Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Teorema de representación de stone para álgebras booleanas

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Kenny Jean Pierre GUZMAN HERRERA

ASESOR

Dr. Gabriel Armando MUÑOZ MÁRQUEZ

Lima, Perú

2023

Referencia bibliográfica

Guzman, K (2023). *Teorema de representación de stone para álgebras booleanas*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Kenny Jean Pierre Guzman Herrera
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	47302935
URL de ORCID	NO APLICA
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Gabriel Armando Muñoz Márquez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	44444774
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-5064-1250
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Alfonso Pérez Salvatierra
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	06445739
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.3. Álgebra

Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	Universidad Nacional Mayor de San Marcos País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Coordenadas geográficas Latitud: -12.058333 Longitud: -77.083333
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Mayo 2023 – octubre 2023
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú. Decana de América
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 08:30 horas del viernes 27 de octubre del 2023, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2023): Dr. Alfonso Pérez Salvatierra (PRESIDENTE), Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (MIEMBRO) y el Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: **“TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE STONE PARA ÁLGEBRAS BOOLEANAS”**, presentado por el señor **Bachiller KENNY JEAN PIERRE GUZMAN HERRERA**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación Sobresaliente, con un calificativo promedio de Dieciocho (18)

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller KENNY JEAN PIERRE GUZMAN HERRERA** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 09:15 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
PRESIDENTE

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO

Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez
MIEMBRO ASESOR

Yo Gabriel Armando Muñoz Márquez en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N° 001651-2023-D-FCM/UNMSM de la tesis, cuyo título es TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE STONE PARA ÁLGEBRAS BOOLEANAS,

presentado por el bachiller Kenny Jean Pierre Guzman Herrera para optar el título Profesional de Licenciado en Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas. CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 9 % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del título correspondiente.

Firma del Asesor ______________________

DNI: 44444774

Nombres y apellidos del asesor:
Gabriel Armando Muñoz Márquez

Dedicatoria

Mi tesis se lo dedico a mi madre y hermanos, quienes que me han dado la fortaleza y el apoyo de sobresalir ante las adversidades, asimismo dedico a mi padre que esta en el cielo el profesional que soy hoy en día .

Agradecimientos

Agradezco a mi madre **Juliana Herrera Ortiz** por ser parte fundamental de mi vida, por ser la persona que me ha apoyado incondicionalmente en momentos mas difíciles de mi vida y ayudarme en sobresalir en cada adversidad que se me ha presentado.

Agradezco a mi padre **Jesus Berardo Guzman Anticona**, por haber sido el pilar principal del profesional que soy, desde el momento que inicie mi carrera profesional me brindo su apoyo psicológico, emocional y económico para poder avanzar mi carrera universitaria.

Agradezco a mi hermanos, por seguir estando conmigo en mi camino profesional dandome su apoyo incondicional y motivándome seguir adelante en mi vida.

Agradezco a mi asesor de tesis el **Dr. Gabriel Armando Muñoz Márquez**, por transmitirme sus conocimientos y motivarme en la orientación de la investigación realizada en este trabajo.

Agradezco a todos los docentes que han sido partícipe en mi aprendizaje durante la carrera, así como motivarme a seguir adelante, y compartiendo su basto conocimiento para ser el profesional que siempre he anhelado ser.

Agradezco a mis amigos de la universidad que me dieron el empuje necesario para sobrepasar cada obstáculo que se me presentó en la carrera y en este trabajo de grado.

Índice general

Resumen

Teorema de representación de Stone para álgebras booleanas

Kenny Jean Pierre Guzman Herrera

Agosto - 2023

Asesor : Dr Gabriel Armando Muñoz Márquez .
Título obtenido : Licenciado en Matemática.

En este trabajo, presentará y motivará el desarrollo del teorema de Stone para álgebra s booleanas, que permite establecer que cada álgebra booleana es isomorfa a un campo de conjuntos. Se centrará en el estudio de la existencia de una conexión entre la construcción del álgebra de Boole y la construcción topológica de los espacios de Stone. Además, se demostrará que existe una relación entre los álgebras booleanas y anillos booleanos.

Palabras claves:
Álgebra booleana, Ideales booleanas, Homomorfismo booleana, Topología discreta, Teorema de representación de Stone.

Abstract

Stone's representation theorem for Boolean álgebra
Kenny Jean Pierre Guzman Herrera

August - 2023

Adviser : Dr Gabriel Armando Muñoz Márquez .
Obtained : Graduate in Mathematics.

In this paper, we will present and motivate the development of Stone's theorem for Boolean álgebra s, which allows us to establish that every Boolean álgebra is isomorphic to a field of sets. It will focus on the study of the existence of a connection between the construction of Boolean álgebra and the topological construction of Stone spaces. In addition, it will be shown that there is a relationship between Boolean álgebra s and Boolean rings.

Keywords:
Boolean álgebra , Boolean ideals, Boolean homomorphism, Discrete topology, Stone's representation theorem.

Introducción

Los teoremas de representación en matemática nos facilitan realizar investigaciones de estructuras abstractas que desconocemos, al considerar utilizar estructuras más conocidas en el desarrollo.

El nacimiento del álgebra abstracta se remonta en los años 1854 y el álgebra universal se estableció en la década de 1930 como herramienta unificadora para la teoría topológica.

El topólogo M. Stone introdujo en 1934 la noción de topología en el álgebra y demostró su famoso teorema de representación para álgebras de Boole finitas[10]. De forma independiente, aproximadamente al mismo tiempo (1934), Garrett Birkhoff demostró un teorema de representación para redes distributivas finitas [9].

En el mismo período de tiempo (1936) Stone descubrió un método para extender su resultado de representación de álgebras booleanas finitas a álgebras booleanas arbitrarias [8], [10] y Birkhoff lo adaptó a redes distributivas arbitrarias. [9]

En este trabajo nos centraremos en demostrar la conexión entre la construcción álgebra ica de las álgebras booleanas y la construcción topológica de los espacios de Stone, probando el teorema de representación de Stone para álgebras booleanas.

En el capítulo 1 denominado **Nociones Preliminares** se describe las definiciones del álgebra de Boole, su relación con el tema de lógica proposicional y sus diferentes propiedades del álgebra booleana que es importantes ya que utilizará a lo largo de este trabajo para dar resultados de algunas demostraciones de teoremas y proposiciones en los capítulos siguientes. Se presenta en este capítulo, la equivalencia que existe entre el álgebra Boole y el anillo booleano, que permite la existencia de los ideales y homomorfismo. A lo largo del capítulo demostraremos que existe la relación de orden parcial en el álgebra booleana que da paso al concepto de retículos.

En el capítulo 2 denominado **Ideales y Homomorfismos booleanos** se presenta el conceptos de ideales asociados al álgebra booleana, el ideal propio, el ideal maximal y el teorema del ideal maximal que tiene por la finalidad mencionar que todo ideal propio en un álgebra booleana está contenido en algún ideal maximal. Además, se analizará las diferentes conexiones entre los entre las álgebras booleanas mediante homomorfismo, se tendrá aportes importantes como que no existe un homomorfismo trivial entre álgebra booleana y el teorema del homomorfismo.

En el capítulo 3 denominado **Teorema de Representación de Stone** se presenta las definiciones de espacio de Stone , las topologías discretas, la existencia del espacio dual y la prueba del teorema de representación de Stone para álgebra booleana.

Capítulo 1

Nociones preliminares

1.1. Álgebra booleana

Definición 1.1 (Álgebra booleana) *Sea A un conjunto no vacío con 2 operaciones binarias $(\vee)$, $(\wedge)$. Se denomina al espacio $(A, \vee, \wedge)$ un álgebra Booleana si y solo si verifica los siguientes enunciados:*

1. *Las operaciones $(\vee)$ y $(\wedge)$ son conmutativas; es decir, Sean p y $q \in A$:*

   a) $p \vee q = q \vee p$

   b) $p \wedge q = q \wedge p$

2. *Existen los elementos identidad 0 y $1 \in A$ que cumple las siguientes condiciones:*

   a) $p \vee 0 = p$, $p \in A$

   b) $p \wedge 1 = p$, $p \in A$

3. *Los elementos de A cumple la ley distributiva.*
   Sea $p, q, r \in A$:

   a) $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

   b) $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

4. *Para cada $p \in A$, existe $p^* \in A$ (la cual llamaremos complemento de p), tal que:*

   a) $p \vee p^* = 1$

   b) $p \wedge p^* = 0$

Ejemplo 1.1 *Sea X un conjunto, definimos el conjunto de pares de X por $P(X)$, tal que con las operaciones binarias $\cup$ y $\cap$ definidas por:*

$$A \cup B = A \vee B$$
$$A \cap B = A \wedge B$$

para $A, B \in P(x)$, se tiene que $(P(x), \cup, \cap)$ es un álgebra booleana.

En efecto, Sean A, B y $C \in P(X)$:

- Cumple la ley de conmutativa.

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- Existen elementos identidad $\emptyset$ y X tal que:

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap X = A$$

- cumple la ley distributiva:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- para todo $A \in P(X)$, existe un A^c tal que se define:

$$A \cap A^c = \emptyset$$
$$A \cup A^c = X$$

Por lo tanto $(P(X), \cup, \cap)$ es un álgebra booleana. $\square$

Lema 1.1 *Sea A un álgebra booleana, para todo $p \in A$ se cumple: $p \wedge 0 = 0$ y $p \vee 1 = 1$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright\ p \wedge 0 &= (p \wedge 0) \vee 0 && \text{(0 elemento identidad)} \\ &= (p \wedge 0) \vee (p \wedge p^*) && \text{(complemento de p)} \\ &= p \wedge (0 \vee p^*) && \text{(distributiva)} \\ &= p \wedge (p^* \vee 0) && \text{(conmutativa)} \\ &= p \wedge p^* && \text{(0 elemento identidad)} \\ &= 0 && \text{(complemento de p)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright\ p \vee 1 &= (p \vee 1) \wedge 1 && \text{(1 elemento identidad)} \\ &= (p \vee 1) \wedge (p \vee p^*) && \text{(complemento de p)} \\ &= p \vee (1 \wedge p^*) && \text{(distributiva)} \\ &= p \vee (p^* \wedge 1) && \text{(conmutativa)} \\ &= p \vee p^* && \text{(1 elemento identidad)} \\ &= 1 && \text{(complemento de p)} \end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.2 *Sea A un álgebra booleana, para todo $p \in A$ se cumple: $p \wedge p = p$ y $p \vee p = p$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
p \wedge p &= (p \wedge p) \vee 0 && \text{(0 elemento identidad)}\\
&= (p \wedge p) \vee (p \wedge p^*) && \text{(complemento de p)}\\
&= p \vee (p \wedge p^*) && \text{(distributiva)}\\
&= p \vee 0 && \text{(complemento de p)}\\
&= p && \text{(0 elemento identidad)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p \vee p &= (p \vee p) \wedge 1 && \text{(1 elemento identidad)}\\
&= (p \vee p) \wedge (p \vee p^*) && \text{(complemento de p)}\\
&= p \wedge (p \vee p^*) && \text{(distributiva)}\\
&= p \wedge 1 && \text{(complemento de p)}\\
&= p && \text{(1 elemento identidad)}
\end{aligned}$$

□

Lema 1.3 *Sea A es un álgebra booleana y sean $p, q \in A$ tales que $p \wedge q = 0$ y $p \vee q = 1$ entonces $q = p^*$.*

Demostración. Tenemos:

$$\begin{aligned}
q &= 1 \wedge q && \text{(1 elemento identidad)}\\
&= (p \vee p^*) \wedge q && \text{(complemento de p)}\\
&= q \wedge (p \vee p^*) && \text{(conmutativa)}\\
&= (q \wedge p) \vee (q \wedge p^*) && \text{(distributiva)}\\
&= (p \wedge q) \vee (p^* \wedge q) && \text{(conmutativa)}\\
&= 0 \vee (p^* \wedge q) && \text{(hipótesis)}\\
&= (p \wedge p^*) \vee (p^* \wedge q) && \text{(complemento de p)}\\
&= (p^* \wedge p) \vee (p^* \wedge q) && \text{(conmutativa)}\\
&= p^* \wedge (p \vee q) && \text{(distributiva)}\\
&= p^* \wedge 1 && \text{(hipótesis)}\\
&= p^* && \text{(1 elemento identidad)}
\end{aligned}$$

□

Lema 1.4 *Sea A un álgebra booleana. Para todo $p \in A$, $(p^*)^* = p$.*

Demostración. Sabemos:

- ▶ $p \wedge p^* = 0$ (p complemento)
  $p^* \wedge p = 0 \ \ldots (1)$ (conmutativa)
- ▶ $p \vee p^* = 1$ (por p complemento)
  $p^* \vee p = 1 \ \ldots (2)$ (conmutativa)

De (1) y (2) por el lema 1.3, tenemos: $p = (p^*)^*$ □

Lema 1.5 (Ley de absorción) *Sea A un álgebra booleana. Para todo $p, q \in A$ entonces:*

$$\begin{aligned} p \vee (p \wedge q) &= p \\ p \wedge (p \vee q) &= p \end{aligned}$$

Demostración.
Vamos a demostrar $p \vee (p \wedge q) = p$:

$$\begin{aligned} p \vee (p \wedge q) &= (p \wedge 1) \vee (p \wedge q) && \text{(1 elemento identidad)} \\ &= p \wedge (1 \vee q) && \text{(distributiva)} \\ &= p \wedge 1 && \text{(lema 1.1)} \\ &= p && \text{(1 elemento identidad)} \end{aligned}$$

Vamos a demostrar $p \wedge (p \vee q) = p$:

$$\begin{aligned} p \wedge (p \vee q) &= (p \vee 0) \wedge (p \vee q) && \text{(0 elemento identidad)} \\ &= p \vee (0 \wedge q) && \text{(distributiva)} \\ &= p \vee 0 && \text{(lema 1.1)} \\ &= p && \text{(0 elemento identidad)} \end{aligned}$$

