Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Medidas de máxima entropía para sistemas dinámicos expansivos con la propiedad de especificación

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Marc Anthony MENDIETA OLIVOS

ASESOR

Dr. Jorge Luis CRISÓSTOMO PAREJAS

Lima, Perú

2023

Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Mendieta, M. (2023). *Medidas de máxima entropía para sistemas dinámicos expansivos con la propiedad de especificación*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Marc Anthony Mendieta Olivos
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	70489272
URL de ORCID	**No aplica**
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43688114
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-9049-4125
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Renato Mario Benazic Tome
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445668
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Soledad Ramirez Carrasco
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	25795247
Datos de investigación	
Línea de investigación	Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales), Análisis Funcional y Sistemas Dinámicos

Grupo de investigación	DYNAMICAL SYSTEMS, DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS
Agencia de financiamiento	VRIP-UNMSM (código B22141021)
Ubicación geográfica de la investigación	Perú
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2022-2023
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 12:00 horas del jueves 30 de noviembre del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Renato Mario Benazic Tome (PRESIDENTE), Dra. Soledad Ramírez Carrasco (MIEMBRO) y el Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: ***"MEDIDAS DE MÁXIMA ENTROPÍA PARA SISTEMAS DINÁMICOS EXPANSIVOS CON LA PROPIEDAD DE ESPECIFICACIÓN",*** *presentado por el señor Bachiller Marc Anthony Mendieta Olivos, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.*

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación SOBRESALIENTE CON MENCION *con un calificativo promedio de* DIECINUEVE (19).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Renato Mario Benazic Tome, manifestó que el señor Bachiller Marc Anthony Mendieta Olivos, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 12:55 *pm horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.*

Dr. Renato Mario Benazic Tome
PRESIDENTE

Dra. Soledad Ramírez Carrasco
MIEMBRO

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
MIEMBRO ASESOR

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado

VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo Jorge Luis Crisóstomo Parejas en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°001500-2023-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título **es "MEDIDAS DE MÁXIMA ENTROPÍA PARA SISTEMAS DINÁMICOS EXPANSIVOS CON LA PROPIEDAD DE ESPECIFICACIÓN",** presentado por el bachiller Marc Anthony Mendieta Olivos para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y deSimilitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según larevisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 14 % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuarcon los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

Firma del Asesor ____________________

DNI: 43688114

Nombres y apellidos del asesor:

Jorge Luis Crisóstomo Parejas

Dedicatoria

Dedico este trabajo a todas aquellas almas jóvenes
entusiastas y con hambre de conocimientos,
a quienes se sobreponen a las adversidades,
a quienes superan sus límites.

Agradecimientos

Agradezco a la universidad la cual ha permitido mi pleno desarrollo académico en aquello que tanto me apasiona.

A mis maestros por compartir sus conocimientos de la forma tan emocionante como solo ellos saben hacerlo, especialmente a mi mentor Jorge Luis Crisostomo Parejas.

Agradezco infinitamente a mi padres Sulema y Marco por ser los principales impulsores de este gran logro, sin su incondicional apoyo esto no hubiera sido posible.

La presente tesis fue desarrollada como parte del proyecto PCONFIGI B22141021, aprobado con Resolución Rectoral N$^{\underline{o}}$ 05557-R-22, por ello agradecemos al VRIP-UNMSM.

Marc Anthony Mendieta Olivos

Índice general

Resumen

En este trabajo abordaremos el problema de la existencia y unicidad de medidas de máxima entropía para sistemas dinámicos expansivos definidos sobre espacios métricos compactos y que además satisfacen la propiedad de especificación siguiendo la bibliografía (Barreira, 2012), (Bowen, 1974), (Katok and Hasselblatt, 1995) y (Oliveira and Viana, 2014). Estudiaremos la propiedad de especificación para sistemas dinámicos compactos siguiendo la bibliografía (Sigmund, 1974) y (Ruette, 2015).

Palabras claves:

Medidas de máxima entropía, entropía métrica, entropía topológica, principio variacional, shift de Bernoulli, transformaciones expansivas, propiedad de especificación.

Abstract

In this paper we will approach the problem of the existence and uniqueness of measures of maximal entropy for expansive dynamical systems defined on compact metric spaces and that also satisfy the specification property following the bibliography (Barreira, 2012), (Bowen, 1974), (Katok and Hasselblatt, 1995) and (Oliveira and Viana, 2014). We will study the specification property for compact dynamical systems following the bibliography (Sigmund, 1974) and (Ruette, 2015).

Keywords:

Measure of maximal entropy, metric entropy, topological entropy, variational principle, Bernoulli's shift, expansive transformations, specification property.

Introducción

Hasta finales del siglo XVIII las leyes del movimiento de Newton habían ayudado a los físicos puesto que permitían predecir el comportamiento de los cuerpos sólidos a la perfección, sin embargo no tenían mucho que aportar cuando se trataba de averiguar lo que ocurría dentro de un gas, para ellos era imposible predecir su movimiento. Los físicos entonces empezaron a hacerse preguntas muy fundamentales acerca de los gases. El problema es el siguiente; cuando un sólido se mueve, todas sus partículas se mueven a la vez de la misma manera, por ello solo es necesario calcular el movimiento de una de ellas; sin embargo cuando un gas se mueve, cada una de sus partículas parecen ir hacia donde quieren haciendo imposible predecir el comportamiento del gas completo. Así que en vez de estudiar el movimiento independiente de cada partícula, los físicos decidieron estudiar al gas en su totalidad con lo que nace la Termodinámica.

El término entropía fue establecido por el matemático y físico alemán Rudolf Clausius en el año 1865, quien es uno de los primeros fundadores de la Termodinámica. Clausius se encontró con el siguiente problema: Imaginémonos dos gases distintos, por ejemplo oxígeno y nitrógeno separados por un émbolo y encerrados en un contenedor rígido; ambos gases tienen distinta presión por ello el émbolo se desplazará hacia donde haya menos presión, ¿por qué sucede esto?, esa fue la pregunta que se hizo Clausius y en ausencia de una respuesta concreta, decidió llamar con *entropía* al mecanismo impulsor de dicho proceso y lo definía matemáticamente de la siguiente forma:

$$\text{Entropía} = \frac{\text{Temperatura dada}}{\text{Calor generado}}$$

de esta manera un sistema con mayor entropía será menos eficiente pues mucha parte de la temperatura se perderá en forma de calor.

En la teoría de los sistemas termodinámicos en equilibrio, la entropía es una medida del grado de desorden del sistema es decir, un sistema con mayor entropía estará más desordenado. La segunda ley de la Termodinámica afirma que cuando un sistema aislado pasa de un equilibrio a otro, la entropía del estado final es necesariamente mayor que la entropía del estado inicial.

Esta noción desempeña un papel importante en otras áreas de interés; por ello, en la necesidad de entenderlo mejor, a mediados del siglo XX el ingeniero americano Claude

Shannon acuñó una definición matemática para entropía en el campo de la teoría de la información desarrollada a partir de sus trabajos. Esta entropía llamada *entropía de la información* se puede entender como la cantidad promedio de información transmitida en un canal de comunicación que contienen los símbolos o caracteres usados en cada unidad de tiempo. Los distintos caracteres no tienen la misma probabilidad de ser usados y por ende no todos cargan con la misma cantidad de información puesto que mientras más palabras contengan cierto caracter, menor será la información proporcionada por este último y viceversa. En adición, la información asociada a un caracter o palabra depende en general de los demás caracteres o palabras, sin embargo existen casos de independencia de sucesos. La cantidad de información asociada a un caracter a en un alfabeto $\mathcal{A}$ viene dada por

$$I(a) = -\log p(a)$$

en donde $p(a)$ es la probabilidad o frecuencia del caracter a. Más aun la cantidad de información asociada a una palabra $a_1a_2\cdots a_n$ es

$$I\left(a_1a_2\cdots a_n\right) = -\log p\left(a_1a_2\cdots a_n\right)$$

en donde $p\left(a_1a_2\cdots a_n\right)$ es la probabilidad o frecuencia de la palabra $a_1a_2\cdots a_n$. Si con $\mathcal{A}^n$ denotamos al conjunto de todas las palabras de longitud n entonces la entropía del canal de comunicación es definida por

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} I\left(\mathcal{A}^n\right)$$

en donde

$$I\left(\mathcal{A}^n\right) = \sum_{a_1\cdots a_n} p\left(a_1a_2\cdots a_n\right) I\left(a_1a_2\cdots a_n\right).$$

Andrei Kolmogorov y Yakov Sinai, basados en los trabajos de Claude Shannon, proponen una definición de entropía para un sistema dinámico $f : M \to M$ asociado a alguna medida invariante μ, y es denominada *entropía métrica* y será denotado por $h_\mu(f)$ (ver definición 1.2.4). La principal diferencia radica en que mientras Shannon trabaja con alfabetos finitos, Kolmogorov y Sinai trabajan con particiones medibles del espacio de estados. En este sentido la entropía métrica cuantifica el caos del sistema dinámico respecto a la medida invariante. Un valor positivo para la entropía métrica se traduce en que el sistema dinámico es caótico respecto a la medida en cuestión.

Inspirada en la noción de entropía de Kolmogorov-Sinai, el concepto de *entropía topológica* $h(f)$ para un sistema dinámico $f : M \to M$ fue introducido en los años 90 de dos maneras que en principio pueden parecer un tanto distintas, por un lado la definición que establecen R. Adler, A. Konheim y M. McAndrew es a través de coberturas abiertas y esta es aplicable a cualquier transformación continua definida en un espacio topológico compacto. Por otro lado y posteriormente, Rufus Bowen y Efim Dinaburg establecen dos definiciones de entropía topológica vía dos tipos de conjuntos, estos son: conjuntos generadores y conjuntos separados, estas nociones de entropía son aplicables a transformaciones continuas definidas en espacios métricos no necesariamente compactos. A pesar de las diferencias, resulta que las definiciones de entropía topológica de Adler-Konheim-McAndrew y Bowen-Dinaburg son equivalentes sobre espacios métricos compactos, de esta manera se tiene caracterizada a la entropía topológica de 3 formas equivalentes. La entropía topológica permite cuantificar el caos total del sistema dinámico en cuestión, es decir representa la complejidad topológica del sistema dinámico.

Las nociones de entropía métrica y entropía topológica no se encuentran desligadas, de hecho, el resultado que las conecta es llamado *Principio Variacional* y nos dice que si $f : M \to M$ es una transformación continua en el espacio métrico compacto M entonces la entropía topológica $h(f)$ coincide con el supremo de todas las entropías métricas $h_\mu(f)$ donde μ recorre el conjunto de las medidas de probabilidad de Borel invariantes por f. En este sentido podemos preguntarnos si dicho supremo es alcanzado por alguna de las entropías métricas para alguna de las medidas μ. En caso afirmativo aquellas medidas que permiten que el supremo sea alcanzado reciben el nombre de medidas de máxima entropía. Este tipo de medidas permiten cualificar el caos total del sistema dinámico, es por ello que resulta natural realizar las siguientes preguntas: ¿Todo sistema dinámico admite alguna medida de máxima entropía?, ¿en caso afirmativo, estas son únicas? Responder a estas dos últimas cuestiones no es una tarea fácil puesto que va a depender de las propiedades dinámicas del sistemas dinámico.

Este trabajo está enfocado a responder las preguntas anteriormente planteadas para una clase de sistemas dinámicos, estos son: sistemas dinámicos expansivos que satisfacen la propiedad de especificación. La propiedad de expansividad de los sistemas dinámicos permite mostrar la existencia de las medidas de máxima entropía, mientras que la propiedad de especificación permite probar la unicidad de las mismas.

El presente trabajo consta de 4 capítulos:

- El capítulo 1 empieza con un breve repaso de sistemas dinámicos, además se estudia las nociones fundamentales de entropía métrica tales como entropía de una partición, entropía de un sistema dinámico respecto a una partición y entropía métrica de un sistema dinámico. En adición, se estudia la entropía topológica definida vía coberturas abiertas y se finaliza el capítulo presentando un resultado muy importante que conecta ambas nociones de entropía métrica y entropía topológica: el principio variacional, el cual establece que para una transformación continua $f : M \to M$ con M compacto, la entropía topológica es equivalente al supremo de las entropías métricas.

- El capítulo 2 se enfoca en estudiar netamente el problema de la existencia de las medidas de máxima entropía para sistemas dinámicos expansivos. Se empieza siguiendo cierto proceso para dotar de alguna estructura topológica al espacio de medidas de probabilidad de Borel $\mathcal{M}(M)$, para luego bajo 'ciertas condiciones' poder verificar la semicontinuidad superior de la función de entropía $\varphi : \mathcal{M}_f(M) \to \mathbb{R}_0^+$ dada por $\varphi(\nu) = h_\nu(f)$ en donde $\mathcal{M}_f(M)$ es el conjunto de medidas invariantes por el sistema dinámico f. Por último se establece la noción de expansividad la cual justamente va a permitir que el sistema dinámico satisfaga esas 'ciertas condiciones' ya mencionadas y así se permite asegurar la existencia de una medida de máxima entropía.

- El capítulo 3 aborda un estudio sobre la propiedad de especificación, empieza estableciendo dos formas equivalentes de definir a la misma, basadas en (Katok and Hasselblatt, 1995) y (Ruette, 2015), se muestran algunas propiedades fundamentales enfocadas en la preservación de la propiedad de especificación vía iterados, factores topológicos y productos de sistemas dinámicos. Se presenta un ejemplo muy importante de una aplicación que satisface la propiedad de especificación: el Shift de Bernoulli, y se finaliza con el estudio de la propiedad de especificación en mapeos sobre intervalos compactos, con el objetivo de verificar que sobre dichos intervalos la noción de propiedad de especificación es equivalente a ser topológicamente mixing, esto va a permitir conocer un mayor número de ejemplos de aplicaciones que satisfacen la propiedad de especificación.

- El capítulo 4 se enfoca en estudiar el problema de la unicidad de las medidas de máxima entropía para lo cual se empieza estableciendo 2 nuevas formas de cómo definir la entropía topológica, estas son: a través de conjuntos generadores y conjuntos separados, las cuales son equivalentes a la definición vía coberturas abiertas establecida en el capítulo 1. Luego, se continúa viendo una serie de desigualdades técnicas que se obtienen gracias a la propiedad de especificación y herramientas matemáticas desarrolladas en capítulos anteriores. Más específicamente, en el presente capítulo probamos el resultado principal de la tesis: El Teorema de Bowen (teorema 4.3.1).

Capítulo 1

Definiciones previas

En el transcurso de este capítulo, nos sumergiremos en diversos conceptos de teoría ergódica y sistemas dinámicos tales como conjugación y semiconjugación topológica, órbitas, ergodicidad, transitividad topológica, etc. Asimismo, exploraremos las ideas fundamentales y los principales resultados relacionados a la entropía métrica y la entropía topológica los cuales sirven como medios para cuantificar el comportamiento caótico de un sistema dinámico. Finalmente, destacaremos que estas dos formas de entropía están estrechamente conectadas entre sí a través del Principio variacional. Este principio es el que motiva al estudio del presente trabajo. Adoptaremos el enfoque propuesto por (Oliveira and Viana, 2014).

1.1. Sistemas dinámicos

Un sistema dinámico es un par (M, f) en donde M es un conjunto con algún tipo de estructura ya sea variedad diferenciable, espacio topológico, espacio métrico o espacio de medida; y donde $f : M \to M$ es una función a la cual denominaremos ley de evolución.

Definición 1.1.1 (Medidas invariantes)**.** Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : M \to M$ una aplicación medible. Diremos que la medida μ es f-invariante o que f preserva la medida μ si

$$\mu\left(f^{-1}(E)\right) = \mu(E) \tag{1.1}$$

para todo conjunto medible $E \in \mathcal{B}$.

Ejemplo 1.1.1. Sea $(M, \mathcal{B})$ un espacio medible y sea $p \in M$ tal que $f(p) = p$ entonces, la medida de Dirac δ_p (ver ejemplo 6.2.1) es f-invariante.

Si la σ-álgebra $\mathcal{B}$ es generada por un álgebra $\mathcal{A}$ y μ es finita, entonces para que $f : M \to M$ medible preserve la medida μ es necesario y suficiente que la condición 1.1 se satisfaga para cualquier $E \in \mathcal{A}$. Ver el lema 1.3.1 de (Oliveira and Viana, 2014, p. 10).

Ejemplo 1.1.2. Toda medida de Bernoulli μ_{Ber} (ver apéndice) es invariante por el shift de Bernoulli bilateral. En efecto: Sea μ_{Ber} la medida de Bernoulli bilateral asociada a los números $p_{z_1}, \ldots, p_{z_d}$ siendo $p_{z_1} + \cdots + p_{z_d} = 1$, sabemos que la σ-álgebra $\mathcal{B}_{Ber}$ es generada por el álgebra $\mathcal{A}$ de uniones finitas disjuntas de cilindros. Luego, es suficiente probar la condición 1.1 para todo cilindro $E = [m : a_m, \ldots, a_n]$. Se tiene

$$\xi^{-1}\left([m : a_m, \ldots, a_n]\right) = [m+1 : a_m, \ldots, a_n]$$

luego,

$$\begin{aligned}
\mu\left(\xi^{-1}\left([m : a_m, \ldots .a_n]\right)\right) &= \mu\left([m+1 : a_m, \ldots .a_n]\right) \\
&= p_{a_m} \cdot \ldots \cdot p_{a_n} \\
&= \mu\left([m : a_m, \ldots .a_n]\right).
\end{aligned}$$

Así, la medida μ_{Ber} es invariante por el shift $\xi : \Sigma \to \Sigma$.

Ejemplo 1.1.3 (Mapeo carpa)**.** Sea $M = [0,1]$ y sea $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel en $[0,1]$. El mapeo carpa $f : [0,1] \to [0,1]$ es definido como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \ 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x+2 & ; \ 1/2 < x \leq 1 \end{cases}.$$

La medida de Lebesgue m en $[0,1]$ es f-invariante.

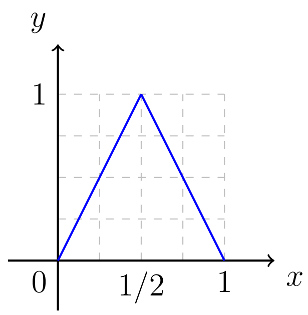
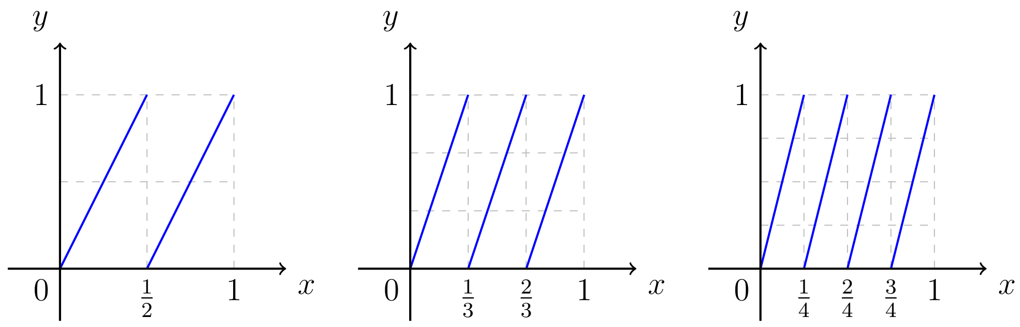


Figura 1.1: Gráfico de mapeo carpa

Ejemplo 1.1.4 (Funciones de expansión numérica)**.** Para cada entero $k \geq 1$ definamos la aplicación $f_k : [0,1] \to [0,1]$ tal que

$$f_k(x) = kx - \lfloor kx \rfloor$$

en donde $\lfloor kx \rfloor$ representa el máximo entero de kx. Decimos que f_k es la aplicación de expansión numérica en base k. Los gráficos para $k=2$, $k=3$ y $k=4$ se observan en la figura 1.2.



(a) Gráfico de f_2 (b) Gráfico de f_3 (c) Gráfico de f_4

Figura 1.2: Funciones de expansión numérica

La medida de Lebesgue m en $[0,1]$ es f_k-invariante para cada k.

Sea $f : M \to M$ una aplicación medible y sea $p \in M$, establecemos las siguientes definiciones:

- Diremos que p es un *punto fijo* de f si y solamente si $f(p) = p$, además con $Fix(f)$ denotamos al subconjunto de M formado por todos los puntos fijos de f; esto es, $Fix(f) = \{p \in M \,:\, f(p) = p\}$.
- Diremos que p es un *punto periódico* de orden k de f si y solamente si $f^k(x) = x$; si además se cumple que $f^j(x) \neq x$ para cada $j = 0, \ldots, k-1$ entonces diremos que p es un *punto estrictamente periódico* de orden k de f.

Ejemplo 1.1.5. Sean $(M, \mathcal{B})$ un espacio medible, $f : M \to M$ una aplicación medible y p un punto estrictamente periódico de orden k de f, entonces la medida $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ dada por

$$\mu(E) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \delta_{f^j(p)}(E)$$

es f-invariante.

Definición 1.1.2 (Conjugación topológica)**.** Sean M y N espacios topológicos. Diremos que las aplicaciones $f : M \to M$ y $g : N \to N$ son topológicamente conjugados si existe un homeomorfismo $\phi : M \to N$ tal que $(\phi \circ f)(x) = (g \circ \phi)(x)$ para todo $x \in M$; esto es, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & M \arrow[d, "\phi"] \\ N \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

En tal caso ϕ recibe el nombre de *conjugación topológica* para f y g.

La importancia de esta definición es que mapeos topológicamente conjugados tienen esencialmente el mismo comportamiento dinámico; es decir comparten exactamente las mismas propiedades dinámicas.

Ejemplo 1.1.6. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ el mapeo carpa el cual, también, se puede escribir como

$$f(x) = 1 - |2x - 1|$$

y sea $g : [0,1] \to [0,1]$ el mapeo logístico el cual es definido por

$$g(x) = 4x(1 - x).$$

Entonces el mapeo carpa es topológicamente conjugado al mapeo logístico vía el homeomorfismo $\phi : [0,1] \to [0,1]$ dado por

$$\phi(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Observe la figura 1.3.

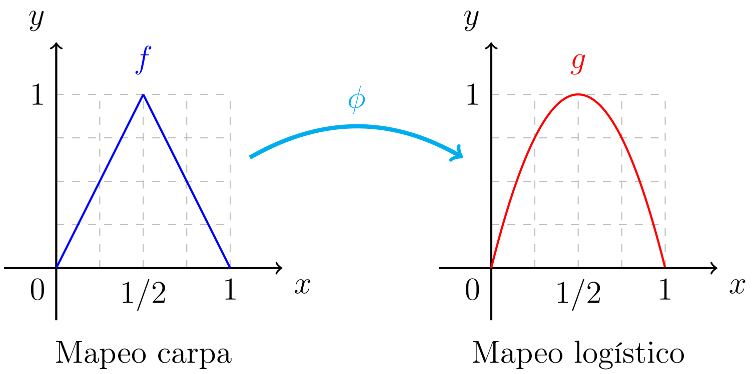


Figura 1.3

En muchas ocasiones la condición de homeomorfismo para ϕ es mucho pedir; existe una condición más débil que recae sobre ϕ la cual aun permite preservar algunas propiedades dinámicas y la estableceremos en la definición 1.1.3.

Definición 1.1.3 (Semiconjugación topológica)**.** Sean M y N espacios topológicos. Diremos que la aplicación $g : N \to N$ es un *factor topológico* de la aplicación $f : M \to M$ si existe una aplicación continua y sobreyectiva $\phi : M \to N$ tal que $(\phi \circ f)(x) = (g \circ \phi)(x)$ para todo $x \in M$; esto es, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & M \arrow[d, "\phi"] \\ N \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

En tal caso ϕ recibe el nombre de *semiconjugación topológica* de f en g.

Ejemplo 1.1.7. Para cada entero $k \geq 1$ hagamos $X_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ y $\Sigma_k = X_k^{\mathbb{N}}$, considere el shift de Bernoulli unilateral $\xi : \Sigma_k^+ \to \Sigma_k^+$ el cual es definido por

$$\xi\left((x_n)_n\right) = (x_{n+1})_n$$

y considere la función de expansión numérica en base k, $f_k : [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$f_k(x) = kx - \lfloor kx \rfloor,$$

entonces f_k es un factor topológico de ξ vía la semiconjugación $\phi : \Sigma_k^+ \to [0,1]$ dada por

$$\phi\left((x_n)_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{k^n}.$$

Observe el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} \Sigma_k^+ \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\phi"'] & \Sigma_k^+ \arrow[d, "\phi"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "f_k"] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

Para cada $x \in M$ establecemos las siguientes definiciones:

- La semiórbita positiva de x por f, denotada por $\mathcal{O}_f^+(x)$ se define como

$$\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x) \,:\, n \geq 0\}$$

En caso f fuera inversible, podemos definir

- La semiórbita negativa de x por f, denotada por $\mathcal{O}_f^-(x)$ se define como

$$\mathcal{O}_f^-(x) = \{f^{-n}(x) \,:\, n \geq 0\}$$

- La órbita de x por f, denotada por $\mathcal{O}_f(x)$ se define como

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x) \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$$

Definición 1.1.4 (Medida ergódica)**.** Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida de probabilidad y sea $f : M \to M$ una aplicación medible que preserva μ. Diremos que μ es ergódica respecto a f si para cualquier conjunto medible E con $f^{-1}(E) = E$ se tiene que $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = 1$.

Ejemplo 1.1.8. Sea $(M, \mathcal{B})$ un espacio medible y sea $p \in M$ un punto fijo de f, la medida de Dirac δ_p es ergódica.

Ejemplo 1.1.9. Toda medida de Bernoulli μ_{Ber} en Σ es ergódica respecto al shift de Bernoulli bilateral $\xi : \Sigma \to \Sigma$.

En teoría de sistemas dinámicos, las definiciones de topológicamente transitivo y topológicamente mixing son esenciales para comprender la complejidad de la evolución de las trayectorias en un sistema. Un sistema dinámico topológicamente transitivo se caracteriza por la propiedad de que existe al menos una órbita cuyas imágenes se distribuyen densamente a lo largo del espacio, revelando una dinámica intrínsecamente entrelazada. En contraste, un sistema dinámico topológicamente mixing va un paso más allá, implicando que las órbitas de puntos cercanos no solo se dispersan, sino que también se mezclan de manera efectiva con el tiempo, generando un comportamiento caótico y una interconexión compleja entre las regiones del espacio. Estas definiciones fundamentales son cruciales para capturar la naturaleza dinámica y rica de los sistemas en estudio.

Definición 1.1.5 (Top. transitiva y top. mixing)**.** Sea M un espacio métrico compacto y sea $f : M \to M$ una aplicación continua.

1. Diremos que f es topológicamente transitiva si y solo si para cada par de abiertos U y V existe algún entero $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

2. Diremos que f es topológicamente mixing si y solo si para cada par de abiertos U y V existe algún entero $n_0 \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.

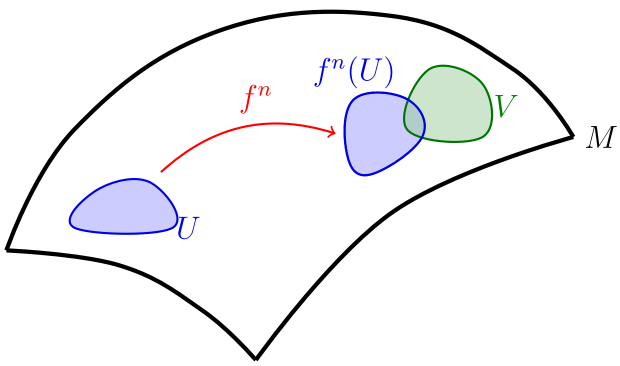


Figura 1.4: Topológicamente Transitiva y topológicamente Mixing

Claramente si f es topológicamente mixing, entonces también es topológicamente transitiva.

Note que si f es topológicamente mixing entonces f^k también es topológicamente mixing para todo entero $k \geq 1$ desde que $kn \geq n$ para todo $n \geq 0$.

Ejemplo 1.1.10. El mapeo carpa es topológicamente mixing. En efecto, recordemos que el mapeo carpa viene definido por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ;\ 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x+2 & ;\ 1/2 < x \leq 1 \end{cases} .$$

Sean U y V conjuntos abiertos no vacíos de $[0,1]$. De la densidad del conjunto

$$\mathcal{F} = \left\{ \frac{k}{2^n} \ :\ 0 \leq k \leq 2^n - 1\, ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

se tiene que existen $k, n_0 \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq 2^{n_0} - 1$ tales que $I_{k,n_0} := \left[\frac{k}{2^{n_0}}, \frac{k+1}{2^{n_0}} \right] \subseteq U$. Por otro lado se puede probar que

$$f^{n_0}\left(\left[\frac{k}{2^{n_0}}, \frac{k+1}{2^{n_0}} \right] \right) = [0,1]$$

y como f es sobreyectiva ($f^m([0,1]) = [0,1]$) entonces,

$$[0,1] = f^n\left(\left[\frac{k}{2^{n_0}}, \frac{k+1}{2^{n_0}} \right] \right) \subseteq f^n(U)\ \forall\, n \geq n_0$$

lo cual implica que $V = [0,1] \cap V \subseteq f^n(U) \cap V$ y de ahí $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ con lo cual se ve que f es topológicamente mixing.

Ejemplo 1.1.11. El shift de Bernoulli bilateral $\xi : \Sigma \to \Sigma$ es topológicamente mixing. En efecto: Sean U y V abiertos de Σ, entonces existen cilindros C_1 y C_2 tales que

$$C_1 = [p : a_p, \ldots, a_{p+r_1}] \subseteq U$$
$$C_2 = [q : b_q, \ldots, a_{q+r_2}] \subseteq V$$

hagamos $m = \text{máx}\,\{|p|, |q|, |p+r_1|, |q+r_2|\}$ y considere los cilindros simétricos

$$S_1 = [-m : a_{-m}, \ldots, a_m] \subseteq C_1$$
$$S_2 = [-m : b_{-m}, \ldots, b_m] \subseteq C_2$$

Afirmación: Para $n \geq n_0 = 2m + 2$ se tiene que $\xi^n(S_1) \cap S_2 \neq \emptyset$. En efecto, para cada $n = 2m + j + 1$ con $j \geq 1$ sea la sucesión bilateral $(w_k)_k$ dada como sigue

$$w_k = a_k\ ;\ \text{si } k = -m, \ldots, m$$
$$w_k = b_{k-n}\ ;\ \text{si } k = m+j+1, \ldots, 3m+j+1$$

esto es,

$$w_n = (\ldots, \overbrace{a_{-m}}^{-m}, \ldots, \overbrace{a_m}^{m}, \underbrace{c_{m+1}, \ldots, c_{m+j}}_{j \text{ posiciones}}, \overbrace{b_{-m}}^{m+j+1}, \ldots, \overbrace{b_m}^{3m+j+1}, \ldots).$$

Entonces, note que $(w_k)_k \in S_1$ y que

$$\xi^n\left((w_k)_k\right) = (w_{k+n})_k = (\ldots, \overbrace{b_{-m}}^{-m}, \ldots, \overbrace{b_m}^{m}, \ldots) \in S_2$$

luego, $\xi^n(S_1) \cap S_2 \neq \emptyset$ y se prueba la afirmación, la cual implica que $\xi^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para cada $n \geq n_0$ y así, el shift de Bernoulli bilateral es topológicamente mixing.

Proposición 1.1.1. Sea $g : N \to N$ es un factor topológico de $f : M \to M$ se cumple:

1. Si f es topológicamente transitivo, entonces g es topológicamente transitivo.

2. Si f es topológicamente mixing, entonces g es topológicamente mixing.

En particular las nociones de topológicamente transitiva y topológicamente mixing se preservan por conjugaciones topológicas.

Proposición 1.1.2. Sea M un espacio métrico compacto y sea $f : M \to M$ una aplicación continua, se tiene que f es topológicamente transitiva si y solo si existe $x \in M$ tal que $\mathcal{O}_f^+(x)$ es denso en M; esto es, $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = M$.

1.2. Entropía

Sea el sistema dinámico (M, f). Para un estado inicial $x \in M$, la evolución de x en el tiempo viene dada por:

$$\cdots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \cdots$$

Con esto, nos podemos preguntar lo siguiente:

¿Es posible predecir o controlar el comportamiento de un elemento bajo esta ley?

Esta pregunta no es sencilla de responder si el sistema dinámico es caótico (en el sentido de Devaney) pues en este caso el sistema es muy sensible a las condiciones iniciales, lo cual significa que pequeñas diferencias en los valores iniciales pueden afectar significativamente las predicciones a largo plazo. Entonces:

¿Cómo saber si un sistema dinámico es caótico o no?

Existen mucha formas de cómo abordar esta última pregunta, en nuestro caso esta cuestión será relacionada a la pregunta:

¿Cómo medir el caos?

Aquí es donde la entropía juega un rol muy importante pues esta sirve como un medio por el cual podemos cuantificar el caos de un sistema dinámico. Es decir, podemos medir el comportamiento caótico de un sistema dinámico de dos maneras, ya sea a través de la entropía métrica $h_\mu(f)$ (ver definición 1.2.4) o a través de la entropía topológica $h(f)$ (ver ecuación 1.11).

Un resultado muy conocido en esta área de las matemáticas nos menciona que si un sistema dinámico (M, f) tiene entropía positiva ($h(f) > 0$) entonces dicho sistema es caótico con lo cual se observa la influencia de la entropía en la clasificación y caracterización de sistemas dinámicos caóticos.

