Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Teorema de Siegel

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Claudio Vicente ESPINOZA CHOQQUEPURA

ASESOR

Dr. Renato Mario BENAZIC TOMÉ

Lima, Perú

2010

Referencia bibliográfica

Espinoza, C. (2010). *Teorema de Siegel*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Claudio Vicente Espinoza Choqquepura
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	44231357
URL de ORCID	**No aplica**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Renato Mario Benazic Tomé
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445668
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-1897-4383
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Yolanda Silvia Santiago Ayala
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445705
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Edgar Diogenes Vera Saravia
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	07915698
Datos de investigación	
Línea de investigación	Ecuaciones diferenciales ordinarias

Grupo de investigación	Ecuaciones diferenciales ordinarias, aplicada a las ciencias básicas e ingeniería.
Agencia de financiamiento	Ninguna
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2009-2010
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela cuadra 34
Teléfono IP N° 619-7000 Anexo 1610
Telefax: 619-7000 1618
Lima - Perú

Escuela Académico-Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 17:05 horas del día jueves 16 de diciembre del 2010, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Calificador de Tesis: Dra. YOLANDA SILVIA SANTIAGO AYALA (Presidenta), Dr. EDGAR VERA SARAVIA (Miembro), Dr. RENATO MARIO BENAZIC TOMÉ (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada:
"TEOREMA DE SIEGEL", para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis por parte del tesista, la Presidenta del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

diecinueve (19).

A continuación la Presidenta del Jurado, Dra. YOLANDA SILVIA SANTIAGO AYALA, manifestó que el señor Bachiller CLAUDIO VICENTE ESPINOZA CHOQQUEPURA, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 18:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Yolanda Santiago

DRA. YOLANDA SILVIA SANTIAGO AYALA
PRESIDENTA

Edgar Vera S.

DR. EDGAR VERA SARAVIA
MIEMBRO

DR. RENATO MARIO BENAZIC TOMÉ
MIEMBRO ASESOR

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Dr. Renato Mario Benazic Tome en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°941-2010-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es **"TEOREMA DE SIEGEL",** presentado por el bachiller Claudio Vicente Espinoza Choqquepura, para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según larevisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 8 % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor ____________________

DNI:06445668

Nombres y apellidos del asesor: Renato Mario Benazic Tomé

Dedicado a mis padres y hermanos.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los miembros del jurado calificador de mi tesis, por sus valiosas observaciones y sugerencias.

RESUMEN

TEOREMA DE SIEGEL

CLAUDIO VICENTE ESPINOZA CHOQQUEPURA

Diciembre - 2010

Orientador : Dr. Renato Benazic Tome

Título obtenido : Licenciado en Matemática

....

En este trabajo damos una prueba del teorema de Siegel y mostramos algunas aplicaciones.

PALABRAS CLAVE:
Poincaré
Siegel
Linealización
Conjugación

ABSTRACT

THEOREM OF SIEGEL

CLAUDIO VICENTE ESPINOZA CHOQQUEPURA

DECEMBER-2010

Adviser : Dr. Renato Benazic Tome

Obtained Title : Licenciado en Matemática

....

In this work we show a proof Siegel's theorem for vectorial fields and see some aplications.

KEY WORDS:
Poincaré
Siegel
Linealization
Conjugation

Índice

Introducción

El problema de la linealización de ecuaciones diferenciales ordinarias complejas es importante en el estudio de los sistemas dinámicos complejos. Dicho problema, el de linealizar un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(U)$ que tiene al origen como singularidad aislada es equivalente a encontrar un bihomolorfismo H definido en alguna vecindad del origen que cumpla

$$H'(Z) \cdot Z(z) = \Lambda\left(H(z)\right),$$

donde $\Lambda = Z'(0)$ es la parte lineal del campo Z.

A finales del siglo XIX Poincaré resolvió este problema bajo ciertas condiciones sobre los autovalores de la parte lineal del campo que se quiere linealizar. Sin embargo, dicha condición no era la óptima pues existen campos que son linealizables que no cumplen la condición de Poincaré. Décadas más tarde Siegel introdujo una condición la cual abarca a la de Poincaré y además como se mostrará en el presente trabajo es una condición buena pues el conjunto de matrices que no cumplen dicha condición tiene medida nula.

En el primer capítulo muestro los preliminares para seguir este trabajo de tal manera que el contenido del mismo sea autocontenido, sin embargo conceptos básicos de análisis complejo y algebra lineal se darán por conocidos. En el segundo se prueba que la no resonancia de la parte lineal es suficiente para que la linealización sea posible, pero solo de manera formal.

En el tercer capítulo se dará la prueba del teorema de Siegel dada por Arnold, la cual utiliza técnicas de análisis funcional. Por último se mostrarán algunas aplicaciones de este teorema y mencionaré la condición de Bruno que supera a la de Siegel por lo que estos resultados se pueden seguir ampliando.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos algunas definiciones y notaciones sobre series formales que pueden encontrarse en [6]. También enunciamos algunos resultados del análisis en varias variables complejas cuyas demostraciones pueden encontrarse en [7] y [8].

1.1 Series formales

Definición 1.1.1. *Un* ***multi-índice*** k *de dimensión* n *es una* $n-$*upla de enteros no negativos, es decir,*

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n),$$

donde $k_1, k_2, \dots, k_n$ *son enteros no negativos. La* ***norma*** *del multi-índice* k*, denotada por* $|k|$*, se define como*

$$|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

También definimos el ***factorial*** *del multi-índice* k*, denotado por* $k!$*, como*

$$k! = k_1!k_2! \cdots k_n!.$$

El conjunto de todos los multi-índices de dimensión n *será denotado por* $\mathbb{N}^n$*. Dados* $k, q \in \mathbb{N}^n$ *diremos que* $k \geq q$ *si y solo si* $k_i \geq q_i$ *para todo* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$*. Definiciones similares para* $k > q$*,* $k \leq q$ *y* $k < q$*.*

Dada la $n-$upla $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ y el multi-índice $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, denotaremos z^k para referirnos de forma simplificada al producto

$$z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_n^{k_n}.$$

Definición 1.1.2. *Una* ***serie formal de potencias*** *en las indeterminadas $z_1, z_2, \dots, z_n$ con coeficientes complejos es una expresión de la forma*

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k,$$

de tal manera que los coeficientes $a_k \in \mathbb{C}$ para todo multi-índice k y además A es independiente del orden en el que se presentan los sumandos. En adelante de forma resumida diremos que A es una serie formal.

El conjunto de todas las series formales es denotado por $\mathbb{C}[[z]]$.

Observación 1.1.1. Si en particular consideramos el caso en el cual $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}^n$ con $|k|$ suficientemente grande, entonces tenemos que $A \in \mathbb{C}[z]$, donde $\mathbb{C}[z]$ es el conjunto de todos los polinomios en las indeterminadas $z_1, z_2, \dots, z_n$. Luego $\mathbb{C}[z] \subset \mathbb{C}[[z]]$ y entonces podemos extender las operaciones usuales que ya conocemos en el álgebra $\mathbb{C}[z]$.

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ y

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k \text{ y } B = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} b_k z^k$$

son series formales, entonces en $\mathbb{C}[[z]]$ definimos las siguiente operaciones:

$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{k \in \mathbb{N}^n} (a_k + b_k) z^k \\ \alpha \cdot A &= \sum_{k \in \mathbb{N}^n} (\alpha a_k) z^k. \end{aligned}$$

Proposición 1.1.1. $(\mathbb{C}[[z]], +, \cdot)$ *es un espacio vectorial complejo de dimensión infinita.*

Como en la definición de una serie formal no interesa el orden en el que se presentan los sumandos, entonces podemos agrupar los sumandos de $A \in \mathbb{C}[[z]]$ de la siguiente forma:

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} A_m,$$

donde $A_m \in \mathbb{C}$ es un polinomio homogéneo de grado m igual a

$$A_m = \sum_{|k|=m} a_k z^k.$$

Definición 1.1.3. *El* ***orden*** *de una serie formal A, denotado por $ord(A)$, es igual al menor $m \in \mathbb{N}$ tal que A_m es un polinomio homogéneo no nulo. Si $r \in \mathbb{N}$ entonces el* ***jet de orden*** *r o $r-$jet de A se define como*

$$\mathfrak{J}^r(A) = \sum_{m=0}^{r} A_m.$$

El conjunto de todos los $r-$jet es un espacio vectorial de dimensión finita y será denotado por $\mathfrak{J}^r\left(\mathbb{C}[[z]]\right)$.

De manera similar podemos agrupar los sumandos de $B \in \mathbb{C}[[z]]$

$$B = \sum_{m=0}^{\infty} B_m,$$

donde $B_m \in \mathbb{C}$ es un polinomio homogéneo de grado m igual a

$$B_m = \sum_{|k|=m} b_k z^k.$$

Introducimos ahora una nueva operación en $\mathbb{C}[[z]]$, dadas A y B series formales representadas de la forma anterior, definimos $AB \in \mathbb{C}[[z]]$ como

$$AB = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} A_{m-i} B_i \right).$$

Proposición 1.1.2. *Si A, B, C son series formales y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades*

- $(AB)C = A(BC)$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
- $AB = BA$.
- *Existe* $E \in \mathbb{C}[[z]]$ *tal que* $AE = EA = A$.

Observación 1.1.2. La proposición anterior nos dice que $\mathbb{C}[[z]]$ con las operaciones dadas de suma, producto y producto por un escalar es un anillo conmutativo con unidad que además es un espacio vectorial, es decir, $\mathbb{C}[[z]]$ es un álgebra. Además $\mathbb{C}[z]$ es un sub-álgebra de $\mathbb{C}[[z]]$.

Introduciremos ahora una nueva operación en $\mathbb{C}[[z]]$, la derivación formal de la siguiente manera:

Definición 1.1.4. *Si A es una serie formal igual a*

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_n^{k_n},$$

entonces definimos la derivada parcial formal de orden 1 de A respecto a z_i como

$$\frac{\partial A}{\partial z_i} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} k_i a_k \left(z_1^{k_1} \cdots z_i^{k_i - 1} \cdots z_n^{k_n} \right).$$

Observación 1.1.3. Para simplificar la notación escribiremos $\dfrac{z^k}{z_i}$ en lugar de $z_1^{k_1} \cdots z_i^{k_i-1} \cdots z_n^{k_n}$.

Notemos que cuando $k_i = 0$ el sumando correspondiente se anula, lo cual hace que en todo momento se trabaje con expresiones polinomiales, como consecuencia de esto tenemos que $\dfrac{\partial A}{\partial z_i} \in \mathbb{C}[[z]]$ para toda serie formal A y para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

También podemos definir derivadas parciales formales de orden superior de la siguiente manera:

- Si $m \geq 2$ definimos la derivada parcial formal de orden m de A respecto a z_i de forma inductiva como

$$\frac{\partial^m A}{\partial z_i^m} = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{\partial^{m-1} A}{\partial z_i^{m-1}} \right).$$

- Si $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos la derivada parcial formal de orden m de A como

$$\frac{\partial^{|m|} A}{\partial z_1^{m_1} \cdots \partial z_n^{m_n}} = \frac{\partial^{m_1}}{\partial z_1^{m_1}} \left(\cdots \left(\frac{\partial^{m_n} A}{\partial z_n^{m_n}} \right) \cdots \right).$$

Proposición 1.1.3. *Si A, B son series formales y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumplen las siguientes propiedades*

(i) $\dfrac{\partial(A+B)}{\partial z_i} = \dfrac{\partial A}{\partial z_i} + \dfrac{\partial B}{\partial z_i}$.

(ii) $\dfrac{\partial(\alpha A)}{\partial z_i} = \alpha \dfrac{\partial A}{\partial z_i}$.

(iii) $\dfrac{\partial(AB)}{\partial z_i} = \dfrac{\partial A}{\partial z_i} B + A \dfrac{\partial B}{\partial z_i}$.

Para terminar esta esta sección introduciremos una noción de convergencia en $\mathbb{C}[[z]]$ de la siguiente manera:

Definición 1.1.5. *Sea $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de series formales y sea $A \in \mathbb{C}[[z]]$, diremos que la sucesión A_j converge formalmente a A, lo cual es denotado por*

$$\lim_{j \to \infty} A_j = A,$$

si y solo si para todo $r \geq 0$ se cumple que

$$\lim_{j \to \infty} \mathfrak{J}^r(A_j) = \mathfrak{J}^r(A),$$

donde el límite anterior está dien definido pues

$$\mathfrak{J}^r(\mathbb{C}[[z]])$$

es un espacio vectorial de dimensión finita.

