Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales elípticas involucrando no linealidades discontinuas con crecimiento exponencial crítico en dimensión dos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Sharon Celia NATIVIDAD ZEVALLOS

ASESOR

Dr. Yony Raúl SANTARIA LEUYACC

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Natividad, S. (2022). *Existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales elípticas involucrando no linealidades discontinuas con crecimiento exponencial crítico en dimensión dos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Sharon Celia Natividad Zevallos
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	75886799
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42159219
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-8279-7460
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Mg. Andrés Guardia Cayo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09406969
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	Dyamical Systems, Differential Equations and their Applications - EQUATION
Agencia de financiamiento	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Fondo Nacional de Desarrollo Científico, Tecnológico y de Innovación Tecnológica (PROCIENCIA-FONDECYT). Proyecto Investigación Básica 2019-01. 410-2019

Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.0603526554608 Longitud: -77.0821112394333
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Enero 2021 - octubre 2022
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 09:30 horas del lunes 17 de octubre de 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de la Tesis: Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (PRESIDENTE), Mg. Andres Guardia Cayo (MIEMBRO) y el Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada**: "EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ELÍPTICAS INVOLUCRANDO NO LINEALIDADES DISCONTINUAS CON CRECIMIENTO EXPONENCIAL CRÍTICO EN DIMENSIÓN DOS"** presentado por la señorita Bachiller Sharon Celia Natividad Zevallos, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación **sobresaliente** con un calificativo promedio de **dieciocho (18)**.

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar, manifestó que la señorita Bachiller Sharon Celia Natividad Zevallos, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 10:37 am horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
PRESIDENTE

Mg. Andrés Guardia Cayo
MIEMBRO

Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
MIEMBRO ASESOR

UNMSM
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América.

INFORME DE EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

1. FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
2. ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
3. AUTORIDAD ACADÉMICA QUE EMITE EL INFORME DE ORIGINALIDAD
   Director de La Escuela Profesional de Matemática
4. APELLIDOS Y NOMBRE DE LA AUTORIDAD ACADÉMICA
   Víctor Hilario Tarazona Miranda
5. OPERADOR DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUD
   Alex Armando Cruz Huallpara
6. DOCUMENTO DE EVALUACIÓN

   Título de pre grado: Existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales elípticas involucrando no linealidades discontinuas con crecimiento exponencial critico en dimensión dos

7. AUTOR DEL DOCUMENTO

   Nombre y Apellido: Sharon Celia Natividad Zevallos

8. **FECHA DE RECEPCIÓN DE DOCUMENTO**

   ....

9. FECHA DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUDES

   Procesado el: 27-sept.-2022 15:25 -05
   Identificador: 1910663209
   Número de palabras: 17531
   Entregado: 1

10. SOFTWARE UTILIZADO

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
TURNITIN	x	
ITHENTICATE		x
OTROS(ESPECIFICAR)		x

11. CONFIGURACION DEL PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
EXCLUYE TEXTOS ENTRECOMILLADOS	x	
EXCLUYE BIBLIOGRAFÍA	x	
EXCLUYE CADENAS MENOS A 40 PALABRAS	x	
OTRO CRITERIO (ESPECIFICAR)		x

12. PORCENTAJE DE SIMILITUDES SEGÚN PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

EN LETRA	NÚMEROS

Nueve Porciento	**9%**

13. FUENTES ORIGINALES DE LAS SIMILITUDES ENCONTRADAS

3% match ()Alves, Claudianor O., Santos, Jefferson A.. "Multivalued Elliptic Equation with exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$", 2016
2% match (Internet desde 18-oct.-2018)http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080
1% match (Internet desde 07-mar.-2022)
https://www.repositorio.unb.br/bitstream/10482/9232/1/2011_JeffersonAbrantesdosSantos.pdf
<1% match ()Tineo Condeña, Marlón Yván. "Existencia de soluciones débiles para una clase de sistemas elípticos semilineales", 'Baishideng Publishing Group Inc.', 2017
<1% match ()Aycho Flores, Milton Angelino. "Pre-semigrupos de operadores lineales : problema de cauchy abstracto", 'Baishideng Publishing Group Inc.', 2013
<1% match (Internet desde 25-dic.-2021)
https://coek.info/pdf-multivalued-elliptic-equation-with-exponential-critical-growth-in-r2-.html
<1% match ()German Enrique, Jimenez Blanco. "El principio variacional de Ekeland y aplicaciones", 2003
<1% match ()Cejas, María Eugenia. "Aplicaciones de las desigualdades con pesos a ecuaciones diferenciales", 'Universidad Nacional de La Plata', 2016
<1% match (trabajos de los estudiantes desde 13-sept.-2021)
Submitted to Universidad Nacional de Trujillo on 2021-09-13

14. OBSERVACIONES

………………………………………………………………………………………

15. CALIFICACIONES DE ORIGINALIDAD

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, SIN OBSERVACIONES.	X	
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, CON OBSERVACIONES.		X
DOCUMENTO NO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD		X

16. FECHA DE INFORME

………………………………………………………………………………………

UNMSM
Firmado digitalmente por TARAZONA MIRANDA Victor Hilario FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 28.09.2022 10:32:10 -05:00

Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda

Director (e) de la EP de Matemática

FICHA CATALOGRÁFICA

SHARON CELIA NATIVIDAD ZEVALLOS

Existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales elípticas involucrando no linealidades discontinuas con crecimiento exponencial crítico en dimensión dos, (Lima) 2022.
V, 81 p., 29,7 cm (UNMSM, Licenciada, Matemática, 2022). Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

Dedico este trabajo a mis padres, hermano y a Boxi.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar, a Dios, a mis padres, Celia y Oscar, a mi hermano Erick, a mi abuela Francisca y a Boxi, por su gran apoyo en esta etapa.

Agradezco a mi asesor Yony R. Santaria Leuyacc por las sugerencias brindadas en esta tesis.

A mis amigos de pregrado y que conocí en pandemia, Javier, Jhon, Pamela; Melissa y Miguel, por las salidas a comer, grandes momentos y pláticas divertidas.

Agradezco al profesor Pedro F. da Silva por las dudas aclaradas en esta tesis.

A PROCIENCIA, por financiar este proyecto de tesis, el cual desarrolla resultas interesantes en el campo de las Ecuaciones Diferenciales Parciales. Este trabajo fue financiado por el CONCYTEC-PROCIENCIA en el marco de la convocatoria Proyecto Investigación Básica 2019-01 [número de contrato 410-2019], con el Dr. Yony Santaria Leuyacc como responsable.

Índice general

Resumen

En este trabajo, nos interesa la existencia de al menos dos soluciones diferentes no triviales para la siguiente clase de problemas elípticos

$$-\Delta u + V(x)u - \epsilon h(x) \ \in \ \partial_t F(x,u) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^2,$$

donde $\epsilon > 0$, V es un potencial continuo, h pertenece al espacio dual del espacio de Sobolev, $\partial_t F(x,u)$ denota el gradiente generalizado de $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$ con respecto a la segunda variable y la no linealidad f es una función discontinua que posee un crecimiento crítico exponencial. Las soluciones son obtenidas mediante el uso de métodos variacionales. Más precisamente, se obtiene una solución de energía positiva usando el teorema del paso de la montaña y una solución de energía negativa aplicando el principio variacional de Ekeland.

Palabras clave: Ecuaciones elípticas, Crecimiento crítico exponencial, Teorema del paso de montaña, principio variacional de Ekeland

Abstract

In this work, we are concerned with the existence at least of two diferent nontrivial weak solutions for the following class of elliptic problem

$$-\Delta u + V(x)u - \epsilon h(x) \;\in\; \partial_t F(x,u) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^2,$$

where $\epsilon > 0$, V is a continuous potential, h belongs to the dual space of the Sobolev space, $\partial_t F(x,u)$ denotes the generalized gradient of $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$ with respect to the second variable and the nonlinearity f is a discontinuous function which possesses exponential critial growth. The solutions are obtained by using variational methods. More precisely, a positive energy solution is obtained by using Mountain Pass Theorem and negative energy solution by applying Ekeland's variational principle.

Keywords: Elliptic equation, critical exponential growth, mountain pass theorem, Ekeland variational principle

Introducción

En este trabajo tiene como objetivo encontrar soluciones vía métodos variacionales de la siguiente clase de problemas elípticos, se basa en los resultados de Alves, C. O., Santos, J. A.[3] para el siguiente problema:

$$-\Delta u + V(x)u - \epsilon h(x) \ \in \ \partial_t F(x,u) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^2, \tag{$\mathcal{P}$}$$

donde $\epsilon > 0$, V es un potencial continuo que verifica las siguientes condiciones

(V_1) V es continua y $V(x) \geq V_0 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$

(V_2) $\dfrac{1}{V} \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

h pertenece al espacio dual del espacio de Sobolev, $\partial_t F(x,u)$ denota el gradiente generalizado de $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds$ con respecto a la segunda variable, f es una no linealidad discontinua que posee crecimiento critico exponencial, esto es, existe $\alpha_0 > 0$ tal que:

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \alpha < \alpha_0. \end{cases} \tag{0.1}$$

El crecimiento crítico exponencial es motivado por las desigualdades de Trudinger-Moser [25, 29, 36]. Relacionados al problema con discontinuidades no lineales se presentan las siguientes referencias [7, 10, 11, 34, 35]. El problema que considera un crecimiento critico exponencial, siendo f una no linealidad continua en $(\mathcal{P})$, se puede encontrar en el siguiente articulo de Medeiros [24]. Esta ecuación se sigue como:

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h(x)$$

donde h es pequeño, además de otras condiciones. En ese trabajo se distinguen dos casos, subcrítico y crítico. El lector puede profundizar en este tema junto a esta condición de f en las siguientes referencias [9, 16, 17, 28]. Por otra parte, otro problema relacionado con gradiente generalizado se encuentra en Alves & Gonçales [2]

$$-\Delta u + (1 + \lambda V(x))u \ \in \ \partial_t F(x,u) \ \text{ en } \ \mathbb{R}^N$$

donde $N \geq 1, \lambda > 0, V$ es una funcion continua que verifica algunas condiciones y $\partial_t F(x,u)$ denota el gradiente generalizado de $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$ con respecto a t.

Antes de mencionar el resultado principal, mencionaremos las condiciones para V y f que son las siguientes:

(f_0) $h \in (H^1(\mathbb{R}^2))^*$ y $0 < \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} h \ dx < +\infty$

(V_1) V es continua y $V(x) \geq V_0 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$

(V_2) $\dfrac{1}{V} \in L^1(\mathbb{R}^2)$

(h_0) $\displaystyle\limsup_{t \to +\infty} \frac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial_t F(x,t)\}}{e^{\alpha_0 |t|^2}} < +\infty$ es uniforme en $x \in \mathbb{R}^2$.

(h_1) $\displaystyle\limsup_{t \to 0} \frac{2\max\{|\xi| : \xi \in \partial_t F(x,t)\}}{|t|} < +\infty$ es uniforme en $x \in \mathbb{R}^2$

(h_2) Existe $t_0 \geq 0$ tal que:

$$f(x,t) = 0 \text{ para } t < t_0 \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}^2$$

y

$$f(x,t) > 0 \text{ para } t > t_0 \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

(h_3) $\displaystyle\limsup_{t \to 0} \frac{2\max\{|\xi| : \xi \in \partial_t F(x,t)\}}{|t|} < \lambda_1$ es uniforme en $x \in \mathbb{R}^2$, donde

$$\lambda_1 = \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) \ dx}{\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \ dx}$$

y

$$E := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x) u^2 \ dx < +\infty \right\}$$

(h_4) Existe un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ y constantes positivas m, n y $w > 2$, tal que

$$F(x,t) \geq mt^w - n \text{ para } t \geq 0 \text{ y para todo } x \in K.$$

(h_5) Existe $c > 2$ que verifica:

$$0 \leq cF(x,t) \leq t\underline{f}(x,t) \text{ para } t \geq 0 \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

(h_6) Existen $p > 2$ y $\mu > 0$ tal que

$$F(x,t) \geq \mu(t^p - t_0^p) \text{ para } t \geq 0 \text{ y para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

El espacio de Hilbert E introducido en (h_3) con el producto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\, dx,$$

tiene asociado al producto interno, se tiene la norma

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Las condiciones $(V_1), (V_2)$ son utilizados para probar que el espacio E está inmerso compactamente en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y $L^q(\mathbb{R}^N)$, para $1 \leq q < \infty$, ver [14, 22, 32]; la condición (h_2) permite que la no linealidad pueda ser discontinua, además el crecimiento exponencial crítico de f es establecido por la condición (h_0).

A continuación, se mencionará el resultado principal.

Teorema 0.1. *Si* $(V_1) - (V_2)$ *y* $(h_0) - (h_6)$. *Entonces, existen constantes positivas* ϵ_0, μ^* *y* t_1, *tales que, el problema posee una solución* $v_\epsilon \in E$, *con* $I_\epsilon(v_\epsilon) = d_\epsilon > 0$, *para todo* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, $t_0 \in [0, t_1)$ *y* $\mu \geq \mu^*$. *Más aún, disminuyendo* ϵ_0 *y* t_1, *y aumentando* μ^*, *si es necesario, se tiene dos soluciones* $\mu_\epsilon, v_\epsilon \in E$ *con*

$$I_\epsilon(u_\epsilon) = c_\epsilon < 0 < d_\epsilon = I_\epsilon(v_\epsilon).$$

La presente tesis se divide se la siguiente manera:

En el **capitulo 1** introduciremos los conceptos que serán útiles a lo largo de la tesis, tales como gradiente generalizado, el Teorema paso de la montaña y el principio variacional de Ekeland para abordar los siguientes capítulos.