Debido a lo mencionado en las anteriores líneas, en esta sección nos encargaremos de estudiar profundamente ambos tipos de entropía. Además; veremos algunos resultados de gran importancia, entre los cuales se encuentra el teorema que las relaciona, el cual es denominado Principio Variacional.

1.2.1. Entropía métrica

Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida de probabilidad. Una partición de M consta de una familia finita o numerable $\mathcal{P}$ de subconjuntos medibles de M tales que son disjuntos dos a dos y cuya unión tiene medida total.

Denotamos con $\mathcal{P}(x)$ al elemento de la partición $\mathcal{P}$ que contiene a x.

La *suma* de las particiones $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ denotada por $\mathcal{P}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_n$ o $\bigvee_{i=1}^n \mathcal{P}_i$ viene dada como sigue:

$$\mathcal{P}_1 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_n = \{P_1 \cap \cdots \cap P_n \ : \ P_i \in \mathcal{P}_i \text{ para cada } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Definición 1.2.1. Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida de probabilidad. La entropía de la partición $\mathcal{P}$ se define por

$$H_\mu(\mathcal{P}) = \sum_{P \in \mathcal{P}} -\mu(P) \log \mu(P)$$

Se verifica que

$$H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q}) \tag{1.2}$$

Ejemplo 1.2.1. Sea $X = \{z_1, z_2, \ldots, z_d\}$, sea $\Sigma = X^{\mathbb{Z}}$ y sea μ_{Ber} la medida de Bernoulli en Σ asociada a los valores $p_{z_1}, p_{z_2}, \ldots, p_{z_d}$ tales que $p_{z_1} + p_{z_2} + \cdots + p_{z_d} = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere la partición $\mathcal{P}_n$ dada por

$$\mathcal{P}_n = \{[1 : a_1, \ldots, a_n] \mid a_i \in X \text{ para cada } i = 1, \ldots, n\}$$

entonces se prueba que

$$
\begin{aligned}
H_{\mu_{Ber}}(\mathcal{P}_n) &= \sum_{P\in\mathcal{P}_n} -\mu_{Ber}(P)\log\mu_{Ber}(P) \\
&= \sum_{a_1,\ldots,a_n=z_1}^{z_d} -\mu_{Ber}\left([1:a_1,\ldots,a_n]\right)\log\mu_{Ber}\left([1:a_1,\ldots,a_n]\right) \\
&= \sum_{a_1,\ldots,a_n=z_1}^{z_d} -p_{a_1}p_{a_2}\cdots p_{a_n}\log(p_{a_1}p_{a_2}\cdots p_{a_n}) = -n\sum_{i=1}^{d} p_{z_i}\log(p_{z_i})
\end{aligned}
$$

En particular si $p_{z_1} = p_{z_2} = \ldots, p_{z_d} = 1/d$ entonces $H_{\mu_{Ber}}(\mathcal{P}_n) = n\log d$.

Lema 1.2.1. Sea $\mathcal{P}$ una partición finita, entonces $H_\mu(\mathcal{P}) \le \log\operatorname{card}(\mathcal{P})$.

Demostración. Ver el lema 9.1.3 de (Oliveira and Viana, 2014, p. 251) □

Definición 1.2.2. Dadas dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ decimos que $\mathcal{P}$ es menos fina que $\mathcal{Q}$ y lo denotamos por $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, si cada elemento de $\mathcal{Q}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{P}$, a menos de medida nula.

De hecho, es fácil ver que $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}\vee\mathcal{Q}$ para cada par de particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$. Por otra parte, sin muchas dificultades, se puede obtener la siguiente relación

$$\mathcal{P} \prec \mathcal{Q} \quad \Rightarrow \quad H_\mu(\mathcal{P}) \le H_\mu(\mathcal{Q}) \tag{1.3}$$

Sea $(M,\mathcal{B},\mu)$ un espacio de medida de probabilidad y sea $f: M\to M$ una aplicación medible que preserva la medida μ. Consideremos $\mathcal{P}$ una partición de M, entonces se verifica que la colección

$$f^{-1}(\mathcal{P}) = \{f^{-1}(P) \ : \ P\in\mathcal{P}\}$$

también es una partición de M. Además

$$H_\mu\left(f^{-1}(\mathcal{P})\right) = \sum_{P\in\mathcal{P}} -\mu\left(f^{-1}(P)\right)\log\mu\left(f^{-1}(P)\right) = \sum_{P\in\mathcal{P}} -\mu(P)\log\mu(P) = H_\mu(\mathcal{P})$$

En general, $H_\mu\left(f^{-n}(\mathcal{P})\right) = H_\mu(\mathcal{P})$ para cada $n\in\mathbb{N}$.

Sea $(M,\mathcal{B},\mu)$ un espacio de medida de probabilidad y sea $f: M\to M$ una aplicación medible que preserva la medida μ. Dada una partición $\mathcal{P}$ de M, denotemos

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}) \quad \text{para cada } n\in\mathbb{N}.$$

La sucesión $(\mathcal{P}^n)_n$ es no decreciente, es decir $\mathcal{P}^n \prec \mathcal{P}^{n+1}$ para cada $n\in\mathbb{N}$, luego por 1.3 se tiene que la sucesión de entropías $(H_\mu(\mathcal{P}^n))_n$ también es no decreciente. Además dicha sucesión es subaditiva, como probaremos con los dos siguientes lemas:

Lema 1.2.2. Sea $\mathcal{P}$ una partición, entonces $\mathcal{P}^{m+n} = \mathcal{P}^m \vee f^{-m}(\mathcal{P}^n)$

Demostración.

$$\mathcal{P}^{m+n} = \bigvee_{j=0}^{m+n-1} f^{-j}(\mathcal{P}) = \bigvee_{j=0}^{m-1} f^{-j}(\mathcal{P}) \vee \bigvee_{j=m}^{m+n-1} f^{-j}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^m \vee \bigvee_{j=m}^{m+n-1} f^{-j}(\mathcal{P})$$

$$= \mathcal{P}^m \vee \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j-m}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^m \vee f^{-m}\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{P})\right) = \mathcal{P}^m \vee f^{-m}(\mathcal{P}^n)$$

□

Lema 1.2.3. $H_\mu(\mathcal{P}^{m+n}) \leq H_\mu(\mathcal{P}^m) + H_\mu(\mathcal{P}^n)$

Demostración.

$$H_\mu(\mathcal{P}^{m+n}) = H_\mu(\mathcal{P}^m \vee f^{-m}(\mathcal{P}^n)) \leq H_\mu(\mathcal{P}^m) + H_\mu(f^{-m}(\mathcal{P}^n)) = H_\mu(\mathcal{P}^m) + H_\mu(\mathcal{P}^n)$$

□

El resultado del lema anterior, asegura la existencia del siguiente límite

$$\lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = \inf_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n)$$

y con ello podemos establecer la siguiente definición.

Definición 1.2.3. Sea $\mathcal{P}$ una partición en M, llamamos *entropía* de f respecto a la partición $\mathcal{P}$ al límite

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = \inf_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n)$$

En particular que se verifica la siguiente relación:

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq H_\mu(\mathcal{P}). \tag{1.4}$$

Observe que si $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$ entonces $\mathcal{P}^n \prec \mathcal{Q}^n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, luego por 1.3 se tiene que $H_\mu(\mathcal{P}^n) \leq H_\mu(\mathcal{Q}^n)$, como consecuencia,

$$\mathcal{P} \prec \mathcal{Q} \quad \Rightarrow \quad h_\mu(f, \mathcal{P}) \leq h_\mu(f, \mathcal{Q}) \tag{1.5}$$

Definición 1.2.4. La entropía de la aplicación medible $f : M \to M$ que preserva μ denotada por $h_\mu(f)$ se define como

$$h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} \{h_\mu(f, \mathcal{P})\}$$

donde $\mathcal{P}$ recorre sobre todas las particiones con entropía finita.

La principal dificultad del cálculo de la entropía reside en el cálculo del supremo en la definición 1.2.4, en vista de ello el Teorema de Kolmogorov-Sinai (teorema 1.2.1) permite simplificar esa tarea en algunos casos de interés.

Recordemos que si $\mathcal{P}$ es una partición entonces $\mathcal{P}^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{P})$. En adición, cuando $f : M \to M$ sea inversible, también podemos considerar $\mathcal{P}^{\pm n} = \bigvee_{j=-n}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{P})$.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Kolmogorov-Sinai)**.** Sea $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \cdots \prec \mathcal{P}_n \prec \cdots$ una sucesión de particiones tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ genera la σ-álgebra de los conjuntos medibles, entonces $h_\mu(f) = \lim\limits_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n)$.

Demostración. Ver el Teorema 9.2.1 de (Oliveira and Viana, 2014, p. 259) □

Observación 1.2.1.

1. Si $\mathcal{P}$ es una partición tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}^n$ genera la σ-álgebra de los conjuntos medibles, entonces $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$, basta considerar $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}^n$ en el Teorema de Kolmogorov-Sinai y usar $h_\mu(f, \mathcal{P}) = h_\mu(f, \mathcal{P}^k)$.

2. Análogamente, si f es inversible y $\mathcal{P}$ es una partición tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}^{\pm n}$ genera la σ-álgebra de los conjuntos medibles, entonces $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$, para ello solo basta hacer $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}^{\pm n}$ en el Teorema de Kolmogorov-Sinai y usar $h_\mu(f, \mathcal{P}) = h_\mu(f, \mathcal{P}^{\pm k})$.

Ejemplo 1.2.2. Sea $X = \{z_1, z_2, \ldots, z_d\}$, sea $\Sigma = X^{\mathbb{Z}}$ y sea μ_{Ber} la medida de Bernoulli en Σ asociada a los valores $p_{z_1}, p_{z_2}, \ldots, p_{z_d}$ tales que $p_{z_1} + p_{z_2} + \cdots + p_{z_d} = 1$. Sea la partición

$$\mathcal{P} = \{[1 : j] : j \in X\}.$$

Considere el shift de Bernoulli bilateral $\xi : \Sigma \to \Sigma$ entonces

$$\mathcal{P}^n = \{[1 : a_1, \ldots, a_n] : a_i \in X \text{ para cada } i = 1, \ldots, n\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, puede probarse que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}^{\pm n}$ genera la σ-álgebra $\mathcal{B}_{Ber}$ así, por la observación 1.2.1(2) se tiene que $h_{\mu_{Ber}}(\xi) = h_{\mu_{Ber}}(\xi, \mathcal{P})$, pero del ejemplo 1.2.1 vemos que

$$h_{\mu_{Ber}}(\xi, \mathcal{P}) := \lim_n \frac{1}{n} H_{\mu_{Ber}}(\mathcal{P}^n) = \lim_n \frac{1}{n} \left(-n \sum_{i=1}^{d} p_{z_i} \log p_{z_i} \right) = -\sum_{i=1}^{d} p_{z_i} \log p_{z_i}$$

por tanto $h_{\mu_{Ber}}(\xi) = -\sum_{i=1}^{d} p_{z_i} \log p_{z_i}$. En particular si $p_{z_1} = p_{z_2} = \cdots = p_{z_d} = 1/d$ se llega a que $h_{\mu_{Ber}}(\xi) = \log d$.

Lema 1.2.4. Sea $(\mathcal{P}_n)_n$ una sucesión de particiones tal que $\lim\limits_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}_n(x)) = 0$ para todo $x \in M$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ genera la sigma-álgebra de los conjuntos medibles.

Demostración. Sea U un abierto de M. Para $x \in U$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $B(x, \varepsilon_0) \subseteq U$, luego por la hipótesis del límite existe $n_0 = n_0(x, \varepsilon_0)$ tal que $\operatorname{diam}(\mathcal{P}_{n_0}(x)) < \varepsilon_0$, luego $x \in \mathcal{P}_{n_0}(x) \subseteq B(x, \varepsilon_0) \subseteq U$ y así se obtiene

$$U = \bigcup_{x \in U} \mathcal{P}_{n_0}(x) \quad \text{(unión numerable)}$$

de donde $\mathcal{P}_{n_0}(x) \in \mathcal{P}_{n_0} \subseteq \bigcup_n \mathcal{P}_n$ entonces $U \in \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{P}_n\right)$ y se verifica el lema. □

Corolario 1.2.1. Sea $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2 \prec \cdots \prec \mathcal{P}_n \prec \cdots$ una sucesión de particiones tal que $\lim_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}_n(x)) = 0$ para todo $x \in M$, entonces $h_\mu(f) = \lim_n h_\mu(f, \mathcal{P}_n)$.

Demostración. Consecuencia del Teorema de Kolmogorov-Sinai y del lema 1.2.4. □

Observación 1.2.2.

1. Si $\mathcal{P}$ es una partición tal que $\lim_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}^n(x)) = 0$ para todo $x \in M$, entonces $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$, basta hacer $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}^n$ en el corolario 1.2.1 y usar $h_\mu(f, \mathcal{P}) = h_\mu(f, \mathcal{P}^k)$.

2. Análogamente, si f es inversible y $\mathcal{P}$ es una partición tal que $\lim_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}^{\pm n}(x)) = 0$ para todo $x \in M$, entonces $h_\mu(f) = h_\mu(f, \mathcal{P})$, basta considerar $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}^{\pm n}$ en el corolario 1.2.1 y usar $h_\mu(f, \mathcal{P}) = h_\mu(f, \mathcal{P}^{\pm k})$.

1.2.2. Entropía topológica

En esta subsección presentaremos la definición de entropía topológica desarrollada por Adler-Konheim-McAndrew la cual se basa en utilizar coberturas abiertas (ver definición 6.1.2) en lugar de particiones en conjuntos medibles. Más adelante, en el capítulo 4, presentaremos las definiciones que establecen Bowen-Dinaburg las cuales son desarrolladas a través de conjuntos generadores y conjuntos separados.

Sea M un espacio topológico compacto. La *entropía* de la cobertura α denotada por $H(\alpha)$ viene dada como sigue:

$$H(\alpha) = \log N(\alpha) \tag{1.6}$$

donde $N(\alpha)$ es el menor número tal que α admite alguna subcobertura finita con ese mismo número de elementos; esto es,

$$N(\alpha) = \min\{\operatorname{card}(\beta) : \beta \text{ es una subcobertura finita de } \alpha\}$$

Sean α y β dos coberturas abiertas, diremos que α es menos fina que β y escribimos $\alpha \prec \beta$ si todo elemento de β está contenido en algún elemento de α. Por ejemplo, si β es una subcobertura de α entonces $\alpha \prec \beta$, además se verifica que

$$\alpha \prec \beta \quad \Rightarrow \quad H(\alpha) \le H(\beta) \tag{1.7}$$

para ver ello, tomemos como ζ a la subcobertura finita de β con cardinalidad mínima, esto es, tal que $\operatorname{card}(\zeta) = N(\beta)$; para $E \in \zeta$ tomemos un $F_E \in \alpha$ tal que $E \subset F_E$, considerando la familia $\omega = \{F_E : E \in \zeta\}$ y la correspondencia $E \mapsto F_E$ que es sobreyectiva nos damos cuenta que $\operatorname{card}(\zeta) \geq \operatorname{card}(\omega)$ lo cual implica que $N(\beta) \geq N(\alpha)$ y de aquí es inmediato el resultado 1.7.

Dadas las coberturas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, denotamos por $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ a su *suma*; esto es,

$$\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n = \{A_1 \cap \cdots \cap A_n : A_j \in \alpha_j \text{ para cada } j = 1, \ldots, n\}.$$

Note que $\alpha_j \prec \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$ para todo j. Además, dadas las coberturas α y β se tiene que $H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$, en efecto, si $\gamma = \{E_1, E_2, \ldots, E_p\}$ es una subcobertura finita de α y si $\upsilon = \{F_1, F_2, \ldots, F_q\}$ es una subcobertura finita de β entonces la familia $\gamma \vee \upsilon = \{E_i \cap F_j : i = 1, 2, \ldots, p\ ,\ j = 1, 2, \ldots, q\}$ es una subcobertura finita de $\alpha \vee \beta$ que consta a lo mucho de pq elementos, de aquí que $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta)$ y lo que sigue es inmediato.

Sea $f : M \to M$ una transformación *continua*. Si α es una cobertura abierta de M entonces la familia $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A) : A \in \alpha\}$ también es una cobertura abierta, además $H(f^{-j}(\alpha)) \leq H(\alpha)$. Para cada $n \geq 1$, denotamos

$$\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha) = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\alpha) \tag{1.8}$$

De la relación 1.8 vemos que

$$\alpha^{m+n} = \bigvee_{j=0}^{m+n-1} f^{-j}(\alpha) = \alpha^m \vee \bigvee_{j=m}^{m+n-1} f^{-j}(\alpha) = \alpha^m \vee f^{-m}\left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\alpha)\right) = \alpha^m \vee f^{-m}(\alpha^n)$$

luego obtenemos lo siguiente

$$H\left(\alpha^{m+n}\right) = H\left(\alpha^m \vee f^{-m}\left(\alpha^n\right)\right) \leq H\left(\alpha^m\right) + H\left(f^{-m}\left(\alpha^n\right)\right) \leq H\left(\alpha^m\right) + H\left(\alpha^n\right)$$

para todo $m, n \geq 1$. En otra palabras, la sucesión de entropías $\left(H\left(\alpha^n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es subaditiva. Como consecuencia, el siguiente límite siempre existe:

$$h(f, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} H\left(\alpha^n\right) = \inf_n \frac{1}{n} H\left(\alpha^n\right). \tag{1.9}$$

Dicho valor es llamado *entropía de f respecto a la cobertura α*. La relación 1.7 implica que

$$\alpha \prec \beta \quad \Rightarrow \quad h(f, \alpha) \leq h(f, \beta) \tag{1.10}$$

Finalmente, la *entropía topológica* de f denotada por $h(f)$ es definida como el valor

$$h(f) = \sup_{\alpha}\{h(f,\alpha)\} \tag{1.11}$$

donde α recorre las coberturas abiertas de M. En particular, si β es una subcobertura de α entonces $h(f,\alpha) \leq h(f,\beta)$. Por tanto, la definición anterior no se ve alterada si restringimos el supremo a las coberturas abiertas finitas.

Ejemplo 1.2.3. Sea $X = \{z_1, z_2, \ldots, z_d\}$, sea $\Sigma = X^{\mathbb{Z}}$ y sea α la cobertura abierta de Σ dada como sigue

$$\alpha = \{[1 : a_1] : a_1 \in X\}.$$

Considere el shift de Bernoulli bilateral $\xi : \Sigma \to \Sigma$ entonces para cada n se puede ver que

$$\alpha^n = \{[1 : a_1, \ldots, a_n] : a_i \in X \text{ para cada } i = 1, \ldots, n\}$$

donde α^n resulta ser una cobertura finita de abiertos de Σ que no admite una subcobertura finita estricta, luego $H(\alpha^n) = \log(\operatorname{card}(\alpha^n)) = \log d^n = n \log d$, como consecuencia $h(\xi,\alpha) = \log d$.

Ahora vamos a mostrar que la entropía topológica es un invariante de equivalencia topológica; es decir, se preserva vía conjugaciones topológicas, más específicamente veremos que decrece vía factores topológicos (ver definiciones 1.1.2 y 1.1.3).

Proposición 1.2.1. Si g es un factor topológico de f entonces $h(g) \leq h(f)$. En particular si f y g son topológicamente conjugados entonces $h(f) = h(g)$.

Demostración. Sea $\phi : M \to N$ una aplicación continua sobreyectiva tal que $\phi \circ f = g \circ \phi$. Esto es, tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & M \arrow[d, "\phi"] \\ N \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

Sea α una cobertura abierta de N, la familia $\phi^{-1}(\alpha) = \{\phi^{-1}(A) : A \in \alpha\}$ es una cobertura abierta de M. Dados cualesquiera conjuntos $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1} \in \alpha$, note que

$$\phi^{-1}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j)\right) = \bigcap_{j=0}^{n-1} \phi^{-1}\left(g^{-j}(A_j)\right) = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}\left(\phi^{-1}(A_j)\right).$$

Luego, $\phi^{-1}(\alpha^n) = \phi^{-1}(\alpha)^n$. Por otro lado como ϕ es sobreyectiva, una familia $\gamma \subseteq \alpha^n$ cubre N si y solamente si $\phi^{-1}(\gamma)$ cubre M. Así, $H\left(\phi^{-1}(\alpha)^n\right) = H\left(\phi^{-1}(\alpha^n)\right) = H(\alpha^n)$. Como n es arbitrario, se sigue que $h\left(f, \phi^{-1}(\alpha)\right) = h(g,\alpha)$. Entonces, tomando supremo sobre todas las coberturas α de N se observa

$$h(g) = \sup_{\alpha} h(g, \alpha) = \sup_{\alpha} h\left(f, \phi^{-1}(\alpha)\right) \leq h(f)$$

Esto prueba la primera parte de la proposición. La segunda parte es inmediata, basta repetir el proceso intercambiando f y g. □

Cálculo y propiedades

La siguiente proposición y su respectivo corolario, simplifican substancialmente al cálculo de entropía topológica en ejemplos concretos. Cuando M es un espacio métrico, llamamos diámetro de una cobertura abierta al supremo de los diámetros de sus elementos.

Proposición 1.2.2. Sea M un espacio métrico compacto y sea $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de coberturas abiertas de M tal que $\lim_k \operatorname{diam}(\alpha_k) = 0$. Entonces

$$h(f) = \sup_{k} h(f, \alpha_k) = \lim_{k} h(f, \alpha_k)$$

Demostración. Sea α cualquier cobertura abierta de M y sea $\varepsilon > 0$ un número de Lebesgue de α (ver definición 6.1.9). Tome $n_\alpha \geq 1$ tal que $\operatorname{diam}(\alpha_k) < \varepsilon$ para cada $k \geq n_\alpha$. De la definición de número de Lebesgue se tiene que todo elemento de α_k está contenido en algún elemento de α. Es decir, $\alpha \prec \alpha_k$ y por tanto $h(f, \alpha) \leq h(f, \alpha_k)$ para todo $k \geq n_\alpha$ luego,

$$h(f, \alpha) \leq \inf_{k \geq n_\alpha} h(f, \alpha_k) \leq \sup_{n \geq n_\alpha} \inf_{k \geq n} h(f, \alpha_k) \leq \liminf_{k} h(f, \alpha_k)$$

de donde al tomar supremo sobre las coberturas sobre M se observa

$$h(f) = \sup_{\alpha} h(f, \alpha) \leq \liminf_{k} h(f, \alpha_k) \leq \limsup_{k} h(f, \alpha_k) \leq \sup_{k} h(f, \alpha_k) \leq h(f)$$

lo cual verifica la proposición. □

Recordemos que si α es una cobertura abierta de M entonces $\alpha^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\alpha)$. Adicionalmente, si $f : M \to M$ es inversible también podemos definir $\alpha^{\pm n} = \bigvee_{j=-n}^{n-1} f^{-j}(\alpha)$.

Corolario 1.2.2. Sea M un espacio métrico compacto y sea α es una cobertura abierta tal que

1. $\lim_k \operatorname{diam}\left(\alpha^k\right) = 0$ o
2. $f : M \to M$ es un homeomorfismo y $\lim_k \operatorname{diam}\left(\alpha^{\pm k}\right) = 0$

entonces $h(f) = h(f, \alpha)$.

Demostración. Para el caso (1) basta hacer $\alpha_k = \alpha^k$ y usar la proposición 1.2.2 así,

$$h(f) = \lim_k h\left(f, \alpha^k\right).$$

Además, análogamente a lo que sucede para para la entropía métrica de aplicaciones respecto a particiones medibles se tiene que $h\left(f, \alpha^k\right) = h(f, \alpha)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ luego, $h(f) = h(f, \alpha)$. El caso (2) es análogo. □

Ejemplo 1.2.4. Sea $X = \{z_1, z_2, \ldots, z_d\}$ y sea $\Sigma = X^{\mathbb{Z}}$. Considere el shift de Bernoulli bilateral $\xi : \Sigma \to \Sigma$ el cual es definido por

$$\xi\left((x_n)_n\right) = (x_{n+1})_n.$$

Sea α la cobertura abierta de Σ dada como en el ejemplo 1.2.3, se puede probar que $\lim_k \operatorname{diam}\left(\alpha^{\pm k}\right) = 0$ entonces en vista del corolario 1.2.2 se tiene la siguiente relación

$$h(\xi) = h(\xi, \alpha) = \log d.$$

1.2.3. Principio Variacional

La entropía métrica $h_\mu(f)$ cuantifica la complejidad del caos en un sistema dinámico desde la perspectiva de la medida μ. Dado que un sistema dinámico puede poseer múltiples medidas invariantes, surgen diversas maneras de medir el caos basadas en estas medidas, a diferencia de la entropía topológica $h(f)$, que mide el caos total del sistema dinámico. A partir de aquí, surge una pregunta crucial: ¿existe algún tipo de relación entre estas dos variantes de entropía? La respuesta es afirmativa, y este vínculo es identificado como el principio variacional, el cual se formaliza en el siguiente teorema:

Teorema 1.2.2 (Principio Variacional)**.** Sea M un espacio métrico compacto y sea $f : M \to M$ una transformación continua, entonces se cumple

$$h(f) = \sup\{h_\nu(f) : \nu \text{ es una medida de probabilidad } f\text{-invariante}\} \tag{1.12}$$

Demostración. Ver el Teorema 10.4.1 de (Oliveira and Viana, 2014, p. 334). □

La relevancia intrínseca del principio variacional radica en preguntarse si existe alguna medida f-invariante μ tal que alcance el supremo en 1.12. Precisamente, este cuestionamiento será el foco de estudio en el próximo capítulo.

Capítulo 2

Existencia de medidas de máxima entropía

En este capítulo presentamos a las medidas de máxima entropía (MME) y nos dedicamos al estudio de su existencia. Más específicamente, establecemos una propiedad en los sistemas dinámicos que juega un papel crucial para asegurar la existencia de las MME. Esta propiedad conocida como *expansividad*, tiene la notable capacidad de permitirnos discernir entre trayectorias en algún punto futuro o incluso en algún momento pasado. La esencia de esta propiedad es que cualquier órbita puede ser distinguida y diferenciada a lo largo del tiempo, tanto en el pasado como en el futuro. Es importante mencionar que este capítulo se fundamenta en las fuentes bibliográficas (Barreira, 2012) y (Oliveira and Viana, 2014).

2.1. Medida de máxima entropía

El principio variacional nos dice que para un espacio métrico compacto M y una aplicación continua $f : M \to M$ se cumple:

$$h(f) = \sup\{h_\nu(f) : \nu \text{ es una medida de probabilidad } f\text{-invariante}\}, \tag{2.1}$$

a raíz de ello una buena pregunta sería la siguiente: ¿existe alguna medida de probabilidad f-invariante tal que alcance el supremo en 2.1? Esto es; tal que, ¿$h_\mu(f) = h(f)$? En caso la respuesta fuera afirmativa, la medida en cuestión recibirá el nombre de *medida de máxima entropía* (MME). Formalmente corresponde a la siguiente definición:

Definición 2.1.1. Sea M un espacio métrico compacto y sea $f : M \to M$ una aplicación continua. Diremos que una medida de probabilidad f-invariante μ es una medida de máxima entropía para f si

$$h(f) = h_\mu(f).$$

Ejemplo 2.1.1. Sea M un espacio métrico compacto y sea $f : M \to M$ una aplicación continua con entropía topológica nula, esto es, $h(f) = 0$ entonces se verifica que $h_\mu(f) = 0$ para toda medida de probabilidad f-invariante μ, en particular toda medida de probabilidad f-invariante resulta ser una medida de máxima entropía para f.

El ejemplo anterior nos permite visualizar que sí podemos encontrar casos en los que existan medidas de máxima entropía para ciertos sistemas dinámicos. No obstante, es esencial destacar que en términos generales esta circunstancia podría no ser una ocurrencia común, no todos los sistemas dinámicos tienen la propiedad de admitir medidas de máxima entropía. De hecho, se ha documentado en (Misiurewicz, 1973) la construcción de un difeomorfismo de clase C^r que no admite MME.

Por otro lado, emerge un tipo específico de transformaciones que en efecto presentan la propiedad de ser capaces de admitir MME, y justamente son estas transformaciones las que serán objeto central de nuestro análisis. Nos estamos refiriendo a las transformaciones expansivas, que serán el foco de nuestro estudio en adelante.

2.2. Expansividad y medidas de máxima entropía

2.2.1. Topología en el conjunto de medidas

Sea M un espacio métrico compacto. Utilicemos la notación $\mathcal{M}(M)$ para referirnos al conjunto formado por las medidas de probabilidad en M. Con el propósito de abordar el análisis sobre la existencia de las MME, es esencial dotar al conjunto $\mathcal{M}(M)$ de una estructura topológica que sea natural y conveniente. Para lograr esto, de manera concisa, examinaremos el enfoque presentado en (Barreira, 2012). En esta perspectiva, se establece lo siguiente: Designemos como $\mathcal{C}(M)$ al espacio vectorial real de funciones continuas $\varphi : M \to \mathbb{R}$ equipado con la norma $\|\varphi\|_\infty = \max\{|\varphi(x)| : x \in M\}$. Dentro de este contexto, se garantiza la existencia de una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones que residen en $\mathcal{C}(M)$ cuya adherencia es igual a la bola unitaria

$$\{\varphi \in \mathcal{C}(M) : \|\varphi\|_\infty \leq 1\}.$$

Esta característica nos permite definir la aplicación $d : \mathcal{M}(M) \times \mathcal{M}(M) \to \mathbb{R}$ mediante la expresión

$$d(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int \varphi_n \, d\mu - \int \varphi_n \, d\nu \right|. \tag{2.2}$$

La función d establecida resulta en efecto una métrica en $\mathcal{M}(M)$, lo que además conlleva a la validación de la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1. Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de medidas en $\mathcal{M}(M)$ y $\mu \in \mathcal{M}(M)$ entonces se cumple que $(\mu_n)_n$ converge a μ en la distancia d; esto es, $\lim_n d(\mu_n, \mu) = 0$ si y solamente si

$$\lim_n \int \varphi \, d\mu_n = \int \varphi \, d\mu \tag{2.3}$$

para toda función $\varphi \in \mathcal{C}(M)$.

Demostración. Ver la proposición 3.2 de (Barreira, 2012, p. 68) □

De esta manera, hemos conseguido dotar al conjunto $\mathcal{M}(M)$ de una estructura de espacio métrico; más específicamente, es un espacio métrico *compacto* tal como se describe en el teorema 3.1 de (Barreira, 2012, p. 70). Adicionalmente, gracias a la proposición 2.2.1 hemos conseguido caracterizar de manera más simplificada y comprensible la noción de convergencia de sucesiones de medidas.

2.2.2. Semicontinuidad de la entropía

En esta subsección nos encaminaremos a comprobar que la función de entropía $\mu \mapsto h_\mu(f)$ es semicontinua superiormente. Este resultado junto con la proposición 6.1.2 nos garantizará la existencia de alguna medida f-invariante μ tal que alcance el supremo en 2.1.

Sea $f : M \to M$ una aplicación medible, con $\mathcal{M}_f(M)$ denotemos al conjunto de todas las medidas de probabilidad invariantes por f; en este sentido

$$\mathcal{M}_f(M) = \{\mu \in \mathcal{M}(M) \ : \ \mu \text{ es } f\text{-invariante}\}.$$

Es evidente que $\mathcal{M}_f(M) \subseteq \mathcal{M}(M)$. Más aun $\mathcal{M}_f(M)$ es un subespacio métrico compacto de $\mathcal{M}(M)$.

