



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

**El teorema de punto fijo de Brouwer en el plano y
su aplicación a la teoría de juegos**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Rolly Steven CADILLO POMA

ASESOR

Mg. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2023



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Cadillo, R. (2023). *El teorema de punto fijo de Brouwer en el plano y su aplicación a la teoría de juegos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Rolly Steven Cadillo Poma
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	44677732
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0003-9534-7954
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9177-1561
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09197486
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	EDOACBI
Agencia de financiamiento	Ninguna.
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: San Juan de Lurigancho Urbanización: (según corresponda) Manzana y lote: (según corresponda) Calle: (según corresponda) Latitud: -12.0294 Longitud: - 77.0103
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Mayo 2023 – octubre 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO
PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023)**

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 09:15 horas del viernes 27 de octubre del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023): Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci (MIEMBRO) y el Mg. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: “**EL TEOREMA DE PUNTO FIJO DE BROUWER EN EL PLANO Y SU APLICACIÓN A LA TEORÍA DE JUEGOS**”, presentado por el señor **Bachiller ROLLY STEVEN CADILLO POMA**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación *.....sobresaliente.....*, con un calificativo promedio de *...17...Discrepante*

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller ROLLY STEVEN CADILLO POMA** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 10:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
PRESIDENTE

Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
MIEMBRO

Mg. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO ASESOR



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado



Yo Willy David, Barahona Martínez en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°001654-2023-D-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es “El teorema de punto fijo de Brouwer en el plano y su aplicación a la teoría de juegos”, presentado por el bachiller Rolly Steven Cadillo Poma, para optar el título de Licenciado en Matemática. CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 16% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título de Licenciado en Matemática.

DNI N°. 10078450.

Mg. Willy David, BARAHONA MARTÍNEZ



DEDICATORIA

Mi tesis se la dedico a mis padres, quienes siempre me han apoyado y me han enseñado con el ejemplo a no rendirme ante las adversidades.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco mucho a Dios por todas sus bendiciones y por todo lo que está por venir

Agradezco mucho a mis padres Aurelio Cadillo y Teófila Poma que siempre me están apoyando y me motivan a seguir adelante

A mi asesor, el Magister Willy David Barahona Martínez por haber dedicado tiempo y orientándome con sus conocimientos para culminar con éxito mi tesis.

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por haberme aceptado a ser parte de ella, también a mis docentes quienes también me exigieron para convertirme en el profesional que soy ahora.

Finalmente agradezco a mis compañeros y amigos, por su amistad y su apoyo moral día a día ,que me ha ayudado a lo largo de esta carrera para poder culminarla.

RESUMEN

El teorema de punto fijo de Brouwer en el plano y su aplicación a la teoría de juegos

Rolly Steven, Cadillo Poma

Octubre - 2023

Asesor : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Título obtenido : Licenciado en Matemática.

En el presente trabajo, presentamos una demostración simple del teorema de punto fijo de Brouwer en $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, equivalente al teorema de Hex, que está relacionado al conocido juego de Hex de la teoría de juegos. Por lo que nos planteamos la siguiente pregunta. ¿Es posible demostrar, que el teorema del punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^2 es equivalente a afirmar que en el juego de Hex jamás se dará un empate?

Palabras clave:

Teorema de punto fijo de Brouwer, Teorema de Hex, Teoría de juegos.

ABSTRACT

Brouwer's fixed point theorem in the plane and its application to game theory

Rolly Steven, Cadillo Poma

October - 2023

Adviser : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Obtained : Graduate in Mathematics.

In the present work, we present a simple proof of Brouwer's fixed point theorem in $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, equivalent to the theorem of Hex, which is related to the well-known Hex game from game theory. So we ask ourselves the following question. Is it possible to prove that Brouwer's fixed point theorem in \mathbb{R}^2 is equivalent to affirming that in the game of Hex there will never be a draw?

Keywords:

Brouwer's fixed point theorem, Hex's Theorem, Game theory.

ÍNDICE GENERAL

1. Preliminares	10
1.1. Definiciones Previas	10
1.2. Espacio n -dimensional	10
1.3. Juego de Hex	12
2. Resultados previos	14
2.1. Fundamentos y reglas del juego de Hex 11×11	14
2.2. Teorema de Hex y sus variantes	15
2.3. Teorema del punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^2	18
2.4. Teorema de Hex implica el Teorema de punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^2	24
3. Problema Principal	29
3.1. Teorema del punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^2 implica el Teorema de Hex	29
4. Aplicaciones	33
4.1. Aplicación	33
5. Conclusiones y/o Sugerencias	38
6. Bibliografía	38

Introducción

En la década de 1940, se creó un juego llamado Hex, que dio origen a una nueva familia de juegos, llamada juegos de conexión. Fue inventado independientemente por dos matemáticos, por el danés Pei Hein en 1942 y luego en 1948 por el estadounidense Jhon Nash (inmortalizado en la película “Una mente brillante”), se puede practicar en un tablero en forma de rombo o en las intersecciones de un tablero con cuadrados cortados por una diagonal, con fichas hexagonales. El objetivo es obtener un grupo de piezas que unan dos lados opuestos del tablero, es decir, en el juego siempre hay un ganador, David Gale en 1979 probó, que el juego de Hex no quede empatado es equivalente a un resultado del análisis funcional que es el teorema del punto fijo de Brouwer, y lo probó con este juego

Hadamard [1] y Brouwer [2] fueron los primeros que demostraron el teorema del punto fijo de Brouwer, desde ese momento los matemáticos no han dejado de presentar nuevas demostraciones del teorema del punto fijo de Brouwer, Kulpa [10] fue uno de los primeros matemáticos en presentar una demostración muy elemental, Takeuchi y Suzuki [5] dieron una demostración elemental en el plano, así mismo la historia de juego de Hex, sus lineamientos y reglas lo encontramos en [3], [4], [5] y [6]. Sabemos que el teorema del punto fijo de Banach, brinda los pasos a seguir para hallar el punto fijo, lo que no sucede con el teorema del punto fijo de Brouwer, pues este último es un teorema que se utiliza para demostrar la existencia de la solución.

Estos avances previos nos permitirán llegar al objetivo general y de forma especial seguiremos la secuencia dada en Socha [7]. La presentación detallada y didáctica de

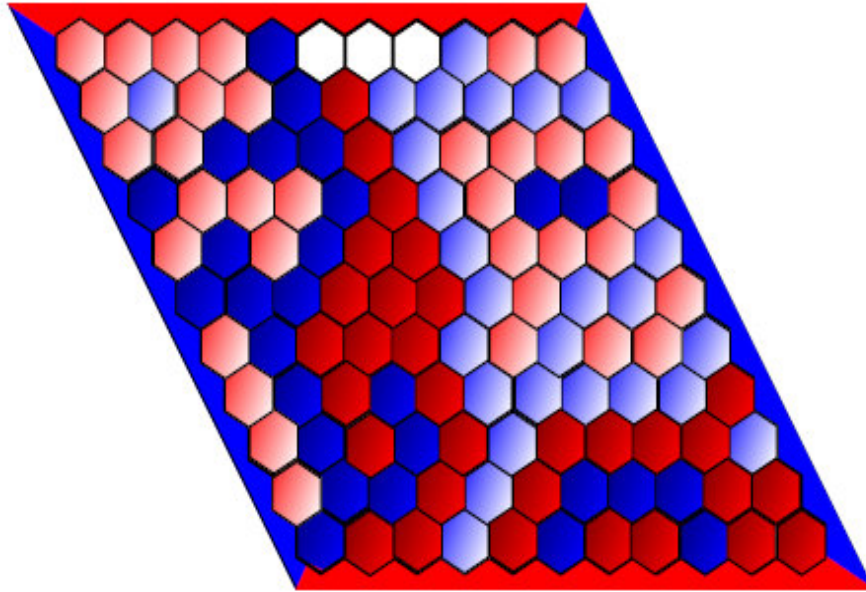


Figura 1: Juego de Hex, tablero de 11×11

cada uno de estos artículos serán de mucha utilidad a los estudiantes de las ciencias básicas y permitirá que otros investigadores profundicen el presente estudio.

