



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

**Particiones de Markov y medidas de máxima entropía
para sistemas dinámicos hiperbólicos en el 2-toro**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jesús Fernando MONTALVO OLAZABAL

ASESOR

Dr. Jorge Luis CRISÓSTOMO PAREJAS

Lima, Perú

2023



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Montalvo, J. (2023). *Particiones de Markov y medidas de máxima entropía para sistemas dinámicos hiperbólicos en el 2-toro*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Jesús Fernando Montalvo Olazabal
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	72270736
URL de ORCID	https://orcid.org/0009-0000-1710-762X
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43688114
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-9049-4125
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Marlo Carranza Purca
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09965090
Datos de investigación	
Línea de investigación	Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional. Sistemas Dinámicos

Grupo de investigación	Dynamical Systems, Differential Equations and their Applications
Agencia de financiamiento	No aplica
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.0603526554608 Longitud: 77.0821112394333
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2021-2022
URL de disciplinas OCDE	MATEMATICA PURA https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Ciudad Universitaria - Av. Venezuela
S/N cuadra 34 Teléfono: 619-7000,
Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail:
eapmat@unmsm.edu.pe Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA
(Modalidad Presencial)

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 17:00 horas del viernes 06 de octubre del 2023, en el aula 206 se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (PRESIDENTE), Mg. Marlo Carranza Purca (MIEMBRO) y el Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: **“PARTICIONES DE MARKOV Y MEDIDAS DE MÁXIMA ENTROPÍA PARA SISTEMAS DINÁMICOS HIPERBÓLICOS EN EL 2-TORO”**, presentado por el señor Bachiller Jesús Fernando Montalvo Olazabal, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación Sobresaliente con un calificativo promedio de... Dieciocho(18).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya, manifestó que el señor Bachiller Jesús Fernando Montalvo Olazabal, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 6:10 pm horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
PRESIDENTE

Mg. Marlo Carranza Purca
MIEMBRO

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
MIEMBRO ASESOR



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado



CERTIFICADO DE SIMILITUD

Yo, Jorge Luis Crisóstomo Parejas en mi condición de asesor acreditado con la Resolución Decanal N°000335-2023-D-FCM/UNMSM de la tesis/monografía/informe de investigación/trabajo académico, cuyo título es "PARTICIONES DE MARKOV Y MEDIDAS DE MÁXIMA ENTROPÍA PARA SISTEMAS DINÁMICOS HIPERBÓLICOS EN EL 2-TORO", presentado por el bachiller JESÚS FERNANDO MONTALVO OLAZABAL, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática CERTIFICO que se ha cumplido con lo establecido en la Directiva de Originalidad y de Similitud de Trabajos Académicos, de Investigación y Producción Intelectual. Según la revisión, análisis y evaluación mediante el software de similitud textual, el documento evaluado cuenta con el porcentaje de 5 % de similitud, nivel **PERMITIDO** para continuar con los trámites correspondientes y para su **publicación en el repositorio institucional.**

Se emite el presente certificado en cumplimiento de lo establecido en las normas vigentes, como uno de los requisitos para la obtención del grado/ título/ especialidad correspondiente.

DNI: 43688114

Jorge Luis Crisóstomo Parejas



Agradecimientos

A mi orientador Jorge Luis Crisostomo Parejas por los momentos de fructífera discusión y enriquecimiento de mi experiencia matemática.

A mis padres José y Violeta quienes fueron la principal fuente de inspiración, motivación y apoyo a lo largo de mi carrera universitaria y de mi vida.

A todos los amigos que hice a lo largo de todo mi proceso formativo universitario, especialmente a mis compañeros de carrera Henrri y Gabriel, los cuales me ayudaron con sus comentarios y sus perspectivas en los tópicos estudiados.

La presente tesis fue desarrollado como parte del proyecto PSINFIN con código B21140032 aprobado con RR 012730-R-21 y con RD 000920-2021-D-FCM/UNMSM y por ello agradezco al coordinador de dicho proyecto.

Resumen

En este trabajo, abordamos el problema de existencia y unicidad de medida de máxima entropía para los difeomorfismos hiperbólicos (o de Anosov) definidos en \mathbb{T}^2 , siguiendo la bibliografía (Barreira, 2012) y (Bowen, 2008) y otros. Estudiamos las particiones de Markov para los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 , siguiendo la bibliografía de (Barreira, 2012) y (Adler, 1970); y usamos dichas particiones como herramientas fundamentales para construir medidas de máxima entropía.

Palabras claves: medidas de máxima entropía, entropía topológica, entropía métrica, difeomorfismos de Anosov, particiones de Markov, automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 , dinámica simbólica

Abstract

In this thesis, we approach the problem of existence and uniqueness of measure of maximal entropy for hyperbolic (or Anosov) diffeomorphisms defined on \mathbb{T}^2 . For this purpose, I used as reference (Barreira, 2012), (Bowen, 2008) and others. Further; we study the Markov partitions for the hyperbolic automorphisms on \mathbb{T}^2 , for that, this thesis uses (Barreira, 2012) and (Adler, 1970). Finally, we use these partitions as fundamental tools to construct the measures of maximal entropy for hyperbolic automorphisms on \mathbb{T}^2 .

Keywords: measure of maximal entropy, topological entropy, metric entropy, Anosov diffeomorphisms, Markov partitions, hyperbolic automorphisms on \mathbb{T}^2 , symbolic dynamics

Índice general

1. Preliminares	1
1.1. Conceptos de la teoría ergódica	1
1.2. Entropía métrica	3
1.3. Entropía topológica	7
1.4. Dinámica Simbólica	11
1.5. Matriz estocástica	12
2. Automorfismos Hiperbólicos en \mathbb{T}^2	15
2.1. El espacio \mathbb{T}^2	15
2.2. Automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2	20
2.3. Propiedades dinámicas de los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2	22
2.4. Difeomorfismos de Anosov en \mathbb{T}^2	27
2.5. Expansividad	30
3. Particiones de Markov en \mathbb{T}^2	33
3.1. Particiones de Markov de \mathbb{T}^2	33
3.2. Construcción de una partición de Markov en \mathbb{T}^2	39
3.3. Automorfismo hiperbólico vs Dinámica simbólica	45
3.4. Inducción de una medida de Markov	58
4. Medidas de máxima entropía para difeomorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2	63
4.1. Medidas de máxima entropía	63
4.2. Medida de máxima entropía para automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2	64
4.3. Medidas de máxima entropía para difeomorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2	75
Conclusiones	77

Introducción

El término entropía fue acuñado en 1865 por el físico alemán Rudolf Clausius, uno de los primeros fundadores de la termodinámica, el cual en un inicio le dio este nombre a la pérdida de calor irreversible. En los primeros años, este término fue bastante enigmático, pues parecía desconcertante lo que este término indicaba en la realidad. En palabras sencillas, este término parecía indicar que los sistemas tendían siempre a un grado de mayor desorden.

Como es habitual en la ciencia, la necesidad de comprender mejor este término hizo que en el año 1948 surgiera la noción matemática de entropía en el trabajo "A Mathematical Theory of Communication" de Claude Shannon, donde la entropía aparece como el principal concepto de la teoría de la información y en el cual el autor dedicó una sección a lo que él denomina Elección, incertidumbre y entropía. Es en este trabajo donde por primera vez vemos la notación H para la entropía, siendo esta una función dada de la siguiente forma:

$$H(p) = - \sum_{i=1}^k p_i \log p_i,$$

donde $p = (p_1, \dots, p_n)$ es un vector con entradas no negativas tal que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$; dicha función, en teoría de la información, mide la cantidad de información transmitida por un canal de comunicación.

Andrei Kolmogorov y Yakov Sinai motivados por el trabajo de C. Shannon proponen una definición de entropía para un sistema dinámico asociado a una medida invariante por dicho sistema, y es denominado entropía métrica¹ y que de cierto modo cuantifica el caos del sistema dinámico respecto a dicha medida invariante.

El concepto de entropía topológica para un sistema dinámico fue introducido en los años 90 por R.Adler, Konheim, McAndrew, R.Bowen y Dinaburg, el cual mide el caos total del sistema dinámico. La medida invariante por un sistema dinámico para el cual se cumple que la entropía

¹También conocida como entropía de Kolmogorov-Sinai

métrica y la entropía topológica son iguales es denominada medida de máxima entropía. Esta medida permite cualificar el caos total del sistema dinámico, es por ello que resulta natural preguntarse sobre la existencia y unicidad de dichas medidas².

En la presente tesis, abordamos el problema anteriormente planteado para los sistemas dinámicos denominados difeomorfismos hiperbólicos³ en \mathbb{T}^2 , más específicamente, abordaremos las siguientes preguntas: ¿Existe alguna medida de máxima entropía para sistemas dinámicos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 ?, en caso de la existencia de dichas medidas ¿Es única?

Para responder las preguntas planteadas, usaremos las particiones de Markov de los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 , desarrollados en el capítulo 3 didácticamente con ejemplos que facilitan la lectura. Dichos automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 son inducidos por matrices hiperbólicas de dimensiones 2×2 , la hiperbolicidad de dichas matrices es importante pues es una característica que dota de estabilidad al automorfismo. Dicha estabilidad implica que la caoticidad no crece de manera desproporcionada ante pequeñas perturbaciones del sistema.

El presente trabajo consta de 4 capítulos:

- * El Capítulo 1 está dedicado a hacer un breve repaso sobre los principales conceptos y resultados fundamentales de la teoría ergódica, entropía métrica y entropía topológica que serán necesarios para el desarrollo del capítulo 3 y 4. Al final de dicho capítulo encontramos un resultado de notable relevancia para nuestro objetivo, nos referimos al principio variacional, con el cual establecemos la relación que existe entre la entropía métrica y la entropía topológica. Para finalizar, enunciamos resultados sobre la dinámica simbólica.
- * En el Capítulo 2 presentamos los sistemas dinámicos denominados automorfismos hiperbólicos definidos en \mathbb{T}^2 . Demostraremos que el conjunto de los puntos periódicos de los automorfismos hiperbólicos es denso en \mathbb{T}^2 , que los automorfismos hiperbólicos son topológicamente mixing y que los automorfismos hiperbólicos preservan la medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 . También presentamos los difeomorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 .
- * En el Capítulo 3 desarrollamos la construcción de las particiones de Markov para automorfismos en \mathbb{T}^2 . Esta partición permite establecer una relación del automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 con la dinámica simbólica. Para finalizar, inducimos una medida de Markov en \mathbb{T}^2 ,

²Dichas medidas son denominadas medidas de máxima entropía.

³También conocidos como difeomorfismos de Anosov.

la cual será de importancia en el último capítulo pues se verá que también es una medida de máxima entropía.

- * En el Capítulo 4 aplicamos todas las herramientas matemáticas desarrolladas en los capítulos anteriores para demostrar el Teorema de Bowen para difeomorfismos hiperbólicos (o de Anosov) en \mathbb{T}^2 , más específicamente demostraremos que dichos sistemas dinámicos poseen una única medida de máxima entropía. Para dicho fin, usaremos las particiones de Markov de los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 para demostrar que los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 tienen una única medida de máxima entropía. Luego, usamos el famoso resultado de J. Franks que muestra que todo difeomorfismo hiperbólico (o de Anosov) en \mathbb{T}^2 es conjugado topológicamente a un automorfismo hiperbólico, y esto permite concluir la existencia y unicidad de la medida de máxima entropía para los difeomorfismos de Anosov en \mathbb{T}^2 . Para finalizar, construimos explícitamente la medida de máxima entropía para los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 .

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo enunciamos algunas definiciones y resultados de la teoría ergódica, entropía métrica y entropía topológica los cuales serán de mucha importancia para entender, deducir y probar resultados posteriores en este, que básicamente será usado en el capítulo 3 y 4. Para un estudio más detallado de estos tópicos invitamos al lector a revisar los libros de (Barreira, 2012) y (Viana and Oliveira, 2016).

1.1. Conceptos de la teoría ergódica

En esta sección veremos algunas definiciones y resultados sobre la teoría ergódica

Medida Invariante

Definición 1.1.1. Sea (M, \mathcal{B}, μ) un espacio de medida y $f : M \rightarrow M$ una transformación medible. Decimos que μ es una *medida invariante* bajo f si

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \text{ para todo conjunto medible } E \subset M$$

Observación 1.1.1. También se dice que μ es f -invariante, o que f preserva μ , para referirnos a lo mismo de la definición anterior.

Ejemplo 1.1.1. Sea $f : M \rightarrow M$ tal que $f(p) = p$. Consideremos la medida de Dirac δ_p donde

$$\delta_p(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in E \\ 0 & \text{si } p \notin E \end{cases}$$

Ahora, demostremos que δ_p es medida invariante bajo f . En efecto, sea $E \in \mathcal{B}$ entonces

$$\delta_p(f^{-1}(E)) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in f^{-1}(E) \\ 0 & \text{si } p \notin f^{-1}(E) \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(p) \in E \\ 0 & \text{si } f(p) \notin E \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in E \\ 0 & \text{si } p \notin E \end{cases} = \delta_p(E)$$

de donde se concluye que f preserva δ_p .

Ejemplo 1.1.2. Sea $M = [0, 1]$ y \mathcal{B} la σ -álgebra de Borel en $[0, 1]$. Consideremos la aplicación $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x + 2 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Consideremos la medida de Lebesgue m en $[0, 1]$. Demostremos que m es una medida invariante por f . En efecto, sabemos que la colección \mathcal{A} , dada por

$$\mathcal{A} = \{I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k\}$$

donde los I_j 's son intervalos en $[0, 1]$ dos a dos disjuntos, es una álgebra en $[0, 1]$ que genera la σ -álgebra de Borel de $[0, 1]$. Sea I un intervalo $[0, 1]$ luego

$$f^{-1}(I) = I_1 \cup I_2$$

de la regla de correspondencia de f y desde que m es la medida de Lebesgue se tiene que

$$m(I_1) = m(I_2) = \frac{1}{2}m(I).$$

Lo que implica que

$$m(f^{-1}(I)) = m(I_1 \cup I_2) = m(I).$$

Así, dado cualquier elemento $E \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$m(f^{-1}(E)) = m(E).$$

Y desde que \mathcal{A} genera la σ -álgebra de Borel en $[0, 1]$, podemos concluir que

$$m(f^{-1}(E)) = m(E)$$

para todo $E \in \mathcal{B}_{[0,1]}$.

Medida Ergódica

Definición 1.1.2. Sea (M, \mathcal{B}, μ) un espacio de medida de probabilidad y sea $f : M \rightarrow M$ una transformación medible que preserva la medida μ . Decimos que μ es *ergódica* (con respecto a f) si para cualquier conjunto medible $E \in \mathcal{B}$ con $f^{-1}(E) = E$ se tiene que

$$\mu(E) = 0 \text{ ó } \mu(E) = 1.$$

En este caso decimos que f es ergódico con respecto a la medida μ .

Ejemplo 1.1.3. Consideremos (M, \mathcal{B}) un espacio medible y $f : M \rightarrow M$ una aplicación medible. Supongamos que $f(p) = p$ para algún $p \in M$. Es claro que la medida $\mu = \delta_p$ es ergódica desde que la medida de un conjunto medible puede solo ser 0 o 1.

Ejemplo 1.1.4. La rotación racional $R_\theta : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $R_\theta(z) = e^{2\pi\theta i}z$, donde S^1 es el círculo unitario y $\theta = \frac{1}{3}$, no es ergódico con respecto a la medida de Lebesgue μ en el círculo S^1 . En efecto, considere un conjunto medible A en S^1 tal que $0 < \mu(A) < \frac{1}{3}$. Tomemos

$$E = A \cup R_\theta^{-1}(A) \cup R_\theta^{-2}(A).$$

Es inmediato verificar que $R_\theta^{-1}(E) = E$ (desde que R_θ es periódico se cumple $R_\theta^{-3}(E) = E$). Además, desde que R_θ preserva la medida de Lebesgue μ en el círculo S^1 , se tiene $\mu(A) = \mu(R_\theta^{-1}(A)) = \mu(R_\theta^{-2}(A))$, luego

$$0 < \mu(E) = 3\mu(A) < 1.$$

De aquí, podemos ver que existe un conjunto medible $E \in S^1$ con $R_\theta^{-1}(E) = E$ tal que su medida $\mu(E)$ no puede ser ni 1 ni 0. Por lo tanto, R_θ no es ergódico con respecto a la medida de Lebesgue μ .

Ejemplo 1.1.5. El sistema dinámico del ejemplo 1.1.2 es ergódico con respecto a la medida de Lebesgue m en $[0, 1]$.

1.2. Entropía métrica

Sea (M, \mathcal{B}, μ) un espacio de probabilidad. En este capítulo, por *partición* siempre entenderemos una familia finita o numerable \mathcal{P} de conjuntos medibles disjuntos dos a dos cuya unión tiene medida total. La *suma* $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ de las dos particiones \mathcal{P} y \mathcal{Q} es la partición cuyos elementos

son las intersecciones $P \cap Q$ con $P \in \mathcal{P}$ y $Q \in \mathcal{Q}$. Más generalmente, dada cualquier familia numerable de particiones \mathcal{P}_n , definimos

$$\bigvee_n \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_n P_n : P_n \in \mathcal{P}_n \text{ para cada } n \right\}$$

Definición 1.2.1. Sea \mathcal{P} una partición finita del espacio de probabilidad (M, \mathcal{B}, μ) . Sea $\phi(x) = x \log x$ si $0 < x \leq 1$ y $\phi(0) = 0$.

Definimos la *entropía* de \mathcal{P} como

$$H(\mathcal{P}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \phi(\mu(P))$$

Sea $f : M \rightarrow M$ una transformación que preserva la medida μ y sea \mathcal{P} una partición de M , entonces $f^{-j}\mathcal{P} = \{f^{-j}(P) : P \in \mathcal{P}\}$ es también una partición de M .

Definición 1.2.2. Supongamos que $f : M \rightarrow M$ es una transformación que preserva la medida μ y sea \mathcal{P} una partición de M , definimos la *entropía* $h(f, \mathcal{P})$ de f con respecto a \mathcal{P} como

$$h(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{P}) \right)$$

Observación 1.2.1. Dada una partición \mathcal{P} de M con entropía finita, denotemos por

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{P}) \text{ para cada } n \geq 1.$$

Con la observación 1.2.1 podemos reescribir la definición 1.2.2, entonces la entropía del sistema dinámico f con respecto a la partición \mathcal{P} se define como

$$h(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{P}^n)$$

Definición 1.2.3. La *entropía métrica* de una transformación $f : (M, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (M, \mathcal{B}, \mu)$ que preserva medida se define como

$$h_\mu(f) = \sup\{h(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ es partición finita}\}$$

Definición 1.2.4. Sean μ y ν medidas de probabilidad invariantes por las aplicaciones medibles $f : M \rightarrow M$ y $g : N \rightarrow N$, respectivamente. Decimos que los sistemas (f, μ) y (g, ν) son *ergódicamente equivalentes* si podemos escoger conjuntos medibles $X \subset M$ y $Y \subset N$ con $\mu(X) = 1$ y $\nu(Y) = 1$, y una biyección medible $\phi : X \rightarrow Y$ con inversa medible, de tal forma que

$$\phi_*\mu = \mu \circ \phi^{-1} = \nu \quad \text{y} \quad \phi \circ f = g \circ \phi.$$

Observación 1.2.2. Los conjuntos X y Y en la definición pueden ser elegidos invariantes bajo f y g , respectivamente. En efecto, consideremos $X_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X)$, el cual es un conjunto medible desde que f es una aplicación medible. Notemos que $X_0 \subset X$ y

$$f(X_0) = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n+1}(X),$$

de donde se puede ver que $f(X_0) \subset X_0$. Además $\mu(X_0) = 1$, para ver esto, consideremos el siguiente cálculo

$$\mu\left(M \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(M \setminus X)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(f^{-n}(M \setminus X)).$$

Puesto que μ es invariante por f entonces $\mu(f^{-n}(M \setminus X)) = \mu(M \setminus X) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y recordando la no negatividad de la medida, de la desigualdad anterior se sigue que

$$\mu\left(M \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X)\right) = 0.$$

De donde, a su vez, se sigue que $\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X)\right) = 1$; es decir, $\mu(X_0) = 1$. Análogamente, podemos considerar $Y_0 = \bigcap_{n=0}^{\infty} g^{-n}(Y)$ el cual es un subconjunto medible de Y tal que $\nu(Y_0) = 1$ y $g(Y_0) \subset Y_0$.

Además, por construcción, se cumple $\phi(X_0) = Y_0$. En efecto, desde que $g^{-n} \circ \phi = \phi \circ f^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se sigue

$$\begin{aligned} \phi(X_0) &= \phi\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(X)\right) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \phi(f^{-n}(X)) \\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} g^{-n}(\phi(X)) \\ &= \bigcap_{n=0}^{\infty} g^{-n}(Y) = Y_0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la restricción de ϕ a X_0 es una biyección sobre Y_0 . De esta manera, para la definición de sistemas ergódicamente equivalentes siempre podemos considerar conjuntos invariantes bajo su respectiva aplicación.

Proposición 1.2.1. Sean $f : M \rightarrow M$ y $g : N \rightarrow N$ transformaciones que preservan medidas de probabilidad μ en M y ν en N , respectivamente. Si (f, μ) es ergódicamente equivalente a (g, ν) , entonces $h_{\mu}(f) = h_{\nu}(g)$.

Demostración. Como f y g son ergódicamente equivalentes entonces existen conjuntos medibles, sin pérdida de generalidad vamos a suponer que $X = M$ y $Y = N$, y una biyección medible $\phi : M \rightarrow N$ con inversa medible, de tal forma que

$$\mu \circ \phi^{-1} = \nu \quad \text{y} \quad \phi \circ f = g \circ \phi.$$

Además, por la observación 1.2.2 sabemos que podemos considerar a los conjuntos M y N como invariantes por f y g respectivamente. Dada una partición \mathcal{P} de M con entropía finita para μ , sea $\mathcal{Q} = \phi(\mathcal{P})$ la imagen de \mathcal{P} bajo ϕ . Entonces \mathcal{Q} es una partición de N , luego

$$H_\nu(\mathcal{Q}) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}} -\nu(Q) \log \nu(Q)$$

Recordando las propiedades de ϕ tenemos que para todo $Q \in \mathcal{Q}$ existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $Q = \phi(P)$ y notando que $\mu = \nu \circ \phi$ entonces

$$\sum_{Q \in \mathcal{Q}} -\nu(Q) \log \nu(Q) = \sum_{P \in \mathcal{P}} -\nu(\phi(P)) \log \nu(\phi(P)) = \sum_{P \in \mathcal{P}} -\mu(P) \log \mu(P)$$

De todo esto se puede ver que $H_\nu(\mathcal{Q}) = H_\mu(\mathcal{P})$. Por otro lado, por la observación 1.2.1 tenemos

$$\mathcal{Q}^n = \bigvee_{j=0}^{n-1} g^{-j}(\mathcal{Q}) = \bigvee_{j=0}^{n-1} g^{-j}(\phi(\mathcal{P})) = \bigvee_{j=0}^{n-1} \phi(f^{-j}(\mathcal{P})) = \phi \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j}(\mathcal{P}) \right) = \phi(\mathcal{P}^n),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De esto último y por argumentos análogos a los previos se puede probar, por inducción, que $H_\nu(\mathcal{Q}^n) = H_\mu(\mathcal{P}^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, de la definición de entropía para un sistema dinámico, se sigue

$$h_\nu(g, \mathcal{Q}) = \lim_n \frac{1}{n} H_\nu(\mathcal{Q}^n) = \lim_n \frac{1}{n} H_\mu(\mathcal{P}^n) = h_\mu(f, \mathcal{P}). \quad (1.1)$$

Sabemos, por la definición 1.2.3, que $h_\mu(f) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P})$. Dado $\epsilon > 0$ existe \mathcal{P} partición finita tal que

$$|h_\mu(f) - h_\mu(f, \mathcal{P})| < \epsilon.$$

Podemos usar lo hallado en la expresión 1.1, puesto que para obtener dicha expresión se consideró \mathcal{P} de forma arbitraria. Así, existe \mathcal{Q} partición finita de N tal que

$$|h_\mu(f) - h_\nu(g, \mathcal{Q})| < \epsilon,$$

de esto se puede deducir fácilmente que $h_\mu(f) \leq h_\nu(g)$. De forma análoga, se puede deducir que $h_\nu(g) \leq h_\mu(f)$, obteniendo finalmente la igualdad

$$h_\mu(f) = h_\nu(g),$$

la cual queríamos demostrar. □

Ahora, veamos una versión topológica del cálculo de la entropía métrica.

Definición 1.2.5. Sea $f : M \rightarrow M$ una aplicación continua en un espacio métrico compacto. Dado $x \in M$, $n \geq 1$ y $\epsilon > 0$, nos referiremos como *bola dinámica* de x de longitud n y radio ϵ al conjunto

$$B(x, n, \epsilon) = \{y \in M : d(f^j(x), f^j(y)) < \epsilon \text{ para todo } j = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Con este conjunto definimos

$$h_\mu^+(f, \epsilon, x) = \limsup_n -\frac{1}{n} \log \mu(B(x, n, \epsilon))$$

y

$$h_\mu^-(f, \epsilon, x) = \liminf_n -\frac{1}{n} \log \mu(B(x, n, \epsilon))$$

Teorema 1.2.1 (Brin-Katok). Sea μ una medida de probabilidad invariante bajo f . Los límites

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} h_\mu^-(f, \epsilon, x) \quad \text{y} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} h_\mu^+(f, \epsilon, x)$$

existen y son iguales, para μ -casi todo punto. Denotando por $h_\mu(f, x)$ su valor común, la función $h_\mu(f, \cdot)$ es integrable y

$$h_\mu(f) = \int h_\mu(f, x) d\mu(x)$$

Demostración. La prueba de este resultado puede ser hallado en el paper original de Brin y Katok (Brin and Katok, 1983). □

1.3. Entropía topológica

Presentamos la definición de entropía topológica, la cual es debida a R.Adler, Konheim y McAndrew. Sea M un espacio topológico compacto. Llamamos *cobertura abierta* de M a cualquier familia α de conjuntos abiertos cuya unión es todo M . Por la compacidad, toda cobertura abierta admite una *subcobertura* (que es, una subfamilia que también es una cobertura abierta) con elementos finitos.

Definición 1.3.1. Denominamos *entropía* de la cobertura abierta α al número

$$H(\alpha) = \log N(\alpha),$$

donde $N(\alpha)$ es el menor número tal que α admite alguna subcobertura finita con ese número de elementos.

Dadas las coberturas abiertas $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ de M denotamos por $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_m$ a su suma, esto es, la cobertura abierta cuyos elementos son las intersecciones $A_1 \cap \dots \cap A_m$ con $A_j \in \alpha_j$ para cada j .