1.2 Mapeos formales

Definición 1.2.1. *Un* ***mapeo formal*** *F es una n-upla $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ tal que cada $F_i \in \mathbb{C}[[z]]$. El conjunto de todos los mapeos formales es denotado por $\mathbb{C}[[z]]^n$. Las operaciones usuales de suma y producto por un escalar se extienden coordenada a coordenada de forma natural. Si $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ y $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ son mapeos formales y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $F + G$ y αF son mapeos formales definidos por*

$$\begin{aligned} F + G &= (F_1 + G_1, F_2 + G_2, \ldots, F_n + G_n) \\ \alpha F &= (\alpha F_1, \alpha F_2, \ldots, \alpha F_n). \end{aligned}$$

Además también definimos el orden de F como

$$ord(F) = \min\{ord(F_1), ord(F_2), \ldots, ord(F_n)\}.$$

Definición 1.2.2. *Sea A una serie formal y $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ un mapeo formal tal que $ord(F) \geq 1$, entonces podemos definir la serie formal $A \circ F$ de la siguiente manera*

$$(A \circ F)(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} F_1(z)^{k_1} F_2(z)^{k_2} \cdots F_n(z)^{k_n},$$

donde

$$A = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k.$$

Aunque a primera vista pareciese que los coeficientes de $A \circ F$ no están bien determinados por tratarse de sumas infinitas, dado que $ord(F) \geq 1$, para determinar el coeficiente de z^k solo necesitamos sumar una cantidad finita de términos.

Debido a lo anterior, dados $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$ y G mapeos formales con $ord(G) \geq 1$, podemos definir el mapeo formal $F \circ G$ de la siguiente manera

$$F \circ G = (F_1 \circ G, F_2 \circ G, \ldots, F_n \circ G).$$

Definición 1.2.3. *Diremos que un mapeo formal H con $ord(H) \geq 1$ es un* ***difeomorfismo formal*** *si y solo existe un mapeo formal G con $ord(G) \geq 1$ tal que*

$$H \circ G = G \circ H = I.$$

Observación 1.2.1. No es difćil probar que si existe G, entonces debe ser único, luego al mapeo formal se le denota por H^{-1} y se le llama el inverso formal de H. El conjunto de todos los difeomorfismos formales es denotado por $Diff[[\mathbb{C}^n]]$.

Definición 1.2.4. *Diremos que un difeomorfismo formal H es tipo* ***perturbación de la identidad*** *si su parte lineal es la identidad, es decir, $H'(0) = I$.*

Teorema 1.2.1. *Si H es un mapeo formal con $ord(H) \geq 1$ tal que su parte lineal es inversible, entonces H es un difeomorfismo formal.*

1.3 Multisucesiones y multiseries

Definición 1.3.1. *Una **multisucesión** de números complejos es una función* $a : \mathbb{N}^n \to \mathbb{C}$ *tal que a cada* $k \in \mathbb{N}^n$ *se le asocia un número complejo* $a(k) = a_k$. *Escribiremos* $(a_k) \subset \mathbb{C}$ *para denotar a una multisucesión de números complejos.*

Definición 1.3.2. *Sea* $(a_k) \subset \mathbb{C}$ *y* $a \in \mathbb{C}$, *diremos que el **límite** de* (a_k) *es igual a* a *si y solo si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}^n \text{ tal que } k \geq k_0 \Rightarrow |a_k - a| < \epsilon.$$

En caso afirmativo denotaremos $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = a$.

Observación 1.3.1. El límite de una multisucesión, en caso de existir, es único.

Definición 1.3.3. *Diremos que* $(a_k) \subset \mathbb{C}$ *es **convergente** si y solo si existe* $a \in \mathbb{C}$ *tal que* $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = a$. *En caso contrario diremos que* (a_k) *es divergente.*

Definición 1.3.4. *Diremos que* $(a_k) \subset \mathbb{C}$ *es de **Cauchy** si y solo si*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}^n \text{ tal que } k_1, k_2 \geq k_0 \Rightarrow |a_{k_1} - a_{k_2}| < \epsilon.$$

Proposición 1.3.1. $(a_k) \subset \mathbb{C}$ *es convergente si y solo si es de Cauchy.*

Definición 1.3.5. *Dado* $(a_k) \subset \mathbb{C}$ *y* $q \in \mathbb{N}^n$ *definimos* $S_q = \sum\limits_{k \leq q} a_k$. *La multisucesión* $(S_q) \subset \mathbb{C}$ *es llamada multisucesión de sumas parciales asociada a* (a_k) *y la expresión* $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^n} a_k$ *es llamada **multiserie** asociada a* (a_k).

Definición 1.3.6. *Diremos que la multiserie* $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^n} a_k$ *es convergente (respectivamente de Cauchy) si y solo si la multisucesión de sumas parciales asociada a* (a_k) *es convergente (respectivamente de Cauchy).*

En el caso que $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^n} a_k$ sea convergente su límite es llamado suma de la multiserie y será denotado por $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} a_k$.

Definición 1.3.7. *Diremos que la multiserie* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n} a_k$ *es* ***absolutamente convergente*** *si y solo si* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n} |a_k| \subseteq \mathbb{R}_0^+$ *es convergente.*

Proposición 1.3.2. *Sea* $(a_k) \subset \mathbb{C}$*. Si existe* $M > 0$ *tal que* $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} |a_k| \leq M$ *para todo* $q \in \mathbb{N}^n$*, entonces* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n} a_k$ *es convergente.*

Proposición 1.3.3 (Criterio de comparación). *Sean* $(a_k), (b_k) \subset \mathbb{R}_0^+$ *y* $M > 0$ *tal que* $a_k \leq M b_k$ *para todo* $k \in \mathbb{N}^n$*, luego*

(i) Si $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n} b_k$ *es convergente entonces* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n} a_k$ *es convergente y además*

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k \leq M \sum_{|k|=0}^{\infty} b_k.$$

(ii) Si $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n} a_k$ *es divergente entonces* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n} b_k$ *es divergente.*

Proposición 1.3.4. *Si* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n} a_k$ *es absolutamente convergente entonces es convergente.*

Proposición 1.3.5. *Si* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n} a_k$ *es absolutamente convergente entonces para toda biyección* $\phi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$ *se cumple que* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^n} a_{\phi(k)}$ *es convergente y además*

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} a_k = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_{\phi(k)}.$$

1.4 Funciones analíticas

Dados $(a_k) \subset \mathbb{C}$ multisucesión de números complejos y $z_0 \in \mathbb{C}^n$ podemos definir la siguiente familia de polinomios

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C} \\ z &\to f_k(z) = a_k(z - z_0)^k. \end{aligned}$$

Definición 1.4.1. *Una **serie de potencias** de varias variables complejas, con centro en z_0 asociada a (a_k) evaluada en $z \in \mathbb{C}^n$, es dada por lo multiserie $\sum_{k \in \mathbb{N}^n} f_k(z)$ y denotada por $\sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k(z - z_0)^k$.*

En el caso particular $z_0 = 0$ diremos que la serie de potencias está centrada en el origen y denotada por $\sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k$.

Observación 1.4.1. Notar que existe una correspondencia biunívoca entre las series de potencias centradas en el origen asociadas a $(a_k) \subset \mathbb{C}$ y las series formales en las indeterminadas $z_1, z_2, \ldots, z_n$ con coeficientes $a_k \in \mathbb{C}$.

Definición 1.4.2. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $f : U \to \mathbb{C}$. Diremos que f es **analítica** en $z_0 \in U$ si y solo si existe $D \subseteq U$ polidisco abierto centrado en z_0 tal que la función f tiene una expansión en serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

la cual es convergente en D. Diremos que f es analítica en U si y solo si f es analítica en z_0 para todo $z_0 \in U$. El conjunto de todas las funciones analíticas en U es denotado por $\mathcal{O}(U)$.

Proposición 1.4.1. *Si $U \subseteq \mathbb{C}^n$ es abierto y $f \in \mathcal{O}(U)$ entonces f es continua en U. Además si fijamos $n-1$ variables y consideramos f como función de la variable restante entonces ella es una función analítica en una variable compleja.*

Observación 1.4.2. Si $U \subseteq \mathbb{C}^n$ es abierto y $f \in \mathcal{O}(U)$, entonces la función $\dfrac{\partial f}{\partial z_j}$ dada por

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_1, \ldots, z_j + h, \ldots, f_n) - f(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_n)}{h}$$

también es analítica en U. Además de manera recursiva podemos definir

$$\frac{\partial^{k_j} f}{\partial z_j^{k_j}}(z) = \frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial^{k_j - 1} f}{\partial z_j^{k_j - 1}}\right)$$

que es analítica en U para todo k_j natural.

Definición 1.4.3. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $f \in \mathcal{O}(U)$. Dado $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ definimos*

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k} = \frac{\partial^{k_1}}{\partial z_1^{k_1}} \left(\frac{\partial^{k_2}}{\partial z_j^{k_2}} \cdots \left(\frac{\partial^{k_n} f}{\partial z_n^{k_n}} \right) \cdots \right).$$

Teorema 1.4.1 (Fórmula integral de Cauchy). *Si $U \subseteq \mathbb{C}^n$ es abierto, $f \in \mathcal{O}(U)$ y $D[z_0, r] \subseteq U$ entonces*

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^n \int_\Gamma \frac{f(w_1, w_2, \ldots, w_n)}{(w_1 - z_1)(w_2 - z_2) \cdots (w_n - z_n)} dw_1 dw_2 \cdots dw_n,$$

para todo $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in D(z_0, r)$, donde

$$\Gamma = S_r[z_1^0] \times S_r[z_2^0] \times \cdots \times S_r[z_n^0].$$

Corolario 1.4.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $f \in \mathcal{O}(U)$, si $D[z_0, r] \subseteq U$ entonces*

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z) = \frac{k!}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(w_1, w_2, \ldots, w_n)}{(w_1 - z_1)^{k_1+1}(w_2 - z_2)^{k_2+1} \cdots (w_n - z_n)^{k_n+1}} dw_1 dw_2 \cdots dw_n,$$

para todo $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ y $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in D(z_0, r)$.

Teorema 1.4.2 (Estimativas de Cauchy). *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $f \in \mathcal{O}(U)$, si $D[z_0, r] \subseteq U$ y $M = \sup\{|f(z)| : z \in D[z_0, r]\}$ entonces*

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z_0) \right| \leq \frac{M k!}{r^{|k|}}$$

para todo $k \in \mathbb{N}^n$.

Teorema 1.4.3 (Lema de Schwarz). *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $f \in \mathcal{O}(U)$. Si $D[z_0, r] \subseteq U$ y además existe $m \geq 0$ tal que*

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z_0) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}^n$ tal que $|k| \leq m$, entonces

$$|f(z)| \leq \frac{M}{r^{m+1}} |z - z_0|^{m+1}$$

para todo $z \in D[z_0, r]$, donde $M = \sup\{|f(z)| : z \in D[z_0, r]\}$.

Definición 1.4.4. *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto. Diremos que* $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \to \mathbb{C}^m$ *es un* ***mapeo analítico*** *en* U *si y solo si* $f_1, f_2, \dots, f_m$ *son funciones analíticas en* U*. El conjunto de todos los mapeos analíticos en* U *es denotado por* $\mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$*. Si además sabemos que* $F(U) \subseteq V$*, donde* $V \subseteq \mathbb{C}^m$ *es abierto, entonces escribiremos* $F \in \mathcal{O}(U, V)$*. Además para cada* $k \in \mathbb{N}^n$ *denotaremos*

$$\frac{\partial^k F}{\partial z^k} = \left(\frac{\partial^k f_1}{\partial z^k}, \frac{\partial^k f_2}{\partial z^k}, \cdots, \frac{\partial^k f_m}{\partial z^k} \right).$$

Proposición 1.4.2. *Sean* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *y* $V \subseteq \mathbb{C}^m$ *abiertos. Si* $F \in \mathcal{O}(U, V)$ *y* $g \in \mathcal{O}(V)$ *entonces* $g \circ F \in \mathcal{O}(U)$*. Además si* $G \in \mathcal{O}(V, \mathbb{C}^p)$ *entonces* $G \circ F \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^p)$*.*

Teorema 1.4.4 (Lema de Schwarz)**.** *Sea* $U \subseteq \mathbb{C}^n$ *abierto y* $F \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$*. Si* $D[z_0, r] \subseteq U$ *y además existe* $m \geq 0$ *tal que*

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z_0) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}^n$ *tal que* $|k| \leq m$*, entonces*

$$\|F(z)\| \leq \frac{M}{r^{m+1}} |z - z_0|^{m+1}$$

para todo $z \in D[z_0, r]$*, donde* $M = \sup\{\|F(z)\| : \ z \in D[z_0, r]\}$*.*

Capítulo 2

Linealización formal

El primero en probar la linealización formal fue Poincaré en [13] utilizando la expansión en series de potencias. La prueba aquí presentada utiliza la convergencia en Jets y se encuentra en [9].

