quad \text{y} \quad n = \sum_{i=1}^{s} n_i.$$

Luego,

$$m + an = \sum_{i=1}^{s} m_i + \sum_{i=1}^{s} a n_i = \sum_{i=1}^{s} (m_i + a n_i).$$

Como $m_i + a n_i \in N_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, concluyese que $m + an \in P_s$. Esto muestra que P_s es un submódulo de M. Por lo tanto, $P_s \in \mathscr{X}$, y así

$$\langle X \rangle_A \subset P_s. \tag{1.2.4 (1)}$$

Por otro lado, por la Proposición 1.15, todo elemento de P_s pertenece a $\langle X \rangle_A$, es decir,

$$P_s \subset \langle X \rangle_A. \tag{1.2.4 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.4 (1)) y (1.2.4 (2)), $\langle X \rangle_A = P_s$. □

1.2.3.4 Submódulos extendidos

En general, no se puede definir el producto de dos submódulos. Entretanto, se puede definir el producto IN, donde I es un ideal de A y N es un submódulo de un A-módulo M. Este producto será llamado de *submódulo* *extendido de I por N.*

Definición 1.17. Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo de M e I es un ideal de A, se define el *submódulo extendido de I por N*, denotado por IN, como el submódulo de M generado por $\{an : a \in I, n \in N\}$.

Expresado en forma conjuntista,

$$IN = \langle \{an : a \in I, n \in N\} \rangle_A.$$

En particular, si $I = \langle a \rangle$ para algún elemento a de A, se denotará el submódulo extendido IN simplemente por aN.

Proposición 1.16. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo de M e I es un ideal de A, entonces*

$$IN = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i n_i : s \in \mathbb{N},\, a_i \in I,\, n_i \in N,\, 1 \leq i \leq s \right\}.$$

En particular, IN es un submódulo de N.

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de todos los submódulos de M que contienen a $\{an : a \in I, n \in N\}$. Considere el conjunto

$$K_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{s} a_i n_i : s \in \mathbb{N},\, a_i \in I,\, n_i \in N,\, 1 \leq i \leq s \right\}.$$

Es claro que $\{an : a \in I, n \in N\} \subset K_0$, pues $an = \sum_{i=1}^{1} an$, para todos $a \in I$ y $n \in N$. A continuación se mostrará que K_0 es un submódulo de M. De hecho, sean $m, n \in K_0$ y $a \in A$. Entonces, existen $r, s \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in I$ y $m_i, n_j \in N$, para todos los índices $i, j \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq i \leq r$ y $1 \leq j \leq s$, con

$$m = \sum_{i=1}^{r} a_i m_i \quad \text{y} \quad n = \sum_{j=1}^{s} b_i n_j.$$

Luego,

$$m + an = \sum_{k=1}^{r+s} c_k \widetilde{m}_k,$$

donde

$$c_k = \begin{cases} a_k, & \text{si } 1 \leq k \leq r; \\ ab_{k-r}, & \text{si } r+1 \leq k \leq r+s; \end{cases} \quad \text{y} \quad \widetilde{m}_k = \begin{cases} m_k, & \text{si } 1 \leq k \leq r; \\ n_{k-r}, & \text{si } r+1 \leq k \leq r+s. \end{cases}$$

Como $c_k \in I$ y $\widetilde{m}_k \in N$, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k \leq r+s$, sigue que $m + an \in K_0$. Esto muestra que K_0 es un submódulo de M. Por lo tanto, $K_0 \in \mathscr{F}$, y así

$$IN \subset K_0. \tag{1.2.5 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $p \in K_0$. Entonces, existen $t \in \mathbb{N}$, $a_i' \in I$ y $n_i' \in N$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, con

$$p = \sum_{i=1}^{t} a_i' n_i'.$$

Teniendo en vista que $p = \sum_{i=1}^{t} 1_A(a_i' n_i')$ y $a_i' n_i' \in \{an : a \in I, n \in N\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq t$, por la Proposición 1.13, sigue que $p \in IN$. Esto muestra que

$$K_0 \subset IN. \tag{1.2.5 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.5 (1)) y (1.2.5 (2)), $IN = K_0$. □

Corolario 1.15. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo de M y a es un elemento de A, entonces*

$$aN = \{an : n \in N\}.$$

En particular, $0_A N = \langle 0_M \rangle_A$ y $1_A N = N$.

Demostración. Considere el conjunto

$$K = \{an : n \in N\}.$$

Se probará que $aN = K$. En efecto, dado $m \in aN$, por la Proposición 1.16, existen $s \in \mathbb{N}$, $x_i \in \langle a \rangle$ y $n_i \in N$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, con

$$m = \sum_{i=1}^{s} x_i n_i.$$

Como $x_i \in \langle a \rangle$, existe $y_i \in A$ tal que $x_i = ay_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$. Luego,

$$m = \sum_{i=1}^{s}(ay_i)n_i = \sum_{i=1}^{s} a(y_i n_i) = a\sum_{i=1}^{s} y_i n_i.$$

Puesto que, $n' = \sum_{i=1}^{s} y_i n_i \in N$, sigue que $m = an'$ y, por lo tanto, $m \in K$. Esto muestra que

$$aN \subset K. \tag{1.2.6 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $m \in K$. Entonces, $m = an$, para algun $n \in N$. Teniendo en vista que $an = \sum_{i=1}^{1} an$ y $a \in \langle a \rangle$, utilizando nuevamente la Proposición 1.16, se tiene que $m \in aN$. Esto muestra que

$$K \subset aN. \tag{1.2.6 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.6 (1)) y (1.2.6 (2)), $aN = K$.

Para finalizar la demostración, en los casos particulares de $a = 0_A$ y $b = 1_A$, se utilizará lo visto anteriormente. En estos casos, se tienen

$$0_A N = \{0_A \cdot n : n \in N\} = \{0_M\}$$

y

$$1_A N = \{1_A \cdot n : n \in N\} = \{n : n \in N\} = N. \qquad \square$$

Corolario 1.16. *Sea A un anillo, considerado como un módulo sobre sí mismo.*
(1) *Para todo ideal I de A, $IA \subset I$.*
(2) *Para todo elemento a de I, $aA \subset I$.*

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Dado $x \in IA$, por la Proposición 1.16, existen $s \in \mathbb{N}$, $a_i \in I$ y $x_i \in A$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, con

$$x = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i.$$

Como I es un ideal de A, sigue que $x = \sum_{i=1}^{s} a_i x_i \in I$. Por lo tanto, $IA \subset I$.

Ahora, se probará el ítem (2). Por el ítem (1), $aA = \langle a \rangle A \subset \langle a \rangle \subset I$. Por lo tanto, $aA \subset I$. $\square$

Corolario 1.17. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Sean N y K submódulos* *de M tales que $N \subset K$. Si I y J son ideales de A tales que $I \subset J$, entonces $IN \subset JK$.*

Demostración. Dado $m \in IN$, por la Proposición 1.16, existen $s \in \mathbb{N}$, $a_i \in I$ y $n_i \in N$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, con

$$m = \sum_{i=1}^{s} a_i n_i.$$

Como $N \subset K$ e $I \subset J$, sigue que $a_i \in J$ y $n_i \in K$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$. Luego, utilizando nuevamente la Proposición 1.16, concluyese que $m \in JK$ y, por lo tanto, $IN \subset JK$. $\square$

Corolario 1.18. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo de M e I es un ideal de A, entonces*

$$IN = \sum_{a \in I} aN.$$

Demostración. Dado $m \in IN$, por la Proposición 1.16, existen $s \in \mathbb{N}$, $a_i \in I$ y $n_i \in N$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, con

$$m = \sum_{i=1}^{s} a_i n_i.$$

Como $m_{a_i} := a_i n_i \in a_i N$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, por la Proposición 1.15, sigue que $m = \sum_{i=1}^{s} m_{a_i} \in \sum_{a \in I} aN$. Esto muestra que

$$IN \subset \sum_{a \in I} aN. \qquad (1.2.7\ (1))$$

A seguir, se establecerá la inclusión contraria. En efecto, por el Corolario 1.17, se tiene que $aN \subset IN$, para todo $a \in I$. Luego,

$$\sum_{a \in I} aN \subset IN. \qquad (1.2.7\ (2))$$

Por lo tanto, de (1.2.7 (1)) y (1.2.7 (2)), $IN = \sum_{a \in I} aN$. $\square$

Corolario 1.19. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo* *de M e $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia indexada no vacía de ideales de A, entonces*

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)N = \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda N.$$

Demostración. Dado $a \in \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, por la Proposición 1.5, existen $s \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \Lambda$ y $c_{\lambda_i} \in I_{\lambda_i}$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, con

$$a = \sum_{i=1}^{s} c_{\lambda_i}.$$

Luego, dado un elemento arbitrário n en N,

$$an = \left(\sum_{i=1}^{s} c_{\lambda_i}\right)n = \sum_{i=1}^{s} c_{\lambda_i} n.$$

Como $c_{\lambda_i} n \in I_{\lambda_i} N$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, por la Proposición 1.15, $an = \sum_{i=1}^{s} c_{\lambda_i} n \in \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda N$. Esto muestra que

$$\left\{an :\ a \in \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda,\ n \in N\right\} \subset \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda N$$

y, esto implica que

$$\left\langle \left\{an :\ a \in \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda,\ n \in N\right\} \right\rangle_A \subset \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda N,$$

es decir,

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)N \subset \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda N. \tag{1.2.8 (1)}$$

A seguir, se establecerá la inclusión contraria. En efecto, se tiene que $I_\mu \subset \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, para todo $\mu \in \Lambda$. Entonces, por el Corolario 1.17, $I_\mu N \subset \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)N$, para todo $\mu \in \Lambda$. Luego,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda N \subset \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)N. \tag{1.2.8 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.8 (1)) y (1.2.8 (2)), $\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right)N = \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda N$. $\square$

1.2.3.5 Ideal cociente

Utilizando los submódulos extendidos, se puede definir el *ideal cociente* de dos submódulos. Este concepto, será esencial para generalizar el concepto de variedades en el espectro primo de un anillo, hacia variedades sobre el *espectro primo de un módulo sobre un anillo.*

Definición 1.18. Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N y K son submódulos de M, se define el *ideal cociente de* N *por* K, denotado por $(N :_A K)$, como el conjunto de todos los elementos a en A tales que N contiene a aK.

Expresado en forma conjuntista,

$$(N :_A K) = \{a \in A : \, aK \subset N\}.$$

Lema 1.2. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N y K son submódulos de M, entonces $(N :_A K)$ es un ideal de A.*

Demostración. Como $0_A K = \langle 0_M \rangle_A \subset N$ (cf. Corolario 1.15), se tiene que $0_A \in (N :_A K)$. Sean ahora $x, y \in (N :_A K)$ y $a \in A$. Para finalizar la demostración, se mostrará que $x + ay \in (N :_A K)$. Así, se mostrará que $(x + ay)K \subset N$. En efecto, como $x, y \in (N :_A K)$, se tiene que $xK \subset N$ y $yK \subset N$. Luego, dado un elemento arbitrário m en K, por el Corolario 1.14,

$$(x + ay)m = xm + y(am) \in xK + yK \subset N.$$

Entonces, $(x+ay)m \in N$, para todo $m \in K$, y así se obtiene que $(x+ay)K \subset N$. Por lo tanto, $x + ay \in (N :_A K)$. Esto muestra que $(N :_A K)$ es un ideal de A. $\square$

En el caso especial en que $N = \langle 0_M \rangle_A$, el ideal cociente

$$\begin{aligned}\big(\langle 0_M \rangle_A :_A K\big) &= \{a \in A : \, aK = \langle 0_M \rangle_A\} \\ &= \{a \in A : \, am = 0_M, \text{ para todo } m \in K\}\end{aligned}$$

es llamado el *anulador de* K, y se denota por $\mathrm{Ann}_A(K)$.

Ejemplo 1.33. Si A es un anillo e I es un ideal de A, entonces $(I :_A A) = I$. En efecto, dado $a \in (I :_A A)$, se tiene que $aA \subset I$. Como $a = a \cdot 1_A \in aA$, concluyese que $a \in I$ y, por lo tanto,

$$(I :_A A) \subset I. \tag{1.2.9 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, suponga que $a \in I$. Entonces, por el ítem (2) del Corolario 1.16, $aA \subset I$, lo que implica que $a \in (I :_A A)$. Esto muestra que

$$I \subset (I :_A A). \tag{1.2.9 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.9 (1)) y (1.2.9 (2)), $(I :_A A) = I$.

Ejemplo 1.34. Si A es un anillo e I es un ideal de A, entonces $(J/I :_A A/I) = J$, para todo ideal J de A conteniendo a I. En efecto, sea J un ideal arbitrário de A conteniendo a I. Dado $a \in (J/I :_A A/I)$, se tiene que $a(A/I) \subset J/I$. Como $[a] = [a \cdot 1_A] = a \cdot [1_A] \in a(A/I)$,* concluyese que $[a] \in J/I$ y, por lo tanto, $a \in J$. Esto muestra que

$$(J/I :_A A/I) \subset J. \tag{1.2.10 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, suponga que $a \in J$. Entonces, $a \cdot [x] = [a \cdot x] \in J/I$, para todo $x \in A$; es decir, $a(A/I) \subset J/I$, lo que implica que $a \in (J/I :_A A/I)$. Esto muestra que

$$J \subset (J/I :_A A/I). \tag{1.2.10 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.10 (1)) y (1.2.10 (2)), $(J/I :_A A/I) = J$.

Ejemplo 1.35. Considérese el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y, para cada $a \in \mathbb{N}$, sea $N_a = \langle (a, 0) \rangle_{\mathbb{Z}}$. El ideal cociente de N_a por M es $\langle 0 \rangle$. En efecto, dado $x \in (N_a :_{\mathbb{Z}} M)$, se tiene que $xM \subset N_a$. En particular, $x(0, 1) \in \langle (a, 0) \rangle_{\mathbb{Z}}$. Luego, existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $(0, x) = y(a, 0) = (ya, 0)$ y, por lo tanto, $x = 0$. Esto muestra que $(N_a :_{\mathbb{Z}} M) = \langle 0 \rangle$.

Proposición 1.17. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N y K son submódulos de M tales que $N \subset K$, entonces $(N :_A K) = \mathrm{Ann}_A(K/N)$.*

Demostración. Dado $a \in (N :_A K)$, se tiene que $aK \subset N$. Luego, si $m \in K$ entonces $am \in N$ y, por lo tanto, $a[m] = [am] = [0_M]$.† Entonces, $a[m] = [0_M]$,

*El símbolo $[a]$, denota a la clase de $a \in A$ en el A-módulo cociente A/I.

†El símbolo $[m]$, denota a la clase de $m \in M$ en el A-módulo cociente K/N.

para todo $m \in K$. Es decir, $a \in \operatorname{Ann}_A(K/N)$. Esto muestra que

$$(N :_A K) \subset \operatorname{Ann}_A(K/N). \qquad (1.2.11\ (1))$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $a \in \operatorname{Ann}_A(K/N)$. Entonces, $[am] = a[m] = [0_M]$, para todo $m \in K$. Esto implica que $am \in N$, para todo $m \in K$, es decir, $aK \subset N$. Por lo tanto, $a \in (N :_A K)$. Esto muestra que

$$\operatorname{Ann}_A(K/N) \subset (N :_A K). \qquad (1.2.11\ (2))$$

Por lo tanto, de (1.2.11 (1)) y (1.2.11 (2)), $(N :_A K) = \operatorname{Ann}_A(K/N)$. □

El ideal cociente, posee varias propiedades interesantes. A continuación se muestran algunas de estas propiedades. En lo que sigue de esta tesis, se hará uso frecuente de tales propiedades.

Proposición 1.18. *Sean A un anillo y M un A-módulo. El ideal cociente, satisface las siguientes propiedades*:

(1) *Si N y K son submódulos de M tales que $N \subset K$, entonces $(K :_A N) = A$.*

(2) *Si N y K son submódulos de M tales que $N \subset K$, entonces $N \neq K$ si, y solamente si, $(N :_A K) \neq A$.*

(3) *Si N es un submódulo de M, entonces $N = M$ si, y solamente si, $(N :_A M) = A$.*

(4) *Si N y P son submódulos de M tales que $N \subset P$, entonces $(N :_A K) \subset (P :_A K)$, para todo submódulo K de M.*

(5) *Si P y K son submódulos de M tales que $P \subset K$, entonces $(N :_A K) \subset (N :_A P)$, para todo submódulo N de M.*

(6) *Si $(N_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de submódulos de M, entonces $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda :_A K\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A K)$, para todo submódulo K de M.*

(7) *Si N y K son submódulos de M, entonces $\operatorname{Ann}_A(K) \subset (N :_A K)$.*

(8) *Si N y K son submódulos de M tales que $N \subset K$, entonces $\operatorname{Ann}_A(K) \subset \operatorname{Ann}_A(N)$.*

(9) *Si N es un submódulo de M, entonces $\operatorname{Ann}_A(N)N = \langle 0_M \rangle_A$.*

(10) *Si N es un submódulo de M e I es un ideal de A, entonces $I \subset (IN :_A N)$.*

(11) *Si N es un submódulo de M y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A tal que $\mathfrak{m}N \neq N$, entonces $(\mathfrak{m}N :_A N) = \mathfrak{m}$.*

(12) *Si N y K son submódulos de M, entonces $(N :_A K)K \subset N$.*

(13) *Si N es un submódulo de M e I es un ideal de A, entonces $(IN :_A N)N =$*

IN.

(14) *Si* N *es un submódulo de* M *y* a *es un elemento de* A, *entonces* $(aN :_A N)N = aN$.

(15) *Si* N *y* K *son submódulos de* M, *entonces* $((N :_A K)K :_A K) = (N :_A K)$.

(16) *Sean* N *y* K *submódulos de* M. *Si* I *es un ideal de* A, *entonces* $I \subset (N :_A K)$ *si, y solamente si,* $(IK :_A K) \subset (N :_A K)$.

(17) *Sean* N *y* K *submódulos de* M. *Si* a *es un elemento de* A, *entonces* $a \in (N :_A K)$ *si, y solamente si,* $(aK :_A K) \subset (N :_A K)$.

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Dado $a \in A$, por la Proposición 1.16, se tiene que $aN \subset N$. Como $N \subset K$, sigue que $aN \subset K$. Entonces, $a \in (K :_A N)$ y, por lo tanto, $A \subset (K :_A N)$. Luego, $(K :_A N) = A$.

Para el ítem (2), supóngase inicialmente que $N \neq K$. Procediendo por el absurdo, si $(N :_A K) = A$ entonces $1_A \in (N :_A K)$. Luego, por el Corolario 1.15, $K = 1_A K \subset N \subsetneq K$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $(N :_A K) \neq A$. Recíprocamente, supóngase que $(N :_A K) \neq A$. Luego, si $N = K$, por el ítem (1), se tendría que $A = (N :_A K) \subsetneq A$, lo que sería un absurdo; es decir, $N \neq K$.

El ítem (3) es consecuencia inmediata del ítem (2), considerando $K = M$.

Para el ítem (4), sea K un submódulo arbitrário de M y supóngase que $a \in (N :_A K)$. Entonces, $aK \subset N$. Como $N \subset P$, sigue que $aK \subset P$ y, por lo tanto, $a \in (P :_A K)$. Esto muestra que $(N :_A K) \subset (P :_A K)$.

Para el ítem (5), sea N un submódulo arbitrário de M y supóngase que $a \in (N :_A K)$. Entonces, $aK \subset N$. Como $P \subset K$, por el Corolario 1.17, sigue que $aP \subset aK$ y, por lo tanto, $aP \subset N$. Luego, $a \in (N :_A P)$. Esto muestra que $(N :_A K) \subset (N :_A P)$.

Para el ítem (6), sea K un submódulo arbitrário de M. Si $\Lambda = \varnothing$, por el ítem (1), se tiene $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda :_A K\right) = (M :_A K) = A = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A K)$. Supóngase ahora que $\Lambda \neq \varnothing$. Sea $\mu \in \Lambda$. Como $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda \subset N_\mu$, por el ítem (4), $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda :_A K\right) \subset (N_\mu :_A K)$. Siendo $\mu \in \Lambda$ arbitrário, concluyese que

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda :_A K\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A K). \qquad (1.2.12\ (1))$$

Para establecer la inclusión contraria, suponga que $a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A K)$. Entonces, $a \in (N_\lambda :_A K)$, para todo $\lambda \in \Lambda$; es decir, $aK \subset N_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Luego, $aK \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$, lo que implica que $a \in \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda :_A K\right)$. Esto muestra que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A K) \subset \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda :_A K\right). \tag{1.2.12 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.12 (1)) y (1.2.12 (2)),

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda :_A K\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A K).$$

A seguir, se probará el ítem (7). Como $\langle 0_M \rangle_A \subset N$, por el ítem (4), se tiene $\left(\langle 0_M \rangle_A :_A K\right) \subset (N :_A K)$; es decir, $\mathrm{Ann}_A(K) \subset (N :_A K)$.

Ahora, se probará el ítem (8). Como $N \subset K$, por el ítem (5), se tiene $\left(\langle 0_M \rangle_A :_A K\right) \subset \left(\langle 0_M \rangle_A :_A N\right)$; es decir, $\mathrm{Ann}_A(K) \subset \mathrm{Ann}_A(N)$.

Para el ítem (9), sea $m \in \mathrm{Ann}_A(N)N$. Por la Proposición 1.16, existen $s \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathrm{Ann}_A(N)$ y $n_i \in N$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, con

$$m = \sum_{i=1}^{s} a_i n_i.$$

Como $a_i \in \mathrm{Ann}_A(N)$ y $n_i \in N$, se tiene que $a_i n_i = 0_M$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$. Luego, $m = 0_M$ y, por lo tanto, $\mathrm{Ann}_A(N)N = \langle 0_M \rangle_A$.

Para el ítem (10), sea $a \in I$. Por el Corolario 1.17, se tiene que $aN \subset IN$. Entonces, $a \in (IN :_A N)$ y, por lo tanto, $I \subset (IN :_A N)$.

Ahora, se procederá a probar el ítem (11). Por el ítem (10), se tiene que $\mathfrak{m} \subset (\mathfrak{m}N :_A N)$. Como $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A, sigue que $(\mathfrak{m}N :_A N) = \mathfrak{m}$ o $(\mathfrak{m}N :_A N) = A$. Teniendo en vista que $\mathfrak{m}N \neq N$, por el ítem (2), concluyese que $(\mathfrak{m}N :_A N) \neq A$ y, por lo tanto, $(\mathfrak{m}N :_A N) = \mathfrak{m}$.

Para el ítem (12), sea $m \in (N :_A K)K$. Por la Proposición 1.16, existen $s \in \mathbb{N}$, $a_i \in (N :_A K)$ y $m_i \in K$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$, con

$$m = \sum_{i=1}^{s} a_i m_i.$$

Como $a_i \in (N :_A K)$, se tiene que $a_i K \subset N$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq s$. Luego, por el Corolario 1.14,

$$m = \sum_{i=1}^{s} a_i m_i \in \sum_{i=1}^{s} a_i K \subset N.$$

Entonces, $m \in N$ y, por lo tanto, $(N :_A K)K \subset N$.

A continuación, se probará el ítem (13). Por el ítem (12), se tiene

$$(IN :_A N)N \subset IN. \tag{1.2.13 (1)}$$

A seguir, se establecerá la inclusión contraria. Por el ítem (10), se tiene $I \subset (IN :_A N)$. Luego, por el Corolario 1.17, concluyese

$$IN \subset (IN :_A N)N. \tag{1.2.13 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.13 (1)) y (1.2.13 (2)), $(IN :_A N)N = IN$.

El ítem (14) es consecuencia inmediata del ítem (13), considerando $I = \langle a \rangle$.

A continuación, se procederá a probar el ítem (15). Por el ítem (12), se tiene $(N :_A K)K \subset N$. Luego, por el ítem (4), concluyese

$$((N :_A K)K :_A K) \subset (N :_A K). \tag{1.2.14 (1)}$$

Por otro lado, por el ítem (10), se tiene que

$$(N :_A K) \subset ((N :_A K)K :_A K). \tag{1.2.14 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.14 (1)) y (1.2.14 (2)), $((N :_A K)K :_A K) = (N :_A K)$.

Seguidamente, se probará el ítem (16). Suponiendo que $I \subset (N :_A K)$, por el Corolario 1.17, se tiene que $IK \subset (N :_A K)K$. Luego, por el ítem (4), $(IK :_A K) \subset ((N :_A K)K :_A K)$. Por otro lado, por el ítem (15), se tiene que $((N :_A K)K :_A K) = (N :_A K)$. Por lo tanto, $(IK :_A K) \subset (N :_A K)$. Recíprocamente, supóngase que $(IK :_A K) \subset (N :_A K)$. Entretanto, por el ítem (10), $I \subset (IK :_A K)$. Consecuentemente, $I \subset (N :_A K)$.

Finalmente, el ítem (17) es consecuencia inmediata del ítem (16), considerando $I = \langle a \rangle$. □

Ejemplo 1.36. Sean p y q dos números primos positivos diferentes. Considérese el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{pq}$. Los ideales cocientes de los submódulos de M por M son

$$(\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}} :_{\mathbb{Z}} M) = \langle pq \rangle, \quad (pM :_{\mathbb{Z}} M) = \langle p \rangle,$$
$$(qM :_{\mathbb{Z}} M) = \langle q \rangle, \qquad (M :_{\mathbb{Z}} M) = \mathbb{Z}.$$

En efecto, por el Ejemplo 1.32, los submódulos del $\mathbb{Z}$-módulo M son $\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}$, $\langle [p] \rangle_{\mathbb{Z}} = pM$, $\langle [q] \rangle_{\mathbb{Z}} = qM$ y M. Ahora, por el ítem (3) de la Proposición 1.18, $(M :_{\mathbb{Z}} M) = \mathbb{Z}$. Por otro lado, por el ítem (11) de la Proposición 1.18, $(pM :_{\mathbb{Z}} M) = \langle p \rangle$ y $(qM :_{\mathbb{Z}} M) = \langle q \rangle$. Finalmente, por la Proposición 1.17 y por el Ejemplo 1.33, $(\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}} :_{\mathbb{Z}} M) = \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/\langle pq \rangle) = (\langle pq \rangle :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) = \langle pq \rangle$.

1.2.4 Clases de módulos y submódulos

En esta subsección, se estudiará ciertas clases de módulos y submódulos, las cuales serán utilizadas a lo largo de esta tesis.

1.2.4.1 Módulos sin torsión

Definición 1.19. Sean A un dominio y M un A-módulo. Se dice que M es *sin torsión*, si para cualesquiera $a \in A$ y $m \in M$ tales que $am = 0_M$, se tenga que $a = 0_A$ o $m = 0_M$.

Ejemplo 1.37. Todo espacio vectorial sobre un cuerpo es sin torsión.

1.2.4.2 Módulos fieles

Definición 1.20. Sean A un anillo y M un A-módulo. Se dice que M es un A-módulo *fiel* si $\mathrm{Ann}_A(M) = \langle 0_A \rangle$.

Ejemplo 1.38. Sea p un número primo positivo. El $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}$ es fiel. En efecto, dado $a \in \mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(M)$, se tiene que $am = ([0], 0)$, para todo $m \in M$. En particular, $a([0], 1) = ([0], 0)$. Luego, $([0], a) = ([0], 0)$ y, por lo tanto, $a = 0$. Esto muestra que $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}(M) = \langle 0 \rangle$.

1.2.4.3 Módulos simples

Definición 1.21. Sean A un anillo y M un A-módulo no cero. Se dice que M es un A-módulo *simple* si los únicos submódulos de M son los submódulos triviales.

1.2.4.4 Módulos finitamente generados

Definición 1.22. Sean A un anillo y M un A-módulo. Se dice que un submódulo N de M es *finitamente generado* si existe un subconjunto finito X de M tal que $N = \langle X \rangle_A$.

Si $X = \{m_1, \ldots, m_s\}$, para algún $s \in \mathbb{N}$, se dice que N es *generado* por $m_1, \ldots, m_s$ y que estos elementos forman un *conjunto generador* de N.

Se dice que N es *cíclico* si es generado por un solo elemento.

Ejemplo 1.39. Si A es un anillo, entonces el A-módulo A es finitamente generado. En efecto, $A = \langle 1_A \rangle$.

Ejemplo 1.40. Sea p un número primo positivo. El $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}$ es finitamente generado. En efecto, dado $([x], y) \in M$, se tiene que $([x], y) = x([1], 0) + y([0], 1)$. Esto muestra que $M = \langle ([1], 0), ([0], 1) \rangle_{\mathbb{Z}}$.

1.2.4.5 Submódulos maximales

Definición 1.23. Sean A un anillo y M un A-módulo. Se dice que el submódulo $\mathfrak{M}$ de M es un *submódulo maximal*, si $\mathfrak{M}$ es un elemento maximal, con respecto a la inclusión, del conjunto de submódulos propios de M.

La definición de submódulo maximal es una generalización del concepto de ideal maximal. Esto es consecuencia, del siguiente resultado.

Proposición 1.19. *Sea A un anillo. Si $\mathfrak{m}$ es un subconjunto propio de A, entonces $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A si, y solamente si, $\mathfrak{m}$ es un submódulo maximal del A-módulo A.*

Demostración. En efecto, es solo observar que la Definición 1.23, es la misma que la dada para ideales maximales (Definición 1.7). $\square$

Proposición 1.20. *Sean A un anillo e I un ideal propio de A. Si $\mathcal{J}$ es un subconjunto propio de A/I, entonces $\mathcal{J}$ es un ideal maximal de A/I si, y solamente si, $\mathcal{J}$ es un submódulo maximal del A-módulo A/I.*

Demostración. Supóngase inicialmente que $\mathcal{J}$ es un ideal maximal de A/I. En particular, $\mathcal{J}$ es un ideal propio de A/I y, por lo tanto, por el Ejemplo 1.31, $\mathcal{J}$ es un submódulo propio del A-módulo A/I. Sea ahora $\mathcal{K}$ un submódulo propio de A/I tal que $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$. Ahora, utilizando nuevamente el Ejemplo 1.31, se tiene que $\mathcal{K}$ es un ideal propio de A/I. Luego, como $\mathcal{J}$ es un ideal maximal de A/I, concluyese que $\mathcal{K} = \mathcal{J}$. Esto muestra que $\mathcal{J}$ es un submódulo maximal del A-módulo A/I.

Recíprocamente, supóngase que $\mathcal{J}$ es un submódulo maximal del A-módulo A/I. En particular, $\mathcal{J}$ es un submódulo propio del A-módulo A/I y, por lo tanto, por el Ejemplo 1.31, $\mathcal{J}$ es un ideal propio de A/I. Sea ahora $\mathcal{K}$ un ideal propio de A/I tal que $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$. Ahora, utilizando nuevamente el Ejemplo 1.31, se tiene que $\mathcal{K}$ es un submódulo propio del A-módulo A/I. Luego, como $\mathcal{J}$ es un submódulo maximal del A-módulo A/I, concluyese que $\mathcal{K} = \mathcal{J}$. Esto muestra que $\mathcal{J}$ es un ideal maximal de A/I. □

A diferencia de los anillos no cero, en el Capítulo 3, se verá que un módulo no cero no necesariamente tiene submódulos maximales. Sin embargo, los módulos no cero finitamente generados tienen por lo menos un submódulo maximal.

Teorema 1.9 (Krull [4, Proposición 3, pág. A VIII.49])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo finitamente generado. Si N es un submódulo propio de M, entonces existe un submódulo maximal de M conteniendo a N.*

Demostración. Sea Σ el conjunto de submódulos propios de M que contienen a N. Como N es un submódulo propio de M que contiene el mismo, el conjunto Σ es no vacío. Asimismo, Σ es parcialmente ordenado respecto a la relación de inclusión. Ahora, si Ω es un conjunto totalmente ordenado no vacío de Σ, por la Proposición 1.14, $K := \bigcup_{P \in \Omega} P$ es un submódulo de M. Teniendo en cuenta que $N \subset P$, para todo $P \in \Omega$, sigue que $N \subset K$. Por otro lado, puesto que M es finitamente generado, existe un conjunto generador $m_1, \ldots, m_s$ de M, para algún $s \in \mathbb{N}$. Se afirma que $K \neq M$. En efecto, si $K = M$, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$, existiría $P_i \in \Omega$ tal que $m_i \in P_i$. Siendo Ω un conjunto totalmente ordenado, existiría $j \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $P_i \subset P_j$, para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$. De esta forma, se tendría que, $m_i \in P_j$, para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$, lo que implicaría que $P_j = M$, contradiciendo el hecho que P_j es un subconjunto propio de M. Así, $K \neq M$ y, por lo tanto, $K \in \Sigma$. Además, es claro que K es una cota superior para Ω. Entonces, por el Lema de Zorn, existe un elemento maximal $\mathfrak{M}$ en Σ. De hecho, $\mathfrak{M}$ es un submódulo maximal de M, ya que si Q es un submódulo propio de M tal que $\mathfrak{M} \subset Q$, entonces $N \subset Q$ y, por lo tanto, $Q \in \Sigma$. De esta forma, por la maximalidad de $\mathfrak{M}$, concluyese que $Q = \mathfrak{M}$. Esto muestra que $\mathfrak{M}$ es un submódulo maximal de M conteniendo a N. □

Proposición 1.21. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathfrak{M}$ es un submódulo de M, entonces $\mathfrak{M}$ es un submódulo maximal de M si, y solamente si, $M/\mathfrak{M}$ es un A-módulo simple.*

Demostración. Supóngase, inicialmente, que $\mathfrak{M}$ es un submódulo maximal de M. Entonces, $M \neq \mathfrak{M}$ y, por lo tanto, $M/\mathfrak{M} \neq \langle [0_M] \rangle_A$.[‡] Además, por el teorema de la correspondencia para módulos, concluyese que los únicos submódulos de $M/\mathfrak{M}$ son $\langle [0_M] \rangle_A$ y $M/\mathfrak{M}$. Esto muestra que $M/\mathfrak{M}$ es un módulo simple.

Recíprocamente, supóngase que $M/\mathfrak{M}$ es un A-módulo simple. Entonces, $M/\mathfrak{M} \neq \langle [0_M] \rangle_A$ y los únicos submódulos de $M/\mathfrak{M}$ son $\langle [0_M] \rangle_A$ y $M/\mathfrak{M}$. Como $M/\mathfrak{M} \neq \langle [0_M] \rangle_A$, sigue que $M \neq \mathfrak{M}$. Ahora, si N es un submódulo propio de M tal que $\mathfrak{M} \subset N$, por el teorema de la correspondencia para módulos, concluyese que $N = \mathfrak{M}$, es decir, $\mathfrak{M}$ es un submódulo maximal. $\square$

Corolario 1.20. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathfrak{M}$ es un submódulo maximal de M, entonces los A-módulos $A/(\mathfrak{M} :_A M)$ y $M/\mathfrak{M}$ son isomorfos.*

En particular, $A/(\mathfrak{M} :_A M)$ es un A-módulo simple.