Sea $f : M \rightarrow M$ una transformación continua. Si α es una cobertura abierta de M , entonces $f^{-j}(\alpha) = \{f^{-j}(A) : A \in \alpha\}$ también es una cobertura. Para cada $n \geq 1$, denotamos

$$\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\alpha)$$

Definición 1.3.2. Sea M un espacio topológico compacto. Sea α una cobertura abierta de M , y $f : M \rightarrow M$ una transformación continua. Definimos la *entropía de f con respecto a α*

$$h(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n)$$

Observación 1.3.1. La definición anterior puede ser simplificada notando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n) = \inf_n \frac{1}{n} H(\alpha^n),$$

esto se sigue desde que $(H(\alpha^n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión subaditiva (Vea (Viana and Oliveira, 2016)).

Definición 1.3.3. Sea M un espacio topológico compacto. Sea α una cobertura abierta de M y $f : M \rightarrow M$ una transformación continua, definimos la *entropía topológica* de f como

$$h_{top}(f) = \{h(f, \alpha) : \alpha \text{ es una cobertura abierta de } M\}$$

Definición 1.3.4. Sean $f : M \rightarrow M$ y $g : N \rightarrow N$ transformaciones continuas en espacios topológicos compactos M y N . Si existe una aplicación sobreyectiva continua $h : M \rightarrow N$ tal que $h \circ f = g \circ h$ se dice que f y g son *topológicamente semiconjugados* o simplemente *semiconjugados*.

Proposición 1.3.1. Si $f : M \rightarrow M$ y $g : N \rightarrow N$ son transformaciones continuas semiconjugadas (como en la definición 1.3.4) se cumple que

$$h_{top}(g) \leq h_{top}(f).$$

Demostración. Dado un cubrimiento abierto α de N , sabemos que

$$h^{-1}(\alpha) = \{h^{-1}(A) : A \in \alpha\}$$

es una cobertura abierta de M . Recordemos que, por definición, la suma iterada α^n es la cobertura abierta formada por los conjuntos $\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j)$ con $A_0, A_1, \dots, A_{n-1} \in \alpha$.

Análogamente, podemos considerar la suma iterada $h^{-1}(\alpha)^n$ el cual está formada por los conjuntos $\bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(h^{-1}(A_j))$, como $h \circ f = g \circ h$ se tiene

$$\bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(h^{-1}(A_j)) = \bigcap_{j=0}^{n-1} h^{-1}(g^{-j}(A_j)) = h^{-1}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j)\right). \quad (1.2)$$

De esta última igualdad podemos ver que $\bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(h^{-1}(A_j)) \in h^{-1}(\alpha^n)$, entonces

$$h^{-1}(\alpha)^n \subset h^{-1}(\alpha^n) \quad (1.3)$$

De forma análoga, sea $h^{-1}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j)\right) \in h^{-1}(\alpha^n)$, por la igualdad 1.2 se puede ver fácilmente que $h^{-1}\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} g^{-j}(A_j)\right) \in h^{-1}(\alpha)^n$, entonces

$$h^{-1}(\alpha^n) \subset h^{-1}(\alpha)^n \quad (1.4)$$

De (1.3) y (1.4) se sigue $h^{-1}(\alpha^n) = h^{-1}(\alpha)^n$. Desde que h es sobreyectiva, una familia $\gamma \subset \alpha^n$ cubre N si y sólo si $h^{-1}(\gamma)$ cubre M . Luego, si $N(\alpha^n)$ es el menor número tal que α^n admite alguna subcobertura finita con ese número de elementos entonces $h^{-1}(\alpha^n)$ admite una subcobertura finita con $N(\alpha^n)$ elementos (siendo este el menor número), es decir $N(h^{-1}(\alpha^n)) = N(\alpha^n)$. De todo esto se deduce la siguiente identidad,

$$H(\alpha^n) = H(h^{-1}(\alpha^n)) = H(h^{-1}(\alpha)^n).$$

Luego,

$$\frac{1}{n}H(\alpha^n) = \frac{1}{n}H(h^{-1}(\alpha)^n),$$

aplicando límite cuando $n \rightarrow \infty$ y recordando la definición 1.3.2 tenemos

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{n}H(\alpha^n) &= \lim_n \frac{1}{n}H(h^{-1}(\alpha)^n) \\ h(g, \alpha) &= h(f, h^{-1}(\alpha)). \end{aligned}$$

A continuación, tomando el supremo sobre todas las coberturas abiertas α de N se sigue

$$h_{top}(g) = \sup_{\alpha} h(g, \alpha) = \sup_{\alpha} h(f, h^{-1}(\alpha)). \quad (1.5)$$

Por otro lado, es claro que el supremo sobre todas las coberturas finitas de M cumple la siguiente desigualdad

$$\sup_{\alpha} h(f, h^{-1}(\alpha)) \leq \sup_{\beta} h(f, \beta) = h_{top}(f). \quad (1.6)$$

De (1.5) y (1.6) se concluye

$$h_{top}(g) \leq h_{top}(f).$$

□

Ahora, presentamos la definición de entropía topológica dada por Bowen y Dinaburg.

Definición 1.3.5. Sea $f : M \rightarrow M$ una transformación continua en un espacio métrico M , no necesariamente compacto, y sea $K \subset M$ un subconjunto compacto. Cuando M es compacto, es suficiente considerar $K = M$.

Dado $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, decimos que un conjunto $E \subset M$ (n, ϵ) -genera K si para todo $x \in K$ existe $a \in E$ tal que $d(f^i(x), f^i(a)) < \epsilon$ para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$. En otras palabras,

$$K \subset \bigcup_{a \in E} B(a, n, \epsilon),$$

donde $B(a, n, \epsilon) = \{x \in M : d(f^i(x), f^i(a)) < \epsilon \text{ para todo } i = 0, \dots, n-1\}$ es la *bola dinámica* de centro a , longitud n y radio ϵ . Notemos que $\{B(x, n, \epsilon) : x \in K\}$ es una cobertura abierta de K . Por lo tanto, por compacidad, existen (n, ϵ) -conjuntos generadores finitos.

Denotemos por $g_n(f, \epsilon, K)$ la menor cardinalidad de un (n, ϵ) -conjunto generador de K . Definimos

$$g(f, \epsilon, K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log g_n(f, \epsilon, K) \quad \text{y} \quad g(f, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} g(f, \epsilon, K).$$

Proposición 1.3.2. Si M es un espacio métrico compacto entonces

$$h_{top}(f) = \sup\{g(f, K) : K \subset M \text{ compacto}\}$$

Demostración. La demostración de esta proposición puede ser encontrada en (Viana and Oliveira, 2016). \square

El siguiente teorema establece la relación que existe entre la entropía topológica y la entropía métrica.

Teorema 1.3.1 (Principio Variacional). Si $f : M \rightarrow M$ es una transformación continua de un espacio métrico compacto M , entonces

$$h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) : \mu \in \mathcal{M}_f(M)\}.$$

donde $\mathcal{M}_f(M)$ denota el conjunto de las medidas invariantes por f .

Demostración. La demostración de dicho teorema puede ser consultada en (Barreira, 2012). \square

1.4. Dinámica Simbólica

Sea $k \in \mathbb{N}$ con $k > 1$, consideremos el conjunto $\Sigma_k^+ = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $w_n \in \{1, \dots, k\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.4.1. Definamos en Σ_k^+ los siguientes conjuntos

$$[m : a_m, \dots, a_n] = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Sigma_k^+ : x_m = a_m, \dots, x_n = a_n\},$$

los cuales conoceremos como *cilindros*.

Observación 1.4.1. Σ_k^+ es un espacio topológico. En efecto, como Σ_k^+ es el producto cartesiano de $\{1, \dots, k\}$, consideremos en $\{1, \dots, k\}$ la topología inducida por la métrica discreta¹ d_1 , donde

$$d_1(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{si } u = v \\ 1, & \text{si } u \neq v \end{cases}$$

De esta manera, la topología producto en Σ_k^+ coincide con la topología generada por los cilindros en Σ_k^+ definidos en 1.4.1. En ese sentido, se puede notar que los elementos básicos de la topología Σ_k^+ son los cilindros

$$C = [m : a_m, \dots, a_n],$$

es decir, los cilindros forman una base para la topología en Σ_k^+ . La σ -álgebra de Borel \mathcal{B}_{Σ^+} generada por la topología anterior coincide con la σ -álgebra $\sigma(\mathcal{A})$, donde

$$\mathcal{A} = \{A_1 \cup \dots \cup A_k\}$$

donde A_1, \dots, A_k son cilindros dos a dos disjuntos.

Definición 1.4.2. La aplicación $\sigma : \Sigma_k^+ \rightarrow \Sigma_k^+$ definida por

$$\sigma((w_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ donde } z_n = w_{n+1}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

se denomina *shift de Bernoulli*.

Definición 1.4.3. Consideremos $\Sigma_k^+ = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$ y una matriz $A = (a_{ij})$ de orden $k \times k$, con $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Defina el conjunto

$$\Sigma_A^+ = \{w \in \Sigma_k^+ : a_{w_n w_{n+1}} = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

¹A esta topología se le conoce como topología discreta, con dicha topología todos los subconjuntos de $\{1, \dots, k\}$ son conjuntos abiertos.

Se verifica que si $\sigma : \Sigma_k^+ \rightarrow \Sigma_k^+$ es el shift de Bernoulli, entonces

$$\sigma(\Sigma_A^+) \subset \Sigma_A^+.$$

La restricción de $\sigma : \Sigma_k^+ \rightarrow \Sigma_k^+$ al conjunto Σ_A^+ , esto es,

$$\sigma|_{\Sigma_A^+} : \Sigma_A^+ \rightarrow \Sigma_A^+$$

se denomina *shift de tipo finito* con matriz transición A .

1.5. Matriz estocástica

Definición 1.5.1. Sea una matriz $P = (P_{ij})$ una matriz no negativa de orden $k \times k$, esto significa que $P_{ij} \geq 0$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, k$. Decimos que P es una matriz *estocástica* si:

- a) $\sum_{j=1}^k P_{ij} = 1$, para todo $i = 1, \dots, k$.
- b) Existen números $p_1, \dots, p_n \in (0, 1)$ tal que

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1 \text{ y } \sum_{i=1}^k p_i P_{ij} = p_j.$$

Entonces decimos que $p = (p_1, \dots, p_k)$ es un *vector de probabilidad* asociado a P , y que (P, p) es un *par estocástico*.

Continuamos enunciando un teorema muy conocido de la teoría de matrices.

Teorema 1.5.1 (Perron-Frobenius). Sea A una matriz $k \times k$ con coeficientes no negativos. Entonces, existe $\lambda \geq 0$ y algún vector v no nulo con coeficientes no negativos tal que $Av = \lambda v$ y $\lambda \geq |\gamma|$ para todo autovalor γ de A .

Demostración. Una prueba del teorema de Perron-Frobenius puede ser consultada en el trabajo de Meyers. (Ver (Meyer, 2000)) □

Ejemplo 1.5.1. Sea P matriz estocástica como en la definición 1.5.1. Aplicando el teorema de Perron-Frobenius a la matriz $A = P^t$ obtenemos que existe $\lambda \geq 0$ y un vector p no nulo con $p_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq k$, tal que $Ap = \lambda p$, es decir

$$\sum_{i=1}^k p_i P_{ij} = \lambda p_j, \text{ para todo } 1 \leq i \leq k.$$

Sumando para $j = 1, \dots, k$ conseguimos que

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k p_i P_{i,j} = \lambda \sum_{j=1}^k p_j.$$

Usando la propiedad (b) de la definición 1.5.1 al lado izquierdo de la igualdad se sigue

$$\sum_{j=1}^k p_i = \sum_{j=1}^k p_i \sum_{i=1}^k P_{i,j} = \lambda \sum_{j=1}^k p_j.$$

Comparando las expresiones de los extremos y recordando que la suma de los coeficientes de p es un número positivo se obtiene que $\lambda = 1$.

Ahora, podemos definir una medida en el espacio Σ_k^+ haciendo uso de un par estocástico.

Definición 1.5.2. Dado un par estocástico (P, p) . Definamos una medida μ en Σ_k^+ por

$$\mu([m : a_m, \dots, a_n]) = p_{a_m} P_{a_m a_{m+1}} \cdots P_{a_{n-1} a_n}.$$

Esta medida se denomina *medida de Markov* asociado a (P, p)

Observación 1.5.1. En la definición anterior; μ solo está explícito en los cilindros, pero desde que los cilindros generan la σ -álgebra de Borel en Σ_k^+ es una medida bien definida.

Observación 1.5.2. La medida de la definición 3.32 es invariante por el shift de Bernoulli $\sigma : \Sigma_k^+ \rightarrow \Sigma_k^+$.

Además, consideremos un nuevo tipo de matriz estocástica la cual será de utilidad en la demostración del siguiente teorema.

Definición 1.5.3. Decimos que una matriz estocástica P es *aperiódica* si existe $n \geq 1$ tal que $P_{ij}^n > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq d$. Esto significa que, P es aperiódica si alguna potencia P^n tiene solo coeficientes positivos.

Teorema 1.5.2. El subshift de tipo finito (σ, μ) es topológicamente mixing si y sólo si la matriz P es aperiódica.

Demostración. Consultar la demostración en (Viana and Oliveira, 2016, pág. 197). □

Teorema 1.5.3 (Parry). Si $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ es topológicamente mixing y λ es el autovalor dominante de A , entonces

$$h_\nu(\sigma) \leq \log \lambda.$$

para todo $\nu \in M_\sigma(\Sigma_A)$. Además, existe una única medida $\mu \in M_\sigma(\Sigma_A)$ tal que

$$h_\mu(\sigma) = \log \lambda$$

esta medida μ es una medida de Markov positiva sobre abiertos de Σ_A .

Demostración. Puede consultar la demostración de este teorema en (Mané, 2012, pág. 231) \square

Capítulo 2

Automorfismos Hiperbólicos en \mathbb{T}^2

Para la primera sección se ha consultado los libros (Barreira, 2012) y (Viana and Oliveira, 2016). La segunda sección ha sido desarrollada siguiendo los libros (Sambarino, 2009) y (Sambarino, 2005). Para un mayor entendimiento de la sección de propiedades dinámicas de los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 , se recomienda leer el libro (Barreira and Valls, 2012) en el cual nos basamos para la sección 3.

2.1. El espacio \mathbb{T}^2

Consideremos la relación de equivalencia en \mathbb{R}^2 que identifica cualquiera dos vectores cuya diferencia es un vector en \mathbb{Z}^2 :

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$$

Denotamos por $[x]$ o $[(x_1, x_2)]$ a la clase de equivalencia de cualquier $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Definición 2.1.1. Llamamos el *toro 2-dimensional* (ó simplemente el *toro*) al espacio

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = (\mathbb{R} / \mathbb{Z})^2$$

formado por las clases de equivalencia dada por la relación \sim .

Podemos dotar al espacio \mathbb{T}^2 de una estructura de espacio métrico definiendo una distancia la cual es inducida por \mathbb{R}^2 .

Proposición 2.1.1. Denotando por $|\cdot|$ la métrica usual en \mathbb{R}^2 . La aplicación $d : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d([x], [y]) = \inf\{|x' - y'| : x', y' \in \mathbb{R}^2, x' \sim x, y' \sim y\}$$

es una distancia en \mathbb{T}^2 .

Demostración. Dados $[x], [y], [z] \in \mathbb{T}^2$ arbitrarios, se cumple:

$d_1)$ De la definición de d tenemos

$$d([x], [x]) = \inf\{|x' - z'| : x', z' \in \mathbb{R}^2, x' \sim x, z' \sim x\}$$

Sea $x' \in \mathbb{R}^2$

tal que $x' \sim x$ entonces $|x' - x'| = 0$, luego

$$\inf\{|x' - z'| : x', z' \in \mathbb{R}^2, x' \sim x, z' \sim x\} = 0.$$

Así pues, $d([x], [x]) = 0$.

$d_2)$ Si $[x] \neq [y]$ entonces si $x' \sim x$ y $y' \sim y$ se cumple que $x' \neq y'$. Luego $|x' - y'| > 0$, como x' y y' fueron elegidos arbitrariamente se tiene

$$d([x], [y]) = \inf\{|x' - y'| : x, y \in \mathbb{R}^2, x' \sim x, y' \sim y\} > 0$$

$d_3)$ De las propiedades de la norma $|\cdot|$ en \mathbb{R}^2 se tiene

$$\begin{aligned} d([x], [y]) &= \inf\{|x' - y'| : x', y' \in \mathbb{R}^2, x' \sim x, y' \sim y\} \\ &= \inf\{|y' - x'| : y', x' \in \mathbb{R}^2, y' \sim y, x' \sim x\} \\ &= d([y], [x]) \end{aligned}$$

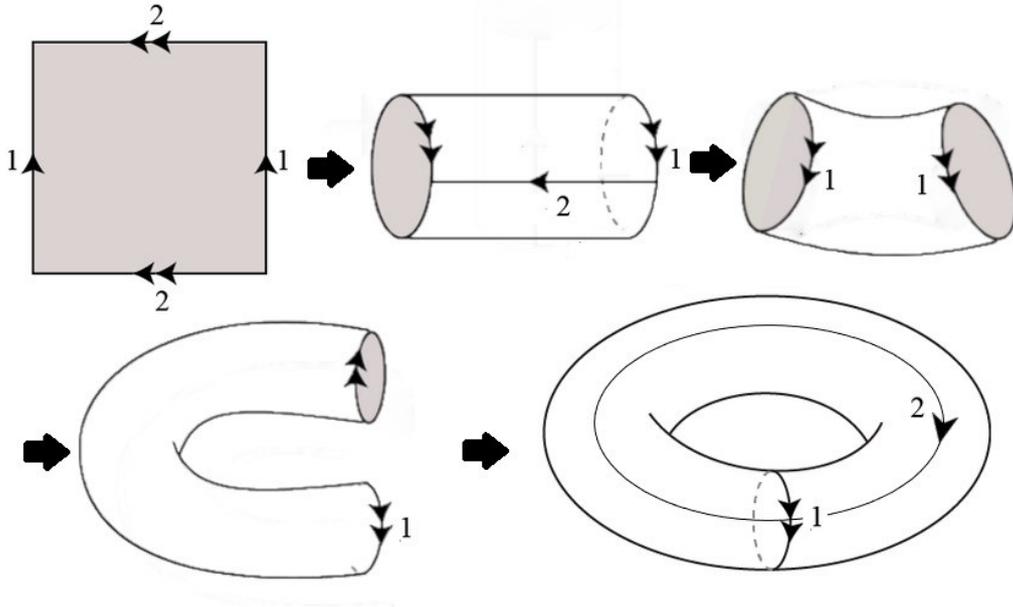
$d_4)$ Usando las propiedades de la norma $|\cdot|$ en \mathbb{R}^2 y del ínfimo se tiene

$$\begin{aligned} d([x], [z]) &= \inf\{|x' - z'| : x', z' \in \mathbb{R}^2, x' \sim x, z' \sim z\} \\ &\leq \inf\{|x' - y'| + |y' - z'| : x', y', z' \in \mathbb{R}^2, x' \sim x, y' \sim y, z' \sim z\} \\ &= \inf\{|x' - y'| : x', y' \in \mathbb{R}^2, x' \sim x, y' \sim y\} + \\ &\quad \inf\{|y' - z'| : x', y' \in \mathbb{R}^2, x' \sim x, y' \sim y\} \\ &= d([x], [y]) + d([y], [z]). \end{aligned}$$

De estos cuatro ítems se concluye que d es una distancia en \mathbb{T}^2 . □

A diferencia de muchos espacios que se pueden estudiar en matemáticas, el espacio \mathbb{T}^2 tiene una representación geométrica la cual se puede construir utilizando técnicas de cortar y pegar.

Figura 2.1: Construcción del toro \mathbb{T}^2



Geoméricamente, el toro se ve como la superficie de una doughnut y lo podemos construir tomando el cuadrado unitario en el primer cuadrante con vértice $O = (0, 0)$ en \mathbb{R}^2 . A continuación, debemos pegar sus bordes de forma adecuada, como se observa en la figura 2.1.

Formalicemos esta construcción geométrica haciendo uso de conceptos matemáticos. Considerando la definición 2.1.1 podemos definir la aplicación proyección canónica

$$\begin{aligned} \pi : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{T}^2 \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

Hacemos uso de esta aplicación y definamos la siguiente colección

$$\mathcal{F} = \{W \subset \mathbb{T}^2 : \pi^{-1}(W) \text{ es abierto en } [0, 1]^2\}. \quad (2.1)$$

Proposición 2.1.2. La colección \mathcal{F} definida en (2.1) es una topología en \mathbb{T}^2 relativa a π .

Demostración.

- 1) $\emptyset \in \mathcal{F}$ desde que $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ es abierto en $[0, 1]^2$.
- 2) $\mathbb{T}^2 \in \mathcal{F}$ desde que $\pi^{-1}(\mathbb{T}^2) = [0, 1]^2$ es abierto en $[0, 1]^2$.
- 3) Sea $(W_\alpha)_{\alpha \in J}$ una colección arbitraria de conjuntos en \mathcal{F} entonces $\pi^{-1}(W_\alpha)$ es abierto en \mathbb{R}^2 para todo $\alpha \in J$. Luego,

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in J} W_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in J} \pi^{-1}(W_\alpha) \text{ es abierto en } \mathbb{R}^2.$$

De donde se tiene que $\bigcup_{\alpha \in J} W_\alpha \in \mathcal{T}$.

4) Sea $(U_i)_{i=1}^n$ una colección finita de conjuntos en \mathcal{T} entonces $\pi^{-1}(U_i)$ es abierto en $[0, 1]^2$ para todo $1 \leq i \leq n$. Luego,

$$\pi^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) = \bigcap_{i=1}^n \pi^{-1}(U_i) \text{ es abierto en } [0, 1]^2.$$

De donde se tiene que $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.

De estos cuatro items podemos concluir que \mathcal{T} es una topología en \mathbb{T}^2 relativa a π . \square

En virtud de la proposición anterior se concluye que \mathbb{T}^2 está dotada de una estructura topológica la cual es dada por \mathcal{T} . Con dicha estructura topológica podemos hablar de conjuntos abiertos en \mathbb{T}^2 . Observemos como se ven algunos conjuntos abiertos en \mathbb{T}^2 . Para dicho propósito recordemos la siguiente definición

Definición 2.1.2. Decimos que un subconjunto C de X es *saturado* (con respecto a una aplicación sobreyectiva $p : X \rightarrow Y$) si C contiene todo conjunto $p^{-1}(\{y\})$ que este intersecciona. Así, C es saturado si es igual a la imagen inversa completa de un subconjunto de Y .

Sea X el rectángulo unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ en \mathbb{R}^2 . La relación de equivalencia \sim define una partición \mathcal{X} en X , dicha partición consta de todos los conjuntos unitarios

$$\{(x, y)\} \text{ donde } 0 \leq x, y \leq 1,$$

los siguientes conjuntos de dos elementos

$$\{(x, 0), (x, 1)\} \text{ donde } 0 \leq x \leq 1,$$

$$\{(0, y), (1, y)\} \text{ donde } 0 \leq y \leq 1,$$

y el conjunto de cuatro elementos

$$\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

Algunos conjuntos abiertos saturados en X son representados por regiones sombreadas en la figura 2.2 ; cada uno de estos es un conjunto abierto de X , la cual a su vez es igual a la unión de elementos de la partición \mathcal{X} . La imagen de cada uno de estos conjuntos bajo π es un conjunto abierto de \mathbb{T}^2 , como se puede ver en la figura 2.3. Esta descripción es la forma matemática de decir lo que expresamos en imágenes cuando pegamos los bordes del cuadrado unitario para formar el toro. Por otro lado, aprovecharemos la estructura topológica de \mathbb{T}^2 para definir una σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{T}^2 .

Figura 2.2: Conjuntos abiertos en $X = [0, 1] \times [0, 1]$

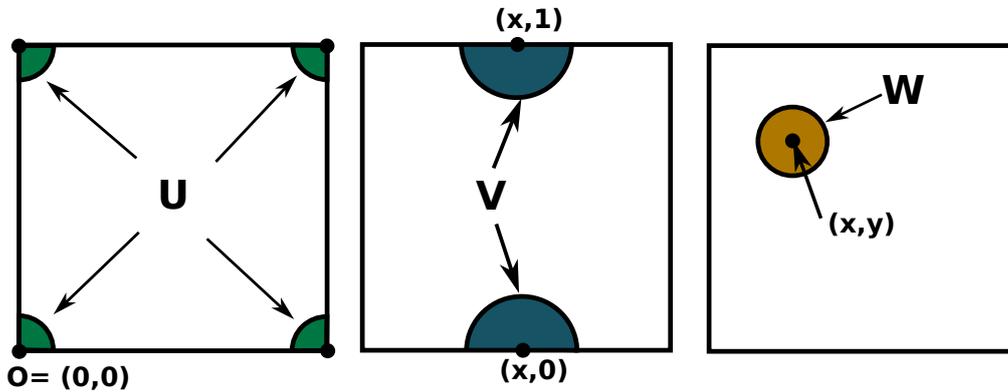
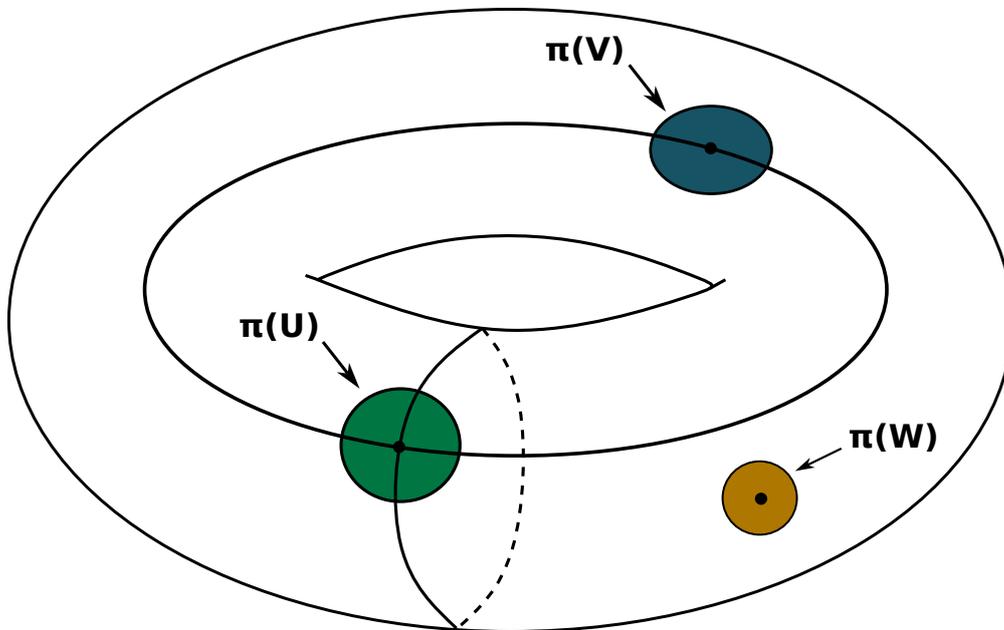


Figura 2.3: Imagen de conjuntos abiertos en \mathbb{T}^2



Definición 2.1.3. Denotaremos por \mathcal{B} al σ -álgebra de Borel sobre \mathbb{T}^2 generada por sus conjuntos abiertos.

En virtud de esta definición, obtenemos que $(\mathbb{T}^2, \mathcal{B})$ es un espacio medible. En ese sentido, podemos definir una medida en este espacio.