2.1 Resonancias

Consideremos el conjunto de $n-$uplas de números complejos

$$\mathbb{C}^n = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \ \lambda_j \in \mathbb{C}, \ \forall 1 \leq j \leq n\}.$$

Claramente hay un isomorfismo entre $\mathbb{C}^n$ y el conjunto de matrices diagonales $n-$dimensionales.

Definición 2.1.1. *Diremos que una matriz diagonal* $\Lambda = diag[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *pertenece al dominio de Poincaré* $(\mathcal{D}_P)$ *si la cápsula convexa formada por los n autovalores* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *en el plano complejo no contiene al origen, es decir,* $\Lambda \in \mathcal{D}_P$ *si y solo si*

$$t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2 + \cdots + t_n\lambda_n \neq 0$$

para todo $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ *tal que* $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$.

Diremos que Λ *pertenece al dominio de Siegel* $(\mathcal{D}_S)$ *si y solo si no pertenece al dominio de Poincaré.*

Definición 2.1.2. *Diremos que una* $n-$*upla* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ *es* ***resonante*** *si existe* $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ *con* $|k| \geq 2$ *y existe* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *tal que*

$$\lambda_i = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \cdots + k_n\lambda_n = k \cdot \lambda.$$

Además si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz diagonalizable con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces diremos que A es ***resonante*** *si y solo si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ es resonante.*

Observación 2.1.1. Si $\lambda_j = 0$ para algún $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces la $n-$upla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ es resonante pues basta considerar $i = j$ y $k = (0, \ldots, k_j, \ldots, 0)$ con $k_j \geq 2$ en la definición anterior. Por lo tanto $\lambda \in \mathbb{C}^n$ no resonante implica que $\lambda_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. En particular todos los autovalores de una matriz no resonante son diferentes de 0.

Lema 2.1.1. *Sea $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz diagonal no resonante. Para todo mapeo formal a con $ord(a) \geq 2$ existe un único mapeo formal h con $ord(h) \geq 2$ tal que*

$$h'(z) \cdot \Lambda(z) - (\Lambda \circ h)(z) = a(z).$$

Demostración:

Consideremos los desarrollos de a y h como series formales

$$\begin{aligned} a(z) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|k|\geq 2} a_k^i z^k \right) e_i \\ h(z) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|k|\geq 2} h_k^i z^k \right) e_i. \end{aligned}$$

Tenemos que Λ es una matriz diagonal, es decir, es de la forma $\mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ y consideremos la $n-$upla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Luego podemos encontrar los desarrollos en series formales de cada uno de los términos de la ecuación del lema en función de λ y de los coeficientes de a y h.

Calculemos primero $h'(z)$ recordando que $h'(z)$ es una matriz de $n \times n$

en la que cada entrada es una serie formal:

$$\begin{aligned}
h'(z) &= \left(\frac{\partial h_i}{\partial z_j}\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\sum_{|k|\geq 2} h_k^i z^k\right)\right)\\
&= \left(\sum_{|k|\geq 2} k_j h_k^i \frac{z^k}{z_j}\right) \in \mathbb{C}^{n\times n}[[z]].
\end{aligned}$$

También tenemos

$$\begin{aligned}
\Lambda(z) &= \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \cdot \sum_{i=1}^{n} z_j e_j\\
&= \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j z_j) e_j \in \mathbb{C}^n[[z]].
\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos matricialmente $h'(z)$ y $\Lambda(z)$:

$$\begin{aligned}
h'(z)\cdot\Lambda(z) &= \left(\sum_{|k|\geq 2} k_j h_k^i \frac{z^k}{z_j}\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j z_j) e_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|k|\geq 2} k_j h_k^i \frac{z^k}{z_j}\right)(\lambda_j z_j)\right) e_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{|k|\geq 2} \lambda_j k_j h_k^i z^k\right) e_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{|k|\geq 2}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j k_j\right) k^i z^k\right) e_i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{|k|\geq 2} (\lambda\cdot k) h_k^i z^k\right) e_i \in \mathbb{C}^n[[z]].
\end{aligned}$$

Ahora realizamos la composición de $\Lambda(z)$ y $h(z)$:

$$\begin{aligned}
(\Lambda \circ h)(z) &= \Lambda(h(z)) \\
&= \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|k|\geq 2} h_k^i z^k \right) e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|k|\geq 2} \lambda_i h_k^i z^k \right) e_i \in \mathbb{C}^n[[z]].
\end{aligned}$$

Al restar estos dos resultados y reemplazar en la ecuación inicial nos queda:

$$\begin{aligned}
h'(z) \cdot \Lambda(z) - (\Lambda \circ h)(z) &= a(z) \\
\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|k|\geq 2} (\lambda \cdot k) h_k^i z^k \right) e_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|k|\geq 2} \lambda_i h_k^i z^k \right) e_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|k|\geq 2} a_k^i z^k \right) e_i \\
\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|k|\geq 2} (\lambda \cdot k - \lambda_i) h_k^i z^k \right) e_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{|k|\geq 2} a_k^i z^k \right) e_i.
\end{aligned}$$

Luego para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumple

$$\sum_{|k|\geq 2} (\lambda \cdot k - \lambda_i) h_k^i z^k = \sum_{|k|\geq 2} a_k^i z^k.$$

Concluimos que para todo $k \in \mathbb{N}^n$ se debe cumplir que

$$(\lambda \cdot k - \lambda_i) h_k^i = a_k^i.$$

Por ser Λ una matriz no resonante tenemos que $\lambda \cdot k - \lambda_i$ es distinto de 0, luego para cada $k \in \mathbb{N}^n$ y para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe un único valor posible para h_k^i el cual es

$$h_k^i = \frac{a_k^i}{\lambda \cdot k - \lambda_i}.$$

$\square$

Motivados por el lema anterior, dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matriz cuadrada, podemos definir el siguiente operador

$$\begin{aligned}
L_A : \mathbb{C}[[z]]^n &\to \mathbb{C}[[z]]^n \\
H &\to H' \cdot A - A \circ H.
\end{aligned}$$

De manera más explícita $L_A(H)$ es un mapeo formal dado por

$$L_A(H)(z) = H'(z) \cdot Az - A(H(z)).$$

Proposición 2.1.1. *L_A es una transformación lineal.*

Demostración:

Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y $H, G \in \mathbb{C}[[z]]^n$, entonces

$$\begin{aligned} L_A(aH + bG)(z) &= (aH + bG)'(z) \cdot Az - A(aH(z) + bG(z)) \\ &= (aH'(z) + bG'(z)) \cdot Az - (aA(H(z)) + bA(G(z))) \\ &= a(H'(z) \cdot Az - A(H(z))) + b(G'(z) \cdot Az - A(G(z))) \\ &= aL_A(H)(z) + bL_A(G)(z). \end{aligned}$$

De aquí concluimos que

$$L_A(aH + bG) = aL_A(H) + bL_A(G)$$

y por lo tanto L_A es una transformación lineal. □

Teorema 2.1.1. *Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una matriz diagonalizable no resonante, entonces el operador L_A restringido a los mapeos formales de orden mayor o igual que 2 es inversible.*

Demostración:

Por el teorema de la forma canónica de Jordan existe una matriz inversible P tal que $A = P^{-1}\lambda P$, donde Λ es una matriz diagonal. Por el lema 2.1.1 se cumple que L_Λ es inversible. Por la proposición anterior ya sabemos que L_A es una transformación lineal. Ahora probaremos que L_A es inversible. Sea V un mapeo formal con $ord(V) \geq 2$, entonces PVP^{-1} es un mapeo formal. Como L_Λ es inversible entonces existe $h \in \mathbb{C}^n$ con

$ord(h) \geq 2$ tal que $L_\Lambda(h) = PVP^{-1}$, luego

$$\begin{aligned} V &= P^{-1}L_\Lambda(h)P \\ &= P^{-1}\left(h' \cdot \Lambda - \Lambda \circ h\right)P \\ &= \left(P^{-1}h\right)'(\Lambda P) - (P^{-1}\Lambda)(hP) \\ &= \left(P^{-1}h\right)' \cdot (PA) - (AP^{-1})(hP) \\ &= (P^{-1}hP)' \cdot A - A(P^{-1}hP) \\ &= \tilde{h}' \cdot A - A \circ \tilde{h} \\ &= L_A(\tilde{h}). \end{aligned}$$

Concluimos que existe $\tilde{h} = P^{-1}hP$ mapeo formal tal que $L_A(\tilde{h}) = V$ y como V es arbitrario tenemos que L_A es sobreyectiva en el conjunto de mapeos formales de orden mayor o igual a 2.

Además si $L_A(h) = 0$, entonces al igual que en el paso anterior tenemos que

$$L_A(h) = P^{-1}L_\Lambda(h)P = 0 \Rightarrow L_\Lambda(h) = 0.$$

Por el lema 2.1.1 tenemos que $h = 0$ es el único mapeo de orden mayor o igual a 2 que satisface esta relación. Luego el núcleo de L_A es trivial y por lo tanto L_A es inversible cuando se restringe a los mapeos formales de orden mayor o igual a 2. □

2.2 Linealización formal

Definición 2.2.1. *Diremos que los mapeos formales Z y W son **formalmente equivalentes** si existe $H \in Diff[[\mathbb{C}^n]]$ tal que*

$$H' \cdot Z = W \circ H.$$

*H será llamado **conjugación formal** entre Z y W.*

Observación 2.2.1. La relación anterior es una relación de equivalencia.

Proposición 2.2.1. *Si Z es un mapeo formal con parte lineal A, entonces existe un mapeo formal W con parte lineal J_A tal que Z y W son formalmente equivalentes, donde J_A es la forma canónica de Jordan de A.*

<u>*Demostración:*</u>

Sabemos que existe P inversible tal que $J_A = P^{-1}AP$, entonces consideremos el mapeo formal

$$W = P^{-1} \cdot (Z \circ P).$$

Tenemos que W y Z son formalmente equivalentes, pues basta considerar el difeomorfismo formal $H = P$, recordando que por ser una transformación lineal se cumple que $H' = P$. Luego solo nos queda probar que la parte lineal de W es J_A:

$$W = P^{-1} \cdot (Z \circ P) \Rightarrow P \cdot W = Z \circ P.$$

Derivando formalmente nos queda

$$P' \cdot W + P \cdot W' = (Z' \circ P) \cdot P'.$$

Recordando que $W(0) = P(0) = 0$ y $Z'(0) = A$, al evaluar en 0 obtenemos:

$$\begin{aligned} P' \cdot W(0) + P \cdot W'(0) &= (Z' \circ P(0)) \cdot P \\ P \cdot W'(0) &= Z'(0) \cdot P \\ W'(0) &= P^{-1} \cdot A \cdot P \\ W'(0) &= J_A. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.2.1. *Sea $m \geq 2$ entero y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no resonante. Si Z es un mapeo formal con $\mathfrak{J}^{m-1}(Z) = Az$, entonces existe $H \in Diff[[\mathbb{C}^n]]$ tipo perturbación de la identidad y existe $\tilde{Z}$ mapeo formal tal que H es una conjugación formal entre Z y $\tilde{Z}$. Además se cumple que $\mathfrak{J}^m(\tilde{Z}) = Az$.*

<u>*Demostración:*</u>

Como $\mathfrak{J}^{m-1}(Z) = Az$, entonces podemos expresar Z de la siguiente forma

$$Z = Az + Z_m + Z_{m+1} + \cdots ,$$

donde para cada $i \geq m$ se cumple que Z_i es un polinomio homogégneo de grado i. En particular Z_m es un mapeo formal de orden mayor o igual a

2, luego por el teorema 2.1.1 existe $h \in \mathbb{C}[[z]]^n$ con $ord(h) \geq 2$ tal que $L_A(h) = Z_m$. Por el lema 2.1.1 se cumple que $ord(h) \geq m$.