Demostración. Como $\mathfrak{M}$ es un submódulo maximal de M, por la Proposición 1.21, $M/\mathfrak{M}$ es un A-módulo simple. Luego, fijado un elemento $m \in M \setminus \mathfrak{M}$, se tiene que $M/\mathfrak{M} = \langle [m] \rangle_A$.[§] Ahora, considérese la aplicación natural

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & M/\mathfrak{M}. \\ & a & \longmapsto & a[m] \end{array}$$

La función f es un homomorfismo de A-módulos sobreyectivo con $\ker f = \operatorname{Ann}_A(M/\mathfrak{M})$. En efecto, para probar que f es un homomorfismo de A-módulos, sean a, b y x elementos de A. Por la definición de f, se tiene que

$$\begin{aligned} f(a+xb) = (a+xb)[m] = [(a+xb)m] = [am + x(bm)] &= a[m] + x(b[m]) \\ &= f(a) + xf(b), \end{aligned}$$

es decir, f es un homomorfismo de A-módulos.

Ahora, se procederá a probar que $\ker f = \operatorname{Ann}_A(M/\mathfrak{M})$. De hecho, si $z \in \ker f$ entonces $z[m] = f(z) = [0_M]$ y, por lo tanto, $z \in \operatorname{Ann}_A\big(\langle [m] \rangle_A\big) = \operatorname{Ann}_A(M/\mathfrak{M})$. Esto muestra que

$$\ker f \subset \operatorname{Ann}_A(M/\mathfrak{M}). \tag{1.2.15 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $z \in \operatorname{Ann}_A(M/\mathfrak{M})$. Entonces, $z[n] = [0_M]$, para todo $n \in M$. En particular, $f(z) = z[m] = [0_M]$, es decir, $z \in \ker f$.

[‡]El símbolo $[0_M]$, denota a la clase de $0_M \in M$ en el A-módulo cociente $M/\mathfrak{M}$.
[§]El símbolo $[n]$, denota a la clase de $n \in M$ en el A-módulo cociente $M/\mathfrak{M}$.

Esto muestra que

$$\mathrm{Ann}_A(M/\mathfrak{M}) \subset \ker f. \tag{1.2.15 (2)}$$

Por lo tanto, de (1.2.15 (1)) y (1.2.15 (2)), $\ker f = \mathrm{Ann}_A(M/\mathfrak{M})$.

A continuación, se probará que f es sobreyectiva. Para esto, sea $w \in M$ un elemento arbitrário. Entonces, existe $c \in A$ tal que $[w] = c[m]$, es decir, $f(c) = [w]$, y así f es sobreyectiva.

Por lo visto anteriormente y utilizando el teorema fundamental de los homomorfismos, concluyese que $A/\,\mathrm{Ann}_A(M/\mathfrak{M}) \cong M/\mathfrak{M}$. Por otro lado, por la Proposición 1.17, se tiene que $(\mathfrak{M} :_A M) = \mathrm{Ann}_A(M/\mathfrak{M})$, y así $A/(\mathfrak{M} :_A M) \cong M/\mathfrak{M}$. En consecuencia, $A/(\mathfrak{M} :_A M)$ es un A-módulo simple.

$\square$

El espectro maximal de un módulo

Definición 1.24. Sean A un anillo y M un A-módulo. Se define el *espectro maximal de M*, denotado por $\mathrm{Max}_A(M)$, como el conjunto de todos los submódulos maximales de M.

Expresado en forma conjuntista,

$$\mathrm{Max}_A(M) = \{\mathfrak{M} :\ \mathfrak{M} \text{ es un submódulo maximal de } M\}.$$

Ejemplo 1.41. Sea A un anillo. Si $M = \{0_M\}$, entonces $\mathrm{Max}_A(M) = \varnothing$. En efecto, como M es un A-módulo cero, entonces M no posee submódulos propios y, por lo tanto, no existe submódulos maximales. Esto implica que $\mathrm{Max}_A(M) = \varnothing$.

Ejemplo 1.42. Para cualquier anillo A, por la Proposición 1.19, se tiene que

$$\mathrm{Max}_A(A) = \mathrm{Max}(A).$$

Ejemplo 1.43. Para cualquier anillo A, por la Proposición 1.20 y por el Ejemplo 1.42, se tiene que

$$\mathrm{Max}_A(A/I) = \mathrm{Max}(A/I) = \mathrm{Max}_{A/I}(A/I),$$

para todo ideal I de A.

Ejemplo 1.44. Sean p y q dos números primos positivos diferentes. En el

$\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{pq}$, se tiene

$$\mathrm{Max}_{\mathbb{Z}}(M) = \{pM, qM\}.$$

En efecto, por el Ejemplo 1.32, los submódulos propios de M son $\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}$, pM y qM. Ahora, como $\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}} \subsetneq pM \subsetneq M$, sigue que $\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}$ no es un submódulo maximal de M. Por otro lado, como $pM \not\subset N$, para todo $N \in \{\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}, qM\}$, concluyese que pM es un submódulo maximal de M. Analogamente, se tiene que $qM \not\subset K$, para todo $K \in \{\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}, pM\}$ y, por lo tanto, pM es un submódulo maximal de M. Consecuentemente, $\mathrm{Max}_{\mathbb{Z}}(M) = \{pM, qM\}$.

1.2.4.6 Módulos locales

Definición 1.25. Sean A un anillo y M un A-módulo. Se dice que M es un A-módulo *local* si existe un submódulo maximal que contenga todos los submódulos propios de M.

La definición de módulo local es una generalización del concepto de anillo local.

Observación 1.17. Sean A un anillo. Si M es un A-módulo local, entonces M posee un único submódulo maximal. La recíproca no es verdadera.

Proposición 1.22. *Sea A un anillo. Si M es un módulo finitamente generado que posee un único submódulo maximal, entonces M es un módulo local.*

Demostración. Sea $\mathfrak{M}$ el único submódulo maximal de M, y sea N un submódulo propio de M. Como M es finitamente generado, por el Teorema 1.9, $N \subset \mathfrak{M}$. Esto muestra que M es un módulo local. $\square$

1.3 Espacios topológicos

En esta sección, se define lo que es un *espacio topológico*. También, se consideran algunos de los conceptos elementales que tienen que ver con espacios topológicos, como conjuntos *abiertos* y *cerrados*. Asimismo, se estudiará las *funciones continuas* y algunas clases de espacios topológicos.

1.3.1 Topología

Un *espacio topológico* es una estructura matemática que generaliza el concepto de espacio métrico, donde es posible extender formalmente las nociones de continuidad y compacidad, entre otras.

Definición 1.26. Sean X un conjunto y $\mathscr{P}(X)$ el conjunto de partes de X. La familia $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ se dice una *topología* en X, si satisface las siguientes condiciones:

(i) $\varnothing$ y X pertenecen a $\mathscr{T}$;

(ii) para todos los elementos U y V de $\mathscr{T}$, $U \cap V \in \mathscr{T}$;

(iii) para toda familia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de $\mathscr{T}$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathscr{T}$.

Definición 1.27. El par ordenado $(X, \mathscr{T})$, formado por un conjunto X y una topologia $\mathscr{T}$ en X es llamado *espacio topológico*.

Cuando no hay ambigüedad respecto a la topología $\mathscr{T}$ que se está considerando, se denotará el espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ simplemente por X y se dirá "X es un espacio" (para distinguir de "X es un conjunto").

Los elementos de los espacios topológicos se denominan *puntos*. Los elementos de $\mathscr{T}$ se denominan *conjuntos abiertos* en el espacio topológico $(X, \mathscr{T})$.

Si U es un conjunto abierto del espacio topológico $(X, \mathscr{T})$, se acostumbra decir simplemente que U es un *conjunto abierto* de X.

Ejemplo 1.45. Sea X cualquier conjunto. La familia $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$ es una topología en X y se denomina *topología discreta*. La familia $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$ es también una topología en X y se denomina *topología indiscreta* (o *topología trivial*).

Ejemplo 1.46. Si $X = \varnothing$, se tiene que $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing\}$. Logo, $\mathscr{T} = \{\varnothing\}$ es la única topología en X. En este caso, la topología discreta coincide con la topología indiscreta.

Ejemplo 1.47. Si $X = \{x\}$, se tiene que $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, X\}$. Logo, $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$ es la única topología en X. En este caso, la topología discreta coincide con la topología trivial.

Ejemplo 1.48. Sea $\mathscr{T}$ la colección de los subconjuntos G de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in G$, existe un número real $\varepsilon_x > 0$ con $(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \subset G$. La familia $\mathscr{T}$

es una topología del conjunto $\mathbb{R}$ y se denomina *topología euclidiana* (o *topología usual*).

Ejemplo 1.49. Sean $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y Y un subconjunto de X. La familia $\mathscr{T}_Y := \{U \cap Y : U \in \mathscr{T}\}$ es una topología en Y y se denomina *topología induzida* (o *topología relativa*) en Y.

Definición 1.28. Sean $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y Y un subconjunto de X. El espacio topológico $(Y, \mathscr{T}_Y)$ se denomina *subespacio* de $(X, \mathscr{T})$.

1.3.1.1 Conjuntos cerrados

En esta subsubsección, se estudiará el concepto de *conjunto cerrado* y algunas propiedades de esta clase de conjuntos.

Definición 1.29. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Un subconjunto C de X se dice que es un *conjunto cerrado* en el espacio topológico $(X, \mathscr{T})$, si $X \setminus C$ es un conjunto abierto en el espacio topológico $(X, \mathscr{T})$.

La familia de conjuntos cerrados de un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ tiene propiedades similares a aquellas satisfechas por la familia $\mathscr{T}$.

Teorema 1.10 ([23, Teorema 17.1.]). *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. La familia de conjuntos cerrados de X satisface las siguientes propiedades*:

(1) *$\varnothing$ y X son conjuntos cerrados*;

(2) *para toda familia de conjuntos cerrados $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de X, la intersección $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ es un conjunto cerrado*;

(3) *para todos los conjuntos cerrados C y D de X, la unión $C \cup D$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Como $X \setminus \varnothing = X \in \mathscr{T}$, $\varnothing$ es un conjunto cerrado. También, como $X \setminus X = \varnothing \in \mathscr{T}$, se tiene que X es un conjunto cerrado.

Ahora se probará el ítem (2). Sea $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de conjuntos cerrados de X. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, $U_\lambda := X \setminus C_\lambda \in \mathscr{T}$. De esta forma, $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de elementos de $\mathscr{T}$. Luego, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathscr{T}$. Como

$$X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus C_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,$$

concluyese que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda$ es un conjunto cerrado.

Finalmente, se probará el ítem (3). Sean C y D conjuntos cerrados de X. Entonces, $U := X \setminus C$ y $V := X \setminus D$ son elementos de $\mathscr{T}$ y, por lo tanto, $U \cap V \in \mathscr{T}$. Entretanto, como

$$X \setminus (C \cup D) = (X \setminus C) \cap (X \setminus D) = U \cap V,$$

concluyese que $C \cup D$ es un conjunto cerrado. $\square$

Si un conjunto posee una familia de subconjuntos satisfaciendo las tres propiedades del Teorema 1.10, entonces existe una única topología cuyos cerrados coinciden con dicha familia. De forma precisa, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.11 ([12, Ejercicio 5.5]). *Sean X un conjunto y $\mathscr{P}(X)$ el conjunto de partes de X. Si la familia $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ satisface las siguientes condiciones:*
(C$_1$) *$\varnothing$ y X pertenecen a $\mathscr{C}$;*
(C$_2$) *para toda familia $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de elementos de $\mathscr{C}$, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \in \mathscr{C}$;*
(C$_3$) *para todos los elementos C y D de $\mathscr{C}$, $C \cup D \in \mathscr{C}$;*
entonces $\mathscr{T} = \{X \setminus C : C \in \mathscr{C}\}$ es una topología en X. Además, $\mathscr{T}$ es la única topología en X tal que $\mathscr{C}$ es la familia completa de conjuntos cerrados.

Demostración. Se probará las condiciones (i), (ii) y (iii) de la Definición 1.26. Inicialmente, se probará la condición (i). De hecho, por la condición (C$_1$), $X \in \mathscr{C}$. Luego, $\varnothing = X \setminus X \in \mathscr{T}$. Utilizando nuevamente la condición (C$_1$), se tiene que $\varnothing \in \mathscr{C}$. Entonces, $X = X \setminus \varnothing \in \mathscr{T}$.

Ahora se probará la condición (ii). Sean U y V elementos de $\mathscr{T}$. Entonces, existen elementos C y D de $\mathscr{C}$ tal que $U = X \setminus C$ y $V = X \setminus D$. Siendo C y D son elementos de $\mathscr{C}$, por la condición (C$_3$), $C \cup D \in \mathscr{C}$. Entretanto, como

$$U \cap V = (X \setminus C) \cap (X \setminus D) = X \setminus (C \cup D),$$

concluyese que $U \cap V \in \mathscr{T}$.

Finalmente, se probará la condición (iii). Sea $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de elementos de $\mathscr{T}$. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $C_\lambda \in \mathscr{C}$ tal que $U_\lambda = X \setminus C_\lambda$. De esta forma, $(C_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de elementos de $\mathscr{C}$. Luego, por la condición (C$_2$), $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda \in \mathscr{C}$. Como

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X \setminus C_\lambda) = X \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda,$$

concluyese que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathscr{T}$.

Esto muestra que $\mathscr{T}$ es una topología en X y, por la definición de $\mathscr{T}$, $\mathscr{C}$ es la familia completa de conjuntos cerrados.

Para la unicidad, sea $\mathscr{T}'$ una topología en X tal que $\mathscr{C}$ es la familia completa de conjuntos cerrados. Se probará que $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$. En efecto, sea $U \in \mathscr{T}'$. Como $\mathscr{C}$ es la familia completa de conjuntos cerrados en la topología $\mathscr{T}'$, sigue que $X \setminus U \in \mathscr{C}$. Luego, por definición de $\mathscr{T}$, $U = X \setminus (X \setminus C) \in \mathscr{T}$. Esto muestra que $\mathscr{T}' \subset \mathscr{T}$. Para la inclusión contrária, sea $U \in \mathscr{T}$. Entonces, por definición de $\mathscr{T}$, $U = X \setminus C$, para algún $C \in \mathscr{C}$. Siendo $\mathscr{C}$ la familia de todos los conjuntos cerrados en la topología $\mathscr{T}'$, concluyese que $U \in \mathscr{T}'$. Esto muestra que $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$. En consecuencia, $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$. □

1.3.1.2 Clausura de un conjunto

En esta subsubsección, se estudiará el concepto de *cierre* de un conjunto y algunas de sus propiedades.

Definición 1.30. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Si A es un subconjunto de X, se define la *clausura* (o *cierre*) de A, denotado por $\overline{A}$, como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

Proposición 1.23. *Sea X un espacio topológico. El cierre de un subconjunto A de X, satisface las siguientes propiedades*:

(1) $A \subset \overline{A}$;

(2) *$\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado de X que contiene a A*;

(3) *A es cerrado si, y solamente si, $\overline{A} \subset A$. En este caso, $A = \overline{A}$.*

Demostración. El ítem (1) es consecuencia inmediata de la definición de cierre de A.

Ahora, se probará el ítem (2). Por el ítem (C_2) del Teorema 1.10, sigue que $\overline{A}$ es un conjunto cerrado de X. Ahora, por el ítem (1), $A \subset \overline{A}$. De esta forma, si C es un conjunto cerrado de X que contiene a A, se tiene que $\overline{A} \subset C$, es decir, $\overline{A}$ es el menor conjunto cerrado de X que contiene a A.

Finalmente, se probará el ítem (3). Supóngase inicialmente que A es cerrado. Como $A \subset A$, por el ítem (2), concluyese que $\overline{A} \subset A$. Recíprocamente, supóngase que $\overline{A} \subset A$. Por otro lado, por el ítem (1), $A \subset \overline{A}$. Entonces, $\overline{A} = A$. Entretanto, por el ítem (2), $\overline{A}$ es cerrado. Esto implica que A es cerrado. La parte final del ítem (3) es clara. □

1.3.2 Base de una topología

Especificar una topología, se simplifica dando solo suficientes conjuntos abiertos para “generar” todos los conjuntos abiertos. Esta familia “más pequeña” de abiertos es llamada *base*.

Definición 1.31. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Una familia de abiertos $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ se dice que es una *base* de la topología $\mathscr{T}$ si todo conjunto abierto de X es unión de elementos de $\mathscr{B}$.

$\mathscr{B}$ también se denomina *base para el espacio* $(X, \mathscr{T})$ y sus elementos son llamados *abiertos básicos de la topología* $\mathscr{T}$.

Como $\mathscr{B}$ es una base para el espacio $(X, \mathscr{T})$, cada unión de abiertos de $\mathscr{B}$ pertenece $\mathscr{T}$. Por lo tanto, una base del espacio $(X, \mathscr{T})$ determina completamente la topología $\mathscr{T}$.

Ejemplo 1.50. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. La familia $\mathscr{T}$ es una base para el espacio $(X, \mathscr{T})$.

Teorema 1.12 ([12, Teorema 2.2])**.** *Sean X un espacio topológico y $\mathscr{B} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos abiertos de X. Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) *$\mathscr{B}$ es una base para el espacio X*;

(2) *para cada conjunto abierto G de X y cada x en G, existe un índice λ de Λ tal que $x \in U_\lambda \subset G$.*

Demostración. Se probará que (1) implica (2) y (2) implica (1). Inicialmente, se probará que (1) implica (2). Para esto, sean G un conjunto abierto de X y x un elemento en G. Como $\mathscr{B}$ es una base para el espacio X, existe un subconjunto no vacío M de Λ tal que $G = \bigcup_{\mu \in M} U_\mu$. Como $x \in G$, existe $\lambda \in M$ tal que $x \in U_\lambda \subset G$.

Ahora se probará que (2) implica (1). Sea G un conjunto abierto de X. Para cada x en G, existe un índice λ_x de Λ tal que $x \in U_{\lambda_x} \subset G$. Entonces,

$$G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subset \bigcup_{x \in G} U_{\lambda_x} \subset G$$

y, por lo tanto,

$$G = \bigcup_{x \in G} U_{\lambda_x}.$$

Esto muestra que $\mathscr{B}$ es una base para el espacio X. $\square$

1.3.3 Funciones continuas

En esta subsección, se relacionan dos espacios topológicos, a través de una *función contínua* entre ellos.

Definición 1.32. Sean $(X, \mathscr{T}(X))$ y $(Y, \mathscr{T}(Y))$ espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es *continua* si, para cada conjunto abierto V de Y, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de X.

Cuando existe la necesidad de especificar las topologías de los espacios X y Y, una función continua $f : X \longrightarrow Y$, se acostumbra escribir $f : (X, \mathscr{T}(X)) \longrightarrow (Y, \mathscr{T}(Y))$.

Teorema 1.13 ([23, Teorema 18.2 (d)])**.** *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. Si f es continua y A es un subespacio de X, entonces la función restricción $f|_A : A \longrightarrow Y$ es continua.*

Demostración. Sea V un conjunto abierto de Y. Como f es continua, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de X. Entretanto, siendo $f|_A{}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$, concluyese que $f|_A{}^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de A. Por lo tanto, $f|_A$ es continua. $\square$

Teorema 1.14. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) *f es continua;*

(2) *para cada conjunto cerrado D de Y, $f^{-1}(D)$ es un conjunto cerrado de X;*

(3) *si $\mathscr{B} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base para el espacio Y, entonces $f^{-1}(V_\lambda)$ es un conjunto abierto de X, para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Se probará que (1) implica (2), (2) implica (3) y (3) implica (1). Inicialmente, se probará que (1) implica (2). Para esto, sea D un conjunto cerrado de Y. Entonces, $Y \setminus D$ es un conjunto abierto de Y. Como f es continua y $f^{-1}(Y \setminus D) = X \setminus f^{-1}(D)$, sigue que $X \setminus f^{-1}(D)$ es un conjunto abierto de X. Por lo tanto, $f^{-1}(D)$ es un conjunto cerrado de X.

Ahora se probará que (2) implica (3). De hecho, sea $\lambda \in \Lambda$ un elemento fijo arbitrário. Como $Y \setminus V_\lambda$ es un conjunto cerrado de Y, se tiene que $f^{-1}(Y \setminus V_\lambda)$ es un conjunto cerrado de X. Siendo $f^{-1}(Y \setminus V_\lambda) = X \setminus f^{-1}(V_\lambda)$, concluyese que $f^{-1}(V_\lambda)$ es un conjunto abierto de X.

Finalmente, se probará que (3) implica (1). En efecto, sea V un conjunto abierto de Y. Como $\mathscr{B} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base para el espacio Y, existe un subconjunto no vacío M de Λ tal que $V = \bigcup_{\mu\in M} V_\mu$. Como $f^{-1}(V_\mu)$ es un conjunto abierto de X, para todo $\mu \in M$ y $f^{-1}(V) = \bigcup_{\mu\in M} f^{-1}(V_\mu)$, sigue que $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de X. Por lo tanto, f es continua. $\square$

Definición 1.33. Sean $(X, \mathscr{T}(X))$ y $(Y, \mathscr{T}(Y))$ espacios topológicos. Una función biyectiva $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es un *homeomorfismo* si f y f^{-1} son contínuas.

1.3.4 Funciones abiertas y cerradas

Una función entre dos espacios topológicos, se dice que es *abierta* (respectivamente, *cerrado*), cuando mapea conjuntos abiertos (respectivamente, cerrados) en conjuntos abiertos (respectivamente, cerrados). De forma precisa, se tiene las siguientes definiciones.

Definición 1.34. Sean $(X, \mathscr{T}(X))$ y $(Y, \mathscr{T}(Y))$ espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es *abierta* si, para cada conjunto abierto U de X, $f(U)$ es un conjunto abierto de Y.

Definición 1.35. Sean $(X, \mathscr{T}(X))$ y $(Y, \mathscr{T}(Y))$ espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es *cerrada* si, para cada conjunto cerrado C de X, $f(C)$ es un conjunto cerrado de Y.

1.3.5 Clases de espacios topológicos

En esta subsección, se estudiará ciertas clases de espacios topológicos, las cuales serán utilizadas a lo largo de esta tesis.

1.3.5.1 Espacios compactos

Definición 1.36. Sean $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y S un subconjunto de X. Se dice que la familia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjuntos de X es un *recubrimiento* de S si

$$S \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda.$$

En la Definición 1.36, si $S = X$ y la familia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es un recubrimiento de X, se tiene

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

Definición 1.37. Sean $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico y S un subconjunto de X. Sean $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento de S y M un subconjunto no vacío de Λ. Si $(U_\mu)_{\mu\in M}$ es un recubrimiento de S, se dice que $(U_\mu)_{\mu\in M}$ es un *subrecubrimiento* de $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Si M es un conjunto finito, se dice que $(U_\mu)_{\mu\in M}$ es un *subrecubrimiento finito* de $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Definición 1.38. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Se dice que un recubrimiento $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de X es un *recubrimiento abierto* de X si $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos abiertos de X.

Definición 1.39. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Se dice que $(X, \mathscr{T})$ es *compacto* si, todo recubrimiento abierto de X, admite un subrecubrimiento finito.

Se dice que un subconjunto K de un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es un *subconjunto compacto* de X si el espacio $(K, \mathscr{T}_K)$ es compacto.

Definición 1.40. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Se dice que un recubrimiento $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de X es un *recubrimiento abierto básico* de X si $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de conjuntos abiertos básicos de X.

Nótese el hecho trivial de que si un espacio topológico es compacto, entonces todo recubrimiento abierto básico admite un subrecubrimiento finito. El siguiente teorema afirma que la compacidad no sólo implica esta propiedad, sino que también está implícita en ella.

Teorema 1.15 ([26, Teorema E., pág. 112])**.** *Un espacio topológico X es compacto si, y solamente si, cualquier recubrimiento abierto básico de X admite un subrecubrimiento finito.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una base para el espacio X. Supóngase, inicialmente, que X sea compacto y sea $(U_\mu)_{\mu\in M}$ un recubrimiento abierto básico de X, donde M es un subconjunto de Λ. En particular, $(U_\mu)_{\mu\in M}$ es un recubrimiento abierto de X. Como X es compacto, existe un subconjunto F de M tal que $(U_\eta)_{\eta\in F}$ es un subrecubrimiento finito de $(U_\mu)_{\mu\in M}$.

Ahora, se procederá a mostrar la recíproca. Sea $(V_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ un recubrimiento abierto de X. Siendo $\mathscr{B}$ una base para el espacio X, para cada $\gamma \in \Gamma$, existe $\Lambda_\gamma \subset \Lambda$ tal que

$$V_\gamma = \bigcup_{\lambda_\gamma \in \Lambda_\gamma} U_{\lambda_\gamma}.$$

Como $(V_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ es un recubrimiento de X, se tiene que

$$X = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\left(\bigcup_{\lambda_\gamma\in\Lambda_\gamma} U_{\lambda_\gamma}\right) = \bigcup_{\delta\in\Delta} U_\delta,$$

donde $\Delta := \bigcup_{\gamma\in\Gamma}\Lambda_\gamma$. Luego, $(U_\delta)_{\delta\in\Delta}$ es un recubrimiento abierto básico de X. Entonces, por la hipótesis, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta_i}.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\gamma_i \in \Gamma$ tal que $\delta_i \in \Lambda_{\gamma_i}$ (ya que $\delta_i \in \Delta$). Teniendo en vista que $U_{\delta_i} \subset \bigcup_{\lambda_{\gamma_i}\in\Lambda_{\gamma_i}} U_{\lambda_{\gamma_i}}$, sigue que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n}\left(\bigcup_{\lambda_{\gamma_i}\in\Lambda_{\gamma_i}} U_{\lambda_{\gamma_i}}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\gamma_i} \subset X,$$

y, por lo tanto,

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\gamma_i}.$$

Consecuentemente, $\left(V_{\gamma_i}\right)_{i=1}^{n}$ es un subrecubrimiento finito de $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, es decir, X es compacto. $\square$

Lema 1.3 ([23, Lema 26.1.]). *Sea X un espaço topológico. Si K es un subconjunto de X, entonces K es compacto si, y solamente si, cualquier recubrimiento de K, por conjuntos abiertos de X, admite un subrecubrimiento finito.*

Demostración. Supóngase, inicialmente, que K sea compacto y sea $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento de K por conjuntos abiertos de X, es decir,

$$K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda.$$

Luego,

$$K \subset \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \right) \cap K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap K) \subset K$$

y, por lo tanto,

$$K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap K).$$

Entonces, la familia $(U_\lambda \cap K)_{\lambda \in \Lambda}$ es un recubrimiento de K. Siendo U_λ un conjunto abierto en X, sigue que cada $U_\lambda \cap K$ es un conjunto abierto en K, para todo $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto, $(U_\lambda \cap K)_{\lambda \in \Lambda}$ es un recubrimiento abierto de K. Como K es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\lambda_i} \cap K).$$

Esto implica que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i},$$

pues $U_{\lambda_i} \cap K \subset U_{\lambda_i}$, para todo entero i tal que $1 \leq i \leq n$. Consecuentemente, $(U_{\lambda_i})_{i=1}^{n}$ es un subrecubrimiento finito de $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Reciprocamente, sea $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recubrimiento abierto de K, es decir,

$$K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda.$$

Por la definición de topologia induzida, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe U_λ abierto en X tal que $V_\lambda = U_\lambda \cap K$. Luego,

$$K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap K) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda,$$

pues $U_\lambda \cap K \subset U_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Entonces,

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

y así la familia $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ es un recubrimiento de K por conjuntos abiertos de X.

Por la hipótesis, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i}.$$

Luego,

$$K \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} \right) \cap K = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{\lambda_i} \cap K) = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\lambda_i} \subset K,$$

y, por lo tanto,

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\lambda_i}.$$

Consecuentemente, $(V_{\lambda_i})_{i=1}^{n}$ es un subrecubrimiento finito de $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. $\square$

Teorema 1.16. *Sea X un espaço topológico. Si K es un subconjunto de X, entonces K es compacto si, y solamente si, cualquier recubrimiento de K, por conjuntos abiertos básicos de X, admite un subrecubrimiento finito.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una base para el espacio X. Supóngase inicialmente que K sea compacto y sea $(U_\mu)_{\mu\in M}$ un recubrimiento de K por conjuntos abiertos básicos de X, donde M es un subconjunto de Λ. En particular, $(U_\mu)_{\mu\in M}$ es un recubrimiento de K conjuntos abiertos de X. Como K es compacto, por el Lema 1.3, existe un subconjunto F de M tal que $(U_\eta)_{\eta\in F}$ es un subrecubrimiento finito de $(U_\mu)_{\mu\in M}$.

Reciprocamente, sea $(V_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ un recubrimiento de K por conjuntos abiertos de X. Siendo $\mathscr{B}$ una base para el espacio X, para cada $\gamma \in \Gamma$, existe $\Lambda_\gamma \subset \Lambda$ tal que

$$V_\gamma = \bigcup_{\lambda_\gamma \in \Lambda_\gamma} U_{\lambda_\gamma}.$$

Como $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es un recubrimiento de K, se tiene que

$$K \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \left(\bigcup_{\lambda_\gamma \in \Lambda_\gamma} U_{\lambda_\gamma} \right) = \bigcup_{\delta\in\Delta} U_\delta,$$

donde $\Delta := \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \Lambda_\gamma$. Luego, $(U_\delta)_{\delta\in\Delta}$ es un recubrimiento de K por conjuntos abiertos básicos de X. Entonces, por la hipótesis, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta$

tales que
$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta_i}.$$
Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\gamma_i \in \Gamma$ tal que $\delta_i \in \Lambda_{\gamma_i}$ (ya que $\delta_i \in \Delta$). Teniendo en vista que $U_{\delta_i} \subset \bigcup_{\lambda_{\gamma_i} \in \Lambda_{\gamma_i}} U_{\lambda_{\gamma_i}}$, sigue que
$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\delta_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcup_{\lambda_{\gamma_i} \in \Lambda_{\gamma_i}} U_{\lambda_{\gamma_i}} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} V_{\gamma_i},$$
y, por lo tanto,
$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{\gamma_i}.$$
Consecuentemente, $\left(V_{\gamma_i}\right)_{i=1}^{n}$ es un subrecubrimiento finito de $(V_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Por lo tanto, por el Lema 1.3, se tiene que K es compacto. $\square$

1.3.5.2 Espacios T_0

Definición 1.41. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Se dice que $(X, \mathscr{T})$ es T_0 o *espacio de Kolmogorov* si, dados dos puntos distintos cualesquiera x y y del espacio X, existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$, o $y \in U$ y $x \notin U$.

Ejemplo 1.51. Si $X = \varnothing$ o $X = \{x\}$, entonces el espacio X es trivialmente un espacio T_0.

Ejemplo 1.52. Si X es un espacio topológico dotado de la topología trivial, entonces X es un espacio T_0 si, y solamente si, $|\,X\,| \leq 1$. En efecto, supóngase inicialmente que X es un espacio T_0. Si $|\,X\,| > 1$, existirían dos puntos distintos x y y en el espacio X. Siendo X el único conjunto abierto no vacío de X, esto contradice el hecho de X ser un espacio T_0. Así, $|\,X\,| \leq 1$. Reciprocamente, supóngase que $|\,X\,| \leq 1$. Entonces, por el Ejemplo 1.51, concluyese que X es un espacio T_0.

Proposición 1.24 ([14, Ejercicio 1.5.A.])**.** *Un espacio topológico X es T_0 si, y solamente si, para cualquier par de puntos distintos x y y del espacio X, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.*

Demostración. Si X es vacío o unitário, entonces el resultado es trivialmente verdadero. De esta forma, se puede asumir que X posee más de un ponto.

Supóngase, inicialmente, que X es T_0 y sean x y y dos puntos distintos del espacio X. Como X es T_0, existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o $y \in U$ y $x \notin U$. Se probará que $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. En efecto, procediendo por el absurdo, supóngase que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Si $x \in U$ y $y \notin U$, entonces $y \in X \setminus U$ y, por lo tanto, $x \in \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \subset X \setminus U$, una contradicción. Ahora, si $y \in U$ y $x \notin U$, entonces $x \in X \setminus U$ y, por lo tanto, $y \in \overline{\{y\}} = \overline{\{x\}} \subset X \setminus U$, lo que también acarrea una contradicción. Consecuentemente, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

Ahora, se procederá a mostrar la recíproca. Sean x y y dos puntos distintos del espacio X. Entonces, $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, es decir, $\overline{\{x\}} \not\subset \overline{\{y\}}$ o $\overline{\{y\}} \not\subset \overline{\{x\}}$. Si $\overline{\{x\}} \not\subset \overline{\{y\}}$, entonces $x \notin \overline{\{y\}}$, pues en caso contrario se tendría que $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}}$, lo cual sería una contradicción. Luego, existe un conjunto cerrado C conteniendo a $\{y\}$ tal que $x \notin C$. Esto implica que $x \in X \setminus C$ y $y \notin X \setminus C$. Ahora, si $\overline{\{y\}} \not\subset \overline{\{x\}}$, entonces $y \notin \overline{\{x\}}$, pues en caso contrario se tendría que $\overline{\{y\}} \subset \overline{\{x\}}$, lo cual sería una contradicción. Así, existe un conjunto cerrado D conteniendo a $\{x\}$ tal que $y \notin D$. Esto implica que $y \in X \setminus D$ y $x \notin X \setminus D$. Por lo tanto, X es T_0. □

1.3.5.3 Espacios T_1

Definición 1.42. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Se dice que $(X, \mathscr{T})$ es T_1 o *espacio de Fréchet*, si dados dos puntos distintos cualesquiera x y y del espacio X, existen conjuntos abiertos U y V tales que $x \in U$ y $y \notin U$, y $y \in V$ y $x \notin V$.

Claramente, todo espacio topológico T_1 es un espacio T_0.

Ejemplo 1.53. Si $X = \varnothing$ o $X = \{x\}$, entonces el espacio X es trivialmente un espacio T_1.

Proposición 1.25 ([14, pág. 37])**.** *Un espacio topológico X es T_1 si, y solamente si, para cualquier punto x del espacio X, $\{x\}$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Si X es vacío o unitário, entonces el resultado es trivialmente verdadero. De esta forma, se puede asumir que X posee más de un ponto.

Supóngase, inicialmente, que X es T_1 y sea x un punto del espacio X. Como X es T_1, para cada punto y en X distinto de x, existe un conjunto abierto U_y tal que $y \in U_y$ y $x \notin U_y$. Sea

$$U := \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y.$$

Como $x \notin U_y$, para todo $y \in X \setminus \{x\}$, se tiene que $x \notin U$. Luego, $U = X \setminus \{x\}$. Más aún, siendo U_y un conjunto abierto de X, para todo $y \in X \setminus \{x\}$, se tiene que U_y es un conjunto abierto de X. Consecuentemente, $\{x\}$ es un conjunto cerrado de X.

