Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Solución de una EDO y sistemas de EDO's usando el método de transformada diferencial y aplicaciones

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Alexander VILLEGAS ZUÑIGA

ASESOR

Mg. Willy David BARAHONA MARTÍNEZ

Lima, Perú

2023

Referencia bibliográfica

Villegas, A. (2023). *Solución de una EDO y sistemas de EDO's usando el método de transformada diferencial y aplicaciones*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Alexander Villegas Zuñiga
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	70547212
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0009-7704-0020
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10078450
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-9177-1561
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09197486
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional

Grupo de investigación	EDOACBI
Agencia de financiamiento	Ninguna.
Ubicación geográfica de la investigación	Edificio: Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Cercado de Lima Latitud: -12.196849317834037, Longitud: -77.002912009717
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Mayo 2023 – octubre 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:00 horas del viernes 27 de octubre del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023): Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci (MIEMBRO) y el Mg. Willy David Barahona Martínez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**SOLUCIÓN DE UNA EDO Y SISTEMAS DE EDO'S USANDO EL MÉTODO DE TRANSFORMADA DIFERENCIAL Y APLICACIONES**", presentado por el señor **Bachiller ALEXANDER VILLEGAS ZUÑIGA**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación sobresaliente..., con un calificativo promedio de diecisiete (17)

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller ALEXANDER VILLEGAS ZUÑIGA** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 10:45 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
PRESIDENTE

Mg. Luis Guillermo Huamanlazo Ricci
MIEMBRO

Mg. Willy David Barahona Martínez
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

Yo Willy David, Barahona Martínez en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°001655-2023-D_FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es “Solución de una EDO y sistemas de EDO’s usando el método de transformada diferencial y aplicaciones”, presentado por el bachiller Alexander Villegas Zuñiga ,para optar el título de Licenciado en Matemática.CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y deSimilitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según larevisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documentoevaluado cuenta con el porcentaje de 17% de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorioinstitucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título de Licenciado en Matemática.

DNI Nº. 10078450.
Mg. Willy David, BARAHONA MARTÍNEZ

DEDICATORIA

Mi tesis se la dedico a mi madre, quien siempre me ha apoyado y me ha enseñado con el ejemplo a no rendirse ante las adversidades.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de tesis deseo dedicarlo primeramente a Dios, ya que es una parte fundamental al sentir su presencia durante mi vida y carrera, dándome fuerzas y protección en el momento más difícil de mi vida.

A mi madre, por quién es, una mujer fuerte y admirable, luchando junto a mi en todo momento y darme la oportunidad de formarme profesionalmente.

A mi hermana Danna, a quien dedico mi profesión para ser motivo de superación en su futura carrera, protegiéndola y aconsejando para que sea una mejor persona cada día.

A mis abuelos Luis e Yliana; seres extraordinarios que siempre me muestran los valores de la vida y aconsejan por el simple hecho que me aman.

A mí abuelo Donato (QEPD); de pequeño me conversaba e inculcaba ser cada día mejor, delegando la responsabilidad de cuidar a mí madre y hermana.

A mis padrinos Lorena y Marcos; quienes se convirtieron no solo en mis tíos, sino en mis guías personales y profesionales.

A mí tía Andrea, profesional a quien admiro mucho y fuente de inspiración de perseverancia.

A la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por haberme aceptado a ser parte de ella, también por permitirme conocer a un grupo de docentes profesionales, quienes formaron mis conocimientos.

A mi asesor, el Magister Willy David Barahona Martínez por haberme dedicado su tiempo y orientación para culminar con éxito mi tesis.

Finalmente agradezco a mis compañeros, ya que con su amistad y apoyo moral, me

ayudaron a lo largo de esta carrera para poder culminarla.

RESUMEN

Solución de una EDO y sistemas de EDO's usando el método de transformada diferencial y aplicaciones

Alexander, Villegas Zuñiga

Octubre - 2023

Asesor : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Título obtenido : Licenciado en Matemática.

En el presente trabajo, presentaremos el método de la transformada diferencial (DTM), el cual es una técnica útil para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, Hassan [2]. Nos ocuparemos principalmente del método de la transformada diferencial para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, Moon [7].

Iniciamos el estudio, usando el método de transformada diferencial unidimensional para resolver problemas de valor inicial y de valor límite, luego veremos los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Además, presentaremos algunas modificaciones del método de transformada diferencial que mejoran su algoritmo y finalmente daremos aplicaciones del método.

Palabras clave:

Método de transformada diferencial, Sistemas lineales de EDOs, Sistemas no lineales de EDOs, Ecuaciones integrodiferenciales.

ABSTRACT

Solution of an ODE and systems of ODEs using the differential transform method and applications

Alexander, Villegas Zuñiga

October - 2023

Adviser : Mg. Willy David, Barahona Martínez.

Obtained : Graduate in Mathematics.

In the present work, we will present the differential transform method (DTM), which is a useful technique to solve systems of ordinary differential equations, Hassan [2]. We will mainly be concerned with the differential transform method for systems of ordinary differential equations and nonlinear ordinary differential equations, Moon [7].

We start the study, using the one-dimensional differential transform method to solve initial value and limit value problems, then we will see the systems of ordinary differential equations. In addition, we will present some modifications of the differential transform method that improve its algorithm and finally we will give applications of the method.

Keywords:

Differential transform method, Linear systems of ODEs, Nonlinear systems of ODEs, Integral differential equations.

ÍNDICE GENERAL

Introducción

El método de transformación diferencial fue introducido por primera vez por Zhou hace unos treinta años atrás. Este método es un método numérico semianalítico para resolver ecuaciones diferenciales. De hecho, el método de la transformada diferencial se basa en la expansión de la serie de Taylor, de una manera diferente, en la que la ecuación diferencial y un sistema de EDOs se convierte en una relación de recurrencia para obtener una solución en serie en términos de polinomios.

Seguiremos los estudios que realizaron Ayaz (2004) en [1] y Hassan (2008) en [2] donde utilizó el DTM para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, Zhou (1986) en [5] dió por primera vez el concepto de transformada diferencial y las aplicó para resolver EDOs lineales y no lineales. Las ecuaciones integrales de Volterra fueron resueltas por Tari et al. (2009) en [3]. Kajani y Shehni (2011) en [4] resolvió ecuaciones integro-diferenciales no lineales de Volterra.

1 Preliminares

1.1. Definiciones y notaciones previas

En el presente trabajo, consideramos las siguientes notaciones y definiciones:

Definición 1. ***(Números Naturales).*** *El conjunto de números Naturales está denotado y determinado por*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

También es llamado conjunto de los números enteros positivos $\mathbb{Z}^+$.

Definición 2. ***(Números Enteros).*** *El conjunto de números Enteros está denotado y determinado por*

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Observación 1. *Consideremos los siguientes conjuntos:*

a) *Números Enteros Positivos:* $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$

b) *Números Enteros no Negativos:* $\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

c) *Números Enteros Negativos:* $\mathbb{Z}^- = \{..., -3, -2, -1\}$

Definición 3. ***(Ecuación diferencial ordinaria (EDO)).*** *Es aquella ecuación donde aparece una función desconocida con una o más de sus derivadas que depende solo de una variable independiente*

Definición 4. ***(Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (SEDO)).*** *Un Sistema de Ecuanciones Diferenciales Ordinarias es una expresión del tipo*

$$\left| \begin{array}{l} x_1'(t) = F_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ x_2'(t) = F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ \vdots \\ x_n'(t) = F_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{array} \right.$$

En donde t es una variable independiente que denota al tiempo, $x_1, x_2, ..., x_n$ son variables que dependen de t que toman valores reales y $F_1, F_2, ..., F_n$ son funciones real definidas en un subconjunto D de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 5. ***(Serie de Taylor).*** *Un polinomio de Taylor de grado n se define como sigue:*

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(y^{(k)}(c))(x-c)^k$$

Teorema 1. *Supongamos que la función y tiene (n+1) derivadas en el intervalo (c-r,c+r) para algún $r > 0$ y $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ es el error entre $f_n(x)$ y la función aproximada $y(x)$. Entonces, la serie de Taylor expandida sobre x=c converge a $y(x)$. Es decir,*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(y^{(k)}(c))(x-c)^k$$

Para todo $x \in (c-r, c+r)$

Demostración: Ver en [8]

1.2. Método de transformación diferencial (DTM)

El método de transformación diferencial (DTM) es una técnica de transformación basada en la expansión en serie de Taylor y es una herramienta útil para obtener soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En este método, se aplican ciertas reglas de transformación, a las ecuaciones diferenciales y sus condiciones iniciales o de contorno, la ecuación diferencial es transformada en una ecuación algebraicas en términos de las transformadas diferenciales de la función original, y la solución de esta ecuación algebraica nos aproxima a la solución buscada del problema.