□

Lema 1.6 (Propiedad asociativa) *Sea A un álgebra booleana. Para todo $p, q, r \in A$, se cumple:*

$$\begin{aligned} (p \vee q) \vee r &= p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r &= p \wedge (q \wedge r) \end{aligned}$$

Demostración. Demostraremos el caso $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$

$$\begin{aligned} &[(p \vee q) \vee r] \wedge [p \vee (q \vee r)] \\ &= \{[(p \vee q) \vee r] \wedge p\} \vee \{[(p \vee q) \vee r] \wedge (q \vee r)\} && \text{(distributiva)} \\ &= \{p \wedge [(p \vee q) \vee r]\} \vee \{[r \vee (p \vee q)] \wedge (r \vee q)\} && \text{(conmutativa)} \\ &= \{[p \wedge (p \vee q)] \vee (p \wedge r)\} \vee \{r \vee [(p \vee q) \wedge q]\} && \text{(distributiva)} \\ &= \{[p \wedge (p \vee q)] \vee (p \wedge r)\} \vee \{r \vee [q \wedge (q \vee p)]\} && \text{(conmutativa)} \\ &= [p \vee (p \wedge r)] \vee (r \vee q) && \text{(lema 1.5)} \\ &= p \vee (r \vee q) && \text{(lema 1.5)} \\ &= p \vee (q \vee r) && \text{(conmutativa)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &[p \vee (q \vee r)] \wedge [(p \vee q) \vee r] \\ &= \{[p \vee (q \vee r)] \wedge (p \vee q)\} \vee \{[p \vee (q \vee r)] \wedge r\} && \text{(distributiva)} \\ &= \{(p \vee q) \wedge [p \vee (q \vee r)]\} \vee \{r \wedge [p \vee (r \vee q)]\} && \text{(conmutativa)} \\ &= \{p \vee [q \wedge (q \vee r)]\} \vee \{(r \wedge p) \vee [r \wedge (r \vee q)]\} && \text{(distributiva)} \\ &= (p \vee q) \vee [(r \wedge p) \vee r] && \text{(lema 1.5)} \\ &= (p \vee q) \vee [r \vee (r \wedge p)] && \text{(conmutativa)} \\ &= (p \vee q) \vee r && \text{(lema 1.5)} \end{aligned}$$

Como $[(p\vee q)\vee r]\wedge[p\vee(q\vee r)]=[p\vee(q\vee r)]\wedge[(p\vee q)\vee r]$ por ser conmutativo del operador $\wedge$, por lo tanto $p\vee(q\vee r)=(p\vee q)\vee r$.

Análogamente, vamos a demostrar que $(p\wedge q)\wedge r=p\wedge(q\wedge r)$.

$$
\begin{aligned}
&[(p\wedge q)\wedge r]\vee[p\wedge(q\wedge r)] &\\
&=\{[(p\wedge q)\wedge r]\vee p\}\wedge\{[(p\wedge q)\wedge r]\vee(q\wedge r)\} &\text{(distributiva)}\\
&=\{p\vee[(p\wedge q)\wedge r]\}\wedge\{[r\wedge(p\wedge q)]\vee(r\wedge q)\} &\text{(conmutativa)}\\
&=\{[p\vee(p\wedge q)]\wedge(p\vee r)\}\wedge\{r\wedge[(p\wedge q)\vee q]\} &\text{(distributiva)}\\
&=\{[p\vee(p\wedge q)]\wedge(p\vee r)\}\wedge\{r\wedge[q\vee(q\wedge p)]\} &\text{(conmutativa)}\\
&=[p\wedge(p\vee r)]\wedge(r\wedge q) &\text{(lema 1.5)}\\
&=p\wedge(r\wedge q) &\text{(lema 1.5)}\\
&=p\wedge(q\wedge r) &\text{(conmutativa)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[p\wedge(q\wedge r)]\vee[(p\wedge q)\wedge r] &\\
&=\{[p\wedge(q\wedge r)]\vee(p\wedge q)\}\wedge\{[p\wedge(q\wedge r)]\vee r\} &\text{(distributiva)}\\
&=\{(p\wedge q)\vee[p\wedge(q\wedge r)]\}\wedge\{r\vee[p\wedge(r\wedge q)]\} &\text{(conmutativa)}\\
&=\{p\wedge[q\vee(q\wedge r)]\}\wedge\{(r\vee p)\wedge[r\vee(r\wedge q)]\} &\text{(distributiva)}\\
&=(p\wedge q)\wedge[(r\vee p)\wedge r] &\text{(lema 1.5)}\\
&=(p\wedge q)\wedge[r\wedge(r\vee p)] &\text{(conmutativa)}\\
&=(p\wedge q)\wedge r &\text{(lema 1.5)}
\end{aligned}
$$

Como $[(p\wedge q)\wedge r]\vee[p\wedge(q\wedge r)]=[p\wedge(q\wedge r)]\vee[(p\wedge q)\wedge r]$ por ser conmutativo del operador $\vee$, por lo tanto $p\wedge(q\wedge r)=(p\wedge q)\wedge r$. □

1.2. Anillo booleano

Definición 1.2 *Sea A un conjunto no vacío donde están definidas dos operaciones las tales llamaremos suma y producto en A y denotaremos como $(+)$ y $(.)$ respectivamente. Llamaremos $(A,+,.)$ anillo si verifica las siguientes propiedades, para cuales quiera que sean $p,q,r\in A$:*

a) $(p+q)+r=p+(q+r)$

b) Existe $0\in A$ *talque* $p+0=0+p=p$

c) Para todo $p\in A$ *existe un único* $-p$ *tal que:* $p+(-p)=(-p)+p=0$

d) $p+q=q+p$

e) $(p.q).r=p.(q.r)$

f) $p.(q+r)=p.q+p.r$; $(p.q)+r=p.r+q.r$

Nota: Para mejor entendimiento en la estructura de un anillo, definimos para $p,q\in A$ bajo la operación $(.)$: $p.q=pq$.

Definición 1.3 (Anillo booleano) *Sea A un conjunto no vacío, se dice que A es un anillo booleano, si es un anillo con identidad tal que para cada $x \in A$ es idempotente, es decir, cumple lo siguiente $x^2 = x$.*

Ejemplo 1.2 *El anillo de número enteros de modulo 2 es un anillo booleano.*

En efecto, se define el anillo $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}; \overline{1}\}$ el anillo de modulo 2 con las operaciones usuales $(+), (.)$,entonces :

$$\overline{0}^2 = \overline{0}\,\overline{0} = \overline{00} = \overline{0}$$
$$\overline{1}^2 = \overline{1}\,\overline{1} = \overline{11} = \overline{1}$$

Entonces sus elementos son idempotentes, por lo tanto $(\mathbb{Z}_2, +, .)$ es un anillo booleano.
$\square$

Ejemplo 1.3 *Sea A el conjunto de todos los elementos idempotentes en un anillo conmutativo $(R, +, .)$ con la identidad, se define una nueva suma de p y $q \in A$:*

$$p\#q = p + q - 2pq$$

y la multiplicación usual del anillo R. Es $(A, \#, .)$ un anillo booleano.

En efecto, En primer lugar, vamos a demostrar que $p\#q$ y pq son idempotentes para p y $q \in A$.
A es cerrado respecto a su operación $(\#)$ y $(.)$.
Entonces $p\#q \in A$ y $pq \in A$
Sean p y $q \in A$:

$$\begin{aligned}(p\#q)^2 &= (p + q - 2pq)^2 \\ &= p^2 + q^2 + 4p^2q^2 + 2(pq - 2p^2q - 2pq^2) \\ &= p^2 + q^2 + 4p^2q^2 + 2pq - 4p^2q - 4pq^2 \\ &= p + q + 4pq + 2pq - 4pq - 4pq \\ &= p + q - 2pq = p\#q\end{aligned}$$

por lo tanto $p\#q$ cumple la condición de idempotente .

$$\begin{aligned}(pq)^2 &= (pq)(pq) \\ &= p^2q^2 \\ &= pq\end{aligned}$$

por lo tanto pq cumple la condición de idempotente.
Ahora veamos A bajo la operación $\#$ y . cumple las condiciones de anillo.

- ▶ $\#$ es asociativa sean $p, q, r \in A$:

$$\begin{aligned}(p\#q)\#r &= (p\#q) + r - 2(p\#q)r \\ &= (p + q - 2pq) + r - 2(p + q - 2pq)r \\ &= p + q - 2pq + r - 2pr - 2qr + 4pqr \\ &= p + q + r - 2qr - 2pq - 2pr + 4pqr \\ &= p + (q + r - 2qr) - 2p(q + r - 2pqr) \\ &= p + (q\#r) - 2p(q\#r) \\ &= p\#(q\#r)\end{aligned}$$

- para un $p \in A$, existe un $0 \in A$ tal que :

$$p\#0 = p + 0 - 2p0 = p$$
$$0\#p = 0 + p - 20p = p$$

  por lo tanto $p\#0 = 0\#p$

- para un $p \in A$:

$$p\#p = p + p - 2p(p) = 0$$

  por lo tanto, para cada $p \in A$, existe su opuesto aditivo es el mismo p

- Es asociativa la operación (.), esto se debe obtiene por R

- Para todo $p \in A$, existe 1 tal que $p1 = p$ y $1p = p$, donde $1 \in R$ es la identidad bajo la operación (.)

- Sean $p, q, r \in A$:

$$\begin{aligned} p(q\#r) &= p(q + r - 2qr) \\ &= pq + pr - 2pqr \\ &= pq + pr - 2p^2qr \\ &= pq + pr - 2(pq)(pr) \\ &= (pq\#pr) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p\#q)r &= (p + q - 2pq)r \\ &= pr + qr - 2pqr \\ &= pr + qr - 2pqr^2 \\ &= pr + qr - 2(pr)(qr) \\ &= pr\#qr \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(A, \#, .)$ es un anillo booleano. □

Lema 1.7 *Sea A un anillo booleano y dados $p, q \in A$, se verifica $pq = -qp$.*

Demostración. Como A es un anillo booleano, tenemos $p + q \in A$ y $pq \in A$ (por cerradura)
Además,

$$\begin{aligned} (p + q)^2 &= p + q && \\ (p + q)(p + q) &= p + q && \\ p^2 + pq + qp + q^2 &= p + q && \\ p + pq + qp + q &= p + q && (p \text{ y } q \text{ son idempotentes}) \\ pq + qp &= 0 && (\text{neutro aditivo de } p + q) \\ pq &= -pq && (\text{opuesto aditivo de } pq) \end{aligned}$$

□

Teorema 1.1 *Sea A un anillo booleano, entonces A es un anillo Conmutativo.*

Demostración. Sean $p, q \in A$, Como A es un anillo booleano tenemos $p + q \in A$ y $pq \in A$ (por cerradura), entonces:

$$\begin{aligned}
(pq)^2 &= pq \\
(pq)(pq) &= pq \\
(-qp)(-qp) &= pq && \text{(lema 1.7)} \\
(qp)^2 &= pq \\
qp &= pq
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.2 *Sea A un anillo booleano, entonces A es de característica 2, es decir para todo $p \in A$ entonces $p + p = 0$*

Demostración. A es un anillo entonces $p + p \in A$ (por cerradura), tenemos:

$$\begin{aligned}
(p+p)^2 &= p + p \\
(p+p)(p+p) &= p + p \\
p^2 + p^2 + p^2 + p^2 &= p + p \\
p + p + p + p &= p + p && (p \text{ idempotente}) \\
(p+p) + (p+p) &= p + p
\end{aligned}$$

y como 0 es el único neutro aditivo para el anillo A (por definición), entonces: $p+p = 0$.
□

A continuación, veremos la relación existente entre el álgebra booleana y los anillos booleanos.

Definición 1.4 *En todo anillo booleano con la operación binaria (+) y (.), podemos definir una similitud de operaciones usadas en la teoría de conjuntos, las cuales se define:*

$$\begin{aligned}
p \wedge q &= pq && \textit{Conjunción} \\
p \vee q &= p + q + pq && \textit{Disyunción} \\
p^* &= 1 + p && \textit{Complemento}
\end{aligned}$$

Proposición 1.1 *Sea A un anillo booleano y sean $p, q \in A$ se cumple:*

$$\begin{aligned}
p + q &= (p \wedge q^*) \vee (q \wedge p^*) \\
pq &= p \wedge q
\end{aligned}$$

Demostración. Por la definición 4, tenemos que $p \wedge q = pq$, entonces falta probar

$p+q=(p\wedge q^*)\vee(q\wedge p^*)$, la cual tenemos :

$$\begin{aligned}(p\wedge q^*)\vee(q\wedge p^*) &= (pq^*)\vee(qp^*)\\ &= pq^*+qp^*+(pq^*)(qp^*)\\ &= p(1+q)+q(1+p)+(p(1+q))(q(1+p))\\ &= p+pq+q+qp+(p+pq)(q+qp)\\ &= p+q+pq+qp^2+pq^2+p^2q^2\\ &= p+pq+q+qp+pq+pq\\ &= p+q\end{aligned}$$

□

Teorema 1.3 *Todo anillo booleano es un álgebra booleana. y viceversa, toda álgebra booleana es un anillo booleano.*

Demostración. Por la definición 4, sea el anillo $(A,+,.,1,0)$ con las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned}p\wedge q &= pq\\ p\vee q &= p+q+pq\\ p^* &= 1+p\end{aligned}$$

vamos a probar $(A,\vee,\wedge,*)$ es un álgebra booleana.