Sea $\mu \in \mathcal{M}(M)$ y fijemos cualquier partición finita $\mathcal{P}$ de M tal que $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$; en donde $\partial\mathcal{P}$ denota la frontera de la partición $\mathcal{P}$ la cual es definida como sigue

$$\partial\mathcal{P} = \bigcup_{P \in \mathcal{P}} \partial P. \tag{2.4}$$

Para cada $P \in \mathcal{P}$ definamos $\phi_P : \mathcal{M}(M) \to \mathbb{R}$ dada por $\phi_P(\nu) = \nu(P)$. Afirmamos que ϕ_P es continua en μ; en efecto, sea $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas en $\mathcal{M}(M)$ tal que converge para μ; esto es, $\lim_n d(\mu_n, \mu) = 0$. Deberemos probar que $\phi_P(\mu_n)$ converge para $\phi_P(\mu)$ en la topología de la recta. Tomemos $\varepsilon > 0$, de la regularidad de la medida μ sabemos que para $\overline{P}^c$ existe un cerrado $F \subseteq \overline{P}^c$ tal que $\mu\left(\overline{P}^c - F\right) < \varepsilon/2$. Del lema de Urysohn (ver lema 6.1.1) sabemos que existe una función continua $\varphi : M \to [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in F$ y $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in \overline{P}$. Así, de la convergencia de μ_n para μ sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \int \varphi \, d\mu_n - \int \varphi \, d\mu \right| < \varepsilon/2 \quad \forall\, n \geq n_0. \tag{2.5}$$

Por otro lado, a partir de las características de φ se obtiene lo siguiente

$$\int \varphi\, d\mu = \int_{\overline{P}} \varphi\, d\mu + \int_{\overline{P}^c - F} \varphi\, d\mu + \int_F \varphi\, d\mu \leq \mu\left(\overline{P}\right) + \mu(\overline{P}^c - F) < \mu(P) + \varepsilon/2.$$

y como claramente

$$\mu_n(P) = \int_P \varphi\, d\mu_n \leq \int \varphi\, d\mu_n$$

entonces

$$\int \varphi\, d\mu - \int \varphi\, d\mu_n < \mu(P) - \mu_n(P) + \varepsilon/2$$

o equivalentemente

$$\mu_n(P) - \mu(P) < \int \varphi\, d\mu_n - \int \varphi\, d\mu + \varepsilon/2.$$

Luego, de la relación 2.5 se tiene $\mu_n(P) - \mu(P) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Análogamente se verifica $\mu(P) - \mu_n(P) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ con lo cual vemos que

$$|\mu_n(P) - \mu(P)| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

y esto comprueba la continuidad de la correspondencia $\nu \to \nu(P)$ en μ para cada $P \in \mathcal{P}$ satisfaciendo $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$. Como consecuencia, la función $\phi_{\mathcal{P}} : \mathcal{M}(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_{\mathcal{P}}(\nu) = H_\nu(\mathcal{P}) := \sum_{P \in \mathcal{P}} -\nu(P) \log \nu(P)$$

es continua en μ siendo $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$. Por otra parte notemos que la condición $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$ implica que $\mu(\partial\mathcal{P}^n) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ desde que

$$\partial\mathcal{P}^n \subseteq \partial\mathcal{P} \cup f^{-1}(\partial\mathcal{P}) \cup \cdots \cup f^{-n+1}(\partial\mathcal{P}).$$

Luego la función $\phi_{n,\mathcal{P}} : \mathcal{M}_f(M) \to \mathbb{R}$ definida por $\phi_{n,\mathcal{P}}(\nu) = H_\nu(\mathcal{P}^n)$ también es continua en μ siendo $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$. Consecuentemente, (ver proposición 6.1.1) se tiene que la función $\varphi_{\mathcal{P}} : \mathcal{M}_f(M) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_{\mathcal{P}}(\nu) = h_\nu(f, \mathcal{P})$ es semicontinua superiormente en μ desde que

$$h_\nu(f, \mathcal{P}) = \inf_n \frac{1}{n} H_\nu(\mathcal{P}^n).$$

Corolario 2.2.1. Supongamos que existe una partición $\mathcal{P}$ tal que $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n$ genera la σ-álgebra de los conjuntos medibles. Entonces la función de entropía

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{M}_f(M) & \to & \mathbb{R} \\ \nu & \mapsto & h_\nu(f) \end{array}$$

es semicontinua superiormente en μ.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, como $\varphi_{\mathcal{P}}$ es semicontinua superiormente en μ entonces existe una vecindad V de μ tal que $h_\nu(f,\mathcal{P}) < h_\mu(f,\mathcal{P}) + \varepsilon$ para todo $\nu \in V$. Además, sabemos por definición que $h_\mu(f,\mathcal{P}) \leq h_\mu(f)$. Por otro lado la condición de que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n$ genere la σ-álgebra de los conjuntos medibles implica que $h_\nu(f,\mathcal{P}) = h_\nu(f)$ (ver observación 1.2.1(1)) luego, $h_\nu(f) < h_\mu(f) + \varepsilon$ para todo $\nu \in V$. Esto prueba que la correspondencia $\nu \mapsto h_\nu(f)$ es semicontinua superiormente en μ. $\square$

Análogamente, si la aplicación f es inversible y además, existe una partición $\mathcal{P}$ tal que $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$ y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^{\pm n}$ genera la σ-álgebra de los conjuntos medibles, entonces la función de entropía φ es semicontinua superiormente en μ.

El corolario 2.2.2 establecerá una condición sobre cierto tipo de constante, la cual permitirá conferirle a la función de entropía la propiedad de ser una aplicación semicontinua superiormente. No obstante, para la prueba de ello, será necesario emplear el lema que se presenta a continuación:

Lema 2.2.1. Sea M un espacio métrico compacto y sea $\mu \in \mathcal{M}(M)$, se cumple

1. Para $x \in M$ y $\varepsilon > 0$ existe $\delta \in \langle 0, \varepsilon\rangle$ tal que $\mu\left(\partial B(x,\delta)\right) = 0$.
2. Para $\varepsilon > 0$ existe una partición medible $\mathcal{P}$ tal que $\operatorname{diam}(\mathcal{P}) < \varepsilon$ y $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$

Demostración.

1. Sea $x \in M$ y $\varepsilon > 0$ note que $\bigcup_{\delta\in\langle 0,\varepsilon\rangle} \partial B(x,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Esta inclusión nos dice que dicha unión no numerable tiene medida finita, de ahí se obtiene el resultado.
2. Sea $\varepsilon > 0$, para $x \in M$ por el ítem anterior sabemos que existe $\delta_x \in \langle 0, \varepsilon/2\rangle$ tal que $\mu\left(\partial B(x,\delta_x)\right) = 0$. Como la familia $\{B(x,\delta_x) : x \in M\}$ forma una cobertura abierta de M y como M es compacto entonces podemos escribir

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \delta_{x_i})$$

para algunos $x_i \in M$. Hagamos

$$V_1 = B(x_1, \delta_{x_1}) \quad \text{y} \quad V_j = B(x_j, \delta_{x_j}) - \bigcup_{i=1}^{j-1} B(x_i, \delta_{x_i}) \ ; \ j = 2, \ldots, k$$

y $\mathcal{P} = \{V_1, V_2 \ldots, V_k\}$, entonces $\mathcal{P}$ es una partición finita de M tal que

$$\operatorname{diam}(\mathcal{P}) = \sup_{1\leq i\leq k} \operatorname{diam}(V_i) \leq \sup_{1\leq i\leq k} \operatorname{diam}\left(B(x_i,\delta_{x_i})\right) \leq \sup_{1\leq i\leq k} 2\delta_{x_i} \leq 2\varepsilon/2 = \varepsilon$$

y tal que

$$\mu(\partial\mathcal{P}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k}\partial V_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k}\partial B(x_i,\delta_{x_i})\right) \leq \sum_{i=1}^{k}\underbrace{\mu\left(\partial B(x_i,\delta_{x_i})\right)}_{0} = 0$$

□

Corolario 2.2.2. Suponga que existe una constante $\delta_0 > 0$ tal que

$$\operatorname{diam}(\mathcal{P}) < \delta_0 \implies \lim_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}^n) = 0.$$

Entonces la función de entropía $\varphi : \mathcal{M}_f(M) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(\nu) = h_\nu(f)$ es semicontinua superiormente.

Demostración. Sea $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$, por el lema 2.2.1 sabemos que existe una partición $\mathcal{P}$ tal que $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$ y $\operatorname{diam}(\mathcal{P}) < \delta_0$. Por otro lado, como vimos en el lema 1.2.4 la condición $\lim_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}^n) = 0$ implica que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}^n$ genera la σ-álgebra de los conjuntos medibles. Esto nos dice que φ es semicontinua superiormente en μ, siendo μ una medida arbitraria en $\mathcal{M}_f(M)$. Por lo tanto se concluye el resultado. □

Análogamente, si f es inversible y si existe una constante $\delta_0 > 0$ tal que

$$\operatorname{diam}(\mathcal{P}) < \delta_0 \implies \lim_n \operatorname{diam}\left(\mathcal{P}^{\pm n}\right) = 0,$$

entonces la función de entropía φ es semicontinua superiormente.

Observación 2.2.1. Como consecuencia, en las hipótesis del corolario 2.2.2 se tiene, por la proposición 6.1.2, que φ es acotada superiormente y admite un máximo; esto es, existe alguna medida $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$ tal que

$$h_\mu(f) = \sup\{h_\nu(f) : \nu \in \mathcal{M}_f(M)\} = h(f).$$

En la siguiente sección veremos que para cierto tipo de transformaciones seremos capaces de encontrar una constante δ_0 que precisamente satisfaga las hipótesis establecidas en el corolario 2.2.2.

2.2.3. Transformaciones expansivas

Definición 2.2.1. Sea M un espacio métrico compacto y sea $f : M \to M$ una aplicación continua (resp. homeomorfismo), diremos que f es expansiva si existe $\delta_0 > 0$ (*constante de expansividad*) tal que si $x, y \in M$ con $x \neq y$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ (resp. $n \in \mathbb{Z}$) con $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta_0$.
De manera simbólica f es expansiva si y solo si:

$$\exists\,\delta_0 > 0\ \forall\, x, y \in M\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ (\mathbb{Z})\ :\ (x \neq y \Rightarrow d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) \geq \delta_0)$$

De esta manera, una aplicación expansiva permite distinguir a sus órbitas en algún momento de sus iteraciones.

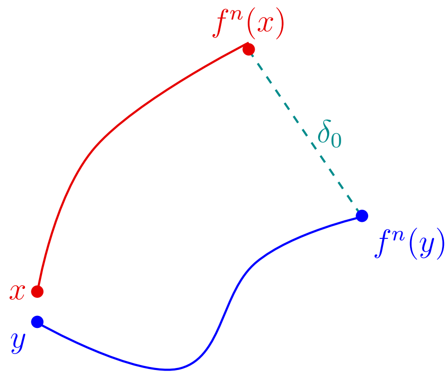


Figura 2.1: Expansividad

Ejemplo 2.2.1. Sea $X = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$, consideremos el espacio producto $M = X^{\mathbb{N}}$ dotado con la métrica $d : M \to M$ definida como sigue,

$$d\left((x_n)_n, (y_n)_n\right) = \frac{|x_N - y_N|}{2^N} \text{ donde } N = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}$$

si $(x_n)_n \neq (y_n)_n$ y $d\left((x_n)_n, (x_n)_n\right) = 0$. Sea $\sigma : M \to M$ tal que $\sigma\left((x_n)_n\right) = (x_{n+1})_n$. Se verifica que σ no es una aplicación expansiva, pues de lo contrario si existe una constante de expansividad $\delta_0 > 0$ podemos escoger algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m < \delta_0$, podemos considerar las sucesiones $x = (0, 0, 0, \ldots)_n$ e $y_m = (1/m, 1/m, 1/m, \ldots)_n$ y podemos ver que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica

$$d(\sigma^n(x), \sigma^n(y_m)) = d(x, y_m) = \frac{|0 - 1/m|}{2^1} = \frac{1}{2m} < \frac{1}{m} < \delta_0$$

lo cual contradice la condición de expansividad.

El ejemplo anterior nos ilustra que hay casos de aplicaciones que no tienen la propiedad de ser expansivas. En contraste, existen aplicaciones que sí lo son, como es el caso de los Shift de Bernoulli tanto unilaterales como los bilaterales.

Ejemplo 2.2.2. El shift de Bernoulli bilateral $\xi : \Sigma \to \Sigma$, es una transformación expansiva con constante de expansividad $\delta_0 = 1$. En efecto: sean $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$ sucesiones bilaterales distintas, entonces existe algún $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ luego,

$$d\left(\xi^{n_0}(x), \xi^{n_0}(y)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{0,1}(x_{n+n_0}, y_{n+n_0})}{2^{|n|}} \geq \frac{d_{0,1}(x_{n_0}, y_{n_0})}{2^0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Proposición 2.2.2. Sea M un espacio métrico compacto y sea $f : M \to M$ una transformación expansiva con constante de expansividad δ_0, entonces se cumple

$$\operatorname{diam}(\mathcal{P}) < \delta_0 \implies \lim_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}^n) = 0.$$

Análogamente, si f es un homeomorfismo expansivo, entonces se cumple

$$\operatorname{diam}(\mathcal{P}) < \delta_0 \implies \lim_n \operatorname{diam}\left(\mathcal{P}^{\pm n}\right) = 0.$$

Demostración. Consideremos el caso en que f es continua, sabemos que para toda partición $\mathcal{P}$ se verifica $\mathcal{P}^n \prec \mathcal{P}^{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $\operatorname{diam}(\mathcal{P}^{n+1}) \leq \operatorname{diam}(\mathcal{P}^n)$ así, la sucesión de números reales $(\operatorname{diam}(\mathcal{P}^n))_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente por cero, luego es convergente. Sea $\delta = \lim_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}^n) \geq 0$ y supongamos que $\delta > 0$. De la definición de límite existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}(\mathcal{P}^n) > \delta/2$ para cada $n \geq n_0$.
Así para cada $n \geq n_0$ se verifica que $\operatorname{diam}(A_n) > \delta/2$ para algún $A_n \in \mathcal{P}^n$, luego podemos tomar $x_n, y_n \in A_n$ tales que $d(x_n, y_n) > \delta/2$. Por otro lado, como $A_n \in \mathcal{P}^n$ entonces se puede escribir de la forma

$$A_n = A'_0 \cap f^{-1}(A'_1) \cap f^{-2}(A'_2) \cap \cdots \cap f^{-n+1}(A'_{n-1})$$

donde $A'_j \in \mathcal{P}$ para cada $j = 0, \ldots, n-1$; por consiguiente $f^j(x_n), f^j(y_n) \in A'_j$ para cada respectivo j, de donde deducimos lo siguiente

$$d\left(f^j(x_n), f^j(y_n)\right) \leq \operatorname{diam}\left(A'_j\right) \leq \operatorname{diam}(\mathcal{P}) < \delta_0 \quad \text{para cada } j = 0, \ldots, n-1.$$

Como M es compacto, las sucesiones $(x_n)_{n\geq n_0}$ y $(y_n)_{n\geq n_0}$ admiten algunas subsucesiones convergentes en M; esto es, existe alguna subsucesión $(n_k)_k$ de números naturales y existen $x, y \in M$ tales que $\lim_k x_{n_k} = x$ y $\lim_k y_{n_k} = y$. Note que como $d(x_n, y_n) > \delta/2$, entonces al reemplazar n por n_k y al tomar límite sobre k obtenemos que $d(x, y) \geq \delta/2$ lo que en particular nos dice que x e y son distintos.
Además desde que f es continua se verifica la siguiente igualdad para todo $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$\lim_k d\left(f^j(x_{n_k}), f^j(y_{n_k})\right) = d\left(f^j(x), f^j(y)\right). \tag{2.6}$$

Como $n_k \geq n \geq n_0$ se tiene

$$d\left(f^j(x_{n_k}), f^j(y_{n_k})\right) < \delta_0 \quad \text{para cada } j = 0, \ldots, n_k - 1 \tag{2.7}$$

tomando límite sobre k en 2.7 y usando la relación en 2.6 se llega a que

$$d\left(f^j(x), f^j(y)\right) < \delta_0 \quad \text{para cada } j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

lo cual contradice la hipótesis de expansividad, luego $\delta = 0$ y así, la proposición queda mostrada. Para el caso en que f sea un homeomorfismo basta cambiar $\mathcal{P}^n$ por $\mathcal{P}^{\pm n}$ y proceder de forma análoga. $\square$

Observación 2.2.2. Combinando los resultados de la proposición 2.2.2 y el corolario 2.2.2 concluimos que para una aplicación expansiva f existe alguna medida $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$ tal que

$$h_\mu(f) = \sup\{h_\nu(f) : \nu \in \mathcal{M}_f(M)\} = h(f).$$

Esto es, toda transformación expansiva admite alguna medida de máxima entropía.

Ejemplo 2.2.3. Del ejemplo 2.2.2 vimos que el Shift de Bernoulli bilateral es una aplicación expansiva, luego, en vista de la observación 2.2.2 se tiene que el Shift admite alguna medida de máxima entropía.

Capítulo 3

Propiedad de especificación

La propiedad de especificación permite aproximar cualquier colección finita de segmentos de órbitas por una órbita periódica lo suficientemente cercana. Estudiamos esta propiedad con el propósito de poder probar la unicidad de las Medidas de Máxima Entropía (MME) para sistemas dinámicos expansivos. Comenzaremos por analizar ciertas propiedades fundamentales relacionadas a la propiedad de especificación, mostraremos que el shift de Bernoulli satisface dicha propiedad y probaremos que en intervalos compactos, la propiedad de topológicamente mixing es equivalente a la propiedad de especificación. Este último punto es particularmente valioso, ya que es más "factible" verificar que una transformación sea topológicamente mixing en comparación a que satisfaga la propiedad de especificación, así podremos tener acceso a un conjunto más amplio de ejemplos de transformaciones que satisfacen la propiedad de especificación. Este capítulo está basado en las bibliografías (Katok and Hasselblatt, 1995), (Ruette, 2015) y (Sigmund, 1974).

3.1. Definición y propiedades

Por simplicidad denotemos con $[\![a,b]\!]$ al conjunto de todos los números enteros x tales que $a \leq x \leq b$; esto es, $[\![a,b]\!] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$.

Sea $f : M \to M$ una aplicación en el espacio métrico compacto (M,d), una especificación $\mathcal{S} = (\mathcal{I}, P)$ en M consta de una familia $\mathcal{I} = \{[\![a_j, b_j]\!] : j = 1, \ldots, m\}$ de intervalos finitos cerrados y de una aplicación $P : \bigcup_{j=1}^{m} [\![a_j, b_j]\!] \to M$ tal que para $t_1, t_2 \in [\![a_j, b_j]\!]$ con $t_2 \geq t_1$ se tiene $f^{t_2 - t_1}(P(t_1)) = P(t_2)$. Diremos que $\mathcal{S}$ es n-espaciada si $a_{j+1} - b_j \geq n$ para cada $j = 1, \ldots, m-1$. Diremos que $\mathcal{S}$ es ε-sombreada por $x \in M$ si $d(f^n(x), P(n)) < \varepsilon$ para cada $n \in \bigcup_{j=1}^{m} [\![a_j, b_j]\!]$. Además denotaremos $L(\mathcal{S}) = b_m - a_1$.

Definición 3.1.1 (Propiedad de especificación)**.** Diremos que f tiene la *propiedad de especificación* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (constante de espaciamiento) tal que cualquier especificación M_ε-espaciada es ε-sombreada por algún $x \in M$, y además para cualquier $q \geq M_\varepsilon + L(S)$ podemos tomar a dicho x como un punto periódico de orden q.

En la definición de especificación podemos observar que la única restricción impuesta sobre la función P es que deba satisfacer la relación $f^{t_2-t_1}(P(t_1)) = P(t_2)$ para cada par de valores $t_1, t_2 \in [\![a_j, b_j]\!]$ con $t_2 \geq t_1$. De hecho existe un tipo de función que siempre cumple esa condición, la cual es $P(t) = f^t(y)$ donde y está fijo. Esto es relevante debido a que en las aplicaciones de la propiedad de especificación son este tipo de funciones P las cuales suelen aparecer. Así, de manera conveniente podemos reescribir la propiedad de especificación como sigue:

Definición 3.1.2 (Propiedad de especificación)**.** Sea $f : M \to M$ una aplicación en el espacio métrico compacto (M, d), diremos que f tiene la *propiedad de especificación* si para cada $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos los puntos $x_1, \ldots, x_m \in M$ y cualesquiera m intervalos enteros $[\![a_j, b_j]\!]$ con $a_{j+1} - b_j \geq M_\varepsilon$ para cada $j = 1, \ldots, m-1$ y para todo entero $q \geq M_\varepsilon + b_m - a_1$ existe $x \in M$ tal que x es un punto periódico de orden q de f (esto es $f^q(x) = x$) y $d(f^k(x), f^k(x_j)) \leq \varepsilon$ para cada $k \in [\![a_j, b_j]\!]$ y para cada $j = 1, \ldots, m$.

En lo sucesivo usaremos cualesquiera de las dos versiones de la propiedad de especificación puesto que son equivalentes.

A manera de interpretación, la propiedad de especificación nos dice que para cualquier $\varepsilon > 0$ siempre es posible encontrar un $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que cualesquiera m segmentos de órbitas

$$\mathcal{O}_f^{[\![a_j,b_j]\!]}(x_j) := \{f^{a_j}(x_j), \ldots, f^{b_j}(x_j)\}$$

con $a_{j+1} - b_j \geq M_\varepsilon$ para cada $j = 1, \ldots, m-1$, pueden ser lo suficientemente aproximados por una órbita periódica

$$\mathcal{O}_f(x) = \{\ldots, f^{a_1}(x), \ldots, f^{b_1}(x), \ldots, f^{a_m}(x), \ldots, f^{b_m}(x), \ldots\}$$

de periodo q para todo entero $q \geq M_\varepsilon + b_m - a_1$.

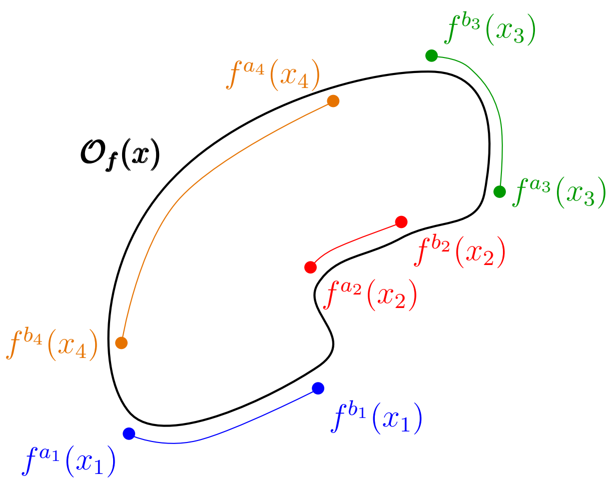


Figura 3.1: Especificación

En la siguiente proposición compilamos algunos resultados importantes sobre la preservación de la propiedad de especificación vía iteraciones, vía factores topológicos y vía producto de funciones.

Proposición 3.1.1. Sea $f : M \to M$ una aplicación continua en el espacio métrico compacto M, se cumple:

1. Sea un entero $r \geq 1$. f tiene la propiedad de especificación si y solamente si f^r tiene la propiedad de especificación.

2. Si f tiene la propiedad de especificación entonces todo factor topológico de f también tiene la propiedad de especificación.

3. Si f y g tienen la propiedad de especificación, entonces $f \times g$ también tiene la propiedad de especificación.

Demostración.

1. Supongamos que f tiene la propiedad de especificación. Sea $\varepsilon > 0$ y sea M_ε una constante de espaciamiento para ε y para f. Sean puntos $x_1, \ldots, x_m \in M$ arbitrarios, sean m intervalos enteros $[\![a_j, b_j]\!]$ con $a_{j+1} - b_j \geq M_\varepsilon$ y sea un número entero $q \geq M_\varepsilon + b_m - a_1$. Podemos aplicar la propiedad de especificación para f en los puntos $x_1, \ldots, x_m \in M$, en los m intervalos enteros $[\![ra_j, rb_j]\!]$ siendo $ra_{j+1} - rb_j \geq rM_\varepsilon \geq M_\varepsilon$ y en rq siendo $rq \geq rM_\varepsilon + rb_m - ra_1 \geq M_\varepsilon + rb_m - ra_1$. Así, existe $x \in M$ tal que es punto periódico de orden rq de f (es decir $f^{rq}(x) = x$) y $d(f^k(x), f^k(x_j)) \leq \varepsilon$ para cada $k \in [\![ra_j, rb_j]\!]$ y para cada $j = 1, \ldots, m$. En particular, tomando $k \in r[\![a_j, b_j]\!] = \{ra_j, r(a_j+1), \ldots, r(b_j-1), rb_j\} \subseteq [\![ra_j, rb_j]\!]$ para cada $j = 1, \ldots, m$ podemos escribir $k = rl$ luego, $d(f^{rl}(x), f^{rl}(x_j)) \leq \varepsilon$ siendo $l \in [\![a_j, b_j]\!]$. Esto prueba que f^r tiene la propiedad de especificación y con una misma constante de espaciamiento de f. Para el recíproco basta repetir un proceso análogo.

2. Sea $g : N \to N$ un factor topológico de f vía la aplicación continua y sobreyectiva $\phi : M \to N$. Así, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & M \arrow[d, "\phi"] \\ N \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

   Supóngase que f tiene la propiedad de especificación. Sea $\varepsilon > 0$, como ϕ es continua y M es compacto entonces ϕ es uniformemente continua así, existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tal que

$$w, z \in M,\ d(w, z) < \delta \Longrightarrow d(\phi(w), \phi(z)) < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Considere $M_{\delta/2} \in \mathbb{N}$ una constante de espaciamiento para $\delta/2$ y para f. Sean puntos $y_1, \ldots, y_m \in N$ arbitrarios, sean m intervalos enteros $[\![a_j, b_j]\!]$ con $a_{j+1} - b_j \geq M_{\delta/2}$ y sea un número entero $q \geq M_{\delta/2} + b_m - a_1$. Podemos aplicar la propiedad de especificación para f en los puntos $\phi^{-1}(y_1), \ldots, \phi^{-1}(y_m) \in M$, en los m intervalos enteros $[\![a_j, b_j]\!]$ y en q. Así, existe $x \in M$ tal que es punto periódico de orden q de f (es decir $f^q(x) = x$) y tal que

$$d\left(f^k(x), f^k\left(\phi^{-1}(y_j)\right)\right) \leq \delta/2 \tag{3.2}$$

para cada $k \in [\![a_j, b_j]\!]$ y para cada $j = 1, \ldots, m$. Hagamos $y = \phi(x) \in N$ entonces y es un punto periódico de orden q de g (es decir $g^q(y) = y$) y $d\left(g^k(y), g^k\left(y_j\right)\right) \leq \varepsilon$ como consecuencia de 3.1 y 3.2. Luego, g tiene la propiedad de especificación.

3. Supongamos que tanto f como g tienen la propiedad de especificación. Sea $\varepsilon > 0$ y tome $M_\varepsilon = \max\{M_{\varepsilon,f}, M_{\varepsilon,g}\}$ donde $M_{\varepsilon,f}$ y $M_{\varepsilon,g}$ son constantes de espaciamiento para f y g respectivamente. Sean $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in M \times N$ arbitrarios, sean m intervalos enteros $[\![a_j, b_j]\!]$ con $a_{j+1} - b_j \geq M_\varepsilon$ y sea un número entero $q \geq M_\varepsilon + b_m - a_1$. Podemos aplicar la propiedad de especificación para f en $x_1, \ldots, x_m \in M$, en los m intervalos enteros $[\![a_j, b_j]\!]$ y en q; así, existe $x \in M$ tal que es punto periódico de orden q de f (esto es $f^q(x) = x$) y tal que $d(f^k(x), f^k(x_j)) \leq \varepsilon$ para cada $k \in [\![a_j, b_j]\!]$ y para cada $j = 1, \ldots, m$. Análogamente por la propiedad de especificación para g en $y_1, \ldots, y_m$, en $[\![a_j, b_j]\!]$ y en q se tiene que existe $y \in N$ tal que es punto periódico de orden q de g (esto es $g^q(y) = y$) y tal que $d(g^k(y), g^k(y_j)) \leq \varepsilon$ para cada $k \in [\![a_j, b_j]\!]$ y para cada $j = 1, \ldots, m$. Luego, basta tomar $(x, y) \in M \times N$ así, (x, y) es un punto periódico de $f \times g$ de orden q pues $(f \times g)^q(x, y) = (f^q(x), g^q(y)) = (x, y)$ y

$$\begin{aligned} d\left((f \times g)^k(x, y), (f \times g)^k(x_j, y_j)\right) &= d\left((f^k(x), g^k(y)), (f^k(x_j), g^k(y_j))\right) \\ &= \max\{d\left(f^k(x), f^k(x_j)\right), d\left(g^k(y), g^k(y_j)\right)\} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

para cada $k \in [\![a_j, b_j]\!]$ y para cada $j = 1, \ldots, m$. Con lo cual se prueba que $f \times g$ tiene la propiedad de especificación.

□

3.2. El shift de Bernoulli tiene la propiedad de especificación

Para simplificar cálculos, haremos la prueba para el shift de Bernoulli unilateral, para el caso bilateral es análogo.

Sea X un conjunto finito y sea $\Sigma = X^{\mathbb{N}}$. El shift de Bernoulli unilateral $\xi : \Sigma^+ \to \Sigma^+$ tiene la propiedad de especificación, en efecto: sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y tome $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$1/2^{M_\varepsilon} < \varepsilon$. Sean m sucesiones unilaterales $(x_n^1)_n, (x_n^2)_n \dots, (x_n^m)_n \in \Sigma^+$, sean m intervalos enteros $[\![a_j, b_j]\!]$ tales que $a_{j+1} - b_j \geq M_\varepsilon$ para cada $j = 1, \dots, m-1$ y sea $q \geq M_\varepsilon + b_m - a_1$. Convenientemente construiremos una sucesión unilateral $(x_n)_n$ como sigue

$$\begin{aligned}
x_n &= x_n^1 \text{ para } n = a_1 + 1, \dots, b_1, b_1 + 1, \dots, a_2 \\
x_n &= x_n^2 \text{ para } n = a_2 + 1, \dots, b_2, b_2 + 1, \dots, a_3 \\
x_n &= x_n^3 \text{ para } n = a_3 + 1, \dots, b_3, b_3 + 1, \dots, a_4 \\
x_n &= x_n^4 \text{ para } n = a_4 + 1, \dots, b_4, b_4 + 1, \dots, a_5 \\
&\vdots \\
x_n &= x_n^j \text{ para } n = a_j + 1, \dots, b_j, b_j + 1, \dots, a_{j+1} \\
&\vdots \\
x_n &= x_n^{m-1} \text{ para } n = a_{m-1} + 1, \dots, b_{m-1}, b_{m-1} + 1, \dots, a_m \\
x_n &= x_n^m \text{ para } n = a_m + 1, \dots, b_m.
\end{aligned}$$

Note que, utilizando las sucesiones $(x_n^1)_n, (x_n^2)_n \dots, (x_n^m)_n$, se han logrado llenar $b_m - a_1$ posiciones de la sucesión $(x_n)_n$ desde la posición $a_1 + 1$ hasta la posición b_m (ver figura 3.2) donde

$$b_m - a_1 \leq M_\varepsilon + b_m - a_1 \leq q,$$

en adición, desde la posición $b_m + 1$ hasta la posición $q + a_1$ llenaremos con cualesquiera valores fijos en X.

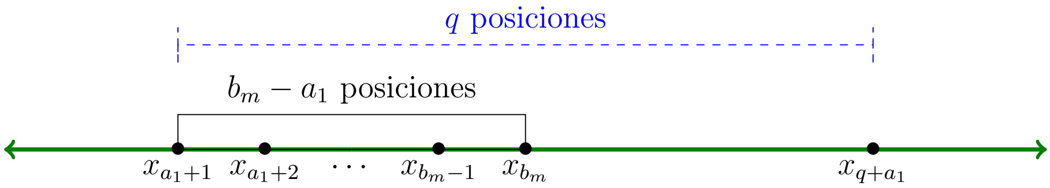


Figura 3.2: Algunos elementos de la sucesión $(x_n)_n$

Con ello, tenemos q posiciones completas de $(x_n)_n$ luego, para conseguir que $(x_n)_n$ sea periódica de orden q de ξ basta repetir el bloque de q posiciones de manera consecutiva; esto es, hacer

$$x_n = x_{n-q} \text{ para todo } n > q + a_1$$

y

$$x_n = x_{n+q} \text{ para todo } n < a_1 + 1.$$

Por otra parte, para cada $j = 1, \dots, m$ y para cada $k \in [\![a_j, b_j]\!]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\xi^k\left((x_n)_n\right) &= (x_{n+k})_n = (\underbrace{x^j_{k+1}}_{1^\circ}, \underbrace{x^j_{k+2}}_{2^\circ}, \dots, \underbrace{x^j_{a_{j+1}}}_{a_{j+1}-k^\circ}, \dots) \\
\xi^k\left((x^j_n)_n\right) &= (x^j_{n+k})_n = (\overbrace{x^j_{k+1}}, \overbrace{x^j_{k+2}}, \dots, \overbrace{x^j_{a_{j+1}}}, \dots).
\end{aligned}$$

Esto nos dice que $\xi^k\left((x_n)_n\right)$ y $\xi^k\left((x^j_n)_n\right)$ coinciden desde la posición 1 hasta la posición $a_{j+1} - k$ desde que

$$a_j + 1 \leq k + 1 \leq b_j + 1 \leq a_{j+1},$$

en particular coinciden hasta la posición $a_{j+1} - b_j$ pues $a_{j+1} - b_j \leq a_{j+1} - k$ para todo $k \in [\![a_j, b_j]\!]$. Luego, haciendo $n_j = a_{j+1} - b_j$ tenemos

$$\begin{aligned}
d\left(\xi^k\left((x_n)_n\right), \xi^k\left((x^j_n)_n\right)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{0,1}(x_{n+k}, x^j_{n+k})}{2^n} = \sum_{n=n_j+1}^{\infty} \frac{d_{0,1}(x_{n+k}, x^j_{n+k})}{2^n} \\
&\leq \sum_{n=n_j+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n_j}} = \frac{1}{2^{a_{j+1}-b_j}} \leq \frac{1}{2^{M_\varepsilon}} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que el Shift de Bernoulli unilateral $\xi : \Sigma^+ \to \Sigma^+$ tiene la propiedad de especificación. De manera similar, para el caso bilateral, el proceso es comparablemente análogo.