Seguiremos los lineamientos dados en artículo base [7], el propósito fundamental es probar la equivalencia planteada y que la mayoría de estudiantes del pregrado en matemáticas sean conscientes de la aplicabilidad del teorema del punto fijo de Brouwer al juego de Hex.

1 Preliminares

1.1. Definiciones Previas

En el presente trabajo, consideramos las siguientes notaciones y definiciones:

Definición 1. (Números Naturales). El conjunto de números Naturales está denotado y determinado por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

También es llamado conjunto de los números enteros positivos \mathbb{Z}^+ .

Definición 2. (Números Enteros). El conjunto de números Enteros está denotado y determinado por

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Observación 1. Consideremos los siguientes conjuntos:

a) Números Enteros no Negativos: $\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

b) Números Enteros Negativos: $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -3, -2, -1\}$

c) Números Racionales: $\mathbb{Q} = \{q = \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$

d) Números Irracionales: $\mathbb{I} = \{r \neq \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} = (\mathbb{Q})^c$

Definición 3. (Números Reales). El conjunto de números Reales está denotado y determinado por

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ donde } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

1.2. Espacio n -dimensional

Definición 4. (Espacio Euclidiano \mathbb{R}^n).

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n. \right\}$$

Para $x \in \mathbb{R}^n$, x_i denota la i -ésima coordenada de x .

Definición 5. (Espacio Euclidiano \mathbb{R}^2).

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ x = (x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{R}. i = 1, 2. \right\}$$

Definición 6. \mathbb{Z}^n denota el grupo aditivo de puntos reticulares n -dimensionales en el espacio euclidiano \mathbb{R}^n .

Definición 7. El tablero Hex (bidimensional) C_r de tamaño r es un grafo cuyo vértices están formados por todo m en \mathbb{Z}^2 con $(1, 1) \leq m \leq (r, r)$

Definición 8. Los puntos u y v son llamados comparables si $u < v$ o $v < u$.

Definición 9. Dos vértices z y z' son adyacentes (unidos por una arista) en C_r si:

a) $\|z - z'\| = 1$,

b) z y z' son comparables.

Definición 10. Dos subconjuntos A y B de un grafo Γ se dice que son contiguos si existe $a \in A$ y $b \in B$ tal que a y b son adyacentes.

Definición 11. (Norma del Supremo). Sea V un espacio vectorial, una norma en V es una función de V a \mathbb{R} , denotada por $\|u\|_V$ para todo $u \in V$, que satisface las siguientes propiedades:

i) $\|u\|_V \geq 0$ para todo $u \in V$.

ii) $\|u\|_V = 0$ si y solo si $u = 0$.

iii) $\|(\alpha u)\|_V = \alpha \|u\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in V$.

Ejemplo 1. Sea $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces:

$$\|u\| = \sup_{i=1,2,3,\dots,n} |u_i| = \max_{i=1,2,3,\dots,n} |u_i| \quad (1.1)$$

caso particular: Sea $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ entonces:

$$\|u\| = \sup_{i=1,2} |u_i| = \max_{i=1,2} |u_i| \quad (1.2)$$

Definición 12. Un juego no cooperativo de M personas, es un sistema

$$\sigma := ((B_i, m_i) : i \in T)$$

donde $T = \{1, 2, 3, \dots, M\}$ representa a los jugadores, B_i es el conjunto de todas las acciones posibles del jugador i y m_i es una función del conjunto $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_M$ en los reales conocida como la recompensa del jugador i .

Si todos los conjuntos B_i son finitos, se dice que σ es un juego finito no cooperativo de M personas.

1.3. Juego de Hex

El juego de Hex, es un juego de estrategia abstracta que se juega en un tablero hexagonal, generalmente con una cuadrícula de hexágonos. El objetivo del juego es conectar dos lados opuestos del tablero con una cadena continua de piezas propias. Aunque Hex es un juego sencillo en cuanto a sus reglas, puede ser muy desafiante y estratégico. Presentamos algunos fundamentos y variantes del juego de Hex.

Fundamentos del juego de Hex:

- **Tablero hexagonal:** El tablero de Hex consiste en una cuadrícula de hexágonos, generalmente de tamaño 11×11 , 13×13 o 19×19 . Los jugadores se turnan para colocar sus fichas en los hexágonos.
- **Objetivo:** El objetivo del juego es conectar los lados opuestos del tablero con una cadena continua de tus fichas. El jugador que primero logra hacer esta conexión, es el ganador.
- **Turnos:** Los jugadores se turnan para colocar una ficha de su color en un hexágono vacío del tablero. Una vez que se coloca una ficha, no se puede mover.
- **Regla de la conexión:** Para ganar, debes formar una cadena de fichas que conecte tus lados del tablero. Esto puede ser una línea recta o una serie de conexiones, pero debe ser una cadena ininterrumpida.

- **Empate:** En el Hex clásico, no se permite el empate. El juego continúa hasta que uno de los jugadores logra la conexión.

Variantes del juego de Hex:

- I. **Hex asimétrico:** En esta variante, un jugador intenta conectar la parte superior e inferior del tablero, mientras que el otro jugador intenta conectar los lados izquierdo y derecho. Esto añade una capa adicional de estrategia, ya que los jugadores deben considerar dos objetivos diferentes.
- II. **Hex con obstáculos:** En esta variante, se colocan obstáculos en el tablero antes de comenzar el juego. Estos obstáculos pueden ser fichas de otro color o bloques que no se pueden ocupar. Los jugadores deben encontrar la mejor manera de conectar sus lados mientras evitan los obstáculos.
- III. **Hex con reglas de captura:** Algunas variantes de Hex incluyen reglas de captura, similares a las del juego de Go. Si un grupo de fichas está rodeado completamente por las fichas del oponente, esas fichas se capturan y se retiran del tablero.
- IV. **Mini Hex:** En esta versión del juego, se utiliza un tablero más pequeño, generalmente de 4×4 o 5×5 hexágonos. Esto hace que el juego sea más rápido y más accesible para principiantes.
- v. **Hex en 3D:** En lugar de un tablero plano, el juego se juega en un tablero tridimensional de hexágonos. Los jugadores deben conectar sus lados en tres dimensiones, lo que añade una capa adicional de complejidad.

2 Resultados previos

El juego de Hex es un juego de estrategia abstracta fascinante que combina simplicidad de reglas con profundidad estratégica. Las variantes mencionadas anteriormente ofrecen diferentes desafíos y experiencias de juego, lo que lo convierte en un juego versátil y emocionante para jugadores de todas las edades y niveles de habilidad. Aquí mostraremos los teoremas y propiedades que nos conducirán al objetivo.

2.1. Fundamentos y reglas del juego de Hex 11×11

La figura 2.1 muestra un tablero de 11×11 , los jugadores son representados, uno con la letra x que parte desde M o M' y el otro con la letra o que parte desde N o N' y los jugadores se mueven en forma alternada. El juego es simple y los jugadores se turnan para marcar cualquier hexágono con una x o una o respectivamente. El juego lo gana el jugador x o el jugador o , si ha logrado marcar un conjunto conectado de fichas que une las dos regiones opuestas M con M' o N con N' .