1. $\vee$ y $\wedge$ son conmutativos.
   en efecto, sean $p,q\in A$:

$$\begin{aligned}p\vee q &= p+q+pq\\ &= q+p+qp\\ &= q\vee p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\wedge q &= pq\\ &= qp\\ &= q\wedge p\end{aligned}$$

2. Existen elemento en A que son identidades relativas a $\wedge$, $\vee$.
   en efecto, sea $p\in A$:

$$\begin{aligned}p\vee 0 &= p+0+p0\\ &= p+0\\ &= p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\wedge 1 &= p1\\ &= p\end{aligned}$$

3. Demostraremos que $\vee$ $\wedge$ cumple la propiedad distributiva
   en efecto, sean $p, q, r \in A$:

$$\begin{aligned}
p \wedge (q \vee r) &= p \wedge (q + r + qr) \\
&= p(q + r + qr) \\
&= pq + pr + pqr \\
&= pq + pr + p^2qr \\
&= pq + pr + (pq)(pr) \\
&= (pq) \vee (pr) \\
&= (p \wedge q) \vee (p \wedge r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p \vee (q \wedge r) &= p \vee (qr) \\
&= p + qr + p(qr) \\
&= p + qr + pqr + (pq + pq) + (qr + qr) + (pqr + pqr) \\
&= p^2 + pr + p^2r + qp + qr + qpr + p^2q + pqr + p^2rq \\
&= (p + q + pq)(p + r + pr) \\
&= (p + q + pq) \wedge (p + r + pr) \\
&= (p \vee q) \wedge (p \vee r)
\end{aligned}$$

4. dado un $p \in A$, entonces existe un p^* tal que verificaremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
p \wedge p^* &= pp^* \\
&= p(1 + p) \\
&= p + p^2 \\
&= p + p \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p \vee p^* &= p + p^* + pp^* \\
&= p + 1 + p + p(1 + p) \\
&= 1 + p + p + p + p \\
&= 1 + (p + p) + (p + p) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(A, \wedge, \vee, *)$ es un álgebra booleana.

Ahora de la hipótesis $(A, \wedge, \vee, *)$ un álgebra booleana con las definiciones dadas por la proposición 4, es decir :

$$\begin{aligned}
p + q &= (p \wedge q^*) \vee (q \wedge p^*) \\
pq &= p \wedge q
\end{aligned}$$

Vamos a probar $(A, +, ., 0, 1)$ es un anillo booleano.

1. para $p, q \in A$ entonces $p + q$ y $pq \in A$.
   en efecto :

$$\begin{aligned}(p+q)^2 &= (p+q)(p+q)\\ &= (p+q) \wedge (p+q)\\ &= p+q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(pq)^2 &= (pq)(pq)\\ &= (pq) \wedge (pq)\\ &= pq\end{aligned}$$

2. para $p, q, r \in A$:

$$\begin{aligned}
&p + (q + r)\\
&= [p \wedge (q+r)^*] \vee [(q+r) \wedge p^*]\\
&= [p \wedge ((q \wedge r^*) \vee (r \wedge q^*))^*] \vee [((q \wedge r^*) \vee (r \wedge q^*)) \wedge p^*]\\
&= [p \wedge ((q^* \vee r) \wedge (r^* \vee q))] \vee [((q \wedge r^*) \vee (r \wedge q^*)) \wedge p^*]\\
&= [p \wedge (q^* \vee r) \wedge (r^* \vee q)] \vee [((q \wedge r^* \wedge p^*) \vee (r \wedge q^* \wedge p^*)]\\
&= [(p \wedge (q^* \vee r)) \wedge (r^* \vee q)] \vee [(p^* \wedge q \wedge r^*) \vee (p^* \wedge q^* \wedge r)]\\
&= [((p \wedge q^*) \vee (p \wedge r)) \wedge (r^* \vee q)] \vee [((p^* \wedge q) \wedge r^*) \vee ((p^* \wedge q^*) \wedge r)]\\
&= [((p \wedge q^*) \wedge (r^* \vee q)) \vee ((p \wedge r)) \wedge (r^* \vee q))] \vee [((p^* \wedge q) \wedge r^*) \vee ((p^* \wedge q^*) \wedge r)]\\
&= ((p \wedge q^*) \wedge (r^* \vee q)) \vee ((p \wedge r) \wedge (r^* \vee q)) \vee ((p^* \wedge q) \wedge r^*) \vee ((p^* \wedge q^*) \wedge r)\\
&= ((p \wedge q^*) \wedge (r^* \vee q)) \vee ((p^* \wedge q) \wedge r^*) \vee ((p \wedge r) \wedge (r^* \vee q)) \vee ((p^* \wedge q^*) \wedge r)\\
&= ((p \wedge q^*) \wedge r^*) \vee (p \wedge q^* \wedge q)) \vee ((p^* \wedge q) \wedge r^*) \vee ((p \wedge r \wedge r^*) \vee (p \wedge r \wedge q))\\
&\vee ((p^* \wedge q^*) \wedge r)\\
&= ((p \wedge q^*) \wedge r^*) \vee ((p^* \wedge q) \wedge r^*) \vee (p \wedge r \wedge q)) \vee ((p^* \wedge q^*) \wedge r)\\
&= [((p \wedge q^*) \vee (p^* \wedge q)) \wedge r^*)] \vee [((p \wedge q) \vee (p^* \wedge q^*)) \wedge r)]\\
&= [((p \wedge q^*) \vee (p^* \wedge q)) \wedge r^*)] \vee [((p \wedge q) \vee p^*) \wedge ((p \wedge q) \vee q^*)) \wedge r)]\\
&= [((p \wedge q^*) \vee (p^* \wedge q)) \wedge r^*)] \vee [((p \vee p^*) \wedge (q \vee p^*)) \wedge ((p \vee q^*) \wedge (q \vee q^*)) \wedge r)]\\
&= [((p \wedge q^*) \vee (p^* \wedge q)) \wedge r^*)] \vee [((q \vee p^*) \wedge (p \vee q^*)) \wedge r)]\\
&= [((p \wedge q^*) \vee (p^* \wedge q)) \wedge r^*)] \vee [((q^* \wedge p) \vee (p^* \wedge q))^* \wedge r)]\\
&= [((p \wedge q^*) \vee (p^* \wedge q)) \wedge r^*)] \vee [((p \wedge q^*) \vee (p^* \wedge q))^* \wedge r)]\\
&= [(p+q) \wedge r^*] \vee [r \wedge (p+q)]\\
&= (p+q)+r
\end{aligned}$$

3. para $p \in A$, existe un $0 \in A$, tal que:

$$\begin{aligned}p + 0 &= (p \wedge 0^*) \vee (0 \wedge p^*)\\ &= (p \wedge 1) \vee (0p^*)\\ &= p \vee 0\\ &= p\end{aligned}$$

4. para $p \in A$, existe un $p^* \in A$, tal que:

$$\begin{aligned} p + (p^*) &= (p \vee (p^*)^*) \vee (p^* \wedge p^*) \\ &= (p \wedge p) \vee p^* p^* \\ &= pp \vee p^* p^* \\ &= p^2 \vee (p^*)^2 \\ &= p \vee p^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. La operación $(+)$ es conmutativa.
   Sean $p, q \in A$:

$$\begin{aligned} p + q &= (p \wedge q^*) \vee (q \wedge p^*) \\ &= (q \wedge p^*) \vee (p \wedge q^*) \\ &= q + p \end{aligned}$$

6. La operación $(.)$ es asociativa.
   Sean $p, q, r \in A$:

$$\begin{aligned} (pq)r &= (pq) \wedge r \\ &= (p \wedge q) \wedge r \\ &= p \wedge (q \wedge r) \\ &= p \wedge (qr) \\ &= p(qr) \end{aligned}$$

7. Para $p \in A$, existe $1 \in A$, tal que:

$$\begin{aligned} p1 = p \wedge 1 = p \\ 1p = 1 \wedge p = p \end{aligned}$$

8. Para un $p, q, r \in A$:

$$\begin{aligned} p(q + r) &= p \wedge (q + r) \\ &= p \wedge [(q \wedge r^*) \vee (r \wedge q^*)] \\ &= [p \wedge (q \wedge r^*)] \vee [p \wedge (r \wedge q^*)] \\ &= [(p \wedge q) \wedge r^*] \vee [(p \wedge r) \wedge q^*] \\ &= [(p \wedge q) \wedge r^*] \vee [(p \wedge q) \wedge p^*] \vee [(p \wedge r) \wedge q^*] \vee [(p \wedge r) \wedge p^*] \\ &= [(p \wedge q) \wedge (r^* \vee p^*)] \vee [(p \wedge r) \wedge (q^* \vee p^*)] \\ &= [(p \wedge q) \wedge (r \wedge p)^*] \vee [(p \wedge r) \wedge (q \wedge p)^*] \\ &= [(p \wedge q) \wedge (p \wedge r)^*] \vee [(p \wedge r) \wedge (p \wedge q)^*] \\ &= [(pq) \wedge (pr)^*] \vee [(pr) \wedge (pq)^*] \\ &= pq + pr \end{aligned}$$

9. para $p \in A$:

$$p^2 = p.p = p \wedge p = p$$

Por lo tanto $(A, +, ., 0, 1)$ es un anillo booleano. □

1.3. Orden

Lema 1.8 *Sea A un álgebra booleana. Para $p, q \in A$, $p \wedge q = p$ si y solo si $p \vee q = q$*

Demostración.
$(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} p \vee q &= (p \wedge q) \vee q \quad \text{(hipótesis)} \\ &= q \vee (p \wedge q) \\ &= q \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned} p \wedge q &= p \wedge (p \vee q) \quad \text{(hipótesis)} \\ &= p \end{aligned}$$

□

Definición 1.5 *Sea A un álgebra booleana y p, $q \in A$. Definimos "p es menor o igual que q" si y solo si $p \wedge q = p$ o $p \vee q = q$ y lo denotaremos con $p \leq q$.*

Definición 1.6 *Sea A un álgebra booleana. la relación $\leq$ es totalmente ordenado sobre A, si para p, $q \in A$ entonces $p \leq q$ o $q \leq p$.*

Lema 1.9 *Sea A un álgebra booleana. la relación $\leq$ es de orden parcial sobre A, si cumples las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $x \in A$, $p \leq p$ (Reflexivo)*
2. *Para todo $p, q \in A$, si $p \leq q$ y $q \leq p$ entonces $p = q$. (Antisimétrica).*
3. *si $p \leq q$ y $q \leq r$ entonces $p \leq r$ (Transitiva).*

Demostración.

1. Sabemos que $p \wedge p = p$ y $p \vee p = p$, para todo $p \in A$, lo cual verifica el enunciado (1).
2. por la hipótesis:

$$\begin{aligned} p \leq q \rightarrow p \wedge q = p \quad &\text{o} \quad p \vee q = q \\ q \leq p \rightarrow q \wedge p = q \quad &\text{o} \quad q \vee p = p \end{aligned}$$

   Como A es conmutativa tenemos $p \wedge q = q \wedge p$ y $p \vee q = q \vee p$. Por lo tanto: $p = q$

3. por la hipótesis:

$$\begin{aligned} p \leq q \rightarrow p \wedge q = p \quad &\text{o} \quad p \vee q = q \\ q \leq r \rightarrow q \wedge r = q \quad &\text{o} \quad q \vee r = p \end{aligned}$$

Luego, si:

$$
\begin{aligned}
p \wedge r &= (p \wedge q) \wedge r \\
&= p \wedge (q \wedge r) \\
&= p \wedge q \\
&= p \\
p \vee r &= p \vee (q \vee r) \\
&= (p \vee q) \vee r \\
&= q \vee q \\
&= r
\end{aligned}
$$

ambos resultados permiten afirmar que $p \leq r$.

□

Lema 1.10 *Sea A un álgebra booleana y $\leq$ una relación de orden parcial sobre A. Para $p, q \in A$, $p \leq q$ si y solo si $p \wedge q^* = 0$.*

Demostración.
($\Rightarrow$)

$$
\begin{aligned}
p \leq q &\to p \vee q = q \\
&\to (p \vee q)^* = q^* \\
&\to p^* \wedge q^* = q^* \\
&\to p \wedge p^* \wedge q^* = p \wedge q^* \\
&\to 0 \wedge q^* = p \wedge q^* \\
&\to 0 = p \wedge q^*
\end{aligned}
$$

($\Leftarrow$)

$$
\begin{aligned}
& p \wedge q^* = 0 \\
& p \wedge q^* = (p \wedge p^*) \wedge q^* \\
& (p \wedge q^*) \vee (p \wedge q^*) = (p \wedge q^*) \vee (p \wedge p^* \wedge q^*) \\
& (p \vee p^*) \wedge q^* = (p \wedge p^* \wedge q^*) \vee (p^* \wedge q^*) \\
& 1 \wedge q^* = (p \vee 1) \wedge (p^* \wedge q^*) \\
& q^* = 1 \wedge (p^* \wedge q^*) \\
& q^* = p^* \wedge q^* \\
& q = p \vee q \\
& \to p \leq q
\end{aligned}
$$

□

Lema 1.11 *Sea A un álgebra booleana y $\leq$ una relación de orden parcial sobre A. Se cumple para $p, q \in A$:*

1. *$0 \leq p$ y $p \leq 1$ para todo $p \in A$*

2. *si* $p \leq q$ *entonces* $q^* \leq p^*$

3. *si* $p \leq q$ *y* $r \leq s$ *entonces* $p \wedge r \leq q \wedge s \quad y \quad p \vee r \leq q \vee s$.

Demostración.

1. por definición de álgebra booleana, tenemos que $0 \vee p = p$ y $p \wedge 1 = p$ para todo $p \in A$, entonces $0 \leq p$ y $p \leq 1$.

2.
$$\begin{aligned} p \leq q &\rightarrow p \wedge q = p \quad \text{o} \quad p \vee q = q \\ &\rightarrow (p^*)^* \wedge (q^*)^* = (p^*)^* \quad \text{o} \quad (p^*)^* \vee (q^*)^* = (q^*)^* \\ &\rightarrow (p^* \vee q^*)^* = (p^*)^* \quad \text{o} \quad (p^* \wedge q^*)^* = (p^*)^* \\ &\rightarrow p^* \vee q^* = p^* \quad \text{o} \quad p^* \wedge q^* = p^* \end{aligned}$$

   por las condiciones obtenidas, tenemos: $q^* \leq p^*$.