Ahora, se procederá a mostrar la recíproca. Sean x y y dos puntos distintos del espacio X. Como $\{x\}$ y $\{y\}$ son conjuntos cerrados de X, sigue que $U_y := X \setminus \{x\}$ y $U_x := X \setminus \{y\}$ son conjuntos abiertos de X. Más aún, $x \in U_x$ y $y \notin U_x$, y $y \in U_y$ y $x \notin U_y$. Por lo tanto, X es T_1. □

1.3.5.4 Espacios irreducibles

Definición 1.43. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Se dice que $(X, \mathscr{T})$ es *irreducible o hiperconexo* si X es no vacío y, para cualquier descomposición $X = C_1 \cup C_2$ con conjuntos cerrados C_1 y C_2 de X, se tiene que $X = C_1$ o $X = C_2$.

Se dice que un subconjunto Y de un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es un *subconjunto irreducible* de X si el espacio $(Y, \mathscr{T}_Y)$ es irreducible.

Ejemplo 1.54. Si $X = \{x\}$, entonces el espacio X es trivialmente un espacio irreducible.

Lema 1.4 ([5, pág. 94])**.** *Sea X un espaço topológico. Si Y es un subconjunto de X, entonces Y es irreducible si, y solamente si, para cualquier par de conjuntos cerrados C_1 y C_2 de X tales que $Y \subset C_1 \cup C_2$, $Y \subset C_1$ o $Y \subset C_2$.*

Demostración. Supóngase, inicialmente, que Y sea irreducible y sean C_1 y C_2 conjuntos cerrados de X tales que $Y \subset C_1 \cup C_2$. Luego,

$$Y \subset (C_1 \cup C_2) \cap Y = (C_1 \cap Y) \cup (C_2 \cap Y) \subset Y$$

y, por lo tanto, $Y = (C_1 \cap Y) \cup (C_2 \cap Y)$. Siendo Y irreducible, concluyese que $Y = C_1 \cap Y$ o $Y = C_2 \cap Y$. Esto implica que, $Y \subset C_1$ o $Y \subset C_2$.

Reciprocamente, sea $Y = D_1 \cup D_2$ una descomposición por conjuntos cerrados D_1 y D_2 de Y. Por la definición de topologia induzida, existen C_1' y C_2' cerrados en X tales que $D_1 = C_1' \cap Y$ y $D_2 = C_2' \cap Y$. Luego, $Y = (C_1' \cap Y) \cup (C_2' \cap Y) = (C_1' \cup C_2') \cap Y$. Entonces, $Y \subset C_1' \cup C_2'$. En consecuencia, por la hipótesis, $Y \subset C_1'$ o $Y \subset C_2'$. Esto implica que

$$Y \subset C_1' \cap Y \subset Y \quad \text{o} \quad Y \subset C_2' \cap Y \subset Y.$$

Por lo tanto, $Y = D_1$ o $Y = D_2$. Consecuentemente, Y es irreducible. $\square$

Ejemplo 1.55. Sea X un espacio topológico. Si x es un punto de X, por el Lema 1.4, $\{x\}$ es un subconjunto irreducible de X.

Proposición 1.26 ([5, Proposición 2, pág. 95])**.** *Sea X un espaço topológico. Si Y es un subconjunto de X, entonces Y es irreducible si, y solamente si, $\overline{Y}$ es irreducible.*

Demostración. Supóngase, inicialmente, que Y sea irreducible y sean C_1 y C_2 conjuntos cerrados de X tales que $\overline{Y} \subset C_1 \cup C_2$. Entretanto, por el ítem (1) de la Proposición 1.23, $Y \subset \overline{Y}$. Luego, $Y \subset C_1 \cup C_2$. Como Y es irreducible, por el Lema 1.4, $Y \subset C_1$ o $Y \subset C_2$. Siendo C_1 y C_2 conjuntos cerrados de X, por el ítem (2) de la Proposición 1.23, se tiene que $\overline{Y} \subset C_1$ o $\overline{Y} \subset C_2$. Por lo tanto, utilizando nuevamente el Lema 1.4, concluyese que $\overline{Y}$ es irreducible.

Reciprocamente, supóngase que $\overline{Y}$ sea irreducible y sean D_1 y D_2 conjuntos cerrados de X tales que $Y \subset D_1 \cup D_2$. Siendo D_1 y D_2 conjuntos cerrados de X, se tiene que $D_1 \cup D_2$ es un conjunto cerrado de X. Luego, por el ítem (2) de la Proposición 1.23, $\overline{Y} \subset D_1 \cup D_2$. Como $\overline{Y}$ es irreducible, por el Lema 1.4, $\overline{Y} \subset D_1$ o $\overline{Y} \subset D_2$. Por otro lado, por el ítem (1) de la Proposición 1.23, $Y \subset \overline{Y}$. Entonces, $Y \subset D_1$ o $Y \subset D_2$. Por lo tanto, utilizando nuevamente el Lema 1.4, concluyese que Y es irreducible. $\square$

Proposición 1.27. *Sea X un espacio topológico. Si X es no vacío, entonces X es irreducible si, y solamente si, para todos los conjuntos abiertos no vacíos U y V de X se tiene que $U \cap V$ es no vacío.*

Demostración. Supóngase inicialmente que X es irreducible. Sean U y V conjuntos abiertos no vacíos de X. Procediendo por el absurdo, si $U \cap V = \varnothing$, entonces $X = X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$. Como $X \setminus U$ y $X \setminus V$ son conjuntos cerrados de X, y siendo X irreducible, se tiene que $X = X \setminus U$ o $X = X \setminus V$. Por lo tanto, $U = \varnothing$ o $V = \varnothing$, lo cual es una contradicción. Consecuentemente, $U \cap V \neq \varnothing$.

Ahora, se procederá a mostrar la recíproca. Sean C_1 y C_2 conjuntos cerrados de X tales que $X = C_1 \cup C_2$. Luego, $\varnothing = X \setminus (C_1 \cup C_2) = (X \setminus C_1) \cap (X \setminus C_2)$. Como $X \setminus C_1$ y $X \setminus C_2$ son conjuntos abiertos de X, por la hipótesis, se tiene que $X \setminus C_1 = \varnothing$ o $X \setminus C_2 = \varnothing$. Por lo tanto, $X = C_1$ o $X = C_2$, es decir, X es irreducible. $\square$

Corolario 1.21. *Sea X un espacio topológico. Si X es no vacío, entonces X es irreducible si, y solamente si, para todos los conjuntos abiertos básicos no vacíos U y V de X se tiene que $U \cap V$ es no vacío.*

Demostración. Sea $\mathscr{B} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una base de X. Supóngase, inicialmente, que X sea irreducible. Dados μ y η en Λ tales que U_μ y U_η son no vacíos, por la Proposición 1.27, se tiene que $U_\mu \cap U_\eta \neq \varnothing$.

Ahora, se procederá a mostrar la recíproca. Sean V y W conjuntos abiertos no vacíos de X. Entonces, existen $x \in V$ y $y \in W$. Siendo $\mathscr{B}$ una base de X, por el Teorema 1.12, existen λ_x y λ_y en Λ tales que $x \in U_{\lambda_x} \subset V$ y $y \in U_{\lambda_y} \subset W$. Como U_{λ_x} y U_{λ_y} son abiertos básicos no vacíos de X, por la hipótesis, $U_{\lambda_x} \cap U_{\lambda_y}$ es no vacío. Teniendo en vista que $U_{\lambda_x} \cap U_{\lambda_y} \subset V \cap W$, concluyese que $V \cap W$ es no vacío. Por lo tanto, por la Proposición 1.27, se tiene que X es irreducible. □

Teorema 1.17 ([5, Proposición 4, pág. 95])**.** *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. Si Z es un subconjunto irreducible de X y f es continua, entonces $f(Z)$ es un subconjunto irreducible de Y.*

Demostración. Sean C_1 y C_2 conjuntos cerrados de Y tales que $f(Z) \subset C_1 \cup C_2$. Luego,

$$Z \subset f^{-1}(f(Z)) \subset f^{-1}(C_1 \cup C_2) = f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2)$$

y, por lo tanto, $Z \subset f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2)$. Como $f : X \longrightarrow Y$ es contínua, por el Teorema 1.14, $f^{-1}(C_1)$ y $f^{-1}(C_2)$ son conjuntos cerrados de X. Además, siendo Z irreducible, por el Lema 1.4, concluyese que $Z \subset f^{-1}(C_1)$ o $Z \subset f^{-1}(C_2)$. Esto implica que, $f(Z) \subset f(f^{-1}(C_1))$ o $f(Z) \subset f(f^{-1}(C_2))$ y, por lo tanto, $f(Z) \subset C_1$ o $f(Z) \subset C_2$. Consecuentemente, utilizando nuevamente el Lema 1.4, se tiene que $f(Z)$ es irreducible. □

1.3.5.5 Espacios conexos

Definición 1.44. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Se dice que $(X, \mathscr{T})$ es *conexo* si, para cualquier descomposición $X = U_1 \cup U_2$ con conjuntos abiertos disjuntos U_1 y U_2 de X, se tiene que $X = U_1$ o $X = U_2$.

En el caso de que el espacio $(X, \mathscr{T})$ no sea conexo, se dice que es *disconexo.*

Se dice que un subconjunto Y de un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es un *subconjunto conexo* de X, si el espacio $(Y, \mathscr{T}_Y)$ es conexo.

Proposición 1.28. *Un espacio topológico X es disconexo si, y solamente si, existen conjuntos cerrados disjuntos C_1 y C_2 de X tales que $X = C_1 \cup C_2$ con C_1 y C_2 diferentes de X.*

Demostración. Supóngase inicialmente que X es disconexo. Entonces, existen conjuntos abiertos disjuntos U_1 y U_2 de X tales que $X = U_1 \cup U_2$ con U_1 y U_2 diferentes de X. Luego, $X = X \setminus (U_1 \cap U_2) = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$. Se tiene que $X \setminus U_1$ y $X \setminus U_2$ son conjuntos cerrados de X, $X \setminus U_1 = U_2 \neq X$ y $X \setminus U_2 = U_1 \neq X$. Además, $(X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2) = X \setminus (U_1 \cup U_2) = \varnothing$.

Reciprocamente, supóngase que existen conjuntos cerrados disjuntos C_1 y C_2 de X tales que $X = C_1 \cup C_2$ con C_1 y C_2 diferentes de X. Luego, $X = X \setminus (C_1 \cap C_2) = (X \setminus C_1) \cup (X \setminus C_2)$. Como $X \setminus C_1$ y $X \setminus C_2$ son conjuntos abiertos de X, $X \setminus C_1 = C_2 \neq X$ y $X \setminus C_2 = C_1 \neq X$, concluyese que X es disconexo. □

Proposición 1.29. *Un espacio topológico X es conexo si, y solamente si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados son $\varnothing$ y X.*

Demostración. Se probará que X es disconexo si, y solamente si, X contiene un subconjunto abierto y cerrado diferente de $\varnothing$ y X.

Supóngase, inicialmente, que X es disconexo. Entonces, por la Proposición 1.28, existen conjuntos cerrados disjuntos C_1 y C_2 de X tales que $X = C_1 \cup C_2$ con C_1 y C_2 diferentes de X. Como C_2 es un conjunto cerrado, se tiene que $C_1 = X \setminus C_2$ es un conjunto abierto. Además, siendo $X = C_1 \cup C_2$ y $C_2 \neq X$, sigue que $C_1 \neq \varnothing$.

Reciprocamente, supóngase que existe un subconjunto abierto y cerrado Y diferente de $\varnothing$ y X. Luego, $X = Y \cup (X \setminus Y)$. Como Y es un conjunto abierto, sigue que $X \setminus Y$ es un conjunto cerrado. También, como $Y \neq \varnothing$, se tiene que $X \setminus Y \neq X$. Por lo tanto, siendo $Y \cap (X \setminus Y) = \varnothing$, por la Proposición 1.28, concluyese que X es disconexo. □

Teorema 1.18 ([23, Teorema 23.5.]). *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. Si X es conexo y f es continua, entonces $f(X)$ es conexo.*

Demostración. Procediendo por el absurdo, supóngase que $f(X)$ es disconexo. Entonces, existen conjuntos abiertos disjuntos V_1 y V_2 de $f(X)$ tales que $f(X) = V_1 \cup V_2$ con V_1 y V_2 diferentes de $f(X)$. Por la definición de topologia induzida, existen U_1 y U_2 abiertos en Y tales que $V_1 = U_1 \cap Y$ y $V_2 = U_2 \cap Y$.

Luego, $f(X) = (U_1 \cap Y) \cup (U_2 \cap Y) = (U_1 \cup U_2) \cap Y$. Como $f : X \longrightarrow Y$ es contínua, $f^{-1}(U_1)$ y $f^{-1}(U_2)$ son conjuntos abiertos de X. Además,

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) \cap f^{-1}(Y) &= f^{-1}(U_1 \cap U_2 \cap Y) \\ &= f^{-1}(V_1 \cap V_2) \\ &= f^{-1}(\varnothing) \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

Ahora, como

$$X \subset f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(U_1 \cup U_2) \cap f^{-1}(Y) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \subset X,$$

sigue que $X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$. Por otro lado, se tiene $f(f^{-1}(V_1)) = V_1$ y $f(f^{-1}(V_2)) = V_2$, pues V_1 y V_2 son subconjuntos de $f(X)$. De esta forma, $f^{-1}(U_1) = f^{-1}(V_1) \neq X$ y $f^{-1}(U_2) = f^{-1}(V_2) \neq X$, ya que $V_1 \neq f(X)$ y $V_2 \neq f(X)$. De esta forma, concluyese que X es disconexo, contradiciendo la hipótesis, y esto finaliza la demostración. □

1.3.5.6 Espacios conexos por caminos

El conjunto $[0, 1]$ siempre será considerado dotado de la topología induzida por la topología usual de $\mathbb{R}$.

Definición 1.45. Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico. Se dice que dos puntos x y y del espacio X están *conectados por un camino en* X si existe una función continua $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$.

Se dice que $(X, \mathscr{T})$ es *conexo por caminos* si dos puntos cualesquiera x y y del espacio X están conectados por un camino en X.

Existe una relación entre los espacios conexos y conexos por caminos que es la siguiente: "Todo espacio conexo por caminos es conexo" (cf. [12, Teorema 5.3, pág.115]), pero la recíproca no es verdadera en general (cf. [12, Ejemplo 4, pág.115]).

Teorema 1.19 ([12, 5.2, pág. 115])**.** *Un espacio topológico X es conexo por caminos si, y solamente si, existe un ponto y_0 en X tal que para todo punto x en X, x y y_0 están conectados por un camino en X.*

Demostración. Supóngase, inicialmente, que X es conexo por caminos. Sea y_0 en X un elemento fijo en X. Como X es conexo por caminos, dado un punto x en X, existe una función continua $\gamma_x : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $\gamma_x(0) = x$ y $\gamma_x(1) = y_0$.

Reciprocamente, supóngase que la condición suficiente sea satisfecha, y sean x y y dos puntos cualesquiera del espacio X. Entonces, existen funciones continuas $f, g : [0,1] \longrightarrow X$ tales que $f(0) = x$, $f(1) = y_0$, $g(0) = y$ y $g(1) = y_0$. Considérese $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$, definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ g(2-2t), & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

Se tiene que $\gamma(0) = f(0) = x$ y $\gamma(1) = g(0) = y$. Se afirma que γ es continua. En efecto, sea C un conjunto cerrado de X. Como $f|_{[0,1/2]}$ es continua (cf. Teorema 1.13), sigue que

$$f\big|_{[0,1/2]}^{-1}(C) = \gamma^{-1}(C) \cap [0,1/2] \tag{1.3.1 (1)}$$

es un conjunto cerrado en $[0,1/2]$ y, por lo tanto, cerrado en $[0,1]$ (ya que $[0,1/2]$ es un conjunto cerrado en $[0,1]$). También, siendo $g|_{[1/2,1]}$ continua (cf. Teorema 1.13) y $\gamma(1/2) = f(1) = y_0 = g(1)$, concluyese que

$$g\big|_{[1/2,1]}^{-1}(C) = \gamma^{-1}(C) \cap [1/2,1] \tag{1.3.1 (2)}$$

es un conjunto cerrado en $[1/2,1]$ y, por lo tanto, cerrado en $[0,1]$ (ya que $[1/2,1]$ es un conjunto cerrado en $[0,1]$). Ahora, de (1.3.1 (1)) y (1.3.1 (2)), se tiene que

$$\gamma^{-1}(C) = \gamma^{-1}(C) \cap ([0,1/2] \cup [1/2,1]) = f\big|_{[0,1/2]}^{-1}(C) \cup g\big|_{[1/2,1]}^{-1}(C). \tag{1.3.1 (3)}$$

Como $f\big|_{[0,1/2]}^{-1}(C)$ y $g\big|_{[1/2,1]}^{-1}(C)$ son conjuntos cerrados en $[0,1]$, de (1.3.1 (3)), concluyese que $\gamma^{-1}(C)$ es un conjunto cerrado en $[0,1]$. Luego, por el Teorema 1.14, γ es continua. $\square$

CAPÍTULO 2

La topología de Zariski en el espectro primo de un anillo

En este capítulo, se estudia una topología definida en el espectro primo de un anillo. Para su desenvolvimiento, se seguirá la secuencia de algunos ejercicios propuestos en [1, Capítulo 1], así como de [5, Capítulo 2, Sección 4]; sin embargo, en algunos casos, con otras notaciones.

2.1 Variedad de un ideal

En esta sección, se define lo que es la *variedad* de un subconjunto de un anillo, los cuales serán los conjuntos cerrados en la topología de Zariski.

Definición 2.1. Sea A un anillo. Para cada subconjunto E de A, se define la *variedad de* E, denotada por $V(E)$, como el conjunto de todos los ideales primos de A que contienen a E.

Expresado en forma conjuntista,

$$V(E) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) : \ E \subset \mathfrak{p}\}.$$

Ejemplo 2.1. Para cualquier anillo cero A, $V(A) = \varnothing$. En efecto, si $A = \{0_A\}$, por la Observación 1.11, se tiene que $\operatorname{Spec}(A) = \varnothing$. Luego, $V(A) = \varnothing$.

Proposición 2.1. *Sea A un anillo.*

(1) *Si E y F son subconjuntos de A tales que $E \subset F$, entonces $V(F) \subset V(E)$.*

(2) *Si E es un subconjunto de A, entonces $V(E) = V(\langle E \rangle)$.*

(3) *Si I es un ideal de A, entonces I es un ideal propio de A si, y solamente si, $V(I) \neq \varnothing$.*

(4) *Si I es un ideal de A tal que $V(I) = \operatorname{Spec}(A)$, entonces $I \subset \aleph_A$.*

(5) *Si I es un ideal de A, entonces $V(I) = V(\operatorname{rad} I)$.*

(6) *Si I y J son ideales de A, entonces $V(I) \subset V(J)$ si, y solamente si, $\operatorname{rad} J \subset \operatorname{rad} I$.*

(7) *Si a es un elemento de A, entonces $V(\langle a \rangle) = V(\langle a^k \rangle)$, para todo entero positivo k.*

(8) *Si I es un ideal de A, entonces*

$$V(I) = \bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle).$$

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Si $V(F) = \varnothing$ no hay nada a probar. Ahora, si $V(F) \neq \varnothing$, dado $\mathfrak{p} \in V(F)$, se tiene que $F \subset \mathfrak{p}$. Como $E \subset F$, sigue que $E \subset \mathfrak{p}$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p} \in V(E)$. Consecuentemente, $V(F) \subset V(E)$.

Seguidamente, se probará el ítem (2). Como $E \subset \langle E \rangle$, por el ítem (1), se tiene que $V(\langle E \rangle) \subset V(E)$. Si $V(E) = \varnothing$, la inclusión contraria es clara. Ahora, si $V(E) \neq \varnothing$, sea $\mathfrak{p} \in V(E)$. Entonces, $E \subset \mathfrak{p}$. Siendo $\langle E \rangle$ el menor ideal de A que contiene E, concluyese que $\langle E \rangle \subset \mathfrak{p}$. Luego, $\mathfrak{p} \in V(\langle E \rangle)$ y, esto implica que $V(E) \subset V(\langle E \rangle)$. Por lo tanto, $V(E) = V(\langle E \rangle)$.

Para el ítem (3), supóngase inicialmente que I es un ideal propio de A. Entonces, por la Proposición 1.7, existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A tal que $I \subset \mathfrak{p}$. Luego, $\mathfrak{p} \in V(I)$. Reciprocamente, supóngase que existe $\mathfrak{p} \in V(I)$. Entonces, $I \subset \mathfrak{p} \subsetneq A$. Esto muestra que I es un ideal propio de A.

A seguir, se probará el ítem (4). Como $V(I) = \operatorname{Spec}(A)$, se tiene que $I \subset \mathfrak{p}$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A y, por lo tanto, $I \subset \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} \mathfrak{p}$. Luego, por la Proposición 1.10, $I \subset \aleph_A$.

Ahora, se procederá a probar el ítem (5). Si $I = A$ es claro. Suponga, ahora, que $I \neq A$. Por el Lema 1.1, se tiene que $I \subset \operatorname{rad} I$. Luego, por el ítem (1), $V(\operatorname{rad} I) \subset V(I)$. Para establecer la inclusión contraria, sea $\mathfrak{p} \in V(I)$, es decir, $I \subset \mathfrak{p}$. Entonces, por el Corolario 1.11, $\operatorname{rad} I \subset \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{rad} I)$ y, esto implica que $V(I) \subset V(\operatorname{rad} I)$. Consecuentemente, $V(I) = V(\operatorname{rad} I)$.

Para el ítem (6), supóngase inicialmente que $V(I) \subset V(J)$. Entonces, $\bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p} \subset \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(I)} \mathfrak{q}$. Como $\operatorname{rad} J = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(J)} \mathfrak{p}$ y $\operatorname{rad} I = \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(I)} \mathfrak{q}$ (cf. Proposición 1.8), concluyese que $\operatorname{rad} J \subset \operatorname{rad} I$. Recíprocamente, supóngase que $\operatorname{rad} J \subset \operatorname{rad} I$. Luego, por el ítem (1), $V(\operatorname{rad} I) \subset V(\operatorname{rad} J)$. Entretanto, por el ítem (5), se tiene que $V(I) = V(\operatorname{rad} I)$ y $V(J) = V(\operatorname{rad} J)$. Por lo tanto,

$V(I) \subset V(J)$.

A continuación, se probará el ítem (7). Como $a^k = a^{k-1} \cdot a \in \langle a \rangle$, sigue que $\left\langle a^k \right\rangle \subset \langle a \rangle$. Luego, por el ítem (1), se tiene que $V(\langle a \rangle) \subset V\big(\left\langle a^k \right\rangle\big)$. Si $\left\langle a^k \right\rangle = A$, la inclusión contraria es clara. Ahora, si $\left\langle a^k \right\rangle \neq A$, sea $\mathfrak{p} \in V\big(\left\langle a^k \right\rangle\big)$. Entonces, $\left\langle a^k \right\rangle \subset \mathfrak{p}$. Como $a^k \in \left\langle a^k \right\rangle$, sigue que $a^k \in \mathfrak{p}$ y, siendo $\mathfrak{p}$ un ideal primo, concluyese que $a \in \mathfrak{p}$. Luego, $\langle a \rangle \subset \mathfrak{p}$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p} \in V(\langle a \rangle)$. Esto implica que $V\big(\left\langle a^k \right\rangle\big) \subset V(\langle a \rangle)$. Consecuentemente, $V(\langle a \rangle) = V\big(\left\langle a^k \right\rangle\big)$.

Finalmente se probará el ítem (8). Si $I = A$, entonces $V(I) \subset \bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle)$. Caso contrario, dado $\mathfrak{p} \in V(I)$, se tiene que $I \subset \mathfrak{p}$. Como $\langle a \rangle \subset I$, para todo $a \in I$, concluyese que $\langle a \rangle \subset \mathfrak{p}$, para todo $a \in I$. Esto implica que $\mathfrak{p} \in V(\langle a \rangle)$, para todo $a \in I$. Por lo tanto, $\mathfrak{p} \in \bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle)$. Esto muestra que

$$V(I) \subset \bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle). \tag{2.1.1 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, supóngase que $\bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle) \neq \varnothing$ (si $\bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle) = \varnothing$ no hay nada a probar). Sea $\mathfrak{p} \in \bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle)$. Entonces, $\mathfrak{p} \in V(\langle a \rangle)$, para todo $a \in I$; es decir, $\langle a \rangle \subset \mathfrak{p}$, para todo $a \in I$. Luego, $I = \bigcup_{a \in I} \langle a \rangle \subset \mathfrak{p}$; lo cual implica que $\mathfrak{p} \in V(I)$. Esto muestra que

$$\bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle) \subset V(I). \tag{2.1.1 (2)}$$

Por lo tanto, de (2.1.1 (1)) y (2.1.1 (2)), $V(I) = \bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle)$. □

Por el ítem (2) de la Proposición 2.1, se tiene que

$$\{V(E) : E \text{ es un subconjunto de } A\} = \{V(I) : I \text{ es un ideal de } A\}.$$

Así, es suficiente considerar los conjuntos $V(I)$, donde I es un ideal en A.

De ahora en adelante, a menos que se indique lo contrario, en lo restante de esta sección, se asume que todos los anillos son no ceros.

Se definirá la topología de Zariski en el espectro primo de un anillo A, considerando las variedades $V(I)$ como sus conjuntos cerrados.

Teorema 2.1 ([5, pág. 98]). *Sea A un anillo. Las variedades de los subconjuntos de A, satisfacen las siguientes propiedades*:

(1) $V(\langle 0_A \rangle) = \operatorname{Spec}(A)$ *y* $V(A) = \varnothing$.

(2) *Para toda familia de ideales* $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *de* A,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right).$$

(3) *Para todos los ideales* I *y* J *de* A,

$$V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J).$$

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Como $\langle 0_A \rangle \subset \mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, se tiene que $\mathrm{Spec}(A) \subset V(\langle 0_A \rangle)$ y, por lo tanto, $V(\langle 0_A \rangle) = \mathrm{Spec}(A)$. Por otro lado, por el ítem (3) de la Proposición 2.1, $V(A) = \varnothing$.

Ahora, se probará el ítem (2). Sea $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de ideales de A. Por el ítem (2) de la Proposición 2.1, se tiene que

$$V\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right).$$

A seguir, se mostrará que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\big)$. Si $\Lambda = \varnothing$, se tiene $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = \mathrm{Spec}(A)$ y $V\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\big) = V(\langle 0_A \rangle)$. Luego, por el ítem (1), $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\big)$. Supóngase ahora que $\Lambda \neq \varnothing$. Si $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = \varnothing$, se tiene que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) \subset V\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\big)$. Caso contrario, si $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) \neq \varnothing$, sea $\mathfrak{p} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda)$. Entonces, $\mathfrak{p} \in V(I_\lambda)$, para todo $\lambda \in \Lambda$; es decir, $I_\lambda \subset \mathfrak{p}$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Luego, $\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda \subset \mathfrak{p}$, lo que implica que $\mathfrak{p} \in V\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\big)$. Esto muestra que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) \subset V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right). \tag{2.1.2 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $\mu \in \Lambda$. Como $I_\mu \subset \sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, por el ítem (1) de la Proposición 2.1, $V\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\big) \subset V(I_\mu)$. Siendo $\mu \in \Lambda$ arbitrário, concluyese que

$$V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda). \tag{2.1.2 (2)}$$

Por lo tanto, de (2.1.2 (1)) y (2.1.2 (2)),

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right).$$

Esto completa la prueba del ítem (2).

Finalmente, se probará el ítem (3). Sean I y J ideales de A. Por el ítem (1) de la Proposición 2.1, $V(IJ) \supset V(I \cap J)$, $V(I \cap J) \supset V(I)$ y $V(I \cap J) \supset V(J)$. Luego,

$$V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J) \subset V(IJ). \tag{2.1.3 (1)}$$

Para finalizar la demostración del ítem (3), se mostrará que $V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$. Si $IJ = A$ no hay nada a probar. Ahora, si $IJ \neq A$, sea $\mathfrak{p} \in V(IJ)$. Entonces, $IJ \subset \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, sigue que $I \subset \mathfrak{p}$ o $J \subset \mathfrak{p}$. Esto implica que $\mathfrak{p} \in V(I)$ o $\mathfrak{p} \in V(J)$. Luego, $\mathfrak{p} \in V(I) \cup V(J)$. Esto muestra que

$$V(IJ) \subset V(I) \cup V(J). \tag{2.1.3 (2)}$$

Por lo tanto, de (2.1.3 (1)) y (2.1.3 (2)),

$$V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J). \qquad \square$$

2.2 La topología de Zariski en el Spec(A)

Sea A un anillo. En virtud del Teorema 2.1, la familia

$$\zeta(A) = \{V(I) : I \text{ es un ideal de } A\}$$

satisface los axiomas para conjuntos cerrados de una topología en el espectro primo de A (cf. Teorema 1.11). Más precisamente, la familia

$$\mathscr{T}(A) = \{\omega(I) : I \text{ es un ideal de } A\},$$

donde

$$\omega(I) = \operatorname{Spec}(A) \setminus V(I),$$

es una topología en el espectro primo de A, que es llamada *topología de Zariski relativa a A*.

2.2.1 Una base para la topología de Zariski en el Spec(A)

En esta subsección, se define una base para la topología de Zariski en el espectro primo de un anillo A.

Para cada $a \in A$, sea $\omega(a) := \omega(\langle a \rangle)$. En particular, $\omega(0_A) = \varnothing$ y $\omega(1_A) = \mathrm{Spec}(A)$. Nótese que

$$\omega(a) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : a \notin \mathfrak{p}\}.$$

Teorema 2.2 ([5, pág. 99])**.** *Sea A un anillo. La familia $\mathscr{B}(A) = \{\omega(a) : a \in A\}$ es una base para la topologia de Zariski en el* Spec(A).

Demostración. Dado $\mathcal{U}$ un abierto de Spec(A), existe un ideal I de A tal que $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(I)$. Por el ítem (8) de la Proposición 2.1,

$$\mathrm{Spec}(A) \setminus V(I) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle).$$

Entonces,

$$\mathcal{U} = \mathrm{Spec}(A) \setminus \bigcap_{a \in I} V(\langle a \rangle) = \bigcup_{a \in I} (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(\langle a \rangle)) = \bigcup_{a \in I} \omega(a).$$

Por lo tanto, $\mathscr{B}(A)$ es una base para la topología de Zariski en el Spec(A). $\square$

Frecuentemente, se hará el uso de la base $\mathscr{B}(A)$ para Spec(A). Además de las propiedades usuales, los abiertos básicos del Spec(A), poseen otras propiedades interesantes. Para tener una mejor idea de algunas de estas propiedades, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2 ([1, Ejercicio 17 (i) a (iv), pág. 12])**.** *Sea A un anillo. Los abiertos básicos del espectro primo de A, satisfacen las siguientes propiedades:*

(1) *Si a y b son elementos de A, entonces $\omega(a) \cap \omega(b) = \omega(ab)$.*

(2) *Si a es un elemento de A, entonces $\omega(a) = \varnothing$ si, y solamente si, a es nilpotente.*

(3) *Si a es un elemento de A, entonces $\omega(a) = \mathrm{Spec}(A)$ si, y solamente si, a es una unidad.*

(4) *Si a y b son elementos de A, entonces $\omega(a) = \omega(b)$ si, y solamente si,* $\mathrm{rad}\langle a \rangle = \mathrm{rad}\langle b \rangle$.

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Por el ítem (3) del Teorema 2.1, se tiene que

$$\begin{aligned}\omega(a) \cap \omega(b) &= (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(\langle a \rangle)) \cap (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(\langle b \rangle))\\ &= \mathrm{Spec}(A) \setminus (V(\langle a \rangle) \cup V(\langle b \rangle))\\ &= \mathrm{Spec}(A) \setminus V(\langle a \rangle\langle b \rangle)\\ &= \mathrm{Spec}(A) \setminus V(\langle ab \rangle)\\ &= \omega(ab).\end{aligned}$$

Ahora, se probará el ítem (2). Supóngase inicialmente que $\omega(a) = \varnothing$. Entonces, $\mathrm{Spec}(A) = V(\langle a \rangle)$. Luego, por el ítem (4) de la Proposición 2.1, se tiene que $\langle a \rangle \subset \aleph_A$. Entretanto, como $a \in \langle a \rangle$, concluyese que a es nilpotente. Recíprocamente, supóngase que a es nilpotente. Entonces, por la Proposición 1.10, $a \in \mathfrak{p}$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A. Por lo tanto, $\mathfrak{p} \in V(\langle a \rangle)$, para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A. En consecuencia, $\mathrm{Spec}(A) \subset V(\langle a \rangle)$ y, por lo tanto, $\mathrm{Spec}(A) = V(\langle a \rangle)$ o, equivalentemente, $\omega(a) = \varnothing$.

A seguir se probará el ítem (3). Supóngase inicialmente que $\omega(a) = \mathrm{Spec}(A)$. Entonces, $V(\langle a \rangle) = \varnothing$. Luego, por el ítem (3) de la Proposición 2.1, se tiene que $\langle a \rangle = A$. Así, $1_A \in \langle a \rangle$ y, por lo tanto, existe $b \in A$ tal que $ab = 1_A$. Es decir, a es una unidad. Recíprocamente, supóngase que a es una unidad. Como $a \in \langle a \rangle$, por la Observación 1.3, concluyese que $\langle a \rangle = A$. En consecuencia, por el ítem (1) del Teorema 2.1, $V(\langle a \rangle) = V(A) = \varnothing$. Esto implica que $\omega(a) = \mathrm{Spec}(A)$.

Finalmente, se probará el ítem (4). Nótese que $\omega(a) = \omega(b)$ si, y solamente si, $V(\langle a \rangle) = V(\langle b \rangle)$. Entretanto, por el ítem (6) de la Proposición 2.1, $V(\langle a \rangle) = V(\langle b \rangle)$ si, y solamente si, $\mathrm{rad}\langle a \rangle = \mathrm{rad}\langle b \rangle$. Esto muestra que $\omega(a) = \omega(b)$ si, y solamente si, $\mathrm{rad}\langle a \rangle = \mathrm{rad}\langle b \rangle$. □

2.3 Propiedades topológicas del Spec(A)

En esta sección, se presentan las principales propiedades topológicas del espectro primo de un anillo.