En el **capitulo 2** y **3** se presentará los espacios de Orlicz y Orlicz-Sobolev, sus propiedades así como importantes resultados para su uso en los capítulos posteriores.

En el **capitulo 4** se desarrolla el planteamiento variacional del problema $(\mathcal{P})$. Asimismo, estudiamos la existencia de soluciones no triviales del problema elíptico $(\mathcal{P})$.

Capítulo I

Preliminares

En el presente capítulo se presentará definiciones, proposiciones y teoremas, esto con el objetivo de ser utilizadas en los siguientes capítulos de esta tesis. Introducido por Clarke [13] se aplica el gradiente generalizado para funciones localmente Lipschitz en espacios de Banach. La teoría expuesta aquí se puede encontrar en el articulo publicado por Chang [12].

1.1. El gradiente generalizado

Definición 1.1. *Sea X un espacio de Banach, Y un subconjunto de X. Una función $f : Y \to \mathbb{R}$ se dice que satisface la* ***condición de Lipschitz*** *(en Y), si para algún $K > 0$, se tiene*

$$|f(y) - f(z)| \leq K\|y - z\|, \quad \textit{para todo} \quad y,\, z \in Y.$$

Definición 1.2. *Sea X un espacio de Banach, $f : X \to \mathbb{R}$ es un funcional* ***Localmente Lipschitz****, si para cada $x \in X$ existen una vecindad abierta de x, $V(x)$, y una constante $K(x) > 0$, tales que:*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\|x_1 - x_2\|, \quad \textit{para todo} \quad x_1,\, x_2 \in V(x).$$

Definición 1.3. *Sea f una función localmente lipschitziana en un punto x, $v \in X$ cualquier otro vector.* ***La derivada direccional generalizada*** *de f, $f : X \to \mathbb{R}$*

en x en la dirección v, denotada por $f^0(x,v)$, es definida por:

$$f^0(x,v) = \limsup_{y\to x} \frac{f(x+h+tv)-f(x+h)}{t}$$

donde $t>0$.

Proposición 1.4. *El derivada direccional generalizada cumple la siguientes propiedades:*

(i) *Para todo $x \in X$*

$$f^0(x, v_1+v_2) \leq f^0(x,v_1) + f^0(x,v_2), \quad \forall\, v_1, v_2 \in X$$

y

$$f^0(x,kv) = kf^0(x,v), \quad \forall\, v_1, v_2 \in X, k \geq 0$$

.

(ii) *$f^0(x,.)$ es un funcional convexo.*

(iii) *$|f^0(x,v)| \leq K(x)\|v\|$, donde K(x) es la constante de Lipschitz y depende del conjunto abierto $V(x)$, para cada $x \in X$.*

(iv) *$f^0(x,v)$ es una función semicontinua superiormente, es decir,*

$$\limsup_{j\to\infty} f^0(x,v) \leq f^0(x,v)$$

donde $\lim_{j\to\infty}(x_j,v_j) = (x,v)$, $(x,v) \in X \times X$

(v) *$f^0(x,-v) = (-f)^0(x,v)$, para todo $x, v \in X$.*

(vi) *$|f^0(x,u) - f^0(x,v)| \leq K(x)\|u-v\|$, para todo $u, v \in X$, es decir, $f^0(x,.) : X \to \mathbb{R}$ es una función Lipschitz.*

Definición 1.5. ***El gradiente generalizado*** *de una función f localmente Lipschitz en $x \in X$, es un subconjunto de X^*, denotado por $\partial f(x) \subset X^*$, está dado por*

$$\partial f(x) = \{\zeta \in X^* : f^\circ(x;v) \geq \langle \zeta, v\rangle,\ \forall\, v \in X\}.$$

Ejemplo 1.6. *Calcule la gradiente generalizada de la función* $f(x) = |x|$ *en* $X = \mathbb{R}$

Lema 1.7. *El gradiente generalizado de una función localmente lipschitz, es siempre un conjunto no vacío.*

Lema 1.8. *Dados* $x, v \in X$ *se tiene que* $f^0(x, v) = \max\{\langle \xi, v\rangle;\ \xi \in \partial f(x)\}$.

Proposición 1.9. *Se tienen las siguientes propiedades relacionadas al gradiente generalizado:*

(i) *Para todo* $x \in X$ *el conjunto* $\partial f(x) \subset X^*$ *es convexo y compacto en la topología débil*. Además*

$$\|\xi\|_{X^*} \leq K(x) \text{ para todo } \xi \in \partial f(x)$$

(ii) $\partial f(x)$ *es cerrado débil *.*

(iii) *Para cada* $x \in X$*, existe* $\xi_0 \in \partial f(x)$ *tal que*

$$\|\xi_0\|_{X*} = \min\{\|\xi\|_{X*} : \xi \in \partial f(x)\}$$

.

(iv) *Si* $f \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ *y* $g : X \to \mathbb{R}$ *localmente lipschitz, entonces*

$$\partial(f + g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x)$$

.

1.2. Teorema del paso de la Montaña (TPM)

Teorema 1.10. *Sean* X *un espacio de Hilbert,* $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$*, tales que* $I(0) = 0$ *y*

(i) *existen* $\rho, \sigma > 0$ *tales que* $I(u) \geq \sigma$*, para todo* $\|u\| = \rho$

(ii) *existe* $e \in X$ *tal que* $\|e\| > \rho$ *y* $I(e) < 0$

Entonces, para cada $\epsilon > 0$*, existe* $u \in X$ *tal que*

(i) $c - 2\epsilon \leq I(u) \leq c + 2\epsilon$,

(ii) $\|I'(u)\|_{X^{-1}} < 2\epsilon$,

donde

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} I(\gamma(t))$$

y

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}.$$

En particular, del Teorema 1.10 para cada $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, existirá u_n satisfaciendo

$$c - \frac{2}{n} \leq I(u_n) \leq c + \frac{2}{n} \qquad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{N}$$

y

$$\|I'(u_n)\|_{X^{-1}} < \frac{2}{n} \qquad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Consecuentemente, existe una sucesión $(u_n) \in X$ tal que

$$I(u_n) \to c \qquad \text{y} \qquad \|I'(u_n)\|_{X^{-1}} \to 0 \quad \text{cuando} \;\; n \to +\infty$$

Definición 1.11. *(Brézis-Coron-Nirenberg [8]) Sea X un espacio de Banach, $I \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ y $c \in \mathbb{R}$. La función I verifica la condición de (PS) para el nivel c $(PS)_c$ si dada cualquier sucesión $(u_n) \subset X$ tal que*

$$I(u_n) \to c \qquad y \qquad \|I'(u_n)\|_{X^{-1}} \to 0 \quad \textit{cuando} \;\; n \to +\infty$$

tiene una subsucesión convergente.

Teorema 1.12. *(Ambrosetti-Rabowitz [5]) Sea I un funcional que satisface las condiciones del Teorema 1.10. Además, si I verifica la condición de $(PS)_c$, entonces $I'(c) = 0$, esto es, c es punto crítico para el I.*

El valor crítico encontrado en el Teorema 1.12 es no trivial, el cual es una consecuencia de la condición (i) del Teorema 1.10 y de la definición del nivel minimax.

1.3. Principio Variacional de Ekeland

Teorema 1.13. *Sea X un espacio de Banach, $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ acotado inferiormente, $v \in X$ y $\epsilon, \delta > 0$. Si*

$$\varphi(v) \leq \inf_X \varphi + \epsilon$$

entonces existe $u \in X$ tal que

(i) $\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + 2\epsilon$

(ii) $\|\varphi'(u)\| < 8\dfrac{\epsilon}{\delta}$

(iii) $\|u - v\| \leq 2\delta$.

En particular del Teorema 1.13, para cada $\epsilon = \dfrac{1}{n}$, existirá u_n satisfaciendo

$$\varphi(u_n) \leq \inf_X \varphi + \frac{2}{n} \qquad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{N}$$

también

$$\|\varphi'(u_n)\| < \frac{8}{n\delta} \qquad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{N}$$

Por consiguiente, existe una sucesión $(u_n) \subset X$ tal que

$$\varphi(u_n) \to \inf_X \varphi, \qquad \|\varphi'(u_n)\| \to 0 \qquad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

Corolario 1.14. *Sea $\varphi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ acotado inferiormente. Si φ satisface la condición de $(P.S)_c$ con $c := \inf_X \varphi$, entonces toda sucesión minimizante para φ, es decir una sucesión (u_n) tal que $\lim_{n\to\infty} \varphi(u_n) = \inf_X \varphi$, contiene una subsucesión convergente. En particular, existe un mínimo para φ.*

Capítulo II

Espacios de Orlicz

En este capitulo se introducirán los conceptos de función de Young, N- función, norma de Luxemburg para definir un espacio de Orlicz; así mismo, de la condición Δ_2 y el espacio E_Φ, donde este último es importante a que se mencionara sus propiedades más resaltantes. Se omitirá las pruebas algunos de los resultados, los cuales pueden encontrarse en [18, 26, 27]

2.1. Función de Young

Definición 2.1. *Sea* $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *que cumple:*

(i) Φ *es una función convexa y continua*

(ii) $\Phi(t) = 0$ *si y solo si* $t = 0$

(iii) Φ *es par*

entonces Φ *es una* ***función de Young****. Además si* Φ *verifica las siguientes condiciones de crecimiento:*

(iv)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(t)}{t} = 0 \quad y \quad \lim_{t\to +\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$$

se denomina a Φ *una* ***N-función***

A continuación algunos ejemplos de N- funciones:

Ejemplo 2.2. *Φ_i es una N-función, para $1 \leq i \leq 4$*

(a) $\Phi_1(t) = \exp(t^2) - 1, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $\Phi_2(t) = |t|^p, \quad p \in (1, +\infty) \quad y \quad t \in \mathbb{R}.$ *Si $p = 1$, Φ_1 es una función de Young.*

(c) $\Phi_3(t) = \exp(|t|) - |t| - 1, \quad t \in \mathbb{R}$

(d) $\Phi_4(t) = (1 + |t|)\ln(1 + |t|) - |t|, \quad t \in \mathbb{R}$

Prueba. Probaremos que Φ_1 es una N-función, las otras se prueban de manera análoga. Verificaremos que Φ_1 satisface las condiciones de (i) a (iv).

(i) La función exponencial es continua y derivable luego

$$\Phi_1^{'}(t) = 2t\exp(t^2), \quad \text{entonces } \Phi_1^{''}(t) = 4t^2\exp(t^2) + \exp(t^2) > 0$$

así $\Phi_1(t)$ es convexa.

(ii) $\Phi_1(0) = \exp(0^2) - 1 = 0$ y $1 = \exp(t^2)$, entonces $t = 0$, cumpliendo así la condición 2

(iii) $\Phi_1(-t) = \exp((-t)^2) - 1 = \exp(t^2) - 1 = \Phi_1(t)$

(iv) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\Phi_1(t)}{t} = 0$ utilizando L' Hospital, además por la propiedad $\exp(t^2) > t^2$ $\lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{\Phi_1(t)}{t} = +\infty$

cumpliendo así las condiciones para una N-función.

Lema 2.3. *Sea $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ dado por:*

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds, \tag{2.1}$$

donde:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \geq 0 \\ -\phi(-t), & t < 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

con $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que satisface:

(i) ϕ *es contínua a la derecha y no decreciente en* $\mathbb{R}_+$

(ii) $\phi(t) = 0$ *si y solo si* $t = 0$

(iii) $\lim\limits_{t \to +\infty} \phi(t) = +\infty$

(iv) $\phi(t) > 0$, $t > 0$

entonces, Φ *es una N-función.*

Demostración. Ver [6] □

Observación 2.4. *La función* Φ *definida en el Lema 2.3 puede ser escrita de la siguiente forma:*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds.$$

El siguiente resultado nos mostrará la validez de la recíproca en el lema anterior:

Lema 2.5. *Sea* $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una N-función. Existe* $\phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *que verifica las hipotesis del Lema 2.3 tal que:*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds$$

y define una N-función.

Definición 2.6. *La función* $\Phi(t)$ *es llamada una N-función si admite la representación*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds$$

donde ϕ *verifica las hipotesis del Lema 2.3.*

2.2. Espacios de Orlicz

A continuación construiremos un espacio que generalice los espacios de Lebesgue, sera llamado espacios de Orlicz. En adelante $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ será un subconjunto abierto y conexo.

Definición 2.7. *Sea Φ una N-función. Definimos el conjunto $K_{\Phi}(\Omega)$ dado por:*

$$K_{\Phi}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} \Phi(u)\, dx < +\infty \right\}$$

*como la **Clase de Orlicz**.*

A continuación verificaremos que $K_{\Phi}(\Omega)$ es convexo y que en general no define un espacio vectorial.