Si definimos $H = I + h$, entonces tenemos que H es un difeomorfismo formal tipo perturbación de la identidad. Luego $H' \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y está dada por $H' = I + h'$. Por el teorema 1.2.1 tenemos que $H' \in Diff[[\mathbb{C}^{n\times n}]]$ y además su inversa $(H')^{-1}$ está dada por

$$(H')^{-1} = I - h' + (h')^2 - (h')^3 + \cdots$$

Luego podemos definir el mapeo formal $\tilde{Z}$ como $\tilde{Z} = (H')^{-1} \cdot (Z \circ H)$, es decir,

$$\tilde{Z}(z) = (H')^{-1}(z) \cdot (Z(z + h(z)))\,.$$

La relación $Z \circ H = H' \cdot Z'$ implica que H es una conjugación formal entre Z y $\tilde{Z}$. Nos falta probar que $\mathfrak{J}^m(\tilde{Z}) = Az$. Tenemos

$$\tilde{Z}(z) = \left[I - h'(z) + (h'(z))^2 - (h'(z))^3 + \cdots\right] \cdot \left[A(z + h(z)) + Z_m(z + h(z)) + \cdots\right].$$

Los términos de orden mayor que m los ubicaremos en puntos suspensivos:

$$\tilde{Z}(z) = A(z + h(z)) + Z_m(z + h(z)) + \cdots - h'(z) \cdot [A(z + h(z)) + \cdots] + \cdots$$

Como $\mathfrak{J}^m(Z_m(z + h(z))) = Z_m(z)$, entonces nos queda

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}^m\left(\tilde{Z}(z)\right) &= \mathfrak{J}^m\left(Az + A(h(z)) + Z_m(z) - h'(z) \cdot Az\right) \\ &= \mathfrak{J}^m\left(Az + Z_m(z) - L_A(h)(z)\right) \\ &= \mathfrak{J}^m(Az) \\ &= Az. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.1 (Linealización de Poincaré). *Un mapeo formal Z no resonante es formalmente equivalente al campo lineal Az, donde $A = Z'(0)$.*

Demostración:

Realizaremos la prueba de este resultado por inducción.

Para el paso inicial como $Z(0) = 0$, podemos renombrar $Z_1 = Z$ tal que $\mathfrak{J}^1(Z_1) = Az$, entonces por el lema anterior existe H_1 difeomorfismo formal tipo perturbación de la identidad y existe Z_2 mapeo formal tal que H_1 es una conjugación formal entre Z_1 y Z_2, y además se cumple que $\mathcal{J}^2(Z_2) = Az$.

En el paso inductivo, si para $m \geq 2$ tenemos que existe Z_m mapeo formal tal que $\mathcal{J}^m(Z_m) = Az$, entonces por el lema anterior existe H_m difeomorfismo formal tipo perturbación de la identidad y existe Z_{m+1} mapeo formal tal que H_m es una conjugación formal entre Z_m y Z_{m+1}. Además se cumple que $\mathcal{J}^{m+1}(Z_{m+1}) = Az$.

Luego para cada $m \geq 1$ definimos $\tau_m \in Diff[[\mathbb{C}^n]]$ como

$$\tau_m = \begin{cases} H_1 & \text{si} \quad m = 1 \\ \\ \tau_{m-1} \circ H_m & \text{si} \quad m \geq 2. \end{cases}$$

Probaremos por inducción sobre m que τ_m es una conjugación formal entre Z_1 y Z_{m+1}. El paso inicial $m = 1$ corresponde al primer párrafo de la prueba. Sea $m \geq 2$ y supongamos que este resultado es válido para $m - 1$, es decir, supongamos que τ_{m-1} es una conjugación formal entre Z_1 y Z_m, entonces

$$Z_1 \circ \tau_{m-1} = \tau'_{m-1} \cdot Z_m.$$

Además H_m es una conjugación formal entre Z_m y Z_{m+1}, es decir,

$$Z_m \circ H_m = H'_m \cdot Z_{m+1}.$$

Al reemplazar lo anterior y componer con H_m en ambos lados nos queda

$$\begin{array}{rcl} (Z_1 \circ \tau_{m-1}) \circ H_m & = & (\tau'_{m-1} \cdot Z_m) \circ H_m \\ Z_1 \circ (\tau_{m-1} \circ H_m) & = & (\tau'_{m-1} \circ H_m) \cdot (Z_m \circ H_m) \\ Z_1 \circ \tau_m & = & (\tau'_{m-1} \circ H_m) \cdot (H'_m \cdot Z_{m+1}) \\ Z_1 \circ \tau_m & = & ((\tau'_{m-1} \circ H_m) \cdot H'_m) \cdot Z_{m+1} \\ Z_1 \circ \tau_m & = & (\tau_{m-1} \circ H_m)' \cdot Z_{m+1} \\ Z_1 \circ \tau_m & = & \tau'_m \cdot Z_{m+1}. \end{array}$$

La última igualdad nos dice que τ_m es una conjugación formal entre Z_1 y Z_{m+1}, lo que termina lo inducción.

Si tomamos $H = \lim_{m\to\infty} \tau_m$, entonces se cumple que $\lim_{m\to\infty} \tau'_m = H'$. Además por el teorema 1.2.1 tenemos que H es un difeomorfismo formal tipo perturbación de la identidad.

Como para todo $m \geq 1$ tenemos que $\mathfrak{J}^m(Z_m) = Az$, entonces $\lim_{m\to\infty} Z_m = Az$, usando este resultado y la afirmación anterior nos queda

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} Z_1 \circ \tau_m &= \lim_{m\to\infty} \tau'_m \cdot Z_{m+1} \\ Z_1 \circ \lim_{m\to\infty} \tau_m &= \left(\lim_{m\to\infty} \tau'_m\right) \cdot \left(\lim_{m\to\infty} Z_{m+1}\right) \\ Z_1 \circ H &= H' \cdot Az. \end{aligned}$$

Recordando que $Z_1 = Z$ tenemos que existe $H \in Diff[[\mathbb{C}^n]]$ tal que

$$Z \circ H = H' \cdot Az,$$

luego Z es formalmente equivalente al campo lineal Az.

Corolario 2.2.1. *El difeomorfismo formal que linealiza un mapeo formal no resonante es único.*

Capítulo 3

Teorema de Siegel

En este capítulo daremos la prueba del teorema de Siegel para campos utilizando el método dado por Arnold en [1]. En dicho se da la prueba para difeomorfismos, pero como Arnold sugiere dicha prueba se puede modificar para el caso de campos. La prueba original de este resultado la dio Siegel en [14].

3.1 Condición de Siegel

Definición 3.1.1. *Sean C y ν números reales positivos y sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Diremos que λ satisface la condición (C, ν) si se cumple que*

$$|\lambda \cdot k - \lambda_s| \geq \frac{C}{|k|^\nu}$$

para todo $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y para todo $k \in \mathbb{N}^n$ con $|k| \geq 2$.

Diremos que la matriz diagonal $\Lambda = diag[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisface la condición (C, ν) si y solo si el correspondiente $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$satisface la condición (C, ν).

Si λ (entiéndase Λ) satisface alguna condición del tipo (C, ν) entonces diremos que λ satisface la ***condición de Siegel****, también conocida como condición diofantina.*

Observación 3.1.1. Podemos notar claramente que si λ es resonante entonces λ no satisface la condición de Siegel.

El siguiente teorema muestra porque esta condición mejora la condición dada por Poincaré.

Teorema 3.1.1. *Si $\lambda \in D_P$ es no resonante entonces λ cumple la condición de Siegel.*

<u>*Demostración:*</u>

Sea $K \subset \mathbb{C}$ la cápsula convexa de los puntos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, donde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Como $\lambda \in D_P$ y K es compacto entonces la distancia M del origen a K es positiva, luego

$$|t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2 + \cdots + t_n\lambda_n| \geq M$$

para todo $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ tal que $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. Sea $k \in \mathbb{N}^n$ con $|k| \geq 2$ y consideremos $t_i = \dfrac{k_i}{|k|}$, reemplazando en la desigualdad anterior nos queda

$$|\lambda \cdot k| \geq M|k|.$$

Por estar los λ_i prefijados tenemos que existe N natural tal que

$$|k| > N \Rightarrow |k| \geq \frac{|\lambda_s| + 1}{M}$$

para todo $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Luego por la desigualdad triangular tenemos

$$|\lambda \cdot k - \lambda_s| \geq |\lambda \cdot k| - |\lambda_s| \geq M|k| - |\lambda_s| \geq 1.$$

Por ser λ no resonante tenemos que el conjunto

$$\{|\lambda \cdot k - \lambda_s| : \ |k| \geq N, \ 1 \leq s \leq n\}$$

es finito y está formado por números diferentes de 0. Sea $m > 0$ el mínimo de dicho conjunto, si consideramos $C = \min\{m, 1\}$ y $\nu > 0$ arbitrario entonces se cumple que

$$|\lambda \cdot k - \lambda_s| \geq C \geq \frac{C}{|k|^\nu}$$

para todo $k \in \mathbb{N}^n$ con $|k| \geq 2$ y para todo $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$, es decir, λ satisface la condición de Siegel.

$\square$

Teorema 3.1.2. *Si $C > 0$ y $\nu > \dfrac{n-2}{2}$ entonces el conjunto formado por los λ que cumplen la condición (C, ν) tiene medida nula en $\mathbb{C}^n$.*

La prueba de este último resultado se puede encontrar en el libro de Arnold [1].

3.2 El espacio $\mathcal{X}_0$

Introduciremos ahora un nuevo espacio ambiente en el cual sea más fácil manejar la convergencia de nuestras aproximaciones, comenzaremos definiendo el espacio $\mathcal{X}_r$.

Definición 3.2.1. *Sea r un número real positivo, el espacio $\mathcal{X}_r$ será el conjunto de todos los mapeos f continuos en el polidisco cerrado de radio ry analíticos en su interior tales que $f(0) = 0$.*

Observación 3.2.1. Con la suma usual de mapeos tenemos que si $f \in \mathcal{X}_r$ y $g \in \mathcal{X}_r$, entonces $f + g \in \mathcal{X}_r$. También si $c \in \mathbb{C}$ entonces $cf \in \mathcal{X}_r$. Con esto tenemos que $\mathcal{X}_r$ es un espacio vectorial complejo.

Por el lema de Schwarz tenemos que si $f \in \mathcal{X}_r$ entonces para todo $z \in D[0, r]$ se cumple que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{r}|z|,$$

donde $M = \max\{|f(z)| : \ z \in D[0, r]\}$. Luego tiene sentido definir

$$\|f\|_r = \sup\left\{\frac{|f(z)|}{|z|} : \ z \in D[0, r] - \{0\}\right\}.$$

Observación 3.2.2. Si $0 < r_1 < r_2$ entonces $\|f\|_{r_1} \leq \|f\|_{r_2}$.

Proposición 3.2.1. *El espacio $(\mathcal{X}_r, \|\|_r)$ es un espacio vectorial normado.*

<u>*Demostración:*</u>

Por la observación 3.2.1 solo nos queda probar que $\|\|_r$ es una norma para el espacio $\mathcal{X}_r$. Sea $z \in D[0, r] - \{0\}$, entonces por la desigualdad triangular tenemos que

$$\begin{aligned}
|f(z) + g(z)| &\leq |f(z)| + |g(z)| \\
\frac{|f(z) + g(z)|}{|z|} &\leq \frac{|f(z)|}{|z|} + \frac{|g(z)|}{|z|} \\
\frac{|f(z) + g(z)|}{|z|} &\leq \|f\|_r + \|g\|_r \\
\|f + g\|_r &\leq \|f\|_r + \|g\|_r .
\end{aligned}$$

También se cumple que si $c \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{aligned} |cf(z)| &= |c| \cdot |f(z)| \\ \frac{|cf(z)|}{|z|} &= |c| \cdot \frac{|f(z)|}{|z|} \\ \|cf\|_r &= |c| \, \|f\|_r \, . \end{aligned}$$

Además

$$\|f\|_r = 0 \Rightarrow \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 0 \Rightarrow |f(z)| = 0$$

para todo $z \in D[0, r] - \{0\}$ y como $f(0) = 0$ concluimos que $f = 0 \in \mathcal{X}_r$. Luego con esta norma tenemos que $\mathcal{X}_r$ es un espacio vectorial normado.

