Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Una demostración elemental del teorema de punto fijo de Brouwer en R^n

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Joel Macario HUAMÁN NÚÑEZ

ASESOR

Mg. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2023

Referencia bibliográfica

Huamán, J. (2023). *Una demostración elemental del teorema de punto fijo de Brouwer en* R^n. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Joel Macario Huamán Núñez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	45763195
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0003-1009-1671
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Willy David BARAHONA MARTÍNEZ
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9177-1561
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09197486
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional

Grupo de investigación	EDOACBI
Agencia de financiamiento	Ninguna.
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: -12.05611582267559 Longitud: -77.08468053573509
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Mayo 2023 – octubre 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:45 horas del viernes 03 de noviembre del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023): Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (PRESIDENTE), Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci (MIEMBRO) y el Mg. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**UNA DEMOSTRACIÓN ELEMENTAL DEL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BROUWER EN R^n**", presentado por el señor **Bachiller JOEL MACARIO HUAMÁN NÚÑEZ**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación ....sobresaliente............., con un calificativo promedio de ...dieciocho (18)

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller JOEL MACARIO HUAMÁN NÚÑEZ**, en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 11:30 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
PRESIDENTE

Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
MIEMBRO

Mg. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO ASESOR

Yo Willy David, Barahona Martínez en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N° 001585-2023-D-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es “Una demostración elemental del teorema de punto de fijo de Brouwer en R^n“ presentado por el bachiller Joel Macario Huamán Núñez para optar el título de Licenciado en Matemática. CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 17% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorioinstitucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título de Licenciado en Matemática.

DNI Nº. 10078450.

Mg. Willy David, BARAHONA MARTÍNEZ

DEDICATORIA

Mi tesis se la dedico a mis padres Eulogia y Donato también a mis hermanos Alfredo, Roy y David, muy apesar de todas las adversidades siempre estuvierón prensente cuando más los necesite.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera empezar dedicando unas palabras a mi madre Eulogia en quechua: “sunquyki hinata manan kanchu” y también a mi hermano David “hatun wawqiy, tukuy kawsay-niypi pusawaqniy.”

A mi asesor, el Magister Willy David Barahona Martínez por haberme dedicado su tiempo y orientación para culminar con éxito mi tesis.

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por haberme dado la oportunidad de ser parte de ella y a los docentes por la formación académica y profesional.

RESUMEN

Una demostración elemental del teorema del punto fijo de Brouwer en $\mathbb{R}^n$

Joel Macario, Huamán Núñez

Octubre - 2023

Asesor : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Título obtenido : Licenciado en Matemática.

En el presente trabajo de tesis presentamos una demostración sencilla y detallada en el espacio $\mathbb{R}^n$ del teorema de punto fijo de Brouwer, cuyo enunciado es el siguiente:

Sean $n \in \mathbb{N}$ y g una aplicación continua de $[0, 1]^n$ en $[0, 1]^n$. Entonces existe $z \in [0, 1]^n$ tal que $g(z) = z$.

Para lograr nuestro objetivo usaremos el teorema de Bolzano-Weierstrass asociado a un teorema de etiquetado, siguiendo las ideas desarrolladas en [3].

Palabras claves:

Teorema del etiquetado, Teorema de Bolzano-Weierstrass, Teorema del punto fijo de Brouwer.

ABSTRACT

An elementary proof of Brouwer's fixed point theorem in $\mathbb{R}^n$

Joel Macario, Huamán Núñez

October - 2023

Adviser : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Obtained : Graduate in Mathematics.

In this thesis work we present a simple and detailed demonstration in the space $\mathbb{R}^n$ of Brouwer's fixed point theorem, whose statement is as follows:

Let $n \in \mathbb{N}$ and g be a continuous map of then there exists $z \in [0,1]^n$ such that $g(z) = z$.

To achieve our objective we will use the Bolzano-Weierstrass theorem associated with a labeling theorem, following the ideas developed in [3].

Keywords:

Labeling theorem, Bolzano-Weierstrass theorem, Brouwer's fixed point theorem.

ÍNDICE GENERAL

Introducción

Hadamard [1] y Brouwer [2] fueron los primeros que demostraron el teorema del punto fijo de Brouwer, posteriormente se presentaron una gran diversidad de demostraciones del teorema, resaltando la forma geométrica basada en el lema de Sperner [6], también Stuckless [7] y sus referencias bibliográficas, Kulpa [5] fue uno de los primeros matemáticos en presentar una demostración muy elemental, y Takeuchi y Suzuki [3][4] dieron una demostración, que es una versión de Kulpa. Franklin en [8] escribió: El enunciado del teorema de Brouwer es muy simple ¿ Por qué la demostración es tan dificil?

Utilizaremos estos resultados, como herramientas para lograr el objetivo general y de forma especial seguiremos la secuencia dada en Takeuchi y Suzuki [3]. La presentación didáctica y desarrollada de cada uno de los pasos dados serán de gran ayuda a los estudiantes de matemáticas y ciencias básicas y, a su vez a muchos investigadores les permitirá profundizar el presente estudio.

La historia del teorema del punto fijo de Brouwer, está estrechamente ligada a la historia del grado de Brouwer, es particularmente compleja y es un caso práctico que muestra el carácter (no lineal) de la evolución de las matemáticas. Tras describir y comentar la aportación fundamental de Brouwer, se muestra cómo ha sido anticipada de una forma u otra por Poincaré (con su teorema del valor intermedio de las n dimensiones), Hadamard (con su primera versión publicada del teorema) y Bohl (con su teorema de no retracción para un $n-$cubo). Luego se describen nuevas demostraciones posteriores del teorema del punto fijo, por Alexander, Birkhoff y Kellogg, y por Knaster, Kuratowski, Mazurliewicz, y sus extensiones de dimensión infinita, por Birkhoff y Kellogg, por Schauder y Tychonov.