Lema 2.8. *Si Φ una N-función entonces $K_{\Phi}(\Omega)$ es convexo.*

Demostración. En efecto, sea $u, v \in K_{\Phi}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \Phi(tu + (1-t)v)\, dx \leq t \int_{\Omega} \Phi(u)\, dx + (1-t) \int_{\Omega} \Phi(v)\, dx < +\infty\,,\ \ t \in [0,1]$$

donde la ultima desigualdad proviene de que Φ es una N-función, así $tu + (1-t)v \in K_{\Phi}(\Omega)$. □

Lema 2.9. *$K_{\Phi}(\Omega)$ no siempre define un espacio vectorial.*

Demostración. Sea $\Omega = (0,1) \in \mathbb{R}$ y considerese la función

$$\Phi(t) = \exp(t^2) - 1, \quad t \in (0,1)$$

y sea

$$u(x) = \ln^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

Afirmación: $u \in K_{\Phi}(\Omega)$, pero $\sqrt{2}u \notin K_{\Phi}(\Omega)$
En efecto:

$$\int_{\Omega} \Phi(u)\ dx = \int_0^1 \Big(\exp(u^2) - 1 \Big)\ dx = \int_0^1 \left(\exp\left(\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right) - 1 \right)\ dx.$$

Luego

$$\int_{\Omega} \Phi(u)\ dx = \int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \Big)\ dx = 1 < \infty$$

así $u \in K_\Phi(\Omega)$.
Pero:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(\sqrt{2}u)\,dx &= \int_0^1 \Big(\exp\left((\sqrt{2}u)^2\right) - 1\Big)\,dx \\ &= \int_0^1 \left[\exp\left(2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - 1\right] dx = \lim_{b\to 0}\int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right) dx = -\infty,\end{aligned}$$

es decir, $\sqrt{2}u \notin K_\Phi(\Omega)$. □

Tomando en cuenta que $K_\Phi(\Omega)$ no es un espacio vectorial, construiremos un nuevo conjunto, $L_\Phi(\Omega)$, que si posea mencionada estructura, será dada por:

$$L_\Phi(\Omega) := \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ medible}; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)\,dx < +\infty, \text{para algún } \lambda > 0\right\}$$

Afirmación 2.10. $L_\Phi(\Omega)$ *define un espacio vectorial.*

Verificaremos solo la desigualdad triangular:
En efecto:
Sean $u, v \in L_\Phi(\Omega)$, existen constantes positivas λ_u, λ_v, tales que:

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)\,dx < +\infty \qquad \text{y} \qquad \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_v}\Big)\,dx < +\infty.$$

Debemos probar que $u + v \in L_\Phi(\Omega)$:

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u + \lambda_v}\Big)\,dx = \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\lambda_u u}{\lambda_u(\lambda_u + \lambda_v)} + \frac{\lambda_v v}{\lambda_v(\lambda_u + \lambda_v)}\Big)\,dx.$$

y

$$\frac{\lambda_v}{\lambda_u + \lambda_v} = 1 - \frac{\lambda_u}{\lambda_u + \lambda_v}.$$

Por la convexidad de Φ se tiene:

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u + \lambda_v}\Big)\,dx \le \frac{\lambda_u}{\lambda_u + \lambda_v}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)\,dx + \frac{\lambda_v}{\lambda_u + \lambda_v}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big)\,dx < +\infty.$$

Por tanto $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.

La pregunta que surge ahora es: ¿el espacio $L_\Phi(\Omega)$ es mas refinado para generalizar los espacios de Lebesgue? La respuesta a esta pregunta es sí, y su justificación viene dada por el siguiente lema.

Lema 2.11. *$L_\Phi(\Omega)$ es el menor subespacio vectorial que contiene $K_\Phi(\Omega)$.*

Demostración. Sea V un subespacio vectorial que contiene $K_\Phi(\Omega)$. Dado $u \in L_\Phi(\Omega)$, existe $\lambda > 0$ tal que $\dfrac{u}{\lambda} \in K_\Phi(\Omega)$ por definición. Además de $K_\Phi(\Omega) \subset V$ se tiene que $\dfrac{u}{\lambda} \in V$.Por lo tanto $L_\Phi(\Omega) \subset V$. $\square$

Definición 2.12. *El espacio vectorial $L_\Phi(\Omega)$ se denomina **espacio de Orlicz**.*

2.2.1. Normas e inmersiones en el espacio de Orlicz

Definición 2.13. *Sea $L_\Phi(\Omega)$ un espacio de Orlicz, definimos como **norma de Luxemburg** a la aplicación $|\,.\,|_\Phi : L_\Phi(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, donde*

$$|u|_\Phi = \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0;\ \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)\,dx \leq 1\right\} \ \ \textit{para}\ \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Lema 2.14. *La norma de Luxemburgo $|.|_\Phi$ define una norma sobre el espacio $L_\Phi(\Omega)$.*

Demostración. Se probara la condición de desigualdad triangular.
Sean $u, v \in L_\Phi(\Omega)$, además $(\lambda_n), (\epsilon_n)$ sucesiones minimizantes en $|u|_\Phi$; es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda_n}\right)\,dx \leq 1, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = |u|_\Phi$$

y

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{v}{\epsilon_n}\right)\,dx \leq 1, \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \epsilon_n = |v|_\Phi$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\frac{u+v}{\lambda_n+\epsilon_n}\right)\,dx &= \int_\Omega \Phi\left(\frac{\lambda_n u}{\lambda_n(\lambda_n+\epsilon_n)} + \frac{\epsilon_n v}{\epsilon_n(\lambda_n+\epsilon_n)}\right)\,dx \\ &\leq \frac{\lambda_n}{\lambda_n+\epsilon_n}\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) + \frac{\epsilon_n}{\lambda_n+\epsilon_n}\int_\Omega \Phi\left(\frac{v}{\epsilon_n}\right)\,dx \leq 1\end{aligned}$$

como $u + v \in L_\Phi(\Omega)$ y definición anterior tenemos

$$|u + v|_\Phi \leq \lambda_n + \epsilon_n$$

tomando el limite cuando n tiende al infinito:

$$|u + v|_\Phi \leq |u|_\Phi + |v|_\Phi$$

$\square$

Observación 2.15. *Otras normas conocidas aparte de la norma de Luxemburgo son:*

(a) ***Norma de Orlicz***

$$\|u\|_{\Phi,O} := \sup\left\{ \left|\int_\Omega uv\ dx\right| : v \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)\ y\ \int_\Omega \tilde{\Phi}(v)\ dx \leq 1 \right\}$$

(b) ***Norma de Amemiya***

$$\|u\|_{\Phi,A} := \inf_{k>0}\left\{ \frac{1}{k}\left(1 + \int_\Omega \Phi(ku)\ dx\right) \right\}$$

Para probar que $L_\Phi(\Omega)$ con la aplicación $|\,.\,|_\Omega$ define un espacio de Banach es necesario el siguiente lema:

Lema 2.16. *Dado Φ una N-función, satisface:*

(a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\, \Phi(t)$ *para todo* $\alpha \in [0, 1]$ *y para todo* $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\Phi(\beta t) > \beta\Phi(t),\ \beta \in (1, +\infty)$ *y* $t \in \mathbb{R}$

Demostración.

(a) Debido a la convexidad de Φ, se tiene:

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + 0(1 - \alpha)) \leq \alpha\Phi(t), \quad \text{para todo} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

(b) Sin perdida de generalidad, considere $0 < t$ (Φ es par), luego

$$\Phi\left(\frac{1}{\beta}t\right) \leq \frac{1}{\beta}\Phi(t)$$

Haciendo:$s = \left(\frac{1}{\beta}\right)t$. obtenemos

$$\beta\Phi(s) \leq \Phi(\beta s),\ \text{para } s > 0$$

$\square$

Lema 2.17. *Si $u \in L_\Phi(\Omega)$ es una función no trivial, entonces*

$$|u|_\Phi = \text{mín}\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right)\, dx \leq 1\right\}$$

Demostración. Sea

$$S = \left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \tag{2.3}$$

se probará que $|u|_\Phi \in S$.

Como $|u|_\Phi$ es una norma entonces es mayor a 0.

Sea (λ_n) sucesión minimizante en $|u|_\Phi$ es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda_n}\right)\, dx \leq 1,\ \text{y}\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = |u|_\Phi$$

así

$$\lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) = \Phi\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{u}{\lambda_n}\right)\right) = \Phi\left(\frac{u}{|u|_\Phi}\right)$$

por el lema de Fatou, $\Phi\left(\dfrac{u}{|u|_\Phi}\right)$ es integrable y

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{|u|_\Phi}\right)\, dx \leq \liminf \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda_n}\right) \leq 1$$

por tanto $|u|_\Phi \in S$. $\square$

Lema 2.18. *Sea $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible y $k_0 > 0$. Entonces*

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{k_0}\right)\,dx = 1$$

si y solamente si, $|u|_\Phi = k_0$

Fijado $p \geq 1$, sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ una función dada por:

$$\Phi(t) = \frac{|t|^p}{p},\ t \in \mathbb{R}$$

Afirmamos que

$$K_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$$

y

$$|\,.\,|_\Phi = p^{-\frac{1}{p}}|\,.\,|_p,$$

donde $|\,.\,|_p$ es la norma del espacio de Lebesgue $L^p(\Omega)$
En efecto, notamos que $u \in K_\Phi(\Omega)$ si y solo

$$\int_\Omega \Phi(u)\,dx < +\infty$$

equivalente a

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx < +\infty$$

es decir $u \in L^p(\Omega)$. Por tanto $K_\Phi(\Omega) = L^P(\Omega)$

Supongase ahora que $u \in L_\Phi(\Omega)$, equivalentemente tenemos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right)\,dx < +\infty$$

para algun $\lambda > 0$ o sea

$$\frac{1}{p\lambda^p}\int_\Omega |u|^p\,dx < +\infty$$

donde esto sucede si y solo si, $u \in L^p(\Omega)$. Luego $L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$

Se sigue que:

$$K_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$$

Observe ahora que:

$$\begin{aligned}
|u|_\Phi &= \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0;\ \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right)\ dx \leq 1\right\}\\
&= \operatorname{ínf}\left\{\lambda > 0;\ \frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda\right\}\\
&= p^{-\frac{1}{p}}|u|_p.
\end{aligned}$$

Proposición 2.19. *Si Ω es acotado, entonces $L_\Phi(\Omega)$ esta inmerso continuamente en $L^1(\Omega)$.*

Proposición 2.20. *El espacio de Orlicz $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ esta inmerso continuamente en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Dividiremos esta prueba en dos casos:

Caso 1: Para todo $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, $L_\Phi(\mathbb{R}^N) \subset L^1(K)$.
Dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{|u|}{\lambda}\right)\ dx < +\infty \tag{2.4}$$

para algún $\lambda > 0$.
Como:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty$$

por definición de límite, existe un $R > 0$ tal que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \geq 1,\ \text{para todo}\ t \geq R$$

donde

$$\Phi(|t|) \geq |t|,\ \ |t| \geq R \tag{2.5}$$

Fijado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y sea $A = \{x \in K; |u| \geq \lambda R\}$, se sigue de (2.4) y (2.5)

$$\int_A \frac{|u|}{\lambda}\, dx \leq \int_A \Phi\left(\frac{|u|}{\lambda}\right)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{|u|}{\lambda}\right)\, dx < +\infty$$

y por tanto

$$\int_A |u|\, dx < +\infty$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_K |u|\, dx &= \int_{A^c} |u|\, dx + \int_A |u|\, dx \\ &\leq \lambda R|A^c| + \int_A |u|\, dx \\ &\leq \lambda R|K| + \int_A |u|\, dx < +\infty \end{aligned}$$

entonces $u \in L^1(K)$. Así $L_\Phi(\Omega) \subset L^1(K)$.

Caso 2: Si K es un compacto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $j : L_\Phi(\mathbb{R}^N) \to L^1(K)$ es el operador identidad, entonces j es lineal y acotado. Se afirmar lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(|u|\right)\, dx \leq |u|_\Phi, \quad \text{para cada} \quad u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N) \quad \text{satisfaciendo} \quad |u|_\Phi \leq 1. \tag{2.6}$$

En efecto, sea $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ tal que $|u|_\Phi \leq 1$ y de la convexidad de Φ se sigue

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(|u|\right)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(|u|_\Phi \frac{|u|}{|u|_\Phi}\right)\, dx \leq |u|_\Phi \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{|u|}{|u|_\Phi}\right)\, dx$$

por tanto por el Lema 2.17 se verifica (2.6).