Definición 2.1.4. Sea m la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 . Definimos la medida de Lebesgue μ en \mathbb{T}^2 por

$$\mu(G) = m(\pi^{-1}(G) \cap [0,1]^2)$$

donde m es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^2 y $G \in \mathcal{B}$ el σ -álgebra de Borel en \mathbb{T}^2 .

Proposición 2.1.3. \mathbb{T}^2 es una variedad compacta diferenciable de dimensión 2

Demostración. Desde que el producto cartesiano de variedades diferenciables es variedad diferencial tenemos $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ es variedad diferenciable de dimensión 2 pues S^1 es variedad diferenciable de dimensión 1. Además como S^1 es compacto, se tiene que \mathbb{T}^2 es compacto. \square

2.2. Automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2

Definición 2.2.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que

1. Todas las entradas de A son enteros,
2. $\det(A) = \pm 1$,
3. A es matriz hiperbólica, esto es, todos sus valores propios tienen módulo diferente de 1.

La aplicación $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definido por

$$f_A \circ \pi = \pi \circ A \tag{2.2}$$

donde $\pi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es la proyección canónica, es llamado *automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2* .

Observación 2.2.1.

- a) Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ cumple con los incisos 1) y 2) de la definición 2.2.1 entonces escribiremos $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$.
- b) Podemos describir la aplicación f_A como una aplicación en \mathbb{R}^2 , de la siguiente manera:
 $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f_A(x) = Ax$ con la propiedad $f_A(x, y) - f_A(x + m, y + n) \in \mathbb{Z}^2$ para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$

Notemos que, de la observación 2.2.1 inciso b), tenemos que f_A es diferenciable desde que la matriz Jacobiana de la aplicación f_A (derivada de f_A) es igual a A . Además, como $\det A = \pm 1$, se tiene que la inversa de A es también una matriz con entradas enteras la cual es hiperbólica. De esto tenemos que A^{-1} también induce un automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 , el cual es la inversa de f_A . Así tenemos que f_A es un difeomorfismo de \mathbb{T}^2 .

Proposición 2.2.1. Sea A una matriz que cumple las condiciones dadas en la definición (2.2.1). Entonces los autovalores de A son irracionales.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, consideremos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}.$$

Luego, tenemos

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc \quad (2.3)$$

Notemos que $\text{tr}(A) = a + d$ y $\det(A) = ad - bc$ entonces

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda \text{tr}(A) + \det(A)$$

Luego, sus autovalores vendrían dados por

$$\lambda_s = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_u = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\text{tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}.$$

De las condiciones de A sabemos que $\det(A) = \pm 1$, de esto se sigue

$$\lambda_s = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{\text{tr}(A)^2 \pm 4}}{2} \quad \text{y} \quad \lambda_u = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{\text{tr}(A)^2 \pm 4}}{2}.$$

Consideremos $|\text{tr}(A)| > 2$, en caso contrario la matriz A sería no hiperbólica lo cual difiere de la condición de hiperbolicidad dada para A . Notemos que λ_1 y λ_2 son racionales si y sólo si $\text{tr}(A)^2 \pm 4 = k^2$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Esto es equivalente a

$$(\text{tr}(A) - k)(\text{tr}(A) + k) = \pm 4$$

Como $\text{tr}(A) - k < \text{tr}(A) + k$ entonces

$$\begin{cases} \text{tr}(A) + k = 4 \\ \text{tr}(A) - k = 1 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \text{tr}(A) + k = -1 \\ \text{tr}(A) - k = -4 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \text{tr}(A) + k = 4 \\ \text{tr}(A) - k = -1 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} \text{tr}(A) + k = 1 \\ \text{tr}(A) - k = -4 \end{cases}$$

Desde que $\text{tr}(A), k \in \mathbb{Z}$ y los sistemas no admiten soluciones enteras tenemos que λ_1 y λ_2 son irracionales. \square

Observación 2.2.2. De la demostración de la proposición anterior se puede ver que si λ_s y λ_u son autovalores de A entonces $|\lambda_s| = |\lambda_u|^{-1}$. Luego, como los autovalores de A no tienen módulo igual a uno entonces $|\lambda_s| < 1$ y $|\lambda_u| > 1$.

2.3. Propiedades dinámicas de los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2

Teorema 2.3.1. Si f_A es el automorfismo hiperbólico definido en (2.2), entonces el conjunto de puntos periódicos $\text{Per}(f_A)$ es denso en \mathbb{T}^2 .

Demostración. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ la matriz hiperbólica que induce el automorfismo hiperbólico f_A tal como fue definido en (2.2). Dado $q \in \mathbb{N}$ y consideremos el conjunto

$$C_q = \{(m/q, n/q) : m, n \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.4)$$

Recordando que f_A es inducido por una matriz hiperbólica $A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ entonces $A(C_q) = C_q$; en efecto, sea $u = (m/q, n/q) \in C_q$ entonces tenemos

$$Au = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m/q \\ n/q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (am + bn)/q \\ (cm + dn)/q \end{pmatrix}.$$

Sabemos que las entradas de A son enteras al igual que m y n . Luego, como \mathbb{Z} es cerrado bajo las operaciones de adición y multiplicación tenemos que $am + bn, cm + dn \in \mathbb{Z}$. De esto se tiene que $Au \in C_q$, más aún, dada la arbitrariedad de $u \in C_q$ se tiene

$$A(C_q) \subset C_q. \quad (2.5)$$

Ahora, consideremos $u = (m/q, n/q) \in C_q$ y busquemos $x, y \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{pmatrix} m/q \\ n/q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x/q \\ y/q \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

realizando las operaciones elementales de matrices se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} m &= ax + by \\ n &= cx + dy \end{cases}$$

Como $\det(A) = \pm 1$ entonces el sistema tiene solución única, luego por regla de Cramer podemos hallar los valores de x e y de la siguiente manera

$$x = \pm \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad y = \pm \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}.$$

Desarrollando estos determinantes obtenemos $x = \pm(md - nb)$ y $y = \pm(an - cm)$, nuevamente usando el hecho que \mathbb{Z} es cerrado bajo la adición y multiplicación podemos ver fácilmente que

$x, y \in \mathbb{Z}$. Más aún, podemos notar que $v = (x/q, y/q) \in C_q$. Luego, de (2.6) se observa que $u = Av$ teniendo así

$$C_q \subset A(C_q). \quad (2.7)$$

De (2.5) y (2.7) obtenemos la igualdad que queríamos probar.

Regresando a la demostración de la proposición, notemos que $\pi(C_q)$ es un conjunto finito. Más precisamente, $\pi(C_q)$ tiene q^2 puntos. En efecto, sea $v = (m/q, n/q) \in C_q$ con $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces $\pi(v) = [(m/q, n/q)]$. Vamos a considerar m, n como enteros positivos, para justificar esto hagamos los siguientes cálculos: consideremos $x \in \mathbb{Z}^+$ con $x > q$ entonces existen $k_1, r_1 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$x = qk_1 + r_1,$$

luego $x/q = k_1 + r_1/q$. De esto, $\lfloor x/q \rfloor = k_1$ entonces

$$\{x/q\} = x/q - \lfloor x/q \rfloor = k_1 + r_1/q - k_1 = r_1/q. \quad (2.8)$$

Además $-x/q = -k_1 - r_1/q$. De esto, $\lfloor -x/q \rfloor = -k_1 - 1$ entonces

$$\{-x/q\} = -x/q - \lfloor -x/q \rfloor = -k_1 - r_1/q - (-k_1 - 1) = 1 - r_1/q.$$

Denotando por $s_1 = q - r_1$ obtenemos $\{-x/q\} = s_1/q$ con $0 \leq s_1 < q$. Si somos observadores podemos construir un número entero positivo $y = qk_2 + s_1$, con $k_2 \in \mathbb{N}$. Reemplazando k_1 y r_1 por k_2 y s_1 en (2.8) podemos encontrar que

$$\{y/q\} = s_1/q.$$

Recordando que $[(z, w)] = [(\{z\}, w)]$ para todo $z, w \in \mathbb{R}$. Por el análisis hecho en las recientes líneas anteriores tenemos las igualdades

$$[(-x/q, w)] = [(\{-x/q\}, w)] = [(s_1/q, w)] = [(\{y/q\}, w)] = [(y/q, w)]$$

Es por esto que al analizar los elementos de $\pi(C_q)$ consideraremos la clase de los puntos con coordenadas cuyo numerador es positivo. Si $m > q$ existen $k, r \in \mathbb{Z}^+$ con $0 \leq r < q$ tal que $m = qk + r$. Notemos que en este caso $[(m/q, n/q)] = [(\{m/q\}, n/q)] = [(r/q, n/q)]$ con $0 \leq r < q$. Un hecho similar se cumpliría si $n > q$. De todo esto se tiene

$$\pi(C_q) = \left\{ \left[\left(\frac{r}{q}, \frac{s}{q} \right) \right] : 0 \leq r, s < q \text{ donde } r, s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Luego, tenemos q posibles valores para r y s . Se puede ver fácilmente que la cantidad de puntos de $\pi(C_q)$ es q^2 .

Ahora, pasamos a analizar la órbita de cada uno de los puntos de $\pi(C_q)$. Para esto, recordemos que $A(C_q) = C_q$ de donde se obtiene $\pi(A(C_q)) = \pi(C_q)$. Luego por la definición (2.2) obtenemos

$$f_A(\pi(C_q)) = \pi(C_q),$$

lo cual significa que C_q es un conjunto f_A -invariante.

Como C_q es finito y f_A -invariante, entonces dado $p \in C_q$ existen enteros $0 \leq i, j < q^2$ tales que $f_A^i(p) = f_A^j(p)$. Sin pérdida de generalidad; asumamos que $i \leq j$, luego apliquemos f_A^{-i} y obtenemos $p = f_A^{j-i}(p)$. Así pues, los puntos de $\pi(C_q)$ son puntos periódicos para f_A .

Por otro lado, veamos que $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} C_q = \mathbb{Q}^2$. En efecto, de la forma de los conjuntos C_q se observa fácilmente que $C_q \subset \mathbb{Q}^2$ para todo $q \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, sea $(x/y, z/w) \in \mathbb{Q}^2$, notemos que $(x/y, z/w) = (xw/yw, yz/yw) \in C_{yw} \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} C_q$. Aprovechamos esta igualdad recordando que \mathbb{Q}^2 es denso en \mathbb{R}^2 , de aquí se puede concluir fácilmente que $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} C_q$ es denso en \mathbb{R}^2 .

Dado U abierto en \mathbb{T}^2 entonces $\pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{R}^2 , luego en virtud de la densidad de $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} C_q$ obtenemos

$$\pi^{-1}(U) \cap \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} C_q \neq \emptyset$$

entonces

$$U \cap \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \pi(C_q) \neq \emptyset,$$

lo cual significa que $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \pi(C_q)$ es denso en \mathbb{T}^2 , más precisamente $\overline{\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \pi(C_q)} = \mathbb{T}^2$.

Recordando que los puntos de $\pi(C_q)$ son puntos periódicos para f_A para todo $q \in \mathbb{Z}$, se tiene $\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \pi(C_q) \subset \text{Per}(f_A) \subset \mathbb{T}^2$ entonces

$$\mathbb{T}^2 = \overline{\bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \pi(C_q)} \subset \overline{\text{Per}(f_A)} \subset \mathbb{T}^2$$

Así obtenemos $\overline{\text{Per}(f_A)} = \mathbb{T}^2$. Es decir, $\text{Per}(f_A)$ es denso en \mathbb{T}^2 . □

Observación 2.3.1. En la demostración de la proposición anterior se consideraron los conjuntos C_q los cuales estaban formados por pares ordenados con coordenadas racionales. Esto se debe a que si $[(x, y)] \in \mathbb{T}^2$ es un punto periódico entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ y un $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ tal que

$$A^n(x, y) = (x, y) + (m, n).$$

Esta igualdad se puede reescribir de la siguiente manera

$$(A^n - I)(x, y) = (m, n).$$

Como A es una matriz hiperbólica, entonces ninguno de sus autovalores tiene módulo igual a 1, esto implica que la matriz $A^n - I$ es invertible. Sabiendo esto, podemos escribir la igualdad anterior de la siguiente manera

$$(x, y) = (A^n - I)^{-1}(m, n).$$

Además. como $A^n - I$ tiene entradas enteras entonces su determinante también será un número entero. Recordando que $(A^n - I)^{-1} = \text{adj}(A^n - I) / \det(A^n - I)$ entonces

$$(x, y) = \frac{1}{\det(A^n - I)} \text{adj}(A^n - I)(m, n).$$

De aquí se puede ver fácilmente que (x, y) es un punto con coordenadas racionales. Siendo esta la razón por la que consideramos los conjuntos C_q en la demostración anterior.

Proposición 2.3.1. Sea A una matriz como fue considerada en la proposición 2.2.1. Los autoespacios E^s y E^u generados por los autovalores λ_s y λ_u de A , respectivamente, son rectas de pendiente irracional en \mathbb{R}^2 .

Demostración. De la proposición 2.2.1 sabemos que λ_s y λ_u son números irracionales. Sea $v = (x, y) \in E^s$ entonces se cumple $(A - \lambda_s I)v = 0$, es decir

$$\begin{pmatrix} a - \lambda_s & b \\ c & d - \lambda_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (a - \lambda_s)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda_s)y = 0 \end{cases}$$

Analizamos el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a - \lambda_s & b \\ c & d - \lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^2 - (a + d)\lambda_s + ad - bc,$$

el cual es cero desde que λ_s es raíz de (2.3); así tenemos que $\Delta = 0$.

Además, es claro que los determinantes

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d - \lambda_s \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a - \lambda_s & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix}$$

son iguales a cero. Entonces, por la regla de Cramer, sabemos que el sistema de ecuaciones es compatible indeterminado. Lo cual significa que una de las ecuaciones es equivalente a la otra. Sin pérdida de generalidad, consideraremos solo la ecuación

$$(a - \lambda_s)x + by = 0$$

De donde se obtiene que

$$y = \frac{\lambda_s - a}{b}x.$$

Se sigue de esto que E^s es una recta de pendiente irracional en \mathbb{R}^2 . Análogamente se demuestra que E^u también es una recta de pendiente irracional en \mathbb{R}^2 . \square

Proposición 2.3.2. Si ℓ es una recta de pendiente irracional en \mathbb{R}^2 entonces $\pi(\ell)$ (su proyección sobre \mathbb{T}^2) es densa en \mathbb{T}^2 .

Demostración. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un punto por donde pasa ℓ y denotemos por α su pendiente irracional. Sea $\varphi_t(x, y) = (x, y) + t(1, \alpha)$ y notemos que $\ell = \{\varphi_t(x, y) : t \in \mathbb{R}\}$. Denotemos por $\bar{\varphi}_t([(x, y)]) = \pi(\varphi_t(x, y))$. Como ℓ tiene pendiente irracional, existe $(0, z) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\ell = \{\varphi_t(0, z) : t \in \mathbb{R}\}$. Además, $[(0, z)] \in [0] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\bar{\varphi}_t([(0, z)]) = [(0, z) + t(1, \alpha)] = [(t, z + t\alpha)]$. Para $t = N$ donde $N \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\bar{\varphi}_N([(0, z)]) = [(0, z) + (N, N\alpha)] = [(N, z + N\alpha)] = [N] \times [z + N\alpha].$$

Así tenemos que la segunda componente de $\bar{\varphi}_1([(0, z)])$ es $R_\alpha[z]$ (La rotación de ángulo α de $[z]$). Sabemos que la órbita $\mathcal{O}_{R_\alpha}([z])$ es densa, de la misma forma será la órbita de $\tilde{\varphi}_\alpha([(0, z)])$. Más precisamente, $\mathcal{O}_{\tilde{\varphi}}([(0, z)]) = \{\tilde{\varphi}(t, [0, z]) : t \in \mathbb{R}\}$ es densa en \mathbb{T}^2 . El resultado se sigue desde que $\pi(\ell) = \mathcal{O}_{\tilde{\varphi}}([(0, z)]) = \{\tilde{\varphi}(t, [0, z]) : t \in \mathbb{R}\}$. \square

Teorema 2.3.2. Todo automorfismo hiperbólico $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es topológicamente mixing, esto es, dados cualesquiera par de abiertos $U, V \subset \mathbb{T}^2$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_A^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.

Demostración. Sean $U, V \subset \mathbb{T}^2$ conjuntos abiertos no vacíos; entonces, existen $U', V' \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\pi(U') = U$ y $\pi(V') = V$. Ahora, sea $I \subset U'$ un segmento de línea paralelo a la autodirección de A correspondiente al autovalor λ_u . Entonces $A^{-m}(I) \subset \mathbb{R}^2$ es un segmento de línea de longitud $|\lambda_u|^m |I|$, donde $|I|$ es la longitud de I . Mencionamos este hecho aquí porque será de importancia más adelante en la demostración.

Por otro lado, de la proposición 2.3.2 sabemos que la proyección de una recta con cualquiera de

las autodirecciones es densa en \mathbb{T}^2 . De esto, tenemos que si J es una recta en la autodirección de A correspondiente al autovalor λ_s se cumple que

$$\text{para todo } \epsilon > 0 \text{ y } x \in \mathbb{T}^2 \text{ se tiene que } B(x, \epsilon) \cap \pi(J) \neq \emptyset.$$

Esto implica que, dado $\epsilon > 0$, existe $L > 0$ tal que para cada segmento de línea $J' \subset \mathbb{R}^2$ de longitud L con esa dirección, su proyección sobre \mathbb{T}^2 es ϵ -denso en \mathbb{T}^2 . Es decir,

$$\forall \epsilon > 0, \exists L > 0 / |J'| = L \Rightarrow B(x, \epsilon) \cap \pi(J') \neq \emptyset, \forall x \in \mathbb{T}^2. \quad (2.9)$$

Sea $x \in V$, como V es abierto entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset V$. De (2.9) tenemos

$$\text{existe } L > 0 \text{ tal que si } |J'| = L \text{ entonces } B(x, \delta) \cap \pi(J') \neq \emptyset. \quad (2.10)$$

Por otro lado, como $|\lambda_u| > 1$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_u|^{n_0}|I| > L$. Luego, es fácil ver que $|\lambda_u|^n|I| > L$ para $n \geq n_0$ y recordando que esta es la longitud del segmento de recta $A^{-n}(I)$, podemos aplicar (2.10) (se cumple para un segmento de longitud L entonces con más razón se cumple para un segmento de longitud mayor a L) y obtenemos

$$B(x, \delta) \cap \pi(A^{-n}(I)) \neq \emptyset.$$

En virtud de (2.2) podemos reescribir esto último de la siguiente manera

$$B(x, \delta) \cap f_A^{-n}(\pi(I)) \neq \emptyset.$$

Recordando que $B(x, \delta) \subset V$ y $\pi(I) \subset \pi(U') = U$ se implica

$$V \cap f_A^{-n}(U) \supset B(x, \delta) \cap f_A^{-n}(\pi(I)) \neq \emptyset,$$

para $n \geq n_0$. Esto muestra que f_A es topológicamente mixing. □

2.4. Difeomorfismos de Anosov en \mathbb{T}^2

En esta sección demostraremos que el automorfismo hiperbólico f_A inducido por una matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ con las hipótesis de la definición 2.2.1 es un difeomorfismo de Anosov.

Recordemos que $\pi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es la proyección canónica. Luego, su derivada viene dada por

$$d\pi_x : T_x \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\pi(x)} \mathbb{T}^2 \quad (2.11)$$

la cual es un isomorfismo lineal. Recordando que la imagen de x por π es la clase de x (denotada por $[x]$), escribiremos más brevemente $T_{[x]} \mathbb{T}^2$ en lugar de $T_{\pi(x)} \mathbb{T}^2$. Además denotaremos por Θ al elemento neutro de $T_{[x]} \mathbb{T}^2$

Proposición 2.4.1. Para cada $x \in \mathbb{R}^2$, existe una norma en $T_{[x]}\mathbb{T}^2$ inducida por el isomorfismo lineal $d\pi_x : T_x\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{[x]}\mathbb{T}^2$.

Demostración. En efecto, sea $v \in T_{[x]}\mathbb{T}^2$, entonces existe un único $u \in T_x\mathbb{R}^2$ tal que $d\pi_x(u) = v$. Definimos la aplicación $\|\cdot\|_{[x]} : T_{[x]}\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|v\|_{[x]} = |u|$ donde $|\cdot|$ es la norma euclideana en \mathbb{R}^2 . Demostramos que $\|\cdot\|_{[x]}$ es una norma.

Sean $v, v_1, v_2 \in T_{[x]}\mathbb{T}^2$ entonces existen $u, u_1, u_2 \in T_x\mathbb{R}^2$ tal que $d\pi_x(u) = v$, $d\pi_x(u_1) = v_1$ y $d\pi_x(u_2) = v_2$

$$N_1. \|v\|_{[x]} = 0 \Leftrightarrow |u| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow v = \Theta$$

$$N_2. \|v_1 + v_2\|_{[x]} = |u_1 + u_2| \leq |u_1| + |u_2| = \|v_1\|_{[x]} + \|v_2\|_{[x]}.$$

$$N_3. \|\alpha v\|_{[x]} = |\alpha u| = |\alpha||u| = |\alpha|\|v\|_{[x]}.$$

Con esto hemos verificado que $\|\cdot\|_{[x]}$ es una norma. □

Haciendo uso de esta norma podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.4.2. Para cada $[x] \in \mathbb{T}^2$ existen conjuntos $E_{[x]}^s$ y $E_{[x]}^u$ y constantes $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ tal que:

1. $T_{[x]}\mathbb{T}^2 = E_{[x]}^s \oplus E_{[x]}^u$
2. $f_A(E_{[x]}^s) = E_{[f_A(x)]}^s$
 $f_A(E_{[x]}^u) = E_{[f_A(x)]}^u$
3. $\|df_{A[x]}^n(v)\|_{f_A^{-n}([x])} \leq C\lambda^n\|v\|_{[x]}$, $v \in E^s$, $n \in \mathbb{N}$
 $\|df_{A[x]}^{-n}(v)\|_{f_A^{-n}([x])} \leq C\lambda^n\|v\|_{[x]}$, $v \in E^u$, $n \in \mathbb{N}$

Demostración. Dado $x \in \mathbb{R}^2$, por identificación canónica podemos escribir $T_x\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$. Además, como A es matriz hiperbólica se tiene $\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u$ donde E^s es el autoespacio asociado al autovalor λ_s y E^u es el autoespacio asociado con el autovalor λ_u . De esto, tenemos

$$T_x\mathbb{R}^2 = E^s \oplus E^u. \tag{2.12}$$

Si definimos los conjuntos

$$E_{[x]}^s := d\pi_x(E^s) \text{ y } E_{[x]}^u := d\pi_x(E^u) \tag{2.13}$$

entonces

$$T_{[x]}\mathbb{T}^2 = E_{[x]}^s \oplus E_{[x]}^u. \quad (2.14)$$

Para verificar (2.14) consideremos $w \in T_{[x]}\mathbb{T}^2$, como $d\pi_x$ es isomorfismo existe un único $v \in T_x\mathbb{R}^2$ tal que $d\pi_x(v) = w$. Por (2.12) tenemos que existen únicos $v_s \in E^s$ y $v_u \in E^u$ tal que $v = v_s + v_u$. Luego, de la linealidad de $d\pi_x$ se obtiene

$$w = d\pi_x(v) = d\pi_x(v_s) + d\pi_x(v_u)$$

donde $d\pi_x(v_s) \in E_{[x]}^s$ y $d\pi_x(v_u) \in E_{[x]}^u$. Así, tenemos

$$T_{[x]}\mathbb{T}^2 = E_{[x]}^s + E_{[x]}^u.$$

Ahora, sea $v \in E_{[x]}^s \cap E_{[x]}^u$, entonces $v \in E_{[x]}^s$ y $v \in E_{[x]}^u$. Luego, existen $v_s \in E^s$ y $v_u \in E^u$ tal que

$$v = d\pi_x(v_s) = d\pi_x(v_u).$$

Como $d\pi_x$ es inyectiva, se tiene que $v_s = v_u$ y de esta manera $v_s, v_u \in E^s \cap E^u$. Por las propiedades de suma directa se cumple $E^s \cap E^u = \{0\}$, de esto se sigue que $v_s = v_u = 0$. Como $d\pi_x$ es lineal, entonces $d\pi_x$ lleva el cero de $T_x\mathbb{R}^2$ en el cero de $T_{[x]}\mathbb{T}^2$. Luego $v = d\pi_x(0) = \Theta$ obteniendo así $E_{[x]}^s \cap E_{[x]}^u = \{\Theta\}$. De esta manera hemos verificado (2.14).

Ahora, aplicando la regla de la cadena a (2.2) obtenemos

$$d(f_A)_{\pi(x)} \circ d\pi_x = d\pi_{A(x)} \circ dA_x$$

Notemos que $dA_x = A$ entonces la igualdad anterior es equivalente a

$$d(f_A)_{\pi(x)} \circ d\pi_x = d\pi_{A(x)} \circ A$$

Como A es matriz hiperbólica, se cumple $A(E^s) = E^s$ entonces

$$d(f_A)_{\pi(x)}(d\pi_x(E^s)) = d\pi_{A(x)}(A(E^s)) = d\pi_{A(x)}(E^s)$$

Luego, por (2.13) tenemos $d\pi_{A(x)}(E^s) = E_{[A(x)]}^s$ y $d\pi_x(E^s) = E_{[x]}^s$ entonces

$$d(f_A)_{\pi(x)}(E_{[x]}^s) = E_{[A(x)]}^s$$

Recordando que $\pi(x) = [x]$ y $f_A([x]) = [A(x)]$ obtenemos

$$d(f_A)_{[x]}(E_{[x]}^s) = E_{f_A([x])}^s \quad (2.15)$$

Análogamente, se demuestra que

$$d(f_A)_{[x]}(E_{[x]}^u) = E_{f_A([x])}^u \quad (2.16)$$

Por último, dado $n \geq 0$. De (2.2) tenemos

$$f_A^n \circ \pi = \pi \circ A^n$$

Luego, dado $v \in E_{[x]}^s$ existe un único $v_s \in E^s$ tal que $d\pi_x(v_s) = v$. Por la regla de la cadena

$$d(f_A^n)_{\pi(x)} \circ d\pi_x = d\pi_{A^n(x)} \circ dA_x^n$$

Notemos que $dA_x^n = A^n$ y evaluamos en v_s entonces

$$d(f_A^n)_{\pi(x)} \circ d\pi_x(v_s) = d\pi_{A^n(x)} \circ A^n(v_s)$$

Aplicamos la norma definida en (2.4.1), recordando que $d(f_A^n)_{[x]} : T_{[x]}\mathbb{T}^2 \rightarrow T_{f_A^n([x])}\mathbb{T}^2$

$$\|d(f_A^n)_{[x]}(v)\|_{f_A^n([x])} = \|d\pi_{A^n(x)}(A^n(v_s))\|_{f_A^n([x])} = |A^n(v_s)| = \lambda_s^n |v_s| = \lambda_s^n \|v\|_{[x]}$$

Análogamente, sea $v \in E_{[x]}^u$ y $n \geq 0$, entonces existe un único $v_u \in E^u$ con $d\pi_x(v_u) = v$ tal que

$$\|d(f_A^{-n})_{[x]}(v)\|_{f_A^{-n}([x])} = \|d\pi_{A^{-n}(x)}(A^{-n}(v_u))\|_{f_A^{-n}([x])} = |A^{-n}(v_u)| = \lambda_u^{-n} |v_u| = \lambda_u^{-n} \|v\|_{[x]}$$

Tomando $\lambda = \lambda_s = \lambda_u^{-1}$, se tiene

$$\|df_{A[x]}^n(v)\|_{f_A^n([x])} = \lambda^n \|v\|_{[x]}, \text{ para todo } v \in E_{[x]}^s \quad (2.17)$$

$$\|df_{A[x]}^{-n}(v)\|_{f_A^{-n}([x])} = \lambda^n \|v\|_{[x]}, \text{ para todo } v \in E_{[x]}^s \quad (2.18)$$

De (2.14), (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18) tenemos lo que queríamos demostrar. \square

Definición 2.4.1. Sea $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo. Decimos que f es un difeomorfismo hiperbólico o de Anosov, si satisface las condiciones de la proposición 2.4.2.