Considere una función $y(x)$ que es analítica en el dominio Ω y sea $x = x_0$ un punto cualquiera en Ω . La función $y(x)$ se representa por una serie de potencias cuyo centro se encuentra en x_0.

La transformación diferencial de la función $y(x)$ viene dada por

Definición 6. *Transformada directa de y(x)*

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=x_0} \tag{1.1}$$

donde $y(x)$ es la función original y $Y(k)$ es la transformada de la función.

Definición 7. *Transformada inversa Y(k).*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(x-x_0)^k Y(k) \tag{1.2}$$

Combinando las ecuaciones (1.1) y (1.2) , obtenemos

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\frac{d^k}{dx^k}y(x) \tag{1.3}$$

lo que significa que el resto de la serie

$$y(x) = \sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=x_0} \tag{1.4}$$

es muy pequeño.

Las siguientes operaciones básicas de la transformación diferencial se obtienen a partir de las ecuaciones (1.1) y (1.3).

Proposición 1. *Sean $F(k)$, $G(k)$ y $H(k)$ las funciones transformadas de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ respectivamente. Si $f(x) = \alpha g(x) \pm \beta h(x)$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, entonces*

$$F(k) = \alpha G(k) \pm \beta H(k).$$

Demostración:

Sea $f(x)$ la función original, entonces la transformada diferencial de $f(x)$ es

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \left[\frac{1}{k!}\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \\
F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k(\alpha g(x) \pm \beta h(x))}{dx^k}\right]_{x=0} \\
F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k(\alpha g(x))}{dx^k} \pm \frac{d^k(\beta h(x))}{dx^k}\right]_{x=0} \\
F(k) &= \frac{1}{k!}\alpha\left[\frac{d^k(g(x))}{dx^k}\right]_{x=0} \pm \frac{1}{k!}\beta\left[\frac{d^k(h(x))}{dx^k}\right]_{x=0} \\
F(k) &= \alpha\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k(g(x))}{dx^k}\right]_{x=0} \pm \beta\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k(h(x))}{dx^k}\right]_{x=0}
\end{aligned}
$$

$$F(k) = \alpha G(k) + \beta H(k)$$

$\blacksquare$

Proposición 2. *Sean $Y(k)$ y $R(k)$ las funciones transformadas de $y(x)$ y $r(x)$ respectivamente. Si* $y(x) = \dfrac{d^n r(x)}{dx^n}$, $n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$Y(k) = (k+1)(k+2)...(k+n)R(k+n).$$

Demostración:

Sea $y(x)$ la función original, entonces la transformada diferencial de $y(x)$ es:

$$
\begin{aligned}
Y(k) &= \frac{1}{k!}\frac{d^k y(x)}{dx^k}\bigg|_{x=0} \\
Y(k) &= \frac{1}{k!}\frac{d^k \frac{d^n r(x)}{dx^n}}{dx^k}\bigg|_{x=0} \\
Y(k) &= \frac{1}{k!}\frac{d^{k+n} r(x)}{dx^{k+n}}\bigg|_{x=0} \\
Y(k) &= \frac{(k+n)!}{k!}\left[\frac{1}{(k+n)!}\frac{d^{k+n} r(x)}{dx^{k+n}}\right]_{x=0}
\end{aligned}
$$

$$Y(k) = (k+1)(k+2)...(k+n)R(k+n)$$

$\blacksquare$

Proposición 3. *Sean $Y(k)$, $R(k)$ y $S(k)$ las funciones transformadas de $y(x)$, $r(x)$ y $s(x)$ respectivamente. Si $y(x) = r(x)s(x)$, entonces*

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{k} R(m)S(k-m).$$

Demostración:

Sea $y(x) = r(x)s(x)$ la función original, luego de la fórmula de Leibnitz para la $n-$ésima derivada de un producto es

$$\frac{d^n(r(x)s(x)}{dx^n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{n-r}s(x)}{dx^{n-r}}$$

En efecto:

Por inducción para $n = 1$:

$$\frac{d(r(x)s(x)}{dx} = \sum_{r=0}^{1} \frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{1-r}s(x)}{dx^{1-r}}$$

$$\frac{d(r(x)s(x)}{dx} = r(x)\frac{ds(x)}{dx} + \frac{dr(x)}{dx}s(x)$$

Por Hipótesis inductiva para algún $n = k \in \mathbb{Z}$ es cierto:

$$\frac{d^k(r(x)s(x)}{dx^k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r}s(x)}{dx^{k-r}}$$

Para $n = k + 1 \in \mathbb{Z}$:

Sea

$$\frac{d^{k+1}(r(x)s(x))}{dx^{k+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k(r(x)s(x))}{dx^k}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r}s(x)}{dx^{k-r}}\right)$$
$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left(\frac{d^{r+1}r(x)}{dx^{r+1}} \frac{d^{k-r}s(x)}{dx^{k-r}} + \frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r+1}s(x)}{dx^{k-r+1}}\right)$$
$$= \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left(\frac{d^{r+1}r(x)}{dx^{r+1}} \frac{d^{k-r}s(x)}{dx^{k-r}}\right) + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left(\frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r+1}s(x)}{dx^{k-r+1}}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k}{r-1} \left(\frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r+1}s(x)}{dx^{k-r+1}} \right) + \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left(\frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r+1}s(x)}{dx^{k-r+1}} \right)$$

$$= \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k}{r-1} \left(\frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r+1}s(x)}{dx^{k-r+1}} \right) + \sum_{r=1}^{k} \binom{k}{r} \left(\frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r+1}s(x)}{dx^{k-r+1}} \right) + \binom{k}{0} r(x) \frac{d^{k+1}s(x)}{dx^{k+1}}$$

$$= \sum_{r=1}^{k+1} \left(\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} \right) \left(\frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r+1}s(x)}{dx^{k-r+1}} \right) + r(x) \frac{d^{k+1}s(x)}{dx^{k+1}}$$

$$= \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+1}{r} \left(\frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r+1}s(x)}{dx^{k-r+1}} \right) + r(x) \frac{d^{k+1}s(x)}{dx^{k+1}}$$

$$= \sum_{r=1}^{k+1} \binom{k+1}{r} \left(\frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r+1}s(x)}{dx^{k-r+1}} \right) + \binom{k+1}{0} r(x) \frac{d^{k+1}s(x)}{dx^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} \frac{d^r r(x)}{dx^r} \frac{d^{k-r+1}s(x)}{dx^{k-r+1}}$$

△

Ahora, usando lo probado, la transformada diferencial de $y(x)$ es:

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{1}{k!} \frac{d^k y(x)}{dx^k} \bigg|_{x=0} \\ &= \left[\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \frac{d^r r(x)}{dx^m} \frac{d^{k-m}s(x)}{dx^{k-m}} \right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{k!} \left[\sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{r!(k-r)!} \frac{d^m r(x)}{dx^m} \frac{d^{k-m}s(x)}{dx^{k-m}} \right]_{x=0} \\ &= \sum_{m=0}^{k} R(m) S(k-m) \end{aligned}$$

■

Proposición 4. *Sean $U(k)$, $V(k)$ y $Y(k)$ las funciones transformadas de $u(x)$, $v(x)$ y $y(x)$ respectivamente, se cumplen:*

a) *Si $u(x) = x^m$, entonces* $U(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$

b) *Si $v(x) = e^{\alpha x}$, entonces* $V(k) = \dfrac{\alpha^k}{k!}$.

c) *Si $y(x) = (1+x)^m$, entonces* $Y(k) = \dfrac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}$.