Ejemplo 3.2.1. Para cada entero $k \geq 1$ hagamos $X_k = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ y $\Sigma_k = X_k^{\mathbb{N}}$, del ejemplo 1.1.7 sabemos que la función de expansión numérica en base k, $f_k : [0,1] \to [0,1]$ la cual es definida como $f_k(x) = kx - \lfloor kx \rfloor$ es un factor topológico del shift de Bernoulli unilateral $\xi : \Sigma_k^+ \to \Sigma_k^+$ luego, por la proposición 3.1.1(2) se concluye que f_k tiene la propiedad de especificación para cada $k \geq 1$.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_k^+ \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\phi"'] & \Sigma_k^+ \arrow[d, "\phi"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "f_k"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

3.3. Propiedad de especificación vs. topológicamente mixing

La propiedad de especificación constituye una propiedad muy fuerte. En muchas ocasiones es difícil corroborar que alguna aplicación $f : M \to M$ tenga esta propiedad. No obstante, podemos establecer una conexión entre esta propiedad y la noción de ser topológicamente mixing, la cual resulta ser más manejable. Mostraremos que la propiedad de especificación implica topológicamente mixing y, que sobre intervalos compactos se verifica el recíproco; esto es, la propiedad de topológicamente mixing implica la propiedad de especificación. En otras palabras, se tiene que topológicamente mixing y propiedad de especificación son equivalentes para mapeos sobre intervalos compactos lo que nos permite acceder a una gama más amplia de ejemplos de aplicaciones que tienen la propiedad de especificación.

La siguiente proposición muestra que la propiedad de especificación implica la propiedad de topológicamente mixing.

Proposición 3.3.1. Sea $f : M \to M$ una aplicación continua y sobreyectiva en el espacio métrico (M, d), si f tiene la propiedad de especificación entonces f es topológicamente mixing.

Demostración. Sean U y V abiertos de M. Tómese $u \in U$ y $v \in V$, además sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(u, \varepsilon/2) \subseteq U$ y $B(v, \varepsilon) \subseteq V$. Sea $M_{\varepsilon/2}$ una constante de espaciamiento para $\varepsilon/2$ y sea $n \geq M_{\varepsilon/2}$. Como por hipótesis f es sobreyectiva, para $v_1 \in B(v, \varepsilon/2)$ existe $v_2 \in M$ tal que $f^n(v_2) = v_1$. Consideremos $u, v_2 \in M$ y los intervalos enteros unitarios (triviales) $[\![0]\!]$, $[\![n]\!]$ entonces por la propiedad de especificación existe $x \in M$ tal que $d(x, u) \leq \varepsilon/2$ y $d(f^n(x), f^n(v_2)) \leq \varepsilon/2$. Así, por un lado se tiene $x \in B(u, \varepsilon/2) \subseteq U$ y por otro lado se tiene $f^n(x) \in B[f^n(v_2), \varepsilon/2] = B[v_1, \varepsilon/2] \subseteq B(v, \varepsilon) \subseteq V$. Luego, $f^n(x) \in f^n(U) \cap V$. $\square$

En la proposición 3.3.1 observamos que para sistemas dinámicos $f : M \to M$ definidos en espacios métricos M la propiedad de especificación implica topológicamente mixing. Ahora estudiaremos el recíproco para funciones definidas sobre intervalos compactos.

Empecemos con la siguiente observación, sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función topológicamente transitiva y sea $c \in \langle a, b\rangle$ entonces, existe algún $n_0 \geq 0$ tal que

$$f^{n_0}(\langle a, c\rangle) \cap \langle c, b\rangle \neq \emptyset$$

por otro lado si suponemos que $f([a, c]) \subseteq [a, c]$ entonces $f^n([a, c]) \subseteq [a, c]$ para todo $n \geq 0$ luego, para $n = n_0$ se tiene

$$\emptyset \neq f^{n_0}([a, c]) \cap \langle c, b\rangle \subseteq [a, c] \cap \langle c, b\rangle$$

lo cual no es cierto. Concluimos que $f([a, c]) \nsubseteq [a, c]$. Esto nos dice que cualquier subintervalo propio de $[a, b]$ no puede contener a su propia imagen bajo la aplicación topológicamente transitiva f. Este resultado será muy usado más adelante.

A continuación veremos una serie de proposiciones y lemas previos al teorema principal de esta sección (teorema 3.3.1).

Proposición 3.3.2. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una aplicación topológicamente mixing, entonces para cada $\varepsilon > 0$ y para cada subintervalo $J \subseteq [a, b]$ existe un entero N tal que $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subseteq f^n(J)$ para todo $n \geq N$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y sea un subintervalo $J \subseteq [a, b]$, si J es un intervalo abierto entonces desde que f es topológicamente mixing existen enteros $n_1 \geq 0$ y $n_2 \geq 0$ tales que

$$f^n(J) \cap \langle a, a + \varepsilon\rangle \neq \emptyset \; \forall n \geq n_1 \quad \text{y} \quad f^n(J) \cap \langle b - \varepsilon, b\rangle \neq \emptyset \; \forall n \geq n_2$$

Note que como J es un intervalo y como f es continua, entonces $f^n(J)$ también es un intervalo luego, para $n \geq N = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ se tiene que el intervalo $f^n(J)$ intersecta a los intervalos $\langle a, a + \varepsilon\rangle$ y $\langle b - \varepsilon, b\rangle$. Así, $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subseteq f^n(J)$ para todo $n \geq N$. Si J no fuera un intervalo abierto, bastaría repetir los pasos anteriores en el conjunto $Int(J)$ y se llegaría al mismo resultado. □

Definición 3.3.1 (Punto accesible)**.** Sea $f : [a, b] \to [a, b]$, diremos que a (resp. b) es un punto accesible si existen $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \langle a, b\rangle$ tales que $f^n(x) = a$ (resp. $f^n(x) = b$).

Proposición 3.3.3. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una aplicación topológicamente mixing. Si a (resp. b) es accesible entonces para cada $\varepsilon > 0$ y para cada subintervalo $J \subseteq \langle a, b\rangle$, existe $N \geq 0$ tal que $[a, b - \varepsilon] \subseteq f^n(J)$ (resp. $[a + \varepsilon, b]$) para todo $n \geq N$.

Demostración. Haremos la prueba sobre a, el caso para b es análogo. Como a es accesible, tomemos $x_0 \in \langle a, b\rangle$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(x_0) = a$. Sea $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$x_0 \in [a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0] \tag{3.3}$$

Sea $J \subseteq \langle a, b\rangle$ un intervalo. Como f es topológicamente mixing, por la proposición 3.3.2 se sabe que existe un entero $N_0 \geq 0$ tal que

$$[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0] \subseteq f^n(J) \tag{3.4}$$

para todo $n \geq N_0$. Por un lado debemos notar que $x_0 \in f^n(J)$ para todo $n \geq N_0$ desde que $x_0 \in [a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$ luego, $a \in f^{n+n_0}(J) \; \forall n \geq N_0$ así, para cada $n \geq N_0$ podemos tomar $x_n \in J$ tal que $f^{n+n_0}(x_n) = a$. Por otro lado y de forma similar, de la relación 3.4 para $n \geq N_0$ (y por consecuente para $n + n_0 \geq N_0$) sabemos que $b - \varepsilon_0 \in f^{n+n_0}(J)$, luego para cada $n \geq N_0$ podemos tomar $y_n \in J$ tal que $f^{n+n_0}(y_n) = b - \varepsilon_0$. Ahora denotemos con K_n al intervalo cuyos extremos son x_n e y_n (por ejemplo podría suceder $K_n = \langle x_n, y_n\rangle$), entonces como consecuencia del teorema del valor intermedio tendremos

$$[a, b - \varepsilon_0] = \left[f^{n+n_0}(x_n), f^{n+n_0}(y_n)\right] \subseteq f^{n+n_0}(K_n).$$

En adición $K_n \subseteq J$ desde que J es un intervalo que contiene los extremos del intervalo K_n luego, $[a, b-\varepsilon_0] \subseteq f^{n+n_0}(J)$ para todo $n \geq N_0$ o equivalentemente haciendo $N = n_0 + N_0$ se observa lo siguiente

$$[a, b-\varepsilon_0] \subseteq f^n(J) \ \forall\, n \geq N. \tag{3.5}$$

Para el caso general sea $\varepsilon > 0$, nótese que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ entonces la relación 3.3 se sigue manteniendo para ε y con ello también se cumple la relación 3.5. Si $\varepsilon > \varepsilon_0$ entonces note que $[a, b-\varepsilon] \subseteq [a, b-\varepsilon_0]$ y se sigue manteniendo el resultado 3.5 para ε. Esto prueba la proposición. $\square$

Lema 3.3.1. Sean I un intervalo acotado, $f : I \to I$ una aplicación continua y $n \geq 1$. Sean $I_0, \ldots, I_n$ intervalos tales que $I_j \subseteq f(I_{j-1})$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Entonces existe un intervalo $J \subseteq I_0$ tal que $f^n(J) = I_n$ y $f^j(J) \subseteq I_j$ para cada $j = 0, \ldots, n$. Además si $I_0, \ldots, I_n$ son cerrados, entonces J puede se tomado cerrado.

Demostración. Probaremos por inducción sobre n.

1. Para el caso $n = 1$. Tenemos los intervalos I_0 e I_1 con $I_1 \subseteq f(I_0)$ y requerimos probar la existencia de un intervalo $J \subseteq I_0$ tal que $f(J) = I_1$. Escribamos $\overline{I_1} = [a, b]$. Note que

   $$\overline{I_1} \subseteq \overline{f(I_0)} \underset{(*)}{=} f\left(\overline{I_0}\right),$$

   la igualdad en $(*)$ se debe a que f es continua y a que I es un intervalo acotado luego, existen $x, y \in \overline{I_0}$ tales que $a = f(x)$ y $b = f(y)$. Sin perder generalidad podemos suponer que $x \leq y$. Definamos las constantes x' e y' como sigue

   $$\begin{aligned} y' &:= \text{mín}\{t \geq x \mid f(t) = b\} \leq y \\ x' &:= \text{máx}\{t \leq y' \mid f(t) = a\} \geq x \end{aligned}$$

   Hagamos $J' = [x', y']$. Las definiciones de x' e y' aseguran que $f(x') = a$, $f(y') = b$ y que no existen otros puntos en J' tales que sean llevados por f hacia a o hacia b. Notemos que

   $$f(J') = f([x', y']) = [a, b] = \overline{I_1} \tag{3.6}$$

   Si I_1 es cerrado basta tomar $J = J'$ pues así $a \in I_1 \subseteq f(I_0)$ y con ello x puede ser tomado inicialmente en I_0, análogamente $y \in I_0$, lo cual implica que $J \subseteq [x, y] \subseteq I_0$. Además, de 3.6 se tiene que $f(J) = I_1$.

   Caso contrario se puede tomar J como alguno de los siguientes intervalos: $\langle x', y' \rangle$, $\langle x', y']$ o $[x', y' \rangle$ según sea que $x \notin I_0$ o $y \notin I_0$, y se procede de manera análoga.

2. Supongamos que el lema se verifica para $n-1$. Sean los intervalos $I_0, \ldots, I_n$ tales que $I_j \subseteq f(I_{j-1})$ para cada $j = 1, \ldots, n$. De la hipótesis inductiva en $I_0, \ldots, I_{n-1}$ existe un

intervalo $K \subseteq I_0$ tal que $f^{n-1}(K) = I_{n-1}$ y $f^j(K) \subseteq I_j$ para cada $j = 0, \ldots, n-1$. Por otro lado note que $I_n \subseteq f(I_{n-1}) = f^n(K)$, entonces aplicaremos el caso 1 en la función $g = f^n$ y en los intervalos K e I_n así, existe un intervalo $J \subseteq K$ tal que $g(J) = I_n$. Tal intervalo J es el buscado como se puede terminar de comprobar fácilmente.

□

Lema 3.3.2. Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una aplicación topológicamente transitiva.

1. Si entre a y b solo uno de ellos es no accesible, entonces dicho punto es fijo. Si ambos son no accesibles entonces sucede una de las dos siguientes situaciones:
   - $f(a) = a$ y $f(b) = b$,
   - $f(a) = b$ y $f(b) = a$.
2. Si a (resp. b) es un punto fijo no accesible, entonces existe una sucesión decreciente (resp. creciente) de puntos fijos $(x_n)_n$ que converge a a (respect. a b). Más aun $f\big|_{[x_{n+1}, x_n]}$ es no monótona.

Demostración.

1. Como f es topológicamente transitiva existe $x \in [a, b]$ tal que $[a, b] = \overline{\mathcal{O}_f^+(x)}$. Por otro lado como f es continua y $[a, b]$ es compacto, entonces $f([a, b])$ también es compacto, en particular es cerrado; además como $\mathcal{O}_f^+(x) \subseteq f([a, b])$ entonces $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} \subseteq f([a, b])$. Luego, $[a, b] \subseteq f([a, b])$. Si a es no accesible significa en particular que $a \notin f(\langle a, b\rangle)$ y nos quedarían las posibilidades $f(a) = a$ o $f(b) = a$. Análogamente si b es no accesible entonces $f(a) = b$ o $f(b) = b$. Caso contrario, si b es accesible, entonces existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ y algún $x_0 \in \langle a, b\rangle$ tales que $f^{n_0}(x_0) = b$, si suponemos el caso en que $f(b) = a$ entonces $f^{n_0+1}(x_0) = f(b) = a$ y a sería accesible lo cual no es cierto; luego, $f(a) = a$.
2. Trabajaremos las hipótesis sobre a, el otro caso es análogo. Se tiene que $f(a) = a$ y a es no accesible, esto es $a \notin f^n(\langle a, b\rangle)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se presentan dos casos:
   - Si b es no accesible, entonces por el primer ítem, $f(b) = b$, en particular $f(b) \neq a$.
   - Si b es accesible y $f(b) = a$ entonces a sería accesible luego, $f(b) \neq a$.

   En cualquiera de los casos llegamos a que $a \notin f(\langle a, b])$. Tomemos $\varepsilon \in \langle 0, b-a\rangle$. Como f es topológicamente transitiva entonces $f([a, a+\varepsilon]) \nsubseteq [a, a+\varepsilon]$. Así, existe algún $y \in \langle a, a+\varepsilon]$ tal que $f(y) > a+\varepsilon$, en particular $f(y) > y$. Supongamos que $f(x) \geq x$ para todo $x \in [a, y]$ y hagamos

$$z = \min\{y, \min(f([y, b]))\} \neq a.$$

Tenga en cuenta las siguientes desigualdades $a < z \leq y < a + \varepsilon < b$. Note que si $w \in [z, y]$ entonces $f(w) \geq w$ en particular $f(w) \in [z, b]$, por otro lado si $w \in [y, b]$ entonces $z \leq \text{mín}\,(f([y, b])) \leq f(w)$, luego $f(w) \in [z, b]$. En cualquiera de las situaciones se llega a que

$$f([z, b]) = f([z, y]) \cup f([y, b]) \subseteq [z, b]$$

es decir $f([z, b]) \subseteq [z, b]$, pero sabemos que esto no es cierto desde que f es topológicamente transitiva, luego existe algún $x \in \langle a, y]$ tal que $f(x) < x$ y se observa que

$$[x, y] \subseteq [f(x), f(y)] \subseteq f([x, y])$$

en particular f tiene un punto fijo en $[x, y] \subseteq \langle a, a + \varepsilon]$. Es decir siempre podemos encontrar un punto fijo de f a la derecha de a y lo suficientemente cercano desde que ε puede ser tan pequeño como deseemos. Luego, existe una sucesión decreciente de puntos fijos $(x_n)_n$ tal que converge para a. Más aun $f\big|_{[x_{n+1}, x_n]}$ es no monótona, pues de lo contrario tendríamos que $f([x_{n+1}, x_n]) = [x_{n+1}, x_n]$ lo cual no es cierto.

□

Lema 3.3.3. Sea $f : I \to I$ una aplicación continua con I un intervalo compacto y $0 < \varepsilon < l(I)/2$. Para cada $x \in I$ y cada entero $n \geq 0$, existen subintervalos cerrados $J_0, \ldots, J_n$ en I tales que

1. $f(J_j) = J_{j+1}$ para cada $j = 0, \ldots, n-1$
2. $f^j(x) \in J_j$ y $J_j \subseteq [f^j(x) - \varepsilon, f^j(x) + \varepsilon]$ para cada $j = 0, \ldots, n$
3. existe $j_0 \in [\![0, n]\!]$ tal que J_{j_0} contiene a $f^{j_0}(x) - \varepsilon$ o a $f^{j_0}(x) + \varepsilon$.

Más aun, J_0 puede ser tomado como $[x, x + \varepsilon]$ o $[x - \varepsilon, x]$ según sea el caso.

Demostración. Sea $x \in I$ fijo. Usaremos inducción sobre n.

- Cuando $n = 0$: desde que $\varepsilon < l(I)/2$ se tiene que I contiene a $x - \varepsilon$ o a $x + \varepsilon$. Si $x + \varepsilon \in I$ hagamos $J_0 = [x, x + \varepsilon]$ caso contrario hagamos $J_0 = [x - \varepsilon, x]$, luego J_0 es el intervalo buscado.

- Supongamos que el lema se verifica para $n - 1$ y sean $J_0, \ldots, J_{n-1}$ los subintervalos dados por el lema. Si $f(J_{n-1}) \subseteq [f^n(x) - \varepsilon, f^n(x) + \varepsilon]$ hagamos $J_n = f(J_{n-1})$ y así los subintervalos $J_0, \ldots, J_{n-1}, J_n$ son los buscados como se puede corroborar fácilmente. Caso contrario si $f(J_{n-1}) \nsubseteq [f^n(x) - \varepsilon, f^n(x) + \varepsilon]$ tendríamos

$$f^n(x) \in f(J_{n-1}) \nsubseteq [f^n(x) - \varepsilon, f^n(x) + \varepsilon]$$

luego $f(J_{n-1})$ contiene a $f^n(x)-\varepsilon$ o a $f^n(x)+\varepsilon$. Del caso $n=0$ podemos suponer que $J_0=[x,x+\varepsilon]$. Desde que $f(J_j)=J_{j+1}$ para cada $j=0,\ldots,n-2$ entonces por un proceso iterativo se llega a que $J_j=f^j(J_0)$ para cada respectivo j, en particular $J_{n-1}=f^{n-1}(J_0)$, luego $f(J_{n-1})=f^n(J_0)$ es decir, $f^n(J_0)$ contiene a $f^n(x)-\varepsilon$ o a $f^n(x)+\varepsilon$ y podemos definir

$$y=\min\{z\in J_0 : f^n(z)\in\{f^n(x)-\varepsilon, f^n(x)+\varepsilon\}\}$$

Sea $w\in\langle x,y\rangle$ y supongamos que $f^n(w)<f^n(x)-\varepsilon$ entonces por el teorema del valor intermedio hay un $v\in\langle x,w\rangle$ tal que $f^n(v)=f^n(x)-\varepsilon$ siendo $v<y$; esto contradice la minimalidad de y, luego $f^n(x)-\varepsilon<f^n(w)$, análogamente $f^n(w)<f^n(x)+\varepsilon$ así,

$$f^n(x)-\varepsilon<f^n(w)<f^n(x)+\varepsilon \quad \forall\, w\in\langle x,y\rangle$$

se sigue que $f^n([x,y])\subseteq[f^n(x)-\varepsilon,f^n(x)+\varepsilon]$. Hagamos $J_0'=[x,y]$ y $J_j'=f^j(J_0')$ para cada $j=1,\ldots,n$. Los subintervalos $J_0',J_1',\ldots,J_n'$ son los buscados.

□

Lema 3.3.4. Sea $f:[a,b]\to[a,b]$ una aplicación topológicamente transitiva y sea $0<\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$. Suponga que a (resp. b) es un punto fijo no accesible. Entonces hay un $\delta\in\langle 0,\varepsilon\rangle$ tal que para cada $x\in[a,a+\delta]$ (resp. $x\in[b-\delta,b]$) y para cada $n\geq 0$, existen subintervalos cerrados $J_0,\ldots,J_n$ satisfaciendo

1. $J_0\subseteq[a+\delta,b-\delta]$
2. $f(J_j)=J_{j+1}$ para cada $j=0,\ldots,n-1$
3. $J_j\subseteq[f^j(x)-\varepsilon,f^j(x)+\varepsilon]$ para cada $j=0,\ldots,n$
4. existe $j_0\in[\![0,n]\!]$ tal que $l(J_{j_0})\geq\varepsilon/4$

Demostración. Por continuidad de f en a sabemos que existe $r>0$ tal que

$$f(y)<a+\varepsilon \text{ para todo } y\in[a,a+r] \tag{3.7}$$

Como f es topológicamente transitiva, entonces $f([a,a+\varepsilon])$ no está contenido en $[a,a+\varepsilon]$, es decir existe algún $z\in[a,a+\varepsilon]$ tal que $f(z)>a+\varepsilon$, en particular $z\in\langle a+r,a+\varepsilon]$ por 3.7. Además, del lema 3.3.2(2), existe un punto fijo $c\in\langle a,a+\min\{r,\varepsilon/2\}\rangle$. Hagamos $\delta=c-a\in\langle 0,\varepsilon/2]$ y $K=[c,a+\varepsilon]$. Note que $a+\varepsilon<b-\delta$ desde que $\delta\leq\varepsilon/2<(b-a)/4$. Así $K=[c,a+\varepsilon]\subset[a+\delta,b-\delta]$ y $l(K)=a+\varepsilon-c>\varepsilon/2>\varepsilon/4$. Por otro lado note que

$$a<c<a+r<z<a+\varepsilon.$$

Si $w \in K$ se observa que $f(c) = c \leq w \leq a + \varepsilon < f(z)$ luego, por el teorema del valor intermedio existe $t \in \langle c, z\rangle \subseteq K$ tal que $f(t) = w$ y así $w \in f(K)$. Es decir $K \subseteq f(K)$. Fijemos un $x \in [a, a + \delta] = [a, c]$ y un $n \geq 0$. Hagamos $x_k = f^k(x)$ para cada $k \geq 0$. Sea $m = \text{máx}\{k \in [\![0, n]\!] \mid x_0, \ldots, x_k \in [a, c]\}$. Así, se observa que $a \leq x_j \leq c$ para cada $j \in [\![0, m]\!]$ luego,

$$x_j - \varepsilon < x_j \leq c < a + \varepsilon \leq x_j + \varepsilon$$

lo cual nos dice que el intervalo $K = [c, a + \varepsilon] \subseteq [x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon]$ para todo $j \in [\![0, m]\!]$. Por el lema 3.3.1 aplicado en $\underbrace{K, \ldots, K}_{m+1 \text{ veces}}$ sabemos que existe un intervalo cerrado $J \subseteq K$ tal que $f^m(J) = K$ y $f^j(J) \subseteq K$ para cada $j = 0, \ldots, m - 1$, denotemos $J_j = f^j(J)$. Note que

1. $J_0 = J \subseteq K \subseteq [a + \delta, b - \delta]$
2. $f(J_j) = f\left(f^j(J)\right) = f^{j+1}(J) = J_{j+1}$ para cada $j = 0, \ldots, m - 1$
3. $J_j = f^j(J) \subseteq K \subseteq [x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon] = [f^j(x) - \varepsilon, f^j(x) + \varepsilon]$ para cada $j = 0, \ldots, m$
4. para $j_0 = m$ se tiene $l\left(J_{j_0}\right) = l\left(f^m(J)\right) = l(K) \geq \varepsilon/4$.

Si $m = n$ el lema quedaría probado. Caso contrario si $m < n$ entonces $x_{m+1} > c$ además, como $x_m \in [a, c] \subseteq [a, a + r]$ entonces por 3.7 se tiene que $f(x_m) < a + \varepsilon$, así $c < x_{m+1} < a + \varepsilon$. Luego, $x_{m+1} \in K$ y como $l(K) > \varepsilon/2$ se tiene que K contiene a $x_{m+1} - \frac{\varepsilon}{4}$ o a $x_{m+1} + \frac{\varepsilon}{4}$. Podemos aplicar el lema 3.3.3 a x_{m+1}, $\varepsilon/4$ y $n - m - 1$ y vemos que existen subintervalos cerrados $J'_{m+1}, \ldots, J'_n$ tales que

1. $J'_{m+1} \subseteq K$
2. $f(J'_j) = J'_{j+1}$ para cada $j = m + 1, \ldots, n - 1$
3. $x_j \in J'_j$ y $J'_j \subseteq \left[x_j - \frac{\varepsilon}{4}, x_j + \frac{\varepsilon}{4}\right]$ para cada $j = m + 1, \ldots, n$
4. existe $j_0 \in [\![m + 1, n]\!]$ tal que J'_{j_0} contiene a $x_{j_0} - \frac{\varepsilon}{4}$ o a $x_{j_0} + \frac{\varepsilon}{4}$ y así, $l\left(J'_{j_0}\right) \geq \varepsilon/4$.

Podemos volver a usar el lema 3.3.1, pero esta vez en $J_0, J_1, \ldots, J_{m-1}, J_m = K, J'_{m+1}$, así, existe un intervalo cerrado $J' \subseteq J_0$ tal que $f^{m+1}(J') = J'_{m+1}$, y $f^j(J') \subseteq J_j$ para $j = 0, \ldots, m$. Hagamos $J'_j = f^j(J')$ para cada $j = 0, \ldots, m$. El lema se verifica para $J'_0, \ldots, J'_m, J'_{m+1}, \ldots, J'_n$, pues

1. $J'_0 \subseteq J_0 \subseteq [a + \delta, b - \delta]$
2. $f(J'_j) = J'_{j+1}$ para cada $j = 0, \ldots, n - 1$
3. $J'_j \subseteq [x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon] = [f^j(x) - \varepsilon, f^j(x) + \varepsilon]$ para cada $j = 0, \ldots, n$
4. existe $j_0 \in [\![m + 1, n]\!] \subseteq [\![0, n]\!]$ tal que $l\left(J'_{j_0}\right) \geq \varepsilon/4$.

□

Teorema 3.3.1. Si la aplicación $f : I \to I$ es topológicamente mixing donde I es un intervalo compacto entonces, f tiene la propiedad de especificación.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, considere $0 < \varepsilon_0 < \min\{\varepsilon, l(I)/4\}$ y escribamos $I = [a, b]$. Se presentan 4 casos:

1. Tanto a como b son accesibles
2. a es no accesible y b sí lo es
3. b es no accesible y a sí lo es
4. Tanto a como b son no accesibles.

Trabajaremos sobre el caso 2, tomemos $0 < \delta < \varepsilon_0$ como en el lema 3.3.4 y hagamos $I_0 = [a + \delta, b]$. Fijemos un número entero r tal que $\dfrac{b-a}{r} < \dfrac{\varepsilon_0}{8}$ y definamos

$$A_k = \left\langle a + \frac{k(b-a)}{r}, a + \frac{(k+1)(b-a)}{r} \right\rangle \quad \forall\, k \in [\![0, r-1]\!]$$

Note que la familia $\{A_k\}_{k=0}^{r-1}$ forma una partición finita de I (salvo los extremos de cada intervalo A_k) con $l(A_k) = (b-a)/r < \varepsilon_0/8$ para cada $k = 0, \ldots, r-1$.
Por la proposición 3.3.3, para cada $k \in [\![0, r-1]\!]$ existe un entero N_k tal que $I_0 \subseteq f^n(A_k)$ para todo $n \geq N_k$. Hagamos $N = \max\{N_0, \ldots, N_{r-1}\}$.

Afirmación 1: Si $J_0, J_1, \ldots, J_m$ son $m+1$ intervalos tales que $f(J_i) = J_{i+1}$ para todo $i \in [\![0, m-1]\!]$ entonces

$$\exists\, i \in [\![0, m]\!],\ l(J_i) \geq \varepsilon_0/4 \Longrightarrow I_0 \subseteq f^n(J_m)\ \forall\, n \geq N \tag{3.8}$$

En efecto, si algún J_i es tal que $l(J_i) \geq \varepsilon_0/4$ entonces J_i debe contener a algún A_j para algún $j \in [\![0, r-1]\!]$ pues $l(A_j) < \varepsilon_0/8$ así, para $n \geq N$ se tiene $I_0 \subseteq f^n(A_j) \subseteq f^n(J_i)$. Si $i = m$ entonces se concluye la afirmación, caso contrario si $0 \leq i < m$ entonces se tiene que $f^n(J_m) = f^{n(m-i)}(J_i)$ para cada $n \geq 0$ desde que $J_m = f^{m-i}(J_i)$ así, tomando en particular $n \geq N$ se observa que $n(m-i) \geq N(m-i) \geq N$ luego, $I_0 \subseteq f^n(J_m)$.

Afirmación 2: Sea $x \in I$ y $m \geq 0$, existen intervalos cerrados $J_0, \ldots, J_m$ tales que

1. $J_0 \subseteq I_0$
2. $f(J_j) = J_{j+1}$ para cada $j = 0, \ldots, m-1$
3. $J_j \subseteq [f^j(x) - \varepsilon, f^j(x) + \varepsilon]$ para cada $j = 0, \ldots, m$
4. existe $j_0 \in [\![0, m]\!]$ tal que $l\,(J_{j_0}) \geq \varepsilon/4$

En efecto, si $x \in I_0 = [a + \delta, b]$ tomemos $J_0, \ldots, J_m$ como en el lema 3.3.3 los cuales satisfacen 2 y 3, además existe $j_0 \in [\![0, m]\!]$ tal que J_{j_0} contiene a $f^{j_0}(x) - \varepsilon$ o a $f^{j_0}(x) + \varepsilon$, y como $f^{j_0}(x) \in J_{j_0}$ entonces $l(J_{j_0}) \geq \varepsilon > \varepsilon/4$ con lo cual se verifica 4. Para 1 note que J_0 contiene a x y $l(J_0) = \varepsilon$ desde que J_0 puede ser tomado como $[x, x+\varepsilon]$ o $[x-\varepsilon, x]$ según sea el caso y como $x \in I_0$ con $l(I_0) = b-a-\delta > 3\varepsilon$ entonces $J_0 \subseteq I_0$. Si $x \in [a, a+\delta]$ tomemos $J_0, \ldots, J_m$ como en el lema 3.3.4 los cuales verifican los cuatro puntos requeridos.

Afirmación 3: Sean $x_1, \ldots, x_p$ puntos arbitrarios en I y sean intervalos enteros $[\![a_j, b_j]\!]$ con $j = 1, \ldots, p$ tales que $a_{j+1} - b_j \geq N$ para todo $j \in [\![1, p-1]\!]$. Entonces existen intervalos cerrados $(J_j)_{a_1 \leq j \leq b_p}$ tales que

1. $J_{a_1} \subseteq I_0$
2. $f(J_j) = J_{j+1}$ para cada $j = a_1, \ldots, b_p - 1$
3. $J_j \subseteq [f^j(x_k) - \varepsilon, f^j(x_k) + \varepsilon]$ para cada $j = a_k, \ldots, b_k$ y para todo $k = 1, \ldots, p$
4. $I_0 \subseteq f^n(J_{b_p})$ para todo $n \geq N$.

probaremos la afirmación 3 por inducción sobre p.

- Cuando $p = 1$, se tiene x_1 en I y el intervalo entero $[\![a_1, b_1]\!]$. Aplicamos la afirmación 2 en $x = f^{a_1}(x_1)$ y $m = b_1 - a_1$ así, tenemos los intervalos cerrados $K_0, \ldots, K_m$ tales que satisfacen lo siguiente:

  I. $K_0 \subseteq I_0$
  II. $f(K_j) = K_{j+1}$ para cada $j = 0, \ldots, m-1$
  III. $K_j \subseteq [f^j(x) - \varepsilon, f^j(x) + \varepsilon]$ para cada $j = 0, \ldots, m$
  IV. existe $j_0 \in [\![0, m]\!]$ tal que $l(K_{j_0}) \geq \varepsilon/4$

  Basta hacer el cambio $J_j = K_{j-a_1}$ para cada $j = a_1, \ldots, b_1$; es decir, $K_0 = J_{a_1}, \ldots,$ $K_m = J_{b_1}$, los puntos 1 y 2 se verifican inmediatamente, para ver el punto 3 note que $J_j = K_{j-a_1} \subseteq [f^{j-a_1}(x) - \varepsilon, f^{j-a_1}(x) + \varepsilon] = [f^j(x_1) - \varepsilon, f^j(x_1) + \varepsilon]$. El punto 4 sale inmediatamente a partir de la afirmación 1 pues $l(J_{j_0+a_1}) = l(K_{j_0}) \geq \varepsilon/4$.