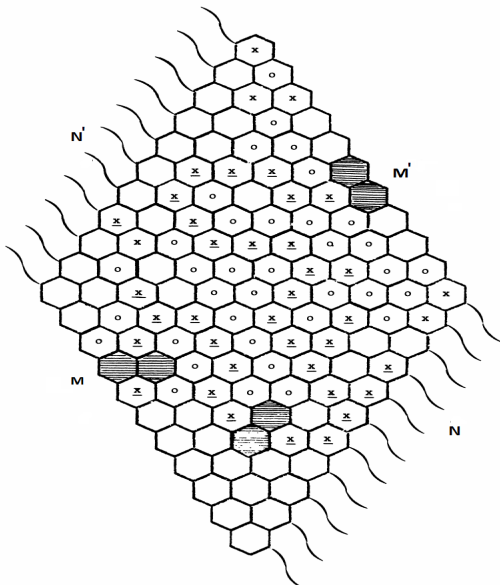


Figura 2.1: Juego de Hex 11×11

Un conjunto T de fichas es llamado conectado si dos miembros k y k' de T puede

unirse mediante un camino $Q = (k = k^1, k^2, \dots, k^m = k')$, en la figura 2.1 se ve un juego en que ningún jugador ha ganado, el jugador “ x ” gana en tres movimientos si juega en las fichas sombreadas. El conjunto conectado potencialmente ganador se indica mediante las fichas marcadas \underline{x} .

2.2. Teorema de Hex y sus variantes

Teorema 1. (Teorema de Hex). Si cada ficha del tablero Hex está marcada con x o con o , entonces existe un camino x que conecta M con M' o existe un camino o que conecta N con N' .

Demostración:

Veamos en forma intuitiva, imaginemos que las regiones M y M' son porciones opuestas a las orillas de un río N (figura 2.1) y que el jugador x está pensando construir una presa para el río colocando “piedras”. Está claro que el jugador x tendrá éxito en represar el río si y solo si, ha colocado sus piedras de una manera que le permita caminar del lado M a M' . Además, se puede reforzar el teorema de Hex agregando esto al final del enunciado, pero no en ambos. Sin embargo, aunque intuitivo si el jugador x logra construir un camino de M a M' , habrá repesado el río e impedido cualquier flujo de N a N' , siendo esto, más difícil de demostrar. El análisis que sigue y la relación con el Teorema de Brouwer depende únicamente de la propiedad de no empatar, viene la prueba a continuación.

En efecto, supongamos que el tablero ha sido cubierto por las x y por las o como en la figura 2.2. La cara M denotará una ficha marcada con una x o una de las regiones M o M' . La cara N denotará una ficha marcada con una o a una de las regiones N o N' .

Consideramos el grafo de aristas Γ del tablero Hex, que incluye aristas adicionales que terminan en los vértices marcadas con a, a', b, b' para separar las cuatro regiones frontera, que también se muestran en la figura 2.2. Ahora presentamos un algoritmo para encontrar un conjunto ganador en el tablero completamente marcado: Hacemos un recorrido a lo largo de Γ , empezando desde el vértice a y siguiendo la regla siempre

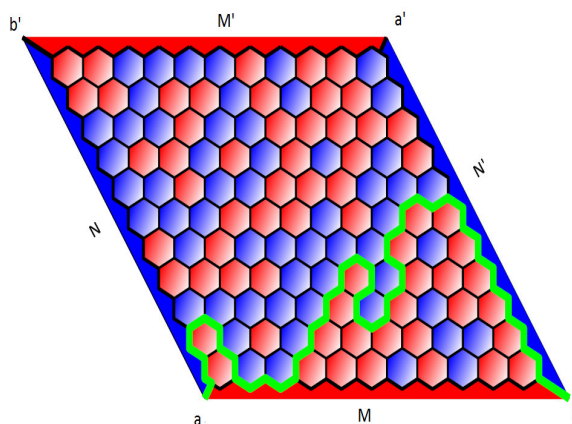


Figura 2.2: Un juego Hex completo

a lo largo de un borde que es el límite entre una cara M y una cara N .

La arista desde “ a ” tiene esta propiedad, ya que, separa M y N . Además se debe notar que, este recorrido determina un único camino dentro de Γ ; supongamos que uno ha avanzado a lo largo de algún borde “ c ” y ha llegado al vértice “ s ”. Entonces dos de las tres caras incidentes en “ s ” son aquellas de las que “ c ” es el límite en común, por lo que una es una cara M y la otra es una cara N . La tercera cara es arbitraria, pero en cualquier caso hay exactamente un arista “ c' ” que satisface la regla del giro, la figura 2.2 muestra esto.

■

Antes de continuar mostramos un resultado muy importante de la teoría de grafos.

Lema 1. (Lema del grafo): Todo grafo finito cuyos vértices sean como máximo de grado dos, es la unión disjunta de subgrafos, los cuales pueden ser:

- i) un vértice aislado,
- ii) un ciclo simple, o
- iii) una trayectoria simple.

Demostración:

Por inducción estructural sobre el número de aristas, se ve que las tres opciones de subgrafos anteriores son las únicas posibles.

■

Continuamos con la demostración del teorema de Hex: Si consideramos solo el subgrafo Γ' de Γ que consta de aristas que separan una cara M de una cara N , entonces satisface la hipótesis del lema del grafo y la conclusión muestra que nuestro recorrido por Γ no será un ciclo. La regla del giro nos garantiza que no volveremos nuevamente a ningún vértice.

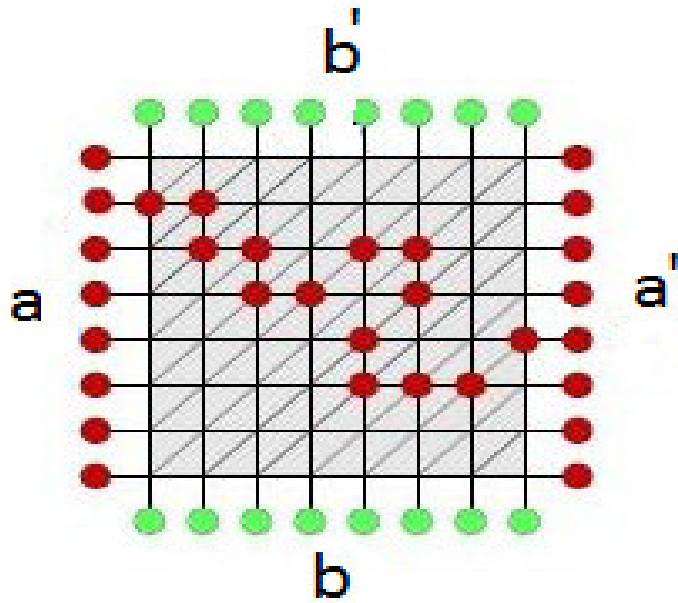


Figura 2.3: Grafo

Combinado con el hecho de que hay un número finito de vértice, nos da como resultado que el recorrido debe terminar; pero los únicos terminales posibles son los vértices a' , b y b' . Ahora observe que cada uno de estos tres vértices es incidente en una de las regiones M' o N' .

Esto nos garantiza la existencia de un camino conectado de puras x o puras o a través de los puntos terminales, garantizando un ganador en el juego, que es lo que queríamos mostrar. En la figura 2.2 se muestra que el jugador o ha ganado.

■

2.3. Teorema del punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^2

Para realizar la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^2 , consideramos algunas definiciones y notaciones:

Para $p, q \in \mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ con $p \leq q$ definimos el subconjunto de números enteros no negativos

$$D(p, q) = \{i : i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, p \leq i \leq q\}$$

Fijando un $n \in \mathbb{Z}^+$, definimos dos subconjuntos D_1 y D_2 de $\mathbb{Z}_0^+ \times \mathbb{Z}_0^+$ por:

$$H) \quad D_1 = \{(i, 0) : i \in D(0, n)\} \quad y \quad D_2 = \{(i, j) : i, j \in D(0, n)\}$$

Para un conjunto C que tiene elementos finitos, la notación para los elementos de C es $\#C$.