Demostración:

a) Como $u(x)$ es la función original, entonces su transformada diferencial es :

$$U(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k u(x)}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$$U(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k x^m}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

De la regla de diferenciación tenemos:

$$\frac{d^k x^m}{dx^k} = m(m-1)(m-2)...(m-k+1)x^{m-k+1}$$

Entonces:

$$U(k) = \frac{1}{k!}m(m-1)(m-2)...(m-k+1)x^{m-k+1}\bigg|_{x=0}$$

Si $m = k$

$$U(k) = 1$$

Si $m \neq k$ y $x = 0$ Se obtiene

$$U(k) = 0$$

Entonces: $U(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$

b) Como $v(x)$ es la funcion original, entonces su transformada diferencial de $v(x)$ es:

$$V(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k v(x)}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$$V(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k e^{\alpha x}}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$$V(k) = \frac{1}{k!}\alpha x e^{\alpha x}\bigg|_{x=0}$$

$$V(k) = \frac{\alpha^k}{k!}$$

c) Como $y(x)$ es la función original, entonces su transformada diferencial es:

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k y(x)}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\frac{d^k (1+x)^m}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$$Y(k) = \frac{1}{k!}m(m-1)...(m-k+1)(1+x)^{m-k}\bigg|_{x=0}$$

$$Y(k) = \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}$$

■

Proposición 5. *Sean $U(k)$ y $V(k)$ las funciones transformadas de $u(x) = sen(ax+b)$ y $v(x) = cos(ax+b)$, entonces se cumplen:*

a) $U(k) = \frac{a^k}{k!} sen\big(\frac{\pi k}{k!} + b\big)$.

b) $V(k) = \frac{a^k}{k!} cos\big(\frac{\pi k}{k!} + b\big)$.

Demostración:

a) Como $u(x)$ es la función original, entonces su transformada diferencial es:

$$U(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k sen(ax+b)}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$$U(k) = \frac{1}{k!} a^k sen(\frac{k\pi}{2} + b)$$

b) Como $v(x)$ es la función original, entonces su transformada diferencial es:

$$V(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k cos(ax+b)}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$$V(k) = \frac{1}{k!} a^k cos(\frac{k\pi}{2} + b)$$

■

1.3. Propiedades básicas del DTM

Presentamos la definición de transformada diferencial unidimensional o simplemente el DTM. Luego, probaremos algunos teoremas básicos.
Si en las ecuaciones (1.1) − (1.3) hacemos $x_0 = 0$, entonces tenemos la definición de transformada diferencial unidimensional y algunas propiedades básicas mediante esta definición.

Definición 8. ***(Transformada Diferencial Unidimensional).***
La transformada diferencial directa de la función $y(x)$ viene dada por

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dx^k} y(x) \right]_{x=0} \tag{1.5}$$

donde $y(x)$ es la función original y $Y(k)$ es la transformada de la función.
La transformada inversa $Y(k)$ esta definida como

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k Y(k) \approx y_N(x) = \sum_{k=0}^{+N} Y(k) x^k. \tag{1.6}$$

Luego, sustituyendo la ecuación (1.5) en (1.6), obtenemos

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \frac{d^k}{dx^k} y(x) \mid_{x=0} \tag{1.7}$$

lo que implica que el concepto de transformada diferencial se deriva de la serie de expansión de Taylor.

En lo que continua, asumiremos esta última definición.

Teorema 2. *Si $f(x) = g_1(x)g_2(x)...g_n(x)$ entonces*

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} ... \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2 - k_1)...G_n(k - k_{n-1}).$$

Demostración:

Mediante el uso de la inducción matemática, la declaración es verdadera para $n = 2$ por la Proposición 3 supongamos que la afirmación es verdadera para $n = m$. Ahora, para $n = m + 1$, tenemos

$$f(x) = (g_1(x)g_2(x)...g_m(x))g_{m+1}(x).$$

Sea $g(x) = g_1(x)g_2(x)...g_m(x)$, por la Proposición 3 obtenemos

$$F(k) = \sum_{k_m=0}^{k} G(k_m)G_{m+1}(k - k_m)$$

Donde $G(k_m$ es la función transformada de $g(x)$. Entonces

$$F(k) = \sum_{k_m=0}^{k} \left(\sum_{k_{m-1}=0}^{k} \sum_{k_{m-2}=0}^{k_{m-1}} ... \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2 - k_1)...G_m(k - k_{m-1}) \right) G_{m+1}(k - k_m)$$

La afirmación es verdadera para $n = m + 1$, por lo que es verdadera para $n \geq 2$.

Teorema 3. *Si $f(x) = \int_x^0 g(t)dt$, entonces $F(k) = \frac{G(k-1}{k}$, para $k \geq 1$*

Demostración:

Tomando la transformada diferencial de $f(x)$

$$F(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k \int_0^x g(t)dt}{dx^k}\bigg|_{x=0}$$

$$F(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}g(x)}{dx^{k-1}}\bigg|_{x=0}$$

$$F(k) = \frac{1}{k(k-1)!} \frac{d^{k-1}g(x)}{dx^{k-1}}\bigg|_{x=0}$$

$$F(k) = \frac{G(k-1)}{k}$$

$\blacksquare$

Calculamos la transformada diferencial de funciones no lineales.

Teorema 4. *si $f(y) = y^m$, entonces*

$$F(K) = \begin{cases} Y^m(0), & si\ k = 0 \\ \\ \frac{1}{Y(0)} \sum\limits_{r=1}^{k} \frac{(m+1)r-k}{k} Y(r)F(k-r), & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

Demostración:

Si $k = 0$, usando la definición 8 tenemos,

$$F(0) = y^m(0) = Y^m(0) \tag{1.8}$$

Si $k \geq 1$, derivando $f(y)$ con respecto a x obtenemos

$$\frac{df(y)}{dx} = my^{m-1}\frac{dy(x)}{dx}$$

multiplicando la ecuación anterior por $y(x)$, obtenemos

$$y(x)\frac{df(y)}{dx} = mf(y(x))\frac{dy(x)}{dx}$$

Aplicando el DTM en la ecuación anterior

$$\sum_{r=0}^{k} Y(r)(k-r+1)F(k-r+1) = m\sum_{r=0}^{k}(r+1)Y(r+1)F(k-r)$$

entonces

$$(k+1)Y(0)F(k+1) = m\sum_{r=0}^{k}(r+1)Y(r+1)F(k-r) - \sum_{r=1}^{k} Y(r)(k-r+1)F(k-r+1),$$

o

$$(k+1)Y(0)F(k+1) = m\sum_{r=1}^{k+1} rY(r)F(k-r+1) - \sum_{r=1}^{k} Y(r)(k-r+1)F(k-r+1)$$

$$= \sum_{r=1}^{k+1}((m+1)r-k-1)Y(r)F(k-r+1),$$

Reemplazando k en lugar de $k+1$ resulta

$$kY(0)F(k) = \sum_{r=1}^{k}((m+1)r-k)Y(r)F(k-r),$$

a partir de esto, tenemos

$$F(k) = \frac{1}{Y(0)} \sum_{r=1}^{k} \left[\left(\frac{(m+1)r - k}{k} \right) Y(r) F(k-r) \right] \tag{1.9}$$

De (1.8) y (1.9) obtenemos

$$F(K) = \begin{cases} Y^m(0), & si\ k = 0 \\ \\ \frac{1}{Y(0)} \sum\limits_{r=1}^{k} \frac{(m+1)r-k}{k} Y(r) F(k-r), & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

■

Teorema 5. *Si* $f(y) = e^{ay}$*, entonces*

$$F(K) = \begin{cases} e^{aY(0)}, & si\ k = 0 \\ \\ a \sum\limits_{r=0}^{k-1} \frac{r+1}{k} Y(r+1) F(k-r-1), & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

Demostración:

Si $k = 0$, usando la definición 8 tenemos,

$$F(0) = f(y)\Big|_{x=0} = e^{ay(0)} = e^{aY(0)} \tag{1.10}$$

Derivando $f(y)$ respecto a x se obtiene

$$\frac{df(y)}{dx} = ae^{ay}\frac{dy(x)}{dx} = af(y)\frac{dy(x)}{dx}$$

Al tomar la transformada diferencial a ambos lados de la ecuación anterior, obtenemos

$$(k+1)F(k+1) = a \sum_{r=0}^{k} (r+1) Y(r+1) F(k-r),$$

sustituyendo k en lugar de $k+1$ resulta

$$F(K) = a \sum_{r=0}^{k-1} \frac{r+1}{k} Y(r+1) F(k-r-1),\ k \geq 1 \tag{1.11}$$