Ahora, fijamos $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ definimos el conjunto $H = \{x \in K; |u| \leq R\}$, tenemos de (2.5)

$$\int_K |u|\, dx = \int_H |u|\, dx + \int_{H^c} |u|\, dx \leq R|H| + \int_{H^c} \Phi(|u|)\, dx \leq R|K| + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u|)\, dx$$

asímismo, para $|u|_\Phi \leq 1$, se tiene por (2.6) que:

$$|j(u)|_{L_1(K)} = \int_K |u|\, dx \leq R|K| + |u|_\Phi \leq R|K| + 1 = C$$

concluyendo que j es acotado. De los dos casos la proposición es verificada. $\square$

Observación 2.21. *En la afirmación de la proposición anterior, se destaca que, si u es un elemento del espacio $L_\Phi(\Omega)$ y verifica que su norma de Luxemburg es menor que uno, entonces*

$$\int_\Omega \Phi\left(|u|\right)\, dx \leq |u|_\Phi.$$

2.2.2. El espacio $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$

Lema 2.22. *Sea $u \in L_\Phi(\Omega)$, con norma que satisface $|u|_\Phi \leq k$, entonces*

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{k}\right)\, dx \leq 1, \quad \textit{para todo} \;\; u \in L_\Phi(\Omega).$$

Demostración. Como Φ es creciente y del Lema 2.18:

$$1 = \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{|u|_\Phi}\right)\, dx = \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u|}{|u|_\Phi}\right)\, dx \geq \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u|}{k}\right)\, dx,$$

para todo $u \in L_\Phi(\Omega)$ con $|u|_\Phi \leq k$. $\square$

Proposición 2.23. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto acotado y abierto. Entonces $L_\Phi(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Dado (u_n) una sucesión de Cauchy en $L_\Phi(\Omega)$ se sigue de la proposición anterior que (u_n) es una sucesion de Cauchy en $L^1(\Omega)$.
Como $L^1(\Omega)$ es un espacio de Banach, (u_n) converge fuerte en $L^1(\Omega)$ para una función u. De esto se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = u(x), \quad \text{c.t.p} \quad x \in \Omega, \tag{2.7}$$

una subsucesión.
Desde que (u_n) una sucesión de Cauchy en $L_\Phi(\Omega)$
Dado $\epsilon > 0$

$$|u_n - u_m|_\Phi < \epsilon,$$

para m, n suficientemente grande, del Lema 2.22

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\right)\,dx \leq 1$$

para n, m s.g. Para cada $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\Phi\left(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\right) \geq 0,\ \ m \in \mathbb{N}$$

y de (2.7)

$$\lim_{m\to+\infty} \Phi\left(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\right) = \Phi\left(\frac{u_n - u}{\epsilon}\right) \text{ c.t.p } x \in \Omega$$

asimismo , dado $\epsilon > 0$ por el Lema de Fatou

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n - u}{\epsilon}\right) \leq \liminf_{m\to+\infty} \int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\right) \leq 1,$$

donde

$$|u_n - u|_\Phi < \epsilon,$$

para n s.g, además

$$u_n - u \in L_\Phi(\Omega).$$

En este caso $u_n - u = w \in L_\Phi(\Omega)$, luego $u = u_n - w \in L_\Phi(\Omega)$, mostrando así que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = u \text{ en } L_\Phi(\Omega),$$

y consecuentemente $L_\Phi(\Omega)$ es un espacio de Banach. □

Proposición 2.24. $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(u_n) \subset L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ una sucesión de Cauchy, de la Proposición 2.23, (u_n) es de Cauchy en $L^1(\overline{B}_1(0))$. Como el mencionado espacio es de Banach, entonces existe una subsucesión $\{u_n^1\}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_n^1 = u^1 \quad \text{c.t.p en} \quad \overline{B}_1(0). \tag{2.8}$$

Ahora se realiza el mismo procedimiento para $\overline{B}_2(0)$ y como $\{u_n^1\}$ es de Cauchy en ese espacio, obtenemos la subsucesión $\{u_n^2\}$ de $\{u_n^1\}$ tal que converge en casi todo punto a la función u_2 en $L^1(\overline{B}_2(0))$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} u_n^2 = u^2 \text{ c.t.p en } \overline{B}_2(0) \tag{2.9}$$

De (2.8) y (2.9), se tiene

$$u^1 = u^2 \text{ c.t.p en } \overline{B}_1(0)$$

Repitiendo este argumento, obtenemos la sucesión $\{u_n\}$ en $L^1(\overline{B}_k(0))$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} u_n^k = u^k \text{ c.t.p en } \overline{B}_k(0)$$

y

$$u^k = u^j \text{ c.t.p en } \overline{B}_j(0)$$

para todo $j+1 \leq k$.
Ahora, considerando
$v_k(x) := u_k^k, \quad x \in \mathbb{R}^N$
$u(x) := u^k(x), \quad x \in \overline{B}_k(0),$

Así

$$\lim_{n\to\infty} v_k = u \text{ c.t.p en } \mathbb{R}^N$$

y $\{v_k\}$ es una subsucesión de $\{u_n\}$.

□

Demostración. Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_1$ entonces $|f_n - f_m|_\Phi < 2^{-1}$
Existe $n_2 \in \mathbb{N}$ con $n_2 > n_1$ tal que si $n, m \geq n_2$ entonces $|f_n - f_m|_\Phi < 2^{-2}$
Existe $n_3 \in \mathbb{N}$ con $n_3 > n_2$ tal que si $n, m \geq n_3$ entonces $|f_n - f_m|_\Phi < 2^{-3}$
Por inducción se tiene una sucesión $(n_k) \subset \mathbb{N}$ con $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ tal que si $n, m \geq n_k$ entonces $|f_n - f_m|_\Phi < 2^{-k} \leq 1$
Dado $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

y

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

(g_k) es una sucesión de funciones medibles no negativas, además $|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \in L_\Phi(\Omega)$ para $i \geq 1$ entonces $(g_k) \in L_\Phi(\Omega)$

$$|g_k|_\Phi = \Big| \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \Big|_\Phi \leq \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|_\Phi < \sum_{i=1}^{k} 2^{-k} < 1$$

Como g_k tiende a g cuando k tiende al infinito, entonces $g \in L_\Phi(\Omega)$, aplicamos el Lema de Fatou a (g_k)

$$\int_\Omega \Phi(g) = \int_\Omega \Phi(\text{lím inf}\, g_k) \leq \text{lím inf} \left(\int_\Omega \Phi(g_k) \right) \leq 1$$

entonces $|g|_\Phi \leq 1$, así $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ es absolutamente convergente y $g(x) < \infty$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x))$ c.t.p de Ω. Observe que

$$f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)),\ \forall k \geq 1$$

Siendo $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ es tal que $\text{lím}_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ c.t.p en Ω, esto prueba que f es medible. Veamos que $f \in L_\Phi(\Omega)$.

Dado $0 < \epsilon < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $|f_n - f_m| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Para $m \geq n_0$ y $n_k \geq n_0$ se tiene $|f_{n_k} - f_m| < \dfrac{\epsilon}{2}$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(|f - f_m|)\, dx &= \int_\Omega \Phi\left(\lim_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_m| \right)\, dx = \int_\Omega \Phi(\text{lím inf}\, |f_{n_k} - f_m|) \\ &\leq \text{lím inf} \int_\Omega \Phi(|f_{n_k} - f_m|) \leq 1 \end{aligned}$$

obtenemos $|f_{n_k} - f_m|_\Phi \leq 1$, ahora sea $w = f - f_m \in L_\Phi \Omega$ entonces $f \in L_\Phi \Omega$, mas aún $|f - f_m|_\Phi < \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$. Por tanto $\text{lím}_{m\to\infty} |f - f_m|_\Phi = 0$ □

2.3. Condición Δ_2 y espacio E_Φ

En la sección anterior, se ha observado que no siempre una clase de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ es un espacio vectorial. A continuación se presentará algunos resultados para N-funciones que satisfacen una condición especial, la **Condición** Δ_2 y posteriormente verificaremos que esta condición es necesaria y suficiente para que $K_\Phi(\Omega)$ sea un espacio vectorial, o aún mejor, para que $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$.

Definición 2.25. *Una función Φ satisface la **Condición** Δ_2 y se escribe $\Phi \in \Delta_2$, si existen $t_0 \geq 0$ y $k > 0$, tales que*

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ \text{para } t \geq t_0$$

Para el caso donde $|\Omega| = +\infty$, decimos que $\Phi \in \Delta_2$ si Φ verifica esta desigualdad para $t_0 = 0$.

Lema 2.26. *La función satisface la condición Δ_2 si, y solo si para cada $s > 1$, existen t_0 y $k_s > 0$ tales que*

$$\Phi(st) \leq k_s\Phi(t), \ \text{para } t \geq t_0$$

Para el caso donde $|\Omega| = +\infty$ el resultado vale para todo $t_0 = 0$.

Proposición 2.27. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto de medida finita con $\Phi \in \Delta_2$. Entonces*

$$\lim u_n = u \ \text{en } L_\Phi(\Omega) \ \text{si y solo si} \ \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(|u_n - u|)\, dx = 0$$

Demostración. Si $\lim u_n = u$ en $L_\Phi(\Omega)$, entonces $\lim |u_n - u|_\Phi = 0$, donde

$$|u_n - u|_\Phi < 1,$$

para n suficientemente grande, como Φ es par

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n - u}{|u_n - u|_\Phi}\right)\, dx \leq 1$$

del Lema 2.16

$$\frac{1}{|u_n - u|_\Phi} \int_\Omega \Phi(u_n - u)\, dx \leq 1$$

entonces

$$\int_\Omega \Phi(u_n - u)\, dx \leq |u_n - u|_\Phi$$

por lo que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(u_n - u)\, dx = 0.$$

Para la reciproca, se utiliza el Lema 2.26 para cada $0 < s < 1$ existen constantes $k_s, t_s > 0$ que satisfacen

$$\Phi\left(\frac{t}{s}\right) \leq k_s \Phi(t),$$

para todo $t \geq t_s$. De ahí haciendo $v_n = |u_n - u|$ y $M = \{x \in \Omega; |v_n| \leq t_s\}$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right)\, dx &= \int_M \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right)\, dx + \int_{M^c} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right)\, dx \\
&\leq \int_M \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right)\, dx + k_s \int_{M^c} \Phi\left(v_n\right)\, dx
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi\left(v_n\right)\, dx = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} k_s \int_{M^c} \Phi\left(v_n\right)\, dx = 0$$

Afirmamos que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_M \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right)\, dx = 0$
En efecto, consideramos

$$x_n := \int_M \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right)\, dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi\left(v_n\right)\, dx = 0$, entonces existe una subsucesión $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} v_{n_k}(x) = 0 \text{ c.t.p en } \Omega$$

asimismo,

$$\lim \Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_{n_k}|\leq t_s]}(x) = 0, \quad \text{para c.t.p en } \Omega \tag{2.10}$$

donde $\chi_{[|v_{n_k}|\leq t_s]}$ es una función caracteristica de $N = \{x \in \Omega : v_{n_k}(x) \leq t_s\}$. Observamos también que:

$$\Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_N(x) \leq \Phi\left(\frac{t_s}{s}\right) \in L^1(\Omega). \tag{2.11}$$

De (2.10) y (2.11) se sigue que

$$\lim \int_\Omega \Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_N(x)\, dx = 0$$

es decir

$$\lim \int_N \Phi\left(\frac{v_{n_k}}{s}\right)\, dx = 0$$

De esta forma,

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_{n_k}}{s}\right)\, dx \leq 1$$

para n_k s.g. Por tanto,

$$|v_{n_k}|_\Phi \leq s, \ \text{para } \ n_k \text{ suficientemente grande.} \tag{2.12}$$

Repitiendo este argumento, concluimos que toda subsucesión de $\{v_n\}$ admite una subsucesión que converge a 0 en $L_\Phi(\Omega)$. Luego,

$$\lim_{n\to+\infty} |v_n|_\Phi = 0$$

esto es:

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - u|_\Phi = 0.$$

□

Para el caso de $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, teniendo en cuenta que $t_s = 0$, la demostración es de manera similar.

Proposición 2.28. *$K_\Phi(\Omega)$ es un espacio vectorial (esto es $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$) si, y* *solo si* Φ *satisface la condición* Δ_2.

Demostración. Suponga que Φ satisface la condición Δ_2.
Para mostrarnos que $K_\Phi(\Omega)$ es un espacio vectorial, debemos probar que

i) $0 \in K_\Phi(\Omega)$

ii) $u + v \in K_\Phi(\Omega)$; para $u, v \in K_\Phi(\Omega)$

iii) $lu \in K_\Phi(\Omega)$, para $l \in \mathbb{R}$ y $u \in K_\Phi(\Omega)$

La verificación del primer item es inmediata.
Se probara primero el tercer item (iii): Dado $l \in \mathbb{R}$, fijado $n \in \mathbb{N}$ con $|l| \leq 2^n$
Luego:

$$\Phi(lu(x)) = \Phi(|l|u(x)) \leq \Phi(2^n u(x)) \leq k^n \Phi(u(x)), \text{ con } u(x) \geq t_0 \text{ y } x \in \Omega \tag{2.13}$$

para algún $t_0 \geq 0$.
Considerando

$$A = \{x \in \Omega : |u(x)| < t_0\}$$

se obtiene que

$$\int_\Omega \Phi(lu)\, dx = \int_A \Phi(lu)\, dx + \int_{\Omega \setminus A} \Phi(lu)\, dx \leq \int_A \Phi(lu)\, dx + k^n \int_{\Omega \setminus A} \Phi(u)\, dx$$

donde

$$\leq \Phi(lt_0)|A| + k^n \int_\Omega \Phi(u)\, dx < +\infty$$

lo que implica que $lu \in K_\Phi(\Omega)$. En el caso $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tendríamos que A vació, así el resultado seguiría siendo valido.