Mencionamos algunos conceptos necesarios para las demostraciones.

- a) Se dice que un subconjunto C de D_2 se denomina 1-cadena si existe un $i \in D(1, n)$ tal que $C = \{(i-1, 0), (i, 0)\}$.
- b) Se dice que un subconjunto C de D_2 se denomina 2-cadena si existe $i, j \in D(1, n)$ tal que:

$$\{(i-1, j-1), (i, j-1), (i, j)\} \quad \text{o} \quad \{(i-1, j-1), (i-1, j), (i, j)\}$$

Ejemplo 2.

- i) $\{(0, 0), (1, 0)\}$ es 1-cadena.
- ii) $\{(0, 0), (1, 0)\}$ y $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$ son 2-cadenas.

En efecto, sea q una función de D_2 en $D(0, 2)$. En este caso q se denomina etiquetado. Para $i, j \in D_2$, escribimos $q(i, j)$ en lugar de $q((i, j))$

- a) Se dice que un subconjunto C de D_2 es llamado 1-etiqueta completa si existe $r, s \in D_2$ tal que $C = \{r, s\}$, $q(r) = 0$ y $q(s) = 1$.

- b) Se dice que un subconjunto C de D_2 es llamado 2-etiqueta completa si existe $r, s, t \in D_2$ tal que $C = \{r, s, t\}$, $q(r) = 0$, $q(s) = 1$ y $q(t) = 2$.

Un etiquetado q de D_2 se denomina de Brouwer si cumple las siguientes condiciones:

$$E(1) \quad q(i, n) = 2 \text{ para } i \in D(0, n)$$

$$E(2) \quad q(i, n) \neq 2 \text{ para } i \in D(0, n)$$

$$E(3) \quad q(j, n) \neq 0 \text{ para } j \in D(0, n)$$

$$E(4) \quad q(j, n) \neq 1 \text{ para } j \in D(0, n)$$

Además, tenemos algunos resultados, entre ellos el **teorema del etiquetado**, para la demostración de este teorema primero veamos algunos resultados:

Proposición 1. Sea q un etiquetado de Brouwer de L_2 en $D(0, 2)$, entonces existe exactamente 1-cadenas impares que están 1-completamente etiquetadas.

Demostración:

Por (E2) se tiene que $q(i, 0) \in \{0, 1\}$ para $i \in D(0, n)$, entonces para $i \in D(1, n)$, tenemos que los siguientes resultados son equivalentes:

i) $q(i - 1, 0) + q(i, 0)$ es impar.

ii) $q(i - 1, 0) + q(i, 0) = 1$

iii) La 1-cadena $\{(i - 1, 0), (i, 0)\}$ es 1-completamente etiquetada.

Ahora por (E2) y (E4) tenemos $q(0, 0) = 0$, por (E2) y (E3) se tiene $q(n, 0) = 1$. De allí el número:

$$\sum_{i=1}^n (q(i - 1, 0) + q(i, 0)) = q(0, 0) + q(n, 0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} q(i, 0)$$

es par. Luego:

$$\#q \in D(1, n) : q(i - 1, 0) + q(i, 0)$$

es impar. Por lo tanto, existe exactamente 1-cadena impar que esta 1-completamente etiquetada.

■

Proposición 2. Sea q un etiquetado de Brouwer de D_2 en $N(0, 2)$. Sea C es de 2-cadenas, entonces se cumple lo siguiente:

- a) C incluye como máximo dos subconjuntos que están completamente etiquetados con 1.
- b) C está incluido exactamente por una 2-cadena si y solo si C es 1-cadena.

Demostración:

Supongamos que: $C = \{r, s, t\}$ con $q(r) \leq q(s) \leq q(t)$.

- i) Si $q(r) = q(s) = 0$ y $q(t) = 1$, entonces $\{r, t\}$ y $\{s, t\}$ son 1-completamente etiquetados.
- ii) Si $q(r) = 0$ y $q(s) = q(t) = 1$, entonces $\{r, s\}$ y $\{r, t\}$ son 1-completamente etiquetados.
- iii) Si $q(r) = 0$, $q(s) = 1$ y $q(t) = 2$, entonces $\{r, s\}$ es 1-completamente etiquetado y C es 2-completamente etiquetado.
- iv) caso contrario, no existe ningún subconjunto de C que esté 1-completamente etiquetado.

■

De lo anterior, (a) y (b) se mantienen.

Proposición 3. Sea p un etiquetado de Brouwer de L_2 en $D(0, 2)$ y F un subconjunto 1-completamente etiquetado, entonces se cumple lo siguiente:

- a) F está incluido como maximo en 2-cadenas.
- b) F está incluido exactamente en una 2-cadena si y solo si F es un 1-cadena.

Demostración:

Supongamos que F está incluido en alguna 2-cadena, entonces consideramos estos cuatros casos:

- i) $F = \{(i - 1, 0), (i, 0)\}$ para algún $i \in D(1, n)$, esto es, F es un 1-cadena.

ii) $F = \{(i-1, j), (i, j)\}$ para algún $i, j \in D(1, n)$.

iii) $F = \{(i, j-1), (i, 0)\}$ para algún $i \in D(1, n)$ y $j \in D(1, n)$.

iv) $F = \{(i-1, 0), (i, 0)\}$ para algún $i, j \in D(1, n)$.

En el primer caso, sólo

$$\{(i-1, 0), (i, 0), (i, 1)\}$$

es un 2-cadena que incluye F .

En el segundo caso, como F es 1-completamente etiquetado, entonces se cumple que $q(i-1, j), q(i, 1) \in \{0, 1\}$. Así por (E1), tenemos $j < n$. Por ello

$$\{(i-1, j-1), (i-1, j), (i, j)\} \quad \text{y} \quad \{(i-1, j), (i, j), (i, j+1)\}$$

son 2-cadenas que incluyen F .

En el tercer caso, por (E3) y (E4) tenemos $0 < i < n$, entonces:

$$\{(i-1, j-1), (i, j-1), (i, j)\} \quad \text{y} \quad \{(i, j-1), (i, j), (i+1, j)\}$$

son 2-cadenas que incluyen F .

En el cuarto caso, por (E3) y (E4) tenemos $0 < i < n$, entonces:

$$\{(i-1, j-1), (i, j-1), (i, j)\} \quad \text{y} \quad \{(i-1, j-1), (i-1, j), (i+1, j)\}$$

Son 2-cadenas que incluyen F . Es imposible que tres 2-cadenas incluyan a F .

■

De esta observación, a) y b) se mantienen.

Teorema 2. (Teorema del etiquetado): Sea “ q ” un etiquetado de Brouwer de D_2 a $D(0, 2)$. Entonces existe una 2-cadena que está 2-completamente etiquetada.

Demostración del teorema del etiquetado:

Definimos cuatro conjuntos E_1, E_2, H_1, H_2 de la siguiente manera:

- i) $C \in E_1$ si y solo si C es un 2-cadena que incluye exactamente un subconjunto 1-completamente etiquetado.
- ii) $C \in E_2$ si y solo si C es un 2-cadena que incluye exactamente un subconjunto 1-completamente etiquetado.
- iii) $F \in H_1$ si y solo si F es un subconjunto 1-completamente etiquetado incluido por exactamente una 2-cadena.
- iv) $F \in H_2$ si y solo si F es un subconjunto 1-completamente etiquetado incluido por exactamente dos 2-cadenas.