3. Sabemos del lema anterior: $p \leq q \rightarrow p \wedge q^* = 0$ y $r \leq s \rightarrow r \wedge s^* = 0$.
   Luego :

$$\begin{aligned} (p \wedge q^*) \vee (r \wedge s^*) &= 0 \\ r \wedge [(p \wedge q^*) \vee (r \wedge s^*)] &= r \wedge 0 \\ [r \wedge (p \wedge q^*)] \vee [r \wedge (r \wedge s^*)] &= 0 \\ (r \wedge p \wedge q^*) \vee (r \wedge s^*) &= 0 \\ p \wedge [(r \wedge p \wedge q^*) \vee (r \wedge s^*)] &= p \wedge 0 \\ p \wedge [(r \wedge p \wedge q^*) \vee (r \wedge s^*)] &= 0 \\ (p \wedge r \wedge p \wedge q^*) \vee (p \wedge r \wedge s^*) &= 0 \\ (p \wedge r \wedge q^*) \vee (p \wedge r \wedge s^*) &= 0 \\ (p \wedge r) \wedge (q^* \vee s^*) &= 0 \\ (p \wedge r) \wedge (q \wedge s)^* &= 0 \\ \rightarrow p \wedge r \leq q \wedge s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \wedge q^*) \vee (r \wedge s^*) &= 0 \\ [(s \vee s^*) \wedge (p \wedge q^*)] \vee [(q \vee q^*) \wedge (r \wedge s^*)] &= 0 \\ (s \wedge p \wedge q^*) \vee (s^* \wedge p \wedge q^*) \vee (q \wedge r \wedge s^*) \vee (q^* \wedge r \wedge s^*) &= 0 \\ (s^* \wedge p \wedge q^*) \vee (q^* \wedge r \wedge s^*) &= 0 \\ (p \wedge q^* \wedge s^*) \vee (r \wedge q^* \wedge s^*) &= 0 \\ (p \vee r) \wedge (q^* \wedge s^*) &= 0 \\ (p \vee r) \wedge (q \vee s)^* &= 0 \\ \rightarrow p \vee r \leq q \vee s \end{aligned}$$

□

Lema 1.12 *Sea A un álgebra booleana. Si* $p, q \in A$ *con* $p \leq q$ *entonces* $(p \wedge x) \leq q$ *para todo* $x \in A$.

Demostración.
Sean $x \in A$:

$$
\begin{aligned}
(p \wedge x) \wedge q &= (x \wedge p) \wedge q && \text{(conmutatividad)} \\
&= x \wedge (p \wedge q) && \text{(lema 1.6)} \\
&= x \wedge p && (p \leq q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(p \wedge x) \vee q &= (p \vee q) \wedge (x \vee q) && \text{(distributiva)} \\
&= q \wedge (x \wedge q) && (p \leq q) \\
&= q \wedge (q \wedge x) && \text{(conmutativa)} \\
&= q && \text{(lema 1.5)}
\end{aligned}
$$

por lo tanto $(p \wedge x) \leq q$

□

1.4. Retículo

Definición 1.7 *Si A es un subconjunto de un conjunto parcial ordenado X. Una cota superior de A es un elemento $x \in X$ tal que para todo $p \in A$, $p \leq x$.*
Diremos que un elemento $x \in X$ es la mínima cota superior de A, si es una cota superior de A y para cualquier otra cota superior $q \in A$, $x \leq q$. Denotaremos a la mínima cota superior como el $Sup(A)$ y es único (antisimétrica $\leq$).

Definición 1.8 *Si A es un subconjunto de un conjunto parcial ordenado X. Una cota inferior de A es un elemento $x \in X$ tal que para todo $p \in A$, $x \leq p$.*
Diremos que un elemento $x \in X$ es la máxima cota superior de A, si es una cota inferior de A y para cualquier otra cota inferior $q \in A$, $q \leq x$. Denotaremos a la máxima cota inferior como el $Inf(A)$ y es único (por la antisimétrica $\leq$).

Definición 1.9 *Un retículo R es un conjunto parcialmente ordenado donde cada par de elementos $x, y \in R$ tienen una mínima cota superior y una máxima cota inferior. Llamaremos un Retículo con 0 y 1 si para todo $x \in R$ se cumple $0 \leq x \leq 1$.*

Definición 1.10 *Un retículo R con 0 y 1 es llamado complementado y para cada $x \in R$ existe un elemento $y \in R$, llamado complemento para X, si satisface:*

1. $x \vee y = 1$
2. $x \wedge y = 0$

Definición 1.11 *Se dice que R es un retículo distributivo si para todo $x, y, z \in R$, cumple las siguientes identidades:*

1. $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
2. $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$

Teorema 1.4 *Todo retículo complementado y distributivo es un álgebra booleana.*

Demostración. Sea R el retículo complementado y distributivo, definimos para un par de elementos $x, y \in R$:

$$Sup\{x; y\} = x \vee y \qquad Inf\{x; y\} = x \wedge y$$

Para cualquier $x, y \in R$.
Demostraremos que R cumple las condiciones de un álgebra booleana, para $x, y \in R$:

1. $x \vee y = Sup\{x; y\} = Sup\{y; x\} = y \vee x$
   $x \wedge y = Inf\{x; y\} = Inf\{y; x\} = y \wedge x$

2. Como $0 \leq x$, entonces $x \vee 0 = Sup\{0; x\} = 0$;
   Como $x \leq 1$, entonces $x \wedge 1 = Inf\{x; 1\} = 1$;

3. por ser R es distributivo, cumple las condiciones de la distributivo respecto a las operaciones $(\wedge)$ y $(\vee)$

4. Como es R es complementado cumple las condiciones de existencia de elementos complemento a cada elemento en R.

Por lo cual es un R un álgebra booleana.

$\square$

Capítulo 2

Ideales y homomorfismos Booleanos

2.1. Ideales booleanos

Definición 2.1 (Ideal Booleano) *Sea A un álgebra booleana. Se dice que $I \subseteq A$ es un ideal booleano de A, si satisface las siguientes condiciones:*

a) $0 \in I$

b) *si* $p \in I$ *y* $q \in I \to p \vee q \in I$

c) *si* $p \in I$ *y* $q \in A \to p \wedge q \in I$

Observación 2.1: Tomando en cuenta la condición c) de la definición 2.1 podemos afirmar: Si $p \in I$ y $q \leq p$ entonces $q \in I$.

Ejemplo 2.1 *Sea A un álgebra booleana. El conjunto $I = \langle a \rangle = \{p \in A \diagup p \leq a\}$ es un ideal de A.*

En efecto, Como los elementos de I están en definidos en el conjunto A, entonces $I \subset A$.
Ahora veamos que cumpla las condiciones:

a) $0 \in I$, pues $0 \leq a$ para todo $a \in A$.

b) Si $p, q \in I$, entonces: $p \in A$ con $p \leq a \to p \wedge a = p$.
$q \in A$ con $q \leq a \to q \wedge a = q$.

Como A es álgebra booleana, entonces $p \vee q$:

$$\begin{aligned} (p \vee q) \wedge a &= (p \wedge a) \vee (q \wedge a) && \text{(distributiva)} \\ &= p \vee q \end{aligned}$$

Entonces $p \wedge q \in I$

c) Si $p \in I$ y $q \in A$, entonces: $p \in A$ con $p \leq a \to p \vee a = p$.
Como A es álgebra booleana, entonces $p \vee q$:

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \vee a &= (p \vee a) \wedge (q \vee a) && \text{(Distributiva)} \\ &= a \wedge (q \vee a) && (p \leq a) \\ &= a && \text{(lema 1.5)} \end{aligned}$$

Entonces $p \wedge q \in I$.

Por lo tanto, $I = \langle a \rangle \subset A$ es un ideal de A. □

Observación 2.3 Toda álgebra booleana contiene un ideal trivial, es decir $\{0\} \subset A$.

Definición 2.2 *Sea A un álgebra booleana. Un ideal I es propio si $I \neq A$. En general toda álgebra booleana contiene un ideal no propio que es el mismo ideal A.*

Proposición 2.1 *Sea A un álgebra booleana. un ideal $I \subset A$ es un ideal propio si y solo si $1 \notin I$*

Demostración.
$(\Rightarrow)$
Supongamos que $1 \in I$.
Para todo $p \in A$, entonces $1 \wedge p \in I$ (por I ideal)
$p \in I$ (por definición)
Luego tenemos que $A \subset I$ y como $I \subset A$, entonces $I = A$
entonces I no es un ideal propio (esto es absurdo por la hipótesis).
por lo tanto $1 \notin I$.

$(\Leftarrow)$
Si $1 \notin I$ y como $1 \in A$ entonces $I \neq A$. Por lo tanto I es un ideal propio. □

Definición 2.3 *Sea A un álgebra booleana. Un ideal I es Maximal si $I \neq A$ y además si M es un ideal A tal que $I \subseteq M$, entonces $I = M$ o $M = A$.*

Teorema 2.1 *Un ideal I en un álgebra booleana A es maximal, sí y solo si, para cada $p \in A$ se tiene que $p \in I$ o $p^* \in I$.*

Demostración.
$(\Rightarrow)$
Vamos a demostrar por la negación del enunciado.
Supongamos que $\exists n\ a \in A$ y I un ideal de A, tal que $a \notin I$ y $a^* \notin I$. vamos a demostrar que I no es un ideal maximal.
Sea $M = \{z \diagup z = p \vee q \text{ con } p \leq a \text{ y } q \in I\}$ un ideal de A tal que $a \in M$.
en efecto

1. Como $q \in I$ entonces $p \in A$, luego como A es álgebra booleana tenemos $p \vee q \in A$
   Por lo tanto, $M \subset A$.
   Además,$a \in M$, ya que $a = a \vee 0$ con $a \leq a$ y $0 \in A$.

2. $0 \in M$, pues $0 = 0 \vee 0$, ya que $0 \leq 0$ y $0 \in I$.

3. sean $x, y \in M$ definidos

$$x = p_0 \vee q_0 \text{ con } p_0 \leq a;\ q_0 \in I$$
$$y = p_1 \vee q_1 \text{ con } p_1 \leq a;\ q_1 \in I$$

entonces:

$$\begin{aligned} x \vee y &= (p_0 \vee q_0) \vee (p_1 \vee q_1) && \text{(hipótesis)} \\ &= p_0 \vee (q_0 \vee p_1) \vee q_1 && \text{(lema 1.6)} \\ &= p_0 \vee (p_1 \vee q_0) \vee q_1 && \text{(Conmutativo)} \\ &= (p_0 \vee p_1) \vee (q_0 \vee q_1) && \text{(lema 1.6)} \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos $p_0 \leq a; p_1 \leq a$ por el lema 1.10, tenemos $(p_0 \vee p_1) \leq (a \vee a)$ y por el lema 1.3 $(p_0 \vee p_1) \leq a$.
Además $q_0; q_1 \in I$, por ser I ideal $q_0 \vee q_1 \in I$.

Con lo demostrado, concluimos que $(x \vee y) \in M$.

4. sean $x \in M$ y $y \in A$ se define para x:

$$x = p \vee q \text{ con } p \leq a;\ q \in I$$

entonces:

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (p \vee q) \wedge y \\ &= (p \wedge y) \vee (q \wedge y) && \text{(Conmutativo)} \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos $p \leq a$; por el lema 1.11, tenemos $(p \wedge y) \leq a$
Además $q \in I$ e $y \in A$, por ser I ideal $q \wedge y \in I$.

Con lo demostrado, concluimos que $(x \wedge y) \in M$.

Por lo tanto M es un ideal de A que contiene a, lo que significa que $M \neq I$. Luego, notamos que $I \subset M$, pues $q = 0 \vee q$ para todo $q \in M$.
Vamos a demostrar que $M \neq A$, para poder demostrar que I no sea maximal.
En efecto, supongamos que $a^* \in M$ entonces existen p y q tal que $a^* = p \vee q$ con $p \leq a$ y $q \in I$.
Luego por el lema 1.3 tenemos:

$$\begin{aligned} a^* &= a^* \wedge a^* \\ &= (p \vee q) \wedge a^* && \text{(hipótesis)} \\ &= (p \wedge a^*) \vee (q \wedge a^*) && \text{(distributiva)} \\ &= [(p \wedge a) \wedge a^*] \vee (q \wedge a^*) && (p \leq a) \\ &= [p \wedge (a \wedge a^*)] \vee (q \wedge a^*) && \text{(por)} \\ &= (p \wedge 0) \vee (q \wedge a^*) && \text{(complemento)} \\ &= 0 \vee (q \wedge a^*) && \text{(lema 1.2)} \\ &= q \wedge a^* && \text{(0 elemento identidad)} \\ &= q \wedge (p \vee q) && \text{(hipótesis)} \\ &= q && \text{(Lema 1.5)} \end{aligned}$$

lo cual significa que $q = a^* \in I$ y eso es una contradicción con la hipótesis. por lo cual si $a^* \notin M$ entonces $M \neq A$. Por lo tanto $I \subset M$ con $I \neq M$ y $M \neq A$ entonces I no

es ideal maximal de A.
Demostraremos que a; $a^* \in I$ pero no a la vez.
en efecto
supongamos que I es un ideal con $a \in I$ y $a^* \in I$, entonces $(a \vee a^*) \in I$ (por I ideal), eso significa que $1 \in I$ pero por la proposición 2,1 I no sería un ideal propio y por consecuente no sería maximal , lo cual es una contradicción. Por lo tanto I es un ideal maximal que contiene a y a^* pero no ambos.

($\Leftarrow$)
Sea I un ideal de A tal que para todo $a \in A$ se tiene $a \in I$ o $a^* \in I$, demostraremos que I es un ideal maximal.
Sea $M \neq I$ un ideal de A y Supongamos que $I \subset M$: por lo tanto $\exists\ a \in M$ tal que $a \notin I$, entonces por la hipótesis $a^* \in I$ esto significa $a^* \in M$.
Si a; $a^* \in M$ entonces $a \vee a^* = 1 \in M$, por lo que M no sería un ideal propio, queda demostrado que $M = A$.
Por lo tanto I es un ideal maximal de A □

Lema 2.1 *Sea A un álgebra booleana. si el conjunto $\{I_n\}_{n\in N}$ es una familia de ideales propios de A, la cual es totalmente ordenado por la inclusión (N un conjunto de índices), entonces*

$$I = \bigcup_{n\in N} I_n$$

es un ideal propio de A.