Se analiza luego el papel del teorema del punto fijo de Brouwer en la teoría de juegos y economía, de la mano de von Neumann, Kakutani y Nash, y la aproximación numérica de los puntos fijos por Scarf, y por Kellogg, Li y Yorke. Un redescubrimiento del teorema del valor intermedio de Poincaré ha llevado, no sólo a la prueba de su equivalencia con el teorema del punto fijo de Brouwer por parte de Miranda, sino también a una larga y vivaz disputa entre Cinquini y Scorza-Dragoni por decidir si el teorema del punto fijo de Brouwer es o no, no es un teorema topológico. La formulación independiente del teorema del punto fijo de Brouwer en términos de desigualdades variacionales, debidas a Harmann-Stampacchia y Karamardian, y a la incesante búsqueda de una demostración elemental de un teorema cuyas aplicaciones son excepcionalmente diversas y numerosas [10].

El teorema del punto fijo de Brouwer es un resultado importante en la topología y la teoría de conjuntos que establece que, en un espacio topológico convexo y compacto, cualquier función continua que aplica el espacio en sí mismo tiene al menos un punto fijo, es decir, un punto en el espacio que se aplica en sí mismo bajo la función.

Demostraremos este teorema utilizando la idea de etiquetado y cadenas, consideremos un espacio topológico X que representa el conjunto de todas las etiquetas posibles en nuestro contexto. Supongamos que tenemos una función continua $f : X \to X$ que asigna una etiqueta a otra etiqueta; así la tarea se reduce a demostrar que f tiene al menos un punto fijo.

Utilizaremos el principio del "Teorema del Etiquetado" para demostrar que esta cadena tiene un punto fijo. El Teorema del Etiquetado establece que si tenemos una sucesión monótona creciente (o decreciente) de conjuntos cerrados y acotados en un espacio métrico completo, entonces la intersección de todos esos conjuntos no es vacía. Aplicando el Teorema del Etiquetado, sabemos que la intersección de esta sucesión de conjuntos no es vacía, lo que significa que existe al menos un punto que pertenece a todos estos conjuntos, esto demuestra que f tiene al menos un punto fijo, lo que es el resultado principal del Teorema del Punto Fijo de Brouwer.

1 Preliminares

1.1. Definiciones Previas

En el presente trabajo, consideramos las siguientes notaciones y definiciones:

Definición 1. ***(Números Naturales).*** *El conjunto de números naturales está denotado y determinado por*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

También, es llamado conjunto de los números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$.

Definición 2. ***(Números Enteros).*** *El conjunto de números enteros está denotado y determinado por*

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Observación 1. *Consideremos los siguientes conjuntos:*

a) *Números Enteros Positivos:* $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$

b) *Números Enteros no Negativos:* $\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

c) *Números Enteros Negativos:* $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$

Definición 3. ***(Números Racionales).*** *El conjunto de números racionales está denotado y determinado por*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : \, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Definición 4. ***(Números Irracionales).*** *El conjunto de números irracionales está denotado y determinado por*

$$\mathbb{I} = \left\{ r \neq \frac{a}{b} : \, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Definición 5. ***(Números Reales).*** *El conjunto de números reales está denotado y determinado por*

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \ \textit{donde} \ \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

Definición 6. ***(Cardinal de un conjunto).*** *Llamaremos cardinal de un conjunto, al número de elementos del conjunto.*

Para un conjunto arbitrario B, denotamos por $\sharp B = n(B) = Card(B)$ al número cardinal o número de elementos de B.

1.2. Espacio $n-$dimensional

Definición 7. ***(Espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$).***
Para $n \in \mathbb{N}$, el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ es definido como

$$\mathbb{R}^n = \Big\{ x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) : \, x_i \in \mathbb{R}. \ 1 \leq i \leq n. \Big\}$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$, x_i denota la $i-$ésima coordenada de x.

Definición 8. ***(Sucesión en $\mathbb{R}^n$).***

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una función $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada número natural m le asocia el vector $x(m) = x_m \in \mathbb{R}^n$ llamado $m-$ésimo término de la sucesión.

Las sucesiones serán denotadas por $\{x_1, x_2, ..., x_m, ..\}$ o simplemente por $(x_m) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definición 9. ***(Subsucesión en $\mathbb{R}^n$).***
Sea $(x_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ y $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función creciente. La composición $x \circ k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada número natural m le asocia el vector $(x \circ k)(m) = x(k(m)) = x_{k_m}$ es llamada subsucesión de (x_m).

Definición 10. ***(Convergencia de una sucesión en $\mathbb{R}^n$).***
Sea $(x_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión es convergente si y solo si existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x_m \longrightarrow z \quad si \quad m \longrightarrow +\infty$$

Definición 11. ***(Norma en $\mathbb{R}^n$).***
La norma de $x \in \mathbb{R}^n$, se denota por $\|x\|$ y es definida como:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$$

Definición 12. ***(Diámetro de un conjunto en*** $\mathbb{R}^n$***).***
Sea $J \subseteq \mathbb{R}^n$ *subconjunto acotado no vacío. El diámetro de* J *es definido como:*

$$diam(J) = sup\{\|x - y\| : x, y \in J\}$$

Teorema 1. ***(Bolzano-Weierstrass en*** $\mathbb{R}^n$***).***
Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ *posee una subsucesión convergente.*

El teorema de Bolzano-Weierstrass es un resultado fundamental referente a la convergencia en un espacio euclideo dimensionalmente finito $\mathbb{R}^n$.

Definición 13. ***(Conjunto Compacto en*** $\mathbb{R}^n$***).***
Decimos que $H \subseteq \mathbb{R}^n$ *es un conjunto compacto, si y solo si* H *es cerrado y acotado en* $\mathbb{R}^n$*.*

1.3. Etiquetado

Definimos $N(i, j)$ por:

$$N(i, j) = \Big\{k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \leq k \leq j\Big\}.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

donde $x_i \in \mathbb{R}$ y $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Definición 14. ***(Etiquetado).*** *Llamaremos etiquetado a la aplicación* l *del conjunto arbitrario* L *en* $N(0, n)$*.*

$$\begin{aligned} l : L &\longrightarrow N(0, n) \\ x &\mapsto l(x) = k, \ 0 \leq k \leq n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Además, $N(0, n) = \{0, 1, 2, ..., n\}$ y $l(L) = N(0, n)$.