- Supongamos que la afirmación 3 se verifica para $p-1$ y sean $J_{a_1}, \ldots, J_{b_{p-1}}$ los intervalos dados por la afirmación. Apliquemos la afirmación 2 en $x = f^{a_p}(x_p)$ y $m = b_p - a_p$ así, de manera similar a lo hecho en el caso $p = 1$, hay intervalos cerrados $J'_{a_p}, \ldots, J'_{b_p}$ tales que

  I. $J'_{a_p} \subseteq I_0$
  II. $f(J'_j) = J'_{j+1}$ para cada $j = a_p, \ldots, b_p - 1$
  III. $J'_j \subseteq [f^j(x_p) - \varepsilon, f^j(x_p) + \varepsilon]$ para cada $j = a_p, \ldots, b_p$
  IV. $I_0 \subseteq f^n(J'_{b_p})$ para todo $n \geq N$

Para $j \in [\![b_{p-1}+1, a_p]\!]$ hagamos $J_j = f^{j-b_{p-1}}(J_{b_{p-1}})$. Como $a_p - b_{p-1} \geq N$ entonces

$$I_0 \subseteq f^{a_p-b_{p-1}}(J_{b_{p-1}}) = J_{a_p} = f(J_{a_p-1})$$

Luego podemos aplicar el lema 3.3.1 en $J_{a_1}, \ldots, J_{b_{p-1}}, J_{b_{p-1}+1}, \ldots, J_{a_p-1}, J'_{a_p}$ así, existe un intervalo cerrado $K \subseteq J_{a_1}$ tal que $f^{a_p-a_1}(K) = J'_{a_p}$ y $f^{j-a_1}(K) \subseteq J_j$ para cada $j \in [\![a_1, a_p-1]\!]$, luego para cada $j \in [\![a_1, a_p-1]\!]$ podemos escribir $J'_j = f^{j-a_1}(K)$. Se sigue que $J'_{a_1}, \ldots, J'_{b_p}$ es la secuencia buscada de intervalos cerrados pues

I. $J'_{a_1} = K \subseteq J_{a_1} \subseteq I_0$

II. $f(J'_j) = J'_{j+1}$ para cada $j = a_1, \ldots, b_p - 1$

III. $J'_j \subseteq [f^j(x_k) - \varepsilon, f^j(x_k) + \varepsilon]$ para cada $j = a_k, \ldots, b_k$ y para todo $k = 1, \ldots, p$

IV. $I_0 \subseteq f^n(J'_{b_p})$ para todo $n \geq N$

Ahora probaremos que f satisface la propiedad de especificación. Sean $x_1, \ldots, x_p \in I$, sean los p intervalos enteros $[\![a_j, b_j]\!]$ con $a_{j+1} - b_j \geq N$ para cada $j =, 1 \ldots, p-1$ y sea $q \geq N + b_p - a_1$. Sean $J_{a_1}, \ldots, J_{b_p}$ los intervalos cerrados dados por la afirmación 3, como $I_0 \subseteq f^n(J_{b_p})$ para todo $n \geq N$ entonces tenemos $J_{a_1} \subseteq I_0 \subseteq f^{q-b_p+a_1}(J_{n_p}) = f^q(J_{a_1})$ así, $J_{a_1} \subseteq f^q(J_{a_1})$ luego, existe $x \in J_{a_1}$ tal que $f^q(x) = x$, además para cada $k = 1, \ldots, p$ y para todo $j = a_k, \ldots, b_k$ se cumple que $f^j(x) \in f^j(J_{a_1}) = J_j \subseteq [f^j(x_k) - \varepsilon, f^j(x_k) + \varepsilon]$ o lo que es equivalente $d(f^j(x), f^j(x_k)) \leq \varepsilon$. Esto prueba el teorema para el caso 2. Para los demás casos basta considerar el intervalo I_0 como sigue

$$\begin{aligned} I_0 &= [a, b] \text{ en el caso 1} \\ I_0 &= [a, b-\delta] \text{ en el caso 3} \\ I_0 &= [a+\delta, b-\delta] \text{ en el caso 4} \end{aligned}$$

y proceder de forma análoga a lo trabajado en el caso 2. Tenga en cuenta que en el caso 4 se tiene que tanto a como b son no accesibles, esto implica como consecuencia del lema 3.3.2(1), que a y b son puntos fijos de f^2; así que en la prueba de este teorema ha de considerarse la aplicación f^2 en vez de f, más aun sabiendo que f^2 es topológicamente mixing desde que f lo es, con lo cual se verifica que f^2 tiene la propiedad de especificación luego, por la proposición 3.1.1(1) se tiene que f tiene la propiedad de especificación. $\square$

Ejemplo 3.3.1. El mapeo carpa tiene la propiedad de especificación. En efecto, del ejemplo 1.1.10 se tiene que el mapeo carpa es topológicamente mixing y por el teorema 3.3.1 se concluye que tiene la propiedad de especificación.

Ejemplo 3.3.2. El mapeo logístico tiene la propiedad de especificación. En efecto, recordemos que este mapeo viene dado por $g : [0, 1] \to [0, 1]$ con $g(x) = 4x(1-x)$. Recordemos que el mapeo carpa $f : [0,1] \to [0,1]$ definido por $f(x) = 1 - |2x - 1|$ es topológicamente conjugado al mapeo logístico vía el homeomorfismo $\phi : [0,1] \to [0,1]$ dado por $\phi(x) = \sin^2(\pi x/2)$ y como el mapeo carpa tiene la propiedad de especificación entonces el mapeo logístico también lo tiene en vista de la proposición 3.1.1(2).

Capítulo 4

Unicidad de medidas de máxima entropía

Hasta ese punto, hemos abordado el problema de la existencia de las medidas de máxima entropía. Este hecho se tiene garantizado gracias a la propiedad de expansividad. Ahora, nos toca enfrentamos al análisis de la unicidad de estas medidas. Para abordar este tema, necesitamos introducir los conceptos de conjuntos generadores y conjuntos separados. Estas ideas fundamentales nos brindarán la oportunidad de presentar dos nuevos enfoques para definir la entropía topológica para una aplicación continua. Estas dos nuevas definiciones son equivalentes a aquella que vimos en el capítulo 1. Además, aprovecharemos la propiedad de especificación para establecer algunas desigualdades de gran relevancia. Estas desigualdades serán de vital importancia en el teorema central (teorema 4.3.1). La elaboración de este capítulo se basa en las referencias bibliográficas (Oliveira and Viana, 2014), (Bowen, 1974) y (Katok and Hasselblatt, 1995).

4.1. Conjuntos generadores y conjuntos separados

A continuación presentamos la definición de entropía topológica de Bowen-Dinaburg. Sea $f : M \to M$ una transformación continua en el espacio métrico compacto (M, d). A partir de la distancia d, definimos una sucesión de métricas $\left\{d_n^f\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ en M como sigue:

$$d_n^f(x, y) = \max_{0\leq j\leq n-1} d\left(f^j(x), f^j(y)\right). \tag{4.1}$$

Sucede que d_n^f mide la distancia entre los segmentos de órbitas $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ y $\{y, f(y), \ldots, f^{n-1}(y)\}$. La bola abierta para la métrica d_n^f será denotada por $B_f(x, \varepsilon, n)$; esto es,

$$B_f(x, \varepsilon, n) = \{y \in M : d_n^f(x, y) < \varepsilon\}. \tag{4.2}$$

En este sentido note que $B_f(x, \varepsilon, n) = \{y \in M : d\,(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon \;\forall\, j = 0, \ldots, n-1\}$.

Dados $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, diremos que un conjunto $E \subseteq M$ es un (n, ε)-*generador* de M, si para todo $x \in M$ existe $a \in E$ tal que $d_n^f(x, a) < \varepsilon$. Es decir,

$$M \subseteq \bigcup_{a \in E} B_f(a, n, \varepsilon).$$

Note que la colección $\{B_f(x, n, \varepsilon) : x \in M\}$ es una cobertura abierta de M pues

$$M \subseteq \bigcup_{x \in M} B_f(x, n, \varepsilon)$$

luego, por compacidad dicha cobertura admite una subcobertura finita; esto es, podemos encontrar una sucesión finita $(x_j)_{j=1}^m \subseteq M$ tal que

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B_f(x_j, n, \varepsilon)$$

y con ello basta considerar $E = (x_j)_{j=1}^m$ para darnos cuenta que siempre existen conjuntos (n, ε)-generadores *finitos*. Denotamos por $g_n(f, \varepsilon, M)$ al menor cardinal de un conjunto (n, ε)-generador de M; esto es,

$$g_n(f, \varepsilon, M) = \min\{\operatorname{card}(E) : E \text{ es un } (n, \varepsilon)\text{-generador de } M\}$$

Definamos

$$g(f, \varepsilon, M) = \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, M) \tag{4.3}$$

Note que si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ entonces todo conjunto (n, ε_1)-generador también es (n, ε_2)-generador pues se verifica la siguiente implicación

$$d_n^f(x, a) < \varepsilon_1 \Longrightarrow d_n^f(x, a) < \varepsilon_2.$$

Por tanto $g_n(f, \varepsilon_2, M) \leq g_n(f, \varepsilon_1, M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y pasando al límite nos queda $g(f, \varepsilon_2, M) \leq g(f, \varepsilon_1, M)$. Esto garantiza que el límite

$$g(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} g(f, \varepsilon, M) \tag{4.4}$$

exista.

También introducimos la siguiente noción dual. Dados $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, decimos que un conjunto $E \subseteq M$ es (n, ε)-*separado* si dados $x, y \in E$ se cumple $d_n^f(x, y) \geq \varepsilon$; es decir, existe $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $d\left(f^j(x), f^j(y)\right) \geq \varepsilon$. Denotamos por $s_n(f, \varepsilon, M)$ al mayor cardinal de un conjunto (n, ε)-separado; esto es,

$$s_n(f, \varepsilon, M) = \max\{\operatorname{card}(E) : E \text{ es un conjunto } (n, \varepsilon)\text{-separado}\}$$

Definimos

$$s(f, \varepsilon, M) = \limsup_{n} \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, M) \tag{4.5}$$

Note que si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ entonces, todo conjunto (n, ε_2)-separado también es (n, ε_1)-separado pues se verifica la siguiente implicación

$$d_n^f(x, y) \geq \varepsilon_2 \Longrightarrow d_n^f(x, y) \geq \varepsilon_1.$$

Por tanto $s_n(f, \varepsilon_2, M) \leq s_n(f, \varepsilon_1, M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y pasando al límite nos queda $s(f, \varepsilon_2, M) \leq s(f, \varepsilon_1, M)$. En particular el límite

$$s(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} s(f, \varepsilon, M). \tag{4.6}$$

existe.

Los límites descritos en 4.4 y 4.6 representan, respectivamente, la g-entropía topológica de f desarrollada por medio de conjuntos generadores y la s-entropía topológica de f desarrollada a través de conjuntos separados. Aunque en principio no parezca evidente, dichos límites resultan ser el mismo valor, esto se muestra en la proposición 4.1.1 con ayuda del lema 4.1.1.

Lema 4.1.1. *$g_n(f, \varepsilon, M) \leq s_n(f, \varepsilon, M) \leq g_n(f, \varepsilon/2, M)$ para todo $n \geq 1$ y todo $\varepsilon > 0$.*

Demostración. Sea $E \subseteq M$ un conjunto (n, ε)-separado con cardinalidad máxima. Note que para cualquier $y \in M - E$, se tiene que $E \cup \{y\}$ no es separado luego, existe $x \in E$ tal que $d_n^f(x, y) < \varepsilon$. De esta manera se verifica que E es un conjunto (n, ε)-generador de M, lo cual implica que

$$g_n(f, \varepsilon, M) \leq \operatorname{card}(E) = s_n(f, \varepsilon, M). \tag{4.7}$$

Por otra parte, sean $E' \subseteq M$ un conjunto (n, ε)-separado y $F \subseteq M$ un conjunto $(n, \varepsilon/2)$-generador de M. De la definición de F se garantiza que para cualquier $x \in E'$ existe algún punto $y_x \in F$ tal que $d_n^f(x, y_x) < \varepsilon/2$; con ello, definamos una aplicación $\varphi : E' \to F$ tal que $\varphi(x) = y_x$.

Afirmación: La aplicación φ es inyectiva. En efecto, suponga que $x_1, x_2 \in E'$ son tales que $\varphi(x_1) = y = \varphi(x_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} d_n^f(x_1, x_2) &\leq d_n^f(x_1, y) + d_n^f(y, x_2) \\ &= d_n^f(x_1, y_{x_1}) + d_n^f(y_{x_2}, x_2) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned} \tag{4.8}$$

y como E' es un conjunto (n, ε)-separado, entonces la relación 4.8 implica que $x_1 = x_2$. Por tanto, φ es inyectiva.

De la afirmación anterior se sigue que card $(E') \leq$ card (F) y como E' y F fueron tomados arbitrarios, podemos más particularmente tomarlos con cardinalidad máxima y mínima respectivamente con lo cual obtenemos

$$s_n(f, \varepsilon, M) \leq g_n(f, \varepsilon/2, M). \tag{4.9}$$

De 4.7 y 4.9 se tiene probado el lema. □

Proposición 4.1.1. $g(f) = s(f)$.

Demostración. Usaremos el lema 4.1.1. Dado cualquier $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\begin{aligned} g(f, \varepsilon, M) = \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, M) &\leq \overbrace{\limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, M)}^{s(f,\varepsilon,M)} \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon/2, M) = g(f, \varepsilon/2, M) \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ obtenemos

$$g(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} g(f, \varepsilon, M) \leq \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} s(f, \varepsilon, M)}_{s(f)} \leq \lim_{\varepsilon \to 0} g(f, \varepsilon/2, M) = g(f)$$

y se observa que $g(f) = s(f)$. □

En la proposición 4.1.1 se prueba que $g(f) = s(f)$ y justamente Rufus Bowen y Efim Dinaburg definen la *entropía topológica* de una transformación continua $f : M \to M$ de un espacio métrico compacto M como dicho valor.

Proposición 4.1.2. Si M es un espacio métrico compacto entonces,

$$h(f) = g(f) = s(f).$$

Demostración. Gracias a la proposición 4.1.1 basta mostrar que $s(f) \leq h(f) \leq g(f)$.

Sean $\varepsilon > 0$ y $n \geq 1$. Considere $E \subseteq M$ un conjunto (n, ε)-separado con cardinalidad máxima y sea α una cobertura abierta de M con diámetro menor que ε. Sean x e y elementos de E tales que están en el mismo elemento de α^n; esto es, existe una sucesión $(A_j)_{j=0}^{n-1} \subseteq \alpha$ tal que

$$x, y \in \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(A_j)$$

entonces se tiene que $f^j(x), f^j(y) \in A_j$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$ luego,

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq j \leq n-1} d(f^j(x), f^j(y)) \leq \max_{0 \leq j \leq n-1} diam(A_j) \leq diam(\alpha) < \varepsilon$$

lo cual nos dice que cada elemento de α^n contiene como máximo a un elemento de E y por tanto obtenemos que

$$s_n(f, \varepsilon, M) = \operatorname{card}(E) \leq N(\alpha^n) \tag{4.10}$$

para cada $n \geq 1$. Por consiguiente,

$$s(f, \varepsilon, M) = \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, M) \leq \lim_n \frac{1}{n} \log N(\alpha^n) = h(f, \alpha) \leq h(f).$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ obtenemos

$$s(f) \leq h(f). \tag{4.11}$$

Para verificar la otra desigualdad, dada cualquier cobertura abierta α de M, sea $\varepsilon > 0$ un número de Lebesgue para α . Sea $E \subseteq M$ un conjunto (n, ε)-generador de M con cardinalidad mínima. De la definición de número de Lebesgue, para cada $x \in E$ y para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$ existe $A_{x,j} \in \alpha$ tal que $B(f^j(x), \varepsilon) \subseteq A_{x,j}$, entonces

$$B_f(x, n, \varepsilon) \subseteq \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(A_{x,j}).$$

De la hipótesis de que E es un conjunto (n, ε)-generador de M se tiene que

$$M \subseteq \bigcup_{x \in E} B_f(x, n, \varepsilon) \subseteq \bigcup_{x \in E} \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(A_{x,j}),$$

esto significa que la familia $\mathcal{U} = \left\{\cap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(A_{x,j}) : x \in E\right\}$ es una cobertura abierta de M además, como $\mathcal{U} \subseteq \alpha^n$ se sigue que $N(\alpha^n) \leq \operatorname{card}(\mathcal{U}) \leq \operatorname{card}(E) = g_n(f, \varepsilon, M)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ luego,

$$\begin{aligned} h(f, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} \log N(\alpha^n) &\leq \liminf_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, M) \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, M) = g(f, \varepsilon, M). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ obtenemos que $h(f, \alpha) \leq g(f)$. Y como la cobertura α es arbitraria, se sigue que

$$h(f) \leq g(f). \tag{4.13}$$

De 4.11 y 4.13 se prueba la proposición. $\square$

La proposición 4.1.2 muestra que esta definición de entropía topológica es equivalente con aquella que vimos en el capítulo 1 vía coberturas abiertas.

Observación 4.1.1. El resultado de la proposición 4.1.2 puede ser reescrito como sigue

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n} \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n} \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, M)$$

sin embargo, a partir de la prueba de dicha proposición es posible obtener una igualdad análoga en la que aparezca $\liminf$ en lugar de $\limsup$, esto se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 4.1.1. Si $f : M \to M$ es una transformación continua en el espacio métrico compacto M, entonces

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n} \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n} \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, M)$$

Demostración. La relación 4.12 nos dice que

$$h(f, \alpha) \leq \liminf_{n} \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, M)$$

para todo $\varepsilon > 0$ tal que sea un número de Lebesgue para la cobertura α; luego, tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ y tomando supremo sobre las coberturas α de M, vemos que

$$h(f) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n} \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, M). \tag{4.14}$$

Usando la primera desigualdad del lema 4.1.1 tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n} \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, M) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n} \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, M) \tag{4.15}$$

Además, es claro que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n} \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, M) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n} \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, M) = h(f). \tag{4.16}$$

De 4.14, 4.15 y 4.16 se tiene

$$h(f) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n} \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, M) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n} \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, M) \leq h(f)$$

lo cual prueba el corolario. □

Cálculo y propiedades

Proposición 4.1.3. Si $f : M \to M$ es una transformación continua en el espacio métrico compacto M, entonces $h(f^k) = kh(f)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y sean $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$.

Afirmación 1: Todo conjunto (nk, ε)-generador de M para f es (n, ε)-generador de M para f^k. En efecto: Sea $E \subseteq M$ un conjunto (nk, ε)-generador de M para f y sea $x \in M$ entonces, existe $a \in E$ tal que $d^f_{nk}(x, a) < \varepsilon$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} d^{f^k}_n(x, a) &= \max_{0 \leq j \leq n-1} d\left(f^{kj}(x), f^{kj}(a)\right) \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq nk-1} d\left(f^{j}(x), f^{j}(a)\right) = d^f_{nk}(x, a), \end{aligned}$$

así, $d^{f^k}_n(x, a) < \varepsilon$ y E es (n, ε)-generador de M para f^k lo cual verifica la afirmación 1. En consecuencia

$$g_n(f^k, \varepsilon, M) \leq g_{nk}(f, \varepsilon, M).$$

Luego,

$$\begin{aligned} g(f^k, \varepsilon, M) &= \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f^k, \varepsilon, M) \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n} \log g_{nk}(f, \varepsilon, M) = kg(f, \varepsilon, M). \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ nos queda que

$$h(f^k) \leq kh(f). \tag{4.17}$$

Para obtener la otra desigualdad, notemos que como f^j es continua en M y como M es compacto, entonces f^j es uniformemente continua para cada $j \in \mathbb{N}$. En particular para $j = 0, 1, \ldots, k-1$ existe $\delta_j > 0$ tal que $d(x, y) < \delta_j$ implica $d(f^j(x), f^j(y)) < \varepsilon$. Podemos tomar $\delta = \min_{0 \leq j \leq k-1} \delta_j$ así,

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d\left(f^j(x), f^j(y)\right) < \varepsilon \text{ para todo } j = 0, 1, \ldots k-1. \tag{4.18}$$

Afirmación 2: Todo conjunto (n, δ)-generador de M para f^k es (nk, ε)-generador de M para f. En efecto: Sea $E \subseteq M$ un conjunto (n, δ)-generador de M para f^k y sea $x \in M$ entonces, existe $a \in E$ tal que $d^{f^k}_n(x, a) < \delta$; es decir,

$$d\left(f^{ki}(x), f^{ki}(a)\right) < \delta \text{ para cada } i = 0, 1, \ldots, n-1$$

luego, por 4.18 se tiene que

$$d\left(f^{j+ki}(x), f^{j+ki}(y)\right) < \varepsilon \text{ para todo } j = 0, 1, \ldots k-1, \tag{4.19}$$

para cada $i = 0, 1, \ldots, n-1$. La relación 4.19 es equivalente a escribir

$$d\left(f^{l}(x), f^{l}(y)\right) < \varepsilon \text{ para todo } l = 0, 1, \ldots nk-1, \tag{4.20}$$

así, $d^f_{nk}(x, a) < \varepsilon$ y E es (nk, ε)-generador de M para f, lo cual verifica la afirmación 2. Por tanto

$$g_{nk}(f, \varepsilon, M) \leq g_n(f^k, \delta, M).$$

Al dividir por n y tomar límite superior nos queda

$$kg(f, \varepsilon, M) \leq g(f^k, \delta, M),$$

de donde podemos hacer tender a ε y δ para cero, obteniendo $kg(f) \leq g(f^k)$ luego,

$$kh(f) \leq h(f^k). \tag{4.21}$$

De 4.17 y 4.21 se verifica la proposición. □

Proposición 4.1.4. Si M es un espacio métrico compacto y $f : M \to M$ es un homeomorfismo, entonces $h(f^{-1}) = h(f)$. En consecuencia. $h(f^k) = |k|\, h(f)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Sea α una cobertura abierta de M. Para todo $n \geq 1$ denotemos

$$\alpha^n_+ = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) \quad \text{y} \quad \alpha^n_- = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{i}(\alpha)$$

Observe que $\alpha^n_- = f^{n-1}(\alpha^n_+)$. Más aun β es una subcobertura finita de α^n_+ si y solamente si $f^{n-1}(\beta)$ es una subcobertura finita de α^n_-. Como ambas coberturas tienen la misma cardinalidad, se sigue que $H(\alpha^n_+) = H(\alpha^n_-)$. Por tanto

$$h(f, \alpha) = \lim_n \frac{1}{n} H(\alpha^n_+) = \lim_n \frac{1}{n} H(\alpha^n_-) = h(f^{-1}, \alpha)$$

Tomando supremo sobre las coberturas α de M tendremos que $h(f) = h(f^{-1})$. La segunda parte es consecuencia de la proposición 4.1.3. □

4.2. Desigualdades importantes

Estamos en camino de demostrar el teorema fundamental de este trabajo: El Teorema de Bowen. Este teorema establece que los homeomorfismos expansivos con la propiedad de especificación admiten una única medida de máxima entropía. De esta manera se aborda el problema de la unicidad de las MME. Para establecer el Teorema de Bowen, será necesario examinar algunos resultados previos relacionados con desigualdades técnicas. Estos resultados desempeñarán un papel esencial en la argumentación de dicho teorema. En relación a esta sección enfocada en aspectos puramente técnicos, el lector tiene la opción de omitir su lectura si así lo prefiere.

Lema 4.2.1. Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo en el espacio métrico compacto M con constante de expansividad δ_0. Entonces dado $0 < \varepsilon < \delta_0/2$ y $\delta > 0$ existe un número real $C_{\delta,\varepsilon} > 0$ tal que

$$S_n(f, \delta, M) \leq C_{\delta,\varepsilon} S_n(f, \varepsilon, M)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Note que si $\delta \geq \varepsilon$ entones basta tomar $C_{\delta,\varepsilon} = 1$ pues si E_n es un conjunto (n, δ)-separado, entonces para $x, y \in E_n$ distintos se cumple que $d_n^f(x, y) \geq \delta \geq \varepsilon$, lo cual implica que E_n es un conjunto (n, ε)-separado, así $\operatorname{card}(E_n) \leq S_n(f, \varepsilon, M)$, en particular podemos tomar a E_n con cardinalidad máxima y nos queda $S_n(f, \delta, M) \leq S_n(f, \varepsilon, M)$. En el caso en que $\delta < \varepsilon$, procederemos con los enunciados y las verificaciones de las tres siguientes afirmaciones; esta segmentación permitirá un mayor y mejor entendimiento de las ideas a tratar. Veamos:

Afirmación 1: Existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x, y \in M$ se verifica

$$d_{2N+1}^f\left(f^{-N}(x), f^{-N}(y)\right) \leq 2\varepsilon \Rightarrow d(x, y) < \delta. \tag{4.22}$$

En efecto: Por contradicción supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n, y_n \in M$ tales que

$$d_{2n+1}^f\left(f^{-n}(x_n), f^{-n}(y_n)\right) \leq 2\varepsilon \text{ y } d(x_n, y_n) \geq \delta. \tag{4.23}$$

Sin perder generalidad podemos suponer que las sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ son convergentes en M pues M es compacto y sean x e y sus respectivos límites. Note que al hacer un paso por límite, la condición $d(x_n, y_n) \geq \delta$ nos garantiza que x e y sean distintos, además como

$$d_{2n+1}^f\left(f^{-n}(x_n), f^{-n}(y_n)\right) = \max_{0 \leq j \leq 2n} d\left(f^{j-n}(x_n), f^{j-n}(y_n)\right) \geq d\left(f^{i-n}(x_n), f^{i-n}(y_n)\right)$$

para cada $i = 0, \ldots, 2n$ entonces $d\left(f^j(x_n), f^j(y_n)\right) \leq 2\varepsilon$ para todo $j = -n, \ldots, n$; luego, al tomar límite cuando n tiende a infinito se llega a que $d\left(f^j(x), f^j(y)\right) \leq 2\varepsilon < \delta_0 \; \forall\, j \in \mathbb{Z}$ lo cual contradice la expansividad de f.

Afirmación 2: Existe algún número real $\alpha > 0$ tal que

$$d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow d_{2N+1}^f\left(f^{-N}(x), f^{-N}(y)\right) < \delta \tag{4.24}$$

En efecto: Como $f : M \to M$ es un homeomorfismo, entonces para $-N \leq i \leq N$ se tiene que la aplicación $f^i : M \to M$ también es un homeomorfismo en donde M es un espacio métrico compacto, así f^i es uniformemente continua, luego para $\delta > 0$ existe $\alpha_i > 0$ tal que

$$d(x,y) < \alpha_i \Rightarrow d\left(f^i(x), f^i(y)\right) < \delta.$$

Podemos tomar $\alpha = \text{mín}_{-N\leq i\leq N}\, \alpha_i/2$ así,

$$d(x,y) \leq \alpha \leq \alpha_i/2 < \alpha_i \Rightarrow d\left(f^i(x), f^i(y)\right) < \delta \text{ para todo } -N \leq i \leq N.$$

Eso prueba la afirmación 2.

Sea E un conjunto (n,δ)-separado de cardinalidad máxima y sea F un conjunto (n,ε)-separado de cardinalidad máxima (*en particular F es (n,ε)-generador de M*). Para cada $x \in E$ sabemos que existe $z(x) \in F$ tal que $d_n^f(x, z(x)) < \varepsilon$. Consideremos el conjunto $E_z = \{x \in E : z(x) = z\} \subseteq E$, note que

$$S_n(f,\delta,M) = \text{card}\,(E) \leq \sum_{z\in F} \text{card}\,(E_z) \tag{4.25}$$

Sean $x, y \in E_z$ distintos

Afirmación 3: Se satisface

$$d(x,y) > \alpha \quad \text{o} \quad d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha \tag{4.26}$$

En efecto: Por contradicción supongamos que $d(x,y) \leq \alpha$ y $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$ entonces de la afirmación 2 tenemos que

$$d^f_{2N+1}\left(f^{-N}(x), f^{-N}(y)\right) < \delta \quad \text{y} \quad d^f_{2N+1}\left(f^{-N+n}(x), f^{-N+n}(y)\right) < \delta$$

lo cual significa que

$$d\left(f^j(x), f^j(y)\right) < \delta \text{ para todo } j \in [\![-N, N]\!] \cup [\![n-N, n+N]\!]. \tag{4.27}$$

Con ello podemos apreciar dos casos: $n \leq 2N$ o $n \geq 2N+1$; analizaremos cada caso.

- Supongamos que $n \leq 2N$ entonces $n - N \leq N$ así,

  $$[\![-N, N]\!] \cup [\![n-N, n+N]\!] = [\![-N, n+N]\!] \supseteq [\![0, n-1]\!]$$

  luego, $d\left(f^j(x), f^j(y)\right) < \delta$ para cada $j = 0, \ldots, n-1$ pero esto no es cierto desde que $x, y \in E_z \subseteq E$ y E es (n,δ)-separado. Así, llegamos a una contradicción.

- Supongamos que $n \geq 2N+1$. Como $x, y \in E_z$ se sigue que $z(x) = z = z(y)$ luego, se cumple

  $$d_n^f(x,y) \leq d_n^f(x, z(x)) + d_n^f(z(y), y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Sea $k \in [\![N, n-N-1]\!]$ entonces

$$\begin{aligned} d^f_{2N+1}\left(f^{-N+k}(x), f^{-N+k}(y)\right) &= \max_{0\leq j\leq 2N} d\left(f^{j-N+k}(x), f^{j-N+k}(y)\right) \\ &= \max_{-N+k\leq j\leq N+k} d\left(f^{j}(x), f^{j}(y)\right) \end{aligned}$$

note que $0 \leq -N+k \leq N+k \leq n-1$ luego,

$$d^f_{2N+1}\left(f^{-N+k}(x), f^{-N+k}(y)\right) \leq \max_{0\leq j\leq n-1} d\left(f^{j}(x), f^{j}(y)\right) = d^f_n(x,y) \leq 2\varepsilon$$

y por la afirmación 1 se tiene que $d(f^k(x), f^k(y)) < \delta$ para todo $k \in [\![N, n-N-1]\!]$. Esto último junto con 4.27 nos dice que $d(f^j(x), f^j(y)) < \delta$ para todo $j \in [\![-N, n+N]\!]$ y estamos en la misma situación del caso anterior la cual conlleva a una contradicción.

Por lo que se prueba la afirmación 3.

Escribamos $G_{n,z} = \{(x, f^n(x)) : x \in E_z\}$. Note que si $a = (x, f^n(x))$ y $b = (y, f^n(y))$ con $a \neq b$ entonces por la afirmación 3

$$d(a,b) = \max\left\{d\left(x,y\right), d\left(f^n(x), f^n(y)\right)\right\} \geq \alpha$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(E_z) &= \operatorname{card}(G_{n,z}) \\ &\leq \max\{\operatorname{card}(A) : A \subseteq M\times M,\ d(a,b)\geq\alpha\ \forall\, a\neq b\in A\} =: C_{\delta,\varepsilon} \end{aligned}$$

luego, de 4.25 se tiene que

$$S_n(f,\delta,M) \leq \sum_{z\in F}\operatorname{card}(E_z) \leq \sum_{z\in F} C_{\delta,\varepsilon} = C_{\delta,\varepsilon}\operatorname{card}(F) = C_{\delta,\varepsilon} S_n(f,\varepsilon,M).$$

□

Corolario 4.2.1. Sea $f : M \to M$ una aplicación expansiva en el espacio métrico compacto M con constante de expansividad δ_0 y sea $0 < \delta < \delta_0/2$ entonces

$$h(f) = \lim_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\delta,M).$$

Demostración. Sea $0 < \varepsilon < \delta$ arbitrario, de la primera parte de la demostración del lema 4.2.1 vemos que esta desigualdad implica que

$$S_n(f,\delta,M) \leq S_n(f,\varepsilon,M) \tag{4.28}$$

luego, tomando logaritmo, dividiendo entre n y tomando límite superior nos queda

$$\begin{aligned} S(f,\delta,M) &= \limsup_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\delta,M) \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varepsilon,M) = S(f,\varepsilon,M) \end{aligned}$$

de donde podemos tomar límite cuando ε tiende a cero, quedándonos

$$S(f,\delta,M) \leq s(f) = h(f). \tag{4.29}$$

Por otro lado, del lema 4.2.1 sabemos que $\exists\, C_{\varepsilon,\delta} > 0$ tal que $S_n(f,\varepsilon,M) \leq C_{\varepsilon,\delta} S_n(f,\delta,M)$, podemos de nuevo tomar logaritmo, dividir entre n y tomar límite superior respecto a n con lo que nos queda

$$\begin{aligned} S(f,\varepsilon,M) &= \limsup_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\varepsilon,M) \\ &\leq \limsup_n \frac{1}{n}\log C_{\varepsilon,\delta} + \limsup_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\delta,M) = S(f,\delta,M) \end{aligned}$$

de donde de nuevo, tomando límite cuando ε tiende a cero tenemos

$$h(f) = s(f) \leq S(f,\delta,M). \tag{4.30}$$

Así, de 4.29 y 4.30 se llega a probar que

$$h(f) = S(f,\delta,M) = \limsup_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\delta,M).$$

Por otra parte, con ayuda del corolario 4.1.1 podemos repetir todo el proceso anterior considerando $\liminf_n$ en lugar de $\limsup_n$ con lo cual llegaremos a que

$$h(f) = \liminf_n \frac{1}{n}\log S_n(f,\delta,M).$$

Esto prueba el corolario. □

Lema 4.2.2. Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo en el espacio métrico compacto M con constante de expansividad δ_0 y con la propiedad de especificación. Entonces dado $0 < \varepsilon < \delta_0/6$ existen constantes $k_\varepsilon, K_\varepsilon > 0$ tales que

$$\prod_{j=1}^{m} k_\varepsilon S_{n_j}(f,\varepsilon,M) \leq S_{n_1+\cdots+n_m}(f,\varepsilon,M) \leq \prod_{j=1}^{m} K_\varepsilon S_{n_j}(f,\varepsilon,M)$$

para cualesquiera $n_1, n_2, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$.

Demostración.

1. Sean E un conjunto $(n_1+\cdots+n_m,\varepsilon)$-separado y F_j un conjunto $(n_j,\varepsilon/2)$-separado de cardinalidad **máxima** (*en particular* F_j *es un conjunto* $(n_j,\varepsilon/2)$*-generador de* M), para $x\in E\subseteq M$ hagamos $y_1(x)=x$ y $y_j(x)=f^{n_1+\cdots+n_{j-1}}(x)$ para cada $j=2,\ldots,m$ entonces existe $z_j(x)\in F_j$ tal que $d^f_{n_j}(y_j(x),z_j(x))<\varepsilon/2$.