Demostración.
Notamos que $I \subset A$:

$$p \in I \to p \in I_n \text{ para algún n } \to p \in A$$

Veamos que cumple las condiciones:

a) $0 \in I$, pues $0 \in I_n$ para todo $n \in N$

b) sea $p \in I$ y $q \in I$, entonces para algún $i, j \in N$ con $I_j \subseteq I_k$ se tiene :

$$\begin{aligned} p \in I_j &\quad \to p \in I_k \\ q \in I_k & \end{aligned}$$

Entonces $(p \vee q) \in I_k$, por I_k ser un ideal, y como $I_k \subset I$ entonces $(p \vee q) \in I$

c) para $p \in I$ y $q \in A$:

$$p \in I_j \quad \text{para un} \quad j \in N$$

Entonces $(p \wedge q) \in I_j$ por ser I_j ideal , y como $I_j \subset I$ entonces $(p \wedge q) \in I$

Por lo tanto I es un ideal.

Faltaría probar que sea I un ideal propio.
Tomando en cuenta que los I_n son ideales propios para todo $n \in N$, entonces $1 \notin I_n$ por la proposición 2.1, y como $I_n \subset I$, entonces $1 \notin I$, en consecuencia, por la proposición 2.1:
por lo tanto $I = \bigcup_{n\in N} I_n$ es un ideal propio de A. □

Teorema 2.2 (Teorema del ideal maximal) *Todo ideal propio en un álgebra booleana está contenido en algún ideal maximal.*

Demostración.
Sean A un álgebra booleana y I un ideal propio de A
Se define el conjunto M parcialmente ordenado por la relación $\subseteq$, de la siguiente manera:

$$M = \{J \subset A \diagup J \text{ es un ideal propio con } I \subseteq J\}$$

Demostraremos que M tiene un elemento maximal utilizando el lema del Zorn.
Tomaremos un subconjunto N totalmente ordenado de M, es decir, si para par de elementos $B, C \in N$ entonces $B \subseteq C$ o $C \subseteq B$.
Sea

$$S = \bigcup_{J \in N} J$$

Notamos que S es la unión de los conjuntos J , entonces $J \subseteq S$ para todo $J \in N$, lo que significa que S es cota superior de N.
Además $S \in M$, en efecto, como S es la unión de ideales propios totalmente ordenados por la inclusión, entonces por el lema 2.1, S es un ideal propio de A ($S \subset A$) y $I \subseteq S$, ya que $I \subseteq J$ para todo $J \in M$. Por lo tanto M satisface las condiciones del lema de Zorn, por lo tanto, M posee un ideal maximal de A que contiene a I. □

Tomando en cuenta el ejemplo 2.1, podemos decir que $\langle a \rangle = \{p \in A \diagup p \leq a\}$ la cual llamaremos generado de a es un ideal propio y además es claro que contiene al elemento a, entonces por el teorema 2.2 este ideal este contenido por algún ideal maximal.

2.2. Homomorfismo booleanos

Definición 2.4 *Sean A_1, A_2 álgebra s booleanos. Un homomorfismo de A_1 en A_2 es una aplicación $f : A_1 \to A_2$ que respeta las operaciones booleanas de A_2, es decir, para todo $p, q \in A_1$:*

1) $f(p \vee q) = f(p) \vee f(q)$

2) $f(p \wedge q) = f(p) \wedge f(q)$

3) $f(p^*) = (f(p))^*$

De la definición anterior los homeomorfismos que cumple las 3 condiciones se denominan homomorfismos booleanos.

Definición 2.5 *Sean A_1, A_2 álgebra s booleanos. Un homomorfismo booleano f de A_1 en A_2, se dice que:*

1) f es monomorfismo (de uno a uno), si para todo $p, q \in A_1$ con $f(p) = f(q)$ entonces $p = q$

2) f es epimorfismo, si para todo $f(p) \in A_2$, existe $p \in A_1$

3) f es isomorfismo si y solo si es monomorfismo y epimorfismo.

Nota: Sea f un homomorfismo booleano de A_1 en A_2, si $A_1 = A_2$, entonces f será denominado como endomorfismo. Y si el endomorfismo es isomorfismo entonces se denomina automorfismo.

Lema 2.2 *sean A_1, A_2 álgebras booleanas y $f : A_1 \to A_2$ un homomorfismo booleano, entonces se cumple:*

$$f(0) = 0 \ y \ f(1) = 1$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
f(0) &= f(p \wedge p^*) && (p \text{ complemento en } A_1)\\
&= f(p) \wedge f(p^*) && (f \text{ homomorfismo})\\
&= f(p) \wedge (f(p))^* && (f \text{ homomorfismo})\\
&= 0 && (f(p) \text{ complemento en } A_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(1) &= f(p \vee p^*) && (p \text{ complemento en } A_1)\\
&= f(p) \vee f(p^*) && (f \text{ homomorfismo})\\
&= f(p) \vee (f(p))^* && (\text{por f homomorfismo})\\
&= 1 && (f(p) \text{ complemento en } A_2)
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.2 *No existe homomorfismo trivial entre álgebras booleanas.*

En efecto, Supongamos que, si exista un homomorfismo trivial , es decir, para A_1, A_2 álgebras booleanas, sea $f : A_1 \to A_2$ un homomorfismo booleano definido por $f(p) = 0$ para todo $p \in A_1$, entonces

$$\begin{aligned}
1 &= f(1) && (\text{lema } 2.2)\\
&= f(p \vee p^*) && (p \text{ complemento en } A_1)\\
&= f(p) \vee f(p^*) && (f \text{ es homomorfismo})\\
&= 0 \vee 0 && (\text{hipótesis})\\
&= 0 && (0 \text{ elemento identidad en } A_2)
\end{aligned}$$

Por lo cual llegamos a una contradicción, entonces no existe un homomorfismo trivial entre álgebra booleanas. □

Definición 2.6 *Sean A_1, A_2 álgebras booleanas y f un homomorfismo booleano, se define:*

Núcleo de f: $Nu(f) = \{p \in A_1 / f(p) = 0\}$
Imagen de f: $Im(f) = \{f(p) \in A_2 / p \in A_1\}$

Teorema 2.3 *Sea $f : A_1 \to A_2$ un homomorfismo booleano, entonces:*

1. *el núcleo de f es un ideal de A_1*

2. *si f es un monomorfismo si y solo si $Nu(f) = \{0\}$.*

Demostración.

1. Vamos a demostrar que $Nu(f)$ es un ideal booleano.

   Sabemos que $Nu(f) \subset A_1$, pues todo elemento de $Nu(f)$ está en A_1.

   - $0 \in Nu(f)$, pues por el lema 2.2 $f(0) = 0$.
   - Sea $p, q \in Nu(f)$ esto significa:
   $$f(p) = 0 \text{ y } f(q) = 0$$
   entonces
   $$\begin{aligned} f(p \vee q) &= f(p) \vee f(q) && (f \text{ homomorfismo}) \\ &= 0 \vee 0 && (\text{hipótesis}) \\ &= 0 && (0 \text{ elemento identidad en } A_2) \end{aligned}$$
   Por lo tanto $p \vee q \in Nu(f)$
   - Sea $q \in A_1$ y $p \in Nu(f)$ esto significa:
   $$f(p) = 0$$
   entonces
   $$\begin{aligned} f(p \wedge q) &= f(p) \wedge f(q) && (f \text{ homomorfismo}) \\ &= 0 \wedge f(q) && (\text{hipótesis}) \\ &= 0 && (\text{lema 1.1 }) \end{aligned}$$
   Por lo tanto $p \wedge q \in Nu(f)$

   Cumple las condiciones, por lo tanto, $Nu(f)$ es un ideal de A_1.

2. $(\Rightarrow)$
   sea $p \in Nu(f)$:
   $$\begin{aligned} &f(p) = 0 \\ &f(p) = f(0) && (\text{lema 2.2 }) \\ &p = 0 && (f \text{ monomorfismo}) \end{aligned}$$
   entonces $p = 0$, por lo tanto $Nu(f) = \{0\}$

   $(\Leftarrow)$
   Sea $p, q \in A_1$, tal que $f(p) = f(q)$, vamos a demostrar que $p = q$.
   Para $p \wedge q^* \in A_1$:
   $$\begin{aligned} f(p \wedge q^*) &= f(p) \wedge f(q^*) && (f \text{ homomorfismo}) \\ &= f(p) \wedge (f(q))^* && (f \text{ homomorfismo}) \\ &= f(p) \wedge (f(p))^* && (\text{hipótesis}) \\ &= 0 && (f(x) \text{ complemento en } A_2) \end{aligned}$$

esto significa que:

$$\begin{aligned} p \wedge q^* \in Nu(f) \rightarrow & p \wedge q^* = 0 && \text{(hipótesis)} \\ & \rightarrow p \leq q \ldots (1) && \text{(lema 1.10)} \end{aligned}$$

Análogamente, para $p^* \wedge q \in A_1$:

$$\begin{aligned} f(p^* \wedge q) &= f(p^*) \wedge f(q) && (f \text{ homomorfismo}) \\ &= (f(p))^* \wedge f(q) && (f \text{ homomorfismo}) \\ &= (f(q))^* \wedge f(q) && \text{(hipótesis)} \\ &= 0 && (f(x) \text{ complemento en } A_2) \end{aligned}$$

esto significa que:

$$\begin{aligned} p^* \wedge q \in Nu(f) \rightarrow & p^* \wedge q = 0 && \text{(hipótesis)} \\ & \rightarrow q \wedge p^* = 0 && \text{(conmutativa)} \\ & \rightarrow q \leq p \ldots (1) && \text{(lema 1.10)} \end{aligned}$$

Entonces de (1) y (2), por el lema 1.9 tenemos que $p = q$. entonces f es un monomorfismo.

□

A continuación, definiremos una relación de equivalencia para poder realizar la demostración del teorema del homomorfismo.

Lema 2.3 *Sean A un álgebra booleana y I un ideal propio de A. para $p, q \in A$ definamos la relación $\equiv_I$ como:*

$$p \equiv_I q \text{ si y solo si } \exists n\ i, j \in I tal\ que\ p \vee i = q \vee j$$

entonces $\equiv_I$ es una relación de equivalencia.

Demostración. Para que cumpla $\equiv_I$ sea una relación de equivalencia, debe cumplir que sea reflexiva, transitiva y simétrica, veamos:

- (Reflexiva) $p \equiv_I p$, pues $0 \in I$ tal que $p \vee 0 = p \vee 0$
- (Transitiva) Sean $p, q, r \in A$, tenemos :

  $p \equiv_I q$ entonces existen $i, j \in I$ tal que $p \vee i = q \vee j$
  $q \equiv_I r$ entonces existen $l, m \in I$ tal que $q \vee l = r \vee m$

  Luego:

$$\begin{aligned} p \vee (i \vee l) &= (p \vee i) \vee l && \text{(lema 1.6)} \\ &= (q \vee j) \vee l && (p \equiv_I q) \\ &= (j \vee q) \vee l && \text{(conmutativa)} \\ &= j \vee (q \vee l) && \text{(lema 1.6)} \\ &= j \vee (r \vee m) && (q \equiv_I r) \\ &= j \vee (m \vee r) && \text{(conmutativa)} \\ &= (j \vee m) \vee r && \text{(lema 1.6)} \\ &= r \vee (j \vee m) && \text{(conmutativa)} \end{aligned}$$

  y como $i, j, l, m \in I$ entonces $i \vee l$, $j \vee m \in I$ (por la definición de ideal), por lo tanto: $p \equiv_I r$

- (simétrica) Sean $p, q \in A$ con $p \equiv_I q$, por demostrar, $q \equiv_I p$.
  Tenemos que $p \equiv_I q$, existen $i, j \in I$ entonces:

$$p \vee i = q \vee j \;\rightarrow\; q \vee j = p \vee i$$

  Entonces existen $j, i \in I$, por lo tanto $q \equiv_I p$.

Por lo tanto $\equiv_I$ es una relación de equivalencia. □

Teorema 2.4 (Teorema del homomorfismo) *todo ideal propio es el núcleo de algún epimorfismo entre álgebras booleanas.*

Demostración.
Sean A un álgebra booleana e I un ideal propio de A.
Dado un $a \in A$, definimos la clase de equivalencia de a:

$$[a] = \{p \in A \;/\; p \equiv_I a\}$$

y la colección de estos conjuntos como:

$$B = \{[a]\}_{a \in A}$$

decimos que B es un álgebra booleana con las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} [a \vee b] &= [a] \vee [b] \\ [a \wedge b] &= [a] \wedge [b] \\ [a^*] &= [a]^* \end{aligned}$$

en efecto:

1. Sean $a, b \in A$:

$$\begin{aligned} [a] \vee [b] = [a \vee b] = [b \vee a] = [b] \vee [a] \\ [a] \wedge [b] = [a \wedge b] = [b \wedge a] = [b] \wedge [a] \end{aligned}$$

2. Sean $0, 1 \in A$:

$$\begin{aligned} [a] \vee [0] = [a \vee 0] = [a] \\ [a] \wedge [1] = [a \wedge 1] = [a] \end{aligned}$$

3. Sean $a, b, c \in A$:

$$\begin{aligned} [a] \vee [b \wedge c] = [a \vee (b \wedge c)] = [(a \vee b) \wedge (a \vee c)] = [a \vee b] \wedge [a \vee c] \\ [a] \wedge [b \vee c] = [a \wedge (b \vee c)] = [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] = [a \wedge b] \vee [a \wedge c] \end{aligned}$$

4. Sean $a \in A$:

$$\begin{aligned} [a] \vee [a^*] = [a \vee a^*] = [1] \\ [a] \wedge [a^*] = [a \wedge a^*] = [0] \end{aligned}$$

por lo tanto B es un álgebra booleana.