Definición 15. ***(k-Completamente etiquetado).***
Sea l *un etiquedado un subconjunto* $B \subset L$ *es llamado* $k-$*completamente etiquetado si* $\sharp B = k + 1$ *y* $l(B) = N(0, k)$*.*

En esta sección vamos a fijar los naturales $n, m \in \mathbb{N}$.

Consideremos los puntos $e_1^*, e_2^*, ..., e_n^* \in \mathbb{R}^n$ definidos por:

$$e_1^* = \left(\frac{1}{m}, 0, ..., 0\right), e_2^* = \left(0, \frac{1}{m}, ..., 0\right), ..., e_n^* = \left(0, 0, ..., \frac{1}{m}\right) \; , m \neq 0$$

$$e_j^* = \frac{1}{m} e_j \;\; \forall j \in N(1, n)$$

Definimos los subconjuntos $L_0, L_1, ..., L_n$ de

$$[0,1]^n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \ldots, \times [0,1]\}}_{\text{“}n\text{” } factores}$$

por :

$$L_0 = \{0\} \tag{1.2}$$

luego,

$$L_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i^* : \alpha_i \in N(0, m) \right\} \text{para} \;\; k \in N(1, n). \tag{1.3}$$

Observación 2. *El valor de n en $N(1, n)$ no necesariamente esta ligado y fijado a la dimensión del espacio $\mathbb{R}^n$.*

Definición 16. ***(Etiquetado de Brouwer).***
Un etiquetado l de L_n a $N(0, n)$ es llamado etiquetado de Brouwer si satisface las dos condiciones siguientes:
(B1) Si $(x)_k = 0$ para algún $k \in N(1, n)$ entonces $l(x) \neq k$.
(B2) Si $(x)_k = 1$ para algún $k \in N(1, n)$ entonces $l(x) \geq k$.

Si $x \in L_k$ con $k \in N(0, n)$ entonces x es de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i^* = \left(\frac{\alpha_1}{m}, \frac{\alpha_2}{m}, ..., \frac{\alpha_k}{m}, 0, ..., 0\right)$$

como, $(x)_j = 0$ para $j = k+1, ..., n$ tenemos

$$l(x) \neq k+1, k+2, ..., n$$

es decir $l(x) \leq k$.

Notamos que

$$\alpha_k \in N(0,m) \Rightarrow 0 \leq \alpha_k \leq m$$

$$0 \leq \alpha_k \leq m \Rightarrow \frac{\alpha_k}{m} \leq 1$$

Definición 17. ***(k-cadenas).***

Un subconjunto B de L_k es llamado una k-cadena si existe $x_0, x_1, ..., x_k \in L_k$ y una biyección σ en $N(1,k)$ tal que $B = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$ y $x_j = x_0 + \sum_{i=1}^{j} e^*_{\sigma(i)}$ para $j \in N(1,k)$.

Notamos que para $j = k$, σ recorre todo $N(1,k) = 1, 2, ..., k$ entonces

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{k} e^*_{\sigma(i)} = x_0 + \sum_{i=1}^{k} e^*_1 \tag{1.4}$$

Como σ recorre $N(1,k)$ por lo que podemos ordenar la suma de $i = 1$ hasta $i = k$.
En

$$x_j = x_0 + \sum_{i=1}^{j} e^*_{\sigma(i)}$$

con $j \in N(1,k)$, tomamos la $i-$ésima coordenada

$$(x_j)_i = (x_0)_i + \sum_{r=1}^{j} (e^*_{\sigma(r)})_i$$

$\sigma(r) \in N(1,k)$, sumando tenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_j)_i = \sum_{i=1}^{n} (x_0)_i + \sum_{i=1}^{n} (\sum_{r=1}^{j} (e^*_{\sigma(r)})_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_j)_i = \sum_{i=1}^{n} (x_0)_i + \frac{j}{m} \tag{1.5}$$

Así, escribimos $B = \langle x_0, x_1, .., x_k \rangle$.

Notamos que B es una 0-cadena si y solo si $B = \langle 0 \rangle = \{0\}$.

2 Resultados previos

Aquí mostraremos los teoremas y propiedades que nos conducirán al objetivo.

2.1. Resultados importantes

Lema 1. *Sean L un conjunto arbitrario, $n \in \mathbb{N}$ y $k \in N(1,n)$, l es un etiquetado de L en $N(0,n)$ y B es un subconjunto de L con $\sharp B = k+1$ y $l(B) \subseteq N(0,k)$. Entonces se cumple lo siguiente:*
i) B contiene como máximo dos subconjuntos que están $(k-1)-$completamente etiquetados.
ii) B contiene exactamente un subconjunto que está $(k-1)-$completamente etiquetado si y solo si B es $k-$completamente etiquetado.

Demostración:
Veamos, lo siguiente:

i) Sea $C \subset B$ un subconjunto $(k-1)-$completamente etiquedado entonces $\sharp C = k$ y $l(C) = N(0,k-1)$ como $\sharp B = k+1$ podemos escribir $B = C \cup \{b\}$ con $b \notin C$.

Como $\sharp l(C) = \sharp N(0,k-1) = k = \sharp C$ entonces hay una correspondencia biunívoca entre los elementos de C y los elementos de $N(0,k-1)$, además tenemos que:

$$l(B) = l(C \cup \{b\}) = l(C) \cup \{l(b)\} = N(0,k-1) \cup \{l(b)\}$$

luego, $l(b) \in l(B)$.

Como $l(B) \subset N(0,k)$ tenemos que, $l(b) \in N(0,k) = N(0,k-1) \cup \{k\}$. Por lo tanto, $l(b) = k$ ó $l(b) \in N(0,k-1)$.