□

Definición 3.2.2. *Definimos el espacio $\mathcal{X}_0$ como la unión de todos los espacios $\mathcal{X}_r$, es decir,*

$$\mathcal{X}_0 = \{f : \; f \in \mathcal{X}_r \text{ para algún } r > 0\} = \bigcup_{r>0} \mathcal{X}_r.$$

Proposición 3.2.2. *Sean r y δ reales positivos y $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ un mapeo analítico en el polidisco $D[0, r]$, entonces se cumple que*

$$\|h'(z)\| \leq \frac{\|h\|_r}{(1 - e^{-\delta})^{n+1}}$$

para todo z con $|z| \leq re^{-\delta}$.

Demostración:

Como para cada i tenemos que h_i es analítica en $D[0, r]$, entonces por la fórmula integral de Cauchy sabemos que si $|z| \leq r$ entonces

$$\frac{\partial h_i}{\partial z_j}(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|\xi_j| = r_j} \frac{h_i(\xi) d\xi_1 \cdots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_j - z_j)^2 \cdots (\xi_n - z_n)},$$

donde $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n$ y en este caso el poliradio $(r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ cumple que $r_j = r$ para todo $j = 1, \ldots, n$.

Recordando que $|h(z)| = \max\{|h_i(z)| : \ 1 \leq i \leq n\}$ y tomando módulo en la integral anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{|\xi_j|=r} \frac{h_i(\xi) d\xi_1 \cdots d\xi_n}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_j - z_j)^2 \cdots (\xi_n - z_n)} \right| \\
\leq &\int_{|\xi_j|=r} \frac{|h_i(\xi)| d\xi_1 \cdots d\xi_j \cdots d\xi_n}{|\xi_1 - z_1| \cdots |\xi_j - z_j|^2 \cdots |\xi_n - z_n|} \\
\leq &\int_{|\xi_j|=r} \frac{|\xi| \frac{|h_i(\xi)|}{|\xi|} d\xi_1 \cdots d\xi_j \cdots d\xi_n}{|\xi_1 - z_1| \cdots |\xi_j - z_j|^2 \cdots |\xi_n - z_n|} \\
\leq &\int_{|\xi_j|=r} \frac{|\xi| \, \|h\|_r \, d\xi_1 \cdots d\xi_j \cdots d\xi_n}{|\xi_1 - z_1| \cdots |\xi_j - z_j|^2 \cdots |\xi_n - z_n|}.
\end{aligned}$$

Como tenemos $|\xi_j| = r$ para todo $j = 1, \ldots, n$ entonces $|\xi| = r$, luego de la desigualdad anterior y la fórmula integral de Cauchy nos queda

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial z_j}(z) \right| \leq \frac{r \, \|h\|_r}{(2\pi)^n} \int_{|\xi_j|=r} \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_j \cdots d\xi_n}{|\xi_1 - z_1| \cdots |\xi_j - z_j|^2 \cdots |\xi_n - z_n|}.$$

También como $|z| \leq re^{-\delta}$ entonces para todo j se cumple que $|z_j| \leq re^{-\delta}$, luego por la desigualdad triangular tenemos

$$|\xi_j - z_j| \geq |\xi_j| - |z_j| \geq r - re^{-\delta} \Rightarrow \frac{1}{|\xi_j - z_j|} \leq \frac{1}{r(1 - e^{-\delta})}.$$

Al calcular la integral múltiple en cada variable y reemplazar lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial h_i}{\partial z_j}(z) \right| &\leq \frac{r \, \|h\|_r}{(2\pi)^n} \left[\int_{|\xi_1 = r|} \frac{d\xi_1}{|\xi_1 - z_1|} \cdots \int_{|\xi_j = r|} \frac{d\xi_j}{|\xi_j - z_j|^2} \cdots \int_{|\xi_n = r|} \frac{d\xi_n}{|\xi_n - z_n|} \right] \\
&\leq \frac{r \, \|h\|_r}{(2\pi)^n} \left[\frac{1}{r^{n+1}(1 - e^{-\delta})^{n+1}} \int_{|\xi_1 = r|} d\xi_1 \cdots \int_{|\xi_j = r|} d\xi_j \cdots \int_{|\xi_n = r|} d\xi_n \right] \\
&= \frac{r \, \|h\|_r}{(2\pi)^n} \left[\frac{1}{r^{n+1}(1 - e^{-\delta})^{n+1}} (2\pi r) \cdots (2\pi r) \cdots (2\pi r) \right] \\
&= \frac{\|h\|_r}{(1 - e^{-\delta})^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Luego para todo $z \in \mathbb{C}^n$ con $|z| \leq re^{-\delta}$ podemos concluir que

$$\|h'(z)\| = \max \left\{ \left| \frac{\partial h_i}{\partial z_j}(z) \right| : \ 1 \leq i, j \leq n \right\} \leq \frac{\|h\|_r}{(1 - e^{-\delta})^{n+1}}.$$

$\square$

Proposición 3.2.3. *Sea* $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *una matriz diagonal que satisface la condición* (C,ν) *y sea* r *y* δ *reales positivos, entonces para toda función* $a \in \mathfrak{X}_r$ *con* $ord(a) \geq 2$ *existe una única función* $h \in \mathfrak{X}_{re^{-\delta}}$ *con* $ord(h) \geq 2$ *tal que*

$$h'(z)\cdot\Lambda(z) - (\Lambda \circ h)(z) = a(z)$$

para todo $z \in D(0, re^{-\delta})$. *Además para cada* $\delta \in (0,\frac{1}{2})$ *se cumple la desigualdad*

$$\|h\|_{re^{-\delta}} \leq \delta^{-\alpha}\|a\|_r$$

donde α *es una constante positiva que no depende de* δ, a *o* r.

<u>*Demostración:*</u>

Por el lema 2.1.1 podemos resolver de manera formal dicha ecuación y además la solución $h \in \mathbb{C}^n[[z]]$ es única y está dada por

$$h(z) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{|k|\geq 2} h_k^i z^k\right) e_i,$$

donde $h_k^i = \dfrac{a_k^i}{\lambda\cdot k - \lambda_i}$.

Vamos a probar que $h \in \mathfrak{X}_{re^{-\delta}}$ y que además satisface la desigualdad pedida. Como a es continua, sea $M = \max\{|a(z)| : \ |z| \leq r\}$, entonces usando las estimativas de Cauchy tenemos que

$$|a_k^i| \leq \frac{M}{r^{|k|}} \Rightarrow |h_k^i| \leq \frac{M}{r^{|k|}(\lambda\cdot k - \lambda_i)}.$$

Como la matriz Λ satisface la condición (C,ν) podemos acotar el denominador para finalmente obtener

$$|h_k^i| \leq \frac{M|k|^\nu}{r^{|k|}C}.$$

Como en $h_i(z) = \displaystyle\sum_{|k|\geq 2} h_k^i z^k$ tenemos una cantidad no mayor de $(n+1)\rho^{n-1}$ términos de grado ρ, entonces

$$\left|\sum_{|k|=\rho} h_k^i z^k\right| \leq MC^{-1}(n+1)\rho^{\nu+n-1}\frac{|z|^\rho}{r^\rho}.$$

Definamos las constantes $C_1 = C^{-1}(n+1)$ y $m = \nu+n-1$ y sea $\delta \in (0, 1/2)$. Si consideramos $z \in D[0, re^{-\delta}]$ en la desigualdad anterior nos queda

$$\begin{aligned} \left|\sum_{|k|=\rho} h_k^i z^k\right| &\leq MC_1\rho^m \frac{|z|}{r} e^{-\delta(\rho-1)} \\ \left|\sum_{|k|=\rho} h_k^i z^k\right| &\leq M\frac{|z|}{r} C_1 e^{\delta}\rho^m e^{-\delta\rho}. \end{aligned}$$

Consideremos la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $g(t) = t^m e^{-t}$. Como $g'(t) = t^{m-1}e^{-t}(m-t)$, entonces g es estrictamente creciente en el intervalo $(0, m)$ y es decreciente en el intervalo (m, ∞), es decir, g alcanza su máximo valor en el punto $t = m$ y dicho máximo es igual a $g(m) = m^m e^{-m}$. Entonces para todo $t > 0$ se cumple que

$$t^m e^{-t} \leq m^m e^{-m}.$$

En particular para $t = \dfrac{\delta\rho}{2}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta\rho}{2}\right)^m e^{-\frac{\delta\rho}{2}} &\leq m^m e^{-m} \\ \rho^m e^{-\frac{\delta\rho}{2}} &\leq \left(\frac{2m}{e}\right)^m \delta^{-m}. \end{aligned}$$

Reemplazando esto en la desigualdad anterior nos queda

$$\left|\sum_{|k|=\rho} h_k^i z^k\right| \leq M\frac{|z|}{r} C_1 e^{\delta} e^{-\frac{\delta\rho}{2}} \left(\frac{2m}{e}\right)^m \delta^{-m}.$$

Recordemos que $e^{\delta} < e^{\frac{1}{2}}$ y si definimos la constante $C_2 = C_1 e^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{2m}{e}\right)^m$ al reemplazar obtenemos

$$\left|\sum_{|k|=\rho} h_k^i z^k\right| \leq M\frac{|z|}{r} C_2 e^{-\frac{\delta\rho}{2}} \delta^{-m}.$$

Sumando sobre ρ nos queda

$$\begin{aligned}
|h_i(z)| &= \left|\sum_{|k|\geq 2} h_k^i z^k\right| \\
&\leq \sum_{\rho=2}^{\infty}\left|\sum_{|k|=\rho} h_k^i z^k\right| \\
&\leq \sum_{\rho=2}^{\infty} M\frac{|z|}{r}C_2 e^{-\frac{\delta\rho}{2}}\delta^{-m} \\
&= M\frac{|z|}{r}C_2\delta^{-m}\sum_{\rho=2}^{\infty} e^{-\frac{\delta\rho}{2}} \\
&= M\frac{|z|}{r}C_2\delta^{-m}\frac{e^{-\delta}}{1-e^{-\frac{\delta}{2}}} \\
&= M\frac{|z|}{r}C_2\delta^{-m}\frac{1}{e^{\delta}-e^{\frac{\delta}{2}}}.
\end{aligned}$$

Como lo anterior vale para todo i entonces nos queda

$$|h(z)| \leq M\frac{|z|}{r}C_2\delta^{-m}\frac{1}{e^{\delta}-e^{\frac{\delta}{2}}}.$$

Por la desigualdad de Bernoulli se cumple que

$$\begin{aligned}
e^{\frac{\delta}{2}} &\geq 1+(e-1)\frac{\delta}{2} \\
e^{\frac{\delta}{2}}(e^{\frac{\delta}{2}}-1) &\geq (e-1)\frac{\delta}{2} \\
e^{\delta}-e^{\frac{\delta}{2}} &\geq \delta^2 \\
\frac{1}{e^{\delta}-e^{\frac{\delta}{2}}} &\leq \delta^{-2}.
\end{aligned}$$

También sabemos que por ser C_2 una constante positiva existe $\alpha_1 > 0$ tal que

$$C_2 \leq 2^{\alpha_1} \leq \delta^{-\alpha_1}.$$

Sea $\alpha = \alpha_1 + m + 2$, entonces nos queda

$$|h(z)| \leq M\frac{|h(z)|}{r}\delta^{-\alpha}.$$

Lo primero que podemos observar es que h es convergente para todo $z \in D[0, re^{-\delta}]$ y como δ era un número arbitrario del intervalo $(0, 1/2)$ entonces h es convergente en $D(0, r)$, en particular h es continua en $D[0, re^{-\delta}]$ y como $ord(h) \geq 2$ podemos concluir que $h \in \mathcal{X}_{re^{-\delta}}$.