Verificaremos el segundo item: Dados $u, v \in K_\Phi(\Omega)$, se sigue de Φ convexa que:

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2}(u+v)\right) dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \Phi(u)\, dx + \int_\Omega \Phi(v)\, dx\right) < +\infty$$

De (iii)

$$u + v = 2\left(\frac{1}{2}(u+v)\right) \in K_\Phi(\Omega)$$

Recíprocamente, suponga por contradicción que Φ no verifica la condición Δ_2 así, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{t\to+\infty} t_n = +\infty$ verificando:

$$\Phi(t_n) < \frac{1}{n}\Phi(2t_n),\ n \in \mathbb{N} \tag{2.14}$$

Sin perdida de generalidad, suponga que $\{t_n\}$ sea una sucesión creciente. Y considere $\{\Omega_n\}$ una sucesión de subconjuntos de Ω disjuntos, satisfaciendo:

$$|\Omega_n| := \frac{c}{n^{3/2}\Phi(t_n)} \tag{2.15}$$

donde $c > 0$ y tomando suficientemente pequeño, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Omega_n| < |\Omega|$$

ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\Phi(t_n)} < +\infty$$

Observe que en el caso $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la constante c es innecesaria.
Considerando

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n\chi_{\Omega_n}(x), x \in \Omega$$

tenemos

$$\Phi(u) = \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\chi_{\Omega_n}(x)\right) = \Phi\left(\lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n}(x)\right) = \lim_{k\to\infty}\Phi\left(\sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n}(x)\right)$$

de donde se obtiene

$$\Phi(u) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n}(x)$$

Se sigue del teorema de convergencia monótona:

$$\int_\Omega \Phi(u)\, dx = \lim_{k\to+\infty}\int_\Omega \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n}(x))\, dx$$

donde se sigue de (2.15)

$$\int_{\Omega} \Phi(u)\, dx = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)|\Omega_n| = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty$$

Por otro lado, por (2.14) y (2.15)

$$\int_{\Omega} \Phi(2u)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2t_n)|\Omega_n| > \sum_{n=1}^{\infty} n\Phi(t_n)|\Omega_n| = c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} = +\infty$$

que es una contradicción.

$\square$

Observaciones 2.29.

1. *Dada una N-función $\Phi \in \Delta_2$, existen constantes positivas a, b, tal que*

$$\Phi(t) \leq at^b$$

para un t suficientemente grande. Es decir, Φ tiende al infinito por debajo de una función polinomial.
Considere $t_0 \geq 0$ y $k > 0$ tal que :

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t),\ t \geq t_0 > 1,$$

siendo así

$$\Phi(2^n t_0) \leq k^n \Phi(t_0)$$

Dado $t > 0$ suficientemente grande, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [2^n, 2^{n+1}t_0]$ luego

$$\Phi(t) \leq \Phi(2^{n+1}t_0) \leq k^{n+1}\Phi(t_0) = k\Phi(t_0)2^{n\log_2 k} \leq k\Phi(t_0)t^{\log_2 k}$$

así

$$\Phi(t) \leq at^b, \tag{2.16}$$

donde $a = k\Phi(t_0)$ y $b = \log_2 k$

2. El hecho de que Φ es una N-función que tiende al infinito por debajo de una función polinomial, no garantiza que Φ cumpla la condición Δ_2.

a. $\Phi(t) = \frac{|t|^p}{p}$, $p \in (1, +\infty)$ *satisface la condición* Δ_2*:*

$$\Phi(2t) = k\Phi(t), \tag{2.17}$$

donde $k = 2^p$

b. $\Phi_1(t) = \exp(t^2) - 1$ *y* $\Phi_2(t) = \exp|t| - |t| - 1$ *No cumplen la condición* Δ_2*, debido a que las funciones* $\Phi_1(t)$ *y* $\Phi_2(t)$ *tiende al infinito mas rapido que cualquier función polinomial.*

Proposición 2.30. *Si* Φ *satisface la condición* Δ_2 *, entonces*

$$\{u_n\} \text{ es acotada en } L_\Phi(\Omega) \text{ si y solo si } \{\int_\Omega \Phi(|u_n|)\,dx\} \text{ es acotada.}$$

Demostración. Sea $\{u_n\}$ acotada en $L_\Phi(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que $|u_n|_\Phi \leq K$

$$\frac{|u_n|_\Phi}{K} \leq 1.$$

Ahora usando la condición Δ_2,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(u_n)\,dx = \int_\Omega \Phi\left(\frac{|u_n|_\Phi}{K}\frac{u_n}{\frac{|u_n|_\Phi}{K}}\right)\,dx &\leq \frac{|u_n|_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\left(K\frac{u_n}{|u_n|_\Phi}\right)\,dx \\ &\leq C_K\frac{|u_n|_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n}{|u_n|_\Phi}\right)\,dx \leq C_K\end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se debe a la condición Δ_2, por tanto, $\{\int_\Omega \Phi(|u_n|)\,dx\}$ es acotado.

Recíprocamente, supongamos por contradicción que $\{u_n\}$ no sea acotada en $L_\Phi(\Omega)$, es decir, $\lim_{n\to\infty} |u_n|_\Phi = \infty$. así para un n s.g se tiene $|u_n|_\Phi > 1$, con lo que

$$\int_\Omega \Phi(|u_n|)\,dx > |u_n|_\Phi \int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n}{|u_n|_\Phi}\right)\,dx = |u_n|_\Phi,$$

para n s.g. Haciendo tender n al infinito en la desigualdad anterior, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \Phi(|u_n|)\, dx = \infty$$

$\square$

2.4. El espacio $E_{\Phi}(\Omega)$

Sea Ω un dominio acotado, definamos

$$E_{\Phi}(\Omega) := \overline{L^{\infty}(\Omega)}^{|.|_{\Phi}}$$

Se probará que el espacio $E_{\Phi}(\Omega)$ es el mayor espacio vectorial contenido en la clase de Orlicz $K_{\Phi}(\Omega)$. Además, de eso, este espacio sera igual al espacio de Orlicz $L_{\Phi}(\Omega)$ si y solo si Φ satisface la condición Δ_2.
Si $\Omega = \mathbb{R}^N$, considere

$$E_{\Phi}(\mathbb{R}^N) := \overline{B_0(\mathbb{R}^N)}^{|.|_{\Phi}},$$

donde $B_0(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N),\ supp(u) \subset\subset \mathbb{R}^N\}$
Afirmamos que

$$E_{\Phi}(\Omega) \subset K_{\Phi}(\Omega)$$

En efecto, sea $u \in E_{\Phi}(\Omega)$. Entonces existe $v \in L^{\infty}(\Omega)$ tal que

$$\|u - v\|_{\Phi} < \frac{1}{2},$$

donde

$$\int_{\Omega} \Phi\left(\frac{u - v}{1/2}\right)\, dx \leq 1,$$

es decir

$$\int_{\Omega} \Phi(2(u - v))\, dx \leq 1$$

entonces $2(u - v) \in K_{\Phi}(\Omega)$.
Desde que

$$u = \frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v),$$

tenemos

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2}(2u-2v)+\frac{1}{2}(2v)\right) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(2v)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(2u-2v)dx < +\infty$$

donde $u \in K_\Phi(\Omega)$. Y por tanto $E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega)$.
Observamos anteriormente que $K_\Phi(\Omega)$ esta , en general, estrictamente contenido en el espacio de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$. De este hecho podemos concluir que, en general, $L^\infty(\Omega)$ no es denso en $L_\Phi(\Omega)$. A continuacion veremos que $E_\Phi(\Omega)$ define un espacio vectorial, concluyendo así que $E_\Phi(\Omega)$ está, en general, estrictamente contenido en $K_\Phi(\Omega)$

Lema 2.31. *Definiendo*

$$D = \left\{u \in L_\Phi(\Omega); d_{|\cdot|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) < \frac{1}{2}\right\}$$

el cual está incluido en $K_\Phi(\Omega)$, esto es $D \subset K_\Phi(\Omega)$.

Demostración. Sea $u \in D$ y $w \in E_\Phi(\Omega)$ tales que

$$|u-w|_\Phi < \frac{1}{2}$$

de este hecho,

$$|u-w|_\Phi < \frac{1}{2} - \delta \tag{2.18}$$

para $\delta > 0$.
Sea $v \in L^\infty(\Omega)$, tal que

$$|w-v|_\Phi < \delta \tag{2.19}$$

De (2.18) y (2.19)

$$|u-v|_\Phi \leq |u-w|_\Phi + |w-v|_\Phi$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(2(u-v))\,dx \leq 1,$$

implicando

$$u = \frac{1}{2}(2u-2v) + \frac{1}{2}(2v) \in K_\Phi(\Omega)$$

con lo que esta probado. □

Lema 2.32. *Sea $A = \{u \in L_\Phi(\Omega); dist(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1\}$. Entonces $K_\Phi(\Omega) \subset A$.*

Demostración. Sea $u \in K_\Phi(\Omega)$ considere

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } |u(x)| \leq n \\ 0 & \text{si } o.c \end{cases}$$

Note que $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$
Considerando

$$\Omega_\infty = \{y \in \Omega; \, u(y) = \pm\infty\}$$

tenemos

$$|\Omega_\infty| = 0 \tag{2.20}$$

porque $\displaystyle\int_\Omega \Phi(u)\, dx < +\infty$. Con lo que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) = 0 \ c.t.p \ x \in \Omega$$

Por lo tanto, desde que

$$\Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) \leq \Phi(u(x)) \ c.t.p \ x \in \Omega \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

tenemos por el TCDL que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(u - u_n)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) = 0$$

donde se sigue para n s.g

$$\int_\Omega \Phi(u - u_n)\, dx \leq 1$$

que implica

$$|u - u_n|_\Phi \leq 1$$

para n suficientemente grande, luego

$$d(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1$$

como se quería mostrar. □

Observación 2.33. $D \subset K_\Phi(\Omega) \subset A$

Proposición 2.34. *$E_\Phi(\Omega)$ es el mayor subespacio vectorial contenido en $K_\Phi(\Omega)$.*

Demostración. Supongamos que exista V tal que $E_\Phi(\Omega) \subset V \subset K_\Phi(\Omega)$ y sea $u \in V$ entonces $u \in K_\Phi(\Omega)$ tal que

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Mostraremos ahora que:

$$\langle u \rangle \subset E_\Phi(\Omega),$$

es decir $u \in E_\Phi(\Omega)$. Supongamos por contradicción que $u \notin E_\Phi(\Omega)$, luego

$$d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) > 0 \tag{2.21}$$

Para $\lambda > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} |w - \lambda u|_\Phi = \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \lambda \left| \frac{w}{\lambda} - u \right|_\Phi = \lambda \inf_{\lambda \hat{w} \in E_\Phi(\Omega)} |u - \hat{w}|_\Phi \\ &= \lambda d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) \end{aligned}$$

De (2.21) para $d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1} < \lambda$:

$$1 < d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)),$$

Del Lema 2.32, $\lambda u \notin K_\Phi(\Omega)$ para $d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1} < \lambda$ contradiciendo el hecho de

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega), \lambda \in \mathbb{R} \tag{2.22}$$

Luego, $u \in E_\Phi(\Omega)$. □

Observación 2.35. *Por lo visto anteriormente , podemos concluir que $L_\Phi(\Omega)$ es el menor subespacio vectorial que contiene a $K_\Phi(\Omega)$ y que $E_\Phi(\Omega)$ es el mayor subespacio vectorial que esta contenido en $K_\Phi(\Omega)$.*

Corolario 2.36. *$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ si y solo si Φ satisface la condición Δ_2.*

Demostración. Si $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, entonces del hecho de que

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega)$$

tenemos

$$K_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$$

de donde se sigue que $K_\Phi(\Omega)$ es un subespacio vectorial, y por tanto Φ verifica la condición Δ_2.

Recíprocamente, si Φ satisface la condición Δ_2, entonces $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, de donde se sigue, por el hecho de que $E_\Phi(\Omega)$ es el mayor subespacio vectorial que esta contenido en $K_\Phi(\Omega)$, que $E_\Phi(\Omega) = K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$. $\square$

Proposición 2.37. *El espacio $E_\Phi(\Omega)$ es separable. Además, el espacio $\mathcal{C}_0(\Omega)$ de las funciones continuas con soporte compacto en Ω es denso en $E_\Phi(\Omega)$, esto es*

$$\overline{\mathcal{C}_0(\Omega)}^{|.|_\Phi} = E_\Phi(\Omega)$$

Demostración. Ver [21]. $\square$

Proposición 2.38. *$L_\Phi(\Omega)$ es separable si y solo si, Φ satisface la condición Δ_2*

Demostración. Ver [21]. $\square$

Capítulo III

Espacios de Orlicz-Sobolev

La principal motivación de este capitulo es describir los espacios de Orlicz-Sobolev, así como sus propiedades e inmersiones, el mencionado espacio es una generalización de los espacios de Sobolev; además se verá que el dual de un espacio de Orlicz se asocia con otro espacio de Orlicz. El lector puede encontrar las principales demostraciones de las proposiciones en [19, 20]

3.1. Dualidad en los espacios de Orlicz

En esta sección nuestro objetivo es identificar quien es el espacio dual del espacio de Orlicz. En lo que sigue, se considerará $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un funcional semicontinua a la derecha y convexa. Así:

$$epi(f) = \{(s, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; f(s) \leq b\}$$

donde $epi(f) \neq 0$, ademas es un subconjunto convexo sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definición 3.1. *Se define* ***función conjugada*** *(o* ***transformada de Legendre****) de f a la función evaluada en los reales*

$$\tilde{f}(t) = \sup\{st - f(s);\ s \in \mathbb{R}\}$$

Lema 3.2. *Considere $\Lambda = \{(t, a) \in \mathbb{R}^2; \tilde{f}(t) \leq a\} = epi(\tilde{f})$ y para cada $(t, a) \in \Lambda$*

defina:

$$A_{t,a} = \{(s,b) \in \mathbb{R}^2; st - a \leq b\}$$

Entonces

$$epi(f) = \bigcap_{(t,a)\in\Lambda} A_{t,a}.$$

Lema 3.3. *Dado $t \in \mathbb{R}$, considerando*

$$A_t = \{(s,b); st - \tilde{f}(t) \leq b\},$$

tenemos

$$epi(f) = \bigcap_{(t,a)\in epi(\tilde{f})} A_{t,a} = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t.$$

Lema 3.4. *La función conjugada de $\tilde{f}$(esto es $\tilde{\tilde{f}}$ es la función f, es decir $f \equiv \tilde{\tilde{f}}$.*

Lema 3.5. *Si f es una N-función, entonces $\tilde{f}$ también es una N-función.*

Proposición 3.6. *Considere Φ una N-función dada por*

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds$$

donde $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisface las condiciones de $(i) - (iv)$ del Lema 2.3. Definiendo

$$\tilde{\phi}(s) = \sup\{t \in \mathbb{R}^+; \phi(t) \leq s\}$$

y

$$\tilde{\Phi}(t) = \int_0^{|t|} \tilde{\phi}(s)ds$$

entonces que $\tilde{\Phi}$ es una N-función.