Si $l(b) = k$ tenemos que

$$l(B) = N(0, k-1) \cup \{l(b)\} = N(0, k-1) \cup \{k\} = N(0, k)$$

luego, $l(B) = N(0, k)$ y $\sharp B = k+1$ entonces B es $k-$completamente etiquetado, resultando que, C es el único subconjunto de B que es $(k-1)-$completamente etiquetado, caso contrario contradice la biyección entre B y $N(0, k)$.

Si $l(b) \in N(0, k-1)$ y, sea $j \in N(0, k-1) = l(C)$ tal que $l(b) = j$; como existe un único $a \in C$ tal que $l(a) = j$ entonces $l^{-1}(j) = \{a, b\}$.

Considerando el conjunto

$$C' = (C - \{a, b\}) \cup \{b\}$$

como $\sharp C' = k$ y $l(C') = N(0, k-1)$ entonces C' es $(k-1)-$completamente etiquetado. Por lo tanto, C y C' son los dos únicos subconjuntos de B que están $(k-1)-$completamente etiquetados. En este último caso los únicos subconjuntos completamente etiquetados son C y C'.

ii) Supongamos que B contiene un único subconjunto C que está bien etiquetado, como vimos en i), el subconjunto C es único si B es $k-$completamente etiquetado.

Recíprocamente, si B es $k-$completamente etiquetado, el único subconjunto de C que está $(k-1)-$completamente etiquetado es $C = B - \{l^{-1}(k)\}$.

■

Lema 2. *Existe una única* $0-$*cadena que está* $0-$*completamente etiquetada.*

Demostración:

Una $0-$cadena es de la forma $B = \langle 0 \rangle = \{0\}$ y como

$$l : L_0 \longrightarrow N(0, 0) = \{0\}$$

entonces $l(0) = 0$. Luego, tenemos que $l(B) = N(0, 0)$.

Por lo tanto, está $0-$completamente etiquetado. ■

Lema 3. *Sea C una $(k-1)-$cadena para algún $k \in N(1,n)$ entonces existe exactamente una $k-$cadena que incluye C.*

Demostración:

Sea $C = \langle x_0, x_1, ..., x_{k-1} \rangle$ una $(k-1)-$cadena es decir $x_0, x_1, ..., x_{k-1} \in L_{k-1}$, existe una biyección

$$\sigma : N(1, k-1) \longrightarrow N(1, k-1)$$

y

$$x_j = x_0 + \sum_{r=1}^{j} e^*_{\sigma(r)}$$

Definimos

$$\tilde{\sigma} : N(1, k) \longrightarrow N(1, k)$$

por $\tilde{\sigma}(r) = \sigma(r)$,si $r \neq k$ y $\tilde{\sigma}(k) = k$ entonces $\tilde{\sigma}$ es una biyección como

$$x_{k-1} = x_0 + \sum_{r=1}^{k-1} e^*_{\tilde{\sigma}(r)}$$

entonces

$$x_k = x_{k-1} + e^*_k = x_0 + \sum_{r=1}^{k} e^*_{\tilde{\sigma}(r)}.$$

Claramente $x_k \in L_k$.

Luego, definimos $C' = \langle x_0, x_1, ..., x_k \rangle$ es claro que C' es una $k-$cadena tal que $C \subset C'$ para demostrar la unicidad supongamos que existe una $k-$cadena B tal que $C \subset B$ entonces $B = \langle x_0, x_1, ..., x_{k-1}, y \rangle$ donde $x_0, x_1, ..., x_{k-1} \in C$ y existe una biección

$$\tilde{\sigma} : N(1, k) \longrightarrow N(1, k)$$

tal que

$$x_j = x_0 + \sum_{r=1}^{j} e^*_{\tilde{\sigma}(r)}$$

$$y = x_0 + \sum_{r=1}^{k} e^*_{\tilde{\sigma}(r)}$$

como $x_j \in C$, tenemos que $\tilde{\sigma}(r) = \sigma(r)$ para $r \leq k-1$ entonces $y = x_{k-1} + e_k^*$ y $\tilde{\sigma}(r) = k$, así $y = x_k$.

Por lo tanto, $B = C'$. ■

Lema 4. *Sea B una $k-$cadena para algún $k \in N(1,n)$ y sea C un subconjunto de B que está (k-1)-completamente etiquetado entonces se satisface lo siguiente:*
i) Si $C \subset L_{k-1}$ entonces C es una $(k-1)-$cadena y existe exactamente una $k-$cadena que inlcuye a C.
ii) Si $C \not\subset L_{k-1}$ entonces existen exactamente dos $k-$cadena que contiene a C.

Demostración:

Como B es una $k-$cadena ,existe $x_0, x_1, ..., x_k \in L_k$ tal que $B = \langle x_0, x_1, ..., x_k \rangle$ y

$$x_j = x_0 + \sum_{i=1}^{j} e^*_{\sigma(i)}$$

donde σ es una permutación en $N(1,k)$. El $\sharp C = k$ pues es $(k-1)-$completamente etiquetado entonces podemos escribir $B = C \cup \{x_h\}$.

Si $C \subset L_{k-1}$ entonces $C = \langle x_0, x_1, ..., x_{k-1} \rangle$, $x_h = x_k$, $\sigma(k) = k$ se puede restringir a una permutación en el conjunto $N(1, k-1)$ de donde concluimos que C es una $(k-1)-$cadena, por el lema 3 entonces B es la única $k-$cadena que incluye C, esto prueba i).

Para el caso ii) vamos a considerar tres casos:

- Primer caso: $h = 0$.
- Segundo caso: $0 < h < k$.
- Tercer caso $h = k$.

Primer caso: Si $h = 0$.