Ahora, vamos a definir el homomorfismo de A en B de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f :& A \to B \\ & a \to f(a) = [a] \end{aligned}$$

Demostraremos la buena definición:
Sea $a, b \in A$ con $a = b$ entonces :

$$f(a) = [a] = [b] = f(b) \to f(a) = f(b)$$

A continuación, veamos si cumple las condiciones de un epimorfismo:

a) sean $a, b \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} f(a \vee b) &= [a \vee b] && \text{(definición de } f\text{)} \\ &= [a] \vee [b] && \text{(definición de } [a]\text{)} \\ &= f(a) \vee f(b) && \text{(definición de } f\text{)} \end{aligned}$$

Entonces $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

b) sean $a, b \in A$, tenemos

$$\begin{aligned} f(a \wedge b) &= [a \wedge b] && \text{(definición de } f\text{)} \\ &= [a] \wedge [b] && \text{(definición de } [a]\text{)} \\ &= f(a) \wedge f(b) && \text{(definición de } f\text{)} \end{aligned}$$

Entonces $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

c) sea $a \in A$, tenemos

$$f(a^*) = [a^*] = [a]^* = (f(a))^*$$

Entonces $f(a^*) = (f(a))^*$

se concluye que es un homomorfismo.
por otra parte, es sobreyectivo , pues para todo $[a] \in B$, existe un $a \in A$, tal que $f(a) = [a]$
Por lo tanto f es epimorfismo.

analizaremos el núcleo de f :

$$\begin{aligned} Nu(f) &= \{a \in A \diagup f(a) = [0]\} \\ &= \{a \in A \diagup [a] = [0]\} && \text{(definición de } f\text{)} \\ &= \{a \in A \diagup a \equiv_I 0\} && \text{(definición de } [a]\text{)} \\ &= [0] \end{aligned}$$

Por último, vamos a demostrar que el $nu(f) = I$

$(\subset)$
Sea $p \in Nu(f)$:

$$\begin{aligned} p \in [0] \rightarrow \text{ existen } i, j \in I : & p \vee i = 0 \vee j \\ & p \vee i = j & \text{(0 elemento identidad en } A) \\ \text{Entonces } p \in A: \ & (p \vee i) \wedge p = j \wedge p \\ & p \wedge (p \wedge i) = j \wedge p & \text{(conmutatividad en } A) \\ & p = j \wedge p & \text{(lema 1.5)} \end{aligned}$$

Como $j \in I$ y $p \in A$ entonces $j \wedge p \in I$ (I ideal), esto implica : $p \in I$

$(\supset)$
Sea $p \in I$.
Sabemos que $0 \in I$ por ser I ideal, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} p &= p \vee 0 & \text{(0 elemento identidad de } A) \\ p \vee 0 &= p \vee 0 & \text{(0 elemento identidad de } A) \\ p \vee 0 &= 0 \vee p & \text{(conmutativa)} \end{aligned}$$

por lo tanto, existen p, $0 \in I$ tal que $p \vee 0 = 0 \vee p \rightarrow p \equiv_I 0$
entonces $p \in [0]$, lo que implica $p \in Nu(f)$
Por lo tanto $Nu(f) = I$ siendo I ideal propio de A y siendo f un epimorfismo. $\square$

Observación 2.4: En consideración al teorema 1.3, podemos construir homomorfismo entre anillos booleanos y álgebra booleanos.

Ejemplo 2.3 *Sea A un álgebra booleana. se define :*

$$f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow A \ \textit{tal que } f(p) = \begin{cases} 0 & ;si\ p = [0], \\ 1 & ;si\ p = [1]. \end{cases}$$

entonces f es un homomorfismo booleano.

En efecto, Vamos a tomar en cuenta las siguientes definiciones dado por la definición 1.4

$$\begin{aligned} &[p] \wedge [q] = [p][q] \\ &[p] \vee [q] = [p] + [q] + [p][q] \\ &[p]^* = [1] + [p] = [p + 1] \end{aligned}$$

Sean $p, q \in \mathbb{Z}_2$, entonces para demostrar consideremos los diferentes casos que puede tomar p y q :

- Caso 1: si $p = [0]$ y $q = [0]$, entonces :

$$\begin{aligned} &f([0] \wedge [0]) = f([0][0]) = f([0]) = 0 = 0 \wedge 0 = f([0]) \wedge f([0]) \\ &f([0] \vee [0]) = f([0] + [0] + [0][0]) = f([0]) = 0 = 0 \vee 0 = f([0]) \vee f([0]) \\ &f([0]^*) = f([0 + 1]) = f([1]) = 1 = 0^* = (f([0]))^* \end{aligned}$$

- Caso 2: si $p = [1]$ y $q = [1]$, entonces :

$$f([1] \wedge [1]) = f([1][1]) = f(1) = 1 = 1 \wedge 1 = f([1]) \wedge f([1])$$
$$f([1] \vee [1]) = f([1] + [1] + [1][1]) = f([1]) = 1 = 1 \vee 1 = f([1]) \vee f([1])$$
$$f([1]^*) = f([1 + 1]) = f([0]) = 0 = 1^* = (f([1]))^*$$

- Caso 3: sin pérdida de generalidad asumiremos $p = [0]$ y $q = [1]$, entonces :

$$f([0] \wedge [1]) = f([0][1]) = f([0]) = 0 = 0 \wedge 1 = f([0]) \wedge f([1])$$
$$f([0] \vee [1]) = f([0] + [1] + [0][1]) = f([1]) = 1 = 0 \vee 1 = f([0]) \vee f([1])$$
$$f([0]^*) = f([0 + 1]) = f([1]) = 1 = 0^* = (f([0]))^*$$
$$f([1]^*) = f([1 + 1]) = f([0]) = 0 = 1^* = (f([1]))^*$$

Entonces para cualquier valor de $p, q \in \mathbb{Z}_2$, f cumple las condiciones de homeomorfismo booleano , por lo tanto f homeomorfismo booleano. $\square$

Capítulo 3

Teorema de representación de Stone para álgebra booleanas

En este capítulo estudiaremos la conexión que existe entre las construcciones del álgebra booleana y el espacio topográfico de Stone.
Previamente, veremos algunas definiciones que permite definir el espacio de Stone.

Definición 3.1 (Espacio topológico de Hausdorff) *Un espacio topológico X se denomina de Hausdorff si para cada par de puntos distintos a, b en X, existen conjuntos abiertos P, $Q \subset X$ tal que $a \in P$ y $b \in Q$, con $P \cap Q = \emptyset$.*

Ejemplo 3.1 *El espacio topológico de los reales con la topología usual* $(\mathbb{R}, T)$, *es de Hausdorff.*

En efecto, Sean x e $y \in \mathbb{R}$ donde $x \neq y$.
Sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $x < y$. Por definición en $\mathbb{R}$, existen a, b y c tales que:

$$a < x < b < y < c$$

Definimos los conjuntos:

$$A = \langle a; b \rangle \quad B = \langle b; c \rangle$$

la cual son abiertos por ser intervalos abiertos, además $x \in A$ e $y \in B$ con $A \cap B \neq \emptyset$.
Por lo tanto $(\mathbb{R}, T)$ es una topología de Hausdorff □

Definición 3.2 *Una colección de partes $U = \{U_\alpha : \alpha \in J\}$ de un conjunto X se llama cubrimiento de X si*

$$\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \supset X$$

Si X es un espacio topológico y cada $U_\alpha \in U$ es un abierto en X, se dice que U es un cubrimiento abierto.
Un subcubrimiento es una subfamilia $F \subset X$ que es también un cubrimiento X.

Ejemplo 3.2 *Si $X = \langle 0, 1 \rangle$ un conjunto abierto y la familia de conjunto $U_n = \{\langle 1/n, 1 \rangle\}$ para $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. El conjunto $U = \{U_n : n \in J\}$ es un cubrimiento abierto de X.*

Definición 3.3 *Un espacio topológico X es compacto si todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento finito*

Definición 3.4 *Un espacio topológico X es conexo si X no es una unión de dos subconjuntos abiertos no vacíos y disjuntos. En caso contrario diremos que no es conexo*

Definición 3.5 *Un espacio Hausdorff X es totalmente disconexo si todo conjunto abierto es la unión de los conjuntos cerrados abiertos que contiene.*

Basado en estas definiciones, vamos a definir el espacio de Stone.

Definición 3.6 (Espacio de Stone) *Un espacio de Stone es un espacio topológico que es de Hausdorff, compacto y totalmente disconexo.*

Veamos ejemplos de espacio de Stone utilizando algunas proposiciones y teoremas importantes.

Proposición 3.1 *Sean X, Y espacios topológicos con la topología discreta. Entonces la topología producto en $X \times Y$ es la topología discreta.*

Demostración. Sea $(x, y) \in X \times Y$, vamos a demostrar que $\{(x, y)\}$ es abierto.
Definimos:

$$\begin{aligned} \rho_1 :& X \times Y \to X \\ & (a, b) \to a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 :& X \times Y \to Y \\ & (a, b) \to b \end{aligned}$$

Siendo ρ_1, ρ_2 son funciones proyecciones , entonces son continuas.
Como X tiene topología discreta,

$$\begin{aligned} &\to \{x\} \subseteq X \ \text{ es abierto} \\ &\to \rho_1^{-1}(\{x\}) \subseteq X \times Y \text{ es abierto} \\ &\to \{x\} \times Y \ldots (1) \text{ es abierto} \end{aligned}$$

Análogamente, como Y tiene topología discreta,

$$\begin{aligned} &\to \{y\} \subseteq Y \text{ es abierto} \\ &\to \rho_2^{-1}(\{y\}) \subseteq X \times Y \text{ es abierto} \\ &\to X \times \{y\} \ldots (2) \text{ es abierto} \end{aligned}$$

De (1) y (2):

$$\begin{aligned} &(\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y\}) \ \text{ es abierto (intersecciones finitas de abiertos)} \\ &\{(x, y)\} \text{ es abierto} \end{aligned}$$

Luego, definimos el conjunto $V \subset X \times Y$, se tiene que: $V = \bigcup_{(x,y) \in V} \{(x, y)\} \subset X \times Y$ es abierto.
Por lo tanto $X \times Y$ tiene la topología discreta. $\square$

Proposición 3.2 *Sean X, Y espacios topológicos con la topología discreta. Sea $f : X \to Y$ una función, entonces f es continua.*

Demostración. Sea $U \subseteq Y$ un conjunto abierto.
Entonces $f^{-1}(U) \subseteq X$ es abierto, pues X tiene topología discreta
Por lo tanto f es continua. $\square$

Teorema 3.1 *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea $\{\beta_i\}_{i\in I}$ una familia talque β_i sea una base de X_i. Entonces una base para la topología producto la forma los productos $\prod_{i\in I} B_i$, tales que existe $I_0 \subset I$ finito de modo que $B_i \in \beta_i$ para todo $i \in I_o$ y $B_i = X_i$ para $i \in I - I_0$*

Teorema 3.2 *Sean X, X_1, X_2 Espacios topológicos y $f_i : X \to X_i$ funciones entonces, $G : X \to X_1 \times X_2$ definido para $x \in X$ con $G(x) = (f_1(x), f_2(x))$ es continua si y solo si f_i es continua para todo $i = 1, 2$.*

Teorema 3.3 *sí $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones continuas $f_i : X_i \to Y_i$ entre espacios topológicos, entonces la aplicación $f : \prod_{i\in I} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i$ dado por $f(x_i) = (f_i(x_i))_{i\in I}$ es continua.*

Teorema 3.4 *Si $f : X \to Y$ y $g : X \to Y$ son funciones continuas en el espacio de Hausdorff Y , entonces el conjunto de la forma $\{x : f(x) = g(x)\}$ es cerrado.*

Proposición 3.3 *Definimos al conjunto $2 = \{0; 1\}$. Sea A un conjunto arbitrario no vacío. Consideramos el conjunto $2^A = \{f : f$ es una función de A en $2\}$. Entonces 2^A es un espacio de Stone.*

Demostración. Sea $B_a = 2$ con $a \in A$ y consideramos 2 con topología discreta, se define el homeomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi_a : 2^A &\longrightarrow \prod_{a\in A} B_a \\ f &\longrightarrow (f(a))_{a\in A} \end{aligned}$$

Como 2^A es homeomorfo a $\prod_{a\in A} B_a$, Bastara demostrar que el conjunto $\prod_{a\in A} B_a$ es un espacio de Stone.
Sea $a \in A$ fijo y arbitrario.
afirmaremos que B_a es de Hausdorff y compacto.
en efecto:
Tomamos $\{0\}$ y $\{1\}$ abiertos (por topología discreta), sabemos:

$$0 \in \{0\}$$
$$1 \in \{1\}$$

Como $0 \neq 1$ tenemos $\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$, por lo tanto B_a es un espacio de Haussforff.
Por otra parte B_a es un espacio finito y discreto, entonces todo B_a es compacto.