Observación 2.4.1. De la definición anterior tenemos que todo automorfismo hiperbólico es un difeomorfismo de Anosov.

2.5. Expansividad

Definición 2.5.1. Un difeomorfismo $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es *expansivo* si existe una constante $\rho > 0$, llamada *constante de expansividad*, tal que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \rho, \forall n \in \mathbb{Z} \text{ si y sólo si } x = y$$

donde d es la distancia en \mathbb{T}^2 definida en (2.1.1).

Proposición 2.5.1. Todo automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 es expansivo.

Demostración. Consideremos el automorfismo hiperbólico $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ inducido por la matriz A . Recordemos que $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es continua, para $\frac{1}{4} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^2 \text{ con } |x - y| \leq \delta \text{ se cumple } |Ax - Ay| \leq \frac{1}{4}. \quad (2.19)$$

Probaremos que δ es una constante de expansividad de f_A . Para dicho propósito, consideremos dos puntos arbitrarios $[z], [w] \in \mathbb{T}^2$ tal que

$$d(f_A^n[z], f_A^n[w]) \leq \delta \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.20)$$

Ahora, fijemos $x \in \pi^{-1}[z]$ y para cada $n \in \mathbb{Z}$ tomemos $y_n \in \pi^{-1}(f_A^n[w])$ tal que

$$|y_n - A^n x| \leq \delta \quad (2.21)$$

La elección de los y_n que cumplen con la condición (2.21) es posible por la definición de la distancia d en \mathbb{T}^2 y por la desigualdad de (2.20).

Afirmamos que $y_{n+1} = Ay_n, n \in \mathbb{Z}$. En efecto, dado $n \in \mathbb{Z}$ recordemos que $|y_n - A^n x| \leq \delta$ entonces por (2.19) tenemos $|Ay_n - A^{n+1}x| \leq \frac{1}{4}$. Y como hay un único elemento de $\pi^{-1}(f_A^{n+1}[w])$ a una distancia $1/4$ de $A^{n+1}x$ entonces $Ay_n = A^{n+1}x$. De aquí podemos ver que $y_n = A^n x$, de donde se sigue $Ay_n = y_{n+1}$.

Aplicando esta última identidad para $n = 0$ obtenemos que $y_0 = x$. Finalmente, notemos que $y_0 \in \pi^{-1}([w])$ entonces

$$[z] = \pi(x) = \pi(y_0) = [w]$$

y de aquí se tiene la igualdad $[z] = [w]$. Lo cual prueba que f_A es expansiva con constante de expansividad δ . \square

Proposición 2.5.2. Sea $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 inducido por la matriz A . Se cumple que

$$\text{card}f_A^{-1}x = |\det A| = 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{T}^2.$$

Demostración. Desde que \mathbb{Z} es un dominio ideal principal, usando la forma normal de Smith podemos tener la siguiente igualdad $A = PDQ$, donde P, D y Q son matrices enteras tal que $|\det P| = |\det Q| = 1$ y D es diagonal. Notemos que $f_A = f_P f_D f_Q$ entonces $f_A^{-1} = f_Q^{-1} f_D^{-1} f_P^{-1}$, de donde se se obtiene

$$\text{card}(f_A^{-1}x) = \text{card}(f_Q^{-1} f_D^{-1} f_P^{-1}x) \quad (2.22)$$

Por otro lado, como f_Q es automorfismos entonces $\text{card}(f_Q^{-1}(f_D^{-1}f_P^{-1}x)) = \text{card}(f_D^{-1}f_P^{-1}x)$ para todo $x \in \mathbb{T}^2$. Por lo tanto, es suficiente mostrar que

$$\text{card}f_D^{-1}x = |\det D| \text{ para todo } x \in \mathbb{T}^2.$$

Sea $D = \text{diag}[k_1, k_2]$ donde $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ y $x \in \mathbb{T}^2$, tomemos $[y] \in f_D^{-1}x$ entonces $x = f_D[y]$. Considerando $x = [x']$ con $x' \in [0, 1]^2$, se sigue

$$Dy = x' + p \text{ con } p = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Como D es invertible entonces $D^{-1} = \text{diag}[\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}]$, luego

$$y = D^{-1}x' + D^{-1}(p_1, p_2) = D^{-1}x' + \left(\frac{p_1}{k_1}, \frac{p_2}{k_2}\right),$$

obteniendo así

$$[y] = \left[D^{-1}x' + \left(\frac{p_1}{k_1}, \frac{p_2}{k_2}\right) \right]$$

con $p_i = 1, \dots, |k_i|$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto, $\text{card}f_D^{-1}x = |k_1||k_2| = |\det D|$. De aquí se puede ver

$$\text{card}f_D^{-1}f_P^{-1}x = |\det D| \text{ para todo } x \in \mathbb{T}^2, \quad (2.23)$$

luego, de (2.22) y de (2.23) se tiene que

$$\text{card}(f_A^{-1}x) = |\det D| = 1,$$

para todo $x \in \mathbb{T}^2$. □

Proposición 2.5.3. Todo automorfismo hiperbólico en $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ preserva la medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 .

Demostración. De la proposición 2.5.2 sabemos que cada punto $x \in \mathbb{T}^2$ tiene exactamente una preimagen bajo el automorfismo hiperbólico f_A . Además, para cada $r > 0$ suficientemente pequeño y cada $x \in \mathbb{T}^2$, la preimagen $f_A^{-1}B(x, r)$ de la bola abierta $B(x, r)$ de radio r centrada en x consta de una componente conexa B . Consideremos la correspondiente inversa local de f_A

$$G : B(x, r) \rightarrow B.$$

Entonces $f_A \circ G = \text{id}$, y así, $d_y G = A^{-1}$ para cada $y \in B(x, r)$. Por lo tanto,

$$\mu(f_A^{-1}B(x, r)) = \mu(B) = \mu(G(B, r)) = \int_{B(x, r)} |\det d_y G| d\mu(y) = \int_{B(x, r)} |\det A^{-1}| d\mu(y)$$

Como $|\det A| = 1$ entonces $|\det A^{-1}| = 1$, luego

$$\mu(f_A^{-1}B(x, r)) = \int_{B(x, r)} d\mu = \mu(B(x, r)).$$

De aquí tenemos que el automorfismo hiperbólico f_A preserva la medida de Lebesgue. □

Capítulo 3

Particiones de Markov en \mathbb{T}^2

En este capítulo presentamos uno de los resultados importantes del presente trabajo, más específicamente mostraremos que a todo automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 se le puede asociar una colección de conjuntos de \mathbb{T}^2 , denominado partición de Markov. Esta nos ayudará a definir una matriz de transición, la cual a su vez servirá para el estudio de los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 desde un punto de vista diferente: la dinámica simbólica. Esto significa que estudiaremos sucesiones y en virtud de este estudio lograremos deducir propiedades del automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 que hubieran sido difíciles de conocer sin recurrir a la dinámica simbólica. Finalizamos el capítulo induciendo una medida de Markov la cual será de importancia en el próximo capítulo.

La sección 3.2 de este capítulo es una adaptación de la construcción realizada por Roy Adler en su trabajo *Similarity of automorphism of the torus* (Adler, 1970), lo que se ha hecho aquí es explicitar los cálculos, mejorar los gráficos y dar una interpretación propia de la construcción, siguiendo siempre el trabajo original de R. Adler. La tercera sección es una adaptación del libro (Catsigeras, 2004); pues en dicho trabajo se desarrolla la teoría, de forma más general, para variedades diferenciables. Para terminar, la última sección del capítulo está basada en el libro (Barreira, 2012).

3.1. Particiones de Markov de \mathbb{T}^2

Sea f_A el automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 inducido por A . Sean E^s y E^u los autoespacios asociados a los autovalores λ_s y λ_u , respectivamente. Sean ℓ_s y ℓ_u rectas paralelas a E^s y E^u

que pasan por el punto (x, y) . Definimos los siguientes conjuntos

$$W^s[(x, y)] = \pi(\ell_s) \text{ y } W^u[(x, y)] = \pi(\ell_u).$$

De las proposiciones 2.3.1 y 2.3.2 se deduce que estos conjuntos son densos en \mathbb{T}^2 .

La siguiente proposición muestra una de las propiedades interesantes de los conjuntos $W^s[(x, y)]$ y $W^u[(x, y)]$ que será usado al momento de definir particiones de Markov.

Proposición 3.1.1. Se cumple que:

1. Para cada $[(x', y')] \in W^s[(x, y)]$ se tiene que

$$d(f_A^n[(x, y)], f_A^n[(x', y')]) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

2. Para cada $[(x', y')] \in W^u[(x, y)]$ se tiene que

$$d(f_A^{-n}[(x, y)], f_A^{-n}[(x', y')]) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

donde d es la distancia de la proposición 2.1.1.

Demostración. (1) Sea $(x', y') \in W^s[(x, y)]$, entonces (x', y') se halla en la recta ℓ_s paralela a E^s que pasa por (x, y) . Luego, dado $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|A^n(x, y) - A^n(x', y')| = |A^n(x - x', y - y')| = |\lambda_s^n(x - x', y - y')| = |\lambda_s|^n |(x - x', y - y')|.$$

De aqui tenemos que $|A^n(x, y) - A^n(x', y')| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por otro lado, notemos

$$d(f_A^n[(x, y)], f_A^n[(x', y')]) = d([A^n(x, y)], [A^n(x', y')])$$

Entonces

$$d(f_A^n[(x, y)], f_A^n[(x', y')]) = \inf\{|(u, v) - (u', v')| : (u, v) \in [A^n(x, y)], (u', v') \in [A^n(x', y')]\}$$

Como $A^n(x, y) \in [A^n(x, y)]$ y $A^n(x', y') \in [A^n(x', y')]$ entonces

$$d(f_A^n[(x, y)], f_A^n[(x', y')]) \leq |A^n(x, y) - A^n(x', y')|$$

Ahora, hacemos $n \rightarrow \infty$ entonces $d(f_A^n[(x, y)], f_A^n[(x', y')]) \rightarrow 0$. De forma análoga se demuestra el inciso 2. □

Observación 3.1.1. Los conjuntos $W^s[(x, y)]$ y $W^u[(x, y)]$ son denominados *conjunto estable* e *inestable* de $[(x, y)]$ asociado a f_A , respectivamente.

Proposición 3.1.2. Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ entonces:

1. $f_A(W^s[(x, y)]) \subset W^s(f_A[(x, y)])$
2. $f_A^{-1}(W^u[(x, y)]) \subset W^u(f_A^{-1}[(x, y)])$

Demostración. (1). Sea $[(x', y')] \in W^s[(x, y)]$, por definición de conjunto estable tenemos $d(f_A^{n+1}[(x', y')], f_A^{n+1}[(x, y)]) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, reescribiendo, podemos conseguir $d(f_A^n(f_A[(x', y')]), f_A^n(f_A[(x, y)])) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Nuevamente, por definición de conjunto estable, tenemos $f_A[(x', y')] \in W^s(f_A[(x, y)])$.

(2). Sea $z \in f_A^{-1}(W^u[(x, y)])$ entonces existe $[(x', y')] \in W^u[(x, y)]$ tal que $f_A^{-1}[(x', y')] = z$. Además, $d(f_A^{n-1}[(x', y')], f_A^{n-1}[(x, y)]) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow -\infty$. Esto último es equivalente a $d(f_A^n(z), f_A^n(f_A^{-1}[(x, y)])) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow -\infty$. Así, tenemos que $z \in W^u(f_A^{-1}[(x, y)])$. \square

Observación 3.1.2. Para simplificar notación, simplemente escribiremos $W^s(x)$ y $W^u(x)$ para referirnos a los conjuntos estables e inestable de x asociado a f_A , respectivamente.

Definición 3.1.1. Se denomina ϵ -conjunto de f_A en $x \in \mathbb{T}^2$ al conjunto

$$W_\epsilon^s(x) = \{y \in \mathbb{T}^2 : d(f_A^n(x), f_A^n(y)) \leq \epsilon, \text{ para todo } n \geq 0\}.$$

Además denominaremos ϵ -conjunto inestable de f_A en $x \in \mathbb{T}^2$ al conjunto

$$W_\epsilon^u(x) = \{y \in \mathbb{T}^2 : d(f_A^n(x), f_A^n(y)) \leq \epsilon, \text{ para todo } n \leq 0\}.$$

Proposición 3.1.3. Sea $\rho > 0$ la constante de expansividad de f_A y $0 < \epsilon \leq \rho/2$ entonces existe $\delta > 0$ tal que para todos $x, y \in \mathbb{T}^2$ con $d(x, y) < \delta$ se cumple que $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$ consiste de un único punto.

Demostración. Sean $\delta = \epsilon$ y consideremos $z, w \in W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$, entonces

$$d(f_A^n(x), f_A^n(z)) \leq \epsilon \quad \text{y} \quad d(f_A^n(x), f_A^n(w)) \leq \epsilon \text{ para todo } n \geq 0, \quad (3.1)$$

$$d(f_A^n(y), f_A^n(z)) \leq \epsilon \quad \text{y} \quad d(f_A^n(y), f_A^n(w)) \leq \epsilon \text{ para todo } n \leq 0. \quad (3.2)$$

Sumando las dos desigualdades de (3.1) y aplicando la desigualdad triangular se obtiene

$$d(f_A^n(z), f_A^n(w)) \leq d(f_A^n(x), f_A^n(z)) + d(f_A^n(x), f_A^n(w)) \leq 2\epsilon \text{ para todo } n \geq 0.$$

Recordando que $0 < \epsilon \leq \rho/2$ se sigue

$$d(f_A^n(z), f_A^n(w)) \leq \rho \text{ para todo } n \geq 0. \quad (3.3)$$

Análogamente, sumando las dos desigualdades en (3.2) y aplicando la desigualdad triangular se obtiene

$$d(f_A^n(z), f_A^n(w)) \leq d(f_A^n(y), f_A^n(z)) + d(f_A^n(y), f_A^n(w)) \leq 2\epsilon \text{ para todo } n \leq 0.$$

Recordando que $0 < \epsilon \leq \rho/2$ se sigue

$$d(f_A^n(z), f_A^n(w)) \leq \rho \text{ para todo } n \leq 0. \quad (3.4)$$

De las ecuaciones (3.3) y (3.4) obtenemos

$$d(f_A^n(z), f_A^n(w)) \leq \rho \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

desde que ρ es la constante de expansividad de f_A se sigue que $z = w$. De esta manera hemos demostrado que $W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$ consiste de un único punto. \square

En virtud de la proposición anterior, dada la unicidad del punto intersección entre $W_\epsilon^s(x)$ y $W_\epsilon^u(y)$ podemos definir una función.

Definición 3.1.2. La función

$$[\cdot, \cdot] : \{(x, y) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^2 : d(x, y) < \delta\} \rightarrow \mathbb{T}^2$$

definida por

$$[[x, y]] = W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y)$$

será conocida como *función corchete*.

Pasamos ahora a definir unos conjuntos especiales que nos ayudarán a construir una partición de especial importancia en \mathbb{T}^2 . Para esto, sea $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < \rho/4$ (donde ρ denota la constante de expansividad de f_A y sea δ como fue elegido en la Proposición 3.1.3.

Definición 3.1.3. Un subconjunto R no vacío de \mathbb{T}^2 se denomina *rectángulo* para f_A si tiene diámetro menor que δ y además $[[x, y]] \in R$ para todo $x, y \in R$.

Observación 3.1.3. Si R es un rectángulo para f_A como en la definición anterior, denotamos por ∂R al *borde topológico* de R .

Observación 3.1.4. La definición anterior nos dice que si $x, y \in R$ entonces existe un único $z \in W_\epsilon^s(x) \cap W_\epsilon^u(y) = [[x, y]]$ y además $z \in R$.

Definición 3.1.4. Sea R un rectángulo y $x \in R$. Por ϵ -conjunto estable de x en R nos referiremos al conjunto

$$W^s(x, R) = W_\epsilon^s(x) \cap R.$$

Análogamente, por ϵ -conjunto inestable de x en R nos referiremos al conjunto

$$W^u(x, R) = W_\epsilon^u(x) \cap R.$$

Definición 3.1.5. Una *partición de Markov* de \mathbb{T}^2 con respecto a f_A es una cobertura finita $\mathcal{R} = \{R_1 \cdots, R_m\}$ de \mathbb{T}^2 por rectángulos propios cerrados tales que:

i) $\text{int}R_i \cap \text{int}R_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

ii) Si $x \in \text{int}R_i \cap f_A^{-1}(\text{int}R_j)$ entonces

a) $f_A(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f_A(x), R_j)$,

b) $f_A(W^u(x, R_i)) \supset W^u(f_A(x), R_j)$.

Pasamos ahora a definir el borde topológico de una partición de Markov.

Definición 3.1.6. Sea $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ una partición de Markov. Se denomina *borde topológico* de \mathcal{R} al conjunto

$$\partial\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^m \partial R_j,$$

donde ∂R_j es el borde topológico del rectángulo R_j .

Proposición 3.1.4. Sea $\mathcal{R} = \{R_1, \cdots, R_m\}$ una partición por cerrados de \mathbb{T}^2 . Entonces:

1. $\partial\mathcal{R}$ tiene interior vacío y es cerrado.
2. $\bigcup_{j=1}^m \text{int}R_j$ es abierto y denso en \mathbb{T}^2 .
3. $M = \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f_A^{-n}(\partial\mathcal{R})$ es denso en \mathbb{T}^2 .

Demostración. 1. $\partial\mathcal{R}_j$ es cerrado con interior vacío. La unión finita de conjuntos cerrados con interior vacío es cerrado con interior vacío entonces $\partial\mathcal{R}$ es cerrado con interior vacío.

2. Del inciso anterior tenemos que el complemento $(\partial\mathcal{R})^c$ es abierto y denso en \mathbb{T}^2 . Si $y \in (\partial\mathcal{R})^c$ entonces $y \in \bigcap_{j=1}^m (\partial\mathcal{R}_j)^c$. Como \mathcal{R} cubre a \mathbb{T}^2 existe j tal que $y \in \text{int}R_j$. Entonces

$$(\partial\mathcal{R})^c \subset \bigcup_{j=1}^m \text{int}R_j,$$

luego, aplicando cerradura y de la densidad de $(\partial\mathcal{R})^c$ en \mathbb{T}^2 se sigue

$$\mathbb{T}^2 = \overline{(\partial\mathcal{R})^c} \subseteq \overline{\bigcup_{j=1}^m \text{int}R_j} \subseteq \mathbb{T}^2.$$

De aqui tenemos que $\overline{\bigcup_{j=1}^m \text{int}R_j} = \mathbb{T}^2$, lo que significa que $\bigcup_{j=1}^m \text{int}R_j$ es denso en \mathbb{T}^2 .

Desde que $\text{int}R_j$ es abierto para $1 \leq j \leq m$ entonces $\bigcup_{j=1}^m \text{int}R_j$ es abierto en \mathbb{T}^2 .

3. Notemos que

$$M = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f_A^{-n} \partial\mathcal{R} \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} (f_A^{-n} \partial\mathcal{R})^c = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(\partial\mathcal{R})^c,$$

desde que $(\partial\mathcal{R})^c$ es abierto y denso en \mathbb{T}^2 y f_A es un difeomorfismo de Anosov entonces se cumple que $f_A^{-n}(\partial\mathcal{R})^c$ es abierto y denso en \mathbb{T}^2 . Luego, M es la intersección numerable de conjuntos abiertos y densos, por lo tanto M es denso en \mathbb{T}^2 . □

Proposición 3.1.5. Sea $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ una partición de Markov de \mathbb{T}^2 . Si $\text{int}R_i \cap f_A^{-1}(\text{int}R_j) \neq \emptyset$, entonces para todo $y \in R_i \cap f_A^{-1}(R_j)$ se tiene:

- i) $f_A(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f_A(x), R_j)$,
- ii) $f_A(W^u(x, R_i)) \supset W^u(f_A(x), R_j)$.

Proposición 3.1.6. Sea $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ una partición de Markov de \mathbb{T}^2 entonces

$$f_A(\partial^s\mathcal{R}) \subset \partial^s\mathcal{R}^1 \text{ y } f_A(\partial^u\mathcal{R}) \supset \partial^u\mathcal{R}^2$$

Demostración. Probamos la primera inclusión. Sea $y \in f_A(\partial^s\mathcal{R})$ entonces existe $x \in \partial^s\mathcal{R}$ tal que $f_A(x) = y$. Recordando la definición de $\partial^s\mathcal{R}$ se puede ver que $x \in \bigcup_{i=1}^m \partial^s R_i$, de donde se tiene que existe $1 \leq i \leq m$ tal que $x \in \partial^s R_i$. En la proposición 3.1.4 hemos probado que $\bigcup_{j=1}^m \text{int}R_j$ es denso en \mathbb{T}^2 . Entonces también lo es su preimagen por el difeomorfismo f_A . Luego

$$f_A^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^m \text{int}R_j \right) \cap \text{int}R_i$$

es denso en R_i . Consideremos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $f_A^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^m \text{int}R_j \right) \cap \text{int}R_i$ tal que $x_n \rightarrow x$. De esto tenemos que $f_A(x_n) \in \bigcup_{j=1}^m \text{int}R_j$ para $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que existe una

¹ $\partial^s\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^m \partial^s R_j$ donde $\partial^s R_j = \{x \in R_j : x \notin \text{int}W^u(x, R_j) \text{ en } W_\epsilon^u(x)\}$
² $\partial^u\mathcal{R} = \bigcup_{j=1}^m \partial^u R_j$ donde $\partial^u R_j = \{x \in R_j : x \notin \text{int}W^s(x, R_j) \text{ en } W_\epsilon^s(x)\}$

subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y un índice j tal que $f_A(x_{n_k}) \in \text{int}R_j$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De aqui se tiene que

$$x_{n_k} \in (f_A^{-1}\text{int}R_j) \cap \text{int}R_i,$$

lo cual significa que

$$(f_A^{-1}\text{int}R_j) \cap \text{int}R_i \neq \emptyset. \quad (3.5)$$

Por otro lado, como el rectángulo R_j es cerrado, entonces $f_A(x) = \lim f_A(x_{n_k}) \in R_j$ entonces $x \in f_A^{-1}(R_j)$ y como $x \in \partial^s R_i$ entonces $x \in R_i$. De esto se sigue que

$$x \in f_A^{-1}(R_j) \cap R_i. \quad (3.6)$$

Considerando (3.5), (3.6) y aplicando la proposición 3.1.5 hallamos

$$f_A(W^s(x, R_i)) \supset W^u(f_A(x), R_j). \quad (3.7)$$

Supongamos que $y \notin \partial^s R_j$, entonces $y \in \text{int}W^u(y, R_j)$ en $W_\epsilon^u(y)$; es decir, existe V vecindad abierta de y tal que $y \in V \subset W^u(y, R_j)$. Luego, recordando que $y = f_A(x)$ se sigue

$$x \in f_A^{-1}(V) \subset f_A^{-1}(W^u(f_A(x), R_j)). \quad (3.8)$$

De las expresiones (3.7) y (3.8) se sigue

$$x \in f_A^{-1}(V) \subset W^s(x, R_i),$$

desde que f_A es un continua y V abierto entonces $f_A^{-1}(V)$ es un conjunto abierto. De esta última inclusión se puede ver que $x \in \text{int}W^u(x, R_i)$ en $W_\epsilon^u(x)$, osea $x \notin \partial R_i$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto se debe cumplir que $y \in \partial^s R_j$, con lo cual se verifica la inclusión

$$f_A(\partial^s \mathcal{R}) \subset \partial^s \mathcal{R}.$$

De forma análoga se prueba la segunda inclusión. □

3.2. Construcción de una partición de Markov en \mathbb{T}^2

Comenzamos demostrando que todo automorfismo hiperbólico de \mathbb{T}^2 induce una partición por rectángulos en \mathbb{T}^2 .

Proposición 3.2.1. Sea f_A un automorfismo hiperbólico de \mathbb{T}^2 . Entonces existe una partición de \mathbb{T}^2 conformada por dos conjuntos S_1 y S_2 los cuales son proyecciones de dos paralelogramos en el plano.