También de la desigualdad obtenida tenemos que para todo $z \in D[0, re^{-\delta}]$ se cumple que

$$|h(z)| \leq M\frac{|h(z)|}{r}\delta^{-\alpha}.$$

Por definición sabemos que para $|z| \leq r$ se cumple

$$\frac{|a(z)|}{|z|} \leq \|a\|_r \Rightarrow |a(z)| \leq \|a\|_r\, r.$$

Reemplazando en la desigualdad anterior nos queda

$$\frac{|h(z)|}{|z|} \leq \|a\|_r\, \delta^{-\alpha}$$

para todo $z \in D[0, re^{-\delta}]$. Finalmente al tomar el supremo en dicho disco obtenemos la desigualdad requerida

$$\|h\|_{re^{-\delta}} \leq \delta^{-\alpha}\, \|a\|_r\, .$$

□

3.3 Orden de operadores

Definición 3.3.1. *Un* ***operador*** *es una función $\Phi : \mathcal{X}_0 \to \mathcal{X}_0$. Diremos que un operador Φ tiene orden d si existen constantes positivas α y β tales que para todo $\delta \in (0, 1/2)$ y para todo $r \in (0, 1)$ se cumple que*

$$\|f\|_r \leq \delta^{\beta} \Rightarrow \|\Phi[f]\|_{re^{-\delta}} \leq \|f\|_r^d\, \delta^{-\alpha}.$$

Proposición 3.3.1. *Si Φ_1 y Φ_2 son operadores de orden d, entonces $\Phi_1 + \Phi_2$ también es un operador de orden d.*

<u>*Demostración:*</u>

De la definición anterior existen constantes positivas α_1, α_2, β_1 y β_2 tales que para todo $\delta \in (0, 1/2)$ y para todo $r \in (0, 1)$ se cumple que

$$\begin{array}{rcl} \|f\|_r \leq \delta^{\beta_1} & \Rightarrow & \|\Phi_1[f]\|_{re^{-\delta}} \leq \|f\|_r^d \, \delta^{-\alpha_1} \\ \|f\|_r \leq \delta^{\beta_2} & \Rightarrow & \|\Phi_2[f]\|_{re^{-\delta}} \leq \|f\|_r^d \, \delta^{-\alpha_2}. \end{array}$$

Tomemos $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$, entonces $\|f\|_r \leq \delta^\beta$ implica

$$\|(\Phi_1 + \Phi_2)[f]\|_{re^{-\delta}} \leq \|\Phi_1[f]\|_{re^{-\delta}} + \|\Phi_2[f]\|_{re^{-\delta}} \leq \|f\|_r^d \, (\delta^{-\alpha_1} + \delta^{-\alpha_2}).$$

Si consideramos $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ y $\alpha = \alpha_0 + 1$ tenemos

$$\delta^{-\alpha_1} + \delta^{-\alpha_2} \leq 2\delta^{-\alpha_0} \leq \delta^{-\alpha}.$$

Reemplazando en la desigualdad anterior nos queda

$$\|f\|_r \leq \delta^\beta \Rightarrow \|(\Phi_1 + \Phi_2)[f]\|_{re^{-\delta}} \leq \|f\|_r^d \, \delta^{-\alpha},$$

lo cual por definición nos dice que $\Phi_1 + \Phi_2$ es un operador de orden d.

□

Ejemplo 3.3.1. Debido a la proposición 3.2.3 tenemos que para cada $a \in \mathfrak{X}_0$ con $ord(a) \geq 2$ existe un único mapeo $h \in \mathfrak{X}_0$ con $ord(h) \geq 2$ tal que

$$h'(z) \cdot \Lambda(z) - (\Lambda \circ h)(z) = a(z).$$

Luego podemos definir el operador

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathfrak{X}_0 & \rightarrow & \mathfrak{X}_0 \\ a & \rightarrow & h \end{array}$$

También por la misma proposición existe $\alpha > 0$ tal que si $a \in \mathfrak{X}_r$ y para todo $\delta \in (0, 1/2)$ se cumple que

$$\|h\|_{re^{-\delta}} \leq \delta^{-\alpha} \|a\|_r \, .$$

Luego para todo $r \in (0, 1)$ y para todo $\delta \in (0, 1/2)$ se cumple que

$$\|\Phi[a]\|_{re^{-\delta}} \leq \delta^{-\alpha} \|a\|_r \, .$$

Con esto podemos afirmar que el operador Φ tiene orden 1.

□

En el ejemplo anterior pudimos tomar β de forma arbitraria, sin embargo en los demás operadores que analizaremos ese no es el caso.

Sea $a \in \mathfrak{X}_r$ y consideremos

$$\begin{aligned} h(z) &:= \Phi[a](z) \\ Z(z) &:= \Lambda z + a(z) \\ H(z) &:= z + h(z). \end{aligned}$$

Luego podemos definir el operador R de la siguiente manera

$$R[a](z) := (H')^{-1}(z) \cdot (Z \circ H)(z) - \Lambda z.$$

Recordemos que si $\|h'\| < 1$ entoncesse cumple que

$$\begin{aligned} (H')^{-1} &= I - h' + (h')^2 - (h')^3 + \cdots \\ &= I - h' + (h')^2 \cdot (H')^{-1}. \end{aligned}$$

Reemplazando en lo anterior nos queda

$$\begin{aligned} R[a](z) &= (\Lambda \circ h)(z) - h'(z) \cdot \Lambda(z) + a(z + h(z)) \\ &\quad -h'(z) \cdot (\Lambda \circ h)(z) - h'(z) \cdot a(z + h(z)) \\ &\quad + \left((h')^2 \cdot (H')^{-1}\right)(z) \cdot \left[\Lambda z + (\Lambda \circ h)(z) + a(z + h(z))\right]. \end{aligned}$$

Recordando que $a(z) = h'(z) \cdot \Lambda(z) - (\Lambda \circ h)(z)$, luego al reemplazar obtenemos

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4,$$

donde R_1, R_2, R_3 y R_4 son operadores definidos a continuación:

$$\begin{aligned} R_1[a](z) &:= a(z + h(z)) - a(z) \\ R_2[a](z) &:= -h'(z) \cdot (\Lambda \circ h)(z) \\ R_3[a](z) &:= -h'(z) \cdot a(z + h(z)) \\ R_4[a](z) &:= \left((h')^2 \cdot (H')^{-1}\right)(z) \cdot \left[\Lambda z + (\Lambda \circ h)(z) + a(z + h(z))\right]. \end{aligned}$$

Proposición 3.3.2. *El operador R_1 es de orden 2.*

<u>*Demostración:*</u>

Notemos que si $|z| \le re^{-\delta}$ entonces

$$\begin{aligned} |z+h(z)| &\le |z|+|h(z)| \\ &\le |z|(1+\|h\|_{re^{-\delta}}) \\ &\le re^{-\delta}(1+\delta^{-\alpha_0}\|a\|_r) \\ &\le re^{-\delta}(1+\delta^2) \\ &\le re^{-\frac{\delta}{2}}. \end{aligned}$$

Hemos supuesto que $\|a\|_r \le \delta^{\alpha_0+2}$ y además la última desigualdad es debido a Bernoulli pues

$$e^{\frac{\delta}{2}} \ge 1+(e-1)\frac{\delta}{2} > 1+\frac{\delta}{2} > 1+\delta^2.$$

Ahora al aplicar el teorema del valor medio sabemos que

$$|a(z+h(z))-a(z)| \le |h(z)| \max\{\|a'(z)\| : \ |z| \le re^{-\frac{\delta}{2}}\}.$$

Utilizando la proposición 3.2.2 tenemos que si $|z| \le re^{-\frac{\delta}{2}}$ entonces

$$\|a'(z)\| \le \frac{\|a\|_r}{(1-e^{-\frac{\delta}{2}})^{n+1}}.$$

Afirmación: Si $\delta \in (0,1/2)$ entonces

$$\frac{1}{(1-e^{-\frac{\delta}{2}})^{n+1}} < \delta^{-4(n+1)}.$$

La prueba del resultado anterior es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \delta^2+\delta^4 < 1 \\ \Rightarrow \quad & \delta^4+\delta^6 < \delta^2 \\ \Rightarrow \quad & (1+\delta^2)(1-\delta^4) > 1 \\ \Rightarrow \quad & 1+\delta^2 > \frac{1}{1-\delta^4} \end{aligned}$$

Por Bernoulli tenemos

$$e^{\frac{\delta}{2}} > 1+(e-1)\frac{\delta}{2} > 1+\delta^2.$$

Usando las últimas dos desigualdades nos queda

$$\begin{aligned} & e^{\frac{\delta}{2}} > \frac{1}{1-\delta^4} \\ \Rightarrow \quad & 1 - e^{-\frac{\delta}{2}} > \delta^4 \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{1-e^{-\frac{\delta}{2}}} < \delta^{-4}. \end{aligned}$$

Esto termina la prueba de la afirmación.

Uniendo todos estos resultados obtenemos

$$|a(z+h(z)) - a(z)| \leq |h(z)|\delta^{-4(n+1)} \|a\|_r .$$

También sabemos que si $|z| \leq re^{-\delta}$ entonces se cumple que

$$|h(z)| \leq |z| \, \|h\|_{re^{-\delta}} .$$

Como el operador Φ es de orden 1 sabemos que existe α_0 tal que

$$\|h\|_{re^{-\delta}} \leq \delta^{-\alpha_0} \|a\|_r .$$

Multiplicando las últimas tres desigualdades nos queda

$$|a(z+h(z)) - a(z)| \leq |z|\delta^{-(\alpha+4(n+1))} \|a\|_r^2 .$$

Si denotamos $\beta = \alpha_0 + 2$ y $\alpha = \alpha_0 + 4(n+1)$ y tomamos supremo en $D[0, re^{-\delta}]$ nos queda

$$\|a\|_r \leq \delta^\beta \Rightarrow \|R_1[a]\|_{re^{-\delta}} \leq \delta^{-\alpha} \|a\|_r^2 .$$

De esta forma hemos demostrado que R_1 es un operador de orden 2.

□

Proposición 3.3.3. *El operador R_2 es de orden 2.*

Demostración:

Si denotamos $r_1 = re^{-\frac{\delta}{2}}$ y utilizamos la proposición 3.2.2 tenemos que si $|z| \leq r_1 e^{-\frac{\delta}{2}}$ entonces

$$\|h'(z)\| \leq \frac{\|h\|_{r_1}}{(1-e^{-\frac{\delta}{2}})^{n+1}}$$

Nuevamente usaremos que si $\delta \in (0, 1/2)$ entonces

$$\frac{1}{(1 - e^{-\frac{\delta}{2}})^{n+1}} < \delta^{-4(n+1)}.$$

Usando lo anterior la proposición 3.2.2 queda de la siguiente forma

$$\|h'(z)\| \leq \delta^{-4(n+1)} \|h\|_{r_1},$$

para todo $|z| \leq r_1 e^{-\frac{\delta}{2}}$, es decir, para todo $|z| \leq re^{-\delta}$.

Además como Φ es de orden 1 tenemos que existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\|h\|_{r_1} = \|h\|_{re^{-\frac{\delta}{2}}} \leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\alpha_0} \|a\|_r \leq \delta^{-2\alpha_0} \|a\|_r .$$

Uniendo los dos últimos resultados nos queda

$$|z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow \|h'(z)\| \leq \delta^{-4(n+1)-2\alpha_0} \|a\|_r .$$

Por otro lado como los λ_i están fijos, existe $\alpha_1 > 0$ tal que

$$\|\Lambda\| < 2^{\alpha_1} < \lambda^{-\alpha_1}.$$

Nuevamente usamos que Φ es de orden 1 para obtener

$$|z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow |h(z)| \leq |z| \|h\|_{re^{-\delta}} \leq |z|\delta^{-\alpha_0} \|a\|_r .$$

Juntando las últimas dos desigualdades obtenemos

$$|(\Lambda \circ h)(z)| \leq \|\Lambda\| \cdot |h(z)| \leq |z|\delta^{-(\alpha_1+\alpha_0)} \|a\|_r .$$

Luego para $|z| \leq re^{-\delta}$ se cumple que

$$|R_2[a](z)| \leq \|h'(z)\| \cdot |(\Lambda \circ h)(z)| \leq |z|\delta^{-\alpha} \|a\|_r^2 ,$$

donde $\alpha = 4(n+1) + 3\alpha_0 + \alpha_1$. Finalmente al tomar supremo en $D[0, re^{-\delta}]$ nos queda

$$\|R_2[a]\|_{re^{-\delta}} \leq \delta^{-\alpha} \|a\|_r^2 .$$

Con esto hemos demostrado que R_2 es de orden 2.