   Afirmación 1: La aplicación $\varphi:E\to F_1\times\cdots\times F_m$ tal que $\varphi(x)=(z_1(x),\ldots,z_m(x))$ es inyectiva. En efecto: sean $x_a,x_b\in E$ tales que $\varphi(x_a)=\varphi(x_b)$. Note que

$$\begin{aligned}d^f_{n_j}(y_j(x_a),y_j(x_b)) &\le d^f_{n_j}(y_j(x_a),z_j(x_a))+\overbrace{d^f_{n_j}(z_j(x_a),z_j(x_b))}^{0}+d^f_{n_j}(z_j(x_b),y_j(x_b))\\ &= d^f_{n_j}(y_j(x_a),z_j(x_a))+d^f_{n_j}(z_j(x_b),y_j(x_b))\\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.\end{aligned}$$

   Escribiendo de manera explícita cada y_j obtenemos lo siguiente

$$d^f_{n_1}(x_a,x_b)<\varepsilon \quad \text{y} \quad d^f_{n_j}(f^{n_1+\cdots+n_{j-1}}(x_a),f^{n_1+\cdots+n_{j-1}}(x_b))<\varepsilon$$

   para cada $j=2,\ldots,m$. Esta última relación es equivalente a

$$d^f_{n_1+\cdots+n_m}(x_a,x_b)<\varepsilon$$

   y como E es $(n_1+\cdots+n_m,\varepsilon)$-separado entonces $x_a=x_b$, y φ es inyectiva.

   Así,

$$\operatorname{card}(E)\le\operatorname{card}(F_1\times\cdots\times F_m)=\prod_{j=1}^{m}\operatorname{card}(F_j)=\prod_{j=1}^{m}S_{n_j}(f,\varepsilon/2,M).$$

   En particular podemos tomar a E con cardinalidad máxima para obtener

$$S_{n_1+\cdots+n_m}(f,\varepsilon,M)\le\prod_{j=1}^{m}S_{n_j}(f,\varepsilon/2,M)$$

   además por el lema 4.2.1 podemos tomar $K_\varepsilon=C_{\varepsilon/2,\varepsilon}$, luego

$$S_{n_1+\cdots+n_m}(f,\varepsilon,M)\le\prod_{j=1}^{m}K_\varepsilon S_{n_j}(f,\varepsilon,M)$$

2. Si E_j es un conjunto $(n_j,3\varepsilon)$-separado maximal, hagamos

$$a_1=0 \quad \text{y} \quad a_j=n_1+\cdots+n_{j-1}+(j-1)M_\varepsilon \text{ para } j=2,\ldots,m$$

donde M_ε es la constante de espaciamiento dada por la propiedad de especificación. Sea $\mathcal{I} = \{I_j \ : \ j = 1, \ldots, m\}$ la familia de intervalos enteros donde

$$I_j = [\![a_j, b_j]\!] \text{ con } b_j = a_j + n_j - 1$$

note que $a_{j+1} = a_j + n_j + M_\varepsilon$ para cada j entonces $a_{j+1} - b_j = M_\varepsilon + 1 > M_\varepsilon$.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ y consideremos la aplicación $P : \bigcup_{j=1}^m I_j \to M$ dada por $P(t) = f^{t-a_j}(x_j)$ para cada $t \in I_j$ entonces el par $(\mathcal{I}, P)$ es una especificación M_ε-espaciada; con ello, por la propiedad de especificación existe $z = z(x) \in M$ tal que $d(f^n(z), P(n)) < \varepsilon$ para todo $n \in \bigcup_{j=1}^m I_j$, en particular para cada $j = 1, 2, \ldots, m$ tenemos $d(f^n(z), f^{n-a_j}(x_j)) < \varepsilon$ para cada $a_j \leq n \leq a_j + n_j - 1$. Luego se observa que $\max_{a_j \leq n \leq a_j+n_j-1} d(f^n(z), f^{n-a_j}(x_j)) < \varepsilon$ o equivalentemente

$$d^f_{n_j}(f^{a_j}(z), x_j) = \max_{0 \leq k \leq n_j - 1} d(f^{k+a_j}(z), f^k(x_j)) < \varepsilon$$

Sea $E = \{z(x) \ : \ x \in E_1 \times \cdots \times E_m\}$.

Afirmación 2: E es un conjunto $(a_m + n_m, \varepsilon)$-separado.
En efecto: Supongamos que existen $z(x_a), z(x_b) \in E$ tales que $d^f_{a_m+n_m}(z(x_a), z(x_b)) < \varepsilon$. Entonces para $j = 1, \ldots, m$ tenemos

$$\begin{aligned} d^f_{n_j}\left(x_{aj}, x_{bj}\right) &\leq d^f_{n_j}\left(x_{aj}, f^{a_j}[z(x_a)]\right) + d^f_{n_j}\left(f^{a_j}[z(x_a)], f^{a_j}[z(x_b)]\right) \\ &\quad + d^f_{n_j}\left(f^{a_j}[z(x_b)], x_{bj}\right) \\ &< \varepsilon + d^f_{n_j}\left(f^{a_j}[z(x_a)], f^{a_j}[z(x_b)]\right) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Y como

$$d^f_{n_j}\left(f^{a_j}[z(x_a)], f^{a_j}[z(x_b)]\right) \leq d^f_{a_m+n_m}(z(x_a), z(x_b)) < \varepsilon$$

desde que los intervalos $[a_j, \ldots, a_j + n_j - 1]$ están contenidos en $[0, \ldots, a_m + n_m - 1]$ para cada $j = 1, \ldots, m$ entonces en 4.31 se tiene que $d^f_{n_j}\left(x_{aj}, x_{bj}\right) < 3\varepsilon$. Además, E_j es un conjunto $(n_j, 3\varepsilon)$-separado entonces $x_{aj} = x_{bj}$ y esto sucede para cada j, luego se tiene $x_a = x_b$ y con ello $z(x_a) = z(x_b)$ así, se verifica la afirmación.
De la afirmación 2 se observa

$$\begin{aligned} S_{a_m+n_m}(f, \varepsilon, M) &\geq \operatorname{card}(E) \geq \operatorname{card}(E_1 \times \cdots \times E_m) \\ &= \prod_{j=1}^m \operatorname{card}(E_j) = \prod_{j=1}^m S_{n_j}(f, 3\varepsilon, M). \end{aligned}$$

Como $a_m + n_m = n_1 + \cdots + n_m + (m-1)M_\varepsilon$ podemos escribir de manera conveniente

$p_1 = n_1 + \cdots + n_m$ y $p_j = M_\varepsilon$ para cada $j = 2, \ldots, m$ y notamos que

$$a_m + n_m = p_1 + \cdots + p_m,$$

luego, podemos usar el resultado obtenido del ítem (1) aplicado a los números $p_1, \ldots, p_m$ para ver que

$$\begin{aligned}
S_{a_m+n_m}(f, \varepsilon, M) &= S_{p_1+\cdots+p_m}(f, \varepsilon, M) \\
&\leq \prod_{j=1}^{m} K_\varepsilon S_{p_j}(f, \varepsilon, M) \\
&= K_\varepsilon \cdot S_{p_1}(f, \varepsilon, M) \cdot \prod_{j=2}^{m} K_\varepsilon S_{p_j}(f, \varepsilon, M) \\
&= K_\varepsilon \cdot S_{n_1+\cdots+n_m}(f, \varepsilon, M) \cdot \prod_{j=2}^{m} K_\varepsilon S_{M_\varepsilon}(f, \varepsilon, M)
\end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned}
S_{a_m+n_m}(f, \varepsilon, M) &= K_\varepsilon \cdot S_{n_1+\cdots+n_m}(f, \varepsilon, M) \cdot K_\varepsilon^{m-1} S_{M_\varepsilon}(f, \varepsilon, M)^{m-1} \\
&= K_\varepsilon^{m} \cdot S_{n_1+\cdots+n_m}(f, \varepsilon, M) \cdot S_{M_\varepsilon}(f, \varepsilon, M)^{m-1} \\
&\leq K_\varepsilon^{m} \cdot S_{n_1+\cdots+n_m}(f, \varepsilon, M) \cdot S_{M_\varepsilon}(f, \varepsilon, M)^{m}
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
S_{n_1+\cdots+n_m}(f, \varepsilon, M) &\geq K_\varepsilon^{-m} \cdot S_{a_m+n_m}(f, \varepsilon, M) \cdot S_{M_\varepsilon}(f, \varepsilon, M)^{-m} \\
&\geq K_\varepsilon^{-m} \cdot \left[\prod_{j=1}^{m} S_{n_j}(f, 3\varepsilon, M)\right] \cdot S_{M_\varepsilon}(f, \varepsilon, M)^{-m} \\
&\geq K_\varepsilon^{-m} \cdot \left[\prod_{j=1}^{m} (C_{\varepsilon,3\varepsilon})^{-1} S_{n_j}(f, \varepsilon, M)\right] \cdot S_{M_\varepsilon}(f, \varepsilon, M)^{-m} \\
&= \prod_{j=1}^{m} \underbrace{K_\varepsilon^{-1} \left(C_{\varepsilon,3\varepsilon}\right)^{-1} S_{M_\varepsilon}(f, \varepsilon, M)^{-1}}_{k_\varepsilon} S_{n_j}(f, \varepsilon, M)
\end{aligned}$$

Y se verifican las desigualdades requeridas. □

En la siguiente proposición se hará uso del lema que acabamos de verificar, aunque en esta ocasión será aplicado a un caso particular de constantes n_j.

Proposición 4.2.1. Sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo en el espacio métrico compacto M con constante de expansividad δ_0 y con la propiedad de especificación. Entonces dado $0 < \varepsilon < \delta_0/6$ existen constantes $k_\varepsilon, K_\varepsilon > 0$ tales que

$$\frac{1}{K_\varepsilon}\, e^{nh(f)} \leq S_n(f,\varepsilon,M) \leq \frac{1}{k_\varepsilon}\, e^{nh(f)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como $0 < \varepsilon < \delta_0/6 < \delta_0/2$ entonces por el corolario 4.2.1 se tiene que

$$h(f) = \lim_n \frac{1}{n} \log S_n(f,\varepsilon,M),$$

además por el lema 4.2.2 para $n_1 = n_2 = \cdots = n_m = n$ existen constantes $k_\varepsilon, K_\varepsilon > 0$ tales que

$$\prod_{j=1}^{m} k_\varepsilon S_n(f,\varepsilon,M) \leq S_{mn}(f,\varepsilon,M) \leq \prod_{j=1}^{m} K_\varepsilon S_n(f,\varepsilon,M)$$

o equivalentemente

$$k_\varepsilon^m S_n(f,\varepsilon,M)^m \leq S_{mn}(f,\varepsilon,M) \leq K_\varepsilon^m S_n(f,\varepsilon,M)^m$$

tomando logaritmo y dividiendo por mn nos queda

$$\frac{1}{n}\log k_\varepsilon S_n(f,\varepsilon,M) \leq \frac{1}{mn}\log S_{mn}(f,\varepsilon,M) \leq \frac{1}{n}\log K_\varepsilon S_n(f,\varepsilon,M)$$

tomando límite cuando m tiende a infinito

$$\frac{1}{n}\log k_\varepsilon S_n(f,\varepsilon,M) \leq h(f) \leq \frac{1}{n}\log K_\varepsilon S_n(f,\varepsilon,M)$$

multiplicamos por n y tomamos exponencial

$$k_\varepsilon S_n(f,\varepsilon,M) \leq e^{nh(f)} \leq K_\varepsilon S_n(f,\varepsilon,M)$$

de ahí se concluye el resultado. □

Teorema 4.2.1. Sea M un espacio métrico compacto y sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo con la propiedad de especificación. Entonces existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_1\, e^{nh(f)} \leq \operatorname{card}\left(Fix\left(f^n\right)\right) \leq c_2\, e^{nh(f)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $0 < \varepsilon < \delta_0/6$ donde δ_0 es una constante de expansividad para f y sean $x, y \in Fix(f^n)$ tales que sean distintos. La expansividad de f asegura la existencia de algún $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d\left(f^k(x), f^k(y)\right) \geq \delta_0$; además, del algoritmo de la división en k y n sabemos que existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tales que $k = nq + r$ con $0 \leq r \leq n-1$ luego,

$$\begin{aligned} d\left(f^r(x), f^r(y)\right) &= d\left(f^r(f^{nq}(x)), f^r(f^{nq}(y))\right) \\ &= d\left(f^k(x), f^k(y)\right) \geq \delta_0. \end{aligned}$$

Esto prueba que $Fix(f^n)$ es un conjunto (n, δ_0)-separado así, $\operatorname{card}\left(Fix(f^n)\right) \leq S_n(f, \delta_0, M)$; además, como $0 < \varepsilon < \delta_0/2 < \delta_0$ se tiene que $S_n(f, \delta_0, M) \leq S_n(f, \varepsilon, M)$ y con ello

$$\operatorname{card}\left(Fix(f^n)\right) \leq S_n(f, \varepsilon, M). \tag{4.32}$$

Por otro lado, sea E_n un conjunto (n, ε)-separado de cardinalidad máxima. De la propiedad de especificación, sabemos que existe un número $M_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$ tal que para cada $x \in E_n$, para el intervalo entero $[\![0, n]\!]$ y para $q = M_{\varepsilon/2} + n$ existe $y_x \in M$ tal que $f^q(y_x) = y_x$ y $d\left(f^k(y_x), f^k(x)\right) \leq \varepsilon/2$ para todo $k = 0, \ldots, n$. En particular $d_n^f(y_x, x) \leq \varepsilon/2$.

Afirmación : La aplicación $\varphi : E_n \to Fix(f^q)$ tal que $\varphi(x) = y_x$ es inyectiva. En efecto: supongamos que existen $x_1, x_2 \in E_n$ tales que $y_{x_1} = y_{x_2}$ entonces

$$\begin{aligned} d_n^f(x_1, x_2) &\leq d_n^f(x_1, y_{x_1}) + \overbrace{d_n^f(y_{x_1}, y_{x_2})}^{0} + d_n^f(y_{x_2}, x_2) \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

y debido a que E_n es un conjunto (n, ε)-separado se llega a que $x_1 = x_2$ lo cual nos dice que φ es inyectiva. Así, se verifica la afirmación.

De la afirmación se tiene la relación $\operatorname{card}(E_n) \leq \operatorname{card}\left(Fix(f^q)\right)$ o de forma equivalente $S_n(f, \varepsilon, M) \leq \operatorname{card}\left(Fix\left(f^{M_{\varepsilon/2}+n}\right)\right)$, de donde al escribir $m = M_{\varepsilon/2} + n$ y luego al regresar a la variable n se obtiene

$$S_{n-M_{\varepsilon/2}}(f, \varepsilon, M) \leq \operatorname{card}\left(Fix\left(f^n\right)\right). \tag{4.33}$$

Juntando 4.32 y 4.33 nos queda $S_{n-M_{\varepsilon/2}}(f, \varepsilon, M) \leq \operatorname{card}\left(Fix\left(f^n\right)\right) \leq S_n(f, \varepsilon, M)$. Por otro lado, de la proposición 4.2.1 se sabe que existen algunas constantes $k_\varepsilon, K_\varepsilon > 0$ tales que

$$\frac{1}{K_\varepsilon} e^{\left(n-M_{\varepsilon/2}\right)h(f)} \leq S_{n-M_{\varepsilon/2}}(f, \varepsilon, M) \quad \text{y} \quad S_n(f, \varepsilon, M) \leq \frac{1}{k_\varepsilon} e^{nh(f)}$$

luego,

$$\underbrace{\frac{1}{K_\varepsilon} e^{-M_{\varepsilon/2}h(f)}}_{c_1} e^{nh(f)} \leq \operatorname{card}\left(Fix\left(f^n\right)\right) \leq \underbrace{\frac{1}{k_\varepsilon}}_{c_2} e^{nh(f)}.$$

Y se verifica el teorema. $\square$

4.3. Teorema de Bowen

Es importante recordar que el Principio Variacional establece que la entropía topológica es el supremo de las entropías métricas. Además, hemos constatado que para el caso de las transformaciones expansivas, el supremo es alcanzado. Ahora, ampliaremos nuestro análisis al incorporar la propiedad de especificación a la condición de expansividad. Como resultado de esta combinación, encontraremos exactamente una única medida de máxima entropía a la cual denominaremos *medida de Bowen*. Esta medida será presentada como una distribución límite de las órbitas periódicas.

Sean las medidas f-invariantes

$$\mu_n = \sum_{x \in Fix(f^n)} \frac{\delta_x}{\operatorname{card}\left(Fix\left(f^n\right)\right)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\mathcal{M}_f(M)$ es un espacio métrico compacto, entonces la sucesión $(\mu_n)_n$ admite una subsucesión convergente; esto es, existe alguna subsucesión de números naturales $(k_n)_n$ y alguna medida $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$ tal que

$$\mu = \lim_n \mu_{k_n} \tag{4.34}$$

Probaremos que esta medida μ es la única medida de máxima entropía para f, pero antes de ello, veremos dos lemas relacionados al comportamiento dinámico de μ.

Lema 4.3.1. Sean M un espacio métrico compacto, $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo con la propiedad de especificación, μ como en 4.34 y $0 < \varepsilon < \delta_0/18$ donde δ_0 es una constante de expansividad para f. Para $y \in M$ y $n \in \mathbb{N}$ sea $B = B_f(y, \varepsilon, n)$ entonces, existe una constante $A_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mu\left(\overline{B}\right) \geq A_\varepsilon e^{-nh(f)}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$; para $m \in \mathbb{N}$ tomemos a E_m como un conjunto $(m, 3\varepsilon)$-separado de cardinalidad máxima y sea $x \in E_m$. Sea $\mathcal{I} = \{I_1, I_2\}$ en donde

$$I_1 = [\![n + M_\varepsilon, m - 1 + n + M_\varepsilon]\!]$$

e

$$I_2 = [\![m - 1 + n + 2M_\varepsilon, m + n + 2M_\varepsilon]\!] .$$

Considere la aplicación $P : I_1 \cup I_2 \to M$ definida por $P(t) = f^{t-n-M_\varepsilon}(x)$ en I_1 entonces $\mathcal{S} = (\mathcal{I}, P)$ es una especificación M_ε-espaciada en donde $L(S) = m + M_\varepsilon$. Luego, por la propiedad de especificación para $r = m + n + 2M_\varepsilon \geq M_\varepsilon + L(S)$ se tiene que existe algún $z(x) \in Fix(f^r) \cap \overline{B}$ tal que $d\left(f^t(z(x)), P(t)\right) < \varepsilon$ para todo $t \in I_1 \cup I_2$. En particular tomando $t \in I_1$ y escribiéndolo de la forma $t = j + n + M_\varepsilon$ donde $j = 0, \ldots, m-1$ se tiene que $d\left(f^{j+n+M_\varepsilon}(z(x)), f^j(x)\right) < \varepsilon$ para cada $j = 0, \ldots, m-1$ o de forma equivalente

$$d_m^f\left(f^{n+M_\varepsilon}(z(x)), x\right) < \varepsilon. \tag{4.35}$$

Afirmación 1: La aplicación $\psi : E_m \to Fix(f^r) \cap \overline{B}$ tal que $\psi(x) = z(x)$ es inyectiva. En efecto: sean $x_1, x_2 \in E_m$ tales que $z(x_1) = z(x_2)$ entonces

$$\begin{aligned} d_m^f(x_1, x_2) &\leq d_m^f\left(x_1, f^{n+M_\varepsilon}(z(x_1))\right) + \overbrace{d_m^f\left(f^{n+M_\varepsilon}(z(x_1)), f^{n+M_\varepsilon}(z(x_2))\right)}^{0} \\ &\quad + d_m^f\left(f^{n+M_\varepsilon}(z(x_2)), x_2\right) < 2\varepsilon < 3\varepsilon \end{aligned}$$

y como E_m es un conjunto $(m, 3\varepsilon)$-separado entonces, $x_1 = x_2$. De esta manera se prueba la afirmación la cual implica que

$$\operatorname{card}(E_m) \leq \operatorname{card}\left(Fix(f^r) \cap \left(\overline{B}\right)\right). \tag{4.36}$$

Por otro lado, por el teorema 4.2.1 sabemos que existe una constante $c_2 > 0$ tal que

$$\operatorname{card}\left(Fix\left(f^r\right)\right) \leq c_2\, e^{rh(f)}. \tag{4.37}$$

Además, desde que $3\varepsilon < \delta_0/6$ por la proposición 4.2.1 se tiene que existe una constante $K_{3\varepsilon} > 0$ tal que

$$\frac{1}{K_{3\varepsilon}} e^{mh(f)} \leq S_m(f, 3\varepsilon, M) \tag{4.38}$$

en adición,

$$\mu_r\left(\overline{B}\right) = \sum_{x \in Fix(f^r)} \frac{\delta_x\left(\overline{B}\right)}{\operatorname{card}\left(Fix\left(f^r\right)\right)} = \frac{\operatorname{card}\left(Fix(f^r) \cap \left(\overline{B}\right)\right)}{\operatorname{card}\left(Fix\left(f^r\right)\right)}$$

luego,

$$\begin{aligned} \mu_r\left(\overline{B}\right) &\geq \frac{\operatorname{card}(E_m)}{\operatorname{card}\left(Fix\left(f^r\right)\right)} \geq \frac{\operatorname{card}(E_m)}{c_2 e^{rh(f)}} = \frac{S_m(f, 3\varepsilon, M)}{c_2 e^{rh(f)}} \\ &\geq \frac{e^{mh(f)}}{c_2 K_{3\varepsilon} e^{rh(f)}} = \frac{e^{-nh(f)}}{c_2 K_{3\varepsilon} e^{2M_\varepsilon h(f)}} = A_\varepsilon e^{-nh(f)} \end{aligned}$$

donde $A_\varepsilon = \dfrac{1}{c_2 K_{3\varepsilon} e^{2M_\varepsilon h(f)}}$.

Afirmación 2: Se satisface

$$\mu\left(\overline{B}\right) = \text{ínf}\left\{\int \varphi\, d\mu \;\middle|\; \varphi : M \to [0,1] \text{ es continua y } \varphi\left(\overline{B}\right) = \{1\}\right\}$$

En efecto: Escribamos $\mathcal{G} = \left\{\varphi \mid \varphi : M \to [0,1] \text{ es continua y } \varphi\left(\overline{B}\right) = \{1\}\right\}$. Probaremos que $\mu\left(\overline{B}\right) = \text{ínf}\left\{\int \varphi\, d\mu : \varphi \in \mathcal{G}\right\}$. Por un lado note que si $\varphi \in \mathcal{G}$ entonces

$$\mu\left(\overline{B}\right) = \int_{\overline{B}} \varphi\, d\mu \leq \int \varphi\, d\mu. \tag{4.39}$$

Por otro lado, sea $\varepsilon_0 > 0$ arbitrario, por la regularidad de la medida μ sabemos que existe un conjunto cerrado $F \subseteq \overline{B}^c$ tal que $\mu\left(\overline{B}^c - F\right) < \varepsilon_0$. Del lema de Urysohn existe una función continua $\varphi_0 : M \to [0,1]$ tal que $\varphi_0(x) = 0$ para todo $x \in F$ y $\varphi_0(x) = 1$ para todo $x \in \overline{B}$. Luego,

$$\begin{aligned}\int \varphi_0\, d\mu &= \int_{\overline{B}} \varphi_0\, d\mu + \int_F \varphi_0\, d\mu + \int_{\overline{B}^c - F} \varphi_0\, d\mu \\ &\leq \mu\left(\overline{B}\right) + \mu\left(\overline{B}^c - F\right) < \mu\left(\overline{B}\right) + \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Tomando extremos tenemos,

$$\int \varphi_0\, d\mu < \mu\left(\overline{B}\right) + \varepsilon_0. \tag{4.40}$$

Así, de las ecuaciones 4.39 y 4.40 se prueba la afirmación. De hecho dicha afirmación es válida para cualquier medida regular $\nu \in \mathcal{M}(M)$. Por consiguiente, para $\varphi \in \mathcal{G}$ se tiene que

$$\int \varphi\, d\mu = \lim_n \int \varphi\, d\mu_{k_n} \geq \lim_n \int_{\overline{B}} \varphi\, d\mu_{k_n} = \lim_n \mu_{k_n}\left(\overline{B}\right) \geq \mu_r\left(\overline{B}\right)$$

es decir $\int \varphi\, d\mu \geq \mu_r\left(\overline{B}\right)$ para todo $\varphi \in \mathcal{G}$ luego, de la afirmación se tiene $\mu\left(\overline{B}\right) \geq \mu_r\left(\overline{B}\right)$ y consecuentemente se prueba el lema pues $\mu_r\left(\overline{B}\right) \geq A_\varepsilon e^{-nh(f)}$. □

Lema 4.3.2. Sean M un espacio métrico compacto y $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo con la propiedad de especificación. La medida μ dada en 4.34 es ergódica.

Demostración.
Afirmación 1: Existe un número real $c > 0$ tal que

$$\liminf_n \mu\left(P \cap f^{-n}(Q)\right) \geq c\mu(P)\mu(Q)$$

para todo $P, Q \subseteq M$ medibles. En efecto:

Empezaremos la prueba para conjuntos compactos con frontera con medida nula.

Sean $\delta > 0$, $A, B \subseteq M$ conjuntos compactos con frontera con medida nula y sean U y V δ-vecindades de A y B respectivamente; esto es,

$$U = \{u \in M : \exists\, a \in A \text{ y } d(u,a) < \delta\}$$
$$V = \{v \in M : \exists\, b \in B \text{ y } d(v,b) < \delta\}$$

Sea $0 < \varepsilon < \delta_0/18$ fijo donde δ_0 es una constante de expansividad para f. Sabemos que existe una constante $N_\delta \in \mathbb{N}$ tal que

$$d^f_{2N_\delta - 1}\left(f^{-N_\delta+1}(x), f^{-N_\delta+1}(y)\right) \leq 2\varepsilon \Rightarrow d(x,y) < \delta, \tag{4.41}$$

la existencia de N_δ se debe a la expansividad de f y se obtiene de forma análoga a lo elaborado en la afirmación 1 del lema 4.2.1.

Sea $n \geq 2N_\delta$ y sean $s, t \in \mathbb{N}$ arbitrarios, tomemos como E_s a un conjunto $(s, 3\varepsilon)$-separado de cardinalidad máxima y a E_t como un conjunto $(t, 3\varepsilon)$-separado de cardinalidad máxima.

Convenientemente hagamos

$$\begin{aligned} a_1 &= -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & a_2 &= b_1 + M_\varepsilon, & a_3 &= b_2 + M_\varepsilon, & a_4 &= b_3 + M_\varepsilon, \\ b_1 &= a_1 + n, & b_2 &= a_2 + s, & b_3 &= a_3 + n, & b_4 &= a_4 + t \end{aligned}$$

donde M_ε es una constante de espaciamiento para f y para ε. Sea $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ la familia de intervalos enteros donde $I_j = [\![a_j, b_j]\!]$ para $j = 1,2,3,4$; note que $a_{j+1} - b_j = M_\varepsilon$ para $j = 1,2,3$ y sea

$$W = f^{-\lfloor n/2 \rfloor}\left(Fix\left(f^n\right) \cap A\right) \times E_s \times f^{-\lfloor n/2 \rfloor}\left(Fix\left(f^n\right) \cap B\right) \times E_t.$$

Sea la cuaterna $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$ y definamos la aplicación $P : \bigcup_{j=1}^4 I_j \to M$ dada por $P(t) = f^{t-a_j}(x_j)$ para cada $t \in I_j$ entonces el par $(\mathcal{I}, P)$ es una especificación M_ε-espaciada; luego, por la propiedad de especificación para $q = b_4 - a_1 + M_\varepsilon$ existe $z = z(x) \in Fix(f^q)$ tal que $d\left(f^t(z), P(t)\right) < \varepsilon$ para cada $t \in \bigcup_{j=1}^4 I_j$, en particular para cada $j = 1,2,3,4$ y para cada $a_j \leq k \leq b_j - 1$ se tiene que $d\left(f^k(z), f^{k-a_j}(x_j)\right) < \varepsilon$ o de forma equivalente haciendo $i = k - a_j$ nos queda

$$d^f_{b_j - a_j}(f^{a_j}(z), x_j) = \max_{0 \leq i \leq b_j - a_j - 1} d\left(f^{i+a_j}(z), f^i(x_j)\right) < \varepsilon.$$

Afirmación 2: $z = z(x) \in U \cap f^{-s-n-2M_\varepsilon}(V)$. En efecto, de la elección de x en W sabemos que $x_1 \in f^{-\lfloor n/2 \rfloor}\left(Fix\left(f^n\right) \cap A\right)$, de ahí que podemos escribir $a = f^{\lfloor n/2 \rfloor}(x_1)$ siendo $f^n(a) = a$ y $a \in A$. Además nótese que $N_\delta \leq n/2 \leq \lfloor n/2 \rfloor + 1$ y $2\lfloor n/2 \rfloor - 1 \leq n$

entonces,

$$
\begin{aligned}
d^f_{2N_\delta-1}\left(f^{-N_\delta+1}(z), f^{-N_\delta+1}(a)\right) &= \max_{0\le k\le 2N_\delta-2} d\left(f^{k-N_\delta+1}(z), f^{k-N_\delta+1}(a)\right)\\
&= \max_{-N_\delta+1\le k\le N_\delta-1} d\left(f^{k}(z), f^{k}(a)\right)\\
&\le \max_{-\lfloor n/2\rfloor\le k\le \lfloor n/2\rfloor} d\left(f^{k}(z), f^{k}(a)\right)\\
&= \max_{0\le k\le 2\lfloor n/2\rfloor} d\left(f^{k-\lfloor n/2\rfloor}(z), f^{k-\lfloor n/2\rfloor}(a)\right)\\
&= d^f_{2\lfloor n/2\rfloor-1}\left(f^{-\lfloor n/2\rfloor}(z), f^{-\lfloor n/2\rfloor}(a)\right)\\
&\le d^f_{n}\left(f^{-\lfloor n/2\rfloor}(z), f^{-\lfloor n/2\rfloor}(a)\right)\\
&= d^f_{n}\left(f^{-\lfloor n/2\rfloor}(z), x_1\right) = d^f_{b_1-a_1}\left(f^{a_1}(z), x_1\right) < \varepsilon < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

luego, de la relación 4.41 se tiene que $d(z,a) < \delta$ con lo cual $z \in U$ pues recordemos que $a \in A$ y U es una δ-vecindad de A. Ahora, para probar que $z \in f^{-s-n-2M_\varepsilon}(V)$ empecemos haciendo $v = f^{s+n+2M_\varepsilon}(z)$ y observemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
f^{a_3}(z) &= f^{a_3-s-n-2M_\varepsilon}(v)\\
&= f^{b_2+M_\varepsilon-s-n-2M_\varepsilon}(v)\\
&= f^{a_2-M_\varepsilon-n}(v)\\
&= f^{b_1-n}(v) = f^{a_1}(v) = f^{-\lfloor n/2\rfloor}(v).
\end{aligned}
$$

Por otra parte, de forma análoga a lo hecho con x_1 sabemos que $x_3 \in f^{-\lfloor n/2\rfloor}\left(Fix\left(f^n\right) \cap B\right)$, de ahí podemos escribir $b = f^{\lfloor n/2\rfloor}(x_3)$ siendo $f^n(b) = b$ y $b \in B$, además nótese que $N_\delta = \lfloor N_\delta \rfloor \le \lfloor n/2\rfloor$ entonces,

$$
\begin{aligned}
d^f_{2N_\delta-1}\left(f^{-N_\delta+1}(v), f^{-N_\delta+1}(b)\right) &= \max_{0\le k\le 2N_\delta-2} d\left(f^{k-N_\delta+1}(v), f^{k-N_\delta+1}(b)\right)\\
&= \max_{-N_\delta+1\le k\le N_\delta-1} d\left(f^{k}(v), f^{k}(b)\right)\\
&\le \max_{-\lfloor n/2\rfloor\le k\le \lfloor n/2\rfloor-1} d\left(f^{k}(v), f^{k}(b)\right)\\
&= \max_{0\le k\le 2\lfloor n/2\rfloor-1} d\left(f^{k-\lfloor n/2\rfloor}(v), f^{k-\lfloor n/2\rfloor}(b)\right)\\
&= d^f_{2\lfloor n/2\rfloor}\left(f^{-\lfloor n/2\rfloor}(v), f^{-\lfloor n/2\rfloor}(b)\right)\\
&\le d^f_{n}\left(f^{-\lfloor n/2\rfloor}(v), f^{-\lfloor n/2\rfloor}(b)\right)
\end{aligned}
$$

luego,

$$d^f_{2N_\delta-1}\left(f^{-N_\delta+1}(v), f^{-N_\delta+1}(b)\right) \leq d^f_n\left(f^{a_3}(z), x_3\right) = d^f_{b_3-a_3}\left(f^{a_3}(z), x_3\right) < \varepsilon < 2\varepsilon.$$

y de nuevo, de la relación 4.41 se tiene que $d(v,b) < \delta$ con lo cual $v \in V$ desde V es una δ-vecindad de B y $b \in B$. Esto garantiza que $z \in f^{-s-n-2M_\varepsilon}(V)$ y queda probada la afirmación 2.