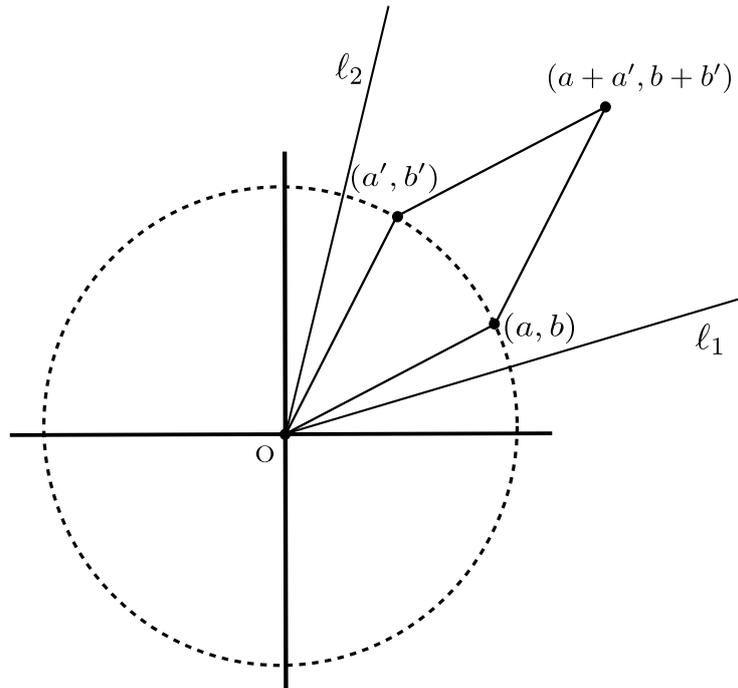


Figura 3.1

Demostración. Sea A la matriz que induce el automorfismo hiperbólico f_A . Sin pérdida de generalidad, asumamos que los subespacios estables e inestables pasan a través del primer cuadrante. Si no fuera el caso, entonces trabajamos con $B = \Theta A \Theta^{-1}$ donde Θ es la matriz dada por

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y tomamos n suficientemente grande para dar lugar a subespacios estables e inestables que cumplen la condición. Sabemos por la proposición 2.3.1 que E^s y E^u son dos rectas de pendiente irracional entonces estas no pasan a través de puntos con coordenadas enteras. Denotemos por ℓ_1 y ℓ_2 dichas rectas en orden creciente con respecto a su pendiente. Ahora, de todos los puntos con coordenadas enteras contenidas en la región del primer cuadrante entre estas rectas, existe un único punto (a, b) más cerca del origen. Para considerar la unicidad, consideremos otro punto con las mismas características (a', b') , entonces dichos puntos se hallan sobre una misma circunferencia tal como se muestra en la figura 3.1, entonces tenemos la siguiente identidad

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

Se sigue que

$$(a - a')(a + a') = (b' - b)(b + b').$$

De esto se tiene,

$$\operatorname{sgn}(a - a') = \operatorname{sgn}(b - b') \quad (3.9)$$

Además, como $(a, b) \neq (a', b')$ tenemos

$$|a - a'| > 1 \quad \text{ó} \quad |b - b'| > 1. \quad (3.10)$$

Por lo tanto, el paralelogramo $(0, 0), (a, b), (a', b'), (a + a', b + b')$, el cual se halla entre las rectas ℓ_1 y ℓ_2 , tiene área

$$|ab' - a'b| = |a(b' - b) + b(a - a')|$$

Recordando que (a, b) y (a', b') pertenecen al primer cuadrante y recordando también (3.9) podemos notar que se cumple

$$|a(b' - b) + b(a - a')| = a|b' - b| + b|a - a'|.$$

Haciendo uso de las desigualdades en (3.10) se sigue que

$$a|b' - b| + b|a - a'| > 1,$$

y de esto se tiene que

$$|ab' - a'b| > 1,$$

lo cual significa que el área del paralelogramo es mayor que uno.

De esto y por consideraciones geométricas, tenemos que este paralelogramo debe contener otro punto con coordenadas enteras además de los vértices, y por simetría también debe contener otro punto el triángulo de vértices $(0, 0), (a, b), (a', b')$. Esto contradice la minimalidad de $a^2 + b^2$, que es la distancia de (a, b) al origen O . (En la figura (3.2) el paralelogramo con área igual a 1 no contiene otro punto con coordenadas enteras diferente de sus vértices, al contrario del paralelogramo de área mayor que 1.)

Sin pérdida de generalidad, consideremos que $(a, b) = (1, 1)$ es el punto de coordenadas enteras dentro del paralelogramo a una mínima distancia de O . Si no, entonces hacemos otro cambio de variables reemplazando A por $B = \Theta A \Theta^{-1}$ donde Θ es la matriz construida de la siguiente manera:

Sean los puntos $(0, 0), (m, n), (a, b), (p, q)$ los cuales son los vértices de un paralelogramo el cual no contiene un punto con coordenadas enteras diferente de estos. (Ver figura (3.3)).

Consideremos la matriz

$$C = \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix}$$

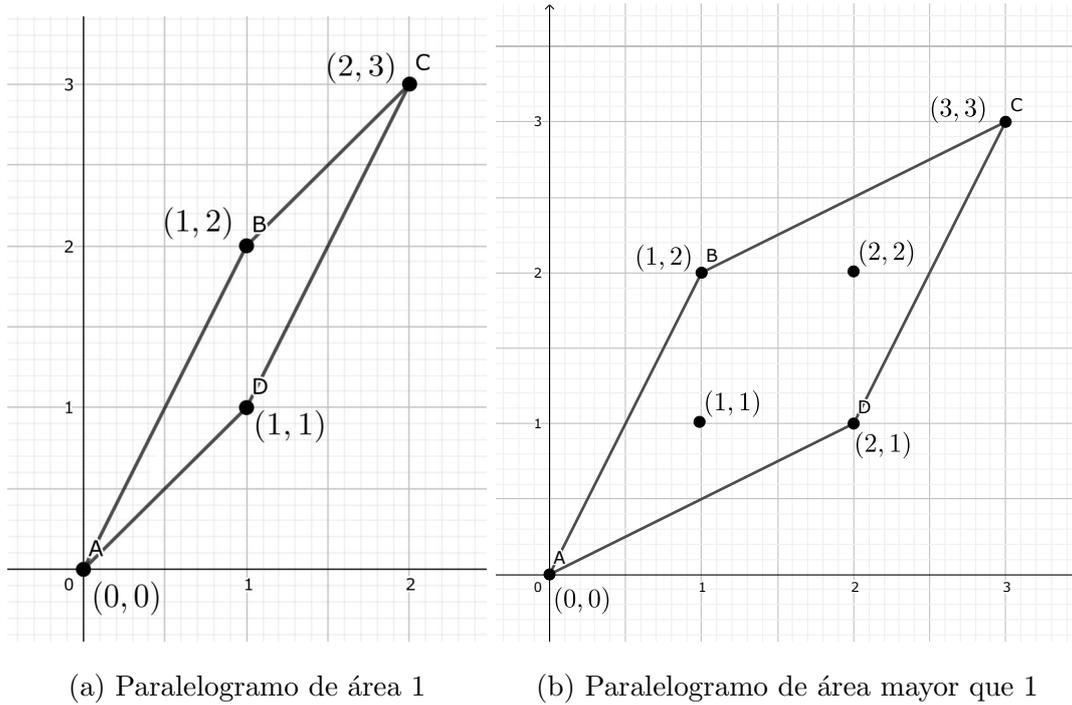


Figura 3.2: Paralelogramos de vértices con coordenadas enteras

el cual pertenece a $GL(2, \mathbb{Z})$ con su determinante igual a 1 puesto que no contiene otro punto con coordenadas enteras además de los vértices, y el cual transforma el cuadrado unitario sobre el paralelogramo de arriba. Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 intersectan el paralelogramo en los lados (m, n) , (a, b) y (p, q) , (a, b) , respectivamente. Luego, la matriz que buscábamos es

$$\Theta = C^{-1}.$$

Ahora, en la figura 3.4, sean ℓ'_1 y ℓ'_2 las líneas a través de $O' = (1, 1)$ paralelas a las rectas ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente. Sea P y Q' los puntos donde las líneas a través de $(1, 0)$ paralela a ℓ_2 intersecta ℓ_1 y ℓ'_1 , respectivamente; y similarmente Q, P' , los puntos de intersección de la línea a través de $(0, 1)$ paralela a ℓ_1 con ℓ_2 y ℓ'_2 . Notemos que los triángulos $S'P'O'$ y OPS son congruentes y que $O = (0, 0)$ difiere de $S' = (0, 1)$ por enteros en su segunda componente; es decir, O difiere de S' en su segunda componente por un entero (a saber 1). Análogamente podemos ver que $S = (1, 0)$ y $O' = (1, 1)$ difieren por enteros en su segunda componente por 1. De la congruencia se sigue que P difiere de P' por enteros en su segunda componente por 1; a saber, si $P = (a, b)$ entonces $P' = (a, b + 1)$. Además, notemos que los triángulos $OS'Q$ y $SO'Q'$ son congruentes, como $O = (0, 0)$ difiere de $S = (1, 0)$ por enteros en su primera componente. Luego, de la congruencia tenemos que si $Q = (c, d)$ entonces $Q' = (c + 1, d)$. Por último notemos que $M = (a + c, b + d)$. Así tenemos que las coordenadas de O, P, Q difieren

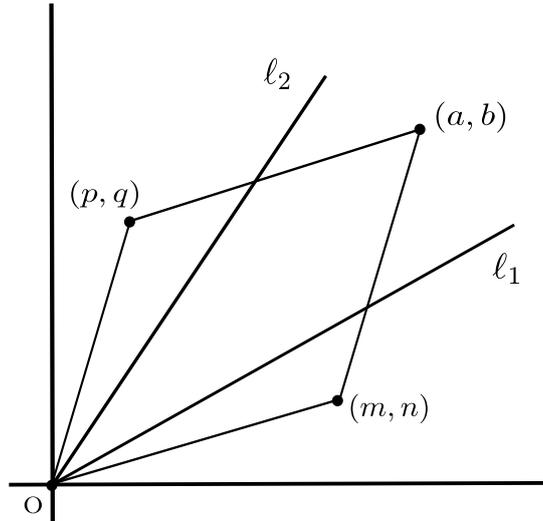


Figura 3.3

de O', P', Q' respectivamente por enteros; y desde las consideraciones geométricas elementales, trasladamos vertical y horizontalmente la figura $OPQ'O'P'Q$ por cantidades enteras en el plano; es decir, la unión de estos traslados cubre el plano sin dos superposiciones excepto en las fronteras (Ver figura 3.5). Regresando a la figura (3.4), se puede ver fácilmente que la pendiente de OP y QP' es

$$\frac{b}{a} = \frac{d-1-b}{c-a}$$

por propiedades de las proporciones se sigue que

$$\frac{b}{a} = \frac{d-1}{c}. \tag{3.11}$$

Además la pendiente de OQ y PQ' es

$$\frac{d}{c} = \frac{b-d}{a-1-c},$$

nuevamente por propiedades de las proporciones se sigue que

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a-1}. \tag{3.12}$$

De (3.11) y (3.12) se sigue que

$$ad - bc = a = d$$

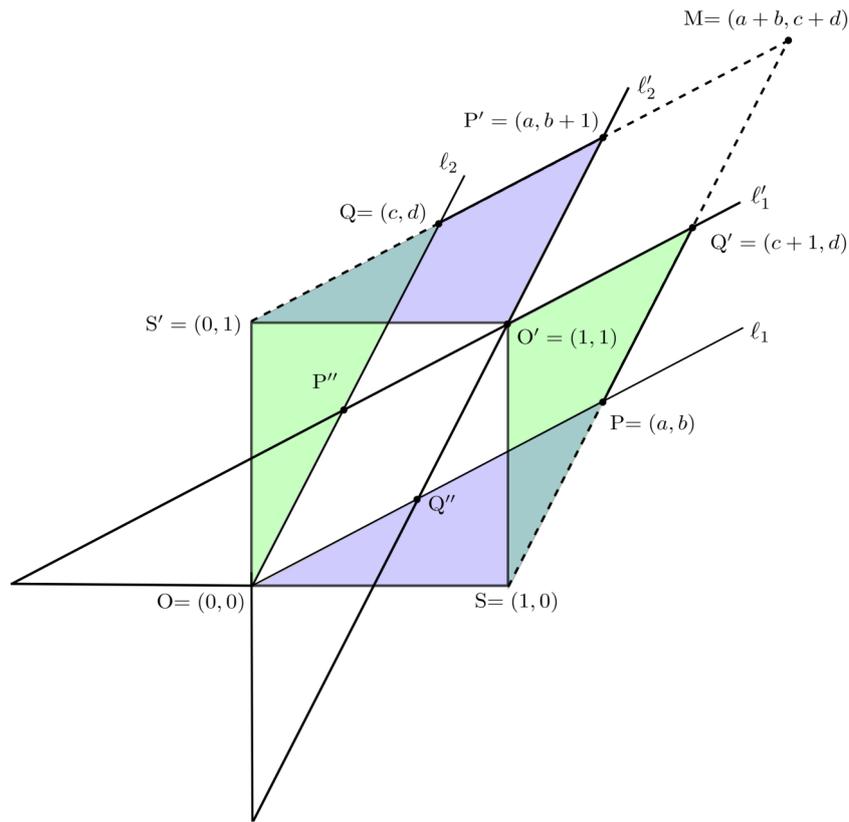


Figura 3.4

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \text{área}(OPQ'O'P'Q) &= \text{área}(OPMQ) - \text{área}(O'Q'MP') \\
 &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} c & d-1 \\ a-1 & b \end{bmatrix} \\
 &= 2(ad - bc) - a - d + 1 \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Recordando que el área del cuadrado unitario también es 1 se puede deducir que esta figura cubre dicho cuadrado de forma "perfecta". Esto significa que $OPQ'O'P'Q$ se proyecta sobre el toro de forma uno a uno, excepto en las fronteras. Sea P'' la intersección de ℓ_2 con la extensión del segmento $O'Q'$. Denotando por S_1 y S_2 las proyecciones sobre \mathbb{T}^2 de los paralelogramos $OPQ'P''$ y $O'P'QP''$ (vea figura 3.4) respectivamente, se concluye que S_1 y S_2 forman una partición de \mathbb{T}^2 desde que los paralelogramos forman una partición de \mathbb{R}^2 . (vea figura 3.5). \square

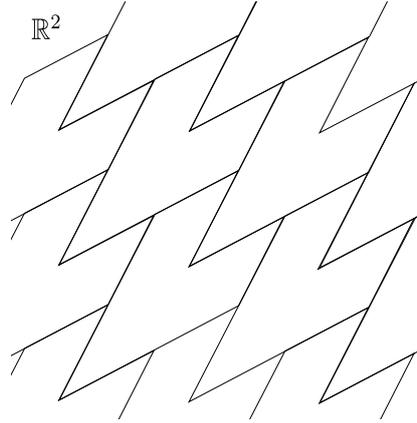


Figura 3.5: \mathbb{R}^2 cubierto por la figura $OPQ'O'P'Q$ por medio de traslaciones verticales y horizontales enteras.

3.3. Automorfismo hiperbólico vs Dinámica simbólica

En esta parte del trabajo asumiremos que ℓ_1 es la recta asociada a la dirección inestable y ℓ_2 con la dirección de estable. Si este no fuera el caso, reemplazamos A por $B = \Theta A \Theta^{-1}$ donde Θ es la matriz dada por

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con estas consideraciones tenemos lo siguiente

$$A(OQ) \subset OQ \tag{3.13}$$

Definición 3.3.1. Consideremos los conjuntos S_1 y S_2 dados por la proposición anterior. Por una S_i -fibra en la x_i -dirección, o más simplemente una S_i -fibra, nos referiremos a la proyección de un segmento paralelo a ℓ_1 que se extiende desde $P''Q$ a $O'P'$, si $i = 1$, y desde OP'' a PQ' , si $i = 2$. (Ver la figura 3.4). El conjunto S_i es una familia de tales fibras, todas teniendo la misma longitud, digamos l_i con $1 \leq i \leq 2$. La imagen bajo f_A^n de una S_i -fibra es un conjunto que llamaremos $f_A^n(S_i)$ -fibra. La longitud de las $f_A^n(S_i)$ -fibra es $|\lambda_u|^n l_i$.

Observación 3.3.1. De la relación (3.13) tenemos que los puntos finales de una $f_A^n(S_i)$ -fibra para $n \geq 0$, siempre se halla en la proyección del segmento OQ . En efecto, sean L y L' fibras de S_i y $f_A^n(S_j)$ donde $n \geq 0$, respectivamente. Se cumple $L \cap L' = L$ o $L \cap L' = \emptyset$. Esto significa, en particular que toda $f_A(S_j)$ -fibra se enrolla alrededor de \mathbb{T}^2 e intersecta S_i en un número finito de S_i -fibras. Este número depende solo de i y j en lugar de la fibra particular $f_A(S_j)$. Ahora el conjunto $f_A(S_j)$ se enrolla alrededor del toro, y si este intersecta S_i en un conjunto de medida

positiva, entonces $f_A(S_j) \cap S_i$ es una familia de S_i -fibras la cual es la proyección de uno o más paralelogramos en el plano.

Sean $R_1, \dots, R_N, N = p + q + r + s$ las proyecciones de los diferentes paralelogramos para los cuales se cumple

$$\begin{cases} R_1 \cup \dots \cup R_p & = S_1 \cap f_A(S_1) \\ R_{p+1} \cup \dots \cup R_{p+q} & = S_1 \cap f_A(S_2) \\ R_{p+q+1} \cup \dots \cup R_{p+q+r} & = S_2 \cap f_A(S_1) \\ R_{p+q+r+1} \cup \dots \cup R_{p+q+r+s} & = S_2 \cap f_A(S_2) \end{cases} \quad (3.14)$$

Si $S_i \cap f_A(S_j) \neq \emptyset$ entonces cada fibra en la x_j -dirección de $f_A(S_j)$ intersecta $R_k \subset S_i \cap f_A(S_j)$ en una fibra en la x_i -dirección de S_i .

Proposición 3.3.1 (Propiedad de Markov). Sea $\text{int}R_i \subset S_{i_1} \cap f_A(S_{i_2}) \neq \emptyset$ y $\text{int}R_j \subset S_{j_1} \cap f_A(S_{j_2}) \neq \emptyset$. Entonces $f_A(\text{int}R_i) \cap \text{int}R_j \neq \emptyset$ si y sólo si $j_2 = i_1$.

Demostración. Sean i y j tal que $f_A(\text{int}R_i) \cap \text{int}R_j \neq \emptyset$. Notemos que $f_A(\text{int}R_i) \subset f_A(S_{i_1}) \cap f_A^2(S_{i_2})$, luego

$$f_A(\text{int}R_i) \cap \text{int}R_j \subset f_A(S_{i_1}) \cap f_A^2(S_{i_2}) \cap S_{j_1} \cap f_A(S_{j_2}).$$

De donde se tiene,

$$\emptyset \neq f_A(\text{int}R_i) \cap \text{int}R_j \subset f_A(S_{i_1}) \cap f_A(S_{j_2}). \quad (3.15)$$

De aquí tenemos que $f_A(S_{i_1}) \cap f_A(S_{j_2}) \neq \emptyset$ entonces, como f_A es un automorfismo, se cumple que $S_{i_1} \cap S_{j_2} \neq \emptyset$. Recordando que, cuando $i_1 \neq j_2$, S_{i_1} y S_{j_2} solo se intersectan en sus fronteras; podemos deducir que $\mu(S_{i_1} \cap S_{j_2}) = 0$, siendo μ la medida definida en 2.1.4. Desde que f_A es un homeomorfismo, entonces $f_A(\text{int}R_i)$ es abierto en \mathbb{T}^2 . Luego, se deduce que $\mu(f_A(\text{int}R_i) \cap \text{int}R_j) > 0$. De todo esto y de (3.15) se sigue que se debe cumplir necesariamente que $i_1 = j_2$. Recíprocamente, toda $f_A(S_{j_2})$ -fibra intersecta R_j en exactamente una S_{j_1} -fibra, pues $\text{int}R_j \subset S_{j_1} \cap f_A(S_{j_2})$. Además, $f_A(R_i)$ es una familia de $f_A(S_{i_1})$ -fibras pues $f_A(\text{int}R_i) \subset f_A(S_{i_1}) \cap f_A^2(S_{i_2})$. Si $i_1 = j_2$, toda $f_A^2(S_{i_2})$ -fibra de $f_A(R_i)$ la cual no es está en la frontera de $f_A(R_i)$ intersecta R_j en exactamente una S_{j_1} -fibra. Por lo tanto, $f_A(\text{int}R_i) \cap \text{int}R_j \neq \emptyset$. \square

Proposición 3.3.2. La colección $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$ donde $N = p + q + r + s$ es una partición de Markov para \mathbb{T}^2 asociado al automorfismo hiperbólico f_A .

Demostración. R_1 es un rectángulo en \mathbb{T}^2 . En efecto, sean $x, y \in R_1$ desde que $W^s(x)$ tiene la misma dirección que $P''Q$ y $W^u(y)$ tiene la misma dirección que $P''O'$ se sigue que $W^s(x) \cap$

$W^u(y) \in R_1$. Análogamente se puede probar que R_i es un rectángulo en \mathbb{T}^2 para $i = 2, \dots, N$. Pasamos a probar que \mathcal{R} es una partición de Markov. De la definición de los R se tiene que $\text{int}R_i \cap \text{int}R_j \neq \emptyset$ para todo $1 \leq i, j \leq N$ con $i \neq j$.

Sea $x \in \text{int}R_i \cap f_A^{-1}(\text{int}R_j)$,

a) Si $y \in f_A(W^s(x, R_i))$ entonces existe $z \in W^s(x, R_i)$ tal que $y = f_A(z)$. Por definición;

$$z \in W^s(x, R_i) = W_\epsilon^s \cap R_i,$$

es decir, $z \in R_i$ y

$$d(f_A^n(x), f_A^n(z)) \leq \epsilon \text{ para todo } n \geq 0.$$

Esta última desigualdad se cumple para todo $n \geq 0$, en particular se cumple para $n \geq 1$, entonces

$$d(f_A^{n-1}(f_A(x)), f_A^{n-1}(f_A(z))) \leq \epsilon \text{ para todo } n \geq 1.$$

Sea $m = n - 1$ es claro que $m \geq 0$ y recordando que $y = f_A(z)$ se tiene

$$d(f_A^m(f_A(x)), f_A^m(y)) \leq \epsilon \text{ para todo } m \geq 0, \quad (3.16)$$

entonces $y \in W_\epsilon^s(f_A(x))$. Para $m = 0$, la expresión (3.16) queda de la siguiente manera

$$d(f_A(x), y) \leq \epsilon.$$

Sabemos que $f_A(x) \in \text{int}R_j$, como $\text{diam}R_j = \epsilon$ entonces $y \in R_j$. Luego $f_A(W^s(x, R_i)) \subset W^s(f_A(x), R_j)$.

□

Ahora, definamos la matriz de transición $\mathbf{T} = T_{p,q,r,s}$, asociada a la partición de Markov \mathcal{R} dada por

$$\mathbf{T} = T_{p,q,r,s} = (t_{ij})$$

donde

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } f_A(\text{int}R_i) \cap \text{int}R_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f_A(\text{int}R_i) \cap \text{int}R_j = \emptyset \end{cases}$$

Por la proposición 3.3.1, vemos que \mathbf{T} depende de cuatro parámetros no negativos p, q, r y s , y tiene una forma especial. En efecto:

- t_{11}) De (3.14) se sabe que $\text{int}R_1 \subset S_1 \cap f_A(S_1)$, de la proposición 3.3.1 se sigue $f_A(\text{int}R_1) \cap \text{int}R_1 \neq \emptyset$ entonces $t_{11} = 1$.
- t_{1p}) De (3.14) se sabe que $\text{int}R_1 \subset S_1 \cap f_A(S_1)$ y $\text{int}R_p \subset S_1 \cap f_A(S_1)$, de la proposición 3.3.1 se sigue que $f_A(\text{int}R_1) \cap \text{int}R_p \neq \emptyset$ entonces $t_{1p} = 1$.
- t_{pp}) De (3.14) se sabe que $\text{int}R_p \subset S_1 \cap f_A(S_1)$ y $\text{int}R_p \subset S_1 \cap f_A(S_1)$, de la proposición 3.3.1 se sigue que $f_A(\text{int}R_p) \cap \text{int}R_p \neq \emptyset$ entonces $t_{pp} = 1$.
- $t_{(p+q)p}$) De (3.14) se sabe que $\text{int}R_{p+q} \subset S_1 \cap f_A(S_2)$ y $\text{int}R_p \subset S_1 \cap f_A(S_1)$, de la proposición 3.3.1 se sigue que $f_A(\text{int}R_{p+q}) \cap \text{int}R_p \neq \emptyset$ entonces $t_{(p+q)p} = 1$.
- $t_{1(p+1)}$) De (3.14) se sabe que $\text{int}R_1 \subset S_1 \cap f_A(S_1)$ y $\text{int}R_{p+1} \subset S_1 \cap f_A(S_2)$, de la proposición 3.3.1 se sigue que $f_A(\text{int}R_1) \cap \text{int}R_{p+1} = \emptyset$ entonces $t_{1(p+1)} = 0$.
- $t_{1(p+q)}$) De (3.14) se sabe que $\text{int}R_1 \subset S_1 \cap f_A(S_1)$ y $\text{int}R_{p+q} \subset S_1 \cap f_A(S_2)$, de la proposición 3.3.1 se sigue que $f_A(\text{int}R_1) \cap \text{int}R_{p+q} = \emptyset$ entonces $t_{1(p+q)} = 0$.
- $t_{p(p+q)}$) De (3.14) se sabe que $\text{int}R_p \subset S_1 \cap f_A(S_1)$ y $\text{int}R_{p+q} \subset S_1 \cap f_A(S_2)$, de la proposición 3.3.1 se sigue que $f_A(\text{int}R_p) \cap \text{int}R_{p+q} = \emptyset$ entonces $t_{p(p+q)} = 0$.
- $t_{(p+q)(p+q)}$) De (3.14) se sabe que $\text{int}R_{p+q} \subset S_1 \cap f_A(S_2)$, de la proposición 3.3.1 se sigue que $f_A(\text{int}R_{p+q}) \cap \text{int}R_{p+q} = \emptyset$ entonces $t_{(p+q)(p+q)} = 0$.

Siguiendo de forma análoga para las demás entradas de \mathbf{T} conseguimos una matriz $N \times N$ con bloques de ceros y unos como se muestra en la siguiente figura:

$$T_{p,q,r,s} = \begin{bmatrix} & p & q & r & s & \\ & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & p+q \\ & \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{I} & r+s \end{bmatrix}$$

Figura 3.6: Matriz transición

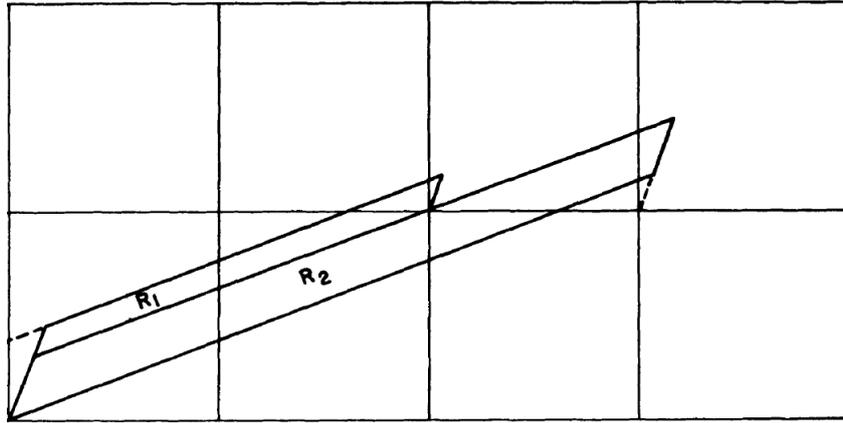


Figura 3.7

Ejemplo 3.3.1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su ecuación característica es

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

asi, sus autovalores son

$$\lambda_u = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ y } \lambda_s = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

y sus subespacios estables e inestables, respectivamente, son

$$W^u = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}x \right\} \text{ y } W^s = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}x \right\}$$

Realizamos la construcción de la partición por dos rectángulos igual a como lo hicimos en la demostración de la proposición 3.2.1 (Ver figura 3.7). Sea $\beta = \{S_1, S_2\}$ la partición de \mathbb{T}^2 . La figura 3.7 ilustra la partición $f_A(\beta)$ la cual consiste de las proyecciones de dos paralelogramos.