Por proposición 2(b), observamos que $C \in E_1$ si y solo si C es un 2-cadena que está 2-completamente etiquetada.

Por proposición 3(b), también observamos que $F \in H_1$ si y solo si F es un 1-cadena que es 1-completamente etiquetada. Con doble conteo, contamos el número de subconjuntos 1-completamente etiquetado en 2-cadenas.

Entonces por proposición 2(a) y 3(a), tenemos:

$$\#E_1 + 2\#E_2 = \#H_1 + \#H_2$$

Por proposición 1, $\#H_1$ es impar. Por lo tanto, obtenemos que $\#E_1 \neq 0$, es decir, que es una 2-completamente etiquetada. ■

Teorema 3. Teorema del punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^2 .

Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ una aplicación continua, entonces existe un elemento $x \in [0, 1] \times [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

Demostración:

Definimos las funciones

$$f_1, f_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

por

$$f(s, t) = (f_1(s, t), f_2(s, t)) \text{ para } (s, t) \in [0, 1]^2$$

Es decir: Si $f(s, t) = (s', t')$ entonces

$$f_1(s, t) = s' \text{ y } f_2(s, t) = t'.$$

Como f es continua, f_1 y f_2 también son continuas, entonces tenemos:

$$(I) \quad f_2(s, 1) \leq 1, \quad f_2(s, 0) \geq 0, \quad f_1(1, t) \leq 1, \quad f_1(0, t) \geq 0.$$

Para $s, t \in [0, 1]$, fijamos $n \in \mathbb{Z}^+$ y definido D_2 por (H), definimos un subconjunto R de D_2 por:

$$R = \left\{ (i, j) : j > 0, f_2\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \leq \frac{j}{n} \right\}$$

y un etiquetado q de D_2 a $D(0, 2)$ por:

$$q(i, j) = \begin{cases} 2 & \text{si } (i, j) \in R \\ 1 & \text{si } (i, j) \notin R, i > 0, f_1(i/n, j/n) \leq i/n \\ 0 & \text{otros casos.} \end{cases}$$

Por la definición de q e (I) se ve que q satisface (E1) – (E4). Es decir que q es un etiquetado de Brouwer de D_2 en $D(0, 2)$.

Observamos que:

$$(J) \quad \begin{cases} f_2(i/n, j/n) \leq j/n, & \text{si } q(i, j) = 2. \\ f_1(i/n, j/n) \leq i/n, & \text{si } q(i, j) = 1. \\ i/n \leq f_1(i/n, j/n), & \text{si } q(i, j) = 0. \end{cases}$$

Por teorema 2, existen 2–cadenas que está 2–completamente etiquetada.

Supongamos que

$$C^{(n)} = \left\{ (i_0^{(n)}, j_0^{(n)}), (i_1^{(n)}, j_1^{(n)}), (i_2^{(n)}, j_2^{(n)}) \right\}$$

$$q(i_0^{(n)}) = 0, \quad q(i_1^{(n)}) = 1, \quad q(i_2^{(n)}) = 2.$$

Luego, hacemos

$$x_n = \left(i_0^{(n)}/n, j_0^{(n)}/n \right), \quad y_n = \left(i_1^{(n)}, j_1^{(n)} \right), \quad z_n = \left(i_2^{(n)}, j_2^{(n)} \right)$$

Así, tenemos las sucesiones x_n , y_n y z_n en $[0, 1] \times [0, 1]$, por el teorema de Bolzano Weierstrass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión convergente. Sin pérdida de generalidad, supongamos que x_n converge a algún $x = (s_0, t_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$, entonces se observa que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$\|x_n - y_n\| \leq \sqrt{2}/n \quad \text{y} \quad \|x_n - z_n\| \leq \sqrt{2}/n$$

donde $\|x_n - y_n\|$ es la distancia entre x_n y y_n .

Considerando estas desigualdades, se tiene que y_n y z_n también convergen a (s_0, t_0) y, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ en (J) tenemos :

$$\begin{aligned} i_0^{(n)}/n &\leq f_1(i_0^{(n)}/n, j_0^{(n)}/n), \\ j_0^{(n)}/n &\leq f_2(i_0^{(n)}/n, j_0^{(n)}/n), \\ f_1(i_1^{(n)}/n, j_1^{(n)}/n) &\leq i_1^{(n)}/n, \\ f_2(i_2^{(n)}/n, j_2^{(n)}/n) &\leq j_2^{(n)}/n. \end{aligned}$$

Tomando limite cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos:

$$\begin{aligned} s_0 &\leq f_1(s_0, t_0) \quad , \quad t_0 \leq f_2(s_0, t_0), \\ f_1(s_0, t_0) &\leq s_0 \quad \text{y} \quad f_2(s_0, t_0) \leq t_0 \end{aligned}$$

Así:

$$f_1(s_0, t_0) = s_0 \text{ y } f_2(s_0, t_0) = t_0$$

Es decir:

$$f(x) = f(s_0, t_0) = (s_0, t_0) = x$$

entonces,

$$f(x) = x.$$

■

2.4. Teorema de Hex implica el Teorema de punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^2

Una característica importante de Hex es que nunca puede terminar en empate. Esto es porque un jugador puede bloquear al otro jugador solo completando su propia

cadena. Así tenemos el teorema de Hex (Gale 1979), que nos afirma lo siguiente: Si cada ficha del tablero Hex está marcada con x o con o , entonces existe un camino x que conecta M con M' o existe un camino o que conecta N con N' . En otras palabras: Si cada uno de los hexágonos del tablero $r \times r$ del juego de Hex son pintados de rojo o azul, entonces necesariamente existe un conjunto conexo de hexágonos que une o solo los extremos rojos, o solo los extremos azules. Antes de demostrar la implicancia referida, asumiremos el siguiente resultado.

Proposición 4. (Hex): Sea C_r cubierto por dos conjuntos U y W , entonces U contiene un conjunto conexo que se encuentra con F y X o W contiene un conjunto conexo que se encuentra con P y G .

Demostración:

Esta proposición es una consecuencia del teorema punto fijo de Brouwer.

Sea $f : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2$ una aplicación continua del cuadrado unitario \mathbb{I}^2 en sí mismo, donde existe un $x \in \mathbb{I}^2$ tal que $f(x) = x$.

■

Teorema de Hex implica el **Teorema de Brouwer en \mathbb{R}^2** .

Teorema 4. (Hex \implies Brouwer).

Si el juego de Hex nunca puede terminar en empate (i.e. Existe un conjunto conexo de hexágonos que unen solo pares de lados opuestos del tablero) entonces, existe un hexágono cuyo centro no pertenece a ninguno de los cuatro lados del tablero (Así, para la aplicación f existe $x \in [0, 1] \times [0, 1] = \mathbb{I}^2$ en el centro del hexágono, tal que $\|f(x) - x\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.)

Demostración:

Sea $f : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2$ dado por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Como \mathbb{I}^2 es compacto, pues el intervalo $[0, 1]$ es cerrado y acotado en \mathbb{R} , debemos demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $|f(x) - x| < \varepsilon$. Por la continuidad uniforme de f sabemos que

dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que $\delta < \epsilon$ y $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$.