$B = C \cup \{x_0\}$ es decir $C = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ supongamos que $(x_k)_{\sigma(1)} = 1$ entonces

$$(x_j)_{\sigma(1)} = (x_0)_{\sigma(1)} + \sum_{i=1}^{j} (e^*_{\sigma(1)})_{\sigma(1)}$$

como $x_0 \in L_k$,

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i^* \text{ donde } \alpha_i \in N(0,m)$$

dado que $\sigma(i) \in N(1,k)$, tenemos

$$(x_j)_{\sigma(1)} = \frac{\alpha_{\sigma(1)}}{m} + (e^*_{\sigma(1)})_{\sigma(1)} + (e^*_{\sigma(2)})_{\sigma(1)} + ... + (e^*_{\sigma(k)})_{\sigma(1)}$$

$$(x_j)_{\sigma(1)} = \frac{\alpha_{\sigma(1)}}{m} + \frac{1}{m}$$

por otro lado, como

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{k} e_i^*$$

entonces,

$$1 = (x_k)_{\sigma(1)} = (x_0)_{\sigma(1)} + (e_1^*)_{\sigma(1)} + ... + (e^*_{\sigma(1)})_{\sigma(1)} + ... + (e^*_{\sigma(k)})_{\sigma(1)}$$

$$1 = \frac{\alpha_{\sigma(1)}}{m} + \frac{1}{m}$$

$$\alpha_{\sigma(1)} = m - 1$$

Así, tenemos:

$$(x_j)_{\sigma(1)} = (\frac{m-1}{m}) + \frac{1}{m} = 1 - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = 1,$$

$j = 1, 2, ..., k$ y por $(B2)$

$$l(x_1) \geq \sigma(1) > 0, ..., l(x_k) \geq \sigma(1) > 0$$

Es decir, $l(C) \neq N(0, k-1)$ lo cual es una contradicción, pues C es $(k-1)-$completamente etiquetado entonces $(x_k)_{\sigma(1)} < 1$, pues sus componentes son de la forma $\frac{\alpha_k}{m} \leq 1$.

Ahora consideremos el conjunto

$$B' = \langle x_1, x_2, ..., x_k, x_k + e^*_{\sigma(1)} \rangle$$

note que

$$x_k + e^*_{\sigma(1)} = x_1 + \sum_{i=1}^{k} e_i^*$$

pues,

$$x_1 = x_0 + e^*_{\sigma(1)}$$

Por lo tanto, B' es otra $k-$cadena que contiene a C.

Segundo caso: Si $0 < h < k$.

Con el mismo procedimiento para la coordenada h el conjunto

$$B' = \langle x_0, x_1, .., x_{h-1}, x_{h-1} + e^*_{\sigma(h+1)}, x_{h+1}, ..., x_k \rangle$$

es otra $k-$cadena que incluye a C.

Tercer caso: Si $h = k$.

Supongamos que $(x_0)_{\sigma(k)} = 0$, entonces

$$(x_0)_{\sigma(k)} = (x_1)_{\sigma(k)} = ... = (x_{k-1})_{\sigma(k)} = 0.$$

En efecto, como $x_1 = x_0 + e^*_{\sigma(1)}$ entonces

$$(x_1)_{\sigma(k)} = (x_0)_{\sigma(k)} + (e^*_{\sigma(1)})_{\sigma(k)} = (x_0)_{\sigma(k)} + 0 = 0.$$

Análogamente probamos para x_2

$$x_2 = x_0 + e^*_{\sigma(1)} + e^*_{\sigma(2)}$$

$$(x_2)_{\sigma(k)} = (x_0)_{\sigma(k)} + (e^*_{\sigma(1)})_{\sigma(k)} + (e^*_{\sigma(2)})_{\sigma(k)} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Repitiendo el mismo procedimiento hasta llegar a $(x_{k-1})_{\sigma(k)}$ obtenemos

$$(x_0)_{\sigma(k)} = (x_1)_{\sigma(k)} = ... = (x_{k-1})_{\sigma(k)} = 0.$$

Luego, por $(B1)$ tenemos que $l(x_0) \neq \sigma(k)$,$l(x_1) \neq \sigma(k)$,...,$l(x_{k-1}) \neq \sigma(k)$ como $h = k$ y $B = C \cup \{x_k\}$ entonces $C = \langle x_0, x_1, ..., x_{k-1} \rangle$.

Sabemos que $\sigma(k) \in N(1, k)$, si $\sigma(k) = k$, como

$$(x_0)_k = (x_1)_k = ... = (x_{k-1})_k = 0$$

entonces $x_0, x_1, ..., x_{k-1} \in L_{k-1}$ es decir $C \cup L_{k-1}$ lo cual es una contradicción.

Si $1 \leq \sigma(k) < k$ en este caso tendríamos que $l(C) \neq N(0, k-1)$ lo cual es una contradicción pues C es $(k-1)-$completamente etiquetado, entonces $(x_0)_{\sigma(k)} > 0$. Por lo tanto, el conjunto

$$B' = \langle x_0 - e^*_{\sigma(k)}, x_0, x_1, ..., x_{k-1} \rangle$$

es otra $k-$cadena que contiene a C. Por un procedimiento similar al del lema 3 y por (1.4) y (1.5) es imposible tener tres $k-$cadenas que contenga a C. ■

Lema 5. *Sea C un subconjunto de L_k que es $(k-1)-$completamente etiquetado para algún $k \in N(1, n)$.Entonces se cumple lo siguiente .*
i) C está incluido como máximo en dos $k-$cadenas.
ii) C está incluido en exactamente una $k-$cadena si y solo si C es un $(k-1)-$cadena.

Demostración:

Utilizando los lemas 3 y 4 se demuetra el lema 5. ■

Lema 6. *Sea $k \in N(1, n)$. Supongamos que existen exactamente un número impar de $(k-1)-$cadenas que están $(k-1)-$completamente etiquetados entonces existen exactamente un número impar de $k-$cadenas que están $k-$completamente etiquetados.*

Demostración:

Definimos cuatro conjuntos S_1, S_2, T_1 y T_2 de la siguiente manera:
$B \in S_1$ si y solo si B es una $k-$cadena que incluye exactamente un subconjunto $(k-1)-$completamente etiquetado.

$B \in S_2$ si y solo si B es una $k-$cadena que incluye exactamente dos subconjuntos $(k-1)-$completamente etiquetados.

$C \in T_1$ si y solo si C es un subconjunto $(k-1)-$completamente etiquetado que está contenida en exactamente una $k-$cadena.