Teorema 2.3 ([1, Ejercicio 17 (v), pág. 12])**.** *Para todo anillo A,* Spec(A) *es compacto.*

Demostración. Sea $(\omega(a_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento abierto básico de Spec(A). Entonces,

$$\mathrm{Spec}(A) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \omega(a_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{Spec}(A) \setminus V(\langle a_\lambda \rangle)) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(\langle a_\lambda \rangle)$$

y, por lo tanto, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(\langle a_\lambda \rangle) = \varnothing$. Entretanto, por el ítem (2) del Teorema 2.1,

$$V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle a_\lambda \rangle\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(\langle a_\lambda \rangle) = \varnothing.$$

Por lo tanto, por el ítem (3) de la Proposición 2.1, $\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle a_\lambda \rangle = A$. Teniendo en vista que $1_A \in A$, existen $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in A$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que $1_A = \sum_{i=1}^n x_i a_{\lambda_i}$. Luego, por el Corolario 1.2, $1_A \in \sum_{i=1}^n \langle a_{\lambda_i} \rangle$. En consecuencia, por la Observación 1.2, $\sum_{i=1}^n \langle a_{\lambda_i} \rangle = A$. De esta forma, por el ítem (1) del Teorema 2.1, $V\big(\sum_{i=1}^n \langle a_{\lambda_i} \rangle\big) = V(A) = \varnothing$. Ahora, utilizando nuevamente el ítem (2) del Teorema 2.1, se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(A) \setminus V\left(\sum_{i=1}^n \langle a_{\lambda_i} \rangle\right) &= \mathrm{Spec}(A) \setminus \bigcap_{i=1}^n V(\langle a_{\lambda_i} \rangle) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (\mathrm{Spec}(A) \setminus V(\langle a_{\lambda_i} \rangle)) \\ &= \bigcup_{i=1}^n \omega(a_{\lambda_i}).\end{aligned}$$

Esto muestra que $(\omega(a_{\lambda_i}))_{i=1}^n$ es un subrecubrimiento finito de $\{\omega(a_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Consecuentemente, por el Teorema 1.15, Spec(A) es compacto. □

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.3.

Teorema 2.4 ([5, Proposición 12, pág. 101])**.** *Sea A un anillo. Para todo $a \in A$, $\omega(a)$ es un subconjunto compacto. En particular, el espacio* Spec(A) *es compacto.*

Demostración. Sea $a \in A$ y sea $(\omega(a_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento de $\omega(a)$ por conjuntos abiertos básicos de Spec(A). Entonces,

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(A)\setminus V(\langle a\rangle)=\omega(a)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\omega(a_\lambda)&=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\operatorname{Spec}(A)\setminus V(\langle a_\lambda\rangle))\\&=\operatorname{Spec}(A)\setminus\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V(\langle a_\lambda\rangle)\end{aligned}$$

y, por lo tanto, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V(\langle a_\lambda\rangle)\subset V(\langle a\rangle)$. Entretanto, por el ítem (2) del Teorema 2.1,

$$V\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle a_\lambda\rangle\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V(\langle a_\lambda\rangle)\subset V(\langle a\rangle).$$

Por lo tanto, por el ítem (6) de la Proposición 2.1, $\operatorname{rad}\langle a\rangle\subset\operatorname{rad}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle a_\lambda\rangle$. Teniendo en vista que $a\in\operatorname{rad}\langle a\rangle$, sigue que $a\in\operatorname{rad}\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle a_\lambda\rangle$. Así, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $a^k\in\sum_{\lambda\in\Lambda}\langle a_\lambda\rangle$. Entonces, existen $n\in\mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_n\in A$ y $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\Lambda$ tales que $a^k=\sum_{i=1}^n x_i a_{\lambda_i}$. Luego, por el Corolario 1.2, $a^k\in\sum_{i=1}^n\langle a_{\lambda_i}\rangle$. En consecuencia, $\langle a^k\rangle\subset\sum_{i=1}^n\langle a_{\lambda_i}\rangle$. De esta forma, por los ítems (1) y (7) de la Proposición 2.1, se tiene $V\big(\sum_{i=1}^n\langle a_{\lambda_i}\rangle\big)\subset V\big(\langle a^k\rangle\big)=V(\langle a\rangle)$. Ahora, utilizando nuevamente el ítem (2) del Teorema 2.1, se tiene

$$\begin{aligned}\omega(a)=\operatorname{Spec}(A)\setminus V(\langle a\rangle)\subset\operatorname{Spec}(A)\setminus V&\left(\sum_{i=1}^n\langle a_{\lambda_i}\rangle\right)\\&=\operatorname{Spec}(A)\setminus\bigcap_{i=1}^n V(\langle a_{\lambda_i}\rangle)\\&=\bigcup_{i=1}^n(\operatorname{Spec}(A)\setminus V(\langle a_{\lambda_i}\rangle))\\&=\bigcup_{i=1}^n\omega(a_{\lambda_i}).\end{aligned}$$

Esto muestra que $(\omega(a_{\lambda_i}))_{i=1}^n$ es un subrecubrimiento finito de $(\omega(a_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$. Consecuentemente, por el Teorema 1.16, $\omega(a)$ es un subconjunto compacto.

Finalmente, como $\omega(1_A)=\operatorname{Spec}(A)$, se tiene que el espacio Spec(A) es compacto. □

Sean A un anillo y Y un subconjunto de Spec(A). Se denotará la intersección de todos los elementos en Y por $\mathfrak{F}(Y)$, es decir,

$$\mathfrak{F}(Y) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in Y} \mathfrak{p}.$$

Por la Proposición 1.2, $\mathfrak{F}(Y)$ es un ideal de A y $\mathfrak{F}(\varnothing) = A$.

Proposición 2.3 (Adaptado de [5, Proposición 11, pág. 99])**.** *Sea A un anillo.*

(1) *Si I es un ideal de A, entonces* $\mathfrak{F}(V(I)) = \operatorname{rad} I$.

(2) $\mathfrak{F}(\operatorname{Spec}(A)) = \aleph_A$.

(3) *Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces* $\mathfrak{F}(V(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$.

(4) *Si I es un ideal de A y Y es un subconjunto de* Spec(A)*, entonces* $I \subset \mathfrak{F}(Y)$ *si, y solamente si,* $Y \subset V(I)$.

(5) *Si a es un elemento de A y Y es un subconjunto de* Spec(A)*, entonces* $a \in \mathfrak{F}(Y)$ *si, y solamente si,* $Y \subset V(\langle a \rangle)$.

(6) *Si Y es un subconjunto de* Spec(A)*, entonces* $V(\mathfrak{F}(Y)) = \overline{Y}$.

(7) *Si Y es un subconjunto de* Spec(A)*, entonces Y es cerrado si, y solamente si,* $V(\mathfrak{F}(Y)) = Y$.

Demostración. El ítem (1) es consecuencia inmediata de la Proposición 1.8 y de la definición de $V(I)$. Asimismo, el ítem (2) es consecuencia inmediata de la Proposición 1.10 y de la definición de Spec(A).

A seguir, se probará el ítem (3). Por la Proposición 1.9, se tiene que $\operatorname{rad} \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$. El resultado ahora sigue del ítem (1).

Ahora, se probará el ítem (4). Si $Y = \varnothing$ el resultado es claro, así considérese $Y \neq \varnothing$. Supóngase inicialmente que $I \subset \mathfrak{F}(Y)$ y sea $\mathfrak{p} \in Y$. Entonces, $I \subset \mathfrak{p}$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p} \in V(I)$. Esto muestra que $Y \subset V(I)$. Recíprocamente, supóngase que $Y \subset V(I)$ y sea $\mathfrak{p} \in Y$. De esta forma, $\mathfrak{p} \in V(I)$. Luego, $I \subset \mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in Y$. Por lo tanto, $I \subset \mathfrak{F}(Y)$.

El ítem (5) es un caso particular del ítem (4), considerando $I = \langle a \rangle$.

A continuación, se probará el ítem (6). Supóngase, inicialmente, que $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{F}(Y))$. Entonces, $\mathfrak{F}(Y) \subset \mathfrak{p}$. Sea ahora $\mathscr{P}$ la familia de todos los conjuntos cerrados que contienen a Y. Dado un elemento arbitrário $C \in \mathscr{P}$, se tiene que C es un conjunto cerrado y $Y \subset C$. Entonces, existe un ideal I de A tal que $C = V(I)$ y $Y \subset V(I)$. Luego, $\mathfrak{p} \in V(I) = C$. Esto muestra que $\mathfrak{p} \in C$, para todo $C \in \mathscr{P}$. De esta forma, $\mathfrak{p} \in \overline{Y}$. Por lo tanto, $V(\mathfrak{F}(Y)) \subset \overline{Y}$. Para establecer la inclusión contraria, sea $\mathfrak{p} \in Y$. Entonces, $\mathfrak{F}(Y) \subset \mathfrak{p}$. Luego, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{F}(Y))$. Esto muestra que $Y \subset V(\mathfrak{F}(Y))$. Entretanto, como $V(\mathfrak{F}(Y))$ es cerrado, por el ítem (2) de la Proposición 1.23, concluyese que $\overline{Y} \subset V(\mathfrak{F}(Y))$. Consecuentemente, $V(\mathfrak{F}(Y)) = \overline{Y}$.

Finalmente, se probará el ítem (7). Supóngase inicialmente que Y es cerrado. Entonces, por el ítem (3) de la Proposición 1.23, $Y = \overline{Y}$. Luego, por el ítem (6), $V(\mathfrak{F}(Y)) = Y$. Recíprocamente, supóngase que $V(\mathfrak{F}(Y)) = Y$. Ahora, utilizando nuevamente el ítem (6), concluyese que $\overline{Y} = Y$. Entonces, por el ítem (3) de la Proposición 1.23, Y es cerrado. $\square$

Proposición 2.4 ([1, Ejercicio 18 (ii) y (iii), pág. 13])**.** *Sean A un anillo. El cierre de un punto de $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, satisface las siguientes propiedades*:

(1) $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$;

(2) *si* $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(A)$, *entonces* $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ *si*, *y solamente si*, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$.

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Por el ítem (6) de la Proposición 2.3, se tiene que $V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{F}(\{\mathfrak{p}\})) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$.

Ahora, se probará el ítem (2). Por el ítem (1), se tiene que $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$. Por otro lado, para un ideal primo $\mathfrak{q}$ de A, se tiene que $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p})$ si, y solamente si, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Esto implica que $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ si, y solamente si, $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. $\square$

Teorema 2.5 ([5, Corolario 6, pág. 101])**.** *Sea A un anillo. Si* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, *entonces el conjunto* $\{\mathfrak{p}\}$ *es cerrado si*, *y solamente si*, $\mathfrak{p}$ *es un ideal maximal.*

Demostración. Supóngase, inicialmente, que $\{\mathfrak{p}\}$ es cerrado. Sea I un ideal propio de A tal que $\mathfrak{p} \subset I$. Entonces, por el ítem (1) de la Proposición 2.1, $V(I) \subset V(\mathfrak{p})$. Entretanto, por el ítem (1) de la Proposición 2.4, $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$. Siendo el conjunto $\{\mathfrak{p}\}$ cerrado, por el ítem (3) de la Proposición 1.23, se tiene que $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{p}\}$. Entonces, $V(I) \subset \{\mathfrak{p}\}$. Por otro lado, como I es un ideal propio de A, por el ítem (3) de la Proposición 2.1, $V(I) \neq \varnothing$. En consecuencia, $V(I) = \{\mathfrak{p}\}$. Esto implica que, $\mathfrak{p} \in V(I)$ o, equivalentemente, $I \subset \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $I = \mathfrak{p}$. Esto muestra que $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal.

Recíprocamente, supóngase que $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal. Dado un ideal primo $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$, por el ítem (2) de la Proposición 2.4, se tiene que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Como $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal, concluyese que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Esto implica que $\mathfrak{q} \in \{\mathfrak{p}\}$ y, por lo tanto, $\overline{\{\mathfrak{p}\}} \subset \{\mathfrak{p}\}$. Consecuentemente, utilizando nuevamente el ítem (3) de la Proposición 1.23, $\{\mathfrak{p}\}$ es cerrado. $\square$

Teorema 2.6 ([1, Ejercicio 18 (iv), pág. 13])**.** *Para todo anillo A*, $\mathrm{Spec}(A)$ *es un espacio T_0.*

Demostración. Sean $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ dos elementos en $\operatorname{Spec}(A)$ tales que $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$. Entonces, existen $i, j \in \{1, 2\}$ tales que $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_j$. Luego, $\mathfrak{p}_j \notin V(\mathfrak{p}_i)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{p}_j \in \omega(\mathfrak{p}_i)$. Como $\mathfrak{p}_i \notin \omega(\mathfrak{p}_i)$, concluyese que $\operatorname{Spec}(A)$ es un espacio T_0. □

Teorema 2.7 ([1, Ejercicio 11, pág. 44])**.** *Sea A un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) $\operatorname{Spec}(A)$ *es un espacio* T_1;

(2) *todo ideal primo de A es un ideal maximal*;

(3) $\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Max}(A)$.

Demostración. Se probará que (1) implica (2), (2) implica (3) y (3) implica (1). Inicialmente, se probará que (1) implica (2). En efecto, supóngase que $\operatorname{Spec}(A)$ es un espacio T_1 y sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Entonces, por la Proposición 1.25, $\{\mathfrak{p}\}$ es un conjunto cerrado de $\operatorname{Spec}(A)$ y, por lo tanto, por el Teorema 2.5, $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal.

Ahora se probará que (2) implica (3). De hecho, si todo ideal primo de A es un ideal maximal de A, entonces $\operatorname{Spec}(A) \subset \operatorname{Max}(A)$. Como $\operatorname{Max}(A) \subset \operatorname{Spec}(A)$ (cf. Observación 1.10), concluyese que $\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Max}(A)$.

Finalmente, se probará que (3) implica (1). En efecto, supóngase que $\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Max}(A)$ y sean $\mathfrak{p}$ un punto de $\operatorname{Spec}(A)$. Esto implica que $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de A. Entonces, por el Teorema 2.5, $\{\mathfrak{p}\}$ es un conjunto cerrado de $\operatorname{Spec}(A)$. Por lo tanto, por la Proposición 1.25, $\operatorname{Spec}(A)$ es un espacio T_1. □

Ejemplo 2.2. Si n es un número entero mayor o igual a 2, entonces $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n)$ es un espacio T_1. En efecto, por el Ejemplo 1.18, se tiene que $\operatorname{Max}(\mathbb{Z}_n) = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n)$. Luego, por el Teorema 2.7, se tiene que $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_n)$ es un espacio T_1.

Ejemplo 2.3. El espacio $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ no es T_1. En efecto, por el Ejemplo 1.17, se tiene que $\operatorname{Max}(\mathbb{Z}) \neq \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Luego, por el Teorema 2.7, se tiene que $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ no es un espacio T_1.

Proposición 2.5. *Sea A un anillo. Sean $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ puntos de* $\operatorname{Spec}(A)$. *Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) $V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{q})$;

(2) $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \overline{\{\mathfrak{q}\}}$;

(3) $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Demostración. Se probará que (1) implica (2), (2) implica (3) y (3) implica (1). Inicialmente, se probará que (1) implica (2). En efecto, por el ítem (1) de la Proposición 2.4, se tiene que $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ y $V(\mathfrak{q}) = \overline{\{\mathfrak{q}\}}$. Como $V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{q})$, sigue que $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \overline{\{\mathfrak{q}\}}$.

Ahora se probará que (2) implica (3). De hecho, supóngase que $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \overline{\{\mathfrak{q}\}}$. Entretanto, siendo $\mathrm{Spec}(A)$ un espacio T_0 (cf. Teorema 2.6), por la Proposición 1.24, concluyese que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

Finalmente, es claro que (3) implica (1). □

Teorema 2.8 ([1, Ejercicio 19, pág. 13]). *Para todo anillo A, $\mathrm{Spec}(A)$ es irreducible si, y solamente si, $\aleph_A$ es un ideal primo.*

Demostración. Supóngase inicialmente que $\mathrm{Spec}(A)$ es irreducible. Sean a y b dos elementos en A tales que $a \notin \aleph_A$ y $b \notin \aleph_A$. Entonces, por el ítem (2) de la Proposición 2.2, $\omega(a) \neq \varnothing$ y $\omega(b) \neq \varnothing$. Siendo $\mathrm{Spec}(A)$ irreducible, por el Corolario 1.21, $\omega(a) \cap \omega(b) \neq \varnothing$. Entretanto, por el ítem (1) de la Proposición 2.2, $\omega(ab) = \omega(a) \cap \omega(b)$. Luego, $\omega(ab) \neq \varnothing$. En consecuencia, utilizando nuevamente el ítem (2) de la Proposición 2.2, $ab \notin \aleph_A$. Esto muestra que $\aleph_A$ es un ideal primo.

Recíprocamente, supóngase que $\aleph_A$ es un ideal primo. Sean $\omega(a)$ y $\omega(b)$ conjuntos abiertos básicos no vacíos de $\mathrm{Spec}(A)$. Entonces, por el ítem (2) de la Proposición 2.2, $a \notin \aleph_A$ y $b \notin \aleph_A$. Como $\aleph_A$ es un ideal primo, se tiene que $ab \notin \aleph_A$ y, por lo tanto, utilizando nuevamente el ítem (2) de la Proposición 2.2, concluyese que $\omega(ab) \neq \varnothing$. Entretanto, por el ítem (1) de la Proposición 2.2, $\omega(ab) = \omega(a) \cap \omega(b)$. Luego, $\omega(a) \cap \omega(b) \neq \varnothing$. Consecuentemente, por el Corolario 1.21, $\mathrm{Spec}(A)$ es irreducible. □

Ejemplo 2.4. Si A es un dominio de integridad, entonces $\mathrm{Spec}(A)$ es irreducible. En particular, $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ es irreducible. En efecto, si A es un dominio de integridad, por el Corolario 1.8, $\langle 0_A \rangle$ es un ideal primo de A. Luego, por la Proposición 1.10, $\aleph_A = \langle 0_A \rangle$. Entonces, por el Teorema 2.8, se tiene que $\mathrm{Spec}(A)$ es irreducible.

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.8, considerando $Y = \mathrm{Spec}(A)$.

Teorema 2.9 ([5, Proposición 14, pág. 102]). *Sea A un anillo. Si Y es un subconjunto de $\mathrm{Spec}(A)$, entonces Y es irreducible si, y solamente si, $\mathfrak{F}(Y)$ es un ideal primo.*

Demostración. Supóngase inicialmente que Y es irreducible. Sean a y b dos elementos en A tales que $ab \in \mathfrak{F}(Y)$. Entonces, por el ítem (5) de la Proposición

2.3, $Y \subset V(\langle ab\rangle)$. Entretanto, por el ítem (3) del Teorema 2.1, $V(\langle ab\rangle) = V(\langle a\rangle) \cup V(\langle b\rangle)$. Luego, $Y \subset V(\langle a\rangle) \cup V(\langle b\rangle)$. Como Y es irreducible, por el Lema 1.4, $Y \subset V(\langle a\rangle)$ o $Y \subset V(\langle b\rangle)$. En consecuencia, utilizando nuevamente el ítem (5) de la Proposición 2.3, $a \in \mathfrak{I}(Y)$ o $b \in \mathfrak{I}(Y)$. Esto muestra que $\mathfrak{I}(Y)$ es un ideal primo.

Recíprocamente, supóngase que $\mathfrak{I}(Y)$ es un ideal primo. Entonces, por el ítem (1) de la Proposición 2.4, $V(\mathfrak{I}(Y)) = \overline{\{\mathfrak{I}(Y)\}}$. Por otro lado, por el ítem (6) de la Proposición 2.3, $V(\mathfrak{I}(Y)) = \overline{Y}$. Luego, $\overline{Y} = \overline{\{\mathfrak{I}(Y)\}}$. Ahora, por el Ejemplo 1.54 y por la Proposición 1.26, se tiene que $\overline{\{\mathfrak{I}(Y)\}}$ es irreducible, es decir, $\overline{Y}$ es irreducible. Por lo tanto, utilizando nuevamente la Proposición 1.26, concluyese que Y es irreducible. □

Teorema 2.10. *Sea A un anillo. Si Y es un subconjunto de* Spec(A), *entonces Y es un subconjunto cerrado irreducible si, y solamente si, $Y = V(\mathfrak{p})$, para algún ideal primo $\mathfrak{p}$ de A.*

Demostración. Supóngase inicialmente que Y es un subconjunto cerrado irreducible. Como Y es cerrado, por el ítem (7) de la Proposición 2.3, $V(\mathfrak{I}(Y)) = Y$. Ahora, siendo Y irreducible, por el Teorema 2.9, $\mathfrak{I}(Y)$ es un ideal primo.

Recíprocamente, supóngase que existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A tal que $Y = V(\mathfrak{p})$. En particular, Y es un conjunto cerrado. También, por el ítem (3) de la Proposición 2.3, se tiene que $\mathfrak{I}(Y) = \mathfrak{I}(V(\mathfrak{p})) = \mathfrak{p}$. Ahora, siendo $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A, por el Teorema 2.9, concluyese que $V(\mathfrak{p}) = Y$ es irreducible, y esto finaliza la demostración. □

Sea Y un subconjunto cerrado irreducible de un espacio topológico X. Un *punto genérico* de Y es un punto ξ de Y tal que $Y = \overline{\{\xi\}}$.

A continuación, se probará que todo subconjunto cerrado irreducible de Spec(A) tiene un único punto genérico.

Teorema 2.11 (Adaptado de [5, Ejercicio 9 (a), pág. 142])**.** *Sea A un anillo. Todo subconjunto cerrado irreducible de* Spec(A) *tiene un único punto genérico.*

Demostración. Sea Y un subconjunto cerrado irreducible de Spec(A). Por el Teorema 2.10, existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A tal que $Y = V(\mathfrak{p})$. Luego, por el ítem (1) de la Proposición 2.4, $Y = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$, es decir, $\mathfrak{p}$ es un punto genérico de Y. Ahora, la unicidad sigue inmediatamente de la Proposición 2.5. □

Un elemento e de un anillo A es llamado *idempotente*, si $e^2 = e$. Por ejemplo, en todo anillo A, 0_A y 1_A son elementos idempotentes, pues

$$0_A^2 = 0_A \cdot 0_A = 0_A \quad \text{y} \quad 1_A^2 = 1_A \cdot 1_A = 1_A.$$

En un dominio de integridad A, los elementos idempotentes son 0_A y 1_A. Entretanto, en el anillo $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ los elementos idempotentes son $[0]$, $[1]$, $[3]$ y $[4]$.

Lema 2.1. *Sea A un anillo A. Si e es un elemento idempotente de A, entonces $1_A - e$ es un elemento idempotente de A. Además, si e es diferente de 0_A y 1_A, entonces $1_A - e$ es diferente de 0_A y 1_A.*

Demostración. Como e es un elemento idempotente, se tiene que $e^2 = e$. Luego,

$$(1_A - e)^2 = 1_A - 2e + e^2 = 1_A - e.$$

Esto muestra que $1_A - e$ es un elemento idempotente de A. Ahora, si $e \neq 0_A$ entonces $1_A - e \neq 1_A$ (en caso contrario, $e = 0_A$, una contradicción). También, si $e \neq 1_A$ entonces $1_A - e \neq 0_A$ (en caso contrario, $e = 1_A$, una contradicción), y esto finaliza la demostración. □

Lema 2.2. *Sea A un anillo A. Si e es un elemento idempotente de A, entonces $A = \langle e \rangle \oplus \langle 1_A - e \rangle$.*

Demostración. Como $1_A = e + (1_A - e) \in \langle e \rangle + \langle 1_A - e \rangle$, sigue que $A = \langle e \rangle + \langle 1_A - e \rangle$. Se probará ahora que $\langle e \rangle \cap \langle 1_A - e \rangle = \langle 0_A \rangle$. En efecto, si $z \in \langle e \rangle \cap \langle 1_A - e \rangle$, entonces existen x y y en A tales que $z = xe$ y $z = y(1_A - e)$. Siendo e un elemento idempotente, se tiene que $e^2 = e$. Luego,

$$z = xe = xe^2 = (xe)e = [y(1_A - e)]e = ye - ye^2 = ye - ye = 0_A$$

y, por lo tanto, $\langle e \rangle \cap \langle 1_A - e \rangle = \langle 0_A \rangle$. Esto muestra que $A = \langle e \rangle \oplus \langle 1_A - e \rangle$. □

Teorema 2.12 ([5, Corolario 2, pág. 104])**.** *Para todo anillo A, Spec(A) es conexo si, y solamente si, solo los elementos idempotentes en A son 0_A y 1_A.*

Demostración. Se probará que Spec(A) es disconexo si, y solamente si, A contiene un elemento idempotente diferente de 0_A y 1_A.

Supóngase inicialmente que Spec(A) es disconexo. Entonces, por la Proposición 1.28, existen conjuntos cerrados disjuntos C_1 y C_2 de Spec(A) tales que Spec(A) $= C_1 \cup C_2$ con C_1 y C_2 diferentes de Spec(A). Es decir, existen ideales I y J de A tales que $C_1 = V(I)$ y $C_2 = V(J)$. Como $V(I) = C_1 \neq \varnothing$ y $V(J) = C_2 \neq \varnothing$, por el ítem (3) de la Proposición 2.1, I y J son ideales propios de A. Por el ítem (3) del Teorema 2.1, se tiene que $V(IJ) = V(I) \cup V(J) =$ Spec(A). Luego, por el ítem (4) de la Proposición 2.1, se tiene $IJ \subset \aleph_A$. También, por el ítem (2) del Teorema 2.1, se tiene $V(I+J) = V(I) \cap V(J) = C_1 \cap C_2 = \varnothing$. Entonces, por el ítem (3) de la Proposición 2.1, $I + J = A$. Por lo tanto, existen elementos x en I y y en J tales que $x + y = 1_A$. Teniendo en vista que xy es nilpotente (ya que $xy \in IJ \subset \aleph_A$), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(xy)^n = 0_A$. Por otro lado, por el binomio de Newton, $1_A = (x + y)^n = x^n + y^n + axy$, para algún elemento $a \in A$. Así, $x^n + y^n = 1_A - axy$. Teniendo en vista que axy es nilpotente, por la Observación 1.12, $x^n + y^n$ es una unidad de A. Consecuentemente, existe un elemento u en A tal que

$$u(x^n + y^n) = 1_A. \tag{2.3.1}$$

Se afirma que $e := ux^n$ es un elemento idempotente de A diferente de 0_A y 1_A. En efecto, por (2.3.1),

$$e = ux^n = (ux^n)[(u(x^n + y^n)] = (ux^n)^2 + u^2(xy)^n = e^2 + u^2 \cdot 0_A = e^2.$$

Esto muestra que e es un elemento idempotente de A. Finalmente, se mostrará que e es un elemento diferente de 0_A y 1_A. De hecho, si $e = 0_A$, por (2.3.1), $uy^n = 1_A$, y así y es una unidad. Esto implica que $J = A$, una contradicción. Ahora, si $e = 1_A$ entonces x es una unidad y, por lo tanto, $I = A$, una contradicción.

Recíprocamente, supóngase que existe un elemento idempotente e en A diferente de 0_A y 1_A. Entonces, por el Lema 2.1, $1_A - e$ es un elemento idempotente de A diferente de 0_A y 1_A. Luego, e and $1_A - e$ no son unidades. Por lo tanto, por el ítem (3) de la Proposición 2.1, $V(\langle e \rangle) \neq \varnothing$ y $V(\langle 1_R - e \rangle) \neq \varnothing$. Por otro lado, por el Lema 2.2, $A = \langle e \rangle \oplus \langle 1_A - e \rangle$. En consecuencia, por los ítems (1) y (2) del Teorema 2.1, se tiene que

$$\varnothing = V(A) = V(\langle e \rangle + \langle 1_A - e \rangle) = V(\langle e \rangle) \cap V(\langle 1_A - e \rangle);$$

y por los ítems (1) y (3) del Teorema 2.1,

$$\operatorname{Spec}(A) = V(\langle 0_A \rangle) = V(\langle e \rangle \cap \langle 1_A - e \rangle) = V(\langle e \rangle) \cup V(\langle 1_A - e \rangle).$$

Esto muestra que, Spec(A) es disconexo. $\square$

Ejemplo 2.5. Si A es un dominio de integridad, por el Teorema 2.12, se tiene que Spec(A) es conexo. En particular, Spec($\mathbb{Z}$) es conexo.

Ejemplo 2.6. Por el Teorema 2.12, se tiene que Spec($\mathbb{Z}_6$) no es conexo.

Teorema 2.13. *Si A es un anillo local, entonces* Spec(A) *es conexo por caminos.*

Demostración. Sea $\mathfrak{m}$ el único ideal maximal de A. Se probará que para cualquier punto $\mathfrak{p}$ en Spec(A), existe un camino conectando $\mathfrak{p}$ con $\mathfrak{m}$. En efecto, dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ en A, considérese $\gamma : [0,1] \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$, definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \mathfrak{p}, & \text{si } 0 \leq t < 1; \\ \mathfrak{m}, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

A continuación se mostrará que γ es continua. De hecho, dado $a \in A$, se probará que $\gamma^{-1}(\omega(a))$ es un conjunto abierto. Para esto, serán considerados los siguientes casos: $a \notin \mathfrak{m}$ y $a \in \mathfrak{m}$.

Primero, supóngase que $a \notin \mathfrak{m}$. Entonces, $\gamma(1) = \mathfrak{m} \in \omega(a)$. Por otro lado, por el Corolario 1.6, se tiene que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ y, por lo tanto, $a \notin \mathfrak{p}$. Luego, $\gamma(t) = \mathfrak{p} \in \omega(a)$, para todo número real t tal que $0 \leq t < 1$. Esto implica que $t \in \gamma^{-1}(\omega(a))$, para todo t en $[0,1]$. En consecuencia, $\gamma^{-1}(\omega(a)) = [0,1]$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$.

Ahora, supóngase que $a \in \mathfrak{m}$. Entonces, $\gamma(1) = \mathfrak{m} \notin \omega(a)$ y, por lo tanto, $1 \notin \gamma^{-1}(\omega(a))$. Para finalizar la demostración, se considerarán los siguientes subcasos: $a \in \mathfrak{p}$ y $a \notin \mathfrak{p}$. Si $a \in \mathfrak{p}$, entonces $\gamma(t) = \mathfrak{p} \notin \omega(a)$, para todo número real t tal que $0 \leq t < 1$. Esto implica que $t \notin \gamma^{-1}(\omega(a))$, para todo t en $[0,1)$. En consecuencia, $\gamma^{-1}(\omega(a)) = \varnothing$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$. En el otro caso, si $a \notin \mathfrak{p}$, entonces $\gamma(t) = \mathfrak{p} \in \omega(a)$, para todo número real t tal que $0 \leq t < 1$. Esto implica que $t \in \gamma^{-1}(\omega(a))$, para todo t en $[0,1)$. En consecuencia, $\gamma^{-1}(\omega(a)) = [0,1)$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$.

Por lo tanto, por el Teorema 1.14, γ es continua. Así, por el Teorema 1.19, Spec(A) es conexo por caminos. $\square$

Así como en el caso de un anillo local, para un dominio de integridad, se tiene también que su espectro primo es conexo por caminos (esto a la vez proporciona otra prueba del Ejemplo 2.5). Para su demostración, se utilizará un artificio similar al de la prueba del primero.

Teorema 2.14. *Si A es un dominio, entonces* $\operatorname{Spec}(A)$ *es conexo por caminos.*

Demostración. Como A es un dominio, $\langle 0_A \rangle$ es un ideal primo de A. Se probará que para cualquier punto $\mathfrak{p}$ en $\operatorname{Spec}(A)$, existe un camino conectando $\mathfrak{p}$ con $\langle 0_A \rangle$. En efecto, dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ en A, considérese $\gamma : [0,1] \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$, definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \mathfrak{p}, & \text{si } t = 0; \\ \langle 0_A \rangle, & \text{si } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

A continuación se mostrará que γ es continua. De hecho, dado $a \in A$, se probará que $\gamma^{-1}(\omega(a))$ es un conjunto abierto. Para esto, serán considerados los siguientes casos: $a = 0_A$ y $a \neq 0_A$.

Primero, supóngase que $a = 0_A$. Entonces, $\gamma^{-1}(\omega(a)) = \gamma^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$.

Ahora, supóngase que $a \neq 0_A$. Entonces, $a \notin \langle 0_A \rangle$ y, por lo tanto, $\gamma(t) = \langle 0_A \rangle \in \omega(a)$, para todo número real t tal que $0 < t \leq 1$. Luego, $(0,1] \subset \gamma^{-1}(\omega(a))$. Para finalizar la demostración, se considerarán los siguientes subcasos: $a \notin \mathfrak{p}$ y $a \in \mathfrak{p}$. Si $a \notin \mathfrak{p}$, entonces $\gamma(0) = \mathfrak{p} \in \omega(a)$. Esto implica que $0 \in \gamma^{-1}(\omega(a))$ y, por lo tanto, $\gamma^{-1}(\omega(a)) = [0,1]$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$. En el otro caso, si $a \in \mathfrak{p}$, entonces $\gamma(0) = \mathfrak{p} \notin \omega(a)$. Esto implica que $0 \notin \gamma^{-1}(\omega(a))$ y, por lo tanto, $\gamma^{-1}(\omega(a)) = (0,1]$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$.

Consecuentemente, por el Teorema 1.14, γ es continua. Así, por el Teorema 1.19, $\operatorname{Spec}(A)$ es conexo por caminos. $\square$

Capítulo 3

Submódulos primos

Este capítulo está dedicado a estudiar la teoría de los *submódulos primos*, que es una generalización del concepto de ideales primos de un anillo. Los *submódulos primos* son los principales personajes, para se obtener una generalización de la topologia de Zariski en el espectro primo de un anillo. El propósito de este capítulo es presentar algunas propiedades interesantes y útiles de los *submódulos primos*. Para su desenvolvimiento, se seguirá principalmente los resultados de [8], [9], [17] y [19], así como de teoría complementar de [3], [18] y [24].

3.1 Teoría general de los submódulos primos

En esta sección, se define el concepto de *submódulo primo* y se muestran algunas de sus propiedades básicas, así como una caracterización del mismo.

3.1.1 Submódulos primos

Definición 3.1. Sean A un anillo y M un A-módulo. Se dice que el submódulo propio $\mathfrak{P}$ de M es un *submódulo primo* si, para cualesquiera $a \in A$ y $m \in M$ tales que $am \in \mathfrak{P}$, se tenga que $a \in (\mathfrak{P} :_A M)$ o $m \in \mathfrak{P}$.

Ejemplo 3.1. Considérese el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. El submódulo principal $\mathfrak{P} = \langle (1,0) \rangle_{\mathbb{Z}}$ es un submódulo primo. En efecto, por el Ejemplo 1.35, se tiene que $(\mathfrak{P} :_{\mathbb{Z}} M) = \langle 0 \rangle$. Sean ahora $a \in \mathbb{Z}$ y $(x,y) \in M$ tales que $a(x,y) \in \mathfrak{P}$

y $a \notin (\mathfrak{P} :_{\mathbb{Z}} M)$. Se probará que $(x, y) \in \mathfrak{P}$. De hecho, como $\mathfrak{P} = \langle (1, 0) \rangle_{\mathbb{Z}}$ y $(ax, ay) \in \mathfrak{P}$, entonces $(ax, ay) = w(1, 0) = (w, 0)$, para algún $w \in \mathbb{Z}$. Luego, $ay = 0$. Teniendo en vista que $a \neq 0$ (ya que $a \notin (\mathfrak{P} :_{\mathbb{Z}} M) = \langle 0 \rangle$), concluyese que $y = 0$. Por lo tanto, $(x, y) = (x, 0) = x(1, 0) \in \mathfrak{P}$. Esto muestra que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo del $\mathbb{Z}$-módulo M.