Afirmación 3: La aplicación $\varphi : W \to Fix(f^q) \cap U \cap f^{-s-n-2M_\varepsilon}(V)$ definida como $\varphi(x) = z(x)$ es inyectiva. En efecto, sean $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in W$ tales que $z(x) = z = z(y)$, para cada $j = 1, 2, 3, 4$ observe que

$$d^f_{b_j-a_j}(x_j, y_j) \leq d^f_{b_j-a_j}(x_j, f^{a_j}(z)) + d^f_{b_j-a_j}(f^{a_j}(z), y_j) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \tag{4.42}$$

Note que para $j = 2$ la relación 4.42 implica que

$$d^f_s(x_2, y_2) < 2\varepsilon < 3\varepsilon$$

y como $x_2, y_2 \in E_s$ siendo E_s un conjunto $(s, 3\varepsilon)$-separado entonces, $x_2 = y_2$. Análogamente para $j = 4$ se llega a que $x_4 = y_4$. Por otro lado, tengamos en cuenta que

$$f^{-\lfloor n/2 \rfloor}\left(Fix\left(f^n\right)\right) = Fix\left(f^n\right)$$

desde que f es inversible, además $Fix(f^n)$ es un conjunto (n, δ_0)-separado tal como vimos al inicio de la demostración del teorema 4.2.1. En adición, para $j = 1$ vemos que la relación 4.42 implica que

$$d^f_n(x_1, y_1) < 2\varepsilon < \delta_0$$

y como $x_1, y_1 \in f^{-\lfloor n/2 \rfloor}\left(Fix\left(f^n\right) \cap A\right) \subseteq Fix(f^n)$ entonces se satisface que $x_1 = y_1$. De forma análoga obtenemos que $x_3 = y_3$ con lo cual se llega a que $x = y$ y hemos conseguido mostrar que la aplicación φ es inyectiva.

La afirmación 3 implica que

$$\operatorname{card}(W) \leq \operatorname{card}\left(Fix(f^q) \cap U \cap f^{-s-n-2M_\varepsilon}(V)\right).$$

Además, de la definición de las medidas μ_n se tiene que

$$\mu_n(A) = \sum_{a \in Fix(f^n)} \frac{\delta_a(A)}{\operatorname{card}\left(Fix(f^n)\right)} = \frac{\operatorname{card}\left(Fix(f^n) \cap A\right)}{\operatorname{card}\left(Fix(f^n)\right)}$$

$$\mu_n(B) = \sum_{b \in Fix(f^n)} \frac{\delta_b(B)}{\operatorname{card}\left(Fix(f^n)\right)} = \frac{\operatorname{card}\left(Fix(f^n) \cap B\right)}{\operatorname{card}\left(Fix(f^n)\right)}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\left(Fix(f^q)\cap U\cap f^{-s-n-2M_\varepsilon}(V)\right) &\geq \operatorname{card}(W)\\
&= \operatorname{card}\left((Fix\,(f^n)\cap A)\right)\operatorname{card}(E_s)\operatorname{card}\left((Fix\,(f^n)\cap B)\right)\operatorname{card}(E_t)\\
&= \mu_n(A)\operatorname{card}(Fix(f^n))\,S_s(f,3\varepsilon,M)\mu_n(B)\operatorname{card}(Fix(f^n))\,S_t(f,3\varepsilon,M)\\
&= \mu_n(A)\mu_n(B)\operatorname{card}(Fix(f^n))^2\,S_s(f,3\varepsilon,M)\,S_t(f,3\varepsilon,M).
\end{aligned}$$

Análogamente para $q := b_4 - a_1 + M_\varepsilon = t + s + 2n + 4M_\varepsilon$ se tiene de la definición de μ_q que

$$\mu_q\left(U\cap f^{-s-n-2M_\varepsilon}(V)\right) = \frac{\operatorname{card}\left(Fix(f^q)\cap U\cap f^{-s-n-2M_\varepsilon}(V)\right)}{\operatorname{card}(Fix(f^q))}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\mu_q\left(U\cap f^{-s-n-2M_\varepsilon}(V)\right) &\geq \frac{\operatorname{card}(W)}{\operatorname{card}(Fix(f^q))}\\
&= \frac{\mu_n(A)\mu_n(B)\operatorname{card}(Fix(f^n))^2\,S_s(f,3\varepsilon,M)\,S_t(f,3\varepsilon,M)}{\operatorname{card}(Fix(f^q))}.
\end{aligned}$$

Del teorema 4.2.1 sabemos que existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que

$$c_2\,e^{mh(f)} \geq \operatorname{card}(Fix\,(f^m)) \geq c_1\,e^{mh(f)}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ y de la proposición 4.2.1 sabemos que existe una constante $K_{3\varepsilon} > 0$ tal que

$$S_m(f,3\varepsilon,M) \geq \frac{1}{K_{3\varepsilon}}\,e^{mh(f)}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mu_q\left(U\cap f^{-s-n-2M_\varepsilon}(V)\right) &\geq \frac{\mu_n(A)\mu_n(B)\,c_1^2\,e^{2nh(f)}\,e^{sh(f)}\,e^{th(f)}}{c_2\,e^{qh(f)}K_{3\varepsilon}^2}\\
&= \mu_n(A)\mu_n(B)\cdot\frac{c_1^2\,e^{(2n+s+t-q)h(f)}}{c_2\,K_{3\varepsilon}^2}\\
&= \mu_n(A)\mu_n(B)\cdot\frac{c_1^2\,e^{-4M_\varepsilon h(f)}}{c_2\,K_{3\varepsilon}^2} = c\,\mu_n(A)\mu_n(B)
\end{aligned}$$

donde $c = \dfrac{c_1^2\,e^{-4M_\varepsilon h(f)}}{c_2\,K_{3\varepsilon}^2}$.

Fijemos n y s; como t es arbitrario, podemos tomarlo lo suficientemente grande tal que

$q = k_n$, además intercambiando n por k_n tenemos,

$$\begin{aligned}\mu\left(\overline{U}\cap f^{-s-k_n-2M_\varepsilon}\left(\overline{V}\right)\right) &\geq \limsup_n \mu_{k_{k_n}}\left(U\cap f^{-s-k_n-2M_\varepsilon}\left(V\right)\right)\\ &\geq c\limsup_n \mu_{k_n}(A)\mu_{k_n}(B).\end{aligned}$$

Haciendo $r = s + k_n + 2M_\varepsilon$ y tomando límite cuando r tiene a infinito nos queda

$$\liminf_r \mu\left(\overline{U}\cap f^{-r}\left(\overline{V}\right)\right) \geq c\ \limsup_n \mu_{k_n}(A)\mu_{k_n}(B)$$

además,

$$\limsup_n \mu_{k_n}(A)\mu_{k_n}(B) = \mu(A)\mu(B)$$

pues $\mu(\partial A) = \mu(\partial B) = 0$ luego,

$$\liminf_r \mu\left(\overline{U}\cap f^{-r}\left(\overline{V}\right)\right) \geq c\mu(A)\mu(B).$$

Esta última condición implica que

$$\liminf_r \mu\left(A\cap f^{-r}\left(B\right)\right) \geq c\mu(A)\mu(B)$$

pues δ puede ser tomado tan pequeño como se desee; con esto hemos probado la afirmación 1 para los conjuntos A y B que son compactos con frontera con medida nula.

Ahora probaremos que se cumple justamente para cualesquiera par de conjuntos medibles P y Q. Sean P y Q subconjuntos medibles de M, de la regularidad de la medida μ sabemos que podemos encontrar conjuntos compactos A y B tales que

$$\mu(P\triangle A) < \varepsilon \text{ y } \mu(Q\triangle B) < \varepsilon,$$

estos conjuntos compactos pueden ser tomados con frontera con medida nula gracias al lema 2.2.1. Escribamos $\gamma_n = c\mu(P)\mu(Q) - \mu\left(P\cap f^{-n}\left(Q\right)\right)$ entonces

$$\begin{aligned}\gamma_n &= c\mu(P)\mu(Q) - c\mu(A)\mu(Q) + c\mu(A)\mu(Q) - c\mu(A)\mu(B) + c\mu(A)\mu(B)\\ &\quad - \mu\left(P\cap f^{-n}\left(Q\right)\right) + \mu\left(A\cap f^{-n}\left(Q\right)\right) - \mu\left(A\cap f^{-n}\left(Q\right)\right)\\ &\quad + \mu\left(A\cap f^{-n}\left(B\right)\right) - \mu\left(A\cap f^{-n}\left(B\right)\right)\\ &\leq c\mu(P\triangle A)\mu(Q) + c\mu(A)\mu(Q\triangle B) + c\mu(A)\mu(B)\\ &\quad + \mu\left((P\triangle A)\cap f^{-n}\left(Q\right)\right) + \mu\left(A\cap f^{-n}\left(\left(Q\triangle B\right)\right)\right) - \mu\left(A\cap f^{-n}\left(B\right)\right)\\ &\leq c\varepsilon\mu(Q) + c\varepsilon\mu(A) + c\mu(A)\mu(B) + \varepsilon + \varepsilon - \mu\left(A\cap f^{-n}\left(B\right)\right)\end{aligned}$$

luego, tomando límite superior cuando n tiene a infinito nos queda

$$\begin{aligned}\limsup_n \gamma_n &\leq c\varepsilon\mu(Q) + c\varepsilon\mu(A) + 2\varepsilon + c\mu(A)\mu(B) - \liminf_n \mu\left(A \cap f^{-n}(B)\right) \\ &\leq c\varepsilon\mu(Q) + c\varepsilon\mu(A) + 2\varepsilon\end{aligned}$$

y como $\mu(A) \leq \mu(P) + \mu(P \triangle A) \leq \mu(P) + \varepsilon$ entonces

$$\limsup_n \gamma_n \leq c\varepsilon\mu(Q) + c\varepsilon\mu(P) + c\varepsilon^2 + 2\varepsilon$$

de donde tomando límite cuando ε tiende a cero nos queda $\limsup_n \gamma_n \leq 0$ o equivalentemente se tiene $\liminf_n (-\gamma_n) \geq 0$, es decir

$$\liminf_n \left(\mu\left(P \cap f^{-n}(Q)\right) - c\mu(P)\mu(Q)\right) \geq 0$$

y así,

$$\liminf_n \mu\left(P \cap f^{-n}(Q)\right) \geq c\mu(P)\mu(Q) \tag{4.43}$$

para todo $P, Q \subseteq M$ medibles con lo que terminamos de probar la afirmación 1.

En particular podemos tomar un subconjunto medible E de M tal que $f^{-1}(E) = E$ y hagamos $P = E$ y $Q = E^c$ entonces,

$$\begin{aligned}\mu\left(P \cap f^{-n}(Q)\right) &= \mu\left(f^{-n}(P) \cap f^{-n}(Q)\right) \\ &= \mu\left(f^{-n}(P \cap Q)\right) = \mu\left(f^{-n}(\emptyset)\right) = 0,\end{aligned}$$

reemplazando en la ecuación 4.43 nos queda $0 = \mu(E)\mu(E^c)$ lo cual implica que $\mu(E) = 0$ (y por ende $\mu(E^c) = 1$) o $\mu(E^c) = 0$ (y por ende $\mu(E) = 1$). Esto prueba que la medida μ dada en 4.34 es ergódica. □

Ya contamos con todas la herramientas necesarias para poder abordar el teorema principal de este trabajo, veamos:

Teorema 4.3.1 (Teorema de Bowen). *Sea M un espacio métrico compacto y sea $f : M \to M$ un homeomorfismo expansivo con la propiedad de especificación. Entonces existe una única medida de máxima entropía $\mu \in \mathcal{M}_f(M)$.*

Demostración. Sea $\nu \in \mathcal{M}_f(M)$ una medida de máxima entropía para la aplicación f; esto es, tal que $h_\nu(f) = h(f)$. Recordemos que la existencia de ν está garantizada desde que f es un homeomorfismo expansivo. Como consecuencia del teorema de Descomposición de Lebesgue (ver teorema 6.2.3) podemos escribir

$$\nu = \alpha\nu' + (1 - \alpha)\mu'$$

en donde $\alpha \in [0,1]$ y $\mu', \nu' \in \mathcal{M}_f(M)$ son medidas tales que $\mu' \ll \mu$ y $\mu \perp \nu'$ (revisar las definiciones 6.2.8 y 6.2.9). Por otra parte, del lema 4.3.2 sabemos que μ es ergódica y como $\mu' \ll \mu$ entonces del lema 6.2.1 se tiene que $\mu' = \mu$ y así,

$$\nu = \alpha\nu' + (1-\alpha)\mu$$

con $\mu \perp \nu'$, luego

$$h_\nu(f) = \alpha h_{\nu'}(f) + (1-\alpha)h_\mu(f).$$

Supongamos que $\alpha \neq 0$ entonces

$$h(f) = h_\nu(f) \leq \alpha h_{\nu'}(f) + (1-\alpha)h(f)$$

así,

$$\alpha h(f) \leq \alpha h_{\nu'}(f) \leq \alpha h(f)$$

luego,

$$h_{\nu'}(f) = h(f) \tag{4.44}$$

siendo $\mu \perp \nu'$.

Sean $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $E_n = \{x_1, \ldots, x_k\}$ un conjunto $(n, 2\varepsilon)$-separado de cardinalidad máxima (*en particular E_n es un conjunto $(n, 2\varepsilon)$-generador de M*), entonces se tiene que

$$M \subseteq \bigcup_{x \in E_n} B_f(x, 2\varepsilon, n) = \bigcup_{i=1}^{n} B_f(x_i, 2\varepsilon, n),$$

además $B_f(x_i, \varepsilon, n) \cap B_f(x_j, \varepsilon, n) = \emptyset$ para $i \neq j$ luego, podemos encontrar una partición $\mathcal{P}_n = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$ de conjuntos medibles tal que

$$B_f(x_i, \varepsilon, n) \subseteq \beta_i \subseteq B_f(x_i, 2\varepsilon, n) \quad \forall\, i = 1, \ldots, k. \tag{4.45}$$

En efecto, basta considerar

$$\beta_1 = B_f(x_1, 2\varepsilon, n) - \bigcup_{i=2}^{k} B_f(x_i, \varepsilon, n)$$

$$\beta_{j+1} = B_f(x_{j+1}, 2\varepsilon, n) - \bigcup_{i=j+2}^{k} B_f(x_i, \varepsilon, n) - \bigcup_{i=1}^{j} \beta_i \text{ para } j = 1, \ldots, k-1.$$

Para una representación gráfica de los conjuntos β_j ver la figura 4.1.

Desde el inicio pudimos tomar a $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño tal que $\varepsilon < \delta_0/2$

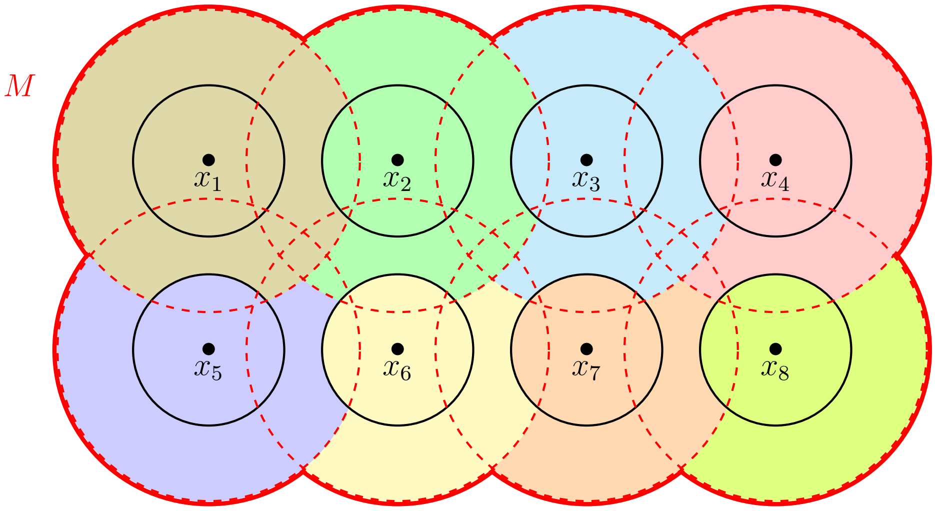


Figura 4.1: Representación de la partición $\mathcal{P}_n$ cuando $k = 8$.

donde δ_0 es la constante de expansividad de f y tal que

$$\operatorname{diam}(\mathcal{P}_n) < \varepsilon \tag{4.46}$$

esto último es posible gracias al lema 2.2.1.

Como $\mu \perp \nu'$, se tiene que existe un conjunto medible $B \in M$ tal que $\mu(B) = 0$ y $\nu'(B) = 1$ entonces, por la expansividad de f existen uniones finitas C_n de elementos de $\mathcal{P}_n$ tales que

$$\lim_n \mu(C_n) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_n \nu'(C_n) = 1.$$

Por otra parte, de la ecuación 4.46 y de la proposición 2.2.2 se tiene que

$$\lim_k \operatorname{diam}\left(\mathcal{P}_n^k\right) = 0$$

luego, por la observación 1.2.2 se tiene que $h_{\nu'}(f^n) = h_{\nu'}(f^n, \mathcal{P}_n)$. Además, de la proposición 9.1.14 de (Oliveira and Viana, 2014) se sabe que $nh_{\nu'}(f) = h_{\nu'}(f^n)$ entonces,

$$nh_{\nu'}(f) = h_{\nu'}(f^n) = h_{\nu'}(f^n, \mathcal{P}_n) \leq H_{\nu'}(\mathcal{P}_n). \tag{4.47}$$

Ahora consideremos la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = x \log x$ la cual es convexa. Entonces de la relación 4.47 tenemos

$$\begin{aligned} nh_{\nu'}(f) \leq H_{\nu'}(\mathcal{P}_n) &= \sum_{\beta_x \in \mathcal{P}_n} -\nu'(\beta_x) \log \nu'(\beta_x) = \sum_{\beta_x \in \mathcal{P}_n} -\varphi\left(\nu'(\beta_x)\right) \\ &= -\sum_{\beta_x \subseteq C_n} \varphi\left(\nu'(\beta_x)\right) - \sum_{\beta_x \cap C_n = \emptyset} \varphi\left(\nu'(\beta_x)\right). \end{aligned} \tag{4.48}$$

Afirmación: Para $m \in \mathbb{N}$ arbitrario sean $t_i = 1/m$ y $x_i > 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$

entonces

$$-\sum_{i=1}^{m} \varphi\left(x_i\right) \leq \log m \sum_{i=1}^{m} x_i + \frac{1}{e}. \tag{4.49}$$

En efecto, justamente de la convexidad de φ se obtiene la desigualdad siguiente:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} t_i \varphi\left(x_i\right)$$

o equivalentemente

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \varphi\left(x_i\right)$$

luego,

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^{m} \varphi\left(x_i\right) \leq -m\,\varphi\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right) &= -m\,\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\cdot\log\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\\
&= -\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \left(-\log m + \log\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\right)\\
&= \log m \sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \log\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)\\
&= \log m \sum_{i=1}^{m} x_i - \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)
\end{aligned}$$

y como $-\varphi(x) \leq 1/e$ para todo $x > 0$ entonces

$$-\sum_{i=1}^{m} \varphi\left(x_i\right) \leq \log m \sum_{i=1}^{m} x_i + \frac{1}{e}.$$

La afirmación anterior aplicada en $x_i = \nu'(\beta_x)$ y en dos constantes m adecuadas implica las dos siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
-\sum_{\beta_x \subseteq C_n} \varphi\left(\nu'(\beta_x)\right) &\leq \log \operatorname{card}\left(x \in E_n \mid \beta_x \subseteq C_n\right) \sum_{\beta_x \subseteq C_n} \nu'(\beta_x) + \frac{1}{e}\\
&= \log \operatorname{card}\left(x \in E_n \mid \beta_x \subseteq C_n\right) \nu'(C_n) + \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
-\sum_{\beta_x \cap C_n = \emptyset} \varphi\left(\nu'(\beta_x)\right) &\leq \log \operatorname{card}\left(x \in E_n \mid \beta_x \cap C_n = \emptyset\right) \sum_{\beta_x \cap C_n = \emptyset} \nu'(\beta_x) + \frac{1}{e}\\
&= \log \operatorname{card}\left(x \in E_n \mid \beta_x \cap C_n = \emptyset\right) \nu'(C_n^c) + \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

luego en 4.48 obtenemos

$$\begin{aligned} nh_{\nu'}(f) &\leq \log \operatorname{card}\left(x \in E_n \mid \beta_x \subseteq C_n\right) \nu'(C_n) \\ &\quad + \log \operatorname{card}\left(x \in E_n \mid \beta_x \cap C_n = \emptyset\right) \nu'(C_n^c) + \frac{2}{e}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Por otro lado,

$$\operatorname{card}\left(x \in E_n \mid \beta_x \subseteq C_n\right) \cdot \min_{x \in E_n} \mu\left(\beta_x\right) \leq \sum_{\beta_x \subseteq C_n} \mu\left(\beta_x\right) = \mu(C_n)$$

y

$$\operatorname{card}\left(x \in E_n \mid \beta_x \cap C_n = \emptyset\right) \cdot \min_{x \in E_n} \mu\left(\beta_x\right) \leq \sum_{\beta_x \cap C_n = \emptyset} \mu\left(\beta_x\right) = \mu(C_n^c)$$

luego en 4.50 se observa que

$$nh_{\nu'}(f) \leq \log\left(\frac{\mu(C_n)}{\min\limits_{x \in E_n} \mu\left(\beta_x\right)}\right) \nu'(C_n) + \log\left(\frac{\mu(C_n^c)}{\min\limits_{x \in E_n} \mu\left(\beta_x\right)}\right) \nu'(C_n^c) + \frac{2}{e}. \tag{4.51}$$

Del lema 4.3.1 para $B = B_f(x, \varepsilon, n)$ sabemos que existe una constante $A_\varepsilon > 0$ que solo depende de ε tal que $A_\varepsilon e^{-nh(f)} \leq \mu\left(\overline{B}\right)$ luego, de 4.45 tenemos

$$A_\varepsilon e^{-nh(f)} \leq \mu\left(\overline{B}\right) \leq \mu\left(\overline{\beta_x}\right) \ \forall\, x \in E_n$$

en particular

$$A_\varepsilon e^{-nh(f)} \leq \min_{x \in E_n} \mu\left(\overline{\beta_x}\right) = \min_{x \in E_n} \mu\left(\beta_x\right) \tag{4.52}$$

consecuentemente,

$$\frac{\mu(C_n)}{\min\limits_{x \in E_n} \mu\left(\beta_x\right)} \leq \frac{\mu(C_n)}{A_\varepsilon e^{-nh(f)}} = \mu(C_n) A_\varepsilon^{-1} e^{nh(f)} \tag{4.53}$$

y

$$\frac{\mu(C_n^c)}{\min\limits_{x \in E_n} \mu\left(\beta_x\right)} \leq \frac{\mu(C_n^c)}{A_\varepsilon e^{-nh(f)}} = \mu(C_n^c) A_\varepsilon^{-1} e^{nh(f)}. \tag{4.54}$$

De 4.53 y 4.54 en 4.51 nos queda

$$nh_{\nu'}(f) \leq \log\left(\mu(C_n) A_\varepsilon^{-1} e^{nh(f)}\right) \nu'(C_n) + \log\left(\mu(C_n^c) A_\varepsilon^{-1} e^{nh(f)}\right) \nu'(C_n^c) + \frac{2}{e} \tag{4.55}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} \log\left(\mu(C_n) A_\varepsilon^{-1} e^{nh(f)}\right) \nu'(C_n) &= \log\left(\mu(C_n) A_\varepsilon^{-1}\right) \nu'(C_n) + \log\left(e^{nh(f)}\right) \nu'(C_n) \\ &= \log\left(\mu(C_n) A_\varepsilon^{-1}\right) \nu'(C_n) + nh(f) \nu'(C_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\log\big(\mu(C_n^c)A_\varepsilon^{-1}e^{nh(f)}\big)\nu'(C_n^c) &= \log\big(\mu(C_n^c)A_\varepsilon^{-1}\big)\nu'(C_n^c) + \log\big(e^{nh(f)}\big)\nu'(C_n^c)\\ &= \log\big(\mu(C_n^c)A_\varepsilon^{-1}\big)\nu'(C_n^c) + nh(f)\nu'(C_n^c)\end{aligned}$$

luego en 4.55 tenemos

$$nh_{\nu'}(f) \leq nh(f) + \log\big(\mu(C_n)A_\varepsilon^{-1}\big)\nu'(C_n) + \log\big(\mu(C_n^c)A_\varepsilon^{-1}\big)\nu'(C_n^c) + \frac{2}{e} \tag{4.56}$$

o equivalentemente

$$nh_{\nu'}(f) - nh(f) - \frac{2}{e} \leq \log\big(\mu(C_n)A_\varepsilon^{-1}\big)\nu'(C_n) + \log\big(\mu(C_n^c)A_\varepsilon^{-1}\big)\nu'(C_n^c). \tag{4.57}$$

Ahora, recordemos que $\lim_n \nu'(C_n) = 1$ y $\lim_n \mu(C_n) = 0$ entonces tomando límite cuando n tiende al infinito en 4.57 nos queda

$$\lim_n n(h_{\nu'}(f) - h(f)) - \frac{2}{e} \leq -\infty \tag{4.58}$$

esto en particular nos dice que $h_{\nu'}(f) < h(f)$ lo cual es una contradicción con 4.44 por tanto $\alpha = 0$, entonces $\nu = \mu$. Así μ es la única medida de máxima entropía. □

Observación 4.3.1. Del ejemplo 2.2.2 y de la sección 3.2 tenemos mostrado que el Shift de Bernoulli bilateral satisface las condiciones del teorema de Bowen por tanto, este sistema dinámico admite una única medida de máxima entropía y por los ejemplos 1.2.2 y 1.2.4 se sigue que esta medida de máxima entropía es la medida de Bernoulli asociada a los $p_{z_1}, p_{z_2}, \ldots, p_{z_d}$ tales que $p_{z_1} = p_{z_2} = \cdots = p_{z_d} = 1/d$.

Observación 4.3.2. Los difeomorfismos de Anosov o uniformemente hiperbólicos definidos en variedades diferenciables compactas, ver (Katok and Hasselblatt, 1995), también satisfacen las condiciones establecidas en el teorema de Bowen. Los difeomorfismos uniformemente hiperbólicos desempeñan un papel significativo en el análisis de sistemas dinámicos caóticos debido a su comportamiento dinámico ampliamente comprensible. Por otro lado, los difeomorfismos de Anosov ofrecen una perspectiva valiosa en la interpretación de fenómenos físicos. Por ejemplo, estos difeomorfismos pueden servir como modelos para comprender cómo las partículas interactúan con las paredes en un universo de billar, ocasionando reflexiones. Este enfoque ha tenido un impacto significativo en la física matemática y la mecánica clásica al proporcionar una base para comprender fenómenos como la dispersión de partículas.

Capítulo 5

Conclusiones

En el capítulo 2, para un espacio métrico compacto M arbitrario, logramos dotar al conjunto $\mathcal{M}_f(M)$ de las medidas de probabilidad de Borel invariantes por f, de una estructura de espacio métrico compacto, además logramos probar que la función de entropía $\varphi : \mathcal{M}_f(M) \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(\nu) = h_\nu(f)$ es semicontinua superiormente cuando existe alguna constante $\delta_0 > 0$ satisfaciendo

$$\operatorname{diam}(\mathcal{P}) < \delta_0 \implies \lim_n \operatorname{diam}(\mathcal{P}^n) = 0.$$

La proposición 2.2.2 nos asegura que las transformaciones expansivas admiten tales constantes δ_0 las cuales pueden ser tomadas como sus constantes de expansividad y así por la proposición 6.1.2 se llega a que las transformaciones expansivas admiten medidas de máxima entropía, abordando con ello el problema de la existencia de MME.

En el capítulo 3 desarrollamos la teoría necesaria para entender a la propiedad de especificación, así como algunas propiedades fundamentales.

En el capítulo 4 se desarrollaron algunas desigualdades técnicas convenientes relacionadas a la dinámica topológica de los sistemas dinámicos expansivos que satisfacen la propiedad de especificación, quienes participaron posteriormente de manera directa o indirecta de la prueba del Teorema de Bowen (teorema 4.3.1), luego de la presentación de dichas desigualdades se introduce a la medida buscada μ (medida de Bowen) como una distribución límite de las órbitas periódicas, esto es,

$$\mu = \lim_n \frac{1}{\operatorname{card}(Fix(f^n))} \sum_{x \in Fix(f^n)} \delta_x.$$

El lema 4.3.2 nos asegura que μ es ergódica, esto junto con el lema 4.3.1 y los resultados del lema 6.2.1 y del teorema de descomposición de Lebesgue (teorema 6.2.3), correspondientes a la teoría de medidas absolutamente continuas y mutuamente singulares, permiten concluir con la prueba del Teorema de Bowen, abordando así el problema de la unicidad de MME.

La parte teórica del presente trabajo ha sido aterrizada en un ejemplo en concreto: el Shift de Bernoulli. El ejemplo 2.2.2 nos dice que el shift de Bernoulli bilateral $\xi : \Sigma \to \Sigma$ es una transformación expansiva y en la sección 3.2 se probó que ξ satisface la propiedad de especificación, además sabemos que ξ es un homeomorfismo y que Σ es un espacio métrico compacto, con lo que estamos en las condiciones del teorema de Bowen, por ello el shift de Bernoulli bilateral admite una única medida de máxima entropía.

Queremos finalizar mencionando que una motivación del por qué se abordó el presente tópico en la tesis, se debe a que el problema de existencia y unicidad de medidas de máxima entropía sigue siendo actualmente un tópico de investigación, ya que el estudio de este tipo de problemas depende fuertemente de las propiedades intrínsecas del sistema dinámico. Trabajos recientes que abordan este problema para ciertos sistemas dinámicos pueden ser revisados en (Buzzi et al., 2022), (Rocha and Tahzibi, 2022), (Burguet, 2023), entre otros.

Capítulo 6

Apéndice

6.1. Nociones topológicas

Definición 6.1.1 (Espacio topológico)**.** Sea M un conjunto no vacío, una topología τ en M es una familia no vacía de subconjuntos de M tal que es cerrado por intersecciones finitas y por uniones arbitrarias. Un espacio topológico es un par (M, τ) en donde M es un conjunto no vacío y en donde τ es una topología en M.

Los elementos de una topología τ en M son denominados conjuntos abiertos de M. Sea $x \in M$, una vecindad V de x es un conjunto abierto de M tal que $x \in V$.

Ejemplo 6.1.1 (Topología discreta)**.** Sea M un conjunto no vacío. El conjunto potencia de M, $P(M)$ es una topología en M a la cual llamaremos *topología discreta* y la denotaremos con τ_{dis}. En esta topología, todos los subconjuntos de M son abiertos.

Definición 6.1.2 (Cobertura abierta)**.** Sea M un espacio topológico. Llamamos cobertura abierta de M a cualquier familia $\mathcal{U}$ de abiertos cuya unión es todo M.

Definición 6.1.3 (Espacio topológico compacto)**.** Sea M un espacio topológico. Diremos que M es compacto si toda cobertura abierta admite una subcobertura (esto es, una subfamilia que también es una cobertura) con un número finito de elementos.

Definición 6.1.4 (Espacio métrico)**.** Sea M un conjunto no vacío, una métrica d en M es una función $d : M \times M \to \mathbb{R}$ tal que satisface

1. $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in M$.

2. $d(x, y) = 0$ si y solamente si $x = y$.

3. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in M$.

4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in M$.

Un espacio métrico es un par $(M.d)$ en donde M es un conjunto no vacío y en donde d es una métrica en M.

Sea $x \in M$ y sea $r > 0$ con $B_d(x, r)$ representamos a la bola abierta de centro en x y de radio r, esta bola viene definida por

$$B_d(x, r) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}.$$

Ejemplo 6.1.2 (Métrica discreta)**.** Sea M un conjunto no vacío, la aplicación $d_{0,1}$: $M \times M \to \mathbb{R}$ definida por

$$d_{0,1}(x, y) = \begin{cases} 0 & ; \ x = y \\ 1 & ; \ x \neq y \end{cases}.$$

es una métrica en M la cual es denominada *métrica discreta*.

Observación 6.1.1. Todo espacio métrico (M, d) es un espacio topológico. En efecto, considere la colección de bolas abiertas

$$\mathscr{B} = \{B_d(x, r) \mid x \in M \text{ y } r > 0\}$$

y tome la colección $\mathcal{T}$ de uniones arbitrarias de bolas abiertas en M; esto es,

$$\mathcal{T} = \{\cup_{B \in \lambda} B \mid \lambda \subseteq \mathscr{B}\}$$

entonces la familia $\mathcal{T}$ es una topología en M y es denominada *topología métrica* inducida por d.

Definición 6.1.5 (Continuidad)**.** Sean M y N espacios topológicos y sea $f : M \to N$ una función, diremos que f es continua en M si $f^{-1}(V)$ es abierto en M para todo abierto V de N. Diremos que f es continua en $x_0 \in M$ si para cada abierto V de N con $f(x_0) \in V$ se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto de M.

Definición 6.1.6 (Homeomorfismo)**.** Sean M y N espacios topológicos y sea $f : M \to N$ una función. Diremos que f es un homeomorfismo si es continua biyectiva tal que su inversa $f^{-1} : N \to M$ también es continua.