Ahora considerando el tablero Hex C_r donde $\frac{1}{r} < \delta$. Definimos cuatro subconjuntos U^+ , U^- , W^+ y W^- de C_r de la siguiente manera

$$U^+ = \left\{ s : f_1\left(\frac{s}{r}\right) - \frac{s_1}{r} > \epsilon \right\} \quad (2.1)$$

$$U^- = \left\{ s : \frac{s_1}{r} - f_1\left(\frac{s}{r}\right) > \epsilon \right\} \quad (2.2)$$

$$W^+ = \left\{ s : f_2\left(\frac{s}{r}\right) - \frac{s_2}{r} > \epsilon \right\} \quad (2.3)$$

$$W^- = \left\{ s : \left(\frac{s_2}{r}\right) - f_2\left(\frac{s}{r}\right) > \epsilon \right\} \quad (2.4)$$

donde $s = (s_1, s_2)$. Intuitivamente un vértice s pertenece a U^+ , U^- , W^+ y W^- a

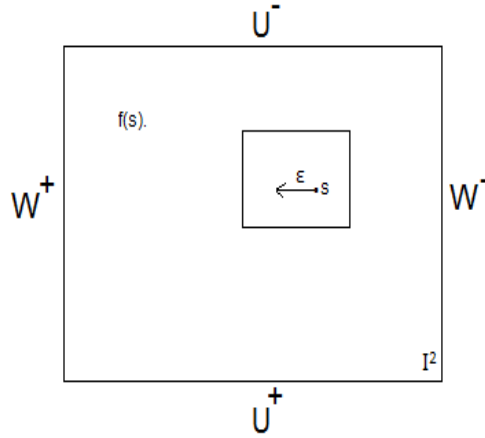


Figura 2.4: Evaluación gráfica de f en \mathbb{I}^2

medida que $\frac{s}{r}$ es trasladado por f al menos un ϵ a la derecha, a la izquierda, arriba o abajo respectivamente.

El teorema se probará si logramos demostrar que estos cuatro conjuntos no cubren C_r , es decir, si el vértice s no pertenece a ninguno de ellos, entonces

$$\left| f_1\left(\frac{s}{r}\right) - \frac{s_1}{r} \right| < \epsilon,$$

y por la compacidad de \mathbb{R}^2 obtenemos

$$f\left(\frac{s}{r}\right) = \frac{s}{r}.$$

La observación fundamental, es ahora que los conjuntos disjuntos (U^+ y U^-), (W^+ y W^-) no son contiguos (en otras palabras los dos conjuntos no tienen ningún par de elementos adyacentes). Explicitamente significa que si $s \in U^+$ y $s' \in U^-$, entonces:

$$f_1\left(\frac{s}{r}\right) - \frac{s_1}{r} > \epsilon \quad (2.5)$$

y

$$\frac{s'_1}{r} - f_1\left(\frac{s'}{r}\right) > \epsilon \quad (2.6)$$

sumando estos dos resultados tenemos

$$f_1\left(\frac{s}{r}\right) - \frac{s_1}{r} + \frac{s'_1}{r} - f_1\left(\frac{s'}{r}\right) > 2\epsilon \quad (2.7)$$

Pero por la elección de δ y r , tenemos

$$\frac{s'_1}{r} - \frac{s_1}{r} < \delta < \epsilon, \quad (2.8)$$

entonces

$$\frac{s_1}{r} + \frac{s'_1}{r} > -\epsilon \quad (2.9)$$

sumando estas dos últimas expresiones se tiene:

$$f_1\left(\frac{s}{r}\right) - f_1\left(\frac{s'}{r}\right) > \epsilon \quad (2.10)$$

con esto, se muestra que s y s' no son adyacentes, si lo fueran se tendría

$$\left| \frac{s}{r} - \frac{s'}{r} \right| = \frac{1}{r} < \delta \quad (2.11)$$

lo que contradice en la elección de δ .

Similarmente, se prueba que W^+ y W^- no son contiguos. Ahora, sea

$$U = U^+ \cup U^-, \quad W = W^+ \cup W^-$$

y supongamos que D es un subconjunto conexo de U .

De lo anterior, se tiene que D debe permanecer totalmente a U^+ o U^- . Pero notemos que U^+ no se encuentra con F ya que f aplica a \mathbb{R}^2 a si mismo y por lo tanto, ningún punto en el límite derecho se puede mapear a la derecha, de manera similar, U^- no intersecta a X , por lo que D no intersecta a F y X . Así, mismo W no contiene un conjunto conexo que intersecte a P y G , por el teorema de Hex se tiene que los conjuntos U y W no cubren C_r lo que demuestra la existencia del punto fijo de Brouwer.

■

3 Problema Principal

Estudiaremos

3.1. Teorema del punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^2 implica el Teorema de Hex

En esta prueba se hace uso del hecho que el tablero Hex C_r da una triangulación de los $r \times r$ cuadrados I_r^2 en \mathbb{R}^2 . Cada punto de I_r^2 se expresa de forma única como una combinación convexa de algún conjunto de al menos tres vértices, que son adyacentes dos a dos.

Estos vértices son las aristas y los triángulos de la (figura 3.1) Además, utilizamos

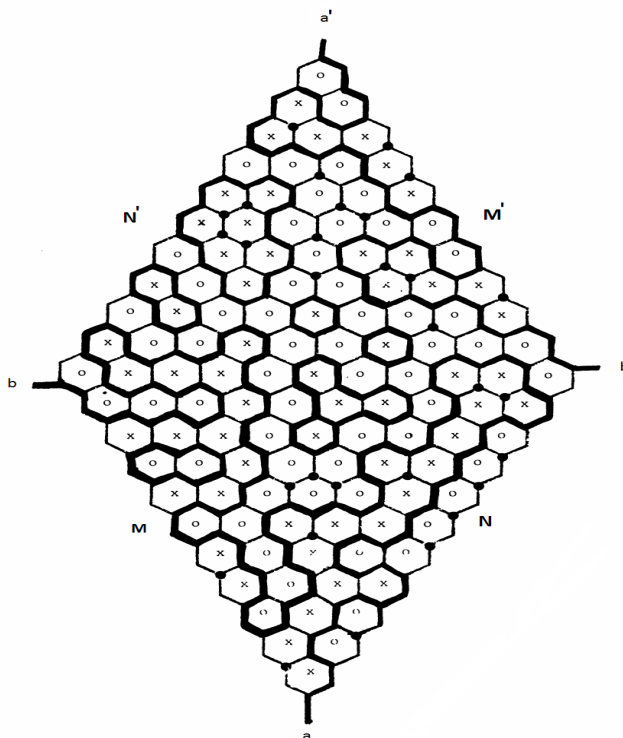


Figura 3.1: Representación gráfica del tablero Hex

el hecho de que cualquier función f de C_r a \mathbb{R}^2 se extiende a una función lineal continua

a trozos \hat{f} en \mathbb{I}^2 .

Si $x = \alpha_1 r^1 + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3$ donde α_i son números no negativos que suman 1 y los r^i son los puntos determinados unívocamente utilizados en la triangulación, entonces por definición tenemos

$$\hat{f}(x) = \alpha_1 f(r^1) + \alpha_2 f(r^2) + \alpha_3 f(r^3).$$

A continuación, demostraremos que: **Teorema de Brouwer en \mathbb{R}^2** implica el **Teorema de Hex.**

Teorema 5. (Brouwer \implies Hex).

Si $f : \mathbb{I}^2 \rightarrow \mathbb{I}^2$ tiene un punto fijo donde $f(x) = x$ en $x \in [0, 1] \times [0, 1] = \mathbb{I}^2$ en el centro del hexágono, tal que $\|f(x) - x\| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$) entonces existe un conjunto conexo de hexágonos que une solo pares de lados opuestos del tablero C_r .