La definición de submódulo primo es una generalización del concepto de ideal primo. Esto es consecuencia, del siguiente resultado.

Proposición 3.1. *Sea A un anillo. Si $\mathfrak{p}$ es un subconjunto propio de A, entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A si, y solamente si, $\mathfrak{p}$ es un submódulo primo del A-módulo A.*

Demostración. Por el Ejemplo 1.33, $(\mathfrak{p} :_A A) = \mathfrak{p}$. Ahora, es solo observar que la Definición 3.1, es la misma que la dada para ideales primos (Definición 1.8). □

Proposición 3.2. *Sean A un anillo e I un ideal propio de A. Si $\mathcal{J}$ es un subconjunto propio de A/I, entonces $\mathcal{J}$ es un ideal primo de A/I si, y solamente si, $\mathcal{J}$ es un submódulo primo del A-módulo A/I.*

Demostración. Supóngase inicialmente que $\mathcal{J}$ es un ideal primo de A/I. En particular, $\mathcal{J}$ es un ideal propio de A/I y, por lo tanto, por el Ejemplo 1.31, $\mathcal{J}$ es un submódulo propio del A-módulo A/I. Sean ahora $a \in A$ y $[b]$ en A/I[*] tales que $a \cdot [b] \in \mathcal{J}$ y $[b] \notin \mathcal{J}$. Como $[a] \cdot [b] = [a \cdot b] = a \cdot [b]$, sigue que $[a] \cdot [b] \in \mathcal{J}$. Siendo $\mathcal{J}$ un ideal primo de A/I y $[b] \notin \mathcal{J}$, se tiene que $[a] \in \mathcal{J}$. Ahora, por el Ejemplo 1.31, existe un ideal J de A conteniendo a I tal que $\mathcal{J} = J/I$. Entretanto, por el Ejemplo 1.34, se tiene que $J = (\mathcal{J} :_A A/I)$. De esta forma, como $[a] \in \mathcal{J}$, concluyese que $a \in J = (\mathcal{J} :_A A/I)$. Esto muestra que $\mathcal{J}$ es un submódulo primo del A-módulo A/I.

Recíprocamente, supóngase que $\mathcal{J}$ es un submódulo primo del A-módulo A/I. En particular, $\mathcal{J}$ es un submódulo propio del A-módulo A/I y, por lo tanto, por el Ejemplo 1.31, $\mathcal{J}$ es un ideal propio de A/I. Sean ahora $[a]$ y $[b]$ en $\mathcal{J}$ tales que $[a] \cdot [b] \in \mathcal{J}$ y $[b] \notin \mathcal{J}$. Como $a \cdot [b] = [a \cdot b] = [a] \cdot [b]$, sigue que $a \cdot [b] \in \mathcal{J}$. Siendo $\mathcal{J}$ un submódulo primo del A-módulo A/I, se tiene que $a \in (\mathcal{J} :_A A/I)$. Utilizando nuevamente el Ejemplo 1.31, se tiene que existe un ideal J de A conteniendo a I tal que $\mathcal{J} = J/I$. Luego, por el Ejemplo

[*]El símbolo $[a]$, denota a la clase de $a \in A$ en el conjunto cociente A/I.

1.34, concluyese que $(\mathcal{J} :_A A/I) = J$ y, por lo tanto, $a \in J$. En consecuencia, $[a] \in \mathcal{J}$. Esto muestra que $\mathcal{J}$ es un ideal primo de A/I. □

Proposición 3.3 (Adaptado de [8, Resultado 1])**.** *Sean A un dominio y M un A-módulo sin torsión. Si $\mathfrak{P}$ es un sumando directo propio de M, entonces $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo y $(\mathfrak{P} :_A M) = \langle 0_A \rangle$.*

Demostración. Como $\mathfrak{P}$ es un sumando directo propio de M, $\mathfrak{P}$ es un submódulo propio de M y existe un submódulo $\mathfrak{P}'$ de M tal que $M = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P}'$.

Inicialmente, se probará que $(\mathfrak{P} :_A M) = \langle 0_A \rangle$. En efecto, sea $a \in (\mathfrak{P} :_A M)$; es decir, $aM \subset \mathfrak{P}$. Por lo tanto, $an \in \mathfrak{P}$, para todo $n \in M$. En particular, $am' \in \mathfrak{P}$, donde m' es un elemento fijado en $\mathfrak{P}' \setminus \{0_M\}$ (si $\mathfrak{P}' \setminus \{0_M\} = \varnothing$, se tendría que $\mathfrak{P} = M$, contradiciendo el hecho de $\mathfrak{P} \neq M$). Entonces, $am' \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}' = \langle 0_M \rangle_A$ y, por lo tanto, $am' = 0_M$. Entretanto, siendo M sin torsión y $m' \neq 0_M$, concluyese que $a = 0_A$. Esto implica que $(\mathfrak{P} :_A M) = \langle 0_A \rangle$.

Para finalizar la demostración, se probará ahora que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M. Sean $r \in A$ y $m \in M$ tales que $rm \in \mathfrak{P}$ y $r \notin (\mathfrak{P} :_A M)$. Se mostrará que $m \in \mathfrak{P}$. De hecho, como $m \in M = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{P}'$, existen $p \in \mathfrak{P}$ y $p' \in \mathfrak{P}'$ tales que $m = p + p'$ y, por lo tanto, $rp' = rm + (-r)p \in \mathfrak{P}$. De esta forma, $rp' \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{P}' = \langle 0_M \rangle_A$. Entonces, $rp' = 0_M$. Entretanto, siendo M sin torsión y $r \neq 0_A$ (ya que $r \notin (\mathfrak{P} :_A M) = \langle 0_A \rangle$), se tiene que $p' = 0_M$. Luego, $m = p + 0_M = p$ y, por lo tanto, $m \in \mathfrak{P}$. Esto muestra que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M. □

Ejemplo 3.2 ([8, Resultado 1])**.** Sean $\mathbb{K}$ un cuerpo y V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial no cero. Si S es un subespacio propio de V, entonces S es un submódulo primo y $(S :_{\mathbb{K}} V) = \langle 0_{\mathbb{K}} \rangle$. En efecto, como S es un subespacio propio de V, sigue que S es un sumando directo propio de V. Teniendo en vista que V es sin torsión, por la Proposición 3.3, concluyese que S es un submódulo primo y $(S :_{\mathbb{K}} V) = \langle 0_{\mathbb{K}} \rangle$.

A seguir, se establece el *teorema fundamental de los submódulos primos*, el cual es una caracterización de los submódulos primos. Este teorema da como resultado varios corolarios que establecen algunas propiedades básicas de submódulos primos.

Teorema 3.1 ([17, Lema 1])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathfrak{P}$ es un submódulo de M, entonces $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M si, y solamente si, $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal primo de A y el $A/(\mathfrak{P} :_A M)$-módulo $M/\mathfrak{P}$ es sin torsión.*

Demostración. Suponiendo que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M, en particular, se tiene que $\mathfrak{P} \neq M$. Entonces, por el ítem (2) de la Proposición 1.18, $(\mathfrak{P} :_A M) \neq A$. Para finalizar la demostración que $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal primo de A, sean a y b en A tales que $ab \in (\mathfrak{P} :_A M)$ y $a \notin (\mathfrak{P} :_A M)$. Se mostrará que $b \in (\mathfrak{P} :_A M)$. En efecto, como $ab \in (\mathfrak{P} :_A M)$, se tiene que $(ab)M \subset \mathfrak{P}$ y, por lo tanto, $(ab)m \in \mathfrak{P}$, para todo $m \in M$. En particular, $a(bm') = (ab)m' \in \mathfrak{P}$, donde m' es un elemento fijado en $M \setminus \mathfrak{P}$. Entretanto, como $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo y $a \notin (\mathfrak{P} :_A M)$, concluyese que $bm' \in \mathfrak{P}$. Ahora, utilizando nuevamente el hecho de $\mathfrak{P}$ ser un submódulo primo y teniendo en vista que $m' \notin \mathfrak{P}$, sigue que $b \in (\mathfrak{P} :_A M)$. Esto muestra que $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal primo de A.

A continuación, se mostrará que el $A/(\mathfrak{P} :_A M)$-módulo $M/\mathfrak{P}$ es sin torsión. En efecto, como $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal primo, el anillo cociente $A/(\mathfrak{P} :_A M)$ es un dominio. Ahora, sean $a \in A$ y $m \in M$ tales que $\overline{a}[m] = [0_M]$.[†] Como $\overline{a}[m] = [am]$, sigue que $[am] = [0_M]$ y, por lo tanto, $am \in \mathfrak{P}$. Siendo $\mathfrak{P}$ un submódulo primo, concluyese que $a \in (\mathfrak{P} :_A M)$ o $m \in \mathfrak{P}$; es decir, $\overline{a} = \overline{0_A}$ o $[m] = [0_M]$. Esto muestra que el $A/(\mathfrak{P} :_A M)$-módulo $M/\mathfrak{P}$ es sin torsión.

Finalmente, se procederá a mostrar la recíproca. Supóngase que $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal primo de A y el $A/(\mathfrak{P} :_A M)$-módulo $M/\mathfrak{P}$ es sin torsión. Em particular, se tiene que $(\mathfrak{P} :_A M) \neq A$. Entonces, por el ítem (2) de la Proposición 1.18, $\mathfrak{P} \neq M$. Para finalizar la demostración que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M, sean $a \in A$ y $m \in M$ tales que $am \in \mathfrak{P}$. Se mostrará que $a \in (\mathfrak{P} :_A M)$ o $m \in \mathfrak{P}$. En efecto, como $am \in \mathfrak{P}$ se tiene que $\overline{a}[m] = [am] = [0_M]$ y, por lo tanto, $\overline{a}[m] = [0_M]$. Como $M/\mathfrak{P}$ es sin torsión, sigue que $\overline{a} = \overline{0_A}$ o $[m] = [0_M]$; es decir, $a \in (\mathfrak{P} :_A M)$ o $m \in \mathfrak{P}$. Esto muestra que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M. □

Observación 3.1 ([9, pág. 3744])**.** Si $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de un A-módulo M, por el Teorema 3.1, se tiene que $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal primo de A. Sin embargo, la recíproca no es necesariamente cierto. En efecto, considérese el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y, para cada entero a tal que $a > 1$, sea $N_a = \langle (a, 0) \rangle_{\mathbb{Z}}$. Se tiene que el ideal cociente $(N_a :_{\mathbb{Z}} M) = \langle 0 \rangle$ es primo (cf. Ejemplo 1.35). Entretanto, N_a no es un submódulo primo de M ya que $a(1, 0) = (a, 0) \in N_a$, pero $a \notin (N_a :_{\mathbb{Z}} M)$ y $(1, 0) \notin N_a$.

Proposición 3.4 ([8, Proposición 2], [19, Corolario 1.2])**.** *Sean A un anillo y*

[†]Los símbolos $\overline{a}$ y $[m]$, denotan a la clase de $a \in A$ en el anillo cociente $A/(\mathfrak{P} :_A M)$ y a la clase de $m \in M$ en el $A/(\mathfrak{P} :_A M)$-módulo cociente $M/\mathfrak{P}$, respectivamente.

M un A-módulo. Si $\mathfrak{P}$ es un submódulo de M tal que $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal maximal de A, entonces $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M.

Demostración. Como $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal maximal, se tiene que $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal primo y $A/(\mathfrak{P} :_A M)$ es un cuerpo. Luego, $M/\mathfrak{P}$ es un $A/(\mathfrak{P} :_A M)$-espacio vectorial y, por lo tanto, sin torsión. Consecuentemente, por el Teorema 3.1, $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M. □

Proposición 3.5 ([8, Proposición 4]). *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathfrak{M}$ es un submódulo maximal de M, entonces $(\mathfrak{M} :_A M)$ es un ideal maximal de A y $\mathfrak{M}$ es un submódulo primo de M.*

Demostración. Como $\mathfrak{M}$ es un submódulo maximal de M, por el Corolario 1.20, $A/(\mathfrak{M} :_A M)$ es un A-módulo simple. Entonces, por la Proposición 1.21, se tiene que $(\mathfrak{M} :_A M)$ es un submódulo maximal de A. Luego, por la Proposición 1.19, $(\mathfrak{M} :_A M)$ es un ideal maximal de A. Finalmente, por la Proposición 3.4, sigue que $\mathfrak{M}$ es un submódulo primo de M. □

Corolario 3.1 ([8, Corolario, pág. 63]). *Sean A un anillo y M un A-módulo finitamente generado. Si N es un submódulo propio de M, entonces existe un submódulo primo de M conteniendo a N.*

Demostración. Como M es un A-módulo finitamente generado y N es un submódulo propio de M, por el Teorema 1.9, existe un submódulo maximal $\mathfrak{M}$ de M tal que $N \subset \mathfrak{M}$. Por otro lado, por la Proposición 3.5, $\mathfrak{M}$ es un submódulo primo, y esto finaliza la demostración. □

3.1.2 El espectro primo de un módulo

Definición 3.2. Sean A un anillo y M un A-módulo. Se define el *espectro primo de M*, denotado por $\operatorname{Spec}_A(M)$, como el conjunto de todos los submódulos primos de M.

Expresado en forma conjuntista,

$$\operatorname{Spec}_A(M) = \{\mathfrak{P} : \mathfrak{P} \text{ es un submódulo primo de } M\}.$$

Observación 3.2. Si M es un módulo sobre un anillo A, entonces $\operatorname{Max}_A(M) \subset \operatorname{Spec}_A(M)$. En efecto, si $\operatorname{Max}_A(M) = \varnothing$ es claro; y si $\operatorname{Max}_A(M) \neq \varnothing$, el resultado es consecuencia inmediata de la Proposición 3.5.

Ejemplo 3.3. Sea A un anillo. Si $M = \{0_M\}$, entonces $\operatorname{Spec}_A(M) = \varnothing$. En efecto, como M es un A-módulo cero, entonces M no posee submódulos propios y, por lo tanto, no existe submódulos primos. Esto implica que $\operatorname{Spec}_A(M) = \varnothing$.

Ejemplo 3.4. Para cualquier anillo A, por la Proposición 3.1, se tiene que

$$\operatorname{Spec}_A(A) = \operatorname{Spec}(A).$$

Ejemplo 3.5. Para cualquier anillo A, por la Proposición 3.2 y por el Ejemplo 3.4, se tiene que

$$\operatorname{Spec}_A(A/I) = \operatorname{Spec}(A/I) = \operatorname{Spec}_{A/I}(A/I),$$

para todo ideal I de A.

Ejemplo 3.6. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, por el Ejemplo 3.2, concluyese que $\operatorname{Spec}_{\mathbb{K}}(V) = \varnothing$ o

$$\operatorname{Spec}_{\mathbb{K}}(V) = \{S : S \text{ es un subespacio propio de } V\}.$$

Más aún, $\dim_{\mathbb{K}} V = 0$ si, y solamente si, $\operatorname{Spec}_{\mathbb{K}}(V) = \varnothing$; y $\dim_{\mathbb{K}} V = 1$ si, y solamente si, $\operatorname{Spec}_{\mathbb{K}}(V) = \{\langle 0_V \rangle_{\mathbb{K}}\}$. En particular, $\operatorname{Spec}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}) = \{\langle 0_{\mathbb{K}} \rangle_{\mathbb{K}}\}$.

Ejemplo 3.7. Sean p y q dos números primos positivos diferentes. En el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{pq}$, se tiene

$$\operatorname{Spec}_{\mathbb{Z}}(M) = \{pM, qM\}.$$

En particular, $\operatorname{Spec}_{\mathbb{Z}}(M) = \operatorname{Max}_{\mathbb{Z}}(M)$. En efecto, por el Ejemplo 1.32, los submódulos propios de M son $\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}$, pM y qM. Ahora, como $p \cdot [q] = [pq] = [0] \in \langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}$, pero $p \notin \langle pq \rangle = (\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}} :_{\mathbb{Z}} M)$ (por el Ejemplo 1.36) y $[q] \notin \langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}$, concluyese que $\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}$ no es un submódulo primo de M. Por lo tanto, $\operatorname{Spec}_{\mathbb{Z}}(M) \subset \{pM, qM\}$. Luego, por el Ejemplo 1.44 y por la Observación 3.2, se tiene que

$$\{pM, qM\} = \operatorname{Max}_{\mathbb{Z}}(M) \subset \operatorname{Spec}_{\mathbb{Z}}(M) \subset \{pM, qM\}.$$

Consecuentemente, $\operatorname{Spec}_{\mathbb{Z}}(M) = \{pM, qM\} = \operatorname{Max}_{\mathbb{Z}}(M)$.

En el Ejemplo 3.3, se vio que todo módulo cero no posee submódulos primos. Entretanto, existen otros ejemplos no triviales, como se mostrará en la Sección 3.2.

3.1.3 Módulos primos

Definición 3.3. Sea A un anillo y M un A-módulo no cero. Se dice que M es *módulo primo* si $\langle 0_M \rangle_A$ es un submódulo primo de M.

Ejemplo 3.8. Todo dominio de integridad, considerado como módulo sobre si mismo, es un módulo primo.

Ejemplo 3.9. Todo espacio vectorial no cero es un módulo primo. En efecto, esto sigue inmediatamente del Ejemplo 3.6.

Proposición 3.6. *Sean A un anillo y M un A-módulo no cero. Las siguientes condiciones son equivalentes*:
(1) *M es módulo primo*;
(2) $\mathrm{Ann}_A(M) = \mathrm{Ann}_A(N)$, *para todo submódulo no cero N de M*;
(3) *si $a \in A$ y $m \in M$ son tales que $am = 0_M$, entonces $aM = \langle 0_M \rangle_A$ o $m = 0_M$.*

Demostración. Se probará que (1) implica (2), (2) implica (3) y (3) implica (1). Inicialmente, se probará que (1) implica (2). Para esto, sea N un submódulo no cero arbitrário de M. Por el ítem (8) de la Proposición 1.18,

$$\mathrm{Ann}_A(M) \subset \mathrm{Ann}_A(N). \tag{3.1.1 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $a \in \mathrm{Ann}_A(N)$. Entonces, $am = 0_M$, para todo $m \in N$. Como $N \neq \langle 0_M \rangle_A$, existe $n \in N \setminus \{0_M\}$. Luego, $an = 0_M \in \langle 0_M \rangle_A$. Siendo M un módulo primo y $n \neq 0_M$, concluyese que $a \in \big(\langle 0_M \rangle_A :_A M\big) = \mathrm{Ann}_A(M)$. Esto muestra que

$$\mathrm{Ann}_A(N) \subset \mathrm{Ann}_A(M). \tag{3.1.1 (2)}$$

Por lo tanto, de (3.1.1 (1)) e (3.1.1 (2)), $\mathrm{Ann}_A(M) = \mathrm{Ann}_A(N)$.

Ahora se probará que (2) implica (3). De hecho, sean $a \in A$ y $m \in M$ tales que $am = 0_M$ y $m \neq 0_M$. Siendo $m \neq 0_M$, $\langle m \rangle_A \neq \langle 0_M \rangle_A$. Luego, por (2), $\mathrm{Ann}_A(M) = \mathrm{Ann}_A\big(\langle m \rangle_A\big)$. Como $am = 0_M$, concluyese que $a\langle m \rangle_A = \langle 0_M \rangle_A$.

Entonces, $a \in \mathrm{Ann}_A\big(\langle m \rangle_A\big)$ y, por lo tanto, $a \in \mathrm{Ann}_A(M)$. En consecuencia, $aM = \langle 0_M \rangle_A$.

Finalmente, se demostrará que (3) implica (1). En efecto, sean $a \in A$ y $m \in M$ tales que $am \in \langle 0_M \rangle_A$ y $m \neq 0_M$. Como $am = 0_M$, por (3), se tiene que $aM = \langle 0_M \rangle_A$; y, por lo tanto, $a \in \big(\langle 0_M \rangle_A :_A M\big)$. Esto muestra que $\langle 0_M \rangle_A$ es un submódulo primo de M, es decir, M es un módulo primo. $\square$

3.2 Existencia del $\mathrm{Spec}_A(M)$

Para cualquier anillo A, se tiene que A es un anillo no cero si, y solamente si, $\mathrm{Spec}(A) \neq \varnothing$ (cf. Observación 1.11) o $\mathrm{Max}(A) \neq \varnothing$ (cf. Observación 1.9). Sin embargo, para un A-módulo M no siempre es cierto que si M es un A-módulo no cero entonces $\mathrm{Spec}_A(M) \neq \varnothing$ o $\mathrm{Max}_A(M) \neq \varnothing$. En el Ejemplo 3.10, se exhibe un módulo no cero cuyo espectro primo y maximal es vacío.

3.2.1 El p-módulo de Prüfer

Considérese el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Dado un número primo positivo p, sea

$$\mathbb{Z}(p^\infty) := \left\{\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} :\ \alpha = \left[\frac{m}{p^n}\right], \text{ para algunos } m \in \mathbb{Z} \text{ y } n \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Lema 3.1. *Sea p un número primo positivo. El conjunto $\mathbb{Z}(p^\infty)$ es un submódulo del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.*

Demostración. Se tiene que $[0] \in \mathbb{Z}(p^\infty)$. Sean ahora $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ y $a \in \mathbb{Z}$. Entonces, existen $m, r \in \mathbb{Z}$ y $n, s \in \mathbb{N}_0$ tales que $\alpha = [m/p^n]$ y $\beta = [r/p^s]$. Luego,

$$\alpha + a\beta = \left[\frac{m}{p^n}\right] + \left[\frac{ar}{p^s}\right] = \left[\frac{m}{p^n} + \frac{ar}{p^s}\right] = \left[\frac{mp^s + arp^n}{p^{n+s}}\right] \in \mathbb{Z}(p^\infty).$$

Esto muestra que $\mathbb{Z}(p^\infty)$ es un submódulo de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. $\square$

El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}(p^\infty)$, es llamado *p-módulo de Prüfer.*

Lema 3.2. *Sea p un número primo positivo. El p-módulo de Prüfer, satisface las siguientes propiedades:*

(1) *Si $\alpha \in \mathbb{Z}(p^\infty) \setminus \{[0]\}$, entonces existen $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$ con $(m,p) = 1$ tales que $\alpha = [m/p^n]$.*

(2) *Si $\alpha = [m/p^n] \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ con $n \in \mathbb{N}$ y $(m,p) = 1$, entonces existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $[1/p^n] = a\alpha$.*

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Dado $\alpha \in \mathbb{Z}(p^\infty) \setminus \{[0]\}$, existen $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}_0$ tales que $\alpha = [m/p^n]$. Como $\alpha \neq [0]$, entonces $m \neq 0$. Luego, existen $k \in \mathbb{N}_0$ y $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $m = p^k b$ y $(b,p) = 1$. También, siendo $\alpha \neq [0]$, concluyese que $n \neq 0$ y $k < n$; en caso contrario,

$$\alpha = \left[\frac{p^k b}{p^n}\right] = \left[p^{k-n} b\right] = [0],$$

lo cual seria una contradicción. Poniendo, $s = n - k \in \mathbb{N}$, se obtiene

$$\alpha = \left[\frac{p^k b}{p^{k+s}}\right] = \left[\frac{b}{p^s}\right].$$

Ahora, se probará el ítem (2). Como $(m,p) = 1$, se tiene $(m,p^n) = 1$. Luego, por el teorema de Bézout, existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $am + bp^n = 1$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{p^n} - \frac{am}{p^n} = b.$$

Esto implica que

$$\left[\frac{1}{p^n}\right] = \left[\frac{am}{p^n}\right] = a\left[\frac{m}{p^n}\right] = a\alpha.$$

□

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, sea

$$G_{p,n} := \left\{\alpha \in \mathbb{Z}(p^\infty) : \ \alpha = \left[\frac{m}{p^n}\right], \text{ para algún } m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Por definición, se tiene

$$\mathbb{Z}(p^\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} G_{p,n}. \tag{3.2.1}$$

Proposición 3.7 (Adaptado de [24, Ejemplo 7.10 (i) y (iii)] y [9, Ejemplo, pág. 3745])**.** *Sea p un número primo positivo. Para todo $n \in \mathbb{N}_0$, el conjunto $G_{p,n}$ satisface las siguientes propiedades:*

(1) *Si $m \in \mathbb{Z}$ es tal que $(m,p) = 1$, entonces $\left[m/p^{n+1}\right] \notin G_{p,n}$.*

(2) $G_{p,n}$ *es un submódulo propio de* $\mathbb{Z}(p^\infty)$ *generado por* $[1/p^n]$.

(3) $G_{p,n} \subsetneq G_{p,n+1}$.

(4) $\big(G_{p,n} :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(p^\infty)\big) = \langle 0 \rangle$.

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Suponiendo, por el absurdo, que $\left[m/p^{n+1}\right] \in G_{p,n}$, existirá $a \in \mathbb{Z}$ tal que $\left[m/p^{n+1}\right] = [a/p^n]$. Esto implica que existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{m}{p^{n+1}} - \frac{a}{p^n} = b;$$

a su vez, esto implica que $m = bp^{n+1} + ap = p(bp^n + a)$, lo cual es una contradicción con la hipótesis $(m,p) = 1$. Por lo tanto, $\left[m/p^{n+1}\right] \notin G_{p,n}$.

Ahora, se probará el ítem (2). Por definición, se tiene que $G_{p,n} = \langle [1/p^n] \rangle_{\mathbb{Z}}$. Ahora, por el ítem (1), $\left[1/p^{n+1}\right] \in \mathbb{Z}(p^\infty) \setminus G_{p,n}$. Esto muestra que $G_{p,n}$ es un submódulo propio de $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

A seguir se probará el ítem (3). Como $[1/p^n] = \left[p/p^{n+1}\right] \in G_{p,n+1}$, por el ítem (2), se tiene que $G_{p,n} = \langle [1/p^n] \rangle \subset G_{p,n+1}$. Por otro lado, por el ítem (1), $\left[1/p^{n+1}\right] \in G_{p,n+1} \setminus G_{p,n}$, y esto finaliza la prueba del ítem (3).

Finalmente, se probará el ítem (4). Suponiendo, por el absurdo, que $\big(G_{p,n} :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(p^\infty)\big) \neq \langle 0 \rangle$ existirá $a \in \big(G_{p,n} :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(p^\infty)\big) \setminus \{0\}$. Entonces, $a\mathbb{Z}(p^\infty) \subset G_{p,n}$. Como $a \neq 0$, existen $k \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tales que $a = p^k m$ y $(m,p) = 1$. Considerando $\alpha = \left[1/p^{k+n+1}\right] \in \mathbb{Z}(p^\infty)$, se obtiene

$$a\alpha = \left[\frac{p^k m}{p^{k+n+1}}\right] = \left[\frac{m}{p^{n+1}}\right] \in a\mathbb{Z}(p^\infty) \subset G_{p,n}$$

y, por lo tanto, $a\alpha \in G_{p,n}$. Entretanto, como $(m,p) = 1$, por el ítem (1), $a\alpha = \left[m/p^{n+1}\right] \notin G_{p,n}$, y esto es una contradicción. Por lo tanto, $\big(G_{p,n} :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(p^\infty)\big) = \langle 0 \rangle$. □

Proposición 3.8 ([24, Ejemplo 7.10 (ii)])**.** *Para todo número primo positivo* p,

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(p^\infty)) = \{G_{p,n} : n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\mathbb{Z}(p^\infty)\}.$$

Demostración. Sea H un submódulo propio de $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Si $H = \langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}$, entonces $H = G_{p,0}$. Supóngase ahora $H \neq \langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}$. Entonces, existe $\alpha \in H \setminus \{[0]\}$. Por el ítem (1) del Lema 3.2, existen $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ con $(m,p) = 1$ tales que $\alpha = [m/p^n]$. Luego, por el ítem (2) del Lema 3.2, existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $[1/p^n] = a\alpha$. Esto implica que $[1/p^n] \in H$; a su vez, esto implica que $G_{p,n} \subset H$.

Teniendo en vista que H es un submódulo propio de $\mathbb{Z}(p^\infty)$, esto acarrea que el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : G_{p,i} \subset H\}$ es finito. Si este no fuera el caso, para cada $j \in \mathbb{N}$, existiría $n_j \in \mathbb{N}$ con $n_j \geq j$ y $G_{p,n_j} \subset H$, lo cual implicaría que $G_{p,j} \subset H$ (ya que, $G_{p,j} \subset G_{p,n_j}$, en virtud del ítem (3) de la Proposición 3.7), y así $\bigcup_{j \in \mathbb{N}_0} G_{p,j} \subset H$, conduciendo a la contradicción de que $H = \mathbb{Z}(p^\infty)$ (en vista de (3.2.1)). Poniendo $k := \max\{i \in \mathbb{N} : G_{p,i} \subset H\}$, se tiene que $G_{p,k} \subset H$. De hecho, se mostrará que $G_{p,k} = H$. En efecto, suponiendo, por el absurdo, que $G_{p,k} \neq H$ existirá $\beta \in H \setminus G_{p,k}$. Nuevamente, utilizando el ítem (1) del Lema 3.2, existen $r \in \mathbb{Z}$ y $s \in \mathbb{N}$ con $(r,p) = 1$ tales que $\beta = [r/p^s]$. Nótese que $s > k$, en caso contrario, se tendría $\beta = r[1/p^s] \in G_{p,s} \subset G_{p,k}$, lo cual sería una contradicción con el hecho de $\beta \notin G_{p,k}$. Por otro lado, utilizando el ítem (2) del Lema 3.2, existe $b \in \mathbb{Z}$ tal que $[1/p^s] = b\beta$. Esto implica que $[1/p^s] \in H$; a su vez, esto implica que $G_{p,s} \subset H$, lo cual contradice la maximalidad de k. Por lo tanto, $G_{p,k} = H$, y esto finaliza la demostración. $\square$

Ejemplo 3.10 ([9, Ejemplo, pág. 3745])**.** Sea p un número primo positivo. El espectro primo y maximal del p-módulo de Prüfer es vacío. En efecto, por la Proposición 3.8 y por el ítem (2) de la Proposición 3.7, el conjunto de los submódulos propios de $\mathbb{Z}(p^\infty)$ es $\{G_{p,n} : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $p\big[1/p^{n+1}\big] = [1/p^n] \in G_{p,n}$, pero $p \notin \big(G_{p,n} :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(p^\infty)\big)$ y $\big[1/p^{n+1}\big] \notin G_{p,n}$ (en virtud de los ítems (4) y (1) de la Proposición 3.7, respectivamente). Esto muestra que $G_{p,n}$ no es un submódulo primo, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Por lo tanto, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(p^\infty)) = \varnothing$.

Por otro lado, por el ítem (3) de la Proposición 3.7, se tiene que $G_{p,n} \subsetneq G_{p,n+1} \subsetneq \mathbb{Z}(p^\infty)$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Esto muestra que $G_{p,n}$ no es un submódulo maximal, para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Consecuentemente, $\mathrm{Max}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(p^\infty)) = \varnothing$.

3.2.2 El espectro del cuerpo de fracciones de un dominio

En esta subsección, se estudiará el espectro primo y maximal del cuerpo de fracciones de un dominio de integridad. Inicialmente se presenta el siguiente lema, el cual generaliza el primer resultado de [9, Teorema 1].

Lema 3.3. *Sean K un cuerpo y A un subanillo de K. El A-módulo K, satisface las siguientes propiedades*:

(1) *Si a es un elemento diferente de cero perteneciente a A, entonces $aK = K$.*

(2) *Si N es un submódulo propio de K, entonces* $(N :_A K) = \langle 0_A \rangle$.

(3) *Si A no es un cuerpo, entonces* $\mathrm{Max}_A(K) = \varnothing$.

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Sea a um elemento diferente de cero de A. Por la Proposición 1.16, se tiene que

$$aK \subset K. \tag{3.2.2 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $m \in K$. Como K es un cuerpo y $a \neq 0_A = 0_K$, existe $a^{-1} \in K$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1_K$. Entonces, $m = 1_A \cdot m = 1_K \cdot m = \left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot m = a \cdot \left(a^{-1} \cdot m\right) \in aK$. Esto muestra que

$$K \subset aK. \tag{3.2.2 (2)}$$

Por lo tanto, de (3.2.2 (1)) y (3.2.2 (2)), $aK = K$.

Ahora, se probará el ítem (2). Procediendo por el absurdo, supóngase que $(N :_A K) \neq \langle 0_A \rangle$. Entonces, existe $c \in (N :_A K) \setminus \{0_A\}$ y, por lo tanto, por el ítem (1), se tiene que $K = cK \subset N$; lo cual implica que $N = K$, contradiciendo el hecho de $N \neq K$. Consecuentemente, $(N :_A K) = \langle 0_A \rangle$.

Finalmente, se probará el ítem (3). De hecho, procediendo por el absurdo, supóngase que exista un submódulo maximal $\mathfrak{M}$ de K. Luego, por la Proposición 3.5, se tendría que $(\mathfrak{M} :_A K)$ es un ideal maximal de A. Entretanto, por el ítem (2), se tiene que $(\mathfrak{M} :_A K) = \langle 0_A \rangle$. Por otro lado, como A no es un cuerpo, por el Corolario 1.3, $\langle 0_A \rangle$ no es un ideal maximal de A, una contradicción. En consecuencia, $\mathrm{Max}_A(K) = \varnothing$. $\square$

Teorema 3.2 ([9, Teorema 1])**.** *Sea A un dominio de integridad que no sea un cuerpo. Si K es el cuerpo de fracciones de A, entonces el A-módulo K tiene* $\mathrm{Max}_A(K) = \varnothing$ *y* $\mathrm{Spec}_A(K) = \{\langle 0_K \rangle_A\}$.

Demostración. Nótese que $\mathrm{Max}_A(K) = \varnothing$ es un caso particular del ítem (3) del Lema 3.3.

Ahora, se mostrará que $\mathrm{Spec}_A(K) = \{\langle 0_K \rangle_A\}$. Como K es un A-módulo sin torsión y $\langle 0_K \rangle_A$ es un sumando directo propio de K, por la Proposición 3.3, $\langle 0_K \rangle_A$ es un submódulo primo de K. Para mostrar que $\langle 0_K \rangle_A$ es el único submódulo primo de K, supóngase lo contrario y sea $\mathfrak{P}$ un submódulo primo de K tal que $\mathfrak{P} \neq \langle 0_K \rangle_A$. Entonces, por el ítem (2) del Lema 3.3, $(\mathfrak{P} :_A K) = \langle 0_A \rangle$. Siendo $\mathfrak{P}$ un submódulo no cero, existe $\alpha \in \mathfrak{P} \setminus \{0_K\}$. Poniendo $\alpha = a/b$, donde a y b son elementos de A diferentes de cero, se tiene que $a = b\alpha \in \mathfrak{P}$. Por otro lado, teniendo en vista que $\mathfrak{P} \neq K$, existe $y \in A \setminus \{0_A\}$ tal que $1/y \notin \mathfrak{P}$; en caso contrario, para todo $y \in A \setminus \{0_A\}$, se tendría que $1/y \in \mathfrak{P}$ y, esto implicaría que $x/y = x(1/y) \in \mathfrak{P}$, para todo $x \in A$, es decir, $K \subset \mathfrak{P}$, y así $\mathfrak{P} = K$, lo cual sería una contradicción. De esta forma, se tiene que $(ay)1/y = a \in \mathfrak{P}$, pero $ay \notin (\mathfrak{P} :_A K)$ y $1/y \notin \mathfrak{P}$. Esto contradice el hecho que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo. Por lo tanto, $\mathrm{Spec}_A(K) = \{\langle 0_K \rangle_A\}$. □

Corolario 3.2 ([9, Corolario, pág. 3746])**.** *El $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}$ tiene* $\mathrm{Max}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) = \varnothing$ *y* $\mathrm{Spec}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) = \{\langle 0 \rangle_{\mathbb{Z}}\}$.