$C \in T_2$ si y solo si C es un subconjunto $(k-1)-$completamente etiquetado que está contenido en exactamente en dos $k-$cadenas.

Por el lema $1(ii)$, observamos que $B \in S_1$ si y solo si B es una $k-$cadena que está $k-$completamente etiquetada. Por el lema 5 (ii) también notamos que $C \in T_1$ si y solo si C es una $(k-1)-$ cadena que está $(k-1)-$completamente etiquetada.

Con el conteo doble, contamos el número de subconjuntos $(k-1)-$completamente etiquetados en $k-$cadenas, entonces por los lemas 1 (i) y 5 (i), tenemos

$$\sharp S_1 + 2\sharp S_2 = \sharp T_1 + 2\sharp T_2$$

ya que $\sharp T_1$ es impar entonces $\sharp S_2$ es impar. ■

Teorema 2. ***(Teorema de etiquetado).***
Sea l un etiquetado de Brouwer L_n en $N(0,n)$ entonces existe una $n-$cadena que está $n-$completamente etiquetado.

Demostración:
Para demostrar el teorema 2 utilizaremos los lemas anteriores.
En efecto:
Tomando $k = 1, k-1 = 0 \in N(0,n)$, por el lema 2, existe exactamente una $0-$cadena que está $0-$completamente etiquetada, luego por el lema 6, existe un número impar de $1-$cadena que están $1-$completamente etiquetadas, nuevamente por el lema 6 existe un número impar de $2-$cadenas que están $2-$completamente etiquetadas.
Ahora supongamos que tenemos que un número impar de $(n-1)-$cadenas que están $(n-1)-$completamente etiquetadas por el lema 6, existe un número impar $n-$cadenas que están $n-$completamente etiquetadas.
Entonces por inducción hemos demostrado que existe un número impar de $n-$cadenas que están $n-$completamente etiquetadas. Como 0 no es impar entonces garantizamos que al menos hay una $n-$cadena que está $n-$completamente etiquetada lo que demuestra el teorema 2. ■

3 Problema Principal

La ventaja de demostrar el Teorema del Punto Fijo de Brouwer utilizando el Teorema del Etiquetado radica en que proporciona una forma intuitiva y conceptualmente clara de entender cómo funciona la demostración. Aunque el Teorema del Punto Fijo de Brouwer se formula originalmente en el contexto de espacios topológicos y aplicaciones continuas, el Teorema del Etiquetado lo relaciona con un concepto más fácilmente visualizable, lo que puede facilitar su comprensión. Aquí hay algunas ventajas específicas de utilizar el Teorema del Etiquetado en esta demostración:

a) **Intuición visual:** El concepto de etiquetado y cadenas es más accesible desde una perspectiva intuitiva. Puedes pensar en etiquetas como puntos en un espacio y en cadenas como sucesiones de puntos en ese espacio.

b) **Sencillez conceptual:** El Teorema del etiquetado se basa en la idea de conjuntos cerrados y acotados, que es más fácil de comprender que los conceptos topológicos avanzados. Esto hace que la demostración sea más accesible para aquellos que no están familiarizados con la topología.

c) **Claridad en la construcción de conjuntos:** La construcción de la sucesión de conjuntos L_k en la demostración utilizando el Teorema del etiquetado es más transparente y se presta a una visualización clara de cómo se obtienen estos conjuntos a partir de aplicaciones repetidas de la función g.

d) **Relación con aplicaciones prácticas:** El concepto de etiquetado y cadenas puede ser relacionado fácilmente con problemas prácticos en matemáticas y otras disciplinas, lo que puede ayudar a mostrar la relevancia del Teorema de punto fijo de Brouwer en diversos contextos.

3.1. Teorema de punto fijo de Brouwer en $\mathbb{R}^n$

Teorema 3. *Si $n \in \mathbb{N}$ y g es una aplicación continua*

$$g : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]^n$$
$$x \mapsto g(x)$$

entonces existe $z \in [0,1]^n$ tal que

$$g(z) = z.$$

Demostración:

Definimos n funciones

$$g_k : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$$

$$g_k(x) = (g(x))_k \ \ para \ \ k \in N(1,n)$$

Como g es continua cada $k-$ésima coordenada es continua así g_k es continua.

Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y definimos L_n como en (1.3).Tambien definimos un etiquetado l de L_n en $N(0,n)$ por:

$$l(x) = max\Big\{k \in N(1,n) : (x)_k > 0, g_k(x) \leq (x)_k\Big\}$$

donde $max\{\emptyset\} = 0$.

Afirmación 1. *l es un etiqueado de Brouwer*

En efecto:

• Si $(x)_k = 0$, para algún $k \in N(1,n)$ y supongamos que $l(x) = k$

$$k = l(x) = max\Big\{j \in N(1,n) : (x)_j > 0, g_j(x) \leq (x)_j\Big\}$$

entonces

$$k \in \Big\{j \in N(1,n) : (x)_j > 0, g_j(x) \leq (x)_j\Big\}$$

entonces

$$0 = (x)_k > 0 \ \ y \ \ g_k(x) \leq 0$$

$$0 > 0 \ \ (\Longrightarrow\Longleftarrow)$$

entonces

$$l(x) \neq k \quad se \ satisface \ (B1)$$

• Si $(x)_k = 1$,para algun $k \in N(1,n)$ entonces

$$1 = (x)_k > 0 \ \ y \ \ g_k(x) \leq 1 = (x)_k$$

entonces

$$k \in \Big\{ j \in N(1,n) : (x)_j > 0, g_j(x) \leq (x)_j \Big\}$$

como

$$l(x) = max\Big\{ j \in N(1,n) : (x)_j > 0, g_j(x) \leq (x)_j \Big\}$$

entonces

$$max\Big\{ j \in N(1,n) : (x)_j > 0, g_j(x) \leq (x)_j \Big\} \geq k$$

entonces

$$l(x) \geq k \quad se \ satisface \ (B2)$$

Por lo tanto l es un etiquetado de Brouwer.