La figura 3.8 ilustra la partición de \mathbb{T}^2 por los conjuntos $\{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ donde

$$R_1 = S_1 \cap f_A(S_1)$$

$$R_2 = S_1 \cap f_A(S_2)$$

$$R_3 = S_2 \cap f_A(S_1)$$

$$R_4 \cup R_5 = S_2 \cap f_A(S_2).$$

Por la proposición 3.3.2 sabemos que la partición $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4, R_5\}$ es una partición

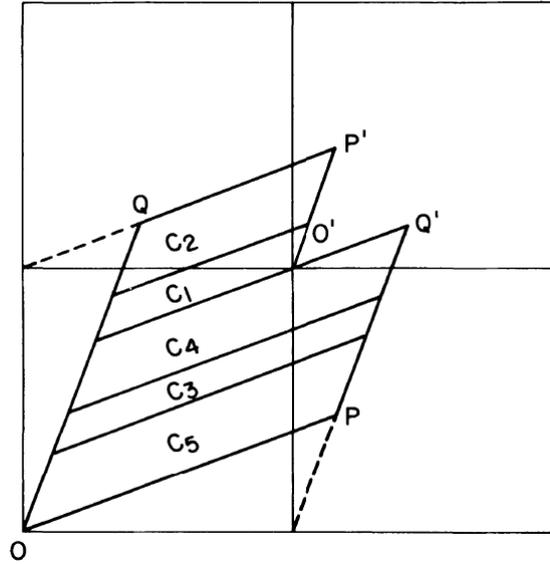


Figura 3.8

de Markov. La matriz de transición asociada a \mathcal{R} es

$$\mathbf{T} = T_{1,1,1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, mostramos como introducir un coding map para un automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 . Para esto, regresemos a trabajar con nuestra partición de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$. Consideremos $\Sigma_N = \{1, 2, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}$ y definamos el conjunto

$$\Sigma_{\mathbf{T}} = \{w \in \Sigma_N : t_{w_n w_{n+1}} = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}.$$

Para cada $w \in \Sigma_{\mathbf{T}}$ definamos un conjunto $H(w) \in \mathbb{T}^2$ por

$$H(w) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f_A^{-n}(R_{w_n}).$$

Desde que los lados de los rectángulos son paralelos a las direcciones estables e inestables, existe una constante $c > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto cerrado

$$Q_n(w) = \bigcap_{k=-n}^n f_A^{-k}(R_{w_k})$$

tiene diámetro de al menos $c\lambda_s^n$. Esto nos asegura que $\text{card}(H(w)) \leq 1$. Usamos la propiedad de Markov 3.3.1 para mostrar que, en efecto, $\text{card}(H(w)) = 1$. Sea R_i, R_j y R_k rectángulos tal

que

$$\text{int}R_j \cap \text{int}f_A(R_i) \neq \emptyset \text{ y } \text{int}R_k \cap \text{int}f_A(R_j) \neq \emptyset$$

Por la propiedad de Markov, $\text{int}f_A^2(R_i)$ intersecciona $\text{int}f_A(R_j)$ a lo largo de toda la direcci3n inestable de R_k . Esto implica que

$$\text{int}f_A^2(R_i) \cap \text{int}f_A(R_j) \cap \text{int}R_k \neq \emptyset$$

Por inducci3n se muestra que si

$$\text{int}f_A(R_{i_k}) \cap \text{int}R_{i_{k+1}} \neq \emptyset \text{ para } k = -n, \dots, n-1.$$

entonces

$$\text{int}f_A^{2n}(R_{i_{-n}}) \cap \text{int}f_A^{2n-1}(R_{i_{-n+1}}) \cdots \cap \text{int}R_{i_n} \neq \emptyset$$

Por lo tanto, el conjunto cerrado $Q_n(w)$ es no vac3o para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $\text{card}(H(w)) = 1$ para todo $w \in \Sigma_{\mathbf{T}}$, y por lo tanto, podemos definir la *aplicaci3n de codificaci3n* $h : \Sigma_{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbb{T}^2$ donde

$$h(w) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j})$$

Proposici3n 3.3.3. Sea $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$ una partici3n de Markov de \mathbb{T}^2 con respecto a f_A . Entonces para todo $w \in \Sigma_{\mathbf{T}}$, el conjunto

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j})$$

contiene un 3nico punto de \mathbb{T}^2 y la aplicaci3n $h : \Sigma_{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbb{T}^2$ definida como

$$h(w) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j})$$

satisface:

1. h es una semiconjugaci3n de σ y f_A ; es decir,
 - a) h es continua y sobreyectiva,
 - b) $f_A \circ h = h \circ \sigma$.
2. h es inyectiva en $h^{-1}(\mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j} \partial \mathcal{R})$,
3. Para toda medida $\mu \in M_{\sigma}(\Sigma_{\mathbf{T}})$ erg3dica y positiva sobre abiertos, tenemos

$$\mu \left(h^{-1} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j} \partial \mathcal{R} \right) \right) = 0,$$

4. Si f_A es topológicamente mixing, entonces σ es topológicamente mixing.

Antes de hacer la prueba de la proposición, mostraremos el siguiente lema

Lema 3.3.1. Dado $N \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto

$$K_N(w) = \bigcap_{j=-N}^N f_A^{-j}(R_{w_j})$$

es un rectángulo cerrado, para todo $w \in \Sigma_{\mathbf{T}}$.

Demostración. Comenzamos demostrando que $K_N(w) \neq \emptyset$, como

$$\begin{aligned} K_N(w) &= f_A^N(R_{w_{-N}}) \cap f_A^{N-1}(R_{w_{-N+1}}) \cap \cdots \cap f_A^{-N+1}(R_{w_{N-1}}) \cap f_A^{-N}(R_{w_N}) \\ K_N(w) &= f_A^N(R_{w_{-N}} \cap f_A^{-1}(R_{w_{-N+1}}) \cap \cdots \cap f_A^{-2N+1}(R_{w_{N-1}}) \cap f_A^{-2N}(R_{w_N})) \end{aligned}$$

para demostrar que $K_N(w) \neq \emptyset$ es suficiente demostrar que para todo $\alpha \in \Sigma_{\mathbf{T}}$ y todo $n \geq 0$ se cumple

$$R_{\alpha_0} \cap f_A^{-1}(R_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap f_A^{-n}(R_{\alpha_n}) \neq \emptyset.$$

Demostraremos esto por inducción; para $n = 0$ se tiene $R_{\alpha_0} \neq \emptyset$, pues pertenece a \mathcal{R} el cual es partición de Markov. Supongamos que se cumple para n , $R_{\alpha_0} \cap f_A^{-1}(R_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap f_A^{-n}(R_{\alpha_n}) \neq \emptyset$, de aquí tenemos que $R_{\alpha_1} \cap \cdots \cap f_A^{-n+1}(R_{\alpha_n}) \neq \emptyset$. Ahora probamos que se cumple para $n + 1$, sea $y \in R_{\alpha_1} \cap \cdots \cap f_A^{-n+1}(R_{\alpha_n})$. Como $\alpha \in \Sigma_{\mathbf{T}}$ entonces $\text{int}R_{\alpha_0} \cap f_A^{-1}(\text{int}R_{\alpha_1}) \neq \emptyset$ entonces existe $x \in \text{int}R_{\alpha_1}$ tal que $f_A^{-1}(x) \in R_{\alpha_0} \cap f_A^{-1}(R_{\alpha_1})$.

Como $y \in R_{\alpha_1}$, consideremos $z = \llbracket y, x \rrbracket$ entonces $z \in R_{\alpha_1}$ y $z \in W^s(y, R_{\alpha_1})$. Por otro lado, como $y \in R_{\alpha_1} \cap f_A^{-1}(R_{\alpha_2})$ se sigue de la proposición 3.1.5 que

$$f_A(W^s(y, R_{\alpha_1})) \subset W^s(f_A(y), R_{\alpha_2}),$$

de esto se tiene que $f_A(z) \in W^s(f_A(y), R_{\alpha_2})$. Análogamente se prueba que

$$f_A^2(z) \in W^s(f_A^2(y), R_{\alpha_3}), \cdots, f_A^{n-1}(z) \in W^s(f_A^{n-1}(y), R_{\alpha_n})$$

de esto podemos concluir que

$$z \in R_{\alpha_1} \cap f_A^{-1}(R_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap f_A^{-n+1}(R_{\alpha_n}).$$

De esto último se obtiene

$$f_A^{-1}(z) \in f_A^{-1}(R_{\alpha_1}) \cap f_A^{-2}(R_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap f_A^{-n}(R_{\alpha_n}). \quad (3.17)$$

Además, desde que $f_A^{-1}(x) \in R_{\alpha_0} \cap f_A^{-1}(R_{\alpha_1})$, se sigue de la proposición 3.1.5 que

$$f_A(W^u(f^{-1}(x), R_{\alpha_0})) \supset W^u(x, R_{\alpha_1})$$

de esto se tiene que $f_A^{-1}(z) \in W^u(f_A^{-1}(x), R_{\alpha_0})$ pues $z \in W^u(x, R_{\alpha_1})$. Entonces

$$f_A^{-1}(z) \in R_{\alpha_0} \tag{3.18}$$

Finalmente, de (3.17) y (3.18) se deduce

$$f_A^{-1}(z) \in R_{\alpha_0} \cap f_A^{-1}(R_{\alpha_1}) \cap f_A^{-2}(R_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap f_A^{-n}(R_{\alpha_n})$$

y con esto concluimos que $R_{\alpha_0} \cap f_A^{-1}(R_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap f_A^{-n}(R_{\alpha_n}) \neq \emptyset$ para todo $\alpha \in \Sigma_{\mathbb{T}}$ y todo $n \geq 0$.

Ahora demostramos que $K_N(w)$ es un rectángulo. Sean $x, y \in K_N(w)$, entonces $f_A^j(x), f_A^j(y) \in R_{w_j}$ para todo $|j| \leq N$ donde $j \in \mathbb{Z}$. Para $j = 0$ tenemos $x, y \in R_{w_0}$ entonces se cumple $z = \llbracket x, y \rrbracket \in R_{w_0}$, $z \in W^s(x, R_{w_0})$ y $z \in W^u(y, R_{w_0})$, de la proposición 3.1.5 se sigue que

$$f_A(z) \in W^s(f_A(x), R_{w_1}) \text{ y } f_A^{-1}(z) \in W^u(f_A^{-1}(y), R_{w_{-1}})$$

pues $x \in R_{w_0} \cap f_A^{-1}(R_{w_1})$ y $f_A^{-1}(y) \in R_{w_{-1}} \cap f_A^{-1}(R_{w_0})$. Así, de forma general tenemos que

$$f_A^j(z) \in W^s(f_A^j(x), R_{w_j}) \text{ y } f_A^{-j}(z) \in W^u(f_A^{-j}(y), R_{w_{-j}}) \text{ para todo } 0 \leq j \leq N,$$

esto implica que

$$z \in f_A^{-j}(R_{w_j}) \text{ para todo } |j| \leq N$$

lo cual es equivalente a $z \in K_N(w)$. Por lo tanto, $K_N(w)$ es un rectángulo. \square

Demostración de la proposición 3.3.3. Para cada $N \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $K_N(w) = \bigcap_{j=-N}^N f_A^{-j}(R_{w_j})$, por el lema 3.3.1 sabemos que $K_N(w)$ es cerrado y no vacío en \mathbb{T}^2 . Como \mathbb{T}^2 es compacto, entonces $K_N(w)$ es compacto. De la definición de los conjuntos $K_N(w)$ es claro que

$$K_1(w) \supset K_2(w) \supset \cdots \supset K_N(w) \supset \cdots ,$$

entonces

$$\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f_A^{-j}(R_{w_j}) = \bigcap_{N=1}^{\infty} K_N(w) \neq \emptyset.$$

De esto tenemos que existe $x \in \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f_A^{-j}(R_{w_j})$ el cual es único. De otra manera, existiría $y \in \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f_A^{-j}(R_{w_j})$ con $y \neq x$ entonces $f_A^j(x), f_A^j(y) \in R_{w_j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Pero R_{w_j} tiene diámetro menor que la constante de expansividad de f , digamos $\rho > 0$, así pues

$$d(f_A^j(x), f_A^j(y)) \leq \rho \text{ para todo } j \in \mathbb{Z}.$$

De esto tenemos que $x = y$, la cual es una contradicción, la cual viene de suponer que x no es único. Pasamos a demostrar los siguientes items

1. Probaremos que h es una semiconjugación de σ y f_A . Realizamos el siguiente cálculo

$$h(\sigma(w)) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_{j+1}}) = f_A \left(\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j-1}(R_{w_{j+1}}) \right),$$

sea $i = j + 1$, como $j \in \mathbb{Z}$ entonces $i \in \mathbb{Z}$. Luego,

$$h(\sigma(w)) = f_A \left(\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j-1}(R_{w_{j+1}}) \right) = f_A \left(\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f_A^{-i}(R_{w_i}) \right) = f_A(h(w)),$$

entonces

$$h \circ \sigma(w) = f_A \circ h(w) \text{ para todo } w \in \Sigma_{\mathbf{T}}$$

h es continua. En efecto, sea $(w^n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de sucesiones en $\Sigma_{\mathbf{T}}$ tal que $w^n \rightarrow w$ cuando $n \rightarrow \infty$, denotemos por $x_n \in \mathbb{T}^2$ a $h(w^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$h(w^n) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j^n}) = x_n. \quad (3.19)$$

Como \mathbb{T}^2 es compacto, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente, consideremos la subsucesión $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \rightarrow x \in \mathbb{T}^2$ cuando $k \rightarrow \infty$. Y por (3.19) tenemos

$$x_{n_k} = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j^{n_k}})$$

Es claro que $w^{n_k} \rightarrow w$ cuando $k \rightarrow \infty$, así pues dado $p > 0$ con $p \in \mathbb{Z}$ existe $K > 0$ tal que $w_j^{n_k} = w_j$ para todo $k > K$ y todo $|j| \leq p$. Luego, para todo $k > K$ se tiene

$$x_{n_k} = \bigcap_{j=-p}^p f_A^{-j}(R_{w_j}).$$

Como $\bigcap_{j=-p}^p f_A^{-j}(R_{w_j})$ es cerrado y $x_{n_k} \rightarrow x$. Entonces

$$x \in \bigcap_{j=-p}^p f_A^{-j}(R_{w_j}) \text{ para todo } p > 0$$

lo cual implica que

$$x \in \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j}),$$

y por definición de h se tendría $x = h(w)$, de donde se concluye que h es continua.

h es sobreyectiva. Para comenzar, consideremos $x \in \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(\partial \mathcal{R})$ cuya órbita por f_A no corta al borde $\partial \mathcal{R}$. Recordando que los rectángulos son disjuntos dos a dos, denotemos por $w_j(x)$ el único subíndice tal que $f_A^j(x) \in \text{int} R_{w_j(x)}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$. De esta manera se tiene que

$$f_A^j(x) \in \text{int} R_{w_j(x)} \cap f_A^{-1} \text{int}(R_{w_{j+1}(x)})$$

luego, de la definición de matriz de transición

$$\mathbf{T}_{w_j(x)w_{j+1}(x)} = 1 \tag{3.20}$$

Denotando por $w(x)$ a la sucesión bilateral $(w_j(x))_{j \in \mathbb{Z}}$, por (3.20) tenemos $w(x) \in \Sigma_{\mathbf{T}}$.

Esto último implica

$$h(w(x)) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j(x)}) = x,$$

de esta manera hemos probado que $\mathbb{T}^2 \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(\partial \mathcal{R}) \subset h(\Sigma_{\mathbf{T}})$. Por otro lado, de la proposición 3.1.4 tenemos que $\mathbb{T}^2 \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(\partial \mathcal{R})$ es denso, además, como $\Sigma_{\mathbf{T}}$ es compacto entonces $h(\Sigma_{\mathbf{T}})$ es cerrado. De esto, se sigue que

$$h(\Sigma_{\mathbf{T}}) = \overline{h(\Sigma_{\mathbf{T}})} \supset \overline{\mathbb{T}^2 \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(\partial \mathcal{R})} = \mathbb{T}^2,$$

lo que significa que h es sobreyectiva.

2. Consideremos $w, v \in h^{-1}(\mathbb{T}^2 \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(\partial \mathcal{R}))$ tal que $h(w) = h(v)$; denotando por x a la imagen de w y v por h , entonces

$$x = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j}) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{v_j}) \text{ y } x \in \mathbb{T}^2 \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(\partial \mathcal{R})$$

entonces $f_A^j(x) \in \text{int} R_{w_j} \cap \text{int} R_{v_j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, como \mathcal{R} es partición de Markov entonces se debe cumplir $w_j = v_j$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Con esto concluimos que $w = v$ y por lo tanto h es inyectiva en $h^{-1}(\mathbb{T}^2 \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(\partial \mathcal{R}))$.

3. Dado $\mu \in M_\sigma(\Sigma_{\mathbf{T}})$ ergódica y positiva sobre abiertos. En virtud del inciso 1) observemos

$$h^{-1} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(\partial \mathcal{R}) \right) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} h^{-1} \circ f_A^{-j}(\partial \mathcal{R}) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \sigma^{-j} \circ h^{-1}(\partial \mathcal{R}),$$

aplicando μ con su propiedad de subaditividad y su invarianza por σ , obtenemos

$$\mu \left(h^{-1} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j} \partial \mathcal{R} \right) \right) \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mu(h^{-1}(\partial \mathcal{R})). \quad (3.21)$$

Para probar el inciso 3) es suficiente probar que $\mu(h^{-1}(\partial \mathcal{R})) = 0$. Como $\partial \mathcal{R} = \partial^s \mathcal{R} \cup \partial^u \mathcal{R}$ entonces

$$h^{-1}(\partial \mathcal{R}) = h^{-1}(\partial^s \mathcal{R}) \cup h^{-1}(\partial^u \mathcal{R}) \quad (3.22)$$

Afirmamos que $\mu(h^{-1}(\partial^s \mathcal{R})) = 0$ y $\mu(h^{-1}(\partial^u \mathcal{R})) = 0$. En efecto, desde μ es invariante por σ por el item 1) tenemos

$$\mu(h^{-1}(\partial^s \mathcal{R})) = \mu(\sigma \circ h^{-1}(\partial^s \mathcal{R})) = \mu(h^{-1} \circ f_A(\partial^s \mathcal{R})). \quad (3.23)$$

Por otro lado, por la proposición 3.1.6 y nuevamente por el item 1) se tiene

$$\sigma(h^{-1}(f_A(\partial^s \mathcal{R}))) = h^{-1}f_A(f_A(\partial^s \mathcal{R})) \subset h^{-1}f_A(\partial^s \mathcal{R}), \quad (3.24)$$

además $h \circ \sigma = f_A \circ h$ entonces $\sigma^{-1} \circ h^{-1} = h^{-1} \circ f_A^{-1}$ entonces

$$\sigma^{-1}(h^{-1}(f_A(\partial^s \mathcal{R}))) = h^{-1}(\partial^s \mathcal{R}) \subset h^{-1}(f_A(\partial^s \mathcal{R})),$$

entonces

$$h^{-1}(f_A(\partial^s \mathcal{R})) \subset \sigma(h^{-1}(f_A(\partial^s \mathcal{R}))) \quad (3.25)$$

De (3.24) y (3.25) se tiene que $\sigma^{-1}(h^{-1}f_A(\partial^s \mathcal{R})) = h^{-1}f_A(\partial^s \mathcal{R})$, luego como μ es ergódica, se tiene que

$$\mu(h^{-1}f_A(\partial^s \mathcal{R})) = 0 \quad \text{ó} \quad \mu(h^{-1}f_A(\partial^s \mathcal{R})) = 1.$$

Supongamos que $\mu(h^{-1}f_A(\partial^s \mathcal{R})) = 1$, de aqui se tiene que

$$\mu(\Sigma_{\mathbf{T}} \setminus h^{-1}(f_A(\partial^s \mathcal{R}))) = 0 \quad (3.26)$$

Por otro lado, como $f_A(\partial^s \mathcal{R})$ es cerrado entonces $h^{-1}f_A(\partial^s \mathcal{R})$ es cerrado, se sigue que $\Sigma_{\mathbf{T}} \setminus h^{-1}(f_A(\partial^s \mathcal{R}))$ es abierto. Sabemos, por hipótesis, que μ es positiva sobre abiertos entonces

$$\mu(\Sigma_{\mathbf{T}} \setminus h^{-1}(f_A(\partial^s \mathcal{R}))) > 0 \quad (3.27)$$

de (3.26) y (3.27) tenemos una contradicción, entonces $\mu(h^{-1}f_A(\partial^s \mathcal{R})) = 0$. Con esto, de la igualdad (3.23) obtenemos que $\mu(h^{-1}(\partial^s \mathcal{R})) = 0$. Análogamente se prueba $\mu(h^{-1}(\partial^u \mathcal{R})) = 0$. Aplicando μ a (3.22) y reemplazando lo encontrado tenemos

$$\mu(h^{-1}(\partial \mathcal{R})) \leq \mu(h^{-1}(\partial^s \mathcal{R})) + \mu(h^{-1}(\partial^u \mathcal{R})) = 0,$$

entonces $\mu(h^{-1}(\partial\mathcal{R})) = 0$. Con esto, notemos que el lado derecho de la desigualdad en (3.21) es igual a cero desde que cada sumando es igual a cero. Concluyendo así que

$$\mu\left(h^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(\partial\mathcal{R})\right)\right) = 0$$

4. Sean $W, V \subset \Sigma_{\mathbf{T}}$ abiertos no vacíos, entonces tomando $w \in W$ y $v \in V$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que el cilindro

$$W_1 = [-N : w_{-N}, \dots, w_0, \dots, w_N] \subset W$$

y el cilindro

$$V_1 = [-N : v_{-N}, \dots, v_0, \dots, v_N] \subset V.$$

Sean $W_2 = \bigcap_{j=-N}^N f_A^{-j}(\text{int}R_{w_j})$ y $V_2 = \bigcap_{j=-N}^N f_A^{-j}(\text{int}R_{v_j})$, los cuales son conjuntos abiertos en \mathbb{T}^2 . Desde que f_A es homeomorfismo se tiene, $f_A^{-j}(\text{int}R_{\alpha_j}) = \text{int}f_A^{-j}(R_{\alpha_j})$ para todo $|j| \leq N$. Entonces

$$W_2 = \bigcap_{j=-N}^N f_A^{-j}(\text{int}R_{w_j}) = \bigcap_{j=-N}^N \text{int}f_A^{-j}(R_{w_j}) = \text{int} \bigcap_{j=-N}^N f_A^{-j}(R_{w_j}) = \text{int}K_N(w). \quad (3.28)$$

$$V_2 = \bigcap_{j=-N}^N f_A^{-j}(\text{int}R_{v_j}) = \bigcap_{j=-N}^N \text{int}f_A^{-j}(R_{v_j}) = \text{int} \bigcap_{j=-N}^N f_A^{-j}(R_{v_j}) = \text{int}K_N(v). \quad (3.29)$$

Ahora, probemos que $\text{int}K_N(w) \neq \emptyset$. De lo contrario se tendría que $K_N(w) = \partial K_N(w)$, entonces $\text{int}K_N(w) = \text{int}\partial K_N(w) = \emptyset$, teniendo así $K_N(w) = \overline{\text{int}K_N(w)} = \emptyset$, lo cual es una contradicción pues $K_N(w) \neq \emptyset$. Análogamente se prueba que $K_N(v) \neq \emptyset$. De esto y por (3.28) y (3.29) tenemos que $W_2 \neq \emptyset$ y $V_2 \neq \emptyset$.

Ahora, afirmamos que se cumple

$$h^{-1}(W_2) \subset W_1 \text{ y } h^{-1}(V_2) \subset V_1 \quad (3.30)$$

En efecto, sea $\alpha \in h^{-1}(W_2)$ entonces $x = h(\alpha) \in W_2$ entonces $f_A^j(x) \in R_{\alpha_j}$ y $f_A^j(x) \in \text{int}R_{w_j}$ para todo $|j| \leq N$. De esto tenemos que $R_{\alpha_j} \cap R_{w_j} \neq \emptyset$ para todo $|j| \leq N$, como \mathcal{R} es partición de Markov entonces $\alpha_j = w_j$ para todo $|j| \leq N$. De esto se tiene que $\alpha \in W_1$, y así hemos probado que $h^{-1}(W_2) \subset W_1$. Análogamente se prueba que $h^{-1}(V_2) \subset V_1$.

Por otro lado, como f_A es topológicamente mixing existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_A^m(W_2) \cap V_2 \neq \emptyset \text{ para todo } m \geq m_0 \quad (3.31)$$

Considerando (3.30), (3.31) y la inyectividad de h^{-1} se sigue que, para todo $m \geq m_0$

$$\sigma^m(W) \cap V \supset \sigma^m h^{-1}(W_2) \cap h^{-1}(V_2) = h^{-1} f_A^m(W_2) \cap h^{-1}(V_2) = h^{-1}(f_A^m(W_2) \cap V_2) \neq \emptyset.$$

De donde se concluye que σ es topológicamente mixing.

□

Acabamos de construir la aplicación de codificación la cual nos permitirá analizar las propiedades de nuestro automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 con mayor facilidad. Esto debido a que dichas propiedades se reducen a estudiar propiedades de sucesiones; las cuales, generalmente, son más sencillas de abordar que su correspondiente traducción al espacio \mathbb{T}^2 .

Es por esto, que vamos a dedicar lo que queda de la presente sección al estudio del subshift de tipo finito σ . Más precisamente, se probará que una condición necesaria y suficiente para que σ sea topológicamente mixing es que la matriz estocástica sea aperiódica.

3.4. Inducción de una medida de Markov

Mostramos en esta sección que cualquier partición de Markov de un automorfismo hiperbólico de \mathbb{T}^2 permite definir una medida de Markov.

Sea $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un automorfismo hiperbólico de \mathbb{T}^2 . Consideramos una partición de Markov $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_k\}$ de \mathbb{T}^2 con respecto a f_A y el subshift de tipo finito $\sigma : \Sigma_{\mathbf{T}} \rightarrow \Sigma_{\mathbf{T}}$ con matriz de transición \mathbf{T} de orden $k \times k$. Y consideramos la aplicación de codificación $h : \Sigma_{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbb{T}^2$ dada por $h(w) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j})$.

Denotemos por $\Sigma_k = \{1, \dots, k\}^{\mathbb{Z}}$ y definamos ν en Σ_k por

$$\nu(h^{-1}(C)) = \mu(C) \tag{3.32}$$

para cada conjunto medible $C \subset \mathbb{T}^2$, donde μ es la medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 .

Proposición 3.4.1. ν es una medida en Σ_k .

Demostración. Dado $E \in \mathcal{A}$ y una colección numerable $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ de subconjuntos disjuntos dos a dos en \mathcal{A} . Como h es biyección entonces existen $C \in \mathbb{T}^2$ y una colección numerable $(C_k)_{k=1}^{\infty}$ de subconjuntos disjuntos dos a dos en \mathcal{B} tal que $h^{-1}(C) = E$ y $h^{-1}(C_k) = E_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces

No negatividad: $\nu(E) = \nu(h^{-1}(C)) = \mu(C) \geq 0$

Conjunto vacío tiene medida nula: $\nu(\emptyset) = \nu(h^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$

Aditividad contable:

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} h^{-1}(C_k)\right) = \nu\left(h^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k)$$

entonces

$$\nu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(h^{-1}(E_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E_k)$$

De donde se concluye que ν es una medida en Σ_k □

Proposición 3.4.2. La medida ν es una medida de Markov σ -invariante en Σ_k

Demostración. Comenzamos mostrando que ν es σ -invariante, primero notemos que desde que $f_A \circ h = h \circ \sigma$ tenemos

$$\sigma^{-1}(h^{-1}C) = h^{-1}(f_A^{-1}C)$$

para cualquier conjunto medible $C \subset \mathbb{T}^2$, y así,

$$\begin{aligned} \nu(\sigma^{-1}(h^{-1}C)) &= \nu(h^{-1}(f_A^{-1}C)) \\ &= \mu(f_A^{-1}C) \\ &= \mu(C) = \nu(h^{-1}C), \end{aligned}$$

usando la f_A -invarianza de la medida μ .