Demostración. Esto es un caso particular del Teorema 3.2. □

3.3 Submódulos primos de la forma IN

En esta sección, se considerará submódulos extendidos IN de un A-módulo M, que son submódulos primos de M, donde I es un ideal de A y N es un submódulo de M.

Proposición 3.9 (Adaptado de [8, Proposición 2, segunda parte])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo de M y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A tal que $\mathfrak{m}N \neq N$, entonces $\mathfrak{m}N$ es un submódulo primo de M.*

Demostración. Como N es un submódulo de M y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A tal que $\mathfrak{m}N \neq N$, por el ítem (11) de la Proposición 1.18, se tiene que $(\mathfrak{m}N :_A N) = \mathfrak{m}$. Luego, $(\mathfrak{m}N :_A N)$ es un ideal maximal. Por lo tanto, por la Proposición 3.4, concluyese que $\mathfrak{m}N$ es un submódulo primo de M. □

A continuación se enuncia, sin su demostración, una propiedad del determinante de una matriz sobre un anillo, el cual es un resultado de la teoría de *Álgebra lineal sobre anillos conmutativos.*

Teorema 3.3 ([3, Teorema 1.7 (a)])**.** *Sea A un anillo. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden n con entradas en A, entonces*

$$\mathbf{A}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathrm{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}_n,$$

donde $\mathbf{I}_n$ es la matriz identidad de orden n.

Teorema 3.4 ([18, Teorema 75]). *Sean A un anillo y M un A-módulo finitamente generado por n elementos. Si I es un ideal de A y $a \in (IM :_A M)$, entonces existe $x \in I$ tal que $(a^n + x)M = \langle 0_M \rangle_A$.*

Demostración. Como M es finitamente generado por n elementos, existe un conjunto generador $m_1, \ldots, m_n$ de M. Puesto que $a \in (IM :_A M)$, se tiene que $aM \subset IM$. Entonces, $am \in IM$, para todo $m \in M$. En particular, $am_i \in IM$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$. Luego, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existen $a_{ij} \in I$, $1 \leq j \leq n$, tales que $am_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}m_j$. Llevando todo a la izquierda, obtenemos las siguientes igualdades:

$$\sum_{j=1}^{n}(a\delta_{ij} - a_{ij})m_j = 0_M, \quad 1 \leq i \leq n, \tag{3.3.1 (1)}$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1_A, & \text{si } i = j; \\ 0_A, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Las igualdades de (3.3.1 (1)), implican que

$$[a\delta_{ij} - a_{ij}]_{n\times n}[m_j]_{n\times 1} = [0_M]_{n\times 1}. \tag{3.3.1 (2)}$$

Colocando $\mathbf{A} := [a\delta_{ij} - a_{ij}]_{n\times n}$ y multiplicando a la izquierda por la adjunta de la matriz $\mathbf{A}$ en la ecuación (3.3.1 (2)), se obtiene

$$\begin{aligned} [0_M]_{n\times 1} = \operatorname{adj}(\mathbf{A})[0_M]_{n\times 1} &= \operatorname{adj}(\mathbf{A})\big(\mathbf{A}[m_j]_{n\times 1}\big) \\ &= (\operatorname{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A})[m_j]_{n\times 1}. \end{aligned} \tag{3.3.1 (3)}$$

Entonces, por la ecuación (3.3.1 (3)) y por el Teorema 3.3, se tiene que

$$[0_M]_{n\times 1} = \big(\det(\mathbf{A})[\delta_{ij}]_{n\times n}\big)[m_j]_{n\times 1} = [\det(\mathbf{A})\delta_{ij}]_{n\times n}[m_j]_{n\times 1} = [\det(\mathbf{A})m_i]_{n\times 1}.$$

Por lo tanto, $\det(\mathbf{A})m_i = 0_M$, para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n$, es decir, $\det(\mathbf{A})M = \{0_M\}$. Por otro lado, se tiene que

$$\det(\mathbf{A}) = \det\big(a[\delta_{ij}]_{n\times n} - [a_{ij}]_{n\times n}\big) = a^n + \sum_{k=1}^{n} c_k a^{n-k},$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son los coeficientes del polinomio característico de la matriz $[a_{ij}]_{n\times n}$, los cuales pertenecen a I. De esta forma, considerándose $x = \sum_{k=1}^{n} c_k a^{n-k} \in I$, sigue que $\det(\mathbf{A}) = a^n + x$, y esto finaliza la demostración. $\square$

Proposición 3.10 (Adaptado de [8, Proposición 8]). *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo de M finitamente generado e I es un ideal radical de A, entonces $(IN :_A N) = I$ si, y solamente si, $\mathrm{Ann}_A(N) \subset I$.*

Demostración. Supóngase inicialmente que $(IN :_A N) = I$. Entretanto, por el ítem (7) de la Proposición 1.18, se tiene que $\mathrm{Ann}_A(N) \subset (IN :_A N)$. Luego, $\mathrm{Ann}_A(N) \subset I$.

Recíprocamente, supóngase que $\mathrm{Ann}_A(N) \subset I$. Sea a elemento de A que está en $(IN :_A N)$. Como N es finitamente generado, existe un número finito de generadores. Poniendo n al número de generadores de N, por el Teorema 3.4, existe $x \in I$ tal que $a^n + x \in \mathrm{Ann}_A(N)$ y, por lo tanto, $a^n + x \in I$ (pues $\mathrm{Ann}_A(N) \subset I$). Entonces, $a^n \in I + \langle x \rangle_A = I$. Por lo tanto, $a \in \mathrm{rad}\, I$ y esto implica que $a \in I$, ya que I es un ideal radical. Luego, $(IN :_A N) \subset I$. Finalmente, por el ítem (10) de la Proposición 1.18, se tiene que $I \subset (IN :_A N)$. Por lo tanto, $(IN :_A N) = I$; y esto finaliza la demostración. $\square$

Corolario 3.3 (Adaptado de [8, Corolario 3]). *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo de M finitamente generado y $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de A conteniendo a $\mathrm{Ann}_A(N)$, entonces $\mathfrak{m}N$ es un submódulo primo de M.*

Demostración. Como $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal, por la Proposición 1.9, $\mathfrak{m}$ es un ideal radical. Ahora, siendo N un submódulo de M finitamente generado y $\mathrm{Ann}_A(N) \subset \mathfrak{m}$, por la Proposición 3.10, se tiene que $(\mathfrak{m}N :_A N) = \mathfrak{m}$. Por otro lado, como $\mathfrak{m} \neq A$, por el ítem (2) de la Proposición 1.18, se obtiene que $\mathfrak{m}N \neq N$. Luego, teniendo en vista que $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal, por la Proposición 3.9, concluyese que $\mathfrak{m}N$ es un submódulo primo de M. $\square$

Corolario 3.4 ([8, Corolario 3, segunda parte]). *Sea A un anillo. Si M es un A-módulo fiel finitamente generado, entonces $\mathfrak{m}M$ es un submódulo primo de M, para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A.*

Demostración. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A. Como M es un A-módulo fiel, se tiene que $\mathrm{Ann}_A(M) = \langle 0_A \rangle \subset \mathfrak{m}$. Luego, utilizando el hecho de M ser finitamente generado, por el Corolario 3.3, concluyese que $\mathfrak{m}M$ es un submódulo primo de M. $\square$

Capítulo 4

La topología de Zariski en el espectro primo de un módulo

En este capítulo, se define una topología en el espectro primo de un módulo. Esta es una generalización de la topología de Zariski en el espectro primo de un anillo. Además, se probará algunos resultados que generalizan los existentes en el espectro primo de un anillo. Para su desenvolvimiento, se seguirá principalmente los resultados de [10] y [13], en algunos casos con un enfoque diferente.

4.1 Variedad de un submódulo

Definición 4.1. Sean A un anillo y M un A-módulo. Si N es un submódulo de M, se define la *variedad de* N, denotada por $V_A(N)$, como el conjunto de todos los submódulos primos $\mathfrak{P}$ de A tales que $(N :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$.

Expresado en forma conjuntista,

$$V_A(N) = \{\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}_A(M) : \ (N :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)\}.$$

Ejemplo 4.1. Sea A un anillo. Para cualquier A-módulo cero M, $V_A(M) = \varnothing$. En efecto, si $M = \{0_M\}$, por el Ejemplo 3.3, se tiene que $\operatorname{Spec}_A(M) = \varnothing$. Luego, $V_A(M) = \varnothing$.

Ejemplo 4.2. Sea A un anillo. Si M es un A-módulo tal que $\operatorname{Spec}_A(M) = \varnothing$, entonces $V_A(N) = \varnothing$, para todo submódulo N de M.

Proposición 4.1. *Sean A un anillo y M un A-módulo.*

(1) *Si N y K son submódulos de M tales que $(N :_A M) \subset (K :_A M)$, entonces $V_A(K) \subset V_A(N)$.*
(2) *Si N y K son submódulos de M tales que $N \subset K$, entonces $V_A(K) \subset V_A(N)$.*
(3) *Si N y K son submódulos de M tales que $(N :_A M) = (K :_A M)$, entonces $V_A(N) = V_A(K)$.*
(4) *Si $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ son submódulos primos de M tales que $V_A(\mathfrak{P}) = V_A(\mathfrak{Q})$, entonces $(\mathfrak{P} :_A M) = (\mathfrak{Q} :_A M)$.*
(5) *Si M es finitamente generado y N es un submódulo de M, entonces N es un submódulo propio de M si, y solamente si, $V_A(N) \neq \varnothing$.*

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Si $V_A(K) = \varnothing$ no hay nada a probar. Ahora, si $\mathfrak{P} \in V_A(K)$ se tiene que $(K :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Como $(N :_A M) \subset (K :_A M)$, se tiene que $(N :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Esto implica que $\mathfrak{P} \in V_A(N)$. Consecuentemente, $V_A(K) \subset V_A(N)$.

A seguir, se probará el ítem (2). En efecto, como $N \subset K$, por el ítem (4) de la Proposición 1.18, $(N :_A M) \subset (K :_A M)$. Luego, por el ítem (1), $V_A(K) \subset V_A(N)$.

A continuación, se procederá a probar el ítem (3). Como $(N :_A M) = (K :_A M)$, se tiene que $(N :_A M) \subset (K :_A M)$ y $(K :_A M) \subset (N :_A M)$. Luego, por el ítem (1), concluyese que $V_A(K) \subset V_A(N)$ y $V_A(N) \subset V_A(K)$, es decir, $V_A(N) = V_A(K)$.

Ahora, se procederá a probar el ítem (4). Como $V_A(\mathfrak{P}) = V_A(\mathfrak{Q})$, se tiene que $\mathfrak{P} \in V_A(\mathfrak{Q})$ y $\mathfrak{Q} \in V_A(\mathfrak{P})$ (ya que $\mathfrak{P} \in V_A(\mathfrak{P})$ y $\mathfrak{Q} \in V_A(\mathfrak{Q})$). Luego, $(\mathfrak{Q} :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$ y $(\mathfrak{P} :_A M) \subset (\mathfrak{Q} :_A M)$. Esto implica que $(\mathfrak{P} :_A M) = (\mathfrak{Q} :_A M)$.

Finalmente se probará el ítem (5). Supóngase inicialmente que N un submódulo propio de M. Como M es finitamente generado, por el Corolario 3.1, existe un submódulo primo $\mathfrak{P}$ de M tal que $N \subset \mathfrak{P}$. Luego, por el ítem (4) de la Proposición 1.18, $(N :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Esto implica que $\mathfrak{P} \in V_A(N)$. Reciprocamente, supóngase que existe $\mathfrak{P} \in V_A(N)$. Entonces, por el ítem (2) de la Proposición 1.18, $(N :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M) \subsetneq A$ y, por lo tanto, $(N :_A M) \neq A$. Así, utilizando nuevamente el ítem (2) de la Proposición 1.18, concluyese que N es un submódulo propio de M. □

De ahora en adelante, a menos que se indique lo contrario, en lo restante de este capítulo, se asume que todos los módulos definidos sobre los anillos conmutativos con unidad son tales que su espectro primo es no vacío.

Se definirá la topología de Zariski en el espectro primo de un A-módulo M, considerando las variedades $V_A(N)$ como sus conjuntos cerrados.

Teorema 4.1 ([13, Proposición 1.1])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Las variedades de los submódulos de M, satisfacen las siguientes propiedades*:

(1) $V_A\big(\langle 0_M \rangle_A\big) = \mathrm{Spec}_A(M)$ *y* $V_A(M) = \varnothing$.

(2) *Para toda familia de submódulos* $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *de* M,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_A(N_\lambda) = V_A\Bigg(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M\Bigg).$$

(3) *Para todos los submódulos* N *y* P *de* M,

$$V_A(N) \cup V_A(P) = V_A(N \cap P).$$

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Por definición, se tiene que $V_A\big(\langle 0_M \rangle_A\big) \subset \mathrm{Spec}_A(M)$. Para establecer la inclusión contraria, sea $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}_A(M)$. Entonces, por el ítem (7) de la Proposición 1.18, se tiene que $\big(\langle 0_M \rangle_A :_A M\big) = \mathrm{Ann}_A(M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{P} \in V_A\big(\langle 0_M \rangle_A\big)$. Luego, $\mathrm{Spec}_A(M) \subset V_A\big(\langle 0_M \rangle_A\big)$. Por lo tanto, $V_A\big(\langle 0_M \rangle_A\big) = \mathrm{Spec}_A(M)$.

También, por el ítem (3) de la Proposición 1.18, si existiera un submódulo primo $\mathfrak{P}$ en $V_A(M)$ se tendría que $A = (M :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M) \subsetneq A$, lo que sería un absurdo; es decir, $V_A(M) = \varnothing$.

Ahora, se probará el ítem (2). Sea $(N_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de submódulos de M. Si $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_A(N_\lambda) = \varnothing$ es claro que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_A(N_\lambda) \subset V_A\big(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M\big)$. Caso contrario, supóngase que $\mathfrak{P} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_A(N_\lambda)$. Entonces, $\mathfrak{P} \in V_A(N_\lambda)$, para todo $\lambda \in \Lambda$; es decir, $(N_\lambda :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto, por el Corolario 1.17, $(N_\lambda :_A M)M \subset (\mathfrak{P} :_A M)M$, para todo $\lambda \in \Lambda$, lo que implica que $\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M \subset (\mathfrak{P} :_A M)M$. Luego, por los ítems (4) y (15) de la Proposición 1.18,

$$\Bigg(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M :_A M\Bigg) \subset ((\mathfrak{P} :_A M)M :_A M) = (\mathfrak{P} :_A M).$$

Así, $\mathfrak{P} \in V_A\big(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M\big)$. Esto muestra que

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_A(N_\lambda) \subset V_A\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M\right). \tag{4.1.1 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, supóngase que $V_A\big(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M\big) \neq \varnothing$ (si $V_A\big(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M\big) = \varnothing$, no hay nada a probar). Sea $\mathfrak{P} \in V_A\big(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M\big)$. Entonces, $\big(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M :_A M\big) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Por otro lado, para cada $\mu \in \Lambda$, se tiene que $(N_\mu :_A M)M \subset \sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M$. Luego, por los ítems (15) y (4) de la Proposición 1.18,

$$(N_\mu :_A M) = ((N_\mu :_A M)M :_A M) \subset \left(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M :_A M\right).$$

Como $\big(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M :_A M\big) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$, sigue que $(N_\mu :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$, lo cual implica que $\mathfrak{P} \in V_A\big(N_\mu\big)$. Siendo $\mu \in \Lambda$ arbitrário, concluyese que $\mathfrak{P} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_A(N_\lambda)$. Esto muestra que

$$V_A\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M\right) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_A(N_\lambda). \tag{4.1.1 (2)}$$

Por lo tanto, de (4.1.1 (1)) y (4.1.1 (2)),

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_A(N_\lambda) = V_A\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}(N_\lambda :_A M)M\right).$$

Finalmente, se probará el ítem (3). Sean N y P submódulos de M. Por el ítem (2) de la Proposición 4.1, $V_A(N) \subset V_A(N\cap P)$ y $V_A(P) \subset V_A(N\cap P)$. Luego,

$$V_A(N) \cup V_A(P) \subset V_A(N \cap P). \tag{4.1.2 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, suponga que $V_A(N \cap P) \neq \varnothing$ (si $V_A(N \cap P) = \varnothing$, no hay nada a probar). Sea $\mathfrak{P} \in V_A(N \cap P)$. Entonces, $(N \cap P : M) \subset (\mathfrak{P} : M)$. Luego, por el ítem (6) de la Proposición 1.18,

$$(N : M)(P : M) \subset (N : M) \cap (P : M) \subset (\mathfrak{P} : M).$$

Como $(\mathfrak{P} : M)$ es un ideal primo, por el Teorema 1.4, concluyese que $(N : M) \subset$

$(\mathfrak{P} : M)$ o $(P : M) \subset (\mathfrak{P} : M)$. Esto implica que $\mathfrak{P} \in V_A(N)$ o $\mathfrak{P} \in V_A(P)$. Luego, $\mathfrak{P} \in V_A(N) \cup V_A(P)$. Esto muestra que

$$V_A(N \cap K) \subset V_A(N) \cup V_A(K). \tag{4.1.2 (2)}$$

Por lo tanto, de (4.1.2 (1)) y (4.1.2 (2)),

$$V_A(N) \cup V_A(K) = V_A(N \cap K). \qquad \square$$

Ejemplo 4.3. Para cualquier anillo A, $V_A(I) = V(I)$, para todo ideal I de A. En efecto, sea I un ideal arbitrário de A. Si $I = A$, por el ítem (1) del Teorema 4.1 y por el ítem (1) del Teorema 2.1, se tiene que $V_A(A) = \varnothing$ y $V(A) = \varnothing$, respectivamente. Em particular, $V_A(A) = V(A)$. Ahora, si $I \subsetneq A$, por los ejemplos 1.33 y 3.4, se tiene que

$$\begin{aligned} V_A(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}_A(A) : (I :_A A) \subset (\mathfrak{p} :_A A)\} &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : I \subset \mathfrak{p}\} \\ &= V(I). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.4. Si A es un anillo e I un ideal de A, entonces $V_A(J/I) = V_{A/I}(J/I)$, para todo ideal J de A conteniendo a I. En efecto, sea J un ideal arbitrário de A conteniendo a I. Si $J = A$, por el ítem (1) del Teorema 4.1 y por el ítem (1) del Teorema 2.1, se tiene que $V_A(A/I) = \varnothing$ y $V(A/I) = \varnothing$, respectivamente. Por otro lado, por el Ejemplo 4.3, $V(A/I) = V_{A/I}(A/I)$. Así, $V_A(A/I) = V_{A/I}(A/I)$. Supóngase ahora que $J \subsetneq A$. Dado $\mathfrak{P} \in V_A(J/I)$, se tiene que $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}_A(A/I)$ y $(J/I :_A A/I) \subset (\mathfrak{P} :_A A/I)$. Por el Ejemplo 3.5, $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}_{A/I}(A/I)$ y $\mathfrak{P} = \mathfrak{p}/I$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A conteniendo a I. Como $(J/I :_A A/I) \subset (\mathfrak{P} :_A A/I) = (\mathfrak{p}/I :_A A/I)$, por el Ejemplo 1.34, $J \subset \mathfrak{p}$ y, por lo tanto, $J/I \subset \mathfrak{P}$. Entretanto, por el Ejemplo 1.33, $J/I = (J/I :_{A/I} A/I)$ y $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P} :_{A/I} A/I)$. Luego, $(J/I :_{A/I} A/I) \subset (\mathfrak{P} :_{A/I} A/I)$, y así $\mathfrak{P} \in V_{A/I}(J/I)$. Esto muestra que

$$V_A(J/I) \subset V_{A/I}(J/I). \tag{4.1.3 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, suponga que $\mathfrak{P} \in V_{A/I}(J/I)$. Entonces, $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}_{A/I}(A/I)$ y $(J/I :_{A/I} A/I) \subset (\mathfrak{P} :_{A/I} A/I)$. Por el Ejemplo 3.5, $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}_A(A/I)$. Como $(J/I :_{A/I} A/I) \subset (\mathfrak{P} :_{A/I} A/I)$, por el Ejemplo 1.33, $J/I \subset \mathfrak{P}$. Luego, por el ítem (4) de la Proposición 1.18, $(J/I :_A A/I) \subset (\mathfrak{P} :_A$

A/I), y así $\mathfrak{P} \in V_A(J/I)$. Esto muestra que

$$V_{A/I}(J/I) \subset V_A(J/I). \tag{4.1.3 (2)}$$

Por lo tanto, de (4.1.3 (1)) y (4.1.3 (2)), $V_A(J/I) = V_{A/I}(J/I)$.

4.2 La topología de Zariski en el $\mathrm{Spec}_A(M)$

Sean A un anillo y M un A-módulo. En virtud del Teorema 4.1, la familia

$$\zeta_A(M) = \{V_A(N) :\ N \text{ es un submódulo de } M\}$$

satisface los axiomas para conjuntos cerrados de una topología en el espectro primo de M (cf. Teorema 1.11). Más precisamente, la familia

$$\mathscr{T}_A(M) = \{\omega_A(N) :\ N \text{ es un submódulo de } M\},$$

donde

$$\omega_A(N) = \mathrm{Spec}_A(M) \setminus V_A(N),$$

es una topología en el espectro primo de M, que es llamada *topología de Zariski relativa a M*.

Por el ítem (1) del Teorema 4.1,

$$\omega_A\big(\langle 0_M \rangle_A\big) = \varnothing \quad \text{y} \quad \omega_A(M) = \mathrm{Spec}_A(M). \tag{4.2.1}$$

El espacio topológico $\big(\mathrm{Spec}_A(M), \mathscr{T}_A(M)\big)$ se estudia desde el punto de vista del espacio espectral.

La definición de topología de Zariski sobre el espectro primo de un módulo es una generalización del concepto de topología de Zariski sobre el espectro primo de un anillo. Esto es consecuencia, del siguiente resultado.

Proposición 4.2. *Para todo anillo no cero A,*

$$\big(\mathrm{Spec}_A(A), \mathscr{T}_A(A)\big) = \big(\mathrm{Spec}(A), \mathscr{T}(A)\big).$$

Demostración. Por el Ejemplo 3.4, $\mathrm{Spec}_A(A) = \mathrm{Spec}(A)$. Ahora, por el Ejemplo 4.3,

$$\omega_A(I) = \mathrm{Spec}_A(A) \setminus V_A(I) = \mathrm{Spec}(A) \setminus V(I) = \omega(I),$$

para todo ideal I de A. Entonces, $\mathscr{T}_A(A) = \mathscr{T}(A)$. □

Proposición 4.3. *Sea A un anillo no cero. Para todo ideal propio I de A,*

$$\begin{aligned}\big(\mathrm{Spec}_A(A/I), \mathscr{T}_A(A/I)\big) &= \big(\mathrm{Spec}_{A/I}(A/I), \mathscr{T}_{A/I}(A/I)\big)\\ &= \big(\mathrm{Spec}(A/I), \mathscr{T}(A/I)\big).\end{aligned}$$

Demostración. Sea I un ideal propio de A. Por el Ejemplo 3.5, $\mathrm{Spec}_A(A/I) = \mathrm{Spec}_{A/I}(A/I)$. Ahora, por el Ejemplo 4.4,

$$\omega_A(\mathcal{J}) = \mathrm{Spec}_A(A) \setminus V_A(\mathcal{J}) = \mathrm{Spec}_{A/I}(A/I) \setminus V_{A/I}(\mathcal{J}) = \omega_{A/I}(\mathcal{J}),$$

para todo ideal $\mathcal{J}$ de A/I. Entonces, $\mathscr{T}_A(A/I) = \mathscr{T}_{A/I}(A/I)$. Esto muestra la primera igualdad de la proposición, en cuanto la segunda igualdad es un caso particular de la Proposición 4.2. □

Lema 4.1 ([10, Resultado 3])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Para todo submódulo N de M,*

$$V_A(N) = V_A\big((N :_A M)M\big).$$

Demostración. Sea N un submódulo de M. Para la familia $\{N\}$, por el ítem (2) del Teorema 4.1, se tiene

$$V_A(N) = V_A\big((N :_A M)M\big).$$ □

Proposición 4.4. *Sea A un anillo. Si M es un A-módulo, entonces*

$$\zeta_A(M) = \{V_A(IM) : I \text{ es un ideal de } A\}.$$

Demostración. Sea $\zeta_A := \{V_A(IM) : I$ es un ideal de $A\}$. Por el Lema 4.1,

$$\zeta_A(M) \subset \zeta_A. \tag{4.2.2 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, suponga que $C \in \zeta_A$. Entonces, $C = V_A(IM)$, para algun ideal I de A. Como IM es un submódulo de M, sigue que

$C \in \zeta_A(M)$. Esto muestra que

$$\zeta_A \subset \zeta_A(M). \tag{4.2.2 (2)}$$

Por lo tanto, de (4.2.2 (1)) y (4.2.2 (2)), $\zeta_A(M) = \zeta_A$. $\square$

Ejemplo 4.5. Sea A un anillo. Si M es un A-módulo tal que $\mathrm{Spec}_A(M) = \{\mathfrak{P}\}$, entonces $\mathscr{T}_A(M)$ es la topología trivial (cf. Ejemplo 1.47). En este caso, si N es un submódulo de M, entonces $V_A(N) = \varnothing$ o $V_A(N) = \{\mathfrak{P}\} = \mathrm{Spec}_A(M)$.

Ejemplo 4.6. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Si M es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial no cero, entonces $\mathscr{T}_{\mathbb{K}}(M)$ es la topología trivial. En efecto, si S es un subespacio vectorial propio de M, por el Ejemplo 3.2, se tiene que $(S :_{\mathbb{K}} M) = \langle 0_{\mathbb{K}} \rangle = (W :_{\mathbb{K}} M)$, para todo subespacio vectorial propio W de M. Esto implica que $V_{\mathbb{K}}(S) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(M)$, para todo subespacio vectorial propio S de M. Luego, $\mathscr{T}_{\mathbb{K}}(M) = \{\varnothing, \mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}(M)\}$.

Ejemplo 4.7. Sean p y q dos números primos positivos diferentes. La topología de Zariski relativa al $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{pq}$ es la topología discreta. En efecto, por los ejemplos 1.32 y 3.7, se tiene que

$$\mathscr{S}_{\mathbb{Z}}(M) = \big\{\langle [0] \rangle_{\mathbb{Z}}, pM, qM, M\big\} \quad \text{y} \quad \mathrm{Spec}_{\mathbb{Z}}(M) = \{pM, qM\}.$$

Ahora, por el Ejemplo 1.36, concluyese que $V_{\mathbb{Z}}(pM) = \{pM\}$ y $V_{\mathbb{Z}}(qM) = \{qM\}$. Luego, $\mathscr{T}_{\mathbb{Z}}(M) = \{\varnothing, \{pM\}, \{qM\}, \mathrm{Spec}_{\mathbb{Z}}(M)\}$.

4.3 Relacionando los espacios $\mathrm{Spec}_A(M)$ y $\mathrm{Spec}\,\big(A/\,\mathrm{Ann}_A(M)\big)$

Sean A un anillo y M un A-módulo. De ahora en adelante, el espacio topológico $\big(\mathrm{Spec}_A(M), \mathscr{T}_A(M)\big)$ será denotado, simplemente, por $\mathrm{Spec}_A(M)$. También, si I es un ideal de A conteniendo a $\mathrm{Ann}_A(M)$, se denotará por $\overline{I}$ al ideal $I/\,\mathrm{Ann}_A(M)$ de $A/\,\mathrm{Ann}_A(M)$, es decir, $\overline{I} := I/\,\mathrm{Ann}_A(M)$.

Si $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M, por el Teorema 3.1, $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un ideal primo de A. Además, como $\mathrm{Ann}_A(M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$ (por el ítem (7) de la Proposición 1.18), por el Corolario 1.9, concluyese que $\overline{(\mathfrak{P} :_A M)}$ es un ideal primo de $A/\operatorname{Ann}_A(M)$. De esta forma, se tiene bien definidas las aplicaciones naturales

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathrm{Spec}_A(M) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(A) \\ & \mathfrak{P} & \longmapsto & (\mathfrak{P} :_A M) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathrm{Spec}_A(M) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big). \\ & \mathfrak{P} & \longmapsto & \overline{(\mathfrak{P} :_A M)} \end{array}$$

En particular, si A es un anillo no cero y $M = A$, se tiene que Φ es la función identidad y $\Psi(\mathfrak{p}) = \overline{\mathfrak{p}}$, para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. En este caso, Φ es un homeomorfismo y, por el teorema de la correspondencia, Ψ es biyectiva.

Se mostrará que las aplicaciones naturales Φ y Ψ son continuas.

Lema 4.2 (Adaptado de [13, Proposición 1.2])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Para todo ideal I de A, $\Phi^{-1}(V(I)) = V_A(IM)$.*

Demostración. Sea I un ideal de A. Si $\Phi^{-1}(V(I)) = \varnothing$ es claro que $\Phi^{-1}(V(I)) \subset V_A(IM)$. Caso contrario, supóngase que $\mathfrak{P} \in \Phi^{-1}(V(I))$. Entonces, $(\mathfrak{P} :_A M) = \Phi(\mathfrak{P}) \in V(I)$, es decir, $I \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Luego, por el ítem (16) de la Proposición 1.18, $(IM :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$, lo cual implica que $\mathfrak{P} \in V_A(IM)$. Esto muestra que

$$\Phi^{-1}(V(I)) \subset V_A(IM). \tag{4.3.1 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, supóngase que $V_A(IM) \neq \varnothing$ (si $V_A(IM) = \varnothing$, no hay nada a probar). Sea $\mathfrak{P} \in V_A(IM)$. Entonces, $(IM :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Luego, por el ítem (16) de la Proposición 1.18, $I \subset (\mathfrak{P} :_A M)$ y, por lo tanto, $\Phi(\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P} :_A M) \in V(I)$. Es decir, $\mathfrak{P} \in \Phi^{-1}(V(I))$. Esto muestra que

$$V_A(IM) \subset \Phi^{-1}(V(I)). \tag{4.3.1 (2)}$$

Por lo tanto, de (4.3.1 (1)) y (4.3.1 (2)), $\Phi^{-1}(V(I)) = V_A(IM)$. □

Proposición 4.5 ([13, Proposición 1.2])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. La aplicación natural $\Phi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ es continua.*

Demostración. Sea C un conjunto cerrado en $\mathrm{Spec}(A)$. Entonces, $C = V(I)$, para algún ideal I de A. Luego, por el Lema 4.2, $\Phi^{-1}(C) = \Phi^{-1}(V(I)) = V_A(IM)$, es decir, $\Phi^{-1}(C)$ es un cerrado en $\mathrm{Spec}_A(M)$. Entonces, por el Teorema 1.14, la aplicación natural Φ es continua. □

A continuación, se estudiará una condición suficiente bajo el cual la aplicación natural Ψ es sobreyectiva. Para demostrar este resultado, se enunciará el siguiente lema sin demostración.

Lema 4.3 ([9, Lema, pág. 3746])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo no cero finitamente generado. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A conteniendo a $\operatorname{Ann}_A(M)$, entonces existe un submódulo primo $\mathfrak{P}$ de M tal que $(\mathfrak{P} :_A M) = \mathfrak{p}$.*

Proposición 4.6 ([10, Proposición 3.5 (1)])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si M es un módulo finitamente generado, entonces la aplicación natural $\Psi : \operatorname{Spec}_A(M) \longrightarrow \operatorname{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ un elemento arbitrário en $\operatorname{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$. Entonces, por el Ejemplo 1.16, existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A conteniendo a $\operatorname{Ann}_A(M)$ tal que $\mathcal{P} = \mathfrak{p}/\operatorname{Ann}_A(M)$. Como M es finitamente generado, por el Lema 4.3, existe un submódulo primo $\mathfrak{P}$ de M tal que $(\mathfrak{P} :_A M) = \mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\Psi(\mathfrak{P}) = \overline{(\mathfrak{P} :_A M)} = \overline{\mathfrak{p}} = \mathcal{P}$, y esto finaliza la demostración. $\square$

A continuación, se estudiará algunas propiedades elementales de la aplicación natural Ψ, las cuales fueron extraídas de [10, Teorema 3.6] y [13, pág. 27 y Lema 1.3].

Proposición 4.7. *Sean A un anillo y M un A-módulo. La aplicación natural $\Psi : \operatorname{Spec}_A(M) \longrightarrow \operatorname{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$, satisface las siguientes propiedades:*

(1) *Para todo ideal I de A conteniendo a $\operatorname{Ann}_A(M)$, $\Psi^{-1}\big(V(\overline{I})\big) = V_A(IM)$.*

(2) *Para todo submódulo N de M,*

$$\Psi^{-1}\Big(V\big(\overline{(N :_A M)}\big)\Big) = V_A(N) \quad y \quad \Psi^{-1}\Big(\omega\big(\overline{(N :_A M)}\big)\Big) = \omega_A(N).$$

(3) *Si Ψ es sobreyectiva, entonces*

$$\Psi\big(V_A(N)\big) = V\big(\overline{(N :_A M)}\big) \quad y \quad \Psi\big(\omega_A(N)\big) = \omega\big(\overline{(N :_A M)}\big),$$

para todo submódulo N de M.

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Sea I un ideal de A conteniendo a $\operatorname{Ann}(M)$. Si $\Psi^{-1}\big(V(\overline{I})\big) = \varnothing$ es claro que $\Psi^{-1}\big(V(\overline{I})\big) \subset V_A(IM)$. Caso contrario, supóngase que $\mathfrak{P} \in \Psi^{-1}\big(V(\overline{I})\big)$. Entonces, $\overline{(\mathfrak{P} :_A M)} = \Psi(\mathfrak{P}) \in V(\overline{I})$, es decir, $\overline{I} \subset \overline{(\mathfrak{P} :_A M)}$. Como $\operatorname{Ann}_A(M) \subset I$, por el teorema de la correspondencia para anillos, $I \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Luego, por el ítem (16) de la

Proposición 1.18, $(IM :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$, lo cual implica que $\mathfrak{P} \in V_A(IM)$. Esto muestra que

$$\Psi^{-1}\big(V\big(\,\overline{I}\,\big)\big) \subset V_A(IM). \tag{4.3.2 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, supóngase que $V_A(IM) \neq \varnothing$ (si $V_A(IM) = \varnothing$, no hay nada a probar). Sea $\mathfrak{P} \in V_A(IM)$. Entonces, $(IM :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Luego, por el ítem (16) de la Proposición 1.18, $I \subset (\mathfrak{P} :_A M)$ y, por lo tanto, $\overline{I} \subset \overline{(\mathfrak{P} :_A M)}$. De esta forma, $\Psi(\mathfrak{P}) = \overline{(\mathfrak{P} :_A M)} \in V\big(\,\overline{I}\,\big)$, es decir, $\mathfrak{P} \in \Psi^{-1}\big(V\big(\,\overline{I}\,\big)\big)$. Esto muestra que

$$V_A(IM) \subset \Psi^{-1}\big(V\big(\,\overline{I}\,\big)\big). \tag{4.3.2 (2)}$$

Por lo tanto, de (4.3.2 (1)) y (4.3.2 (2)), $\Psi^{-1}\big(V\big(\,\overline{I}\,\big)\big) = V_A(IM)$.