Demostración:

En primer lugar, supongamos que C_r está particionado por dos conjuntos U y W , definimos cuatro conjuntos de la siguiente forma:

Sea \hat{X} el conjunto de todos los vértices conectados a X por un camino U tal que

$$\hat{F} = U - \hat{X}.$$

Sea \hat{G} el conjunto definido de forma similar, como todos los vértices conectados a G por un camino W y que $\hat{P} = W - \hat{G}$. Por definición \hat{X} y \hat{F} , \hat{P} y \hat{G} no son contiguos. Supongamos por contradicción, que no hay ningún camino U de F a X , y ningún camino W de P a G . Sea ahora c^1, c^2 los vectores unitarios de \mathbb{R}^2 y definamos

$$f : C_r \rightarrow C_r$$

tal que

$$f(s) = \begin{cases} s + c^1 & \text{si } s \in \hat{X} \\ s - c^1 & \text{si } s \in \hat{F} \\ s + c^2 & \text{si } s \in \hat{G} \\ s - c^2 & \text{si } s \in \hat{P} \end{cases}$$

En cada uno de los cuatro casos $f(s) \in I^2$ (Figura 3.2).

Para el caso de $s + c^1$ tenemos:

$$s + c^1 \notin C_r \Leftrightarrow s \notin \hat{F} \quad (3.1)$$

Por lo supuesto, que no hay camino U de \hat{X} a \hat{F} , podemos ver que \hat{X} no se encuentra con \hat{F} . De forma similar para los otros tres casos, tenemos que \hat{F} no se encuentra con \hat{X} , \hat{P} no se encuentra con \hat{G} y \hat{G} no se encuentra con \hat{P} .

Ahora extendemos f con nuestra aplicación lineal a trozos que existe para todo \mathbb{I}^2 , para obtener la contradicción demostrando que f no tiene punto fijo. Podemos hacerlo mediante el siguiente lema

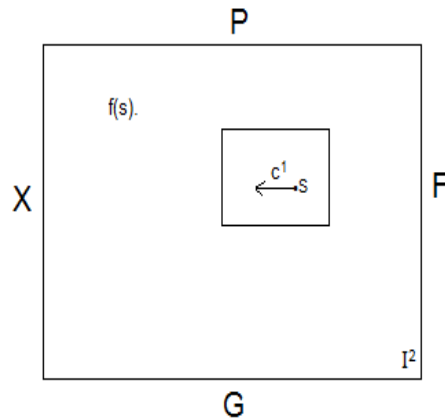


Figura 3.2: Evaluación gráfica de f en \mathbb{I}^2

Lema 2. (Lema simplex)

Sean s_1, s_2, s_3 vértices de cualquier triángulo Δ en \mathbb{R}^2 y sea ρ la extensión simple (lineal a trozos) del mapeo p definido por $\rho(s^i) = s^i + w^i$ donde w^1, w^2, w^3 son vectores dados. Entonces f tiene un punto fijo si y solo si 0 se encuentra en el casco convexo de w^1, w^2, w^3 .

Demostración:

Sea $x = \alpha_1 s^1 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3$, entonces

$$\hat{\rho}(x) = \alpha_1(s^1 + w^1) + \alpha_2(s^2 + w^2) + \alpha_3(s^3 + w^3)$$

y x es fijo si y solo si

$$\lambda_1(s^1 + w^1) + \alpha_2(s^2 + w^2) + \alpha_3(s^3 + w^3) = 0$$

El hecho fundamental nuevamente es la no contigüedad de \hat{X} con \hat{F} y \hat{G} con \hat{P}

Aplicar aquí el lema anterior significa que sí se consideran los tres vértices de cualquier triángulo de vértices mutuamente adyacentes, entonces nunca será el caso que uno de estos vértices se traslada por c^i y otro por $-c^i$, se traducen por vectores que se encuentran todos en el mismo cuadrante de \mathbb{R}^2 .

Por lo tanto, ellos no tienen 0 en su casco convexo, porque no hay puntos asignados a sí mismos; debido a que no hay puntos asignados a sí mismos, hemos obtenido una aplicación libre de puntos fijos, contradiciendo al Teorema del punto fijo de Brouwer. Debido a que asumimos la negación de Hex, hemos demostrado que *Brouwer* \Rightarrow *Hex*.

■

4 Aplicaciones

4.1. Aplicación

Hablemos un poco sobre lo que es un simplex $S \subset \mathbb{R}^n$

Definición 13. Un n -simplex E es el casco convexo en \mathbb{R}^m con $m \geq n + 1$ de $n + 1$ puntos geoméricamente independientes u_1, u_2, \dots, u_n . A estos elementos mencionados le llamamos vértices del simplex E . Mencionamos que u_1, u_2, \dots, u_n son geoméricamente independientes si los vectores $\overrightarrow{u_0u_1}, \overrightarrow{u_0u_2}, \overrightarrow{u_0u_3}, \dots, \overrightarrow{u_0u_n}$ son L.I.

Ejemplo 3.

- i) 1-simplex es un segmento de línea en \mathbb{R}^2 .
- ii) 2-simplex es un triángulo en \mathbb{R}^3 .
- iii) 3-simplex es un tetraedro en \mathbb{R}^4 .

Definición 14. El n -simplex estandar E en \mathbb{R}^{n+1} es el caso convexo de los puntos $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$, estos puntos son los vértices de E

Teorema 6. Si $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, $x_j \rightarrow x$ en W , $b_j \rightarrow b$ en \mathbb{R} y $f(x_j) \leq b_j$ para todo j entonces

$$f(x) \leq b.$$

Lema 3. Para cualquier punto $x \in E(\text{simplex})$

- i) $D_0(x), D_1(x), D_2(x)$ son disjuntos uno a uno.
- ii) $D_0(x) \cup D_1(x) \cup D_2(x) = M - \{x\}$, donde M es el triángulo equilátero de vértices $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$
- iii) $CL(D_0(x)) \cap CL(D_1(x)) \cap CL(D_2(x)) = \{x\}$

iv) Se verifica que:

$$D_0((1, 0, 0)) = E - (1, 0, 0)$$

$$D_0((0, 1, 0)) = E - (0, 1, 0)$$

$$D_0((0, 0, 1)) = E - (0, 0, 1)$$

Lema 4. Si $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ para todo n y $x \in CL(D_j(y_n))$ para $j = 0, 1, 2$, entonces $x_n \in D_j(y_n)$.

La demostración de este lema es consecuencia del teorema 6.

Teorema 7. Sea M el 2-simplex estándar en \mathbb{R}^3 . Toda función $f : M \rightarrow M$ tiene punto fijo.

Demostración:

Dado el estándar simplex M , sea $f : M \rightarrow M$ una función continua arbitraria. Sean $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ triangulaciones de M , donde cada Δ_{i+1} se genera triangulizando más subtriángulos formados bajo Δ_i para todo i .

Asumimos que a medida que i aumenta y tiende a ∞ , el diámetro de la subdivisión tiende a 0. Si algún vértice del subtriángulo de M (sobre todas las triangulaciones) es un punto fijo de f , entonces hemos terminado.

Ahora supongamos que ningún subtriángulo de vértice u para ninguna de las triangulaciones de M es un punto fijo de f . En otras palabras $f(u) \neq u$ sobre todos los vértices v en todas las triangulaciones de M .

Como $f(u) \neq u$ parte (i) y parte (ii) del (Lema 3) implica que $f(u)$ se encuentra exactamente en una de las regiones $D_0(u), D_1(u), D_2(u)$. Etiquete el vértice u con j si $f(u) \in D_j(u)$, entonces todos los vértices del subtriángulo de M se etiquetan con los números 0, 1 o 2.