De (1.10) y (1.11) obtenemos

$$F(K) = \begin{cases} e^{aY(0)}, & si\ k = 0 \\ \\ a \sum\limits_{r=0}^{k-1} \frac{r+1}{k} Y(r+1) F(k-r-1), & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

■

Teorema 6. *Si $f(y) = ln(a + by),\ a + by > 0,$ entonces*

$$F(K) = \begin{cases} ln(a + bY(0)), & si\ k = 0 \\ \\ \frac{b}{a+bY(0)} Y(1), & si\ k = 1 \\ \\ \frac{b}{a+bY(0)} \left[Y(K) - \sum_{r=0}^{k-2} \frac{r+1}{k} F(r+1) Y(k-r-1) \right], & si\ k \geq 2. \end{cases}$$

Demostración:

Si $k = 0$, usando la definición 8 tenemos

$$F(0) = f(y)\Big|_{x=0} = ln(a + by(0)) = ln(a + bY(0)). \tag{1.12}$$

Derivando $f(y)$ con respecto a x obtenemos

$$\frac{df(y)}{dx} = \frac{b}{a + by} \frac{dy(x)}{dx},$$

o

$$a\frac{df(y)}{dx} = b\left[\frac{dy(x)}{dx} - y\frac{df(y)}{dx}\right] \tag{1.13}$$

Tomando la transformada diferencial de la ecuación (1.13) obtenemos

$$aF(k + 1) = b\left[Y(k + 1) - \sum_{r=0}^{k} \frac{r + 1}{k + 1} F(r + 1)Y(k - r)\right],$$

tomando k en lugar de $k + 1$ resulta

$$aF(k) = b\left[Y(k) - \sum_{r=0}^{k-1} \frac{r + 1}{k} F(r + 1)Y(k - r - 1)\right], k \geq 1. \tag{1.14}$$

Sustituyendo $k = 1$ en la ecuación (1.14), resulta

$$F(1) = \frac{b}{a}[Y(1) - F(1)Y(0)] \tag{1.15}$$

$$= \frac{b}{a + bY(0)} Y(1)$$

Podemos reescribir la ecuación (1.14) como

$$F(k) = \frac{b}{a + bY(0)}\left[Y(k) - \sum_{r=0}^{k-2} \frac{r + 1}{k} F(r + 1)Y(k - r - 1)\right], k \geq 2. \tag{1.16}$$

De (1.12),(1.15) y (1.16) resulta

$$F(K) = \begin{cases} ln(a+bY(0)), & si\ k=0 \\ \\ \frac{b}{a+bY(0)}Y(1), & si\ k=1 \\ \\ \frac{b}{a+bY(0)}\left[Y(K) - \sum\limits_{r=0}^{k-2} \frac{r+1}{k}F(r+1)Y(k-r-1)\right], & si\ k \geq 2. \end{cases}$$

■

Teorema 7. *Si $f(y) = senh(ay)$ y $g(y) = cosh(ay)$, entonces*

$$F(K) = \begin{cases} sinh(aY(0)), & si\ k=0 \\ \\ a\sum\limits_{r=0}^{k-1} \frac{k-r}{k}G(r)Y(k-r), & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

y

$$F(K) = \begin{cases} cosh(aY(0)), & si\ k=0 \\ \\ a\sum\limits_{r=0}^{k-1} F(r)Y(k-r), & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

Demostración:

Si $k = 0$, usando la definición 8 tenemos

$$F(0) = f(y)\Big|_{x=0} = sinh(ay(0)) = sinh(aY(0)). \tag{1.17}$$

Ahora, para $k \geq 1$ derivando $f(y)$ con respecto a x, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{df(y)}{dx} &= acosh(ay)\frac{dy(x)}{dx} \\ &= ag(y)\frac{dy(x)}{dx} \end{aligned} \tag{1.18}$$

Aplicando la transformada diferencial a ambos lados de la ecuación (1.18) se obtiene

$$(k+1)F(k+1) = a\sum_{r=0}^{k}(k-r+1)G(r)Y(k-r+1),$$

Reemplazando $k+1$ por k resulta

$$kF(k) = a\sum_{r=0}^{k-1}(k-r)G(r)Y(k-r)$$

o

$$F(k) = a\sum_{r=0}^{k-1} \frac{(k-r)}{k} G(r)Y(k-r) \tag{1.19}$$

De (1.17) y (1.19) obtenemos

$$F(K) = \begin{cases} senh(aY(0)), & si\ k = 0 \\ \\ a\sum\limits_{r=0}^{k-1} \frac{k-r}{k} G(r)Y(k-r), & si\ k \geq 1. \end{cases}$$

Para $g(y) = cosh(ay)$, la prueba es similar.

1.4. Método de Transformación Diferencial de Múltiples Pasos (MSDTM)

Considere el siguiente PVI(problemas de valores iniciales) para sistemas de EDO.

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ x_2'(t) &= f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n), \end{aligned} \tag{1.20}$$

Sujeta a condiciones iniciales:

$$x_i(t_0) = c_i, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{1.21}$$

Sea $[t_0, T]$ el intervalo en el que queremos encontrar la solución del problema de valor valor inicial (1.20)-(1.21). En aplicaciones reales del método de la transformada diferencial (DTM), la solución aproximada del orden N del problema de valor inicial (1.20)-(1.21) puede expresarse mediante la serie finita.

$$x_i = \sum_{k=0}^{N} X_i(k)(t-t_0)^k, \quad t \in [t_0, T],\ i = 1, 2, .., n$$

donde,

$$X_i(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k x_i(t)}{t^k}\right]_{t=t_0}, \quad i = 1, 2, 3, ..., n$$

Usando algunas operaciones fundamentales de DTM, tenemos la siguiente relación de recurrencia.

$$(k+1)X_i(k+1) = F_i(k, X_1, X_2, ..., X_n),\ i = 1, 2, ..., n$$
$$X_i(0) = c_i,\quad i = 1, 2, ..., n$$

donde $F_i(k, X_1, X_2, ..., X_n$ es la transformada diferencial de la función $f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)$ para $i = 1, 2, 3, ..., n$.

La transformada diferencial $X_i(k)$ de las funciones desconocidas $x_i(t)$ puede resolverse resolviendo el sistema algebraico iterativo. Con el fin de acelerar la tasa de convergencia y mejorar la precisión de las soluciones en el intervalo $[t_0, T]$ en subintervalos y se aplica el algoritmo de MSDTM se aplica como sigue:

Supongamos que el intervalo $[t_0, T]$ se divide en M subintervalos $[t_{m-1}, t_m],\ m = 1, 2, 3, ..., M$ de igual longitud de tamaño de paso $h = \frac{(T-t_0)}{M}$ utilizando los nodos $t_m = t_0 + mh$. Las ideas principales del MSDTM son las siguientes: En primer lugar aplicamos el DTM al PVI (1.20)-(1.21) sobre el intervalo $[t_0, t_1]$, obtendremos la siguiente solución aproximada.

$$x_{i,1}(t) = \sum_{k=0}^{N} X_{i,1}(k)(t-t_0)^k\ \ t \in [t_0, t_1]$$

Utilizando las condiciones iniciales $x_i(t_0) = c_i$ para $m \geq 2$ y en cada subintervalo $[t_{m-1}, t_m]$ utilizaremos las condiciones iniciales $x_{i,m}(t_{m-1}) = x_{i,m-1}(t_{m-1})$ y aplicamos el DTM al PVI (1.20)-(1.21) en el intervalo $[t_{m-1}, t_m]$. El proceso se repite y genera una secuencia de soluciones aproximadas $x_{i,m}(t),\ m = 1, 2, ..., M,\ i = 1, 2, ..., n$, para las soluciones $x_i(t)$

$$x_{i,m} = \sum_{k=0}^{N} X_{i,m}(k)(t-t_{m-1})^k,\quad t \in [t_{m-1}, t_m]$$

Por último , el MSDTM asume la siguiente solución

$$x_i(t) = \begin{cases} x_{i,1}(t), \quad t \in [t_0, t_1] \\ x_{i,2}(t), \quad t \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ x_{i,M}(t), \quad t \in [t_{M-1}, t_M] \end{cases} \quad , \quad i = 1, 2, ..., n$$

2 Solución de EDO's

Aquí mostraremos los teoremas y propiedades que nos conduciran al objetivo.