Proposición 3.3.4. *El operador R_3 es de orden 2.*

<u>*Demostración:*</u>

Notemos que si $|z| \leq re^{-\delta}$ entonces $|z+h(z)| \leq r$, esto es cierto pues

$$\begin{aligned}
|z+h(z)| &\leq |z| + |h(z)| \\
&\leq |z|\left(1+\|h\|_{re^{-\delta}}\right) \\
&\leq |z|\left(1+\delta^{-\alpha_0}\|a\|_r\right) \\
&\leq re^{-\delta}(1+\delta) \\
&\leq r.
\end{aligned}$$

Estamos asumiendo que $\|a\|_r \leq \delta^{\alpha_0+1}$ y además la última desigualdad es válida pues

$$e^{\delta} > 1+(e-1)\delta > 1+\delta.$$

Luego se cumple que

$$|a(z+h(z))| \leq \|a\|_r \cdot |z+h(z)|.$$

Además para $|z| \leq re^{-\delta}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
|z+h(z)| &\leq |z|\left(1+\|h\|_{re^{-\delta}}\right) \\
&\leq |z|\left(1+\delta^{-\alpha_0}\|a\|_r\right) \\
&\leq |z|(1+\delta) \\
&< 2|z| \\
&< \delta^{-1}|z|.
\end{aligned}$$

Uniendo los dos últimos resultados nos queda

$$\|a\|_r \leq \delta^{\beta} \Rightarrow |a(z+h(z))| \leq \|a\|_r \cdot |z| \cdot \delta^{-1},$$

donde $\beta = \alpha_0 + 1$.

Si denotamos $r_1 = re^{-\frac{\delta}{2}}$, por la proposición 3.2.2 y por lo visto en 3.3.3 tenemos que

$$|z| \leq re^{-\delta} = r_1 e^{-\frac{\delta}{2}} \Rightarrow \|h'(z)\| \leq \|h\|_{r_1} \delta^{-4(n+1)}.$$

Además como Φ es de orden 1 tenemos que existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\|h\|_{re^{-\frac{\delta}{2}}} \leq \|a\|_r \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\alpha_0} \leq \|a\|_r \cdot \delta^{-2\alpha_0}.$$

Luego para $|z| \leq re^{-\delta}$ se cumple que

$$\|h'(z)\| \leq \|a\|_r \cdot \delta^{-(2\alpha_0+4(n+1))}.$$

Si denotamos $\alpha = 2\alpha_0 + 4(n+1) + 1$ tenemos que

$$\|a\|_r \leq \delta^{\beta} \Rightarrow |R_3[a](z)| \leq \|h'(z)\| \cdot |a(z+h(z))| \leq |z| \cdot \delta^{-\alpha} \cdot \|a\|_r^2 .$$

Finalmente tomando supremo en $D[0, re^{-\delta}]$ nos queda

$$\|a\|_r \leq \delta^{\beta} \Rightarrow \|R_3[a]\|_{re^{-\delta}} \leq \delta^{-\alpha} \|a\|_r^2 .$$

Por lo tanto R_3 es un operador de orden 2.

$\square$

Proposición 3.3.5. *El operador R_4 es de orden 2.*

Demostración:

Como $H' = I + h'$, entonces si $\|h'(z)\| < 1$ se cumple que $H'(z)$ es inversible y además

$$\left\|(H'(z))^{-1}\right\| < \frac{1}{1 - \|h'(z)\|}.$$

En particular, si conseguimos que $\|h'(z)\| < \frac{1}{2}$, entonces para todo $\delta \in (0, 1/2)$ se cumple que

$$\left\|(H'(z))^{-1}\right\| < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 < \delta^{-1}.$$

También, como en las demostraciones anteriores, para todo $r_1 > 0$ y $\delta \in (0, 1/2)$ se cumple que

$$|z| \leq r_1 e^{-\frac{\delta}{2}} \Rightarrow \|h'(z)\| \leq \delta^{-4(n+1)} \|h\|_{r_1} . \tag{1}$$

Luego si de alguna manera conseguimos $\|h'(z)\| < \frac{1}{2}$, entonces

$$|z| \leq r_1 e^{-\frac{\delta}{2}} \Rightarrow \left\|\left((h')^2 \cdot (H')^{-1}\right)(z)\right\| \leq \delta^{-(8n+9)} \|h\|_{r_1}^2 .$$

Tomando $r_1 = re^{-\frac{\delta}{2}}$ nos queda que si $\|h'(z)\| < \frac{1}{2}$ entonces

$$|z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow \left\|\left((h')^2 \cdot (H')^{-1}\right)(z)\right\| \leq \delta^{-(8n+9)} \|h\|_{re^{-\frac{\delta}{2}}}^2 .$$

Ahora como Φ es un operador de orden 1, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\|h\|_{re^{-\frac{\delta}{2}}} \leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\alpha_0} \|a\|_r \leq \delta^{-2\alpha_0} \|a\|_r . \tag{2}$$

Reemplazando esto en la expresión anterior nos queda que si $\|h'(z)\| < \frac{1}{2}$, entonces

$$|z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow \left\|\left((h')^2 \cdot (H')^{-1}\right)(z)\right\| \leq \delta^{-(4\alpha_0+8n+9)} \|a\|_r^2 .$$

También juntando (1) y (2) obtenemos

$$|z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow \|h'(z)\| \leq \delta^{-(4n+4+2\alpha_0)} \|a\|_r .$$

Tomando $\beta_1 = 4n + 4 + 2\alpha_0 + 1$ resulta que si $\|a\|_r \, \delta^{\beta_1}$ entonces

$$|z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow \|h'(z)\| \leq \delta < \frac{1}{2}.$$

Juntando esto nos queda que si $\|a\|_r \, \delta^{\beta_1}$ entonces

$$|z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow \left\|\left((h')^2 \cdot (H')^{-1}\right)(z)\right\| \leq \delta^{-(4\alpha_0+8n+9)} \|a\|_r^2 . \tag{3}$$

Ahora de la proposición anterior tenemos que existe $\beta_2 = \alpha_0 + 1$ tal que si $\|a\|_r < \delta^{\beta_2}$ y $|z| \leq re^{-\delta}$ entonces

$$|a(z + h(z))| \leq \|a\|_r \cdot |z| \cdot \delta^{-1} \leq |z| \cdot \delta^{\alpha_0} < |z| \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_0} .$$

También sabemos que si $|z| \leq re^{-\delta}$ entonces

$$|(\Lambda \circ h)(z)| \leq \|\Lambda\| \cdot |h(z)| \leq \|\Lambda\| \cdot \|h\|_{re^{-\delta}} \cdot |z| \leq \|\Lambda\| \cdot \delta^{-\alpha_0} \cdot \|a\|_r \cdot |z|.$$

Nuevamente si $\|a\|_r < \delta^{\beta_2}$ nos queda que si $|z| \leq re^{-\delta}$ entonces

$$|(\Lambda \circ h)(z)| \leq \|\Lambda\| \cdot \delta \cdot |z| < \|\Lambda\| \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot |z|.$$

Juntando esto último tenemos que si $\|a\|_r < \delta^{\beta_2}$ y $|z| \leq re^{-\delta}$ entonces

$$|\Lambda z + (\Lambda \circ h) + a(z + h(z))| \leq \left(\|\Lambda\| + \frac{\|\Lambda\|}{2} + \frac{1}{2^{\alpha_0}}\right) |z|.$$

Notemos que la expresión entre paréntesis es contante, luego existe $\alpha_1 > 0$ tal que si $\|a\|_r < \delta^{\beta_2}$ y $|z| \leq re^{-\delta}$ entonces

$$|\Lambda z + (\Lambda \circ h) + a(z + h(z))| \leq \delta^{-\alpha_1}|z|.$$

Uniendo lo anterior con (3) y considerando $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ nos queda que si $\|a\|_r < \delta^{\beta}$ y $|z| \leq re^{-\delta}$ entonces

$$|R_4[a](z)| \leq \delta^{-(\alpha_1 + 4\alpha_0 + 8n + 0)} \cdot \|a\|_r^2 \cdot |z|.$$

Denominando $\alpha = \alpha_1 + 4\alpha_0 + 8n + 0$ y tomando supremo en $D[0, re^{-\delta}]$ nos queda

$$\|a\|_r < \delta^{\beta} \Rightarrow \|R_4[a]\|_{re^{-\delta}} < \delta^{-\alpha} \|a\|_r^2 ,$$

para todo $r > 0$ y todo $\delta \in (0, 1/2)$, es decir, hemos probado que R_4 es un operador de orden 2.

$\square$

Observación 3.3.1. Uniendo las cinco proposiciones anteriores concluimos que $R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ es un operador de orden 2.

3.4 Teorema de Siegel

Teorema 3.4.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ vecindad abierta del origen y $Z \in \mathfrak{X}(U)$ un campo vectorial con $Z(0) = 0$ tal que $\Lambda = Z'(0)$ es una matriz diagonal que satisface la condición (C, ν), entonces Z es localmente equivalente a su parte lineal, es decir, existe una vecindad $V \subseteq U$ del origen y existe $H \in \mathfrak{X}(V)$ biholomorfismo tal que*

$$H'(z) \cdot \Lambda z = (Z \circ H)(z)$$

para todo $z \in V$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $U = D(0, r)$ y renombremos al campo inicial $Z = Z_0$. Como $Z_0(0) = 0$ entonces podemos escribir

$$Z_0(z) = \Lambda z + a_0(z),$$

donde $a_0 \in \mathfrak{X}(U)$ es tal que $ord(a_0) \geq 2$. Luego podemos definir

$$\begin{aligned} h_0 &:= \Phi[a_0] \\ H_0 &:= I + h_0, \end{aligned}$$

donde Φ es el operador definido en el ejemplo 3.3.1, luego $h_0 \in \mathfrak{X}(U)$ y además $ord(h) \geq 2$, con esto tenemos que H_0 es una perturbación de la identidad y en particular es inversible.

Para todo $s \geq 1$ podemos definir de manera recursiva

$$a_s := R[a_{s-1}],$$

donde $a_s \in \mathfrak{X}(U)$ es tal que $ord(a_s) \geq 2$. Luego podemos definir

$$\begin{aligned} h_s &:= \Phi[a_s] \\ H_s &:= I + h_s. \end{aligned}$$

Luego $h_s \in \mathfrak{X}(U)$ y además $ord(h_s) \geq 2$, de forma similar tenemos que H_s es una perturbación de la identidad y en particular es inversible.

También podemos definir el campo $Z_s \in \mathfrak{X}(U)$ de la siguiente forma

$$Z_s := \Lambda z + a_s(z).$$

A continuación construimos las secuencias recurrentes de números

$$\begin{aligned} \delta_s &= \delta_{s-1}^{3/2} \\ M_s &= M_{s-1}^{3/2} \\ r_s &= e^{-\delta_{s-1}} r_{s-1}. \end{aligned}$$

Estas secuencias quedan determinadas con la elección de δ_0, M_0 y r_0. Veamos que es posible elegir δ_0 de tal forma que $r_s > r_0/2$ para todo $s \geq 0$. Para esto notemos que

$$\delta_s = \delta_0^{(\frac{3}{2})^s}.$$

Además también se cumple que

$$r_s = r_0 e^{-(\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{s-1})}.$$

Luego
$$r_s > \frac{r}{2} \Leftrightarrow e^{\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_{s-1}} < 2.$$
Para demostrar que exista δ_0 que cumpla lo anterior basta probar que
$$\lim_{\delta_0\to 0}\sum_{s=0}^{\infty}\delta_0^{(\frac{3}{2})^s} = 0.$$
Para ello solo basta probar que
$$S = \sum_{s\geq 0}\delta_0^{(\frac{3}{2})^s-1}$$
es acotada. Tenemos que existe s_0 tal que para $s \geq s_0$ se cumple que
$$\left(\frac{3}{2}\right)^s - 1 \geq s \Rightarrow \delta_0^{(\frac{3}{2})^s-1} \leq \delta_0^s.$$
Luego tenemos que
$$S \leq \sum_{s=0}^{s_0-1}\delta_0^{(\frac{3}{2})^s-1} + \sum_{s\geq s_0}\delta_0^s < \infty.$$
Como vimos en la sección anterior el operador R es de orden 2, luego existen constantes positivas α y β tales que para todo $r > 0$ y todo $\delta \in (0, 1/2)$ se cumple que
$$\|a\|_r \leq \delta^\beta \Rightarrow \|R[a]\|_{re^{-\delta}} \leq \delta^{-\alpha}\|a\|_r^2.$$
Elijamos N de tal forma que $N > \max\{\beta, 2\alpha\}$, luego si asumimos
$$\|a_s\|_{r_s} \leq M_s = \delta_s^N \Rightarrow \|a_s\|_{r_s} \leq \delta_s^\beta.$$
Luego como R es de orden 2, usamos la desigualdad anterior para $r = r_s$ y $\delta = \delta_s$
$$\begin{aligned}
\|R[a_s]\|_{r_se^{-\delta_s}} &\leq \|a_s\|_{r_s}^2 \cdot \delta_s^{-\alpha}\\
\|a_{s+1}\|_{r_{s+1}} &\leq M_s^2 \cdot \delta_s^{-\alpha} = \delta_s^{2N-\alpha}\\
\|a_{s+1}\|_{r_{s+1}} &\leq \delta_s^{\frac{3N}{2}} = \delta_{s+1}^N = M_{s+1}.
\end{aligned}$$
Resumiendo tenemos que
$$\|a_s\|_{r_s} \leq M_s \Rightarrow \|a_{s+1}\|_{r_{s+1}} \leq M_{s+1}.$$