Notamos que si $l(x) = 0$ entonces no existe $k \in N(1,n)$ tal que $g_k(x) \leq (x)_k$ por lo tanto se tiene que cumplir que $(x)_k \leq g_k(x)$ para $k \in N(1,n)$,por el teorema 2, existe una $n-$cadenas $B^{(m)}$ que está $n-$completamente etiquetados.

Sea $Y_0^{(m)}, Y_1^{(m)}, ..., Y_n^{(m)} \in [0,1]^n$ que satisfacen

$$B^{(m)} = \Big\{ Y_0^{(m)}, Y_1^{(m)}, ..., Y_n^{(m)} \Big\}$$

y

$$l(Y_k^{(m)}) = k \ \text{ para } \ k \in N(0,n).$$

Ya que, $[0,1]^n$ es compacto por el teorema de Bolzano-Weierstrass $\{Y_0^{(m)}\}$ tiene una subsucesión convergente, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{Y_0^{(m)}\}$ converge a algún $z \in [0,1]^n$.

Afirmación 2.

$$diam(B^{(m)}) = \frac{\sqrt{n}}{m}$$

En efecto:

Como

$$Y_j^{(m)} = Y_0^{(m)} + \sum_{r=1}^{j} e^*_{\sigma(r)}$$

$$Y_i^{(m)} = Y_0^{(m)} + \sum_{r=1}^{i} e^*_{\sigma(r)}$$

Para fijar ideas podemos suponer que $j \geq i$ entonces

$$\left\| Y_j^{(m)} - Y_i^{(m)} \right\| = \left\| \sum_{r=i+1}^{j} e^*_{\sigma(r)} \right\| = \left\| \left(0, ..., 0, \underbrace{\frac{1}{m}, ..., \frac{1}{m}}_{\text{(j-i)-veces}}, 0, ..., 0\right) \right\|$$

$$\|Y_j^{(m)} - Y_i^{(m)}\| = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{m^2} + ... + \frac{1}{m^2}}_{\text{(j-i)-veces}}} = \sqrt{\frac{j-i}{m^2}} \quad donde \;\; 0 \leq j - i \leq n$$

Así,

$$diam(B^{(m)}) = sup\|Y_j^{(m)} - Y_i^{(m)}\| = \frac{\sqrt{n}}{m}$$

$$diam(B^{(m)}) = \frac{\sqrt{n}}{m}.$$

Como

$$diam(B^{(m)}) = \frac{\sqrt{n}}{m}. \Longrightarrow \|Y_{j'}^{(m)} - Y_{i'}^{(m)}\| \leq sup\|Y_{j'}^{(m)} - Y_{i'}^{(m)}\| = \frac{\sqrt{n}}{m} \quad \forall j' \;\; \forall i' \in N(0, n)$$

Tomando $j' = 0, i' = k$

$$\Longrightarrow \|Y_0^{(m)} - Y_k^{(m)}\| \leq \frac{\sqrt{n}}{m}$$

Entonces

$$\|Y_0^{(m)} - Y_k^{(m)}\| \longrightarrow 0 \;\; si \;\; m \longrightarrow +\infty$$

$$Y_0^{(m)} \longrightarrow z \Longrightarrow Y_k^{(m)} \longrightarrow z \;\; \forall k \in N(1, n)$$

recordemos que :

$$l(Y_0^{(m)}) = 0 \;\; y \;\; l(Y_k^{(m)}) = k > 0$$

entonces

$$l(Y_0^{(m)}) = 0 \Longrightarrow (Y_0^{(m)})_k \leq g_k(Y_0^{(m)}) \;\; \forall k \in N(1, n)$$

$$Si \;\; m \longrightarrow +\infty \longrightarrow (z)_k \leq g_k(z) \qquad\qquad (*)$$

también

$$l(Y_k^{(m)}) = k \Longrightarrow g_k(Y_k^{(m)}) \leq (Y_k^{(m)})_k \;\; \forall k \in N(1, n)$$

$$Si\ \ m \longrightarrow +\infty \longrightarrow g_k(z) \leq (z)_k \qquad\qquad (**)$$

Luego tenemos de las desigualdades $(*)$ y $(**)$:

$$(z)_k \leq g_k(z) \leq (z)_k\ \ \forall k \in N(1,n)$$

$$g_k(z) = (z)_k\ \ \forall k \in N(1,n)$$

por lo tanto,

$$g(z) = z.\ \blacksquare$$

4 Aplicaciones

El teorema del punto fijo de Brouwer es un resultado importante en la teoría de la topología y encuentra aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas y otras disciplinas. A continuación, mencionaremos algunos ejemplos de las aplicaciones del teorema del punto fijo de Brouwer en diferentes dimensiones. Esta herramienta matemática es ampliamente utilizada en diversas áreas de la ciencia y tiene múltiples aplicaciones en la resolución de problemas y demostraciones teóricas.

4.1. Aplicaciones en $\mathbb{R}^2$

En la Economía:

El teorema de punto fijo de Brouwer se utiliza en la economía para demostrar la existencia de equilibrios generales en modelos de competencia imperfecta. Estos equilibrios representan situaciones en las que las variables económicas se estabilizan, es decir, no tienen incentivos para cambiar.

En la Física:

En física, específicamente en la teoría de campos, el teorema de punto fijo de Brouwer se usa para demostrar la existencia de soluciones estables en las ecuaciones de campo. Estas soluciones representan estados en los que las interacciones entre las diferentes partes del sistema están en equilibrio.

4.2. Aplicaciones en $\mathbb{R}^3$

En la Geometría:

El teorema de punto fijo de Brouwer se utiliza en geometría para demostrar la existencia de puntos fijos en transformaciones continuas. Esto tiene aplicaciones en la teoría de conjuntos convexos y la teoría de la medida, entre otros.

En la Dinámica de Fluidos:

El teorema de punto fijo de Brouwer se utiliza para demostrar la existencia de soluciones estables en las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas soluciones representan estados de equilibrio en el movimiento y comportamiento de los fluidos.