Entonces por el Teorema de Tychonoff's el espacio $\prod_{a\in A} B_a$ es un espacio de Hausdorff y compacto.
Falta probar que el $\prod_{a\in A} B_a$ es un espacio topológico totalmente disconexo.
Se define la siguiente función continua y biyectiva:

$$\begin{aligned} \Upsilon_a : \prod_{a\in A} B_a &\longrightarrow B_a \\ (f(a))_{a\in A} &\longrightarrow f(a) \end{aligned}$$

Se define los siguientes conjuntos:

$$M_a = \{f \in 2^A \diagup f(a) = 0\} \qquad N_a = \{f \in 2^A \diagup f(a) = 1\}$$

Afirmaremos que M_a y N_a forman son conjuntos abiertos cerrados
en efecto:
como Υ_a es continua para cada a, entonces lleva de abiertos en abiertos y viceversa, entonces:

$$\Upsilon_a^{-1}(\{0\}) = M_a \qquad \Upsilon_a^{-1}(\{1\}) = N_a$$

Como el conjunto $\{0\}$ y $\{1\}$ son abiertos y Υ es continua entonces : M_a y N_a son abiertos respectivamente. Luego notamos que $M_a = N_a^*$ (complemento de N_a) y como todo abierto su complemento es cerrado por lo tanto M_a es cerrado , análogamente $N_a = M_a^*$ y como M_a es abierto entonces N_a es cerrado.
Por último, diremos una base de B_a es $\{0\}$ y $\{1\}$, entonces por el teorema 3.1 todo abierto V es de la siguiente forma:

$$V = \bigcup \Upsilon_{a_1}^{-1}(F_{a_1}) \cap \Upsilon_{a_2}^{-1}(F_{a_2}) \cap \Upsilon_{a_3}^{-1}(F_{a_3}) \cap \cdots \cap \Upsilon_{a_n}^{-1}(F_{a_n})$$

donde $F_a = \{0\}$ o $\{1\}$, si $a \in \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n\}$

como los $\Upsilon_a^{-1}(F_a)$ son abiertos y cerrados , por lo tanto V es la unión de conjuntos cerrados abiertos que lo contiene. Entonces $\prod_{a\in A} B_a$ es un espacio de Hausdorff totalmente disconexo.

Por lo tanto $\prod_{a\in A} B_a$ es un espacio de Stone y como es homeomorfo con 2^A , entonces 2^A es un espacio de Stone $\square$

A continuación, vamos a realizar otro ejemplo respecto a los espacios de Stone.
Vamos a definir $S(A)$ como el conjunto formado por los homomorfismos de A en 2; claramente $S(A)$ es un subconjunto de 2^A porque todo homomorfismo es una función. Nuestro ejemplo se basará en demostrar que $S(A)$ es un espacio Stone. No obstante, antes de demostrar ello, vamos a afirmar que $S(A)$ conjunto no es vacío. usaremos el siguiente lema para afirmar lo dicho.

Lema 3.1 *Sea A un álgebra booleana y $p \in A$ con $p \neq 0$ (0 elemento identidad de A) entonces existe un homomorfismo de $f{:}A \longrightarrow 2$ tal que $f(p) = 1$.*

Demostración. Sea $I = \langle p^* \rangle = \{q \in A \diagup q \leq p^*\}$ ideal de A (por el ejemplo 2.1)
afirmaremos que I es un ideal propio
en efecto
Supongamos que $1 \in \langle p^* \rangle$ esto significa $1 \leq p^*$, pero sabemos que $p^* \leq 1$ entonces tendremos que $p^* = 1$, esto implica $p = 0$ (esto es una contradicción por la hipótesis)
Por lo tanto $1 \notin \langle p^* \rangle$ y por la proposición 2.1, $\langle p^* \rangle$ es un ideal propio de A
Luego, por el teorema 2.2 existe un ideal maximal M tal que $\langle p^* \rangle \subset M$
como $p^* \in \langle p^* \rangle$ entonces $p^* \in M$ por el teorema 2.1 se tiene que $p \notin M$
Luego por el teorema 2.4 existe un homomorfismo

$$\begin{aligned} f :& A \longrightarrow B \\ & a \longrightarrow [a]; \text{con } [a] = \{p \in A \diagup p \equiv_M a\} \end{aligned}$$

tal que el $Nu(f) = M$
Afirmaremos que $B = 2$
Sea $a \in A$ entonces podemos decir $a \in M$ o $a \notin M$ (por ser M maximal).

- Si $a \in M$:
  sabemos que $0 \in M$ por ser M un ideal, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} a &= a \vee 0 && \text{(por 0 elemento identidad de A)} \\ a \vee 0 &= a \vee 0 && \text{(por 0 elemento identidad de A)} \\ a \vee 0 &= 0 \vee a && \text{(por conmutatividad en A)} \end{aligned}$$

  entonces tenemos que $a \equiv_M 0$ por lo tanto $a \in [0]$

- Si $a \notin M$:
  esto implica que $a^* \in M$, entonces:

$$\begin{aligned} a \vee a^* &= 1 && \text{(complemento de a)} \\ a \vee a^* &= 1 \vee 0 && \text{(1 elemento identidad)} \end{aligned}$$

  entonces existen a^* y $0 \in M$ tal que $a \vee a^* = 1 \vee 0$ entonces $a \equiv_M 1$ por lo tanto $a \in [1]$

Por lo tanto, para todo $a \in A$ tenemos que $f(a) = [a] \in \{[0]; [1]\}$
Entonces demostramos que $B = 2$
Luego como $Nu(f) = M$ y $p^* \in M$, tenemos que $f(p^*) = 0$ esto implica que $f(p^*)^* = 0^*$
y como f es homomorfismo, se cumple que $f(p) = 1$ □

Proposición 3.4 *Sea A un álgebra booleana. $S(A) = \{f \diagup f : A \longrightarrow 2$ homomorfismo $\}$ es un espacio de Stone.*

Demostración. Por el lema anterior $S(A)$ es no vacío.
Sea $a \in A$ fijo y arbitrario.

1. $S(A)$ es de Hausdorff
   Sea $f, g \in S(A)$ tal que $f \neq g$, entonces existe un $p \in A$ tal que $f(p) \neq g(p)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f(p) = 0$ y $g(p) = 1$, entonces podemos decir :

$$\begin{aligned} f(p) \in U &= \{f : f(a) = 0\} \\ g(p) \in Q &= \{g : g(a) = 1\} \end{aligned}$$

   tenemos U y S son conjuntos abiertos y disjuntos.
   por lo tanto existen $f \in U; g \in Q$ tal que $U \cap Q = \emptyset$

2. $S(A)$ es Compacto
   Para probar, afirmaremos que los siguientes conjuntos sean cerrados

   - $M = \{f \in 2^A : f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)\}$ es un conjunto cerrado.
     en efecto
     Definiremos las funciones:

$$\begin{aligned} F_{a;b} :& 2^A \to 2 \\ & f \ \to F_{a;b}(f) = f(a \wedge b) \end{aligned}$$

Notamos que es la función proyección $\Upsilon_{a\wedge b}$ y toda función proyección es continua. Por lo tanto $F_{a;b}$ es continua.

$$\begin{aligned} G_{a;b} :& 2^A \to 2 \\ & f \ \to G_{a;b}(f) = f(a) \wedge f(b) \end{aligned}$$

Diremos que la función es continua.
Pues, podemos definir $G_{a;b} = H \circ E_{a;b} \circ D$ con :

$$\begin{aligned} D :& 2^A \to 2^A \times 2^A \\ & f \ \to (f, f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{a;b} :& 2^A \times 2^A \to 2 \times 2 \\ & (f, f) \to (f(a), f(b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H :& 2 \times 2 \to 2 \\ & (f(a), f(b)) \to f(a) \wedge f(b) \end{aligned}$$

Notaremos que la función D es continua por el teorema 3.2 , la función $E_{a,b}$ es continua por el teorema 3.3 y H es continua por la proposición 3.1 y 3.2 ; entonces por composición de funciones continuas $G_{a;b}$ es continua .
Luego, observamos que el conjunto $M = \{f \in 2^A : F_{a,b}(f) = G_{a,b}(f)\}$ y $F_{a,b}, G_{a,b}$ son continuas en el espacio de 2^A entonces por el teorema 3.4 , entonces M es cerrado en 2^A.

- $N = \{f \in 2^A : f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)\}$ es un conjunto cerrado.
  en efecto
  Definiremos las funciones:

$$\begin{aligned} F_{a;b} :& 2^A \to 2 \\ & f \ \to F_{a;b}(f) = f(a \vee b) \end{aligned}$$

Notamos que es la función proyección $\Upsilon_{a\vee b}$ y toda función proyección es continua. Por lo tanto $F_{a;b}$ es continua.

$$\begin{aligned} H_{a;b} :& 2^A \to 2 \\ & f \ \to H_{a;b}(f) = f(a) \vee f(b) \end{aligned}$$

Diremos que la función es continua.
Pues, podemos definir $H_{a;b} = R \circ S_{a;b} \circ T$ con :

$$\begin{aligned} T :& 2^A \to 2^A \times 2^A \\ & f \ \to (f, f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{a;b} :& 2^A \times 2^A \to 2 \times 2 \\ & (f, f) \to (f(a), f(b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R : & 2 \times 2 \rightarrow 2 \\ & (f(a), f(b)) \rightarrow f(a) \vee f(b) \end{aligned}$$

Notaremos que la función T es continua por el Teorema 3.2 , la función $S_{a,b}$ es continua por el teorema 3.3 y R es continua por las proposiciones 3.1 y 3.2; entonces por composición de funciones continuas $G_{a;b}$ es continua.
Luego, observamos que el conjunto $N = \{f \in 2^A : F_{a,b}(f) = H_{a,b}(f)\}$ y $F_{a,b}, H_{a,b}$ son continuas en el espacio de 2^A, entonces por el teorema 3.4 , entonces N es cerrado en 2^A.

- $P = \{f \in 2^A : f(a^*) = (f(a))^*\}$ es un conjunto cerrado.
  en efecto
  Definiremos las funciones:

  $$\begin{aligned} F_a : & 2^A \rightarrow 2 \\ & f \ \rightarrow F_{a;b}(f) = f(a^*) \end{aligned}$$

  Notamos que es la función proyección Υ_{a^*} y toda función proyección es continua. Por lo tanto F_a es continua.

  $$\begin{aligned} G_a : & 2^A \rightarrow 2 \\ & f \ \rightarrow G_a(f) = (f(a))^* \end{aligned}$$

  Diremos que la función es continua.
  Pues, podemos definir $G_a = \Psi \circ \Upsilon_a$ con :

  $$\begin{aligned} \Upsilon_a : & 2^A \rightarrow 2 \\ & f \ \rightarrow f(a) \end{aligned}$$

  $$\begin{aligned} \Psi : & 2 \rightarrow 2 \\ & a \rightarrow a^* \end{aligned}$$

  Notaremos que la función Υ_a es continua por ser función proyección, la función , Ψ es continua por la proposición 3.2 ; entonces por composición de funciones continuas G_a es continua.
  Luego, observamos que el conjunto $N = \{f \in 2^A : F_a(f) = G_a(f)\}$ y F_a, H_a son continuas en el espacio de 2^A, entonces por el teorema 3.4 , entonces M es cerrado en 2^A.

Luego, observamos que $S(A) = M \cap N \cap P$, y como la intersección finita de conjuntos cerrado es cerrado entonces $S(A)$ es cerrado. Además, como 2^A es Hausdorff y compacto (por la proposición 3.3), entonces $S(A)$ es Hausdorff y compacto.

3. $S(A)$ es totalmente disconexo.
   Hemos demostrado en la proposición anterior que existe una subbase de 2^A formada por conjunto abiertos-cerrados. Entonces todo conjunto abierto de $S(A)$ es unión de abiertos-cerrados. Como $S(A)$ es un espacio de Hausdorff, entonces $S(A)$ es totalmente disconexo.

Por lo tanto $S(A)$ es un espacio de Stone. $\square$

Basado de la proposición anterior podemos definir algunos conceptos nuevos que permitirá demostrar el teorema de Stone para álgebra booleanas.

Definición 3.7 *Sea A un álgebra booleana, denotaremos $S(A)$ como el espacio de Stone asociado con A.*

Definición 3.8 *Sea X un espacio de Stone, entonces el álgebra dual de X es la clase de los conjuntos abiertos cerrados en X*

Definición 3.9 *Un campo de conjuntos es un subconjunto $F \subset P(X)$ tal que es cerrado bajo complemento y es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas de conjuntos finitos de X*

Definición 3.10 *Se dice que un campo $F \subset P(X)$ es de separación si dados $x, y \in X$ distintos, existen conjuntos $S, T \in F$ con $S \cap T = \emptyset$ tal que $x \in S$ y $y \in T$.*

Lema 3.2 *Si X es un espacio de Stone y F es un campo de separación de conjuntos abiertos-cerrados de X, entonces F separa puntos y conjuntos cerrados.*

Demostración. Sean $C \subseteq X$ un conjunto cerrado y $x \notin C$, además sea $y \in C$ fijo y arbitrario (notamos que $x \neq y$) como F es un campo de separación
existen $S_y, T_y \in F$ con $S_y \cap T_y = \emptyset$ tales que $x \in S_y$, $y \in T_y$, luego:

$$C = \bigcup_{y \in C} \{y\} \subseteq \bigcup_{y \in C} T_y$$

Luego por hipótesis, sabemos que T_y son abiertos $\forall y \in C$ además C es compacto , entonces existen $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n \in C$ tal que:

$$C \subseteq T_{y_1} \cup T_{y_2} \cup T_{y_3} \cup \cdots \cup T_{y_n}$$

Como F es un campo, entonces $T_{y_1} \cup T_{y_2} \cup T_{y_3} \cup \cdots \cup T_{y_n} \in F$ (ya que es cerrado bajo uniones finitas) y además $x \in S_{y_i}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, eso significa $x \in S_{y_1} \cap S_{y_2} \cap S_{y_3} \cap \cdots \cap S_{y_n}$ donde $S_{y_1} \cap S_{y_2} \cap S_{y_3} \cap \cdots \cap S_{y_n} \in F$, pues F es un campo(ya que es cerrado bajo intersecciones finitas). Finalmente $S_{y_i} \cap T_{y_i} = \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$(S_{y_1} \cap S_{y_2} \cap S_{y_3} \cap \cdots \cap S_{y_n}) \cap (T_{y_1} \cup T_{y_2} \cup T_{y_3} \cup \cdots \cup T_{y_n}) = \emptyset$$

por lo tanto F separa puntos y conjuntos cerrados. $\square$

Lema 3.3 *Si X es un espacio de Stone y F es un campo de separación de conjuntos abiertos-cerrados de X, entonces F es el álgebra dual de X; es decir, es el campo de todos los subconjuntos abiertos-cerrados de X.*

Demostración. Sea D un subconjunto abierto-cerrado de X. entonces D^c es un conjunto cerrado de X (es el complemento de D), para $x \in D$ claramente $x \notin D^c$ por el lema 3.2, existen S_x , $T_x \subset F$ tales que: $x \in S_x$, $x \notin T_x$ y $D^c \subseteq T_x$ con $S_x \cap T_x = \emptyset$.
Vamos a demostrar que $D = \bigcup_{x \in D} S_x$.
En efecto:
($\subseteq$)
Como $x \in D$, entonces:

$$D = \bigcup_{x \in D} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in D} S_x$$

($\supseteq$)
Sabemos que $S_x \cap T_x = \emptyset$, tenemos:

$$\begin{aligned} &S_x \subseteq (T_x)^c \ \ldots (1) \\ &\text{Además } D^c \subseteq T_x \to (T_x)^c \subseteq D \ \ldots (2) \end{aligned}$$

De (1) y (2), tenemos: $S_x \subseteq D$, $\forall\ x \in D$ entonces $\bigcup_{x \in D} S_x \subseteq D$.
Por lo tanto:

$$D = \bigcup_{x \in D} S_x$$

Como D es compacto, entonces existen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in D$ tal que:

$$D = S_{x_1} \cup S_{x_2} \cup S_{x_3} \cup \cdots \cup S_{x_n}$$

y desde que F es campo (cerrados bajo uniones finitas), por lo tanto $D \in F$ □

Teorema 3.5 (Teorema de representación de Stone) *Toda álgebra booleana es isomorfa al álgebra dual de su espacio de Stone asociado.*

Demostración. Sean $(A, \wedge, \vee, *)$ un álgebra booleana y $(B, \cap, \cup, ^c)$ el álgebra dual del espacio de Stone asociado a A. Por demostrar que existe un isomorfismo de A en B. Definimos:

$$\begin{aligned} \varphi :& A \to B \\ & a \ \to \varphi(a) = \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \end{aligned}$$

Por probar que φ es un isomorfismo.