Ahora demostramos que ν es una medida de Markov. Para esto, probaremos que

$$h^{-1} \left(\bigcap_{k=-N}^N f_A^{-k}(R_{i_k}) \right) = [-N : i_{-N}, \dots, i_N] \quad (3.33)$$

En efecto, sea $(w_j)_{j \in \mathbb{N}} = w \in h^{-1} \left(\bigcap_{k=-N}^N f_A^{-k}(R_{i_k}) \right)$ entonces

$$h(w) \in \bigcap_{k=-N}^N f_A^{-k}(R_{i_k})$$

Por definición de h esto significa

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j}) \subset \bigcap_{k=-N}^N f_A^{-k}(R_{i_k})$$

Observemos que $f_A^{-k}(R_{w_k}) \cap f_A^{-k}(R_{i_k}) \neq \emptyset$ y de aquí obtenemos que $R_{w_k} \cap R_{i_k} \neq \emptyset$ para todo $-N \leq k \leq N$. Como \mathcal{R} es partición de Markov se debe cumplir $R_{w_k} = R_{j_k}$ entonces se tiene $w_k = i_k$ para todo $-N \leq k \leq N$. De aquí concluimos que $w \in [-N : i_{-N}, \dots, i_N]$.

Recíprocamente, sea $(w_j)_{j \in \mathbb{Z}} = w \in [-N : i_{-N}, \dots, i_N]$ entonces $w_k = i_k$ para todo $|k| \leq N$, luego $h(w) = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(R_{w_j}) \subset \bigcap_{k=-N}^N f_A^{-k}(R_{i_k})$. Por lo tanto $w \in h^{-1} \left(\bigcap_{k=-N}^N f_A^{-k}(R_{i_k}) \right)$.

Por otro lado, aplicando ν a (3.33) tenemos

$$\nu([-N : i_{-N}, \dots, i_N]) = \nu \left(h^{-1} \left(\bigcap_{k=-N}^N f_A^{-k}(R_{i_k}) \right) \right),$$

recordando la definición (3.32) de medida de Markov podemos escribir

$$\begin{aligned} \nu([-N : i_{-N}, \dots, i_N]) &= \mu \left(\bigcap_{k=-N}^N f_A^{-k}(R_{i_k}) \right) \\ &= \mu \left(\bigcap_{k=0}^{2N} f_A^{-(k-N)}(R_{i_{k-N}}) \right) \\ &= \mu \left(\bigcap_{k=0}^{2N} f_A^N f_A^{-k}(R_{i_{k-N}}) \right) \\ &= \mu \left(f_A^N \bigcap_{k=0}^{2N} f_A^{-k}(R_{i_{k-N}}) \right) \end{aligned}$$

usando la f_A -invarianza de la medida μ se obtiene

$$\nu([-N : i_{-N}, \dots, i_N]) = \mu \left(\bigcap_{k=0}^{2N} f_A^{-k}(R_{i_{k-N}}) \right). \quad (3.34)$$

Denotemos por

$$p_i = \mu(R_i) \quad \text{y} \quad p_{ij} = \frac{\mu(R_i \cap f_A^{-1}R_j)}{\mu(R_i)} \quad (3.35)$$

para todo $1 \leq i, j \leq k$. Observemos que, $p_i > 0$ para cada $1 \leq i \leq k$, desde que cada rectángulo de la partición de Markov tiene medida no nula. Por otro lado, recordemos

$$R_i = \text{int}R_i \cup \partial R_i \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq k \quad \text{y} \quad \mathbb{T}^2 = \bigcup_{i=1}^k R_i = \bigcup_{i=1}^k \text{int}R_i \cup \bigcup_{i=1}^k \partial R_i$$

como $\text{int}R_i \cap \text{int}R_j \neq \emptyset$ para todo $i \neq j$, $\mu(\partial R_i) = 0$ para todo $1 \leq i \leq k$ y $\mu(\mathbb{T}^2) = 1$ entonces

$$0 \leq \mu \left(\bigcup_{i=1}^k \partial R_i \right) \leq \sum_{i=1}^k \mu(\partial R_i) = 0 \quad (3.36)$$

$$\mu(R_i) = \mu(\text{int}R_i) \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq k \quad (3.37)$$

$$\sum_{i=1}^k \mu(R_i) = \sum_{i=1}^k \mu(\text{int}R_i) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^k \text{int}(R_i) \right) + \mu \left(\bigcup_{i=1}^k \partial R_i \right) = \mu(\mathbb{T}^2) = 1 \quad (3.38)$$

recordando la definición de los p_i de la línea anterior tenemos $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Además, se tiene

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^k p_i p_{ij} &= \sum_{i=1}^k \mu(R_i \cap f_A^{-1}(R_j)) = \sum_{i=1}^k \mu((\text{int}R_i \cap f_A^{-1}(R_j)) \cup (\partial R_i \cap f_A^{-1}(R_j))) \\
 &= \sum_{i=1}^k \mu(\text{int}R_i \cap f_A^{-1}(R_j)) + \mu(\partial R_i \cap f_A^{-1}(R_j)) = \sum_{i=1}^k \mu(\text{int}R_i \cap f_A^{-1}(R_j)) \\
 &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^k \text{int}R_i \cap f_A^{-1}(R_j)\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^k \text{int}R_i \cap f_A^{-1}(R_j)\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^k \partial R_i \cap f_A^{-1}(R_j)\right) \\
 &= \mu\left(\left(\bigcup_{i=1}^k \text{int}R_i \cup \bigcup_{i=1}^k \partial R_i\right) \cap f_A^{-1}(R_j)\right) = \mu(\mathbb{T}^2 \cap f_A^{-1}(R_j)) \\
 &= \mu(f_A^{-1}(R_j)) = \mu(R_j) = p_j
 \end{aligned}$$

de esta manera hemos probado que $\sum_{i=1}^k p_i p_{ij} = p_j$ para todo $1 \leq j \leq k$.

Por último, notemos que $0 \leq \mu(R_i \cap f_A^{-1}(\partial R_j)) \leq \mu(f_A^{-1}(\partial R_i)) = \mu(\partial R_i) = 0$ entonces

$$\mu(R_i \cap f_A^{-1}(\partial R_j)) = 0 \text{ para todo } 1 \leq j \leq k. \quad (3.39)$$

De aquí, se sigue que $\sum_{j=1}^k \mu(R_i \cap f_A^{-1}(\partial R_j)) = 0$. Usando (3.39) podemos deducir

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^k R_i \cap f_A^{-1}(\partial R_j)\right) \leq \sum_{j=1}^k \mu(R_i \cap f_A^{-1}(\partial R_j)) = 0,$$

entonces $\mu\left(R_i \cap f_A^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^k \partial R_j\right)\right) = 0$. Hacemos uso de esta igualdad en los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^k p_{ij} &= \sum_{j=1}^k \frac{\mu(R_i \cap f_A^{-1}(R_j))}{\mu(R_i)} = \frac{1}{\mu(R_i)} \sum_{j=1}^k \mu(R_i \cap f_A^{-1}(\text{int}R_j \cup \partial R_j)) \\
 &= \frac{1}{\mu(R_i)} \sum_{j=1}^k \mu((R_i \cap f_A^{-1}(\text{int}R_j)) \cup (R_i \cap f_A^{-1}(\partial R_j))) \\
 &= \frac{1}{\mu(R_i)} \sum_{j=1}^k \mu(R_i \cap f_A^{-1}(\text{int}R_j)) + \mu(R_i \cap f_A^{-1}(\partial R_j)) \\
 &= \frac{1}{\mu(R_i)} \sum_{j=1}^k \mu(R_i \cap f_A^{-1}(\text{int}R_j)).
 \end{aligned}$$

Como \mathcal{R} es partición de Markov se cumple que $\text{int}R_\alpha \cap \text{int}R_\beta \neq \emptyset$ para todo $\alpha \neq \beta$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k p_{ij} &= \frac{1}{\mu(R_i)} \mu \left(\bigcup_{j=1}^k R_i \cap f_A^{-1}(\text{int}R_j) \right) \\ &= \frac{1}{\mu(R_i)} \mu \left(R_i \cap f_A^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^k \text{int}R_j \right) \right) + \frac{1}{\mu(R_i)} \mu \left(R_i \cap f_A^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^k \partial R_j \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mu(R_i)} \mu \left(R_i \cap f_A^{-1} \left(\bigcup_{j=1}^k \text{int}R_j \cup \bigcup_{j=1}^k \partial R_j \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mu(R_i)} \mu(R_i \cap f_A^{-1}(\mathbb{T}^2)) = \frac{1}{\mu(R_i)} \mu(R_i \cap \mathbb{T}^2) = \frac{1}{\mu(R_i)} \mu(R_i) = 1 \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Sea P la matriz de entradas p_{ij} con $1 \leq i, j \leq k$, desde que $p_{ij} > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq k$ se sigue que P es una matriz no negativa de orden $k \times k$. La matriz P es estocástica desde que $\sum_{j=1}^k p_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i \leq k$, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ y $\sum_{i=1}^k p_i p_{ij} = p_j$ para todo $1 \leq j \leq k$. Entonces (P, p) es un par estocástico, siendo $p = (p_1, \dots, p_k)$ el vector de probabilidad asociado a P . Ahora mostraremos que la medida de Markov asociada a este par estocástico es, en efecto, ν . Para esto, de (3.34) se tiene

$$\begin{aligned} \nu([-1 : i_{-1}, i_0, i_1]) &= \mu(R_{i_{-1}} \cap f_A^{-1}(R_{i_0}) \cap f_A^{-2}(R_{i_1})) \\ &= \mu(R_{i_{-1}}) \cdot \frac{\mu(R_{i_{-1}} \cap f_A^{-1}(R_{i_0}))}{\mu(R_{i_{-1}})} \cdot \frac{\mu(R_{i_{-1}} \cap f_A^{-1}(R_{i_0}) \cap f_A^{-2}(R_{i_1}))}{\mu(R_{i_{-1}} \cap f_A^{-1}(R_{i_0}))} \\ &= p_{i_{-1}} p_{i_{-1}i_0} \cdot \frac{\mu(R_{i_{-1}} \cap f_A^{-1}(R_{i_0}) \cap f_A^{-2}(R_{i_1}))}{\mu(R_{i_{-1}} \cap f_A^{-1}(R_{i_0}))}. \end{aligned}$$

También tenemos

$$p_{i_0 i_1} = \frac{\mu(R_{i_0} \cap f_A^{-1}(R_{i_1}))}{\mu(R_{i_0})} = \frac{\mu(f_A^{-1}(R_{i_0}) \cap f_A^{-2}(R_{i_1}))}{\mu(f_A^{-1}(R_{i_0}))}.$$

Por la propiedad de Markov de la partición de Markov \mathcal{R} , si

$$\text{int}R_{i_{-1}} \cap \text{int}f_A^{-1}(R_{i_0}) \cap f_A^{-2}(R_{i_1}) \neq \emptyset,$$

entonces el rectángulo $R_{i_{-1}}$ interseca $f_A^{-1}(R_{i_0})$ y $f_A^{-2}(R_{i_1})$ a lo largo de toda la dirección inestable. Por lo tanto,

$$p_{i_0 i_1} = \frac{\mu(R_{i_{-1}} \cap f_A^{-1}(R_{i_0}) \cap f_A^{-2}(R_{i_1}))}{\mu(R_{i_{-1}} \cap f_A^{-1}(R_{i_0}))} \quad \text{y} \quad \nu([-1 : i_{-1}, i_0, i_1]) = p_{-1} p_{i_{-1}i_0} p_{i_0 i_1}.$$

De forma análoga podemos probar que

$$\nu([-N : i_{-N}, \dots, i_N]) = p_{i_{-N}} p_{i_{-N}i_{-N+1}} \cdots p_{i_{N-1}i_N}.$$

Con lo cual queda demostrado que ν es medida de Markov en Σ_k . □

Capítulo 4

Medidas de máxima entropía para difeomorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2

En este capítulo presentamos el segundo resultado importante de la tesis, más específicamente, mostraremos que todo difeomorfismo hiperbólico (o de Anosov) en \mathbb{T}^2 admite una única medida de máxima entropía, estas medidas son de utilidad al momento de cuantificar el caos de un sistema dinámico. Este capítulo está basado en las bibliografías (Bowen, 2008), (Barreira, 2012) y (Bowen, 1970). Una de las partes esenciales del presente capítulo es la sección 4.2, en donde usamos las particiones de Markov de los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 admiten una única medida de máxima entropía, y verificamos que dicha medida es la medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 .

4.1. Medidas de máxima entropía

Definición 4.1.1. Dado $f : M \rightarrow M$ y μ medida invariante por f . Decimos que μ es una *medida de máxima entropía para f* si

$$h_\mu(f) = \sup\{h_\nu(f) : \nu \in \mathcal{M}_f(M)\}$$

donde $\mathcal{M}_f(M)$ es el espacio de las medidas de probabilidad f -invariantes.

Observación 4.1.1. De la definición 4.1.1 y el principio variacional tenemos que si μ es medida de máxima entropía de una transformación $f : M \rightarrow M$ continua definida en el espacio métrico compacto M , entonces

$$h_{top}(f) = h_\mu(f).$$

Luego, cabe preguntarse de manera natural:

- 1 ¿Todo sistema dinámico continuo $f : M \rightarrow M$ definido en un espacio métrico compacto admite una medida de máxima entropía?
- 2 ¿Si dicha medida existe, es única?

Con respecto a la existencia de dichas medidas, por el trabajo (Misiurewicz, 1973), podemos afirmar que existen sistemas dinámicos de clase C^r definidas en variedades diferenciables compactas, que no admiten medidas de máxima entropía. Por otro lado, por el trabajo (Newhouse, 1989) sabemos que todo difeomorfismo C^∞ admite medidas de máxima entropía. Un trabajo importante en esta área fue desarrollado por (Bowen, 1974) que muestra que un homeomorfismo con la propiedad de especificación admite una única medida de máxima entropía. Por todo lo antes expuesto, tenemos que el estudio de la existencia y unicidad de medidas de máxima entropía no depende únicamente de la regularidad del sistema dinámico, si no que, depende más de las propiedades dinámicas del sistema, es por ello que en esta tesis estudiamos la existencia y unicidad de una medida de máxima entropía para los difeomorfismos de Anosov en \mathbb{T}^2 . Para dicho propósito primero probamos la existencia y unicidad de una medida de máxima entropía para los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 y encontramos cual es dicha medida.

4.2. Medida de máxima entropía para automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2

Teorema 4.2.1 (R.Bowen). Si $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ es un automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 entonces existe una única medida de máxima entropía para f_A .

Demostración. De la proposición 3.2.1 sabemos que \mathbb{T}^2 posee una partición de Markov con respecto a f_A , digamos $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_m\}$. Denotemos por $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a la matriz de transición de la partición de Markov \mathcal{R} . Por lo visto en la proposición 3.3.3 sabemos que existe una aplicación de codificación $h : \Sigma_{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbb{T}^2$ tal que

$$f_A \circ h = h \circ \sigma$$

donde $\sigma : \Sigma_{\mathbf{T}} \rightarrow \Sigma_{\mathbf{T}}$ es el shift de tipo finito. De la proposición 3.3.3 también se sabe que σ es topológicamente mixing, en virtud del teorema 1.5.2 se tiene que \mathbf{T} es aperiódica (i.e, existe

$n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{T}_{ij}^n > 0$ para todo $1 \leq i, j \leq m$ donde $\mathbf{T}^n = (\mathbf{T}_{ij}^n)$. Luego, por el teorema de Perron-Frobenius existe $\lambda > 0$ autovalor dominante de \mathbf{T} , así por el teorema de Parry, existe $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_A)$ una única medida de Markov que es ergódica y positiva en abiertos de $\Sigma_{\mathbf{T}}$ tal que

$$h_\nu(\sigma) = \log \lambda, \quad (4.1)$$

y para todo $\eta \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_A)$ se tiene

$$h_\eta(\sigma) \leq \log \lambda. \quad (4.2)$$

De (4.1) y (4.2) y la definición de entropía topológica se sigue

$$h_{top}(\sigma) = \log \lambda, \quad (4.3)$$

obteniendo así

$$h_\nu(\sigma) = \log \lambda = h_{top}(\sigma). \quad (4.4)$$

De los items 1) y 3) de la proposición 3.3.3 tenemos que h es biyectiva en un conjunto de medida total, a saber, $h^{-1}(\mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} f_A^{-j}(\partial \mathcal{R}))$. Denotemos por $\mu = \nu \circ h^{-1}$, como ν es invariante por σ entonces μ es invariante por f_A , por lo tanto los sistemas (σ, ν) y (f_A, μ) son ergódicamente equivalentes y se sigue de la proposición 1.2.1 que

$$h_\nu(\sigma) = h_\mu(f_A). \quad (4.5)$$

Por otro lado, desde que σ y f_A son semiconjugados se sigue de la proposición 1.3.1 que

$$h_{top}(\sigma) \geq h_{top}(f_A) \quad (4.6)$$

por el Principio Variacional (teorema 1.3.1), podemos notar que se cumple

$$h_{top}(f_A) \geq h_\mu(f_A) \quad (4.7)$$

de (4.4), (4.5), (4.6) y (4.7) tenemos

$$\log \lambda = h_{top}(\sigma) \geq h_{top}(f_A) \geq h_\mu(f_A) = h_\nu(\sigma) = \log \lambda$$

de donde se concluye que

$$h_{top}(f_A) = h_\mu(f_A) = \log \lambda.$$

Ahora probamos la unicidad de la medida, sea $\mu_1 \in \mathcal{M}_f(\mathbb{T}^2)$ tal que $h_{\mu_1}(f) \geq h_\mu(f_A)$. Entonces existe $\nu_1 \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma_A)$ tal que $\nu_1(h^{-1}(C)) = \mu_1(C)$ para todo conjunto Borel $C \in \mathcal{B}$, siendo \mathcal{B} el σ -álgebra de borel en \mathbb{T}^2 . Luego, podemos ver que los sistemas (f_A, μ_1) y (σ, ν_1) son ergódicamente equivalentes y podemos hacer uso de la proposición 1.2.1 obteniendo

$$h_{\nu_1}(\sigma) = h_{\mu_1}(f_A). \quad (4.8)$$

De (4.5) y (4.8) tenemos

$$h_{\nu_1}(\sigma) = h_{\mu_1}(f_A) \geq h_{\mu}(f_A) = h_{\nu}(\sigma), \quad (4.9)$$

recordando ν es la única medida de máxima entropía para σ se sigue que $\nu_1 = \nu$ y por lo tanto $\mu_1 = \mu$. \square

El teorema anterior nos asegura la existencia y unicidad de la medida de máxima entropía para automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 , pero no nos construye explícitamente la medida que maximiza la entropía, en las siguientes proposiciones nos proponemos encontrar dicha medida. Comenzamos calculando la entropía métrica de un automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 .

Proposición 4.2.1. Sea $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 inducido por la matriz A . Sea μ la medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 . Entonces,

$$h_{\mu}(f_A) = \log |\lambda_u|$$

donde λ_u es el autovalor de A tal que $|\lambda_u| > 1$.

Demostración. Sean $v_s, v_u \in \mathbb{R}^2$ los autovectores correspondientes, respectivamente, a los autovalores λ_s, λ_u de A tal que $\|v_s\| > 1$.

Dado $[x] \in \mathbb{T}^2$, todo punto $[y] \in \mathbb{T}^2$ en una vecindad de $[x]$ puede ser escrita en la forma

$$[y] = [x] + t_1[v_s] + t_2[v_u] \quad (4.10)$$

con t_1, t_2 suficientemente cercanos a cero. Dado $\epsilon > 0$, denotemos por $D([x], \epsilon)$ el conjunto de puntos $[y]$ de esta forma con $|t_1| < \epsilon$ y $|t_2| < \epsilon$. Además, para cada $n \geq 1$, consideremos el conjunto

$$D([x], n, \epsilon) = \{[y] \in \mathbb{T}^2 : f_A^j[y] \in D(f_A^j[x], \epsilon) \text{ para todo } j = 0, \dots, n-1\}.$$

Observemos que

$$f_A^j[y] = [A^j y] = [A^j x + t_1 A^j v_s + t_2 A^j v_u] = [A^j x + t_1 \lambda_s^j v_s + t_2 \lambda_u^j v_u]$$

luego, $f_A^j[y] = f_A^j[x] + t_1 \lambda_s^j [v_s] + t_2 \lambda_u^j [v_u]$. Por lo tanto,

$$D([x], n, \epsilon) = \{[x] + t_1[v_s] + t_2[v_u] : |\lambda_u^n t_2| < \epsilon \text{ y } |t_1| < \epsilon\}.$$

Recordando que μ es la medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 se cumple

$$\mu(D([x], n, \epsilon)) = m(\pi^{-1}(D([x], n, \epsilon))). \quad (4.11)$$

Por otro lado, consideremos $X = (-\epsilon, \epsilon) \times (-\frac{\epsilon}{|\lambda_u|^n}, \frac{\epsilon}{|\lambda_u|^n})$ y $G : X \rightarrow G(X) \subset \mathbb{R}^2$ dada por

$$G(p, q) = pv_s + qv_u = (pv_s^1 + qv_u^1, pv_s^2 + qv_u^2) \quad (4.12)$$

De la definición de G podemos ver que

$$\pi^{-1}(D([x], n, \epsilon)) = G(X) + x. \quad (4.13)$$

Se sigue de (4.11) y (4.13) la siguiente identidad

$$\mu(D([x], n, \epsilon)) = m(G(X) + x).$$

Como la medida de Lebesgue m en \mathbb{R}^2 es invariante por traslaciones se sigue

$$\mu(D([x], n, \epsilon)) = m(G(X)). \quad (4.14)$$

Desde que G es una aplicación lineal, podemos representarla por una matriz, en este caso dicha matriz viene dada por

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} v_s^1 & v_u^1 \\ v_s^2 & v_u^2 \end{pmatrix}.$$

De donde se tiene que G es diferenciable, desde que $D_{(p,q)}G = \mathbf{G}$. Por otro lado, notemos que $\det(\mathbf{G}) = v_s^1 v_u^2 - v_s^2 v_u^1$. Podemos ver que $\det(\mathbf{G}) \neq 0$, pues de lo contrario v_u sería múltiplo escalar de v_s lo cual implicaría que los autovalores tengan módulo igual a 1 contradiciendo lo visto en la proposición 2.2.1. De esto se sigue que G es invertible, sea G^{-1} la inversa de G . La matriz asociada a G^{-1} es \mathbf{G}^{-1} , de donde se sigue que $D_{(p,q)}G^{-1} = \mathbf{G}^{-1}$; es decir, G^{-1} es diferenciable. De esto se tiene que G es un difeomorfismo. Además G es de clase C^1 desde que G y G^{-1} son lineales.

Denotando por \mathcal{L}^2 la clase de conjuntos Lebesgue medibles en \mathbb{R}^2 , notemos que $X \in \mathcal{L}^2$ desde que X es un rectángulo en \mathbb{R}^2 . De todo esto, recordando resultados de teoría de la medida, tenemos que $G(X) \in \mathcal{L}^2$ y

$$\begin{aligned} m(G(X)) &= \int_X |\det D_{(p,q)}G| d(p, q) = \int_X |\det \mathbf{G}| d(p, q) \\ &= \int_X |v_s^1 v_u^2 - v_s^2 v_u^1| d(p, q) \\ &= |v_s^1 v_u^2 - v_s^2 v_u^1| m(X) \\ &= |v_s^1 v_u^2 - v_s^2 v_u^1| \frac{4\epsilon^2}{|\lambda_u|^n} \end{aligned}$$

De esta igualdad y (4.14) se sigue

$$\mu(D([x], n, \epsilon)) = |v_s^1 v_u^2 - v_s^2 v_u^1| \frac{4\epsilon^2}{|\lambda_u|^n}.$$

Sea $M = 4|v_s^1 v_u^2 - v_s^2 v_u^1|$, consideremos $C_1 = \max\{\frac{1}{M}, M\}$. Notemos que $C_1 > 1$ y que C_1 depende de A desde que v_s, v_u son autovectores de A . Como $[x] \in \mathbb{T}^2$, $n \geq 1$ y $\epsilon > 0$ fueron tomados de manera arbitraria entonces

$$C_1^{-1} \frac{\epsilon^2}{|\lambda_u|^n} \leq \mu(D([x], n, \epsilon)) \leq C_1 \frac{\epsilon^2}{|\lambda_u|^n} \quad (4.15)$$

para todo $[x] \in \mathbb{T}^2$, $n \geq 1$ y $\epsilon > 0$. Por otro lado, sean $N = \|v_s + v_u\|$, $L = \|v_s\| + \|v_u\|$ $C_2 = \max\{\frac{1}{N}, L\}$. Dado $[y] \in B([x], C_2^{-1}\epsilon)$, entonces $d([x], [y]) < C_2^{-1}\epsilon$; por la proposición 2.1.1 se tiene

$$\inf\{\|x' - y'\| : x' \sim x, y' \sim y\} < C_2^{-1}\epsilon.$$

Recordando la definición de la relación de equivalencia \sim y que para t_1 y t_2 cercanos a cero se puede expresar $[y]$ como en (4.10). Se sigue que

$$\inf\{\|x + t_1 v_s + t_2 v_u + k_1 - x - k_2\| : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2\} < C_2^{-1}\epsilon,$$

el cual a su vez se puede escribir

$$\inf\{\|t_1 v_s + t_2 v_u + k\| : k \in \mathbb{Z}^2\} < C_2^{-1}\epsilon.$$

Como t_1 y t_2 son cercanos a cero entonces el ínfimo se alcanza cuando $k = (0, 0)$, luego

$$\|t_1 v_s + t_2 v_u\| < C_2^{-1}\epsilon.$$

Como $C_2 > \frac{1}{N}$ entonces $C_2^{-1} < N$, se sigue

$$\|t_1 v_s + t_2 v_u\| < \epsilon \|v_s + v_u\|.$$

De donde se tiene $|t_1| < \epsilon$ y $|t_2| < \epsilon$ pues en caso contrario v_s sería un múltiplo escalar de v_u .