Observaciones 3.7.

(a) Las funciones definidas en la Proposición 3.6, $\tilde{\phi}, \tilde{\Phi}$ son funciones conjugadas de ϕ y Φ, respectivamente.

(b) Si $\tilde{\phi}$ y ϕ son funciones continuas en $\mathbb{R}^+$, entonces ϕ es la inversa de $\tilde{\phi}$ en $\mathbb{R}^+$.

(c) La función ϕ puede ser definida de la siguiente manera:

$$\phi(t) = \sup\{s,\ \tilde{\phi}(s) \leq t\},\ \text{con } t \in \mathbb{R}^+.$$

Proposición 3.8. ***(Desigualdad de Young)*** *Sea Φ una N-función y $\tilde{\Phi}$ la función conjugada de Φ. Entonces*

$$\Phi(t) + \tilde{\Phi}(s) \geq ts,\ t,\ s \in \mathbb{R}$$

Demostración. Por demostrar. □

Lema 3.9. *Sea Φ y $\tilde{\Phi}$ un par de funciones complementarias. Entonces las siguientes propiedades se verifican para todo $t > 0$,*

(i) $\tilde{\Phi}(\phi(t)) \leq \Phi(2t), \quad t \geq 0$

(ii) $\tilde{\Phi}\left(\dfrac{\Phi(t)}{t}\right); < \Phi(t),$

(iii) $t < \Phi^{-1}(t)\tilde{\Phi}^{-1}(t).$

Lema 3.10. *Sea $\xi(t) = \text{máx}\{t, t^2\}$ y $\tilde{\Phi}$ la función conjugada asociada a Φ. Entonces para t, r positivos,*

(a) $\tilde{\Phi}\left(\dfrac{\Phi(t)}{t}\right)$

(b) $\tilde{\Phi}(tr) \leq \xi(t)\tilde{\Phi}(r).$

Por lo tanto, $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$, $E_{\tilde{\Phi}}(\mathbb{R}^2) = L_{\tilde{\Phi}}(\mathbb{R}^2)$ y $L_{\tilde{\Phi}}(\mathbb{R}^2)$ es separable.

Observación 3.11. *La función $\tilde{\Phi}$ puede ser definida de la siguiente forma:*

$$\tilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}^+}\{st - \Phi(s)\},\ t \in \mathbb{R}^+.$$

En efecto, desde que

$$st \leq \Phi(s) + \tilde{\Phi}(t),\ s,\ t \in \mathbb{R}^+$$

tenemos

$$\tilde{\Phi}(t) \geq st - \Phi(s),\ s,\ t \in \mathbb{R}^+$$

En particular, para $s = \phi(t)$

$$\tilde{\Phi}(t) = \phi(t)t - \Phi(\phi(t)), t \in \mathbb{R}^+$$

luego,

$$\tilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}^+} \{st - \Phi(s)\},\ t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

Mostrando así que $\tilde{\Phi}$ *es la función conjugada de* Φ*.*

A continuación se construirá una función conjugada a partir de una N-función dada.

1. Fijado $p > 1$, sea

$$f(t) = \frac{1}{p}|t|^p,\ t \in \mathbb{R}$$

Para encontrar $\tilde{f}$, considere

$$\xi(s) = st - \frac{1}{p}s^p, s \in \mathbb{R}^+$$

En este caso los puntos de ξ determinan la función conjugada $\tilde{f}$. Por este hecho, ahora obtendremos estos puntos máximos. De

$$\xi'(s) = t - s^{p-1}, s \in \mathbb{R}^+,$$

se tiene

$$\xi'(s) = 0 \text{ si y solo si } t - s^{p-1} = 0,$$

es decir

$$s = t^{\frac{1}{p-1}}$$

Asumiendo que $t \geq 0$, obtenemos:

$$\tilde{f}(t) = \max_{s \in \mathbb{R}^+} \{st - f(s)\} = t^{\frac{p}{p-1}} - f\left(t^{\frac{1}{p-1}}\right) = q^{-1}t^q,$$

donde $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Ahora, utilizando el hecho de que $\tilde{f}$ es par, podemos concluir:

$$\tilde{f}(t)=\frac{1}{q}|t|^q,\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Proposición 3.12. *Sea Φ una N-función y $\tilde{\Phi}$ la función conjugada de Φ.*
Si

$$u\in L_\Phi(\Omega)\ \text{y}\ v\in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$$

entonces

(i) $uv\in L^1(\Omega)$;

(ii) $\displaystyle\int_\Omega uv\,dx\le 2|u|_\Phi|v|_{\tilde{\Phi}}$ *(Desigualdad de Hölder)*

Ahora es posible mostrar que el espacio $L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ esta contenido en el espacio dual de $L_\Phi(\Omega)$, $L_\Phi(\Omega)^*$. Si el funcional Φ no cumple la condición Δ_2, entonces la inclusión es estricta.
De hecho, dado $v\in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ sea $\phi_v:L_\Phi(\Omega)\to\mathbb{R}$ un funcional por

$$\phi_v(u)=\int_\Omega vu\,dx,\ \ u\in L_\Phi(\Omega). \tag{3.2}$$

Se sigue de la Proposición 3.12 que $\phi_v\in L_\Phi(\Omega)^*$.
Supóngase que Φ no cumple la condición Δ_2. En este caso $E_\Phi(\Omega)$ es un subconjunto propio de $L_\Phi(\Omega)$ por el Corolario 2.36. Como $E_\Phi(\Omega)$ es cerrado en $L_\Phi(\Omega)$ (debido a que $E_\Phi(\Omega)=\overline{L^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_\Phi}$), existe $f\in L_\Phi(\Omega)^*$ con f nulo satisfaciendo

$$f(u)=0,\quad u\in E_\Phi(\Omega) \tag{3.3}$$

Suponga por contradicción que exista $v\in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ verificando

$$f(u)=\int_\Omega uv\,dx,\quad u\in L_\Phi(\Omega). \tag{3.4}$$

Considerando $u = sgn(v) \in E_\Phi(\Omega)$, se sigue de 3.3

$$0 = f(u) = \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega |v|\, dx \tag{3.5}$$

donde $v(x) = 0$ $c.t.p$ $x \in \Omega$, implicando así $f \equiv 0$, lo que es una contradicción.

A continuación se mostrarán dos lemas, que serán útiles para comprobar que el dual del espacio $E_\Phi(\Omega)$ (equivalentemente, el dual $E_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$) puede ser identificado con el espacio de Orlicz $L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente, el espacio $L_\Phi(\Omega)$).

Lema 3.13. *Sea $w \in L_\Phi(\Omega)$. Si*

$$1 < |w|_\Phi,$$

entonces

$$\int_\Omega \Phi(w) \geq |w|_\Phi\, dx$$

Demostración. Supongamos que

$$\int_\Omega \Phi(w) < |w|_\Phi\, dx.$$

Como $\dfrac{1}{|w|_\Phi} < 1$ y del Lema 2.16, se tiene:

$$1 = \int_\Omega \Phi(\frac{w}{|w|_\Phi})\, dx \leq \frac{1}{|w|_\Phi} \int_\Omega \Phi(w)\, dx < 1,$$

lo que es una contradicción. □

En lo que sigue consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto de medida finita.

Teorema 3.14. $E_\Phi(\Omega)^* = L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$*(equivalentemente* $E_{\tilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)$*).*

Demostración. Afirmamos que

$$L_{\tilde{\Phi}}(\Omega) \subset E_\Phi(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega).$$

En efecto para cada $\hat{v} \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ podemos definir

$$\begin{aligned} \Psi_{\hat{v}} : E_{\Phi} &\to \mathbb{R} \\ u \to \Psi_{\hat{v}}(u) &= \int_{\Omega} u\hat{v}(u)\, dx, \end{aligned}$$

de modo que $\Psi_{\hat{v}} \in E_{\Phi}(\Omega)^*$. Mostremos ahora que:

$$E_{\Phi}(\Omega)^* \subset L_{\tilde{\Phi}}(\Omega).$$

Sea $\Psi \in E_{\Phi}(\Omega)^*$ y considere

$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \text{ es medible}\}.$$

Sea $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mu(U) = \Psi(\chi_U),\ U \in \Sigma,$$

donde χ_U es la función característica con relación al subconjunto U. Si $|U| = 0$, tenemos

$$\chi_U(x) = 0 \quad \text{para casi todo punto} \quad x \in \Omega,$$

donde $\Psi(\chi_U) = 0$, esto es $\mu(U)$es nulo.
Como μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, se sigue del teorema de Radon-Nikodin, que existe una función $v \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\mu(U) = \int_U v(x)\, dx.$$

De este hecho , considerando $w = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, donde $A_i \subset \Omega$, $i = 1, ..., n$ son subconjuntos medibles y $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$, tenemos

$$\Psi(w) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Psi(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A_i} v\, dx = \int_{\Omega} wv\, dx. \tag{3.6}$$

Dado $u \in L^{\infty}$, se sigue que existen $\{u_n^1\}$, $\{u_n^2\}$ sucesiones de funciones simples no negativas, tales que

$$\lim_{n\to+\infty}\{u_n^1\} = u^+$$

y

$$\lim_{n\to+\infty}\{u_n^2\} = u^-,$$

convergen puntualmente en Ω, además

$$\{u_n^1\} \leq u^+,\ x \in \Omega\,,\, n \in \mathbb{N}$$

y

$$\{u_n^2\} \leq u^-,\ x \in \Omega\,,\, n \in \mathbb{N}.$$

Ahora para cada $\epsilon > 0$ tenemos

$$\lim_{n\to+\infty}\Phi\left(\frac{(u_n^1 - u_n^2) - u}{\epsilon}\right) = 0 \text{ puntualmente en } \Omega$$

y

$$\Phi\left(\frac{(u_n^1(x) - u_n^2(x)) - u(x)}{\epsilon}\right) \leq \Phi\left(\frac{2|u(x)|}{\epsilon}\right)\ \ x \in \Omega\,,\, n \in \mathbb{N}$$

Se sigue del TCDL que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{(u_n^1 - u_n^2) - u}{\epsilon}\right) \leq 1,\ \epsilon > 0$$

para n s.g, donde

$$|(u_n^1 - u_n^2) - u|_\Phi \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande.
Puesto que $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$, tenemos

$$\lim_{n\to+\infty}\Psi(u_n^1 - u_n^2) = \Psi(u)\ en\,\mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Por otro lado, desde que

$$|(u_n^1 - u_n^2)v|_\Phi \leq |uv| \in L^1(\Omega)$$

y

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n^1 - u_n^2)v = uv \text{ puntualmente en } \Omega,$$

aplicamos nuevamente por el TCDL

$$\int_\Omega (u_n^1 - u_n^2)v\,dx = \int_\Omega uv\,dx. \tag{3.8}$$

De (3.6)

$$\Psi_v(u_n^1 - u_n^2) = \Psi_v(u_n^1) - \Psi_v(u_n^2) = \int_\Omega (u_n^1 - u_n^2)v\,dx,$$

aplicando limite cuando n tiende al infinito, de (3.7) y (3.8)

$$\Psi(u) = \int_\Omega uv\ \ dx.$$

Así el funcional $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ restricto a $L^\infty(\Omega)$ es:

$$\Psi(u) = \int_\Omega uv\,dx,\ u \in L^\infty(\Omega). \tag{3.9}$$

Probaremos que $v \in L^1$, obtenido por el Teorema de Radon-Nikodym, pertence a $L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, considérese v_n una función por parte de v, dada por:

$$v_n = \begin{cases} v(x) & \text{si } |v(n)| \leq n \\ 0 \cdot n & \text{si } |v(x)| > n, \end{cases}$$

y

$$\tilde{u}_n(x) = \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{v_n(x)}{\lambda}\right) & \text{si } v_n(x) \neq 0 \\ 0 \cdot n & \text{si } o.c \end{cases}$$

donde $\lambda = \|\Psi\|_*$. Note que $\tilde{u}_n \subset L^\infty$. De este hecho, para justificar que $v \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$, basta probar que

$$\int_\Omega \tilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right)\ dx \leq 1,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

puesto que por el Lema de Fatou

$$\int_\Omega \tilde{\Phi}\left(\frac{v}{\lambda}\right)\, dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \tilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right)\, dx \leq 1,$$

con lo que $v \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ y además,

$$|v|_{\tilde{\Phi}} \leq \lambda$$

donde $\lambda = \|\Psi\|_*$ y como que $(\tilde{u}_n) \subset L^\infty$, tenemos de (3.9)

$$\Psi(\tilde{u}_n) = \int_\Omega \tilde{u}_n v\, dx = \int_{[v_n\neq 0]} \frac{\tilde{\Phi}(v_n/\lambda)}{v_n/\lambda} = \lambda \int_{[v_n\neq 0]} \tilde{\Phi}(v_n/\lambda)\frac{v}{v_n}\, dx = \lambda \int_{[v_n\neq 0]} \tilde{\Phi}(v_n/\lambda)\, dx \tag{3.11}$$