4.3. Aplicaciones en $\mathbb{R}^n$

En el Álgebra:

El teorema de punto fijo de Brouwer tiene aplicaciones en álgebra y teoría de grupos, donde se utiliza para demostrar la existencia de elementos fijos en aplicaciones de grupo.

En la Optimización :

En la optimización matemática, el teorema de punto fijo de Brouwer se utiliza para demostrar la existencia de soluciones óptimas en problemas de optimización no lineales. Estas soluciones representan puntos de equilibrio deseables en el problema.

4.4. Aplicaciones a la Biología

El teorema de punto fijo de Brouwer es un resultado matemático fundamental que tiene varias aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia, incluida la biología.

Estas son solo algunas de las aplicaciones del teorema de punto fijo de Brouwer en Biología. Se trata de un resultado matemático fundamental que proporciona herramientas teóricas para comprender la dinámica, estabilidad y equilibrio en diferentes sistemas biológicos:

a) **Biología evolutiva:** En el campo de la biología evolutiva, el teorema de punto fijo de Brouwer se ha utilizado para demostrar la existencia de puntos de equilibrio en modelos matemáticos de la evolución de especies. Estos puntos de equilibrio representan estados estables en los que no hay cambios evolutivos, lo que proporciona un marco teórico para comprender la estabilidad y dinámica de las poblaciones biológicas.

b) **Biología molecular:** En la biología molecular, el teorema de punto fijo de Brouwer se ha utilizado para analizar la estructura tridimensional de las moléculas de proteínas. La conformación espacial de una proteína se puede modelar como un punto fijo del campo de fuerzas que actúan sobre ella. Al aplicar el teorema, se pueden encontrar puntos fijos que representan las diferentes conformaciones posibles de una proteína.

c) **Biología de sistemas:** En la biología de sistemas, el teorema de punto fijo de Brouwer se utiliza para analizar los estados estables o puntos de equilibrio en modelos matemáticos de redes de interacciones entre diferentes componentes biológicos, como genes, proteínas o metabolitos. Estos puntos de equilibrio representan los estados en los que las tasas de cambio de los diferentes componentes se anulan, lo que permite comprender la estabilidad y dinámica de los sistemas biológicos.

d) **Ecología y conservación:** En el campo de la ecología y la conservación, el teorema de punto fijo de Brouwer se puede utilizar para analizar los estados de equilibrio en modelos matemáticos de poblaciones y comunidades biológicas. Estos puntos de equilibrio representan los niveles de abundancia o densidad en los que las tasas de natalidad y mortalidad se igualan, lo que proporciona información sobre la estabilidad de las poblaciones y la coexistencia de diferentes especies.

5 Conclusiones y/o Sugerencias

El teorema de punto fijo de Brouwer es un resultado fundamental en la teoría de los espacios topológicos y tiene importantes aplicaciones en matemáticas y en diversas áreas de la ciencia.

1) El teorema establece que toda transformación continua de un espacio convexo compacto en sí mismo tiene al menos un punto fijo, es decir, un punto que no se mueve bajo la transformación. Esto significa que no importa como se deformen o muevan los puntos del espacio, siempre habrá al menos un punto que se mantendá estático.

2) El teorema de etiquetado, establece que cualquier gráfico finito se puede etiquetar de manera que conserve ciertas propiedades, como el orden de las etiquetas a lo largo de cualquier borde. La prueba del teorema del etiquetado se basa en la aplicación del teorema del punto fijo de Brouwer a una función continua relacionada.

3) En este trabajo presentaremos una demostración simple en $\mathbb{R}^n$ del importante teorema del punto fijo de Brouwer, haciendo uso de dos herramientas básicas como el teorema de Bolzano-Weiestrass y un hecho, aun más simples, como la suma de un número par más un número impar de un número impar, asociados a cadenas y etiquetados.

4) El teorema del punto fijo de Brouwer es un resultado fundamental en matemáticas y tiene aplicaciones en diversas áreas del conocimiento. Su importancia radica en su capacidad para garantizar la existencia de puntos fijos en transformaciones continuas, además proporciona resultados y soluciones indispensables en numerosos problemas y situaciones.

5) El uso del Teorema de etiquetado en la demostración del Teorema de Punto Fijo de Brouwer puede hacer que está demostración sea más accesible, intuitiva y conceptualmente clara para una audiencia más amplia, lo que facilita la comprensión y apreciación de este resultado matemático fundamental.

Bibliografía

[1] Hadamard, J. H. (1910). Sur quelques applications de l'indice de Kronecker, Introduction to : J. Tannery, La The'orie des Fonctions d'une Variable, Hermann, Paris.

[2] Brouwer, L. E. J. (1911). *Ü*ber abbildung von mannigfaltigkeiten. Mathematische annalen, 71(1), 97-115.

[3] Takeuchi, Y., & Suzuki, T. (2011). An easily verifiable proof of the Brouwer fixed point theorem. arXiv preprint arXiv:1109.4604.

[4] Takeuchi, Y., & Suzuki, T. (2014). An Elementary Proof of the 2-Dimensional Version of The. Pure Appl. Math, (61), 1-6.

[5] Kulpa, W. (1997). The poincaré-miranda theorem. The American Mathematical Monthly, 104(6), 545-550.

[6] Sperner, E. (1928, December). Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. In Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universit*ä*t Hamburg (Vol. 6, pp. 265-272). Springer-Verlag.

[7] Stuckless, T. (2003). Brouwer's Fixed Point Theorem: Methods of Proof and Generalization (Doctoral dissertation, Simon Fraser University).

[8] Franklin, J. N. (2002). Methods of mathematical economics: linear and nonlinear programming, fixed-point theorems. Society for Industrial and applied Mathematics.

[9] Istratescu, I. V. (1981). Fixed Point Theory. Math and its Applications; 7. D. Reidel Publishing Company, Holland.

[10] Dinca, G., & Mawhin, J. (2020). History of the Brouwer Fixed Point Theorem. In Brouwer Degree: The Core of Nonlinear Analysis (pp. 391-412). Cham: Springer International Publishing.