2.1. Solución de PVI lineales y no lineales

Usando las propiedades vistas anteriormente, daremos una diversidad de ejemplos, donde se detalla paso a paso la técnica para resolver un PVI con EDO lineal o con EDO no lineal.

Ejemplo 1. *Resolver:*

$$\left| \begin{array}{l} y'(x) + 5y(x) = 2,\ 0 \leq x < +\infty. \\ y(1) = 2. \end{array} \right.$$

Solución:

Aplicando el DTM en la primera ecuación por la definición 6 para $x_0 = 1$

$$(k+1)Y(k+1) + 5Y(k) = 2\delta(k)$$

Esto conduce a la siguiente relación de recurrencia

$$Y(k+1) = \frac{2\delta(k) - 5Y(k)}{(k+1)} \tag{2.1}$$

de la segunda ecuación obtenemos

$$Y(0) = 2 \tag{2.2}$$

Usando la relación de recurrencia entre (2.1) y (2.2) para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ obtenemos lo siguiente:

$$Y(0) = 2$$
$$Y(1) = -10$$
$$Y(2) = 25$$
$$Y(3) = -\frac{250}{3}$$
$$Y(4) = \frac{1250}{12}$$
$$Y(5) = -\frac{6250}{60}$$

Podemos escribir la solución como

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^{5} (x - x_0)^k Y(k)$$
$$y(x) \approx \sum_{k=0}^{5} (x - 1)^k Y(k)$$
$$y(x) \approx 2 - 10(x-1) + 25(x-1)^2 - \frac{250}{3}(x-1)^3 - \frac{1250}{12}(x-1)^4 - \frac{6250}{60}(x-1)^5$$

■

Ejemplo 2. *Resolver:*

$$\left| \begin{array}{l} 3y'(x) + y(x) = 2e^{-x},\ 0 \leq x < +\infty. \\ y(0) = 2. \end{array} \right.$$

Solución:

Aplicando el DTM en la primera ecuación por la definición 6 para $x_0 = 0$

$$3(k+1)Y(k+1) + Y(k) = \frac{(-1)^k}{k!}2$$

Esto conduce a la siguiente relación de recurrencia

$$Y(k+1) = \frac{\left(\frac{(-1)^k}{k!}2 - Y(k)\right)}{3(k+1)}$$

$$Y(k+1) = \frac{(-1)^k}{k!3(k+1)}.2 - \frac{Y(K)}{3(k+1)} \tag{2.3}$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$Y(0) = 2 \tag{2.4}$$

Usando la relación de recurrencia entre (2.3) y (2.4) para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Y(0) &= 2 \\ Y(1) &= 0 \\ Y(2) &= -\frac{1}{3} \\ Y(3) &= \frac{4}{27} \\ Y(4) &= -\frac{13}{324} \end{aligned}$$

Podemos escribir la solución como

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \sum_{k=0}^{4} (x - x_0)^k Y(k) \\ y(x) &\approx \sum_{k=0}^{4} (x - 1)^k Y(k) \\ y(x) &\approx 2 - \frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{4}{27}(x-1)^3 - \frac{13}{324}(x-1)^4 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3. *Resolver:*

$$\left| \begin{array}{l} y' = -\frac{x}{y},\ 0 \leq x < +\infty. \\ y(4) = 3. \end{array} \right.$$

Solución:

Multiplicando por y la primera ecuación

$$yy' = -x$$

Aplicando el DTM en la ecuación anterior

$$yy' = \sum_{m=0}^{k} Y(m)(k-m+1)Y(k-m+1) = \begin{cases} -4, & k = 0 \\ -1, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2. \end{cases} \tag{2.5}$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$Y(0) = 3 \tag{2.6}$$

Usando la relación de recurrencia entre (2.5) y (2.6) para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} Y(0) &= 3 \\ Y(1) &= -\frac{4}{3} \\ Y(2) &= -\frac{25}{54} \\ Y(3) &= -\frac{50}{243} \\ Y(4) &= -\frac{2225}{17496} \end{aligned}$$

Podemos escribir la solución como

$$\begin{aligned} y(x) &\approx \sum_{k=0}^{4} (x - x_0)^k Y(k) \\ y(x) &\approx \sum_{k=0}^{4} (x - 4)^k Y(k) \\ y(x) &\approx 3 - \frac{4}{3}(x - 4) - \frac{25}{54}(x - 4)^2 - \frac{50}{243}(x - 4)^3 - \frac{2225}{17496}(x - 4)^4 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 4. *Resolver:*

$$\left|\begin{array}{l} 2y'' + 3y' + y = 3senx, \;\; 0 \leq x < +\infty. \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{array}\right.$$

Solución:

Aplicando el DTM en la primera ecuación resulta

$$2(k+1)(k+2)Y(K+2) + 3(K+1)Y(k+1) + Y(k+1) + Y(k) = 3\frac{1}{k!}sen(\frac{\pi k}{2}) \quad (2.7)$$

Y de la segunda ecuación obtenemos

$$Y(0) = 1 \qquad y \qquad Y(1) = 1 \tag{2.8}$$

Usando la relación de recurrencia en (2.7) y (2.8) para $k = 0, 1, 2, 3, 4$ obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
Y(0) &= 1 \\
Y(1) &= 1 \\
Y(2) &= -1 \\
Y(3) &= \frac{2}{3} \\
Y(4) &= -\frac{7}{48}
\end{aligned}
$$

Podemos escribir la solución como

$$
\begin{aligned}
y(x) &\approx \sum_{k=0}^{4} x^k Y(k) \\
y(x) &\approx 1 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{48}x^4
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Ejemplo 5. *Resolver:*

$$
\left|
\begin{array}{l}
y''(x) + (y'(x))^2 = 0, \ 0 \leq x < +\infty. \\
y(0) = 0, \ y'(0) = 1.
\end{array}
\right.
$$

Solución:

Aplicando el DTM en la primera ecuación

$$
(k+1)(k+2)Y(k+2) + \sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)Y(r+1)Y(k-r+1) = 0 \tag{2.9}
$$

y de la siguiente ecuación obtenemos

$$
Y(0) = 1 \qquad y \qquad Y(1) = 1 \tag{2.10}
$$

Usando la relación de recurrencia en (2.9) y (2.10)

$$
\begin{aligned}
Y(0) &= 0 \\
Y(1) &= 1 \\
Y(2) &= -\frac{1}{2} \\
Y(3) &= \frac{1}{3} \\
Y(4) &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Podemos escribir la solución como

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^{4} x^k Y(k)$$
$$y(x) \approx x - x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

■

Ejemplo 6. *Resolver:*

$$\left| \begin{array}{l} y''(x) + 2(y'(x))^2 + 4y(x) = 0 \;\; 0 \leq x < +\infty. \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0. \end{array} \right.$$

Solución:

Aplicando el DTM en la primera ecuación

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)+2\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)Y(r+1)Y(k-r+1)+4Y(k) = 0 \quad (2.11)$$

y de la siguiente ecuación obtenemos

$$Y(0) = 1 \qquad y \qquad Y(1) = 0 \quad (2.12)$$

usando la relación de recurrencia en (2.11) y (2.12)

$$Y(0) = 1$$
$$Y(1) = 0$$
$$Y(2) = -2$$
$$Y(3) = 0$$
$$Y(4) = -2$$

Podemos escribir la solución como

$$y(x) \approx \sum_{k=0}^{4} x^k Y(k)$$
$$y(x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$$

■

Ejemplo 7. *Resolver:*

$$\left| \begin{array}{l} xy''(x) + 8y'(x) + 2xy(x) = xyLny, , \; x > 0. \\ y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0. \end{array} \right.$$

Solución:

Aplicando el DTM en la primera ecuación

$$\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)(k-r+1)(k-r+2)Y(k-r+2)+\delta(k+1)Y(k+1)+$$

$$+2\sum_{r=0}^{k}\delta(r-1)Y(k-r)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{r}\delta(k_1-1)Y(r-k_1)F(k-r) \tag{2.13}$$

donde

$$F(k)=\begin{cases} Ln(1), & k=0\\ 0, & k=1\\ Y(k)-\displaystyle\sum_{r=0}^{k-2}\frac{r+1}{k}F(r+1)Y(k-r-1), & k\geq 2.\end{cases}$$

y de la segunda ecuación obtenemos

$$Y(0)=1 \qquad y \qquad Y(1)=0 \tag{2.14}$$

usando la relación de recurrencia en (2.13) y (2.14)

$$Y(0)=1$$
$$Y(1)=0$$
$$Y(2)=-\frac{1}{9}$$
$$Y(3)=0$$
$$Y(4)=\frac{1}{396}$$

Podemos escribir la solución como

$$y(x)\approx\sum_{k=0}^{4}x^kY(k)$$
$$y(x)\approx 1-\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{396}x^4$$

■

2.2. Solución de SEDO lineales y no lineales

Usando las propiedades vistas anteriormente, daremos una diversidad de ejemplos, donde se detalla paso a paso la técnica para resolver un SEDO con EDO lineal o con EDO no lineal.