Definición 6.1.7 (Semicontinuidad superior)**.** Sea M un espacio topológico y sea f : $M \to \mathbb{R}$ una función, diremos que f es semicontinua superiormente en $x_0 \in M$ si para cada $a \in \mathbb{R}$ con $f(x_0) < a$ existe una vecindad V de x_0 tal que $f(x) < a$ para todo $x \in V$. Diremos que f es semicontinua superiormente en M si es semicontinua superiormente en todo $x_0 \in M$.

Proposición 6.1.1. Sea M un espacio topológico y sea $\{f_n : M \to \mathbb{R}\}_n$ una sucesión de funciones continuas en $x_0 \in M$ entonces la función $f : M \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{ínf}_n f_n(x)$ es semicontinua superiormente en x_0.

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) < a$ es decir, $\text{ínf}_n f_n(x_0) < a$ entonces existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(x_0) < a$, lo que es equivalente a escribir que $x_0 \in f_{n_0}^{-1}(\langle -\infty, a\rangle)$ siendo $\langle -\infty, a\rangle$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ luego por continuidad de f_{n_0} se tiene que $f_{n_0}^{-1}(\langle -\infty, a\rangle)$ es abierto en M. Así, basta tomar $V = f_{n_0}^{-1}(\langle -\infty, a\rangle)$ que es una vecindad de x_0 para ver que si $x \in V$ entonces $f(x) = \text{ínf}_n f_n(x) \leq f_{n_0}(x) < a$. Esto prueba la proposición. $\square$

Proposición 6.1.2. Sea M un espacio topológico compacto y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente entonces, f es acotada superiormente y admite máximo en M.

Demostración. Sea $x \in M$ y sea $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < n_x$ entonces por hipótesis, existe V_x vecindad abierta de x tal que $f(y) < n_x$ para todo $y \in V_x$, esto es equivalente a escribir $V_x \subseteq f^{-1}(\langle -\infty, n_x\rangle)$. Luego,

$$M = \bigcup_{x\in M} V_x \subseteq \bigcup_{x\in M} f^{-1}(\langle -\infty, n_x\rangle) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\langle -\infty, n\rangle).$$

Note que $f^{-1}(\langle -\infty, n\rangle)$ es abierto para cada $n \in \mathbb{N}$ y como M es un espacio topológico compacto entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$M = \bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(\langle -\infty, n_j\rangle)$$

así, $f(x) < \text{máx}_{1\leq j\leq m} n_j$ para todo $x \in M$ y f es acotada. Veamos que f admite máximo en M, sea $b = \sup_{x\in M} f(x) \in \mathbb{R}$. Supongamos por contradicción que $f(x) < b$ para todo $x \in M$ entonces existe $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $f(x) < b - \frac{1}{n_x}$. Así, procediendo de forma análoga a lo anterior se tiene que

$$M \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(\left\langle -\infty, b - \frac{1}{n}\right\rangle\right),$$

de nuevo por compacidad de M se tiene que existe un entero positivo r tal que

$$M = \bigcup_{j=1}^{r} f^{-1}\left(\left\langle -\infty, b - \frac{1}{n_j}\right\rangle\right)$$

así, $f(x) < \text{máx}_{1\leq j\leq m} b - \frac{1}{n_j} < b$ para todo $x \in M$ lo cual contradice la condición de supremo para b. Se concluye que f alcanza su máximo en M. $\square$

Definición 6.1.8 (Continuidad uniforme)**.** Sean (M, d) y (N, ρ) espacios métricos, y sea $f : M \to N$ una función, diremos que f es uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in M$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Proposición 6.1.3. Sean M y N espacios métricos con M compacto, y sea $f : M \to N$ una función continua, entonces f es uniformemente continua.

Definición 6.1.9 (Número de Lebesgue)**.** Sea M un espacio topológico y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de M. Un número λ se llama *número de Lebesgue* del cubrimiento $\mathcal{U}$ si para cada $x \in M$, la bola de centro x y radio λ está contenida en alguno de los abiertos del cubrimiento.

En general, un cubrimiento abierto podría no admitir un número de Lebesgue, sin embargo esto no sucede si el espacio M es un espacio métrico compacto. Esto es, en todo espacio métrico compacto todo cubrimiento admite número de Lebesgue.

Lema 6.1.1 (Lema de Urysohn)**.** Sea M un espacio métrico y sean $A, B \subseteq M$ subconjuntos cerrados disjuntos de M entonces, existe una función continua $f : M \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in B$.

Demostración. Ver el teorema 33.1 de (Munkres, 2002, p. 237) □

6.2. Medida e integración

En esta sección estudiaremos las nociones básicas de los *espacios de medida*, intuitivamente estos espacios constituyen de una familia de conjuntos que se pueden *medir* junto con una aplicación que justamente devuelve la medida de cada conjunto. Además estudiaremos la integración en el sentido de Lebesgue.

Definición 6.2.1 (Álgebra)**.** Sea M un conjunto no vacío, un álgebra en M es una familia no vacía $\mathcal{B} \subseteq P(M)$ tal que es cerrado por complementos; esto es, $A^c \in \mathcal{B}$ para todo $A \in \mathcal{B}$ y tal que es cerrado por unión de dos conjuntos; esto es, $A \cup B \in \mathcal{B}$ para todo $A, B \in \mathcal{B}$.

Es inmediato verificar que un álgebra también es cerrado por intersecciones finitas, por uniones finitas y por diferencia de conjuntos.

Definición 6.2.2 (σ-álgebra)**.** Sea M un conjunto no vacío, una σ-álgebra en M es una familia no vacía $\mathcal{B} \subseteq P(M)$ tal que es cerrado por complementos; esto es, $A^c \in \mathcal{B}$ para todo $A \in \mathcal{B}$ y tal que es cerrado por uniones numerables; esto es, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{B}$ para toda sucesión de conjuntos $(A_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$.

De manera análoga a un álgebra, se puede verificar que una σ-álgebra es cerrada por intersecciones numerables.

Un *espacio medible* es una dupla $(M, \mathcal{B})$ en donde M es un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra en M. Además, si $E \in \mathcal{B}$ entonces se dice que E es un conjunto $\mathcal{B}$-medible o simplemente conjunto medible.

Proposición 6.2.1. Sea $\{\mathcal{B}_\lambda : \lambda \in I\}$ una colección de σ-álgebras en M, entonces la colección $\mathcal{B} = \bigcap_{\lambda\in I} \mathcal{B}_\lambda$ es una σ-álgebra en M.

Demostración.
Como $\emptyset \in \mathcal{B}_\lambda$ para cada $\lambda \in I$ entonces $\emptyset \in \mathcal{B}$, por otro lado si $E \in \mathcal{B}$ entonces $E \in \mathcal{B}_\lambda$ para cada $\lambda \in I$ lo que implica que $E^c \in \mathcal{B}_\lambda$ para cada $\lambda \in I$ luego $E^c \in \mathcal{B}$ y así se tiene que $\mathcal{B}$ es cerrado por complementos, finalmente sea $(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ entonces $E_j \in \mathcal{B}_\lambda$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y para cada $\lambda \in I$, luego $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{B}_\lambda$ para cada $\lambda \in I$ y así $\cup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{B}$ con lo que se verifica que $\mathcal{B}$ es cerrado por uniones numerables.
Por lo tanto $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra. □

Definición 6.2.3 (σ-álgebra generada)**.** Sea $\mathcal{E} \subseteq P(M)$, la σ-álgebra generada por $\mathcal{E}$, denotada por $\sigma(\mathcal{E})$, se define como la menor σ-álgebra en M que contiene a $\mathcal{E}$; esto es, si $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra en M tal que $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}$. En este sentido,

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E}\subseteq\mathcal{B}} \mathcal{B} \ ; \ \mathcal{B} \text{ es } \sigma\text{-álgebra en } M.$$

Observe que la proposición 6.2.1 garantiza la buena definición de *sigma álgebra generada.*

Definición 6.2.4 (σ-álgebra de Borel)**.** Sea M un espacio métrico, la σ-álgebra generada por la familia de abiertos de M es denominada σ-álgebra de Borel en M y la denotaremos por $\mathcal{B}_M$, los conjuntos de $\mathcal{B}_M$ son denominados conjuntos de Borel de M.

$$\mathcal{B}_M = \sigma\left(\{\text{abiertos de } M\}\right)$$

Cabe recalcar que en la definición anterior se puede usar más generalmente un espacio topológico en vez de solo un espacio métrico. Así, para un espacio topológico (M, τ) la σ-álgebra de Borel viene dada por $\mathcal{B}_M = \sigma(\tau)$.

Siempre que nos refiramos a $\mathbb{R}$ lo haremos considerando su métrica usual, y por ende también consideraremos su σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ salvo se diga lo contrario.

Definición 6.2.5 (Medida)**.** Sea $(M, \mathcal{B})$ un espacio medible, una medida en $(M, \mathcal{B})$ es una función $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ tal que verifica lo siguiente:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Si $(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ (esta propiedad es llamada σ-aditividad).

Sea M un espacio métrico (o topológico). Una medida de Borel en M es cualquier medida en el espacio medible $(M, \mathcal{B}_M)$.

A continuación se observan dos ejemplos clásicos de medidas que son fáciles de construir y de visualizar.

Ejemplo 6.2.1. Medida de Dirac
Sea $(M, \mathcal{B})$ un espacio medible. Para $p \in M$ fijo tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \mu: & \mathcal{B} & \to & [0, +\infty] \\ & E & \mapsto & \mu(E) = \begin{cases} 0 & ; \ p \notin E \\ 1 & ; \ p \in E \end{cases} \end{array}$$

es una medida en $(M, \mathcal{B})$ llamada *medida de Dirac* la cual suele ser denotada por $\mu = \delta_p$.

Se denomina *espacio de medida* a la terna $(M, \mathcal{B}, \mu)$ en donde $(M, \mathcal{B})$ es un espacio medible y μ es una medida en $(M, \mathcal{B})$.

Uno puede darse cuenta sin problemas que cualquier combinación lineal finita y no negativa de medidas también es una medida; esto es, si $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ son medidas en $(M, \mathcal{B})$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ entonces $\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu_j$ también es una medida en $(M, \mathcal{B})$.

Observación 6.2.1. Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida. Diremos que μ es una *medida finita* si $\mu(M) < +\infty$. En particular si $\mu(M) = 1$ entonces diremos que μ es una *medida de probabilidad*.

Algunas de las propiedades básicas sobre medidas se encuentran resumidas en el siguiente teorema.

Teorema 6.2.1. Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida, se cumple:

1. **Monotonía:** Si $E, F \in \mathcal{B}$ tal que $E \subseteq F$ entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$
2. **Subaditividad:** Si $(E_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ entonces $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$
3. **Continuidad inferior:** Si $(E_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles; esto es, tal que $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$ entonces $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_j \mu(E_j)$.
4. **Continuidad superior:** Si $(E_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles; esto es, tal que $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots$ y tal que $\mu(E_1) < +\infty$ entonces $\mu(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) = \lim_j \mu(E_j)$.

Demostración. Ver el Teorema 1.8 de (Folland, 1999, p. 25). $\square$

Definición 6.2.6 (Premedida)**.** Sea M un conjunto no vacío y sea $\mathcal{A}$ un álgebra en M. Una premedida en $\mathcal{A}$ es una función $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tal que verifica lo siguiente:

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$
2. Si $(E_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ es una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos tal que $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{A}$, entonces $\mu_0(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(E_j)$.

Las noción de premedida finita es análoga a la de medida.

Teorema 6.2.2 (Extensión). Sea $\mathcal{A}$ un álgebra en M y μ_0 una premedida finita en $\mathcal{A}$, entonces existe una única medida $\mu : \sigma(\mathcal{A}) \to [0, +\infty]$ tal que $\mu|_{\mathcal{A}} = \mu_0$.

Demostración. Ver el Teorema A.1.13 de (Oliveira and Viana, 2014, p. 429). □

El teorema anterior resulta ser una importante herramienta pues nos permite construir medidas a partir de premedidas. Por ejemplo, ahora construiremos una medida en $[0, 1]$. Para cada subintervalo I de $[0, 1]$ denotemos con $l(I)$ a su longitud y sea $\mathcal{A}$ la familia de uniones finitas disjuntas de subintervalos en $[0, 1]$ entonces, $\mathcal{A}$ es un álgebra de $[0, 1]$. Definamos la aplicación $m_0 : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ dada por $m_0(\bigcup_{j=1}^n I_j) = \sum_{j=1}^n m_0(I_j)$ para cada sucesión finita $(I_j)_{j=1}^n$ de intervalos disjuntos. Se prueba que m_0 es una premedida finita en $\mathcal{A}$ y que $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}_{[0,1]}$ entonces por el teorema de extensión existe una única medida $m : \mathcal{B}_{[0,1]} \to [0, +\infty]$ tal que extiende la premedida m_0 a $\mathcal{B}_{[0,1]}$. Esta medida m se denomina medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

Definición 6.2.7. Una medida μ es un espacio topológico se dice que es *regular* si y solamente si para cada conjunto medible B y para cada $\varepsilon > 0$ existen conjuntos U abierto y F cerrado tales que $F \subseteq B \subseteq U$ con $\mu(U - F) < \varepsilon$.

Proposición 6.2.2. Toda medida de probabilidad definida en un espacio métrico es regular.

Demostración. Ver la proposición A.3.2 de (Oliveira and Viana, 2014, p. 448) □

Definición 6.2.8. Sean μ y ν un par de medidas en $(M, \mathcal{B})$. Diremos que ν es absolutamente continua respecto a μ, lo cual denotamos con $\nu \ll \mu$, si $\nu(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(E)$. Esto es,

$$\nu \ll \mu \Longleftrightarrow \text{para todo } E \in \mathcal{B} : \big(\mu(E) = 0 \Longrightarrow \nu(E) = 0\big)$$

Ejemplo 6.2.2. Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y sea $\varphi : M \to \mathbb{R}$ una aplicación medible y μ-integrable, entonces la medida $\nu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\nu(E) = \int_E \varphi \, d\mu$$

para todo $E \in \mathcal{B}$ es absolutamente continua respecto a μ.

Lema 6.2.1. Sean $(M, \mathcal{B})$ un espacio medible y $f : M \to M$ una aplicación medible. Si μ y ν son medidas de probabilidad f-invariantes tales que μ es ergódica y ν es absolutamente continua respecto a μ, entonces $\mu = \nu$. Esto es, si μ es ergódica entonces,

$$\nu \ll \mu \Longrightarrow \nu = \mu.$$

Demostración. Ver el Lema 4.3.1 de (Oliveira and Viana, 2014, p. 118) □

Definición 6.2.9. Sean μ y ν un par de medidas en $(M, \mathcal{B})$. Diremos que μ y ν son mutuamente singulares si existen conjuntos medibles disjuntos A y B tales que $A \cup B = M$, $\mu(A) = 0$ y $\nu(B) = 0$. En tal caso escribimos $\mu \perp \nu$.

Teorema 6.2.3 (Descomposición de Lebesgue)**.** Dadas dos medidas finitas μ y ν, podemos escribir $\nu = \nu_s + \nu_a$ donde ν_s y ν_a son medidas finitas tales que $\nu_a \ll \mu$ y $\mu \perp \nu_s$.

Demostración. Ver el Teorema 3.8 de (Folland, 1999, p. 90) $\square$

Definición 6.2.10. Sean $(M, \mathcal{B})$ y $(N, \mathcal{C})$ espacios medibles, decimos que la aplicación $f : M \to N$ es $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$-medible si y solo si $f^{-1}(E) \in \mathcal{B}$ para cada $E \in \mathcal{C}$.

Ejemplo 6.2.3. Sea $(M, \mathcal{B})$ un espacio medible y $E \subseteq M$ arbitrario. La función característica de E denotada por $\mathcal{X}_E : M \to \mathbb{R}$ se define como sigue

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1 & ; \ x \in E \\ 0 & ; \ x \notin E \end{cases} .$$

Se verifica que $\mathcal{X}_E$ es medible si y solamente si $E \in \mathcal{B}$.

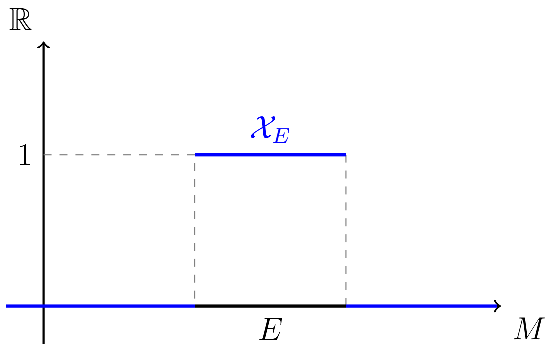


Figura 6.1: Función característica

Ejemplo 6.2.4. Toda función continua definida entre espacios topológicos es Borel medible, esto es, f es medible considerando las σ-álgebras de Borel tanto en el conjunto dominio como en el conjunto de llegada.

Ejemplo 6.2.5. Toda aplicación constante es medible.

Ejemplo 6.2.6. Si $f, g : M \to \mathbb{R}$ son aplicaciones medibles entonces las funciones $f + g$ y $f \cdot g$ también son medibles.

Ejemplo 6.2.7. Si $\{f_n : M \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de aplicaciones medibles entonces las funciones $\sup_n f_n$, $\text{ínf}_n f_n$, $\text{lím sup}_n f_n$ y $\text{lím inf}_n f_n$ también son medibles.

Definición 6.2.11 (Función simple)**.** Sea $(M, \mathcal{B})$ un espacio medible. Diremos que la aplicación $f : M \to \mathbb{R}$ es *simple* si es de la forma $f = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathcal{X}_{E_j}$ con $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ y con $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{B}$ disjuntos dos a dos y cuya unión es M.

Note que toda función simple es medible.

Definición 6.2.12 (Integral de una función simple no negativa). Sea $f = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathcal{X}_{E_j}$ una función simple no negativa, la integral de f respecto a μ denotada por $\int f\, d\mu$ se define por

$$\int f\, d\mu = \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(E_j)$$

Teorema 6.2.4. Sean $(M, \mathcal{B})$ un espacio medible y $f : M \to [0, +\infty]$ una función $\mathcal{B}$-medible, entonces existe una sucesión $\{f_n : M \to [0, \infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tal que

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots \leq f$$

y f_n converge puntualmente a f.

Demostración. Ver el Teorema 2.10 de (Folland, 1999, p. 47). □

Definición 6.2.13 (Integral de una función medible no negativa). Sea $f : M \to [0, +\infty]$ una función medible no negativa. La integral de f con respecto a μ, denotada como $\int f\, d\mu$ se define por

$$\int f\, d\mu = \sup \left\{ \int \varphi\, d\mu \;\middle|\; 0 \leq \varphi \leq f \;\wedge\; \varphi \text{ es simple} \right\}.$$

Note que las definiciones 6.2.12 y 6.2.13 son equivalentes sobre funciones simples.

Teorema 6.2.5 (**Teorema de la convergencia monótona**). Si $\{f_n : M \to [0, +\infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles tal que $f_n \leq f_{n+1}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{lím} f_n(x) = f(x)\ \forall\, x \in M$ entonces

$$\operatorname{lím} \int f_n\, d\mu = \int \operatorname{lím} f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$$

Demostración. Ver el Teorema 2.14 de (Folland, 1999, p. 50). □

Sean $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $f : M \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{B}$-medible. La parte positiva y la parte negativa de f denotadas por f^+ y f^- respectivamente se definen como sigue

$$\begin{array}{rccc} f^+ : & M & \to & [0, +\infty] \\ & x & \mapsto & \operatorname{máx}\{f(x), 0\} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccc} f^- : & M & \to & [0, +\infty] \\ & x & \mapsto & \operatorname{máx}\{-f(x), 0\} \end{array}$$

Con ayuda del ejemplo 6.2.7 podemos darnos cuenta de que estas funciones son $\mathcal{B}$-medibles desde que f lo es, además se verifica fácilmente que $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Definición 6.2.14 (Integral de una función realvaluada). Sean $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $f : M \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{B}$-medible. La integral de f respecto a μ, denotada como $\int f\, d\mu$ se define por

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu \tag{6.1}$$

siempre y cuando la diferencia dada en la relación 6.1 tenga sentido. Además, decimos que f es integrable con respecto a μ o que f es μ-integrable si y solamente si se verifica $\int f^+ \, d\mu < +\infty$ y $\int f^- \, d\mu < +\infty$.

Lema 6.2.2 (Lema de Fatou). Si $\{f_n : M \to [0, +\infty]\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas, entonces

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu$$

Demostración. Ver el Teorema 2.18 de (Folland, 1999, p. 52). □

Teorema 6.2.6 (Teorema de la Convergencia Dominada). Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y sea $\{f_n : M \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables tal que

1. $\lim f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in M$.
2. $\exists\, g : M \to [0, +\infty]$ integrable tal que $|f_n| \leq g$ para todo $x \in M$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces f es integrable y

$$\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$$

Demostración. Ver el Teorema 2.24 de (Folland, 1999, p. 54). □

Junto con el teorema de la convergencia monótona y el lema de Fatou, el teorema de la convergencia dominada conforma uno de los tres teoremas fundamentales de convergencia.

6.3. Shift de Bernoulli

Sea el conjunto finito $X = \{z_1, z_2, \ldots z_d\}$. Denotemos con Σ^+ al conjunto de las sucesiones unilaterales de elementos en X; esto es,

$$\Sigma^+ = X^{\mathbb{N}} = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ x_n \in X \right\}.$$

A Σ^+ lo podemos dotar de una estructura topológica, más específicamente de una estructura de espacio métrico compacto. En efecto, en X consideremos la métrica discreta $d_{0,1} : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por

$$d_{0,1}(u, v) = \begin{cases} 0 & ; \ u = v \\ 1 & ; \ u \neq v \end{cases},$$

esta métrica tiene la característica de inducir la topología discreta en X la cual es compacta desde que X es un conjunto finito, entonces en $\Sigma^+ = X^{\mathbb{N}}$ podemos considerar la métrica $d : \Sigma^+ \times \Sigma^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$d\left((x_n)_n, (y_n)_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{0,1}(x_n, y_n)}{2^n}$$

la cual permite visualizar a Σ^+ como un espacio métrico *compacto*. Denotaremos con $\mathcal{T}_d$ a la topología métrica inducida por d.

Por otra parte, para cada $a_m, \ldots, a_n \in X$ fijos, definamos el conjunto

$$[m : a_m, \ldots, a_n] = \left\{(x_n)_n \in \Sigma \;:\; x_m = a_m, \cdots, x_n = a_n\right\}$$

al que llamaremos *cilindro* de longitud $n - m + 1$. La familia de cilindros

$$\mathcal{C} = \{[m : a_m, \ldots, a_n] \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ y } a_m, \ldots, a_n \in X\}$$

induce una topología $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ en Σ^+ la cual viene dada por

$$\mathcal{T}_\mathcal{C} = \left\{ \bigcup_{C \in \lambda} C \;\middle|\; \lambda \subseteq \mathcal{C} \right\}.$$

Lo interesante de esto es que las topologías $\mathcal{T}_d$ y $\mathcal{T}_\mathcal{C}$ son de hecho la misma, como probaremos en el lema 6.3.1.

Lema 6.3.1. $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\mathcal{C}$

Demostración. Sea $E \in \mathcal{C}$ entonces existen números naturales m, n y existen $a_i \in X$ para cada $i = m, \ldots, n$ tales que $E = [m : a_m, \ldots, a_n]$. Sea $x = (x_k)_k \in E$, considere

$$r = \text{mín}\left\{ \frac{1}{2^{i+1}} \;:\; i = m, \ldots, n \right\}$$

y sea $y \in B_d(x, r)$ entonces para cada $i = m, \ldots, n$ se tiene

$$\frac{d_{0,1}(x_i, y_i)}{2^i} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{0,1}(x_j, y_j)}{2^j} = d(x, y) < r \leq \frac{1}{2^{i+1}}$$

de ahí que $d_{0,1}(x_i, y_i) < 1/2$ luego, $y_i = x_i$ para cada $i = m, \ldots, n$ en particular $y_i = a_i$ para cada $i = m, \ldots, n$ lo cual implica que $y \in E$, es decir $B_d(x, r) \subseteq E$ y se verifica que E es un conjunto abierto con la métrica d para todo cilindro E, como consecuencia toda unión arbitraria de cilindros también es abierto en la métrica d, esto es, $\mathcal{T}_\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}_d$.

Por otra parte, sea $x_0 \in \Sigma^+$ y sea $r > 0$. Tome $x \in B_d(x_0, r)$ y considere

$$\varepsilon = r - d(x, x_0) > 0$$

así, $B_d(x,\varepsilon) \subseteq B_d(x_0,r)$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^{n_0}} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Es claro que

$$x = (x_k)_k \in \underbrace{[1 : x_1, \ldots, x_{n_0}]}_{A_x}.$$

Sea $y \in A_x$ entonces $y_j = x_j$ para cada $j = 1,2,\ldots,n_0$ en particular $d_{0,1}(x_j,y_j) = 0$ para cada $j = 1,\ldots,n_0$ luego,

$$d(y,x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{0,1}(x_j,y_j)}{2^j} = \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \frac{d_{0,1}(x_j,y_j)}{2^j} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$$

entonces $y \in B_d(x,\varepsilon)$ luego, $A_x \subseteq B_d(x,\varepsilon) \subseteq B_d(x_0,r)$ así,

$$B_d(x_0,r) = \bigcup_{x \in B_d(x_0,r)} A_x$$

en donde $A_x \in \mathcal{C}$ para cada $x \in B(x_0,r)$ luego, todas las bolas abiertas en la métrica d son abiertos en la topología $\mathcal{T_C}$ por tanto, la unión arbitraria de bolas abiertas en la métrica d también es un conjunto abierto en la topología $\mathcal{T_C}$, esto es, $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T_C}$ con lo cual concluye el lema. □

Como consecuencia del lema anterior se tiene que la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\Sigma^+}$ puede ser representada de dos formas:

$$\mathcal{B}_{\Sigma^+} = \sigma(\mathcal{T}_d) \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_{\Sigma^+} = \sigma(\mathcal{T_C}).$$

Teniendo esto, nos conviene introducir alguna medida en el espacio medible $(\Sigma^+, \mathcal{B}_{\Sigma^+})$. Consideremos la familia $\mathcal{A}$ de uniones finitas disjuntas de cilindros; esto es,

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_i : A_i \in \mathcal{C} \text{ para cada } i = 1,\ldots,n \right\},$$

se prueba que la colección $\mathcal{A}$ es un álgebra en Σ^+. Sean $p_{z_1}, p_{z_2}, \ldots, p_{z_d} \geq 0$ números reales fijos arbitrarios tales que $p_{z_1} + \cdots + p_{z_d} = 1$, definamos la aplicación $\mu_0 : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ como sigue

- $\mu_0(\emptyset) = 0$ y $\mu_0([m : a_m,\ldots,a_n]) = p_{a_m} \cdot \ldots \cdot p_{a_n}$ para cada $a_m,\ldots,a_n \in X$.
- Si $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ es una unión disjunta de cilindros, entonces $\mu_0(A) = \sum_{j=1}^{k} \mu_0(A_j)$.

Resulta que μ_0 es una premedida finita en $\mathcal{A}$, luego por el teorema de extensión (teorema 6.2.2) existe una única medida, a la cual denotaremos por μ_{Ber}, tal que extiende μ_0 a $\mathcal{B}_{Ber} := \sigma(\mathcal{A})$, esta medida es llamada *medida de Bernoulli* en Σ^+ asociada a los números $p_{z_1}, p_{z_2}, \ldots, p_{z_d}$.

Además, note que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ luego, $\mathcal{B}_{Ber} = \sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) = \mathcal{B}_{\Sigma^+}$. En adición, desde que Σ^+ es un espacio métrico compacto se tiene que toda unión arbitraria de abiertos puede ser expresada como unión numerable de aquí que $\mathcal{T}_{\mathcal{C}} \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ luego, $\mathcal{B}_{\Sigma^+} \subseteq \mathcal{B}_{Ber}$ y en consecuencia, la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_{\Sigma^+}$ coincide con $\mathcal{B}_{Ber}$; esto es,

$$\mathcal{B}_{\Sigma^+} = \mathcal{B}_{Ber}$$

con lo que tenemos formado el espacio de medida

$$\left(\Sigma^+, \mathcal{B}_{\Sigma^+}, \mu_{Ber}\right).$$

En Σ^+ definamos la aplicación $\xi : \Sigma^+ \to \Sigma^+$ dada por $\xi\left((x_n)_n\right) = (x_{n+1})_n$, esta aplicación es llamada *shift de Bernoulli* unilateral. Con la topología dada en Σ^+ se observa que el shift de Bernoulli unilateral es una aplicación continua y sobreyectiva como veremos en el lema 6.3.2

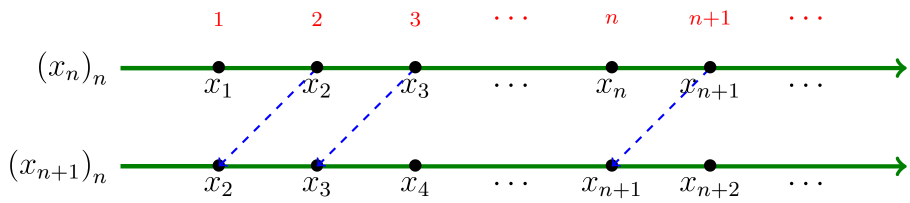


Figura 6.2: Shift unilateral

Lema 6.3.2. El Shift de Bernoulli unilateral es continuo y sobreyectivo.

Demostración. Note que

$$\xi^{-1}([m : a_m, \ldots, a_n]) = [m+1 : a_m, \ldots, a_n],$$

en particular $\xi^{-1}(E) \in \mathcal{C}$ para todo $E \in \mathcal{C}$ luego, no es difícil llegar a que $\xi^{-1}(E) \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ para todo $E \in \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ lo que verifica que ξ sea continua, por otra parte para cada $(y_n)_n \in \Sigma^+$ basta considerar $(x_n)_n$ como sigue

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_n &= y_{n-1} \quad \text{para } n \geq 2 \end{aligned}$$

para darse cuenta que $\xi\left((x_n)_n\right) = (y_n)_n$ y así, se tiene que ξ es sobreyectiva. $\square$

Por otro lado, así como hemos considerado las sucesiones unilaterales, también podemos considerar las sucesiones bilaterales. En este sentido, sea Σ el conjunto de las sucesiones bilaterales de elementos en X; esto es,

$$\Sigma = X^{\mathbb{Z}} = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \ : \ x_n \in X \right\}.$$

El proceso para dotar a Σ de una estructura de espacio métrico compacto y de una estructura de espacio de medida, tales que ambas estructuras sean compatibles, es análogo a lo desarrollado para Σ^+, basta por ejemplo considerar la métrica $d : \Sigma \times \Sigma \to \mathbb{R}$ definida por

$$d\left((x_n)_n, (y_n)_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d_{0,1}(x_n, y_n)}{2^{|n|}}$$

y todo lo demás se define de la misma manera, desde las topologías $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ y $\mathcal{T}_d$ hasta el álgebra $\mathcal{A}$ y la medida de Bernoulli μ_{Ber} en Σ, manteniendo los siguientes resultados:

$$\mathcal{B}_{\Sigma} = \sigma\left(\mathcal{T}_d\right) = \sigma\left(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}\right)$$

y

$$\mathcal{B}_{\Sigma} = \mathcal{B}_{Ber}.$$

Sea la aplicación $\xi : \Sigma \to \Sigma$ dada por $\xi\left((x_n)_n\right) = (x_{n+1})_n$, esta aplicación es llamada *shift de Bernoulli* bilateral. En la topología de Σ se verifica que ξ es un homeomorfismo. La prueba de esto es similar al lema 6.3.2.

Bibliografía

Barreira, L. (2012). Ergodic theory, hyperbolic dynamics and dimension theory. *dimension*, 37(37DXX):37C45.

Bowen, R. (1974). Some systems with unique equilibrium states. *Mathematical systems theory*, 8(3):193–202.

Burguet, D. (2023). Maximal measure and entropic continuity of lyapunov exponents for c r surface diffeomorphisms with large entropy. In *Annales Henri Poincaré*, pages 1–26. Springer.

Buzzi, J., Crovisier, S., and Sarig, O. (2022). Measures of maximal entropy for surface diffeomorphisms. *Annals of Mathematics*, 195(2):421–508.

Folland, G. B. (1999). *Real analysis: modern techniques and their applications*, volume 40. John Wiley & Sons.

Katok, A. and Hasselblatt, B. (1995). *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Number 54. Cambridge university press.

Misiurewicz, M. (1973). Diffeomorphism without any measure with maximal entropy. *BULLETIN DE L ACADEMIE POLONAISE DES SCIENCES-SERIE DES SCIENCES MATHEMATIQUES ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES*, 21(10):903–910.

Munkres, J. R. (2002). Topología (2ª edición).

Oliveira, K. and Viana, M. (2014). *Fundamentos da teoria ergódica*.

Rocha, J. E. and Tahzibi, A. (2022). On the number of ergodic measures of maximal entropy for partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center leaves. *Mathematische Zeitschrift*, 301(1):471–484.

Ruette, S. (2015). Chaos on the interval-a survey of relationship between the various kinds of chaos for continuous interval maps. *arXiv preprint arXiv:1504.03001*.

Sigmund, K. (1974). On dynamical systems with the specification property. *Transactions of the American Mathematical Society*, 190:285–299.