Ahora por el lema 3, $D_0((1, 0, 0)) = E - (1, 0, 0)$. Esto significa que $f((1, 0, 0)) \in D_0(1, 0, 0)$. Por lo tanto, $(1, 0, 0)$ se etiqueta como 0, $f((0, 1, 0)) \in D_0(0, 1, 0)$ se etiqueta

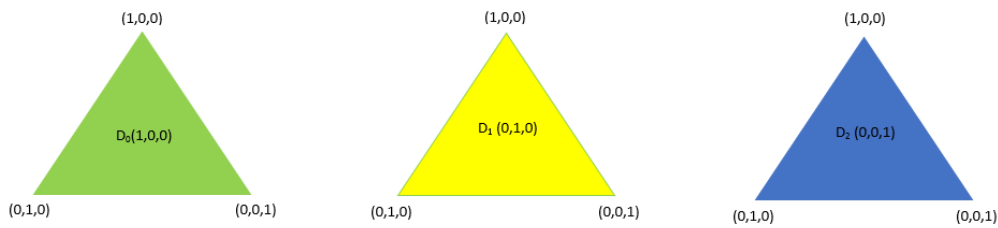


Figura 4.1: Regiones asociadas a los vértices de S (2 simplex estándar)

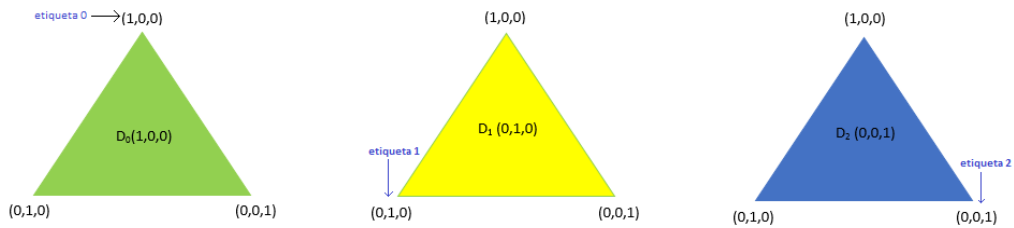


Figura 4.2: M es un triángulo $(0,1,2)$

como 1, $f((0, 0, 1)) \in D_0(0, 0, 1)$ se etiqueta como 2 (figura 4.1).

Por lo tanto, M es el triángulo $(0,1,2)$ (figura 4.2)

Además los vértice del subtriángulo en un lado de M no tienen la misma etiqueta que el vértice opuesto al lado.

Ejemplo 4. Los vértices en el lado de M que conectan los vértices $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ no están etiquetados como 2. Esto se debe a que un vértice u de subtriángulo de ese lado tiene las coordenadas $(x_0, x_1, 0)$.

Entonces $D_2(u) = \emptyset$ por lema 3, entonces $f(u) \notin D_2(u)$ y por tanto u no está etiquetado como 2.

Por lo tanto, cada triangulación Δ_i (Figura 4.3). Por el lema de Sperner, existe al menos un subtriángulo $(0, 1, 2)$ en cada triangulación de M . Por cada triangulación Δ_i elija un $(0, 1, 2)$ subtriángulo M_i . Sea u_r^i denota el vértice del triángulo M_i que está

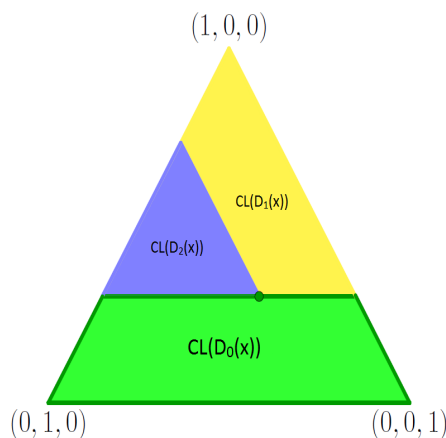


Figura 4.3: Intersección

etiquetado como r . Por nuestro etiquetado.

$$f(u_r^i) \in D_r(u_r^i) \quad (4.1)$$

Consideramos la sucesión (u_0^i) sobre todo i . Esto es una sucesión en un conjunto cerrado y acotado M y por lo tanto, tiene una subsucesión convergente.

Ahora supongamos que la propia sucesión converge cuando $i \rightarrow \infty$ entonces se tiene que $(u_0^i) \rightarrow u$ donde $u \in M$, por la continuidad de f , se tiene

$$f(u_0^i) \rightarrow f(u), \text{ y } f(u_0^i) \in D_0(u_0^i),$$

y por el lema 4 se tiene :

$$f(u) \in CL(D_0(u)) \quad (4.2)$$

Además las sucesiones de vértices de M_i etiquetados como 1 y 2 convergen a u , ya que las distancias entre los vertices del sub simplex tiende a 0 cuando $i \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, $u_1^i \rightarrow u$ y $u_2^i \rightarrow u$ (por teorema 6).

Ahora por continuidad de f y por lema 4 se obtiene:

$$f(u) \in CL(D_1(u)) \quad \text{y} \quad f(u) \in CL(D_2(u)) \quad (4.3)$$

Ahora por 4.2 y 4.3 se tiene:

$$f(u) \in CL(D_0(u)) \cap CL(D_1(u)) \cap CL(D_2(u))$$

Por la parte (iii) del lema 3 tenemos que $f(u) = u$. Por lo tanto, u es un punto fijo de f , entonces algún otro punto de M no lo será. Con esto queda demostrado el teorema del punto fijo de Brouwer en dimensión 2.

■

5 Conclusiones y/o Sugerencias

- 1) En algunas ocasiones utilizamos la matemática para hacer el análisis previo de muchos juegos y crear algunas estrategias dentro de ellos, también puede verse como un juego, para este caso este juego llamado Hex, puede ser utilizado para demostrar un teorema muy importante del análisis funcional, el cual es el teorema del punto fijo de Brouwer para dos dimensiones o para el caso más general para dimensión n .
- 2) En este trabajo se utilizó el teorema del etiquetado para demostrar el teorema de punto fijo de Brouwer en dos dimensiones. Además se muestra como podemos utilizar nuevos estudios para la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer, en este caso usando el lema de Sperner (simplex).
- 3) Este teorema del punto fijo de Brouwer fue el punto de inicio de algunos resultados y generalizaciones, tiene una relación con el teorema de la curva de Jordan, el teorema fundamental del álgebra entre otros resultados muy importantes.
- 4) Considerando la gran importancia de este teorema sugerimos el estudio en forma general para la dimensión n en la parte de aplicaciones como el llamado teorema de punto fijo de Brouwer en \mathbb{R}^n y el teorema Hex en \mathbb{R}^n .

Bibliografía

- [1] Hadamard, J. H. (1910). Sur quelques applications de l'indice de Kronecker, Introduction to : J. Tannery, La Théorie des Fonctions d'une Variable, Hermann, Paris.
- [2] Brouwer, L. E. J. (1911). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. Mathematische annalen, 71(1), 97-115.
- [3] García Álvaro, D. (2020). Teoremas del punto fijo y aplicaciones.
- [4] Gale, D. (1979). The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem. The American mathematical monthly, 86(10), 818-827.
- [5] Takeuchi, Y., & Suzuki, T. (2014). An Elementary Proof of the 2-Dimensional Version of The. Pure Appl. Math, (61), 1-6.
- [6] Anglada Salvanés, S., Abadías Ullod, L., & García Lirola, L. C. El Teorema del Punto Fijo de Brouwer y algunas aplicaciones a la Teoría de Juegos.
- [7] Socha Godoy, D. P. Relación entre el juego de Hex y el teorema del punto fijo.
- [8] Stuckless, T. (2003). Brouwer's Fixed Point Theorem: Methods of Proof and Generalization (Doctoral dissertation, Simon Fraser University).
- [9] Istratescu, I. V. (1981). Fixed Point Theory. Math and its Applications; 7. D. Reidel Publishing Company, Holland.
- [10] Kulpa, W. (1997). The poincaré-miranda theorem. The American Mathematical Monthly, 104(6), 545-550.