Ejemplo 8. *Resolver:*

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) - 2x + 3y = 0. \\ y'(t) + 2x - y = 0. \end{array} \right. \quad x(0) = 8,\ y(0) = 3.$$

Solución:

Aplicando el DTM en las ecuaciones obtenemos

$$(k+1)X(k+1) = 2X(k) - 3Y(k) \tag{2.15}$$

$$(k+1)Y(k+1) = Y(k) - 2X(k) \tag{2.16}$$

con condiciones iniciales

$$X(0) = 8 \qquad y \qquad Y(0) = 3 \tag{2.17}$$

usando la relación de recurrencia en (3.1),(3.2) y (3.3)

$$\begin{array}{lcl} X(0) = 8 & , & Y(0) = 3 \\ X(1) = 7 & , & Y(1) = -13 \\ X(2) = \dfrac{53}{2} & , & Y(2) = -\dfrac{27}{2} \\ X(3) = \dfrac{187}{6} & , & Y(3) = -\dfrac{135}{6} \end{array}$$

Podemos escribir la solución como

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{3} t^k X(k) = 8 + 7t + \frac{53}{2}t^2 + \frac{187}{6}t^3$$
$$y(t) \approx \sum_{k=0}^{3} t^k Y(k) = 3 - 13t - \frac{27}{2}t^2 - \frac{135}{6}t^3$$

■

Ejemplo 9. *Resolver:*

$$\left| \begin{array}{l} x'(t) - y = e^t. \\ y'(t) + x = sint,. \end{array} \right. \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$$

Solución:

Aplicando el DTM en las ecuaciones obtenemos

$$(k+1)X(k+1) = \frac{1}{k!} + Y(k) \tag{2.18}$$

$$(k+1)Y(k+1) = \left[\frac{1}{k!}sin(\frac{k\pi}{2}) - X(k)\right] \tag{2.19}$$

con condiciones iniciales

$$X(0) = 1 \qquad y \qquad Y(0) = 0 \tag{2.20}$$

usando la relación de recurrencia en (3.4),(3.5) y (3.6)

$$\begin{aligned}
X(1) &= 1 \quad , \quad Y(1) = -1 \\
X(2) &= -\frac{1}{4} \quad , \quad Y(2) = 0 \\
X(3) &= \frac{1}{6} \quad , \quad Y(3) = \frac{1}{12} \\
X(4) &= \frac{1}{16} \quad , \quad Y(4) = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Podemos escribir la solución como

$$\begin{aligned}
x(t) &\approx \sum_{k=0}^{4} t^k X(k) = 1 + t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{16}t^4 \\
y(t) &\approx \sum_{k=0}^{4} t^k Y(k) = -t + \frac{1}{12}t^3 - \frac{1}{12}t^4
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 10. *Resolver:*

$$\left|\begin{array}{l}
x'(t) = z(t) - cost. \\
y'(t) = z(t) - e^t. \qquad x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 2. \\
z'(t) = x(t) - y(t).
\end{array}\right.$$

Solución:

Aplicando la DTM en las ecuaciones obtenemos

$$X(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[Z(k) - \frac{1}{k!}cos(\frac{\pi k}{2})\right] \tag{2.21}$$

$$Y(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[Z(k) - \frac{1}{k!}\right] \tag{2.22}$$

$$Z(k+1) = \frac{1}{k+1}\left[X(k) - Y(k)\right] \tag{2.23}$$

Con condiciones iniciales

$$X(0) = 1 \quad , \quad Y(0) = 0 \quad y \quad Z(0) = 2 \tag{2.24}$$

Usando la relación de recurrencia en (3.7),(3.8),(3.9) y (3.10)

$$\begin{array}{lllll} Z(1) = 1 & , & Y(1) = 1 & , & X(1) = 1 \\ Z(2) = 0 & , & Y(2) = 0 & , & X(2) = \dfrac{1}{2} \\ Z(3) = \dfrac{1}{6} & , & Y(3) = -\dfrac{1}{6} & , & X(3) = \dfrac{1}{6} \\ Z(4) = \dfrac{1}{120} & , & Y(4) = \dfrac{1}{120} & , & X(4) = \dfrac{1}{24} \end{array}$$

Podemos escribir la solución como

$$x(t) \approx \sum_{k=0}^{3} t^k X(k) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4$$

$$y(t) \approx \sum_{k=0}^{3} t^k Y(k) = t - \frac{1}{12}t^3$$

$$z(t) \approx \sum_{k=0}^{3} t^k Z(k) = 2 + t + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4$$

■

3 Aplicaciones

3.1. Aplicación del DTM a un modelo epidémico de rotavirus

Vamos a usar el modelo SIS, el cual es una modificación del modelo SIR, el modelo SIS describe el movimiento de humanos desde el comportamiento infeccioso y devuelto al compartimento susceptible. La simple formación de modelos matemáticos no basta para controlar la propagación de enfermedades epidémicas porque la mayoría de los problemas biológicos formulados en marcos de modelos suelen ser no lineales y difíciles de resolver. Para calcular las soluciones de estos modelos aproximados o de perturbación, se necesitan métodos para resolver estos modelos.

La principal ventaja del DTM es su aplicación directa a las EDO lineales y no lineales sin discretización, linealización o perturbación. Proporciona una tasa de convergencia rápida y una solución en serie precisa. Sin embargo su inconveniente es que a menudo se obtiene una solución a serie truncada después de resolver la ecuación diferencial, aunque la solución truncada no muestra los comportamientos exactos del sistema, este proporciona una excelente aproximación cuando se considera una región pequeña. Para superar el inconveniente del DTM antes mencionado se ha utilizado el método de transformación diferencial multipaso (MSDTM) presentado en la sección 1. En MSDTM, el intervalo $[0, T]$ se divide en M subintervalo, y las soluciones en serie se obtiene en $t \in [t_i, t_{i+1}],\ i = 1, 2, 3, ..., M - 1$.

3.1.1. Materiales y métodos:

Los lactantes y los niños menores de cinco años son más susceptibles a la diarrea por rotavirus. La infección por rotavirus se transmite principalmente de persona a persona por gotitas respiratorias, contaminación de objetos, manos, agua y alimentos con heces infrectadas. Actualmente no hay cura para la infección por rotavirus, y la vacunación sigue siendo el método más eficaz para reducir la propagación de rotavirus.

Varios Modelos Matemáticos que incorporán la vacunación para comprender la dinámica de las epidemias de Rotavirus. En este estudio, consideramos el modelo SVIR. La ecuación (3.1) denota el modelo SVIR:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = (1-\theta)\lambda - \beta SI + \zeta V - \eta S - \mu S, \\ \frac{dV}{dt} = \theta\lambda + \eta S - \xi\beta VI - (\zeta + \mu)V, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI + \xi\beta VI + (\tau + \varpi + \mu)I, \\ \frac{dR}{dt} = \varpi I - \mu R, \end{cases} \tag{3.1}$$

con condiciones iniciales no negativas.