Por otro lado,

$$|\Psi(\tilde{u}_n)| \leq \|\Psi\|_* |\tilde{u}_n|_\Phi = \lambda |\tilde{u}_n|_\Phi,\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Afirmamos que

$$|\tilde{u}_n|_\Phi \leq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Si $|\tilde{u}_n|_\Phi > 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$, se sigue del Lema 3.13

$$|\tilde{u}_n|_\Phi \leq \int_\Omega \Phi(\tilde{v}_n)\, dx = \int_{[u_n\neq 0]} \frac{\tilde{\Phi}(v_n/\lambda)}{v_n/\lambda}\, dx,$$

implicando del Lema 3.9 (ii) que

$$|\tilde{u}_n|_\Phi < \int_{[u_n\neq 0]} \tilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right)\, dx = \int_\Omega \tilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right)\, dx, \tag{3.13}$$

de (3.12) y (3.13)

$$|\Psi(\tilde{u}_n)| < \lambda \int_{[u_n\neq 0]} \tilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right)\, dx = \lambda \int_\Omega \tilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right)\, dx$$

lo que es una contradicción con (3.11). Luego, $|\tilde{u}_n|_\Phi \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ de (3.11) y (3.12) se tiene

$$\lambda \geq |\Psi(\tilde{u}_n)| = \left|\lambda \int_\Omega \tilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right)\, dx\right|$$

es decir,

$$\int_\Omega \tilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right)\,dx \leq 1$$

mostrando así (3.10).
Se ha concluido que dado $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$, existe $v \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$, con

$$\Psi(u) = \int_\Omega uv\,dx.\ u \in L^\infty(\Omega).$$

Si $u \in E_\Phi(\Omega)$, se toma una sucesión $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - u|_\Phi = 0$$

y tendremos de la *desigualdad de Hölder* de la Proposición 3.12

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n v\,dx = \int_\Omega uv\,dx;$$

por tanto

$$\Psi(u) = \int_\Omega uv\,dx,\ \ u \in E_\Phi(\Omega).$$

□

Teorema 3.15. *$L_\Phi(\Omega)$ es reflexivo si y solo si, Φ y $\tilde{\Phi}$ satisfacen la condición Δ_2.*

Demostración. Si Φ y $\tilde{\Phi}$ satisfacen la condición Δ_2, tenemos

$$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) \qquad \text{y} \qquad E_{\tilde{\Phi}}(\Omega) = L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$$

Luego

$$L_\Phi(\Omega)^* = E_\Phi(\Omega)^* = L_{\tilde{\Phi}}(\Omega) \tag{3.14}$$

y

$$L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)^* = E_{\tilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega) \tag{3.15}$$

Considere ahora que $L_\Phi(\Omega)$ sea un espacio reflexivo, esto es

$$L_\Phi(\Omega)^{**} = L_\Phi(\Omega).$$

Recíprocamente, desde que $E_\Phi(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L_\Phi(\Omega)$,

$$E_\Phi(\Omega) \text{ es reflexivo, esto es } E_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^{**}$$

Se sigue de

$$L_\Phi(\Omega) \subset L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)^* = [E_\Phi(\Omega)^*]^* = E_\Phi(\Omega).$$

Mostrando que $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, y por tanto Φ satisface la condición Δ_2.
Mostremos ahora que $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$
En efecto, suponga por contradicción que $\tilde{\Phi}$ no cumple la condición Δ_2. Entonces

$$L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)^* \not\subset L_\Phi(\Omega).$$

Sin embargo, como $\Phi \in \Delta_2$

$$E_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^{**} = L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)^* \not\subset L_\Phi(\Omega),$$

lo que es una contradicción. □

3.2. Espacios de Orlicz-Sobolev

Observamos que el espacio de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ es una generalización natural de los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$. Se definirá el espacio de Orlicz-Sobolev $W^{1,\Phi}(\Omega)$ es una generalización del espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. En lo que sigue se considera Ω un abierto en $\mathbb{R}^N$.

Definición 3.16. *Dada una N-función Φ, se define como espacio de* ***Orlicz-Sobolev****, $W^{1,\Phi}(\Omega)$, al conjunto*

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) : \textit{existen } f_1, ..., f_n \in L_\Phi(\Omega) \textit{ tales que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega f_i \psi\, dx, \psi \in C_0^\infty(\Omega) \textit{ y } i = 1, ..., n \Big\}$$

Observaciones 3.17. *Generalizando, dado* $m \in \mathbb{N}$

$$W^{m,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) : \text{ existen } \{g_\alpha\} \in L_\Phi(\Omega), \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \text{ tales que} \\ \int_\Omega u \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_N^{\alpha_N}} \, dx = (-1)^{\|\alpha\|_S} \int_\Omega g_\alpha \psi \, dx, \\ \text{para cualquier } \psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ y } \|\alpha\|_S \leq m \Big\}$$

Observación 3.18. *Si* $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$ *entonces tales* f_i *son únicos. Así denotaremos*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i \text{ y } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

Observación 3.19. *Sobre* $W^{1,\Phi}(\Omega)$*, podemos establecer*

$$|u|_{1,\Phi,\Omega} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ |u|_\Phi, \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \right\}$$

Lema 3.20. *La norma* $|.|_{1,\Phi,\Omega}$ *es equivalente a la siguiente norma para* $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$

$$|u|_{1,\Phi} = |u|_\Phi + |\nabla u|_\Phi.$$

Teorema 3.21. $W^{1,\Phi}(\Omega)$ *es un espacio de Banach*

Teorema 3.22. *Suponga* Φ *una N-función satisfaciendo la condición* Δ_2*, tenemos:*

(i) $W^{1,\Phi}(\Omega)$ *es separable.*

(ii) Para $T \in W^{1,\Phi}(\Omega)^*$ *existen* $\{v_i\}_{i=0}^N \subset L_{\tilde{\Phi}}(\Omega)$ *tales que:*

$$T(u) = \int_\Omega u v_0 \, dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i \, dx$$

(iii) $W^{1,\Phi}(\Omega)$ *es reflexivo, si* $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ *también.*

3.2.1. Inmersiones de Orlicz y Orlicz-Sobolev

Definición 3.23. *Sea Φ_1 y Φ_2 dos N-funciones. Se dice que Φ_2* ***crece estrictamente mas lento*** *que Φ_1 y escribiremos $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, cuando para todo $k > 0$*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0$$

Teorema 3.24. *Si $|\Omega| < \infty$ y $\Phi_2 \prec \Phi_1$, entonces*

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_2}(\Omega)$$

es una inmersión continua.

Demostración. Por hipótesis, $\Phi_2 \prec \Phi_1$, tomamos k y t_0 positivos tales que

$$\Phi_2(kt) \leq \Phi_1(t),\ t \geq t_0$$

Nótese que

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \subset L_{\Phi_2}(\Omega)$$

Sea $t_1 = \dfrac{1}{k}\Phi_2^{-1}\left(\dfrac{1}{2|\Omega|}\right)$ y $c = \max\left\{1, \dfrac{\Phi_2(kt_0)}{\Phi_1(t_1)}\right\}$

Afirmamos que para todo $t \geq t_1$, tenemos

$$\Phi_2(kt) \leq c\Phi_1(t).$$

En efecto, de echo si $t_1 \geq t_0$ no hay nada que hace, puesto que $c \geq 1$. Ahora, si $t_1 < t_0$, observamos que para $t \geq t_0$ la desigualdad se sigue inmediatamente.
así, tomando $t \in [t_1, t_0]$ tenemos

$$\Phi_1(t_1) \leq \Phi_1(t) \tag{3.16}$$

y

$$\Phi_2(kt) \leq \Phi_2(kt_0) \tag{3.17}$$

De (3.16) y (3.17):

$$\Phi_2(kt) \leq \Phi_2(kt_0) \leq \Phi_2(kt_0)\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_1(t_1)} \leq c\Phi_1(t).$$

se cumple (3.16) Dado $u \in L_{\Phi_1}(\Omega)$, defina

$$\Omega_u = \left\{x \in \Omega; \frac{|u(x)|}{2c|u|_{\Phi_1}} < t_1\right\}$$

De la afirmación anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi_2\left(\frac{k|u(x)|}{2c|u|_{\Phi_1}}\right) dx &= \int_{\Omega_u} \Phi_2\left(\frac{k|u(x)|}{2c|u|_{\Phi_1}}\right) dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_2\left(\frac{k|u(x)|}{2c|u|_{\Phi_1}}\right) dx \\
&\leq \Phi_2(kt_1)|\Omega_u| + c\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\left(\frac{|u(x)|}{2c|u|_{\Phi_1}}\right) dx \\
&= \frac{|\Omega_u|}{2|\Omega|} + c\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\left(\frac{|u(x)|}{2c|u|_{\Phi_1}}\right) dx \\
&\leq \frac{1}{2} + c\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\left(\frac{|u(x)|}{2c|u|_{\Phi_1}}\right) dx
\end{aligned}$$

Se sigue del hecho de $2c \geq 1$, esto es $\frac{1}{2c} \in [0,1]$ que

$$\int_\Omega \Phi_2\left(\frac{k|u|}{2c|u|_{\Phi_1}}\right) dx \leq \frac{1}{2} + \frac{c}{2c}\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\left(\frac{|u|}{|u|_{\Phi_1}}\right) dx \leq 1$$

donde se sique que

$$|u|_{\Phi_2} \leq \frac{2c}{k}|u|_{\Phi_1}$$

mostrando así la continuidad de la inmersión. □

Teorema 3.25. *Suponga que $|\Omega| < \infty$ y $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Si una sucesión (u_n) en $L_{\Phi_1}(\Omega)$ es acotada y convergente en medida , la misma es convergente en $L_{\Phi_2}(\Omega)$.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, defina

$$v_{jk}(x) = \frac{u_j(x) - u_k(x)}{\epsilon},\ x \in \Omega.$$

Por hipótesis, (v_{jk}) es una sucesión acotada en $L_{\Phi_1}(\Omega)$. Entonces existe $R > 0$, tal que

$$|v_{jk}|_{\Phi_1} \leq R, \; j, \, k \in \mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Desde que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, tomemos t_0 tal que

$$\Phi_2(t) \leq \Phi_1\left(\frac{1}{4R}t\right), \; t \geq t_0,$$

donde se sigue que

$$\Phi_2(t) \leq \frac{1}{4}\Phi_1\left(\frac{t}{R}\right), \; t \geq t_0, \tag{3.19}$$

Fijemos $\delta := \dfrac{1}{\Phi_2(t_0)}$ y

$$\Omega_{jk} := \left\{x \in \Omega; |v_{jk(x)}| \geq \Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2|\Omega|}\right)\right\}$$

Desde que (u_n) converge en medida, tomamos $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande

$$|\Omega_{jk}| \leq \delta \text{ para todo } j, \, k \geq N \tag{3.20}$$

Se considera ahora

$$\Omega'_{jk} := \left\{x \in \Omega_{jk}; |v_{jk(x)}| \geq t_0\right\}$$

y

$$\Omega''_{jk} := \Omega_{jk} \setminus \Omega'_{jk}$$

tenemos

$$\int_\Omega \Phi_2(|v_{jk(x)}|)\,dx = \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(|v_{jk(x)}|)\,dx + \int_{\Omega'_{jk}} \Phi_2(|v_{jk(x)}|)\,dx + \int_{\Omega''_{jk}} \Phi_2(|v_{jk(x)}|)\,dx$$

se sigue de (3.19)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi_2(|v_{jk(x)}|)\,dx &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(|v_{jk(x)}|)\,dx + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{jk}} \Phi_1\left(\frac{|v_{jk(x)}|}{R}\right)\,dx + \Phi_2(t_0)|\Omega''_{jk}| \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_\Omega \Phi_1\left(\frac{|v_{jk}|}{R}\right)\,dx + \Phi_2(t_0)|\Omega''_{jk}|\end{aligned}$$

implicando de (3.18) y (3.20)

$$\int_\Omega \Phi_2(|v_{jk(x)}|)\, dx \leq 1,\ \ j,\, k \geq N$$

Luego, $|v_{jk}|_{\Phi_2} \leq 1$ esto es

$$|u_j - u_k|_{\Phi_2} < \epsilon \tag{3.21}$$

justificando así que (u_n) es una sucesión de Cauchy en $L_{\Phi_2}(\Omega)$. Y por tanto, (u_n) es convergente en $L_{\Phi_2}(\Omega)$, ya que $L_{\Phi_2}(\Omega)$ es un espacio de Banach. □

Corolario 3.26. *Suponga que $|\Omega| < \infty$ y $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Si $S \subset L_{\Phi_1}(\Omega)$ es acotado en $L_{\Phi_1}(\Omega)$ y precompacto en el espacio de Lebesgue de las funciones integrables $L^1(\Omega)$ entonces S es precompacto en $L_{\Phi_2}(\Omega)$.*

Demostración. Supóngase que toda sucesión convergente en $L^1(\Omega)$ y convergente en medida. En efecto, este corolario es una consecuencia inmediata del Teorema 3.25 □

En el próximo Lema establecerá una nueva N-función Φ_* asociada a Φ. Verificaremos mas adelante que esta es una N-función critica para obtener inmersiones compactas en los espacios de Orlicz-Sobolev.