Para el ítem (2), sea N un submódulo arbitrário de M. Por el ítem (7) de la Proposición 1.18, se tiene que $\operatorname{Ann}_A(M) \subset (N : M)$. Luego, por el ítem (1),

$$\Psi^{-1}\big(V\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big)\big) = V_A\big((N :_A M)M\big). \tag{4.3.3 (1)}$$

Por otro lado, por el Lema 4.1,

$$V_A\big((N :_A M)M\big) = V_A(N). \tag{4.3.3 (2)}$$

Por lo tanto, de (4.3.3 (1)) y (4.3.3 (2)), $\Psi^{-1}\big(V\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big)\big) = V_A(N)$. Ahora, como

$$\Psi^{-1}\big(\mathrm{Spec}\left(A/\operatorname{Ann}_A(M)\right) \setminus V\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big)\big) = \mathrm{Spec}_A(M) \setminus \Psi^{-1}\big(V\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big)\big),$$

concluyese que

$$\Psi^{-1}\big(\omega\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big)\big) = \mathrm{Spec}_A(M) \setminus V_A(N) = \omega_A(N).$$

Finalmente, se probará el ítem (3). Sea N un submódulo arbitrário de M. Por el ítem (2), se tiene que

$$\Psi^{-1}\big(V\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big)\big) = V_A(N) \quad \text{y} \quad \Psi^{-1}\big(\omega\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big)\big) = \omega_A(N).$$

Entonces, por la sobreyectividad de Ψ, concluyese que

$$V\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big) = \Psi\big(\Psi^{-1}\big(V\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big)\big)\big) = \Psi\big(V_A(N)\big)$$

y

$$\omega\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big) = \Psi\Big(\Psi^{-1}\Big(\omega\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big)\Big)\Big) = \Psi\big(\omega_A(N)\big). \qquad \square$$

Teorema 4.2 ([13, pág. 27])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. La aplicación natural $\Psi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ es continua.*

Demostración. Sea C un conjunto cerrado en $\mathrm{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M))$. Entonces, $C = V\big(\,\overline{I}\,\big)$, para algún ideal I de A conteniendo a $\operatorname{Ann}_A(M)$. Luego, por el ítem (1) de la Proposición 4.7, $\Psi^{-1}(C) = \Psi^{-1}\big(V\big(\,\overline{I}\,\big)\big) = V_A(IM)$, es decir, $\Psi^{-1}(C)$ es un cerrado en $\mathrm{Spec}_A(M)$. Entonces, por el Teorema 1.14, la aplicación natural Ψ es continua. $\square$

A continuación, se estudiará las condiciones bajo las cuales Ψ es abierta, cerrada u homeomorfa.

Teorema 4.3 ([10, Teorema 3.6])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si la aplicación natural $\Psi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ es sobreyectiva, entonces Ψ es una aplicación cerrada y abierta.*

Demostración. Sea C un conjunto cerrado en $\mathrm{Spec}_A(M)$. Entonces, $C = V_A(N)$, para algún submódulo N de M. Como la aplicación natural Ψ es sobreyectiva, por el ítem (3) de la Proposición 4.7,

$$\Psi(C) = \Psi\big(V_A(N)\big) = V\big(\,\overline{(N : M)}\,\big),$$

es decir, $\Psi(C)$ es un cerrado en $\mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$. Esto muestra que la aplicación Ψ es cerrada.

Ahora, sea U un conjunto abierto en $\mathrm{Spec}_A(M)$. Entonces, $U = \omega_A(N)$, para algún submódulo N de M. Luego, utilizándose nuevamente el ítem (3) de la Proposición 4.7, concluyese que

$$\Psi(U) = \Psi\big(\omega_A(N)\big) = \omega\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big),$$

es decir, $\Psi(U)$ es un abierto en $\mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$. Esto muestra que la aplicación Ψ es abierta. $\square$

Corolario 4.1 ([10, Corolario 3.7])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. La aplicación natural $\Psi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ es biyectiva si, y solamente si, Ψ es un homeomorfismo.*

Demostración. Es inmediato del Teorema 4.3 $\square$

4.4 Propiedades topológicas del $\operatorname{Spec}_A(M)$

En esta sección, se presentan algunas propiedades de la topología de Zariski en el espectro primo de un módulo sobre un anillo.

4.4.1 Una base para la topología de Zariski en el $\operatorname{Spec}_A(M)$

En esta subsección, se define una base para la topología de Zariski en el espectro primo de un A-módulo, que es similar a la base de la topología de Zariski en el espectro primo de A, donde A es un anillo no cero.

Para cada $a \in A$, sea $\omega_A(a) := \omega_A(aM)$. En particular, por el Corolario 1.15 y por la ecuación (4.2.1),

$$\omega_A(0_A) = \varnothing \quad \text{y} \quad \omega_A(1_A) = \operatorname{Spec}_A(M). \tag{4.4.1}$$

Nótese que $\omega_A(a) = \omega(a)$, para todo $a \in A$.

De ahora en adelante, a menos que se indique lo contrario, en lo restante de este capítulo, el símbolo $[a]$, denotará a la clase de a en el anillo cociente $A/\operatorname{Ann}_A(M)$.

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.2.

Teorema 4.4 ([10, Proposición 4.3])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. La familia $\mathscr{B}_A(M) = \{\omega_A(a) : a \in A\}$ es una base para la topologia de Zariski en el* $\operatorname{Spec}_A(M)$.

Demostración. Dado $\mathcal{U}$ un abierto de $\operatorname{Spec}_A(M)$, existe un ideal I de A tal que $\mathcal{U} = \operatorname{Spec}_A(M) \setminus V_A(IM)$. Por otro lado, por el Corolario 1.18 y por el ítem (14) de la Proposición 1.18,

$$IM = \sum_{a \in I} aM = \sum_{a \in I} (aM :_A M)M.$$

Luego, por el ítem (2) del Teorema 4.1,

$$V_A(IM) = V_A\left(\sum_{a\in I}(aM :_A M)M\right) = \bigcap_{a\in I} V_A(aM).$$

Entonces,

$$\mathcal{U} = \mathrm{Spec}_A(M) \setminus \bigcap_{a\in I} V_A(aM) = \bigcup_{a\in I}(\mathrm{Spec}_A(M) \setminus V_A(aM)) = \bigcup_{a\in I} \omega_A(a).$$

Por lo tanto, $\mathscr{B}_A(M)$ es una base para la topología de Zariski en el $\mathrm{Spec}_A(M)$. □

Así como en el caso de la topología de Zariski en el espectro primo de un anillo, los abiertos básicos del $\mathrm{Spec}_A(M)$, poseen otras propiedades interesantes, mostradas en los próximos dos resultados.

Proposición 4.8 ([10, Proposición 4.1])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Sea $\Psi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ la aplicación natural. Para todo $a \in A$,*

(1) $\Psi^{-1}(\omega([a])) = \omega_A(a)$;

(2) $\Psi(\omega_A(a)) \subset \omega([a])$;

(3) *si Ψ es sobreyectiva, entonces* $\Psi(\omega_A(a)) = \omega([a])$.

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Dado $a \in A$, se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(\omega([a])) &= \Psi^{-1}\big(\mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big) \setminus V(\langle [a] \rangle)\big)\\ &= \mathrm{Spec}_A(M) \setminus \Psi^{-1}(V(\langle [a] \rangle)).\end{aligned} \tag{4.4.2 (1)}$$

Por otro lado, por el Ejemplo 1.9, $\langle [a] \rangle = \overline{\langle a \rangle + \operatorname{Ann}_A(M)}$. Luego, por el ítem (1) de la Proposición 4.7, sigue que

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(V(\langle [a] \rangle)) &= \Psi^{-1}\Big(V\Big(\overline{\langle a \rangle + \operatorname{Ann}_A(M)}\Big)\Big)\\ &= V_A((\langle a \rangle + \operatorname{Ann}_A(M))M).\end{aligned} \tag{4.4.2 (2)}$$

Entretanto, por el Corolario 1.19 y por el ítem (9) de la Proposición 1.18, sigue que

$$(\langle a \rangle + \operatorname{Ann}_A(M))M = \langle a \rangle M + \operatorname{Ann}_A(M)M = aM + \langle 0_M \rangle_A = aM. \tag{4.4.2 (3)}$$

Por lo tanto, de (4.4.2 (1)), (4.4.2 (2)) y (4.4.2 (3)), concluyese que

$$\Psi^{-1}(\omega([a])) = \operatorname{Spec}_A(M) \setminus V_A((\langle a\rangle + \operatorname{Ann}_A(M))M) = \operatorname{Spec}_A(M) \setminus V_A(aM)$$
$$= \omega_A(a).$$

Ahora, se probará el ítem (2). Por el ítem (1), se tiene que $\Psi(\omega_A(a)) = \Psi\big(\Psi^{-1}(\omega([a]))\big) \subset \omega([a])$, para todo $a \in A$.

Finalmente, se probará el ítem (3). Como Ψ es sobreyectiva, por el ítem (1), se tiene que $\Psi(\omega_A(a)) = \Psi\big(\Psi^{-1}(\omega([a]))\big) = \omega([a])$, para todo $a \in A$. $\square$

Corolario 4.2 ([10, Corolario 4.2])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Para todos los elementos a y b de A, $\omega_A(ab) = \omega_A(a) \cap \omega_A(b)$.*

Demostración. Sean a y b elementos de A. Por el ítem (1) de la Proposición 4.8, se tiene que $\Psi^{-1}(\omega([ab])) = \omega_A(ab)$. Entretanto, por el ítem (1) de la Proposición 2.2, $\omega([ab]) = \omega([a]) \cap \omega([b])$. Entonces,

$$\omega_A(ab) = \Psi^{-1}(\omega([ab])) = \Psi^{-1}(\omega([a]) \cap \omega([b])) = \Psi^{-1}(\omega([a])) \cap \Psi^{-1}(\omega([b])).$$

Ahora, utilizando nuevamente el ítem (1) de la Proposición 4.8, concluyese que

$$\omega_A(ab) = \Psi^{-1}(\omega([a])) \cap \Psi^{-1}(\omega([b])) = \omega_A(a) \cap \omega_A(b). \qquad \square$$

4.4.2 Compacidad y conexidad de $\operatorname{Spec}_A(M)$

En esta subsección, se dan condiciones para que el espectro primo de un módulo sea compacto, así como conexo.

Lema 4.4 ([13, Lema 1.3])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Sea $\Psi : \operatorname{Spec}_A(M) \longrightarrow \operatorname{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ la aplicación natural. Si M es finitamente generado, entonces para cualquier cubrimiento abierto $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $\operatorname{Spec}_A(M)$, existe un cubrimiento abierto $\{W'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ del $\operatorname{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M))$ tal que $\Psi^{-1}(W'_\lambda) = W_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Demostración. Sea $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto de $\operatorname{Spec}_A(M)$. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un submódulo K_λ de M tal que $W_\lambda = \omega_A(K_\lambda)$. Sea $W'_\lambda := \omega\big(\overline{(K_\lambda : M)}\big)$, el cual es un conjunto abierto de $\operatorname{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M))$. Por el ítem (2) de la Proposición 4.7, se tiene

$$\Psi^{-1}(W'_\lambda) = \Psi^{-1}\Big(\omega\big(\,\overline{(N :_A M)}\,\big)\Big) = \omega_A(N) = W_\lambda.$$

A continuación, se mostrará que $\{W'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un cubrimiento abierto de $\mathrm{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M))$. Suponiendo, por el absurdo, que $\mathrm{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M)) \neq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W'_\lambda$, existirá un ideal primo $\overline{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M)) \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W'_\lambda$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A conteniendo a $\operatorname{Ann}_A(M)$. Una vez que $\mathfrak{p}$ es un ideal propio de A, por el Corolario 1.6, existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A tal que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$. Más aún, como $\operatorname{Ann}_A(M) \subset \mathfrak{p}$, se sigue que $\operatorname{Ann}_A(M) \subset \mathfrak{m}$. Siendo M un A-módulo finitamente generado, por el Corolario 3.3, $\mathfrak{m}M$ es un submódulo primo de M. En particular, se tiene que $\mathfrak{m}M$ es un submódulo propio y, por lo tanto, por el ítem (11) de la Proposición 1.18, $(\mathfrak{m}M : M) = \mathfrak{m}$. Por otro lado, teniendo en vista que $\overline{\mathfrak{p}} \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W'_\lambda$ o, equivalentemente, $\overline{\mathfrak{p}} \notin W'_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, se tiene que $\overline{\mathfrak{p}} \in V\big(\,\overline{(K_\lambda : M)}\,\big)$, para todo $\lambda \in \Lambda$. De esta forma, fijado $\mu \in \Lambda$, concluyese que

$$\overline{(K_\mu : M)} \subset \overline{\mathfrak{p}} \subset \overline{\mathfrak{m}} = \overline{(\mathfrak{m}M : M)}$$

y, por lo tanto, $\overline{(K_\mu : M)} \subset \overline{(\mathfrak{m}M : M)}$. Ahora, por el teorema de la correspondencia para anillos, $(K_\mu : M) \subset (\mathfrak{m}M : M)$, es decir, $\mathfrak{m}M \in V_A(K_\mu)$. Esto implica que $\mathfrak{m}M \notin W_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, o sea $\mathfrak{m}M \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$. Entonces, $\mathfrak{m}M \in \mathrm{Spec}_A(M) \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$. Por lo tanto, $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ no es un cubrimiento abierto de $\mathrm{Spec}_A(M)$, lo cual contradice la aserción. Consecuentemente, $\{W'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ es un cubrimiento de $\mathrm{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M))$, y esto termina la prueba del lema. $\square$

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.3.

Teorema 4.5 ([13, Teorema 1.4]). *Sean A un anillo y M um A-módulo. Si M es finitamente generado, entonces $\mathrm{Spec}_A(M)$ es compacto.*

Demostración. Seja $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto de $\mathrm{Spec}_A(M)$. Siendo M un A-módulo finitamente generado, por el Lema 4.4, existe un cubrimiento abierto $\{W'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $\mathrm{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M))$ tal que $\Psi^{-1}(W'_\lambda) = W_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, donde $\Psi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ es la aplicación natural. Como $\mathrm{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M))$ es compacto (cf. Teorema 2.3), existen $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in$

Λ tales que $\left\{W'_{\lambda_i}\right\}_{i=1}^n$ es un cubrimiento abierto de $\operatorname{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M))$, es decir,

$$\operatorname{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M)) = \bigcup_{i=1}^n W'_{\lambda_i}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}_A(M) = \Psi^{-1}\big(\operatorname{Spec}(A/\operatorname{Ann}_A(M))\big) = \Psi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n W'_{\lambda_i}\right) &= \bigcup_{i=1}^n \Psi^{-1}\big(W'_{\lambda_i}\big)\\ &= \bigcup_{i=1}^n W_{\lambda_i}.\end{aligned}$$

Esto muestra que $\{W_{\lambda_i}\}_{i=1}^n$ es un cubrimiento abierto de $\operatorname{Spec}_A(M)$ y, por lo tanto, $\operatorname{Spec}_A(M)$ es compacto. □

El siguiente resultado generaliza el Teorema 4.5.

Teorema 4.6 ([10, Teorema 4.4])**.** *Sean A un anillo y M um A-módulo. Si la aplicación natural $\Psi : \operatorname{Spec}_A(M) \longrightarrow \operatorname{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ es sobreyectiva, entonces $\omega_A(a)$ es un subconjunto compacto, para todo $a \in A$. En particular, $\operatorname{Spec}_A(M)$ es compacto.*

Demostración. Sea $a \in A$ y sea $\{\omega_A(a_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento de $\omega_A(a)$ por conjuntos abiertos básicos de $\operatorname{Spec}_A(M)$, es decir,

$$\omega_A(a) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \omega_A(a_\lambda).$$

Siendo Ψ sobreyectiva, por el ítem (3) de la Proposición 4.8, se tiene que

$$\omega([a]) = \Psi(\omega_A(a)) \subset \Psi\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \omega_A(a_\lambda)\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Psi(\omega_A(a_\lambda)) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \omega([a_\lambda]).$$

Como $\omega([a])$ es un subconjunto compacto de $\operatorname{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ (cf. Teorema 2.4), existen $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que

$$\omega([a]) \subset \bigcup_{i=1}^n \omega([a_{\lambda_i}]).$$

Luego, por el ítem (1) de la Proposición 4.8, concluyese que

$$\omega_A(a) = \Psi^{-1}(\omega([a])) \subset \Psi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \omega([a_{\lambda_i}])\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \Psi^{-1}(\omega([a_{\lambda_i}])) = \bigcup_{i=1}^{n} \omega_A(a_{\lambda_i}).$$

Esto muestra que $\{\omega_A(a_{\lambda_i})\}_{i=1}^{n}$ es un subrecubrimiento finito de $\{\omega_A(a_\lambda))\}_{\lambda\in\Lambda}$. Consecuentemente, por el Teorema 1.15, $\omega_A(a)$ es un subconjunto compacto.

Finalmente, como $\omega_A(1_A) = \operatorname{Spec}_A(M)$, se tiene que $\operatorname{Spec}_A(M)$ es compacto. □

Lema 4.5. *Sean A un anillo y M um A-módulo. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subconjuntos abiertos compactos de $\operatorname{Spec}_A(M)$, entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que*

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{n} \omega_A(a_i).$$

Demostración. Si $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \varnothing$, se tiene que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \omega_A(0_A)$. Supóngase ahora que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ es no vacío. Como $\mathscr{B}_A(M) = \{\omega_A(a) : a \in A\}$ es una base para la topologia de Zariski en $\operatorname{Spec}_A(M)$, existen subconjuntos no vacíos $\Lambda_{\mathcal{U}}$ y $\Lambda_{\mathcal{V}}$ de Λ tales que $\mathcal{U} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{U}}} \omega_A(a_\lambda)$ y $\mathcal{V} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_{\mathcal{V}}} \omega_A(a_\lambda)$. Por la compacidad de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, existen $m, n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1^{\mathcal{U}}, \ldots, \lambda_m^{\mathcal{U}}, \lambda_1^{\mathcal{V}}, \ldots, \lambda_n^{\mathcal{V}} \in \Lambda$ tales que

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i=1}^{m} \omega_A\big(a_{\lambda_i^{\mathcal{U}}}\big) \quad \text{y} \quad \mathcal{V} = \bigcup_{j=1}^{n} \omega_A\big(a_{\lambda_j^{\mathcal{V}}}\big).$$

Luego, por el Corolario 4.2,

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}\Big(\omega_A\big(a_{\lambda_i^{\mathcal{U}}}\big) \cap \omega_A\big(a_{\lambda_j^{\mathcal{V}}}\big)\Big) = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} \omega_A\big(a_{\lambda_i^{\mathcal{U}}} a_{\lambda_j^{\mathcal{V}}}\big),$$

y esto finaliza la demostración. □

Teorema 4.7 ([10, Teorema 4.6])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si la aplicación natural $\Psi : \operatorname{Spec}_A(M) \longrightarrow \operatorname{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ es sobreyectiva, entonces $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ es un subconjunto compacto, para todos los subconjuntos abiertos compactos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de $\operatorname{Spec}_A(M)$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos subconjuntos abiertos compactos de

$\mathrm{Spec}_A(M)$. Sea $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ un recubrimiento abierto de $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$, es decir,

$$\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}W_\lambda.$$

Por outro lado, por el Lema 4.5, existen $n\in\mathbb{N}$ y $a_1,\ldots,a_n\in A$ tales que

$$\mathcal{U}\cap\mathcal{V}=\bigcup_{i=1}^{n}\omega_A(a_i). \tag{4.4.3 (1)}$$

Por lo tanto,

$$\omega_A(a_i)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}W_\lambda,$$

para todo $i\in\mathbb{N}$ tal que $1\leq i\leq n$. Como Ψ es sobreyectiva, por el Teorema 4.6, cada $\omega_A(a_i)$ es un subconjunto compacto. Entonces, por el Lema 1.3, existen $n_i\in\mathbb{N}$ y $\lambda_1^i,\ldots,\lambda_{n_i}^i\in\Lambda$ tales que

$$\omega_A(a_i)\subset\bigcup_{k_i=1}^{n_i}W_{\lambda_{k_i}^i}. \tag{4.4.3 (2)}$$

Luego, de (4.4.3 (1)) y (4.4.3 (2)), se tiene que

$$\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k_i=1}^{n_i}W_{\lambda_{k_i}^i}.$$

Esto muestra que $\left\{W_{\lambda_{k_i}^i}\right\}_{k_i=1,i=1}^{n_i,n}$ es un subrecubrimiento finito de $\{W_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Consecuentemente, por el Lema 1.3, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ es un subconjunto compacto. □

El siguiente resultado relaciona la conexidad entre los espacios $\mathrm{Spec}_A(M)$ y $\mathrm{Spec}\big(A/\mathrm{Ann}_A(M)\big)$, donde M es un A-módulo.

Teorema 4.8 ([10, Corolario 3.8])**.** *Sean A un anillo y M um A-módulo. Si la aplicación natural $\Psi:\mathrm{Spec}_A(M)\longrightarrow\mathrm{Spec}\big(A/\mathrm{Ann}_A(M)\big)$ es sobreyectiva, entonces $\mathrm{Spec}_A(M)$ es conexo si, y solamente si, $\mathrm{Spec}\big(A/\mathrm{Ann}_A(M)\big)$ es conexo.*

Demostración. Supóngase inicialmente que $\mathrm{Spec}_A(M)$ es conexo. Como Ψ es sobreyectiva, $\Psi(\mathrm{Spec}_A(M))=\mathrm{Spec}\big(A/\mathrm{Ann}_A(M)\big)$. Entretanto, por el Teorema 4.2, Ψ es continua. Luego, por el Teorema 1.18, $\mathrm{Spec}\big(A/\mathrm{Ann}_A(M)\big)$ es conexo.

Reciprocamente, supóngase que $\mathrm{Spec}\big(A/\mathrm{Ann}_A(M)\big)$ es conexo. Procediendo por el absurdo, supóngase que $\mathrm{Spec}_A(M)$ es disconexo. Entonces, por la Proposición 1.29, existe un subconjunto abierto y cerrado Y en $\mathrm{Spec}_A(M)$ diferente de $\varnothing$ y $\mathrm{Spec}_A(M)$. Como Ψ es sobreyectiva, por el Teorema 4.3, $\Psi(Y)$ es un subconjunto abierto y cerrado en $\mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$. Ahora, siendo $Y \neq \varnothing$, sigue que $\Psi(Y) \neq \varnothing$. Para completar la prueba, basta demostrar que $\Psi(Y) \neq \mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$, de modo que $\mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ es disconexo, contradiciendo la condición suficiente. En efecto, siendo Y abierto, $Y = \omega_A(N)$, para algún submódulo N de M. Luego, utilizando nuevamente el hecho que Ψ es sobreyectiva, por el ítem (3) de la Proposición 4.7, se tiene que $\Psi(Y) = \omega\big(\overline{(N :_A M)}\big)$. Por lo tanto, si $\Psi(Y) = \mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$, entonces $V\big(\overline{(N :_A M)}\big) = \varnothing$; de modo que $\overline{(N :_A M)} = A/\operatorname{Ann}_A(M)$ (por el ítem (3) de la Proposición 2.1), es decir, $(N :_A M) = A$. Así, por el ítem (3) de la Proposición 1.18, $N = M$. En consecuencia, por (4.2.1), $Y = \omega_A(M) = \mathrm{Spec}_A(M)$, lo cual es imposible ya que Y es un subconjunto propio de $\mathrm{Spec}_A(M)$. Por lo tanto, $\Psi(Y)$ es un subconjunto propio de $\mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$, y esto finaliza la demostración. $\square$

Los siguientes tres resultados fueron realizados conjuntamente entre M. Santiago y el autor.

Lema 4.6. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Para todo $a \in A$,*

$$\omega_A(a) = \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}_A(M) :\ a \notin (\mathfrak{P} :_A M)\}.$$

Demostración. Sea $a \in A$ y $\omega_A := \{\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}_A(M) :\ a \notin (\mathfrak{P} :_A M)\}$. Como $\omega_A(a) = \varnothing$ si, y solamente si, $\mathrm{Spec}_A(M) = V_A(aM)$, por el ítem (17) de la Proposición 1.18, se tiene que $\omega_A(a) = \varnothing$ si, y solamente si, $\omega_A = \varnothing$.

Supóngase ahora que $\omega_A(a) \neq \varnothing$. Dado $\mathfrak{P} \in \omega_A(a)$, se tiene que $\mathfrak{P} \notin V_A(aM)$, es decir, $(aM :_A M) \not\subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Luego, por el ítem (17) de la Proposición 1.18, $a \notin (\mathfrak{P} :_A M)$, lo cual implica que $\mathfrak{P} \in \omega_A$. Esto muestra que

$$\omega_A(a) \subset \omega_A. \tag{4.4.4 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $\mathfrak{P} \in \omega_A$. Entonces, $a \notin (\mathfrak{P} :_A M)$. Luego, utilizando nuevamente el ítem (17) de la Proposición 1.18, se tiene que $(aM :_A M) \not\subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Esto muestra que $\mathfrak{P} \notin V_A(aM)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{P} \in \omega_A(a)$. Esto muestra que

$$\omega_A \subset \omega_A(a). \tag{4.4.4 (2)}$$

Por lo tanto, de (4.4.4 (1)) y (4.4.4 (2)), $\omega_A(a) = \omega_A$. $\square$

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.13.

Teorema 4.9. *Sea A un anillo. Si M es un A-módulo local, entonces* $\mathrm{Spec}_A(M)$ *es conexo por caminos.*

Demostración. Sea $\mathfrak{M}$ el único submódulo maximal de M. Se probará que para cualquier punto $\mathfrak{P}$ en $\mathrm{Spec}_A(M)$, existe un camino conectando $\mathfrak{P}$ con $\mathfrak{M}$. En efecto, dado un submódulo primo $\mathfrak{P}$ en M, considérese $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathrm{Spec}_A(M)$, definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \mathfrak{P}, & \text{si } 0 \leq t < 1; \\ \mathfrak{M}, & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

A continuación se mostrará que γ es continua. De hecho, dado $a \in A$, se probará que $\gamma^{-1}(\omega_A(a))$ es un conjunto abierto. Para esto, serán considerados los siguientes casos: $a \notin (\mathfrak{M} :_A M)$ y $a \in (\mathfrak{M} :_A M)$.

Primero, supóngase que $a \notin (\mathfrak{M} :_A M)$. Entonces, $\gamma(1) = \mathfrak{M} \in \omega_A(a)$. Como M es un A-módulo local, se tiene que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M}$. Luego, $(\mathfrak{P} :_A M) \subset (\mathfrak{M} :_A M)$ y, por lo tanto, $a \notin (\mathfrak{P} :_A M)$. Así, $\gamma(t) = \mathfrak{P} \in \omega_A(a)$, para todo número real t tal que $0 \leq t < 1$. Esto implica que $t \in \gamma^{-1}(\omega_A(a))$, para todo t en $[0,1]$. En consecuencia, $\gamma^{-1}(\omega_A(a)) = [0,1]$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$.

Ahora, supóngase que $a \in (\mathfrak{M} :_A M)$. Entonces, $\gamma(1) = \mathfrak{M} \notin \omega_A(a)$ y, por lo tanto, $1 \notin \gamma^{-1}(\omega_A(a))$. Para finalizar la demostración, se considerarán los siguientes subcasos: $a \in (\mathfrak{P} :_A M)$ y $a \notin (\mathfrak{P} :_A M)$. Si $a \in (\mathfrak{P} :_A M)$, entonces $\gamma(t) = \mathfrak{P} \notin \omega_A(a)$, para todo número real t tal que $0 \leq t < 1$. Esto implica que $t \notin \gamma^{-1}(\omega_A(a))$, para todo t en $[0,1)$. En consecuencia, $\gamma^{-1}(\omega_A(a)) = \varnothing$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$. En el otro caso, si $a \notin (\mathfrak{P} :_A M)$, entonces $\gamma(t) = \mathfrak{P} \in \omega_A(a)$, para todo número real t tal que $0 \leq t < 1$. Esto implica que $t \in \gamma^{-1}(\omega_A(a))$, para todo t en $[0,1)$. En consecuencia, $\gamma^{-1}(\omega_A(a)) = [0,1)$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$.

Por lo tanto, por el Teorema 1.14, γ es continua. Así, por el Teorema 1.19, $\mathrm{Spec}_A(M)$ es conexo por caminos. $\square$

Así como en el caso de un módulo local, para un módulo primo, se tiene también que su espectro primo es conexo por caminos. Este resultado generaliza el Teorema 2.14. Para su demostración, se utilizará un artificio similar al de la prueba del Teorema 4.9.

Teorema 4.10. *Sea A un anillo. Si M es un A-módulo primo, entonces $\mathrm{Spec}_A(M)$ es conexo por caminos.*

Demostración. Como M es un módulo primo, $\langle 0_M \rangle_A$ es un submódulo primo de M. Se probará que para cualquier punto $\mathfrak{P}$ en $\mathrm{Spec}_A(M)$, existe un camino conectando $\mathfrak{P}$ con $\langle 0_M \rangle_A$. En efecto, dado un submódulo primo $\mathfrak{P}$ en M, considérese $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathrm{Spec}_A(M)$, definida por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \mathfrak{P}, & \text{si } t = 0; \\ \langle 0_M \rangle_A, & \text{si } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

A continuación se mostrará que γ es continua. De hecho, dado $a \in A$, se probará que $\gamma^{-1}(\omega_A(a))$ es un conjunto abierto. Para esto, serán considerados los siguientes casos: $a \in \mathrm{Ann}_A(M)$ y $a \notin \mathrm{Ann}_A(M)$.

Primero, supóngase que $a \in \mathrm{Ann}_A(M)$. Entonces, $a \in (\gamma(t) :_A M)$, para todo t en $[0,1]$. Luego, $\gamma(t) \notin \omega_A(a)$, para todo t en $[0,1]$. Esto implica que $t \notin \gamma^{-1}(\omega_A(a))$, para todo t en $[0,1]$. En consecuencia, $\gamma^{-1}(\omega_A(a)) = \varnothing$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$.

Ahora, supóngase que $a \notin \mathrm{Ann}_A(M)$. Entonces, $\gamma(t) = \langle 0_A \rangle \in \omega_A(a)$, para todo número real t tal que $0 < t \leq 1$. Luego, $(0,1] \subset \gamma^{-1}(\omega(a))$. Para finalizar la demostración, se considerarán los siguientes subcasos: $a \notin (\mathfrak{P} :_A M)$ y $a \in (\mathfrak{P} :_A M)$. Si $a \notin (\mathfrak{P} :_A M)$, entonces $\gamma(0) = \mathfrak{P} \in \omega_A(a)$. Esto implica que $0 \in \gamma^{-1}(\omega_A(a))$ y, por lo tanto, $\gamma^{-1}(\omega_A(a)) = [0,1]$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$. En el otro caso, si $a \in (\mathfrak{P} :_A M)$, entonces $\gamma(0) = \mathfrak{P} \notin \omega_A(a)$. Esto implica que $0 \notin \gamma^{-1}(\omega_A(a))$ y, por lo tanto, $\gamma^{-1}(\omega_A(a)) = (0,1]$, el cual es un conjunto abierto de $[0,1]$.

Consecuentemente, por el Teorema 1.14, γ es continua. Así, por el Teorema 1.19, $\mathrm{Spec}_A(M)$ es conexo por caminos. □

4.4.3 Subconjuntos cerrados irreducibles de $\mathrm{Spec}_A(M)$ y sus puntos genéricos

Sean A un anillo y M un A-módulo. Sea Y un subconjunto de $\mathrm{Spec}_A(M)$. Se denotará la intersección de todos los elementos en Y por $\mathfrak{F}_A(Y)$, es decir,

$$\mathfrak{F}_A(Y) = \bigcap_{\mathfrak{P} \in Y} \mathfrak{P}.$$

Por la Proposición 1.12, $\mathfrak{I}_A(Y)$ es un submódulo de M y $\mathfrak{I}_A(\varnothing) = M$.

Proposición 4.9 (Adaptado de [10, Proposición 5.1]). *Sean A un anillo y M un A-módulo. Un subconjunto Y de* $\text{Spec}_A(M)$*, satisface las siguientes propiedades*:

(1) $(\mathfrak{I}_A(Y) :_A M) = \bigcap_{\mathfrak{P}\in Y}(\mathfrak{P} :_A M)$;

(2) *si N es un submódulo de M tal que $Y \subset V_A(N)$, entonces* $(N :_A M) \subset (\mathfrak{I}_A(Y) :_A M)$;

(3) $(\mathfrak{I}_A(Y) :_A M) = \mathfrak{I}(\Phi(Y))$, *donde* $\Phi : \text{Spec}_A(M) \longrightarrow \text{Spec}(A)$ *es la aplicación natural*;

(4) $V_A(\mathfrak{I}_A(Y)) = \overline{Y}$;

(5) *Y es cerrado si, y solamente si,* $V_A(\mathfrak{I}_A(Y)) = Y$.

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Por el ítem (6) de la Proposición 1.18, se tiene que

$$(\mathfrak{I}_A(Y) :_A M) = \left(\bigcap_{\mathfrak{P}\in Y} \mathfrak{P} :_A M\right) = \bigcap_{\mathfrak{P}\in Y} (\mathfrak{P} :_A M).$$

Seguidamente, se probará el ítem (2). Dado $\mathfrak{P} \in Y$, se tiene que $\mathfrak{P} \in V_A(N)$ y, por lo tanto, $(N :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Puesto que $\mathfrak{P} \in Y$ es arbitrário, por el ítem (1), se obtiene que $(N :_A M) \subset (\mathfrak{I}_A(Y) :_A M)$.