1. φ es un homomorfismo. Sean a y $b \in A$, vamos a demostrar:

   - $\varphi(a \vee b) = \varphi(a) \cup \varphi(b)$

     En primer lugar, vamos a aprobar que :

     $\{f \in S(A) : f(a) \vee f(b) = 1\} = \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cup \{f \in S(A) : f(b) = 1\}$

     en efecto:
     ($\subset$)

Sea $g \in \{f \in S(A) : f(a) \vee f(b) = 1\}$
entonces $g(a) \vee g(b) = 1$, luego como $g \in S(A)$ sin pérdida de generalidad asumiremos que $g(a) = 1$ entonces
$g \in \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \subset \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cup \{f \in S(A) : f(b) = 1\}$
por lo tanto $g \in \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cup \{f \in S(A) : f(b) = 1\}$
$(\supset)$
Sea $g \in \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cup \{f \in S(A) : f(b) = 1\}$
entonces $g(a) = 1$ o $g(b) = 1$ para $g \in S(A)$
asumiremos sin pérdida de generalidad que $g(a) = 1$,con $g \in S(A)$.
Luego por ser g homomorfismo

$$\begin{aligned} g(a \vee b) &= g(a) \vee g(b) \\ &= 1 \vee g(b) \\ &= 1 \end{aligned}$$

tenemos que $g \in S(A)$ con $g(a \vee b) = 1$
por lo tanto : $g \in \{f \in S(A) : f(a) \vee f(b) = 1\}$

A continuación, demostraremos el inciso:

$$\begin{aligned} \varphi(a \vee b) &= \{f \in S(A) : f(a \vee b) = 1\} \\ &= \{f \in S(A) : f(a) \vee f(b) = 1\} \qquad (f \text{ es un homomorfismo}) \\ &= \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cup \{f \in S(A) : f(b) = 1\} \\ &= \varphi(a) \cup \varphi(b) \end{aligned}$$

- $\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \cap \varphi(b)$

En primer lugar, vamos a aprobar que :

$\{f \in S(A) : f(a) \wedge f(b) = 1\} = \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cap \{f \in S(A) : f(b) = 1\}$

en efecto:
$(\subset)$
Sea $g \in \{f \in S(A) : f(a) \wedge f(b) = 1\}$
entonces $g(a) \wedge g(b) = 1$, luego como $g \in S(A)$ esto implica que $g(a) = 1$ y $g(b) = 1$ entonces
$g \in \{f \in S(A) : f(a) = 1\}$ y $g \in \{f \in S(A) : f(b) = 1\}$
por lo tanto $g \in \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cap \{f \in S(A) : f(b) = 1\}$
$(\supset)$
Sea $g \in \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cap \{f \in S(A) : f(b) = 1\}$
entonces $g(a) = 1$ y $g(b) = 1$ para $g \in S(A)$
Luego por ser g homomorfismo

$$\begin{aligned} g(a \wedge b) &= g(a) \wedge g(b) \\ &= 1 \wedge 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

tenemos que $g \in S(A)$ con $g(a \wedge b) = 1$
por lo tanto : $g \in \{f \in S(A) : f(a) \wedge f(b) = 1\}$

A continuación, demostraremos el inciso:

$$\begin{aligned}
\varphi(a \wedge b) &= \{f \in S(A) : f(a \wedge b) = 1\} \\
&= \{f \in S(A) : f(a) \wedge f(b) = 1\} \qquad \text{(f es un homomorfismo)} \\
&= \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cap \{f \in S(A) : f(b) = 1\} \\
&= \varphi(a) \cap \varphi(b)
\end{aligned}$$

- $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^c$

$$\begin{aligned}
\varphi(a^*) &= \{f \in S(A) : f(a^*) = 1\} \\
&= \{f \in S(A) : (f(a))^* = 1\} \qquad \text{(f es un homomorfismo)} \\
&= \{f \in S(A) : f(a) = 0\} \qquad \text{(f} \in \text{S(A))} \\
&= S(A) - \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \\
&= \{f \in S(A) : f(a) = 1\}^c \\
&= (\varphi(a))^c
\end{aligned}$$

2. φ es un monomorfismo
Sean $a, b \in A$ tal que $\varphi(a) = \varphi(b)$, por demostrar que $a = b$.
sabemos que $\varphi(a) \cap (\varphi(a))^c = \emptyset$
esto implica $\varphi(a) \cap (\varphi(b))^c = \emptyset$ (por la hipótesis), entonces:

$$\begin{aligned}
&\{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cap (S(A) - \{f \in S(A) : f(b) = 1\}) = \emptyset \\
&\{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cap \{f \in S(A) : f(b) = 0\} = \emptyset \\
&\{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cap \{f \in S(A) : (f(b))^* = 1\} = \emptyset \\
&\{f \in S(A) : f(a) = 1\} \cap \{f \in S(A) : f(b^*) = 1\} = \emptyset \\
&\{f \in S(A) : f(a) \wedge f(b^*) = 1\} = \emptyset \\
&\{f \in S(A) : f(a \wedge b^*) = 1\} = \emptyset
\end{aligned}$$

Tenemos que no existe un $f \in S(A)$ tal que $f(a \wedge b^*) = 1$, por la contraposición del lema 3.1 :

$$a \wedge b^* = 0 \;\rightarrow\; a \leq b \text{ ......(1)} \qquad \text{(Por el lema 1.10)}$$

Análogamente, sabemos que : $\varphi(b) \cap (\varphi(b))^c = \emptyset$
esto implica $\varphi(b) \cap (\varphi(a))^c = \emptyset$ (por la hipótesis), entonces:

$$\begin{aligned}
&\{f \in S(A) : f(b) = 1\} \cap (S(A) - \{f \in S(A) : f(a) = 1\}) = \emptyset \\
&\{f \in S(A) : f(b) = 1\} \cap \{f \in S(A) : f(a) = 0\} = \emptyset \\
&\{f \in S(A) : f(b) = 1\} \cap \{f \in S(A) : (f(a))^* = 1\} = \emptyset \\
&\{f \in S(A) : f(b) = 1\} \cap \{f \in S(A) : f(a^*) = 1\} = \emptyset \\
&\{f \in S(A) : f(b) \wedge f(a^*) = 1\} = \emptyset \\
&\{f \in S(A) : f(b \wedge a^*) = 1\} = \emptyset
\end{aligned}$$

Tenemos que no existe un $f \in S(A)$ tal que $f(b \wedge a^*) = 1$, por la contraposición del lema 3.1 :

$$b \wedge a^* = 0 \;\rightarrow\; b \leq a \text{ ......(2)} \qquad\qquad \text{(Por el lema 1.10)}$$

De (1) y (2) y por el lema 1.9 , tenemos: $a = b$
Por lo tanto, φ es monomorfismo.

3. φ es epimorfismo.
Por demostrar que la $Im(\varphi) = B$
Sea $a \in A$ arbitrario y definimos $B_a = \{f \in S(A) : f(a) = 1\} \in B$ conjunto abierto-cerrado. Sea H el conjunto formado por todas las imágenes de a, es decir todos los subconjuntos de la forma B_a, entonces diremos que H es un campo de subconjuntos de $S(A)$ ($H \subset P(S(A))$, pues la familia de los conjuntos B_a son cerrados bajos uniones finitas, intercepciones finitas y complementos en $S(A)$.
Vamos a demostrar que H es un campo de separación.
Sean $g, h \in S(A)$ con $g \neq h$ por demostrar que existen $B_{a_1}, B_{a_2} \subset H$ tal que $g \in B_{a_1}$ y $h \in B_{a_2}$ con $B_{a_1} \cap B_{a_2} = \emptyset$
Como $g \neq h$, entonces existe $p \in A$ tal que : $g(p) \neq h(p)$
Además $g, h \in S(A)$, esto implica que, si :

   - Si $g(p) = 1$, tenemos que $g \in \{f \in S(A) : (f(p)) = 1\}$ $(g \in S(A))$, esto implica $g \in B_p$.
   Además $h(p) = 0$ ya que $g \neq h$
   Luego:

$$\begin{aligned} & h \in \{f \in S(A) : f(p) = 0\} & \\ & h \in \{f \in S(A) : (f(p))^* = 1\} & (f \in S(A)) \\ & h \in \{f \in S(A) : f(p^*) = 1\} & (f \text{ es homomorfismo}) \\ & h \in B_{p^*} & (f \text{ es homomorfismo}) \end{aligned}$$

   Entonces existen $B_p, B_{p^*} \in H$ tal que $g \in B_p$ y $h \in B_{p^*}$ con $B_p \cap B_{p^*} = \emptyset$.

   - Si $g(p) = 0$, tenemos que $h(p) = 1$ ya que $g \neq h$, entonces $h \in \{f \in S(A) : (f(p)) = 1\}$, por lo cual $h \in B_p$.
   Además $g(p) = 0$, tenemos :

$$\begin{aligned} & g \in \{f \in S(A) : f(p) = 0\} & \\ & g \in \{f \in S(A) : (f(p))^* = 1\} & (f \in S(A)) \\ & g \in \{f \in S(A) : f(p^*) = 1\} & (f \text{ es homomorfismo}) \\ & g \in B_{p^*} & (f \text{ es homomorfismo}) \end{aligned}$$

   Entonces existen $B_p, B_{p^*} \in H$ tal que $h \in B_p$ y $g \in B_{p^*}$ con $B_p \cap B_{p^*} = \emptyset$.

Por lo tanto, H es un campo de separación. Luego por el lema 3.3 H es el álgebra dual de $S(A)$ y como B es el álgebra dual de $S(A)$, por lo tanto $H = im(\varphi) = B$.
Entonces φ es sobreyectivo.

Por lo tanto $\varphi : A \rightarrow B$ es un isomorfismo. $\square$

Conclusión

En el presente trabajo, hemos estudiado la teoría de álgebras booleanas, obteniendo resultados importantes. Podemos destacar lo siguiente:

- A toda álgebra booleana, le hemos asociado un espacio de Stone, el cual es un espacio topológico Hausdorff, compacto y totalmente disconexo.

- Toda álgebra booleana es isomorfa al álgebra dual de su espacio de Stone asociado.

- Los conceptos de álgebra booleana y anillo booleano son equivalentes.

- Todo ideal propio en un álgebra booleana es el núcleo de algún epimorfismo de álgebras booleanas.

- El cociente de un álgebra booleana entre un ideal maximal sólo consta de dos elementos.

- Sobre cualquier álgebra booleana, hemos definido una relación de orden parcial, la cual se comporta con propiedades análogas a la inclusión de conjuntos.

Bibliografía

[1] Dirks, M. (2011). *The stone representation theorem for Boolean algebras.*

[2] Halmos, P.(1974). *Lectures on Boolean Algebras.* Springer-Verlag, New York, USA.

[3] Luna, C. (2013). *Fundamentos básicos de las Álgebras Booleanas*[archivo pdf]. http://portal.facyt.uc.edu.ve/pasantias/informes/P97907494.pdf

[4] Perez Torres A. A. y Vásquez Lazo W. A. (2020) *Homomorfismos entre álgebras booleanas* [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de El Salvador] http://sb.ues.edu.sv/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?b...

[5] Posada, J. (2008). *Álgebras booleanas Super-Magras y algunas aplicaciones a la Teoría de modelos.* Panorama, 2(6), 4.

[6] Verástegui Chuquillanqui, T. (1987). *Representación de retículos booleanos.* Pro Mathematica, 1(1), 53-71. Recuperado a partir de https://revistas.pucp.edu.pe/index.php/promathematica/article/view/6043

[7] Quintana, Y.,y Hernandez, S. (2015). Estructuras booleanas y el código genético: algunos comentarios. Revista MATUA ISSN: 2389-7422, 2(2).

[8] Stone M.H.(1934). *Boolean Algebras and their application to Topology,* Division of Mathematics, Harvard University, 20 , 197-202.

[9] Birkhoff G. (1934), *Applications of lattice algebra*, Proc. Camb. Phil. Soc., vol 30, 115-122.

[10] Stone M.H. (1936), *The theory of representations for Boolean algebras*, Trans. Am. Math. Soc., vol 40 , 37-111.