En (3.1), la tasa de reclutamiento de humanos al compartimento susceptible se denota como $(1-\theta)\lambda$, la tasa de reclutamiento de individuos al compartimento vacunado viene dada como $\theta\lambda$. Por otro lado η es la tasa de vacunación de los niños de la clase susceptible, mientras que ζ representa la tasa de disminución de la vacuna. La tasa de contacto efectiva para que se produzca la transmisión de la enfermedad se denota como β. El parámetro $0 < \xi < 1$ representa la reducción esperada en el riesgo de infección debido a la vacunación. La tasa de mortalidad debido a la enfermedad por rotavirus tiene lugar a la tasa τ, mientras que ϖ denota la tasa a la que los niños pasan a la clase recuperada. El parámetro μ indica la tasa de mortalidad natural de la población.

3.1.2. Aplicación del DTM y el MSDTM al modelo SVIR de rotavirus:

Utilizando las operaciones matemáticas dadas en la sección 3, la relación de recurrencia obtenida para el sistema en (3.1) usando DTM es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
&S(k+1) = \tfrac{1}{k+1}((\lambda - \lambda\theta)\delta(k) + \zeta V(k) - \eta S(k) - \mu S(k)) \\
&-\tfrac{1}{k+1}(\beta \sum_{j=0}^{k} S(j)I(k-j)), \\
&V(k+1) = \tfrac{1}{k+1}\big((\lambda\theta)\delta(k) + \eta S(k) - \xi\beta \sum_{j=0}^{k} V(j)I(k-j)\big) \\
&-\tfrac{1}{k+1}(\zeta + \mu)V(k), \\
&I(k+1) = \tfrac{1}{k+1}\big(\beta \sum_{j=0}^{k} S(j)I(k-j) + \xi\beta \sum_{j=0}^{k} V(j)I(k-j)\big) \\
&-\tfrac{1}{k+1}(\tau + \varpi + \mu)I(k), \\
&R(k+1) = \tfrac{1}{k+1}(\varphi I(k) - \mu R(k)\big)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Por lo tanto, la solución en serie DTM del modelo SVIR en (3.1) es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \sum_{k=0}^{n} S_k x^k \\
V(t) &= \sum_{k=0}^{n} V_k x^k \\
I(t) &= \sum_{k=0}^{n} I_k x^k \\
R(t) &= \sum_{k=0}^{n} R_k x^k
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

La solución MSDTM del modelo epidémico de Rotavirus SVIR en (3.1) se da a continuación como:

$$
X(x) = \begin{cases}
\sum_{k=0}^{n} X_1(k)x^k, & x \in [0, t_1] \\
\sum_{k=0}^{n} X_2(k)(x - t_1)^k, & x \in [t_1, t_2] \\
\vdots & \\
\sum_{k=0}^{n} X_m(k)(x - t_{M-1})^k, & x \in [t_{M+1}, t_M]
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

donde X denota S o V o I o R y X_i denota S_i o V_i o I_i o R_i para, $i = 1, 2, ..., M$ para satisfacer las relaciones de recurrencia dadas en (3.2), tal que:

$$S_i(0) = S_{i-1}(0),\ \ V_i(0) = V_{i-1}(0),\ \ I_i(0) = I_{i-1}(0)\ \ y\ \ R_i(0) = R_{i-1}(0).$$

Considerando las condiciones iniciales de (3.1):

$$S(0) = 500,\ \ V(0) = 350,\ \ I(0) = 150,\ \ R(0) = 50$$

Tal que:

S: Población Susceptible.

V: Población Vacunada.

I: Población Infectada.

R: Población Recuperada.

Valores de los parámetros utilizados para los experimentos numéricos

Parámetro	Valor	Unidad
λ	4.109	Por día
θ	1.884×10^{-3}	Por día
μ	2.537×10^{-5}	Por día
τ	4.466×10^{-5}	Por día
β	1.0×10^{-4}	Por día
ϖ	9.9×10^{-2}	Por día
ξ	1.0×10^{-3}	Por día
ζ	2.778×10^{-3}	Por día
η	1.884×10^{-3}	Por día

Usando el programa MAPLE resulta la siguiente solución del DTM:

$S = 500 - 3.381126356t + 0.2124167610t^2 - 0.004611925627t^3 + 0.00007977370689t^4$

$- 1.035445811 \times 10^{-6}t^5 + 4.897948464 \times 10^{-9}t^6 + 2.492545669 \times 10^{-10}t^7$

$- 1.070802117 \times 10^{-11}t^8 + 2.668147517 \times 10^{-13}t^9 - 4.712850095 \times 10^{-15}t^{10}$

$V = 350 - 0.03668814400t - 0.003004603691t^2 + 0.0001344033978t^3 - 2.261709418 \times 10^{-6}t^4$

$+ 3.179329209 \times 10^{-8}t^5 - 3.537285962 \times 10^{-10}t^6 + 1.675035352 \times 10^{-12}t^7 +$

$+ 1.110673798 \times 10^{-12}t^8 - 3.386963137 \times 10^{-14}t^9 + 1.032591798 \times 10^{-15}t^{10}$

$I = 150 - 7.355254500t + 0.1549738398t^2 - 0.0006420030190t^3 - 0.00006158278421t^4$

$+ 2.223460880 \times 10^{-6}t^5 - 4.125303211 \times 10^{-8}t^6 + 3.329023753 \times 10^{-10}t^7$

$+ 6.527935691 \times 10^{-12}t^8 - 3.363529866 \times 10^{-13}t^9 + 7.992201535 \times 10^{-15}t^{10}$

$R = 50 + 14.84873150t - 0.3642734539t^2 + 0.005117217253t^3 - 0.00001592203067t^4$

$- 1.219258339 \times 10^{-6}t^5 + 3.669225995 \times 10^{-8}t^6 - 5.835687231 \times 10^{-10}t^7$

$+ 4.121517536 \times 10^{-12}t^8 + 7.179567450 \times 10^{-14}t^9 - 3.330076713 \times 10^{-15}t^{10}$

En la Figura 3.1 se puede observar que la gráfica diverge cuando el tiempo $t > 10$

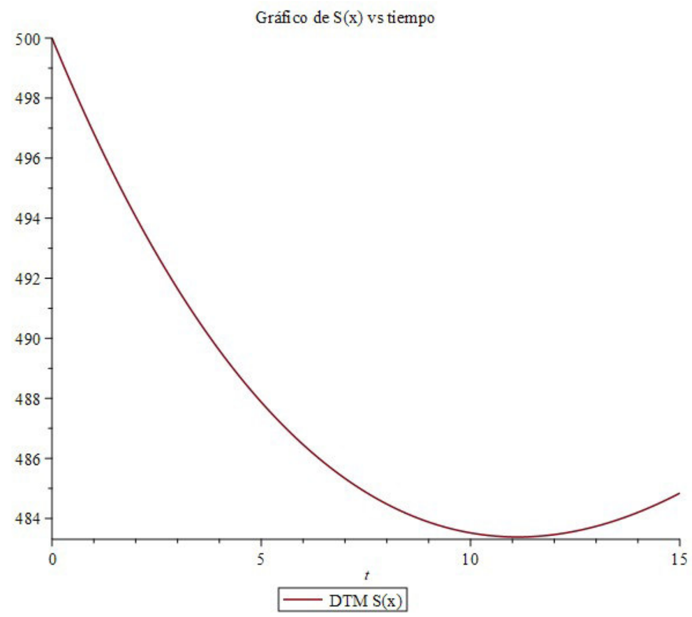

Figura 3.1: Gráfica DTM de la Población susceptible vs el tiempo.

En la Figura 3.2 se puede observar que la gráfica diverge cuando el tiempo $t > 60$.