Como a_0 es una función holomorfa tal que $ord(a) \geq 2$, entonces por el lema de Schwarz existe una constante $k > 0$ tal que en una vecindad del origen se cumple que

$$|a_0(z)| \leq k|z|^2.$$

Por último elegimos $r_0 \leq \frac{\delta_0^N}{k}$ y esto implica que para $|z| \leq r_0$ se cumple lo siguiente

$$\frac{|a_0(z)|}{|z|} \leq k|z| \leq kr_0 \Rightarrow \|a_0\|_{r_0} \leq kr_0 \leq \delta_0^N = M_0.$$

Lo anterior nos permite afirmar que $\|a_s\|_{r_s} \leq M_s$ para todo $s \geq 0$. Luego tenemos

$$\|a_{s+1}\|_{r_{s+1}} = \|R[a_s]\|_{r_s e^{-\delta_s}} \leq \|a_s\|_{r_s}^2 \delta_s^{-\alpha} \leq \delta_s^{2N-\alpha} \leq \delta_0^{(\frac{3}{2})^s(2N-\alpha)}.$$

Como $\delta_0 \in (0,1)$ entonces

$$\lim_{s\to\infty} \|a_s\|_{r_s} = 0.$$

De la forma en la que se definieron las secuencias Z_s y H_s se cumple que

$$Z_{s+1}(z) = \left(H_s'\right)^{-1}(z) \cdot \left(Z_s \circ H_s\right)(z).$$

Luego sea $\tau_s = H_0 \circ H_1 \circ \cdots \circ H_s$, entonces se cumple que

$$Z_{s+1} = (\tau_s')^{-1} \cdot (Z_0 \circ \tau_s).$$

De forma análoga podemos probar que en un dominio adecuado la secuencia τ_s es convergente. Sea H el límite de τ_s, entonces H' es el límite de τ_s'. Además sabemos que

$$a_{s+1}(z) = (\tau_s')^{-1}(z) \cdot (Z_0 \circ \tau_s)(z) - \Lambda z.$$

Al tomar límite en lo anterior cuando $s \to \infty$ obtenemos que en una vecindad de $z = 0$ se cumple que

$$0 = (H')^{-1}(z) \cdot (Z_0 \circ H)(z) - \Lambda z.$$

Equivalentemente

$$H'(z) \cdot \Lambda z = (Z \circ H)(z).$$

□

Corolario 3.4.1. *Sea $Z \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $Z'(0)$ es una matriz diagonalizable que cumple la condición (C,ν), entonces Z es localmente es equivalente a su parte lineal.*

Capítulo 4

Dinámica de campos

Comenzamos este capítulo enunciados algunos resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias que pueden enconrarse en [15]. Finalmente mostramos la condición logarítmica dada por Bruno unas décadas después que Siegel probara el teorema anterior.

4.1 Campos vectoriales holomorfos

Definición 4.1.1. *Sea U un abierto de $\mathbb{C}^n$. Un campo vectorial holomorfo en U es una aplicación*

$$\begin{aligned} Z : U &\to \mathbb{C}^n \\ z &\to Z(z) = (Z_1(z), \ldots, Z_n(z)) \end{aligned}$$

tal que

(i) $Z_j : U \to \mathbb{C}$ es una función analítica en U para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(ii) Para todo $z \in U$ se cumple que $Z(z)$ pertenece al espacio tangente a U en z.

El conjunto de campos vectoriales holomorfos es representado por $\mathfrak{X}(U)$.

Observación 4.1.1. Por ser U abierto tenemos que el espacio tangente a U en cualquier punto es igual a $\mathbb{C}^n$, luego la segunda condición se trivializa en este caso. Esta condición adquiere relevancia cuando consideramos variedades en lugar de abiertos de $\mathbb{C}^n$.

Definición 4.1.2. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $Z \in \mathcal{U}$. Un punto $z_0 \in U$ es llamado punto* ***singular*** *de Z si y solo si $Z(z_0) = 0$, en caso contrario z_0*

*es llamado punto **regular** de Z. El conjunto de todos los puntos singulares de Z se denota con $Sing(Z)$.*

Definición 4.1.3. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto, $Z \in \mathcal{U}$, $z_0 \in U$ y $t_0 \in \mathbb{C}$.*

(i) El problema de valor inicial (PVI) asociado a Z, z_0 y t_0 está dado por la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned} z' &= Z(z) \\ z(t_0) &= z_0. \end{aligned}$$

(ii) Una solución del PVI anterior es una función analítica $\varphi : V \to U$, donde $V \subset \mathbb{C}$ es una vecindad abierta de t_0, tal que $\varphi(t_0) = z_0$ y además

$$\varphi'(t) = Z(\varphi(t))$$

para todo $t \in V$.

Teorema 4.1.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ abierto y $Z \in \mathcal{U}$, entonces para todo $t_0 \in \mathbb{C}$ y para todo $z_0 \in U$ existe una única solución del PVI asociado a Z, z_0 y t_0.*

Teorema 4.1.2. *Sea $Z : D[z_0, r] \to \mathbb{C}^n$ campo vectorial homorfo en $D(0, r)$ y Lipschitz en $D[0, r]$ y denotemos $\varphi_{z_0} : D_\alpha[t_0] \to D[z_0, r]$ a la única solución del PVI asociado a Z, z_0 y t_0, entonces*

(i) Existen $r' < r$ y $\alpha' < \alpha$ tal que para todo $z \in D[z_0, r']$ y $t \in D_{\alpha'}[t_0]$ existe una única solución $\varphi_z : D_{\alpha'}[t] \to D[z, r]$ al PVI asociado a Z, z y t.

(ii) En virtud del resultado anterior podemos definir

$$\begin{aligned} \varphi : D_{\alpha'}[t_0] \times D[z_0, r'] &\to D[z_0, r] \\ (t, z) &\to \varphi(t, z) = \varphi_z(t). \end{aligned}$$

*Esta función se conoce como el **flujo local** asociado a Z.*

4.2 Conjugación de campos

Definición 4.2.1. *Sean U_1 y U_2 abiertos de $\mathbb{C}^n$, $Z_1 \in \mathcal{X}_1$, $Z_2 \in \mathcal{X}_2$, $P_1 \in U_2$, $P_2 \in U_2$ y consideremos los respectivos flujos locales*

$$\begin{aligned} \varphi_1 : D_\delta(0) \times D(P_1, r') &\to D(P_1, r) \\ \varphi_2 : D_\delta(0) \times D(P_2, r') &\to D(P_2, r). \end{aligned}$$

Diremos que Z_1 es ***analíticamente conjugado*** *a Z_2 alrededor de P_1 y P_2 si y solo si existen vecindades abiertas $V_1 \subseteq D(P_1, r')$ y $V_2 \subseteq D(P_2, r')$ de P_1 y P_2 respectivamente y existe $h : V_1 \to V_2$ biholomorfismo tal que*

$$h(\varphi_1(t, z)) = \varphi_2(t, h(z))$$

para todo $(t, z) \in D_\delta(0) \times V_1$. El biholomorfismo h es llamado ***conjugación analítica local****.*

Observación 4.2.1. La relación de conjugación local es una relación de equivalencia.

Proposición 4.2.1. *Sean U_1, V_1, U_2 y V_2 abiertos de $\mathbb{C}^n$, $Z_1 \in \mathfrak{X}(U_1)$, $Z_2 \in \mathfrak{X}(U_2)$, $P_1 \in V_1 \subseteq U_1$, $P_2 \in V_2 \subseteq U_2$ y $h : V_1 \to V_2$ biholomorfismo. Son equivalentes*

(i) h es conjugación analítica entre Z_1 y Z_2 alrededor de P_1 y P_2.

(ii) $h'(z) \cdot Z_1(z) = Z_2(h(z))$ para todo $z \in V_1$.

Demostración:

Supongamos que h es una conjugación analítica local, luego por definición tenemos que

$$h(\varphi_1(t, z)) = \varphi_2(t, h(z))$$

para todo $(t, z) \in D_\delta(0) \times V_1$, donde φ_1 y φ_2 son los respectivos flujos locales asociados a Z_1 y Z_2. Derivando respecto a t y aplicando la reglas de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} h'(\varphi_1(t, z)) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t, z) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t, h(z)) \\ h'(\varphi_1(0, z)) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(0, z) &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(0, h(z)) \\ h'(z) \cdot Z_1(\varphi_1(0, z)) &= Z_2(\varphi_2(0, h(z))) \\ h'(z) \cdot Z_1(z) &= Z_2(h(z)). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que (ii) es cierto. Dado $z \in V_1$ definimos $\Psi : D_\delta(0) \to V_2$ como

$$\Psi(t) = h(\varphi_1(t, z)).$$

Derivando respecto a t tenemos que para todo $t \in D_\delta(0)$ se cumple que

$$\begin{aligned}
\Psi'(t) &= h'(\varphi_1(t,z)) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,z) \\
&= h'(\varphi_1(t,z)) \cdot Z_1(\varphi_1(t,z)) \\
&= Z_2(h(\varphi_1(t,z))) \\
&= Z_2(\Psi(t)).
\end{aligned}$$

Además $\Psi(0) = h(\varphi_1(0,z)) = h(z)$, luego Ψ es solución del PVI asociado a Z_2, 0 y $h(z)$ cuya solución está dada por $\varphi_2(t, h(z))$ para todo $t \in D_\delta(0)$. Por la unicidad de dicha solución tenemos que

$$h(\varphi_1(t,z)) = \Psi(t) = \varphi_2(t, h(z))$$

para todo $t \in D_\delta(0)$. □

Corolario 4.2.1 (Siegel)**.** *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ vecindad abierta del origen y $Z \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $0 \in Sing(Z)$. Si $\Lambda = Z'(0)$ es una matriz diagonalizable que satisface la condición (C,ν), entonces Z es analíticamente conjugado al campo lineal Λz.*

Finalmente enuciemos la condición de Bruno que mejora los resultados anteriores.

Teorema 4.2.1. *Sea $U \subseteq \mathbb{C}^n$ vecindad abierta del origen y $Z \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $0 \in Sing(Z)$. Sea $\Lambda = Z'(0)$ una matriz diagonalizable y sea*

$$\omega_s = \min\{|\lambda \cdot k - \lambda_i| : \ 1 \leq i \leq n \ y \ |k| < 2^s\}.$$

Si se cumple la condición

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\ln \frac{1}{\omega_s}}{2^s} < \infty,$$

entonces el campo Z es analíticamente conjugado al campo lineal Λz.

La prueba de este resultado se puede encontrar en [3]. Además en ausencia de dicha condición existen ejemplos de campos que no puede ser linealizados como se muestra en [16].

Bibliografía

[1] Arnold V. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations.* 1987.

[2] Benazic R. *Tópicos de dinámica compleja.* 2006.

[3] Bruno A. *Analytical forms od differential equations.* 1971.

[4] Camacho C. *Puntos singulares de ecuaciones diferenciales analíticas.* 1987.

[5] Camacho C. *Lectures on complex 2-dimensional dynamical systems.* 1988.

[6] Cartan H. *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables.* 2009.

[7] Gunning R. *Introduction to holomorphic functions of several variables.* 2009

[8] Gunning R., Rossi H. *Analytic functions of several complex variables.* 1965

[9] Ilyashenko Y. and Yakovenko S. *Lectures on analytic differential equations.* 2008

[10] Lima E. *Algebra Lineal.* 1999

[11] Lins Neto, A. *Funciones de una variable compleja.* 1993

[12] Mozo, J. *Clasificación analítica de foliaciones holomorfas.*2010

[13] Poincaré, H *Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique.* 1890

[14] Siegel, C. *Iteration of analytic functions.* 1942

[15] Sotomayor, J. *Licoes de equacoes diferenciais ordinarias.* 1979

[16] Yoccoz, J. *Linearisation des germes de diffeomorphismes holomorphes de* ($\mathbb{C}$.0). 1988