De aquí se tiene $[y] = [x] + t_1[v_s] + t_2[v_u]$ con $|t_1| < \epsilon$ y $|t_2| < \epsilon$, entonces $[y] \in D([x], \epsilon)$. Luego,

$$B([x], C_2^{-1}\epsilon) \subset D([x], \epsilon). \quad (4.16)$$

Ahora sea $[y] \in D([x], \epsilon)$ entonces $[y] = [x] + t_1[v_s] + t_2[v_u]$ con $|t_1| < \epsilon$ y $|t_2| < \epsilon$. Luego

$$|t_1| \|v_s\| < \epsilon \|v_s\| \quad \text{y} \quad |t_2| \|v_u\| < \epsilon \|v_u\|,$$

sumando las desigualdades, aplicando desigualdad triangular y recordando que $L < C_2$

$$\|t_1 v_s + t_2 v_u\| < \epsilon (\|v_s\| + \|v_u\|) < C_2 \epsilon.$$

Notando que $\|t_1v_s + t_2v_u\| = \inf\{\|t_1v_s + t_2v_u + k\| : k \in \mathbb{Z}^2\}$ para t_1 y t_2 cercanos a cero, se sigue de la desigualdad anterior

$$d([x], [y]) < C_2\epsilon.$$

De esto se implica que $[y] \in B([x], C_2\epsilon)$, más aún

$$D([x], \epsilon) \subset B([x], C_2\epsilon). \quad (4.17)$$

Juntamos lo hallado en (4.16) y (4.17) de la siguiente manera: Existe una constante $C_2 > 1$ que depende solo de A , tal que

$$B([x], C_2^{-1}\epsilon) \subset D([x], \epsilon) \subset B([x], C_2\epsilon)$$

para todo $[x] \in \mathbb{T}^2$ y $\epsilon > 0$. Observemos que haciendo algunos cambios, siguiendo la misma idea, es posible probar

$$B([x], n, C_2^{-1}\epsilon) \subset D([x], n, \epsilon) \subset B([x], n, C_2\epsilon) \quad (4.18)$$

para todo $n \geq 1$ (Dichos cambios son: $|t_2| < \frac{\epsilon}{|\lambda_u|^n}$, $N = \left\|v_s + \frac{1}{|\lambda_u|^n}v_u\right\|$ y $L = \|v_s\| + \frac{1}{|\lambda_u|^n}\|v_u\|$). Dados $[x] \in \mathbb{T}^2$, $n \geq 1$ y $\epsilon > 0$, consideremos $C = C_1C_2^2$. Aplicando la relación (4.15) para $C_2^{-1}\epsilon > 0$ se tiene

$$C_1^{-1} \frac{C_2^{-2}\epsilon^2}{|\lambda_u|^n} \leq \mu(D([x], n, C_2^{-1}\epsilon)),$$

luego

$$\frac{C^{-1}\epsilon^2}{|\lambda_u|^n} \leq \mu(D([x], n, C_2^{-1}\epsilon)). \quad (4.19)$$

Ahora usando la relación (4.18) para $C_2^{-1}\epsilon > 0$ se tiene

$$D([x], n, C_2^{-1}\epsilon) \subset B([x], n, \epsilon),$$

entonces

$$\mu(D([x], n, C_2^{-1}\epsilon)) \leq \mu(B([x], n, \epsilon)). \quad (4.20)$$

De (4.19) y (4.20) se sigue

$$\frac{C^{-1}\epsilon^2}{|\lambda_u|^n} \leq \mu(B([x], n, \epsilon)). \quad (4.21)$$

De forma análoga, para $C_2\epsilon > 0$ se encuentra

$$\mu(B([x], n, \epsilon)) \leq \frac{C\epsilon^2}{|\lambda_u|^n} \quad (4.22)$$

Usando las desigualdades (4.21) y (4.22) se sigue que

$$\frac{C^{-1}\epsilon^2}{|\lambda_u|^n} \leq \mu(B([x], n, \epsilon)) \leq \frac{C\epsilon^2}{|\lambda_u|^n}$$

para todo $[x] \in \mathbb{T}^2$ y $\epsilon > 0$. Aplicando logaritmo natural

$$\log\left(\frac{C^{-1}\epsilon^2}{|\lambda_u|^n}\right) \leq \log(\mu(B([x], n, \epsilon))) \leq \log\left(\frac{C\epsilon^2}{|\lambda_u|^n}\right),$$

aplicando propiedades de logaritmo se consigue

$$\log(C^{-1}\epsilon^2) + n \log |\lambda_u| \leq \log(\mu(B([x], n, \epsilon))) \leq \log(C\epsilon^2) + n \log |\lambda_u|.$$

Dividiendo entre n

$$\frac{\log(C^{-1}\epsilon^2)}{n} + \log |\lambda_u| \leq \frac{\log \mu(B([x], n, \epsilon))}{n} \leq \frac{\log(C\epsilon^2)}{n} + \log |\lambda_u|.$$

Aplicando límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\log |\lambda_u| \leq \lim_n \frac{\log \mu(B([x], n, \epsilon))}{n} \leq \log |\lambda_u|,$$

de donde se sigue

$$\lim_n \frac{1}{n} \log \mu(B([x], n, \epsilon)) = \log |\lambda_u|.$$

Notemos que $B([x], n, \epsilon)$ es una bola dinámica de $[x]$ de longitud n y radio ϵ . Entonces, por la definición 1.2.5 se sigue que

$$h_\mu^+(f_A, \epsilon, [x]) = h_\mu^-(f_A, \epsilon, [x]) = \log |\lambda_u|$$

para todo $[x] \in \mathbb{T}^2$ y $\epsilon > 0$. Denotando por $h_\mu(f_A, [x])$ el valor común de ambos límites.

Aplicando el teorema de Brin-Katok (teorema 1.2.1), se sigue

$$h_\mu(f_A) = \int_{\mathbb{T}^2} h_\mu(f_A, [x]) d\mu = \int_{\mathbb{T}^2} \log |\lambda_u| d\mu = \log |\lambda_u| \mu(\mathbb{T}^2) = \log |\lambda_u|.$$

□

Ahora, calculamos la entropía topológica de los automorfismos hiperbólicos de \mathbb{T}^2 .

Proposición 4.2.2. Sea $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 inducida por la matriz A entonces

$$h_{top}(f_A) = \log |\lambda_u|$$

donde λ_u es autovalor de A tal que $|\lambda_u| > 1$.

Demostración. Por el principio variacional, la entropía topológica es mayor o igual que la entropía del automorfismo con respecto a cualquier medida de probabilidad invariante. Así,

$$\log |\lambda_u| = h_\mu(f_A) \leq h_{top}(f_A) \quad (4.23)$$

Ahora, probamos que se cumple $h_{top}(f_A) \leq \log |\lambda_u|$. En efecto, de la proposición 2.2.1 sabemos que $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tiene dos autovalores distintos entonces A es diagonalizable. Luego, existe una base para \mathbb{R}^2 formada por los autovectores de A . Más precisamente, los autovectores v_u, v_s forman una base para \mathbb{R}^2 . Además, es posible elegir v_s y v_u de tal forma que sean vectores unitarios. Por otro lado, sea e_1, e_2 la base canónica de \mathbb{R}^2 y $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el isomorfismo lineal definido por

$$P(e_1) = v_u \text{ y } P(e_2) = v_s,$$

entonces la matriz asociada a este isomorfismo es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} v_u^1 & v_s^1 \\ v_u^2 & v_s^2 \end{pmatrix}.$$

Además

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \begin{pmatrix} v_s^2 & -v_s^1 \\ -v_u^2 & v_u^1 \end{pmatrix}.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, como $Av_s = \lambda_s v_s$ y $Av_u = \lambda_u v_u$ entonces

$$\begin{cases} av_u^1 + bv_u^2 = \lambda_u v_u^1 \\ cv_u^1 + dv_u^2 = \lambda_u v_u^2 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} av_s^1 + bv_s^2 = \lambda_s v_s^1 \\ cv_s^1 + dv_s^2 = \lambda_s v_s^2 \end{cases}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} &= \frac{1}{\det \mathbf{P}} \begin{pmatrix} v_s^2 & -v_s^1 \\ -v_u^2 & v_u^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_u^1 & v_s^1 \\ v_u^2 & v_s^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{P}} \begin{pmatrix} v_s^2 & -v_s^1 \\ -v_u^2 & v_u^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} av_u^1 + bv_u^2 & av_s^1 + bv_s^2 \\ cv_u^1 + dv_u^2 & cv_s^1 + dv_s^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{P}} \begin{pmatrix} v_s^2 & -v_s^1 \\ -v_u^2 & v_u^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_u v_u^1 & \lambda_s v_s^1 \\ \lambda_u v_u^2 & \lambda_s v_s^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{P}} \begin{pmatrix} \lambda_u v_u^1 v_s^2 - \lambda_u v_u^2 v_s^1 & 0 \\ 0 & \lambda_s v_s^2 v_u^1 - \lambda_s v_s^1 v_u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

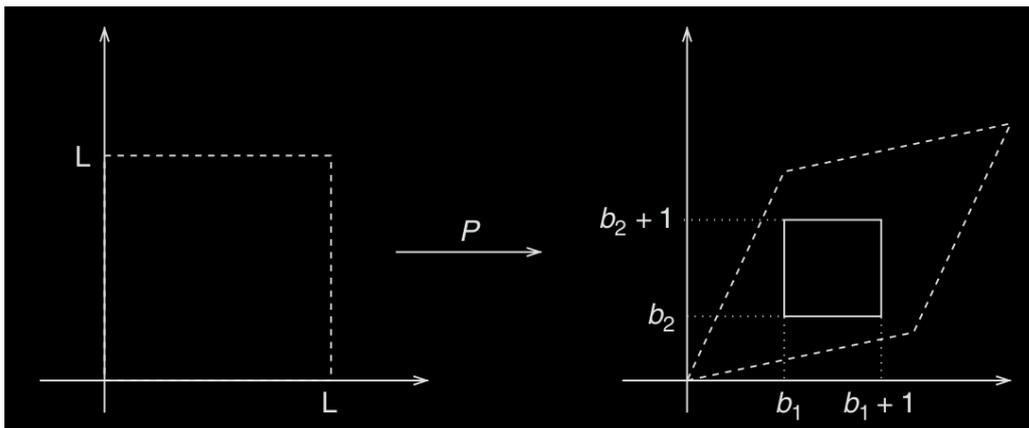


Figura 4.1: Imagen por P de $(0, L)^2$

de donde podemos ver que $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ es una matriz diagonal. Para simplificar notación sea $(0, L)^2 = (0, L) \times (0, L)$, fijemos $L > 0$ suficientemente largo tal que $P((0, L)^2)$ contiene algún cuadrado unitario $[b_1, b_1 + 1] \times [b_2, b_2 + 1]$. Ver la figura 4.1. Entonces, se puede ver fácilmente que $\pi(P((0, L)^2))$ contiene todo \mathbb{T}^2 . Dado $n \geq 1$ y $\epsilon > 0$, fijemos $\delta > 0$ tal que $\|P\|\delta\sqrt{2} < \epsilon$. Además, sean

$$\delta_u = \frac{\delta}{|\lambda_u|^n} \quad \text{y} \quad \delta_s = \delta,$$

con esto, consideremos el conjunto

$$E = \pi P \left(\{ (k_1\delta_u, k_2\delta_s) \in (0, L)^2 : k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \} \right).$$

Dado $j \geq 0$, sea $y \in f_A^j(E)$ entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$y = f_A^j[P(k_1\delta_u, k_2\delta_s)] = f_A^j[P(k_1\delta_u e_1 + k_2\delta_s e_2)] = f_A^j[k_1\delta_u P(e_1) + k_2\delta_s P(e_2)],$$

de la definición de P y f_A se sigue

$$y = f_A^j[k_1\delta_u v_u + k_2\delta_s v_s] = [k_1\delta_u A^j v_u + k_2\delta_s A^j v_s].$$

Recordando que v_s y v_u son autovalores de A , se consigue

$$y = [k_1\delta_u \lambda_u^j v_u + k_2\delta_s \lambda_s^j v_s].$$

Nuevamente, usando la definición de P y su linealidad

$$\begin{aligned} y = [k_1\delta_u \lambda_u^j P(e_1) + k_2\delta_s \lambda_s^j P(e_2)] &= [P(k_1\delta_u \lambda_u^j, k_2\delta_s \lambda_s^j)] \\ &= \pi P(k_1\delta_u \lambda_u^j, k_2\delta_s \lambda_s^j) \end{aligned}$$

De aquí podemos ver que $y \in \pi P(\{(k_1\delta_u\lambda_u^j, k_2\delta_s\lambda_s^j) : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\})$, luego

$$f_A^j(E) \subset \pi P(\{(k_1\delta_u\lambda_u^j, k_2\delta_s\lambda_s^j) : k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}), \quad (4.24)$$

para todo $j \geq 0$. Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $0 \leq j < n$ existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\delta \left(\frac{k_1\lambda_u^j}{|\lambda_u|^n} - 1 \right) \leq x \leq \delta \left(1 + k_1 \frac{\lambda_u^j}{|\lambda_u|^n} \right) \quad y \quad \delta(k_2\lambda_s^j - 1) \leq y \leq \delta(1 + k_2\lambda_s^j).$$

Operando las desigualdades y recordando las definiciones de δ_s y δ_u se puede obtener

$$-\delta \leq x - k_1\lambda_u^j\delta_u \leq \delta \quad y \quad -\delta \leq y - k_2\lambda_s^j\delta_s \leq \delta.$$

Luego,

$$0 \leq (x - k_1\lambda_u^j\delta_u)^2 \leq \delta^2 \quad y \quad 0 \leq (y - k_2\lambda_s^j\delta_s)^2 \leq \delta^2,$$

más aún

$$\sqrt{(x - k_1\lambda_u^j\delta_u)^2 + (y - k_2\lambda_s^j\delta_s)^2} \leq \sqrt{2}\delta.$$

De esto obtenemos

$$\|(x, y) - (k_1\lambda_u^j\delta_u, k_2\lambda_s^j\delta_s)\| \leq \delta\sqrt{2}, \quad (4.25)$$

es decir, todo punto de \mathbb{R}^2 está a una distancia menor o igual a $\delta\sqrt{2}$ de algún punto de la forma $(k_1\lambda_u^j\delta_u, k_2\lambda_s^j\delta_s)$ donde $0 \leq j < n$.

Sea $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ y $0 \leq j < n$, definamos $z_1 = \frac{1}{\det \mathbf{P}}(v_s^2 x_1 - v_s^1 x_2)$ y $z_2 = \frac{1}{\det \mathbf{P}}(v_u^1 x_2 - v_u^2 x_1)$ por lo visto en (4.25) para $(\lambda_u^j z_1, \lambda_s^j z_2)$ existe $(k_1\lambda_u^j\delta_u, k_2\lambda_s^j\delta_s)$ con $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\|(\lambda_u^j z_1, \lambda_s^j z_2) - (k_1\lambda_u^j\delta_u, k_2\lambda_s^j\delta_s)\| \leq \delta\sqrt{2}.$$

Por propiedades de la norma de una transformación, tenemos

$$\|P(\lambda_u^j z_1 - k_1\lambda_u^j\delta_u, \lambda_s^j z_2 - k_2\lambda_s^j\delta_s)\| \leq \|P\| \|(\lambda_u^j z_1, \lambda_s^j z_2) - (k_1\lambda_u^j\delta_u, k_2\lambda_s^j\delta_s)\| \leq \|P\| \delta\sqrt{2},$$

Luego, como $\|P\| \delta\sqrt{2} < \epsilon$

$$\|P((\lambda_u^j z_1 - k_1\lambda_u^j\delta_u)e_1 + (\lambda_s^j z_2 - k_2\lambda_s^j\delta_s)e_2)\| < \epsilon,$$

aplicando la definición de P se obtiene

$$\|(\lambda_u^j z_1 - k_1\lambda_u^j\delta_u)v_u + (\lambda_s^j z_2 - k_2\lambda_s^j\delta_s)v_s\| < \epsilon.$$

Desde que $Av_s = \lambda_s v_s$ y $Av_u = \lambda_u v_u$ se consigue

$$\|(A^j z_1 - k_1 A^j \delta_u)v_u + (A^j z_2 - k_2 A^j \delta_s)v_s\| < \epsilon,$$

entonces

$$\|(A^j z_1 - k_1 A^j \delta_u) v_u + (A^j z_2 - k_2 A^j \delta_s) v_s\| < \epsilon.$$

Operando

$$\|A^j(z_1 v_u + z_2 v_s) - A^j(k_1 \delta_u v_u + k_2 \delta_s v_s)\| < \epsilon,$$

recordando que $P(e_1) = v_u$ y $P(e_2) = v_s$

$$\|A^j(z_1 P(e_1) + z_2 P(e_2)) - A^j(k_1 \delta_u P(e_1) + k_2 \delta_s P(e_2))\| < \epsilon,$$

entonces

$$\|A^j P(z_1, z_2) - A^j P(k_1 \delta_u, k_2 \delta_s)\| < \epsilon.$$

Notando que $P^{-1}(x_1, x_2) = (z_1, z_2)$, se sigue

$$\|A^j(x_1, x_2) - A^j P(k_1 \delta_u, k_2 \delta_s)\| < \epsilon.$$

Recordando que $PD^j = A^j P$ se tiene

$$\|A^j(x_1, x_2) - PD^j(k_1 \delta_u, k_2 \delta_s)\| < \epsilon,$$

luego

$$\|A^j(x_1, x_2) - P(k_1 \lambda_u^j \delta_u, k_2 \lambda_s^j \delta_s)\| < \epsilon,$$

Por la definición de distancia d en \mathbb{T}^2 , se tiene

$$d(f_A^j[x], \pi P(k_1 \lambda_u^j \delta_u, k_2 \lambda_s^j \delta_s)) < \epsilon,$$

Como $\mathbb{T}^2 \subset \pi P(0, L)^2$ entonces $[x] \in \pi P(0, L)^2$. Entonces, teniendo en cuenta (4.24), existe $[a] \in E$ tal que

$$d(f_A^j[x], f_A^j[a]) \leq d(f_A^j[x], \pi P(k_1 \lambda_u^j \delta_u, k_2 \lambda_s^j \delta_s)) < \epsilon, \quad (4.26)$$

para todo $0 \leq j < n$. Según la definición 1.3.5, la expresión (4.26) muestra que E es un (n, ϵ) -conjunto generador para \mathbb{T}^2 . De la definición de E se tiene que las variables enteras están acotados, más precisamente

$$0 < k_1 < \frac{L}{\delta_u} \quad \text{y} \quad 0 < k_2 < \frac{L}{\delta_s}.$$

Desde que la cantidad de elementos de E depende de k_1 y k_2 se sigue

$$\text{card}(E) \leq \frac{L^2}{\delta_s \delta_u}.$$

Recordando la definición de δ_s y δ_u se sigue

$$\text{card}(E) \leq \frac{L^2}{\delta_s \delta_u} = \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 |\lambda_u|^n.$$

Recordando la definición 1.3.5, esta desigualdad muestra que

$$g_n(f_A, \epsilon, \mathbb{T}^2) \leq \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 |\lambda_u|^n$$

para todo $n \geq 1$ y $\epsilon \geq 0$. Así,

$$\log g_n(f_A, \epsilon, \mathbb{T}^2) \leq \log \left(\frac{L}{\delta}\right)^2 + n \log |\lambda_u|,$$

dividiendo entre n , aplicando límite superior cuando $n \rightarrow \infty$, luego límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y recordando la definición 1.3.5 se logra obtener

$$h_{top}(f_A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f_A, \epsilon, \mathbb{T}^2) \leq \log |\lambda_u|. \quad (4.27)$$

De (4.23) y (4.27) se concluye que

$$h_{top}(f_A) = \log |\lambda_u|.$$

□

Observación 4.2.1. De las dos proposiciones anteriores, concluimos que la medida de Lebesgue es la única medida de máxima entropía para los automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 .

4.3. Medidas de máxima entropía para difeomorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2

Sea $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo no necesariamente inducido por una matriz, este se denominó difeomorfismo de Anosov en \mathbb{T}^2 , si satisface las condiciones de la proposición 2.4.2. El siguiente resultado mostrado por J.Franks establece que los difeomorfismos de Anosov en \mathbb{T}^2 "topológicamente" son automorfismos hiperbólicos en \mathbb{T}^2 .

Teorema 4.3.1 (J.Franks). Todo difeomorfismo de Anosov en \mathbb{T}^2 es topológicamente conjugado a un automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 .

La demostración del resultado anterior puede ser encontrado en (Franks, 1970) y Manning (1974), este trabajo no desarrollará la demostración, debido a que escapa de los requisitos establecidos para el entendimiento de la tesis.

Juntando el teorema 4.2.1 y el teorema 4.3.1 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2 (R. Bowen). Todo difeomorfismo de Anosov en \mathbb{T}^2 admite una única medida de máxima entropía.

Demostración. Sea $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un difeomorfismo de Anosov. Por el teorema 4.3.1 existe $\phi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ homeomorfismo tal que

$$\phi \circ g = f_A \circ \phi,$$

donde f_A es un automorfismo hiperbólico. Por otro lado, en virtud del teorema 4.2.1 existe una única medida μ tal que

$$h_{top}(f_A) = h_\mu(f_A). \quad (4.28)$$

Desde que g y f_A son topológicamente conjugados se tiene que

$$h_{top}(g) = h_{top}(f_A). \quad (4.29)$$

Ahora consideremos la medida $\nu = (\phi^{-1})_* \mu$, como μ es f_A -invariante se sigue que ν es g -invariante y además por la proposición 1.2.1 se sigue

$$h_\nu(g) = h_\mu(f_A). \quad (4.30)$$

De las ecuaciones (4.28), (4.29) y (4.30) se tiene que

$$h_{top}(g) = h_\nu(g).$$

Así, ν es una medida de máxima entropía para g . La unicidad de ν se sigue por la unicidad de μ . □

Conclusiones

De las proposiciones 4.2.1 y 4.2.2 se concluye que si f_A es un automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 inducido por una matriz A (como en 2.2.1) entonces se cumple

$$h_{top}(f_A) = h_\mu(f_A) = \log |\lambda_u| \quad (4.31)$$

donde λ_u es el autovalor de A con módulo mayor que 1 y μ es la medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 . Podemos ir un poco más allá si recordamos el teorema 4.2.1, pues de ahí ya sabíamos que tanto la entropía topológica como la entropía métrica para cierta medida eran iguales a $\log |\lambda_u|$. Y se habrá notado que decíamos "cierta medida" pues no sabíamos que medida de probabilidad era la que verificaba esa igualdad. Eso, hasta la demostración de estas dos últimas proposiciones. Ahora, por (4.31), sabemos que dicha medida de probabilidad es μ , la medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 . Más aún, recordando la definición 4.1.1 podemos deducir que μ es la medida de máxima entropía para f_A . Más generalmente, hemos encontrado que la medida de Lebesgue en \mathbb{T}^2 es la medida de máxima entropía para todo automorfismo hiperbólico en \mathbb{T}^2 .

El teorema de Bowen nos dice mucho más, recordando la construcción de la medida de Markov ν dada en (3.32) se tiene $\mu = h_*\nu$. Como μ es la medida de máxima entropía entonces, analizando el teorema de Bowen, podemos deducir que ν es la única medida de Markov ergódica y positiva en abiertos de $\Sigma_{\mathbf{T}}$ tal que

$$h_\nu(\sigma) = \log |\lambda_u| = h_{top}(\sigma).$$

De aquí podemos ver que la medida de Markov ν es la medida de máxima entropía para el subshift de tipo finito σ . Esto no es de sorprender pues como sabemos σ es la "traducción" de f_A al espacio $\Sigma_{\mathbf{T}}$ y es por ello que comparten las mismas propiedades. Luego, si σ tiene una medida de máxima entropía entonces f_A también tendrá una medida de máxima entropía, y viceversa. Lo interesante de este trabajo es que logramos encontrar cuáles son dichas medidas para ambos sistemas dinámicos; todo en virtud, claro, del teorema 4.2.1.

Algo que también debemos notar es que, según el teorema de Bowen, la existencia y unicidad de

la medida de máxima entropía para cualquier automorfismo hiperbólico f_A en \mathbb{T}^2 depende de las propiedades dinámicas de este. Para un ejemplo sencillo de lo que quiero expresar, notemos que en la prueba del teorema 4.2.1 se precisa que σ sea topológicamente mixing. Recordando que el subshift comparte propiedades dinámicas con f_A entonces podemos deducir que se precisa que f_A sea topológicamente mixing.

Para finalizar, ampliamos un poco el rango de visión del tema expuesto en esta tesis, comentando que para sistemas dinámicos definidos en espacios más generales también se ha encontrado que el estudio de la existencia y unicidad de la máxima entropía depende de las propiedades dinámicas del sistema dinámico, es por ello que estos tópicos son temas de investigación actuales como se puede apreciar en las siguientes publicaciones (Buzzi et al., 2022) y (Rocha and Tahzibi, 2022).

Bibliografía

- Adler, R. L. (1970). *Similarity of automorphisms of the torus*, volume 98. American Mathematical Soc.
- Barreira, L. (2012). *Ergodic theory, hyperbolic dynamics and dimension theory*. Springer Science & Business Media.
- Barreira, L. and Valls, C. (2012). *Dynamical systems: An introduction*. Springer Science & Business Media.
- Bowen, R. (1970). Markov partitions for axiom a diffeomorphisms. *American Journal of Mathematics*, 92(3):725–747.
- Bowen, R. (1974). Some systems with unique equilibrium states. *Mathematical systems theory*, 8(3):193–202.
- Bowen, R. E. (2008). *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, volume 470. Springer Science & Business Media.
- Brin, M. and Katok, A. (1983). On local entropy. In *Geometric dynamics*, pages 30–38. Springer.
- Buzzi, J., Crovisier, S., and Sarig, O. (2022). Measures of maximal entropy for surface diffeomorphisms. *Annals of Mathematics*, 195(2):421–508.
- Catsigeras, E. (2004). *Particiones de Markov para difeomorfismos de Anosov*. PhD thesis, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.
- Franks, J. (1970). Anosov diffeomorphisms global analysis. In *Proc. Sympos. Pure Math.*, volume 14, pages 61–93.
- Mané, R. (2012). *Ergodic theory and differentiable dynamics*, volume 8. Springer Science & Business Media.

- Manning, A. (1974). There are no new anosov diffeomorphisms on tori. *American Journal of Mathematics*, 96(3):422–429.
- Meyer, C. D. (2000). *Matrix analysis and applied linear algebra*, volume 71. Siam.
- Misiurewicz, M. (1973). Diffeomorphism without any measure with maximal entropy. *BULLETIN DE L ACADEMIE POLONAISE DES SCIENCES-SERIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES*, 21(10):903–910.
- Newhouse, S. E. (1989). Continuity properties of entropy. *Annals of Mathematics*, 129(1):215–235.
- Rocha, J. E. and Tahzibi, A. (2022). On the number of ergodic measures of maximal entropy for partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center leaves. *Mathematische Zeitschrift*, 301(1):471–484.
- Sambarino, M. (2005). Tópicos de sistemas dinámicos. *Notas de Curso. EMALCA*.
- Sambarino, M. (2009). Hiperbolicidad y estabilidad. *XXII Escuela venezolana de matemáticas*.
- Viana, M. and Oliveira, K. (2016). *Foundations of ergodic theory*. Number 151. Cambridge University Press.