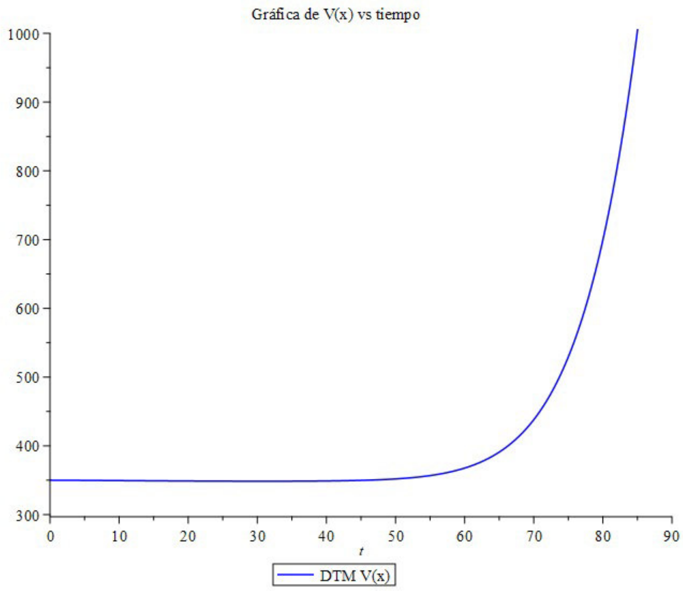

Figura 3.2: Gráfica DTM de la Población vacunada vs el tiempo

En la Figura 3.3 se puede observar que la gráfica diverge cuando el tiempo $t > 40$

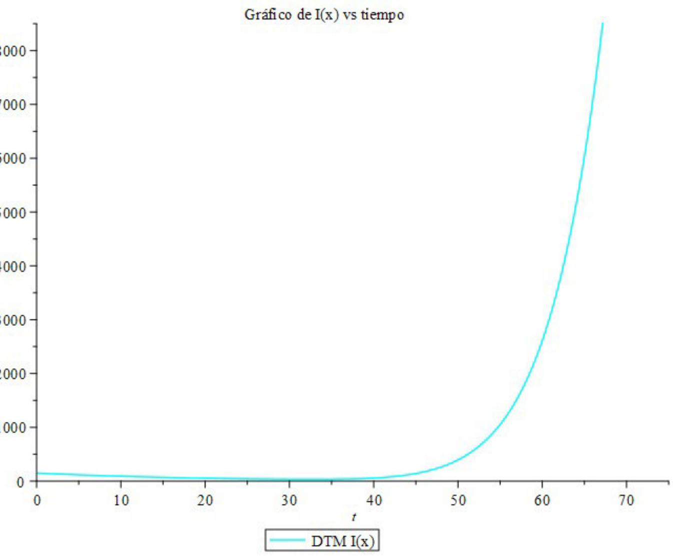

Figura 3.3: Gráfica DTM de la Población infectada vs el tiempo.

En la Figura 3.4 se puede observar que la gráfica diverge cuando el tiempo $t > 40$.

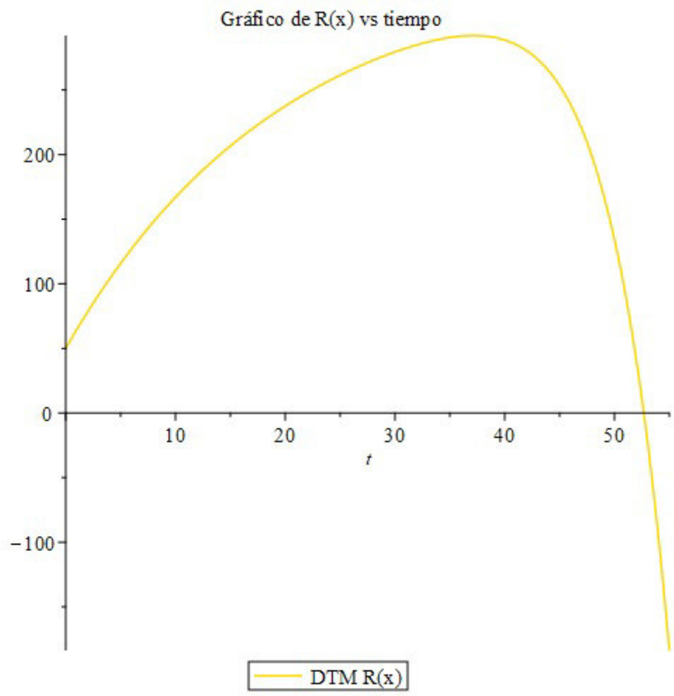

Figura 3.4: Gráfica DTM de la Población recuperada vs el tiempo.

Usando MSDTM visto en la sección 1.4 vemos que reajusta los valores:

Soluciones para $V(x)$ usando MSDTM

Días	MSDTM S(x)
10	483.5192425
20	490.3558445
30	509.9446202
40	536.6945051
50	567.5109384
60	600.6165418
70	634.9615953
80	669.9114025
90	705.0764109
100	740.2136041

Soluciones para $V(x)$ usando MSDTM

Días	MSDTM V(x)
10	349.4473511
20	348.8597274
30	348.5555195
40	348.7024677
50	349.3871520
60	350.6508146
70	352.5087307
80	354.9605791
90	357.9967874
100	361.60271801

Soluciones para $I(x)$ usando MSDTM

Días	MSDTM I(x)
10	90.8718208
20	54.8519417
30	33.5708323
40	21.0349321
50	13.5676162
60	9.0363898
70	6.2253380
80	4.4401424
90	3.2799574
100	2.5096538

Soluciones para $R(x)$ usando MSDTM

Días	MSDTM R(x)
10	166.9274854
20	237.4746808
30	280.2494560
40	306.66391546
50	323.3997866
60	334.3233127
70	341.6846690
80	346.8118904
90	350.50476574
100	353.2562937

4 Conclusiones y/o Sugerencias

El Método de la Transformada Diferencial (DTM) es una técnica numérica utilizada en matemáticas y física. Es una herramienta versátil y precisa para resolver ecuaciones diferenciales, pero su eficacia y conveniencia dependen en gran medida del problema específico que se esté abordando. Así concluimos y sugerimos lo siguiente:

1) El DTM se caracteriza por ser versatilidad y precisión: Se puede aplicar a una amplia gama de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Esto lo hace adecuado para una variedad de problemas matemáticos y físicos. Generalmente, puede proporcionar soluciones altamente precisas, especialmente cuando se emplea con una expansión en series adecuada, conviertiendole en una herramienta útil para la resolución de problemas que requieren alta precisión. Aunque el DTM es versátil, puede no ser la mejor opción para todas las ecuaciones diferenciales, en algunos casos, otros métodos numéricos pueden ser más eficientes o precisos.

2) A diferencia de algunos métodos numéricos, como el método de elementos finitos o el método de diferencias finitas, el DTM no requiere una malla espacial, lo que puede simplificar la implementación y acelerar el proceso de resolución en algunos casos.

3) El DTM se puede aplicar a problemas no lineales con relativa facilidad, lo que lo hace útil en situaciones en las que otros métodos pueden ser menos efectivos.

4) La convergencia del DTM puede ser condicional, lo que significa que en algunas situaciones, la precisión de la solución puede depender de la elección de los parámetros de la transformada y la expansión en series. Esto puede requerir cierto ensayo y error para obtener resultados precisos.

5) La implementación computacional del DTM puede ser compleja, especialmente en problemas multidimensionales o con condiciones de contorno complicadas. La elección de la transformada y la expansión en series adecuadas puede requerir experiencia y conocimientos avanzados en matemáticas.

Bibliografía

[1] Ayaz, F. (2004). Solutions of the system of differential equations by differential transform method. Applied Mathematics and Computation, 147(2), 547-567.

[2] Hassan, I. A. H. (2008). Application to differential transformation method for solving systems of differential equations. Applied Mathematical Modelling, 32(12), 2552-2559.

[3] Tari, A., Rahimi, M. Y., Shahmorad, S., & Talati, F. (2009). Solving a class of two−dimensional linear and nonlinear Volterra integral equations by the differential transform method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 228(1), 70-76.

[4] Kajani, M., & Shehni, N. (2011). Differential transform method: an effective tool for solving nonlinear Volterra integro-differential equations. Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 5(9), 30-39.

[5] Zhou, J. K. (1986). Differential Transformation and Its Applications for Electronic Circuits, Huazhong Science & Technology University Press, China.

[6] Hassan, I. A. H. (2004). Differential transformation technique for solving higher-order initial value problems. Applied Mathematics and Computation, 154(2), 299-311.

[7] Moon, S. D., Bhosale, A. B., Gajbhiye, P. P., & Lonare, G. G. (2014). Solution of non-linear Differential equations by using differential Transform Method. International journal of mathematics and statistics invention, 2(3), 78-82.

[8] Lima, E. L. (2004). Análise real (Vol. 1). Rio de Janeiro: Impa., 277-292.