Ahora, se probará el ítem (3). Se tiene que $\mathfrak{I}(\Phi(Y)) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\Phi(Y)} \mathfrak{p}$. Ahora, dado $\mathfrak{p} \in \Phi(Y)$, existe $\mathfrak{P} \in Y$ tal que $\mathfrak{p} = \Phi(\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P} :_A M)$. Entonces, por el ítem (1), $(\mathfrak{I}_A(Y) :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M) = \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p} \in \Phi(Y)$ es arbitrário, concluyese que

$$(\mathfrak{I}_A(Y) :_A M) \subset \mathfrak{I}(\Phi(Y)). \tag{4.4.5 (1)}$$

Para establecer la inclusión contraria, sea $\mathfrak{P} \in Y$. Entonces, $(\mathfrak{P} :_A M) = \Phi(\mathfrak{P}) \in \Phi(Y)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{I}(\Phi(Y)) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Como $\mathfrak{P} \in Y$ es arbitrário, por el ítem (1), concluyese que

$$\mathfrak{I}(\Phi(Y)) \subset (\mathfrak{I}_A(Y) :_A M). \tag{4.4.5 (2)}$$

Por lo tanto, de (4.4.5 (1)) y (4.4.5 (2)), $(\mathfrak{I}_A(Y) :_A M) = \mathfrak{I}(\Phi(Y))$.

A continuación, se probará el ítem (4). Supóngase inicialmente que $\mathfrak{P} \in V_A(\mathfrak{I}_A(Y))$. Entonces, $(\mathfrak{I}_A(Y) :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Sea ahora $\mathscr{P}$ la familia de todos los conjuntos cerrados que contienen a Y. Dado un elemento arbitrário $C \in \mathscr{P}$, se tiene que C es un conjunto cerrado y $Y \subset C$. Entonces, existe un submódulo N de M tal que $C = V_A(N)$ y $Y \subset V_A(N)$. Luego, por el ítem (2), $(N :_A M) \subset (\mathfrak{F}_A(Y) :_A M)$. Por lo tanto, $(N :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$, es decir, $\mathfrak{P} \in V_A(N) = C$. Esto muestra que $\mathfrak{P} \in C$, para todo $C \in \mathscr{P}$. De esta forma, $\mathfrak{P} \in \overline{Y}$. Por lo tanto, $V_A(\mathfrak{F}_A(Y)) \subset \overline{Y}$. Para establecer la inclusión contraria, sea $\mathfrak{P} \in Y$. Entonces, $\mathfrak{F}_A(Y) \subset \mathfrak{P}$. Luego, por el ítem (4) de la Proposición 1.18, $(\mathfrak{F}_A(Y) :_A M) \subset (\mathfrak{P} :_A M)$. Esto implica que, $\mathfrak{P} \in V_A(\mathfrak{F}_A(Y))$. Esto muestra que $Y \subset V_A(\mathfrak{F}_A(Y))$. Entretanto, como $V_A(\mathfrak{F}_A(Y))$ es cerrado, por el ítem (2) de la Proposición 1.23, concluyese que $\overline{Y} \subset V_A(\mathfrak{F}_A(Y))$. Consecuentemente, $V_A(\mathfrak{F}_A(Y)) = \overline{Y}$.

Finalmente, se probará el ítem (5). Supóngase inicialmente que Y es cerrado. Entonces, por el ítem (3) de la Proposición 1.23, $Y = \overline{Y}$. Luego, por el ítem (4), $V_A(\mathfrak{F}_A(Y)) = Y$. Recíprocamente, supóngase que $V_A(\mathfrak{F}_A(Y)) = Y$. Ahora, utilizando nuevamente el ítem (4), concluyese que $\overline{Y} = Y$. Entonces, por el ítem (3) de la Proposición 1.23, Y es cerrado. □

El siguiente resultado generaliza la Proposición 2.4.

Proposición 4.10 ([10, Proposición 5.2 (1) y (2)]). *Sean A un anillo y M un A-módulo. El cierre de un punto $\mathfrak{P} \in \text{Spec}_A(M)$, satisface las siguientes propiedades*:

(1) $\overline{\{\mathfrak{P}\}} = V_A(\mathfrak{P})$;

(2) *si* $\mathfrak{Q} \in \text{Spec}_A(M)$, *entonces* $\mathfrak{Q} \in \overline{\{\mathfrak{P}\}}$ *si, y solamente si,* $(\mathfrak{P} :_A M) \subset (\mathfrak{Q} :_A M)$.

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). Por el ítem (4) de la Proposición 4.9, se tiene que $V_A(\mathfrak{P}) = V_A(\mathfrak{F}_A(\{\mathfrak{P}\})) = \overline{\{\mathfrak{P}\}}$.

Ahora, se probará el ítem (2). Por el ítem (1), se tiene que $\overline{\{\mathfrak{P}\}} = V_A(\mathfrak{P})$. Por otro lado, para un submódulo primo $\mathfrak{Q}$ de M, se tiene que $\mathfrak{Q} \in V_A(\mathfrak{P})$ si, y solamente si, $(\mathfrak{P} :_A M) \subset (\mathfrak{Q} :_A M)$. Esto implica que $\mathfrak{Q} \in \overline{\{\mathfrak{P}\}}$ si, y solamente si, $(\mathfrak{P} :_A M) \subset (\mathfrak{Q} :_A M)$. □

El siguiente resultado generaliza la condición suficiente del Teorema 2.10.

Corolario 4.3. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M, entonces $V_A(\mathfrak{P})$ es irreducible.*

Demostración. Como $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo, por el ítem (1) de la Proposición 4.10, $V_A(\mathfrak{P}) = \overline{\{\mathfrak{P}\}}$. Ahora, por el Ejemplo 1.55 y por la Proposición 1.26, se tiene que $\overline{\{\mathfrak{P}\}}$ es irreducible, es decir, $V_A(\mathfrak{P})$ es irreducible. □

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.5.

Teorema 4.11 ([10, Proposición 1, fe de erratas]). *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}_A(M)$ y $\mathfrak{p} := (\mathfrak{P} :_A M)$, entonces el conjunto $\{\mathfrak{P}\}$ es cerrado si, y solamente si, $\mathfrak{p}$ es un elemento maximal de $\Phi(\mathrm{Spec}_A(M))$ y $\Phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{P}\}$, donde $\Phi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ es la aplicación natural.*

Demostración. Supóngase inicialmente que $\{\mathfrak{P}\}$ es cerrado. Se probará primero que $\mathfrak{p}$ es un elemento maximal de $\Phi(\mathrm{Spec}_A(M))$. Para ello, sea $\mathfrak{q} \in \Phi(\mathrm{Spec}_A(M))$ tal que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. Entonces, existe $\mathfrak{Q} \in \mathrm{Spec}_A(M)$ tal que $\mathfrak{q} = \Phi(\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q} :_A M)$. Luego, $(\mathfrak{P} :_A M) \subset (\mathfrak{Q} :_A M)$ y, por lo tanto, $\mathfrak{Q} \in V_A(\mathfrak{P})$. Entretanto, por el ítem (1) de la Proposición 4.10, $V_A(\mathfrak{P}) = \overline{\{\mathfrak{P}\}}$. Siendo el conjunto $\{\mathfrak{P}\}$ cerrado, por el ítem (3) de la Proposición 1.23, se tiene que $\overline{\{\mathfrak{P}\}} = \{\mathfrak{P}\}$. Entonces, $V_A(\mathfrak{P}) = \{\mathfrak{P}\}$. Esto implica que, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}$. Por lo tanto, $\mathfrak{q} = (\mathfrak{Q} :_A M) = (\mathfrak{P} :_A M) = \mathfrak{p}$. Esto muestra que $\mathfrak{p}$ es un elemento maximal de $\Phi(\mathrm{Spec}_A(M))$.

A continuación se mostrará que $\Phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{P}\}$. En efecto, $\Phi(\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P} :_A M) = \mathfrak{p}$. Ahora, si $\mathfrak{Q} \in \Phi^{-1}(\mathfrak{p})$, se tiene que $(\mathfrak{Q} :_A M) = \Phi(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{p} = (\mathfrak{P} :_A M)$. Entonces, $\mathfrak{Q} \in V_A(\mathfrak{P}) = \{\mathfrak{P}\}$ y, por lo tanto, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}$. Consecuentemente, $\Phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{P}\}$.

Finalmente, se procederá a mostrar la recíproca. Supóngase que $\mathfrak{p}$ es un elemento maximal de $\Phi(\mathrm{Spec}_A(M))$ y $\Phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{P}\}$. Se mostrará que $V_A(\mathfrak{P}) = \{\mathfrak{P}\}$. En efecto, es claro que $\{\mathfrak{P}\} \subset V_A(\mathfrak{P})$. Ahora, si $\mathfrak{Q} \in V_A(\mathfrak{P})$, entonces $\mathfrak{p} = (\mathfrak{P} :_A M) \subset (\mathfrak{Q} :_A M) = \Phi(\mathfrak{Q})$. Como $\mathfrak{p}$ es un elemento maximal de $\Phi(\mathrm{Spec}_A(M))$, concluyese que $\Phi(\mathfrak{Q}) = (\mathfrak{Q} :_A M) = \mathfrak{p}$. Esto implica que $\mathfrak{Q} \in \Phi^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{P}\}$ y, por lo tanto, $V_A(\mathfrak{P}) \subset \{\mathfrak{P}\}$. Así, $V_A(\mathfrak{P}) = \{\mathfrak{P}\}$. Luego, por el ítem (1) de la Proposición 4.10, $\{\mathfrak{P}\} = \overline{\{\mathfrak{P}\}}$. Consecuentemente, utilizando nuevamente el ítem (3) de la Proposición 1.23, $\{\mathfrak{P}\}$ es cerrado. □

Teorema 4.12 ([10, Proposición 5.4]). *Sean A un anillo y M un A-módulo. Sea Y es un subconjunto de $\mathrm{Spec}_A(M)$.*

(1) *Si $\mathfrak{I}_A(Y)$ es un submódulo primo de M, entonces Y es irreducible.*

(2) *Si Y es irreducible, entonces $(\mathfrak{I}_A(Y) :_A M)$ es un ideal primo de A.*

Demostración. Inicialmente, se probará el ítem (1). En efecto, si $\mathfrak{I}_A(Y)$ es un submódulo primo, por el Corolario 4.3, $V_A(\mathfrak{I}_A(Y))$ es irreducible. Entretanto, por el ítem (4) de la Proposición 4.9, $V_A(\mathfrak{I}_A(Y)) = \overline{Y}$. Luego, $\overline{Y}$ es irreducible. Por lo tanto, por la Proposición 1.26, Y es irreducible.

Ahora, se probará el ítem (2). De hecho, por la Proposición 4.5, se tiene que la aplicación natural $\Phi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ es continua. De esta forma, como Y es irreducible, por el Teorema 1.17, $\Phi(Y)$ es irreducible. Entonces, por el Teorema 2.9, $\mathfrak{F}(\Phi(Y))$ es un ideal primo de A. Por otro lado, por el ítem (3) de la Proposición 4.9, $\mathfrak{F}(\Phi(Y)) = (\mathfrak{F}_A(Y) :_A M)$, y esto finaliza la demostración. □

En la demostración del Teorema 4.12, se utilizó el Teorema 2.9, cuya generalización natural de este resultado sería: "Sean A un anillo y M um A-módulo. Si Y es un subconjunto de $\mathrm{Spec}_A(M)$, entonces Y es irreducible si, y solamente si, $\mathfrak{F}_A(Y)$ es un submódulo primo de M". Desafortunadamente, la condición necesaria de esta afirmación no es verdadera en general. En el siguiente ejemplo, se muestra un A-módulo M y un subconjunto irreducible Y de $\mathrm{Spec}_A(M)$ tal que $\mathfrak{F}_A(Y)$ no es un submódulo primo de M.

Ejemplo 4.8 ([10, Ejemplo 2])**.** Sea p un número primo positivo. Considérese el $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado fiel $M = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}$ (cf. ejemplos 1.38 y 1.40). El $\mathbb{Z}$-módulo M satisface las siguientes propiedades:

(i) $\langle([0], 0)\rangle_{\mathbb{Z}}$ no es un submódulo primo de M y $\big(\langle([0], 0)\rangle_{\mathbb{Z}} :_{\mathbb{Z}} M\big) = \langle 0 \rangle$;

(ii) $\mathfrak{P} := \mathbb{Z}_p \times \langle 0 \rangle$ es un submódulo primo de M y $(\mathfrak{P} :_{\mathbb{Z}} M) = \langle 0 \rangle$;

(iii) pM es un submódulo primo de M y $(pM :_{\mathbb{Z}} M) = \langle p \rangle$.

En efecto, por el Ejemplo 1.38, se tiene que $\big(\langle([0], 0)\rangle_{\mathbb{Z}} :_{\mathbb{Z}} M\big) = \langle 0 \rangle$. Ahora, como $p([1], 0) = ([0], 0) \in \langle([0], 0)\rangle_{\mathbb{Z}}$, $p \notin \big(\langle([0], 0)\rangle_{\mathbb{Z}} :_{\mathbb{Z}} M\big)$ y $([1], 0) \notin \langle([0], 0)\rangle_{\mathbb{Z}}$, concluyese que $\langle([0], 0)\rangle_{\mathbb{Z}}$ no es un submódulo primo de M, y esto prueba el ítem (i).

Para el ítem (ii), dado $a \in (\mathfrak{P} :_{\mathbb{Z}} M)$, se tiene que $aM \subset \mathfrak{P}$. En particular, $a([0], 1) \in \mathfrak{P}$. Luego, existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $([0], a) = ([x], 0)$ y, por lo tanto, $a = 0$. Esto muestra que $(\mathfrak{P} :_{\mathbb{Z}} M) = \langle 0 \rangle$. Sean ahora $n \in \mathbb{Z}$ y $([z], w) \in M$ tales que $n([z], w) \in \mathfrak{P}$ y $n \notin (\mathfrak{P} :_{\mathbb{Z}} M)$. Se probará que $([z], w) \in \mathfrak{P}$. De hecho, como $([nz], nw) \in \mathfrak{P}$, entonces $([nz], nw) = ([u], 0)$, para algún $u \in \mathbb{Z}$. Luego, $nw = 0$. Teniendo en vista que $n \neq 0$, concluyese que $w = 0$. Por lo tanto, $([z], w) = ([z], 0) \in \mathfrak{P}$. Esto muestra que $\mathfrak{P}$ es un submódulo primo de M.

Como M es un $\mathbb{Z}$-módulo fiel finitamente generado, por el Corolario 3.4, pM es un submódulo primo de M (ya que $\langle p \rangle$ es un ideal maximal de $\mathbb{Z}$). Además, siendo $pM = \langle [0] \rangle \times \langle p \rangle$, se tiene que $pM \neq M$. Luego, por el ítem (11) de la Proposición 1.18, $(pM :_{\mathbb{Z}} M) = \langle p \rangle$. Esto prueba el ítem (iii).

Ahora, por el ítem (ii), $V_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{P}) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{Z}}(M)$. Luego, por el Corolario 4.3, $Y := \mathrm{Spec}_{\mathbb{Z}}(M)$ es irreducible. Como $\mathfrak{P}$ y pM son submódulos primos de M (por los ítems (ii) y (iii)), se tiene que $\mathfrak{F}_A(Y) \subset \mathfrak{P} \cap pM = \langle ([0], 0) \rangle_{\mathbb{Z}}$ y, por lo tanto, $\mathfrak{F}_A(Y) = \langle ([0], 0) \rangle_{\mathbb{Z}}$, el cual no es un submódulo primo (por el ítem (i)).

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.10.

Teorema 4.13 ([10, Teorema 5.7])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si Y es un subconjunto de $\mathrm{Spec}_A(M)$ y la aplicación natural $\Psi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ es sobreyectiva, entonces Y es un subconjunto cerrado irreducible si, y solamente si, $Y = V_A(\mathfrak{P})$, para algún submódulo primo $\mathfrak{P}$ de M.*

Demostración. Supóngase inicialmente que Y es un subconjunto cerrado irreducible. Como Y es cerrado, por el ítem (5) de la Proposición 4.9, $V_A(\mathfrak{F}_A(Y)) = Y$. Ahora, siendo Y irreducible, por el ítem (2) del Teorema 4.12, $(\mathfrak{F}_A(Y) :_A M)$ es un ideal primo de A. Luego, por el Corolario 1.9, $\overline{(\mathfrak{F}_A(Y) :_A M)}$ es un ideal primo de $A/\operatorname{Ann}_A(M)$. Como Ψ es sobreyectiva, existe $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}_A(M)$ tal que $\overline{(\mathfrak{F}_A(Y) :_A M)} = \Psi(\mathfrak{P}) = \overline{(\mathfrak{P} :_A M)}$. Entonces, por el teorema de la correspondencia para anillos, $(\mathfrak{F}_A(Y) :_A M) = (\mathfrak{P} :_A M)$. Luego, por el ítem (3) de la Proposición 4.1, $V_A(\mathfrak{F}_A(Y)) = V_A(\mathfrak{P})$, es decir, $Y = V_A(\mathfrak{P})$.

Recíprocamente, supóngase que existe un submódulo primo $\mathfrak{P}$ de M tal que $Y = V_A(\mathfrak{P})$. En particular, Y es un conjunto cerrado. También, por el Corolario 4.3, se tiene que $V_A(\mathfrak{P})$ es irreducible, y esto finaliza la demostración. □

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.11, salvo unicidad.

Teorema 4.14. *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si la aplicación natural $\Psi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ es sobreyectiva, entonces todo subconjunto cerrado irreducible de $\mathrm{Spec}_A(M)$ tiene un punto genérico.*

Demostración. Sea Y un subconjunto cerrado irreducible de $\mathrm{Spec}_A(M)$. Como Ψ es sobreyectiva, por el Teorema 4.13, existe un submódulo primo $\mathfrak{P}$ de M tal que $Y = V_A(\mathfrak{P})$. Luego, por el ítem (1) de la Proposición 4.10, $Y = \overline{\{\mathfrak{P}\}}$, es decir, $\mathfrak{P}$ es un punto genérico de Y. □

4.4.4 $\operatorname{Spec}_A(M)$ como un espacio espectral

Para cualquier anillo A, $\operatorname{Spec}(A)$ es siempre un espacio T_0 (cf. Teorema 2.6). Sin embargo, para un A-módulo M, no siempre es verdad que $\operatorname{Spec}_A(M)$ sea un espacio T_0. De hecho, si M es un A-módulo tal que $\operatorname{Spec}_A(M) = \{\mathfrak{P}\}$, entonces la topología de Zariski en $\operatorname{Spec}_A(M)$ es la topología trivial (cf. Ejemplo 4.5). Para tal módulo M, $\operatorname{Spec}_A(M)$ es un espacio T_0 (cf. Ejemplo 1.51). Por otro lado, si M es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces $\operatorname{Spec}_A(M)$ es un espacio T_0 si, y solamente si, $\dim_{\mathbb{K}} M \leq 1$. En efecto, por el Ejemplo 3.6, se tiene que $\dim_{\mathbb{K}} M \leq 1$ si, y solamente si, $|\operatorname{Spec}_A(M)| \leq 1$. Ahora, el resultado sigue del hecho que la topología de Zariski en $\operatorname{Spec}_A(M)$ es la topología trivial (cf. Ejemplo 4.6) y del Ejemplo 1.52. Por lo tanto, a diferencia del caso de $\operatorname{Spec}(A)$, $\operatorname{Spec}_A(M)$ no es necesariamente un espacio T_0, para cada módulo M. Esta es una de las diferencias más significativas entre estos dos espacios topológicos.

Teorema 4.15 ([10, Teorema 6.1])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) $\operatorname{Spec}_A(M)$ *es un espacio* T_0;

(2) *si* $\mathfrak{P}$ *y* $\mathfrak{Q}$ *son puntos de* $\operatorname{Spec}_A(M)$ *tales que* $V_A(\mathfrak{P}) = V_A(\mathfrak{Q})$, *entonces* $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$;

(3) *para todo* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$, $\left|\Phi^{-1}(\mathfrak{p})\right| \leq 1$, *donde* $\Phi : \operatorname{Spec}_A(M) \longrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ *es la aplicación natural*;

(4) *la aplicación natural* $\Psi : \operatorname{Spec}_A(M) \longrightarrow \operatorname{Spec}\big(A/\operatorname{Ann}_A(M)\big)$ *es inyectiva.*

Demostración. Se probará que (1) implica (2), (2) implica (3), (3) implica (4) y (4) implica (1). Inicialmente, se probará que (1) implica (2). En efecto, supóngase que $\operatorname{Spec}_A(M)$ es un espacio T_0 y sean $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ puntos de $\operatorname{Spec}_A(M)$ tales que $V_A(\mathfrak{P}) = V_A(\mathfrak{Q})$. Entonces, por el ítem (1) de la Proposición 4.10, $\overline{\{\mathfrak{P}\}} = \overline{\{\mathfrak{Q}\}}$. Luego, como $\operatorname{Spec}_A(M)$ es un espacio T_0, por la Proposición 1.24, $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$.

Ahora se probará que (2) implica (3) por contraposición. De hecho, supóngase que exista un punto $\mathfrak{p}$ en $\operatorname{Spec}(A)$ tal que $\left|\Phi^{-1}(\mathfrak{p})\right| > 1$. Entonces, existen $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ en $\operatorname{Spec}_A(M)$ tales que $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{Q}$, $\Phi(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}$ y $\Phi(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{p}$. Luego, $(\mathfrak{P} :_A M) = (\mathfrak{Q} :_A M)$. Por lo tanto, por el ítem (3) de la Proposición 4.1, $V_A(\mathfrak{P}) = V_A(\mathfrak{Q})$.

A continuación, se probará que (3) implica (4). Supóngase que

$\left|\,\Phi^{-1}(\mathfrak{p})\,\right| \leq 1$, para todo $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$. Sean ahora $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ dos puntos en $\mathrm{Spec}_A(M)$ tales que $\Psi(\mathfrak{P}) = \Psi(\mathfrak{Q})$. Entonces, $\overline{(\mathfrak{P} :_A M)} = \overline{(\mathfrak{Q} :_A M)}$. Luego, por el teorema de la correspondencia para anillos, $(\mathfrak{P} :_A M) = (\mathfrak{Q} :_A M)$. En consecuencia, $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ pertenecen a $\Phi^{-1}(\mathfrak{q})$, donde $\mathfrak{q} := (\mathfrak{P} :_A M)$. Por lo tanto, por la hipótesis, $\left|\,\Phi^{-1}(\mathfrak{q})\,\right| = 1$, y esto implica que $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$.

Finalmente, se demostrará que (4) implica (1). En efecto, supóngase que Ψ es inyectiva y sean $\mathfrak{P}$ y $\mathfrak{Q}$ dos puntos de $\mathrm{Spec}_A(M)$ tales que $\overline{\{\mathfrak{P}\}} = \overline{\{\mathfrak{Q}\}}$. Entonces, por el ítem (1) de la Proposición 4.10, $V_A(\mathfrak{P}) = V_A(\mathfrak{Q})$. Luego, por el ítem (4) de la Proposición 4.1, $(\mathfrak{P} :_A M) = (\mathfrak{Q} :_A M)$. En consecuencia, $\Psi(\mathfrak{P}) = \overline{(\mathfrak{P} :_A M)} = \overline{(\mathfrak{Q} :_A M)} = \Psi(\mathfrak{Q})$ y, siendo Ψ inyectiva, concluyese que $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$. Por lo tanto, por la Proposición 1.24, $\mathrm{Spec}_A(M)$ es un espacio T_0. $\square$

A diferencia del Teorema 4.14, cuando el espectro primo de un módulo es un espacio T_0, se obtiene una generalización del Teorema 2.11.

Corolario 4.4 ([10, pág. 428])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si $\mathrm{Spec}_A(M)$ es un espacio T_0 y la aplicación natural $\Psi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}\left(A/\operatorname{Ann}_A(M)\right)$ es sobreyectiva, entonces todo subconjunto cerrado irreducible de $\mathrm{Spec}_A(M)$ tiene un único punto genérico.*

Demostración. Sea Y un subconjunto cerrado irreducible de $\mathrm{Spec}_A(M)$. Como Ψ es sobreyectiva, por el Teorema 4.14, existe un submódulo primo $\mathfrak{P}$ de M tal que $Y = \overline{\{\mathfrak{P}\}}$. Ahora, para demostrar la unicidad, sea $\mathfrak{Q}$ un submódulo primo de M tal que $Y = \overline{\{\mathfrak{Q}\}}$. Entonces, $\overline{\{\mathfrak{P}\}} = \overline{\{\mathfrak{Q}\}}$. Como $\mathrm{Spec}_A(M)$ es un espacio T_0, por la Proposición 1.24, $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}$. $\square$

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.7.

Teorema 4.16 ([10, Proposición 2, fe de erratas])**.** *Sean A un anillo y M un A-módulo. El espacio $\mathrm{Spec}_A(M)$ es T_1 si, y solamente si, $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un elemento maximal de $\Phi(\mathrm{Spec}_A(M))$ y $\Phi^{-1}((\mathfrak{P} :_A M)) = \{\mathfrak{P}\}$, para todo $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}_A(M)$, donde $\Phi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ es la aplicación natural.*

Demostración. Supóngase inicialmente que $\mathrm{Spec}_A(M)$ es un espacio T_1 y sea $\mathfrak{P}$ un punto de $\mathrm{Spec}_A(M)$. Entonces, por la Proposición 1.25, $\{\mathfrak{P}\}$ es un conjunto cerrado. Luego, por el Teorema 4.11, $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un elemento maximal de $\Phi(\mathrm{Spec}_A(M))$ y $\Phi^{-1}((\mathfrak{P} :_A M)) = \{\mathfrak{P}\}$.

Reciprocamente, supóngase que $(\mathfrak{P} :_A M)$ es un elemento maximal de $\Phi(\mathrm{Spec}_A(M))$ y $\Phi^{-1}((\mathfrak{P} :_A M)) = \{\mathfrak{P}\}$, para todo punto $\mathfrak{P}$ de $\mathrm{Spec}_A(M)$.

Entonces, por el Teorema 4.11, $\{\mathfrak{P}\}$ es un conjunto cerrado, para todo punto $\mathfrak{P}$ de $\mathrm{Spec}_A(M)$. Luego, por la Proposición 1.25, $\mathrm{Spec}_A(M)$ es un espacio T_1. $\square$

Sea X un espacio topológico. Se dice que X es un *espacio espectral*, si existe un anillo A tal que los espacios X y $\mathrm{Spec}(A)$ sean homeomorfos.

Teorema 4.17 (Adaptado de [10, Teorema 6.5]). *Sean A un anillo y M un A-módulo. Si la aplicación natural $\Psi : \mathrm{Spec}_A(M) \longrightarrow \mathrm{Spec}\left(A/\operatorname{Ann}_A(M)\right)$ es sobreyectiva, las siguientes condiciones son equivalentes*:

(1) $\mathrm{Spec}_A(M)$ *es un espacio espectral*;

(2) $\mathrm{Spec}_A(M)$ *es un espacio* T_0;

(3) Ψ *es inyectiva*;

(4) Ψ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Se probará que (1) implica (2), (2) implica (3), (3) implica (4) y (4) implica (1). Inicialmente, se probará que (1) implica (2). En efecto, supóngase que $\mathrm{Spec}_A(M)$ es un espacio espectral. Entonces, existe un anillo A tal que los espacios X y $\mathrm{Spec}(A)$ sean homeomorfos. Como $\mathrm{Spec}(A)$ es un espacio T_0 (cf. Teorema 2.6), sigue que $\mathrm{Spec}_A(M)$ es un espacio T_0.

Ahora se probará que (2) implica (3). De hecho, si $\mathrm{Spec}_A(M)$ es un espacio T_0, por el Teorema 4.15, Ψ es inyectiva.

A continuación, se probará que (3) implica (4). Si la aplicación natural Ψ es inyectiva, entonces Ψ es biyectiva. Luego, por el Corolario 4.1, Ψ es un homeomorfismo.

Finalmente, se demostrará que (4) implica (1). En efecto, siendo Ψ un homeomorfismo y $\mathrm{Spec}\left(A/\operatorname{Ann}_A(M)\right)$ un espacio T_0 (cf. Teorema 2.6), concluyese que $\mathrm{Spec}_A(M)$ es un espacio T_0. $\square$

Bibliografía

[1] M. F. Atiyah y I. Macdonald, "Introduction to commutative algebra", Longman Higher Education, New York, 1969.

[2] M. Behboodi y M. J. Noori, *Zariski-like topology on the classical prime spectrum of a module*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, vol. **35**, n.º 1 (2009), págs. 253–269.

[3] Bernard R. McDonald, "Linear algebra over commutative rings", Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, vol. **87**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1984.

[4] N. Bourbaki, "Algebra", Chapter 8, Elements of Mathematics, Springer, 2012.

[5] N. Bourbaki, "Commutative Algebra", Chapter 1-7, Elements of Mathematics, Springer, 1998.

[6] Henri Bourlès, "Fundamentals of Advanced Mathematics 1: Categories, Algebraic Structures, Linear and Homological Algebra", ISTE Press-Elsevier, 2017.

[7] Janko Bračič, *The prime spectrum of a module*, Functional analysis IX - Proceedings of the Postgraduate School and Conference Held at the Inter-University Centre, Dubrovnik, Croatia, 15-23 June, 2005. University of Aarhus, 2007, págs. 32–38.

[8] Chin-Pi Lu, *Prime submodules of modules*, Commentarii mathematici Universitatis Sancti Pauli, vol. **33**, n.º 1 (1984), págs. 61–69.

[9] Chin-Pi Lu, *Spectra of modules*, Communications in Algebra, vol. **23**, n.º 10 (1995), págs. 3741–3752.

[10] Chin-Pi Lu, *The Zariski topology on the prime spectrum of a module*, Houston Journal of Mathematics, vol. **25**, n.º 3 (1999), págs. 417–432. Erratum: February 10, 2009, 2 págs.

[11] John Dauns, *Prime modules*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. **298** (1978), págs. 156–181.

[12] James Dugundji, "Topology", Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics, Allyn and Bacon, Inc., Twelfth printing, 1978.

[13] T. Duraivel, *Topology on spectrum of modules*, Journal of the Ramanujan Mathematical Society, vol. **9**, n.º 1 (1994), págs. 25–34.

[14] Ryszard Engelking, General topology", Sigma series in pure mathematics; vol. 6, Heldermann Verlag, 1989.

[15] William Fulton, "Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry", Advanced Book Classics, Addison-Wesley Longman Publishing Company, 2.ª edición, 1989.

[16] Michael C. Gemignani, "Elementary topology", Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, 2.ª edición, 1972.

[17] J. Jenkins y P. F. Smith, *On the prime radical of a module over a commutative ring*, Communications in Algebra, vol. **20** n.º 12 (l992), págs. 3593–3602.

[18] Irving Kaplansky, "Commutative rings", University of Chicago Press, Chicago, revised edition, 1974.

[19] R. L. McCasland, M. E. Moore y P. F. Smith, *On the spectrum of a module over a commutative ring*, Communications in Algebra, vol. **25**, n.º 1 (1997), págs. 79–103.

[20] R. L. McCasland y M. E. Moore, *Prime submodules*, Communications in Algebra, vol. **20**, n.º 6 (1992), págs. 1803–1817.

[21] R. L. McCasland y P. F. Smith, *Prime submodules of noetherian modules*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, vol. **23**, n.º 3 (1993), págs. 1041–1062.

[22] David Mumford, "Oscar Zariski: 1899–1986", Biographical Memoirs, National Academy of Sciences, 2013.

[23] James R. Munkres, "Topology", Prentice Hall, Inc., 2.ª edición, 2000.

[24] R. Y. Sharp, "Steps in commutative algebra", London Mathematical Society Student Texts, vol. **51**, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[25] David Sharpe, "Rings and factorization", Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[26] George F. Simmons, "Introduction to topology and modern analysis", Robert E. Krieger Publishing Company, Reprint, 1983.

[27] Oscar Zariski, *The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions*, Bulletin American Mathematical Society, vol. **50**, n.º 10 (1944), págs. 683–691.

Índice analítico

p-módulo de Prüfer, 100

abiertos básicos, 60
anillo, 1
anillo cero, 2
anillo cociente, 6
anillo conmutativo con unidad, 4
anillo de los enteros módulo n, 10
anillo local, 18
anulador de un submódulo, 44

base de una topología, 60
binomio de Newton, 4

cierre de un conjunto, *véase* clausura de un conjunto
clausura de un conjunto, 59
conjunto abierto, 56
conjunto cerrado, 57
conjunto generador, 50
conjunto multiplicativamente cerrado, 20
cuerpo, 2

dominio de ideales principales, 10
dominio de integridad, 2

elemento idempotente, 88
elemento invertible, 5
elemento nilpotente, 25
espacio T_0, 67
espacio T_1, 68
espacio compacto, 63
espacio conexo, 71
espacio conexo por caminos, 73
espacio de Fréchet, *véase* espacio T_1
espacio de Kolmogorov, *véase* espacio T_0
espacio disconexo, 71
espacio espectral, 137
espacio hiperconexo, *véase* espacio irreducible
espacio irreducible, 69
espacio topológico, 55
espectro maximal de un anillo, 18
espectro maximal de un módulo, 54
espectro primo de un anillo, 21
espectro primo de un módulo, 97

función abierta, 62
función cerrada, 62
función contínua, 61

homeomorfismo, 62
homomorfismo de anillos, 3
homomorfismo de módulos, 28

ideal, 4
ideal cociente, 44
ideal generado por un conjunto, 7
ideal maximal, 16

ideal primo, 19
ideal principal, 10
ideal propio, 5
ideales triviales, 5
intersección de ideales, 7
intersección de submódulos, 32
isomomorfismo de anillos, 3
isomorfismo de módulos, 28

módulo, 26
módulo cociente, 30
módulo cíclico, 51
módulo fiel, 50
módulo finitamente generado, 50
módulo local, 55
módulo primo, 99
módulo simple, 50
módulo sin torsión, 50

nilradical de un anillo, 25
núcleo de un homomorfismo de anillos, 3
núcleo de un homomorfismo de módulos, 28

producto de ideales, 15
proyección canónica, 30
punto, 56
punto genérico, 88

radical de un ideal, 22
recubrimiento, 62
recubrimiento abierto, 63
recubrimiento abierto básico, 63

subanillo, 4
subconjunto compacto, 63
subconjunto conexo, 71
subconjunto irreducible, 69
subespacio topológico, 57
submódulo, 29
submódulo extendido, 38
submódulo generado por un conjunto, 33
submódulo maximal, 51
submódulo primo, 93
submódulo propio, 29
submódulos triviales, 29
subrecubrimiento, 63
subrecubrimiento finito, 63
suma de ideales, 12
suma de submódulos, 36

teorema de la correspondencia para anillos, 6
teorema de la correspondencia para módulos, 32
teorema fundamental de los homomorfismos para módulos, 31
teorema fundamental de los submódulos primos, 95
topología, 56
topología de Zariski en el espectro primo de un anillo, 79
topología de Zariski en el espectro primo de un módulo, 113
topología discreta, 56
topología euclidiana, 56
topología indiscreta, 56
topología induzida, 57
topología relativa, *véase* topología induzida
topología trivial, *véase* topología indiscreta
topología usual, *véase* topología

euclidiana

unidad, *véase* elemento invertible
unión de ideales, 11
unión de submódulos, 35

variedad de un ideal, 75
variedad de un submódulo, 108