Lema 3.27. *Sea Φ una N-función satisfaciendo*

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau < +\infty \tag{3.22}$$

y

$$\int_1^\infty \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau = +\infty, \tag{3.23}$$

entonces la función $\Phi_*^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau, \tag{3.24}$$

es biyectiva y su inversa Φ_* extendida en toda la recta es una N-función.

Observación 3.28. *Supóngase $\Phi(t) = |t|^p$. Si Φ satisface las hipótesis (3.22) y (3.23), entonces $1 \leq p < N$. Se observa que la inversa de Φ en intervalo $[0, +\infty)$ es* *determinada por la función*

$$\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}. \tag{3.25}$$

De este hecho, tenemos

$$\frac{\Phi^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} = \frac{t^{\frac{1}{p}}}{t^{1+\frac{1}{N}}} = t^{\frac{N-p(N+1)}{pN}}$$

Considerando $\alpha = \frac{N-p(N+1)}{pN}$, *note que*

$$\int_0^1 t^\alpha dt < +\infty \text{ si y solo si } \alpha > -1,$$

o sea

$$\int_0^1 t^\alpha dt < +\infty \text{ si y solo si } N > P. \tag{3.26}$$

Además,

$$\int_0^1 t^\alpha dt < +\infty \text{ si y solo si } p \leq N \tag{3.27}$$

De (3.26) y (3.27), podemos concluir que Φ *satisface las hipótesis del Lema 3.27 si y solo si* $p < N$. *Note que para cada* $p < N$ *se tiene*

$$\Phi_*^{-1}(t) = \frac{pN}{N-p} t^{\frac{N-p}{Np}}$$

y por tanto

$$\Phi_*(t) = \frac{N-p}{Np} |t|^{\frac{N-p}{Np}}, \ t \in \mathbb{R},$$

como $p^* = \frac{Np}{N-p}$, *obtenemos*

$$\Phi_*(t) = \frac{1}{p^*} |t|^{p^*} \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}.$$

En adelante, Ω *denotará un dominio* ***admisible***, *esto es, un dominio donde ocurra la inmersión continua de Sobolev del espacio* $W^{1,1}(\Omega)$ *en* $L^q(\Omega)$ *para todo* $1 \leq q \leq \frac{N}{N-1}$.

Teorema 3.29. *Sea* Ω *un dominio abierto y admisible. Suponga que la N-función* Φ *satisface las hipótesis del Lema 3.27. Si* Φ_*^{-1} *es dada por*

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}}$$

entonces

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_*}(\Omega)$$

inmersión continua. Además de eso, si $|\Omega| < +\infty$ *y* Ψ *es una N-función creciendo estrictamente mas lento que* Φ_**, entonces* $W^{1,\Phi}(\Omega)$ *esta inmerso compactamente en* $L_\Psi(\Omega)$*.*

Observación 3.30. *Debido a N-función* Φ_* *es la función limite para obtener una inmersión compacta, se dice que* Φ_* *es una función de crecimiento critico de* Φ*.*

3.3. El espacio $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Se define $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ como la cerradura del espacio $C_0^\infty(\Omega)$ con relación a la norma

$$|u|_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)} = |\nabla u|_\Phi + |u|_\Phi$$

esto es:

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{|.|_{1,\Phi}}$$

3.3.1. Desigualdad de Poincaré en el espacio $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Teorema 3.31. *Sea* Ω *un dominio acotado y* Φ *una N-función. Para todo* $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$*, se cumple*

$$\int_\Omega \Phi(|u|)\,dx \leq C \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx$$

donde C *es una constante que depende de* Φ*.*

Demostración. Desde que Ω es acotado, suponga que

$$\Omega \subset (a,b) \times \mathbb{R}^{N-1},$$

donde a y b son constantes reales. Dado $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, se tiene por el TFC que

$$\varphi(t) = \int_a^t \varphi'(s)ds,\ t \in (a,b),$$

entonces

$$|\varphi(t)| \leq \int_a^t |\varphi'(s)|ds, \ t \in (a,b)$$

así

$$|\varphi(t)| \leq \int_a^b |\varphi'(s)|ds, \ t \in (a,b) \tag{3.28}$$

Considerando $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ y $x = (t, x')$, con $x' = (x_2, ..., x_N)$

$$|\psi(x)| = |\psi(t, x') = |\psi_{x'}(t)| \leq \int_a^b |\psi'_{x'}(t)|dt \tag{3.29}$$

Usando la desigualdad de Jensen, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(\psi(x))\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_a^b \Phi(|\psi(t,x')|)dt\, dx' \leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_a^b \Phi\left(\int_a^b |\psi'_{x'}(s)|ds\right) dt\, dx' \\ &= (b-a) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Phi\left(\frac{(b-a)\int_a^b |\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s,x')|ds}{\int_a^b 1ds}\right) dx'\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(\psi(x))\, dx \ &\leq \ (b-a) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Phi\left(\frac{(b-a)\int_a^b |\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s,x')|ds}{\int_a^b 1ds}\right) dx' \\ &\leq \ (b-a) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi\left((b-a)|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s,x')|\right) ds\, dx' \qquad (3.30) \\ &= \ \int_\Omega \Phi\left((b-a)|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x)|\right) dx \leq C \int_\Omega \Phi(|\nabla \psi|)\ dx\end{aligned}$$

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, considere $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfaciendo

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = u, \text{ en } \ W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} |\nabla(\varphi_n - u)|_\Phi = 0$$

En este caso

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(|\nabla(\varphi_n - u)|)\, dx = 0$$

donde se sigue de Brezis-Lieb que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (\Phi(|\nabla\varphi_n|) - \Phi(|\nabla\varphi_n - \nabla u|) - \Phi(|\nabla u|)) = 0$$

de ahí

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \Phi(|\nabla\varphi_n|)\,dx = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx \tag{3.31}$$

De modo análogo, se muestra que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \Phi(|\varphi_n|)\,dx = \int_\Omega \Phi(|u|)\,dx, \tag{3.32}$$

de (3.30)

$$\int_\Omega \Phi(|\varphi_n|)\,dx \le C\int_\Omega \Phi(|\nabla\varphi_n|)\,dx,\ n\in\mathbb{N},$$

haciendo tender a n hacia el infinito, obtenemos de (3.31) y (3.32)

$$\int_\Omega \Phi(|u|)\,dx \le C\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\,dx,\ u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

□

Observación 3.32. *Observamos la demostración de la Desigualdad de Poincaré, podemos refinar las hipótesis del mismo, solicitando que Ω sea solo acotado en una dirección*

Corolario 3.33. *Suponga que $|\Omega| < \infty$. Entonces*

$$|u|_\Phi \le C|\nabla u|_\Phi \tag{3.33}$$

para todo $u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Se sigue de este corolario que la norma definida por $|\nabla u|_\Phi$ es equivalente a la norma $|u|_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}$. De este hecho, $|\nabla u|_\Phi$ puede ser definido como la norma para el espacio $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Proposición 3.34. $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *es un espacio de Banach reflexivo y separable.*

Demostración. De hecho, desde que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $W^{1,\Phi}(\Omega)$ y además se sabe que $W^{1,\Phi}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo (puesto que $\Phi \in \Delta_2$ y por el Teorema 3.22), se sigue que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo. $\square$

Debido a Donaldson e Trudinger 1971 [15] existe una constante $\gamma = \gamma(N)$, tal que

$$|u|_{\Phi_*} \leq \gamma |\nabla u|_{\Phi}, \ u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

dicho de otra manera $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ esta inmerso continuamente en $L_{\Phi_*}(\Omega)$.

Capítulo IV

Ecuación elíptica con crecimiento exponencial crítico

Se estudiará la existencia de soluciones no triviales de la siguiente ecuación elíptica

$$-\triangle u + V(x)u - \epsilon h(x) \ \in \ \partial_t F(x,u) \ \text{ en } \ \mathbb{R}^2 \tag{4.1}$$

donde $\epsilon > 0$, V una función continua con algunas condiciones, $h \in (H^1(\mathbb{R}^2))^*$ y $\partial_t F(x,u)$, que es el gradiente generalizado de $F(x,t)$ con respecto a t y $F(x,t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,s)ds$. Se asume que f es una función discontinua con crecimiento critico exponencial, se aplicara métodos variacionales para encontrar solución de (4.1) cuando ϵ es suficientemente pequeño.

4.1. Hipótesis y consideraciones previas

Una función f tiene crecimiento crítico exponencial si existe $\alpha_0 > 0$ tal que:

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo } \alpha > \alpha_0 \\ +\infty, & \text{para todo } \alpha < \alpha_0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Supongamos que existe $\alpha_0 > 0$ tal que:

(h_0) $\limsup_{t\to+\infty} \dfrac{\text{máx}\{|\xi| : \xi \in \partial_t F(x,t)\}}{e^{\alpha_0|t|^2}} < +\infty$ es uniforme en $x \in \mathbb{R}^2$.

(h_1) $\limsup_{t\to 0} \dfrac{2\,\text{máx}\{|\xi| : \xi \in \partial_t F(x,t)\}}{|t|} < +\infty$ es uniforme en $x \in \mathbb{R}^2$

Las condiciones para V, h y f fueron presentadas en la introducción. En (h_3), el espacio E es un espacio de Hilbert

$$E := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 \ dx < +\infty \right\}$$

con el producto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\, dx.$$

Asociado al producto interno, se tiene la norma

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

La desigualdad de Hölder junto a la condición (V_2), tiene como consecuencia:

(E_1) E esta inmerso compactamente en $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$.

Lema 4.1. *Sea $X = H_0^1(\Omega)$ o $X = H^1(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado suave o $\Omega = \mathbb{R}^2$. Entonces, X esta inmerso continuamente en $E_\Phi(\Omega)$.*

Demostración. Ver [3] □

Por otra parte, se utiliza la condición (V_1) para implicar que E esta inmerso continuamente en $H^1(\mathbb{R}^2)$, esto junto al Lema previo muestra,

(E_2) $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow E_\Phi(\Omega)$.

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^2$, por la desigualdad de Trudinger-Moser. para todo $\alpha > 0$ y $u \in H_0^1(\Omega), e^{\alpha u^2} \in L^1(\Omega)$, ver [25, 36]. Mas aún, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{\|u\|_{H_0^1} \leq 1} \int_\Omega e^{\alpha u^2}\, dx \leq C|\Omega|, \text{ si } \alpha \leq 4\pi$$

Otra versión en el espacio $H_1(\Omega)$ fue probada por Adimurthi, Yadava [1], menciona que si Ω es un dominio acotado con borde suave, luego para cualquier $u \in H_1(\Omega)$

$$\int_\Omega e^{\alpha u^2}\,dx < +\infty, \text{ para todo } \alpha > 0.$$

El siguiente resultado es una extensión para todo el espacio $\mathbb{R}^2$ obtenido por Cao [9].

Proposición 4.2. *Si $\alpha > 0$ y $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u^2} - 1\right) dx < +\infty.$$

Además, si $\|\nabla u\|_2^2 \leq 1$, $\|u\|_2 \leq M < \infty$ y $\alpha < 4\pi$ entonces existe una constante positiva $C = C(M,\alpha)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha u^2} - 1\right) dx \leq C(M,\alpha).$$

Lema 4.3. *(Ver [33]) Para $p = 2$. Sea $\alpha > 0$ y $r > 1$. Entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$(e^{\alpha|t|^2} - 1)^r \leq e^{r\alpha|t|^2} - 1, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

4.2. Planteamiento variacional

Lema 4.4. *Sea $\alpha > 0$ y (u_n) sea una sucesión en $H^1(\mathbb{R}^2)$ con*

$$\limsup_{n\to+\infty} \|u_n\| < \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}.$$

Luego, existe $t > 1$, t próximo a 1, y $C > 0$ satisfaciendo

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha|u_n|^2} - 1\right)^t dx \leq C, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Como

$$\limsup_{n\to+\infty} \|u_n\| < \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha}}$$

existen $0 < m$ y $n_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|u_n\|^2 < m < \frac{4\pi}{\alpha}, \text{ para todo } n \geq n_0$$

Sea $t > 1$, con t próximo a 1, con $\alpha tm < 4\pi$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha|u_n|^2} - 1\right)^t dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha t|u_n|^2} - 1\right) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha t\|u_n\|^2(\frac{|u_n|}{\|u_n\|})^2} - 1\right) dx$$

para cada $n \geq n_0$. Consecuentemente, por la Proposición 4.2 se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha|u_n|^2} - 1\right)^t dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha tm(\frac{|u_n|}{\|u_n\|})^2} - 1\right) \leq C_1 \text{ para todo } n \geq n_0,$$

para alguna constante positiva C_1. Ahora, tomando

$$C_2 = \max_{1 \leq i \leq n_0 - 1} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha|u_i|^2} - 1\right)^t dx.$$

Por lo tanto, es suficiente considerar $C = \max\{C_1, C_2\}$. □

Lema 4.5. *Sea β, M constantes positivas que satisfacen $\beta M < 4\pi$ y $2 < q$. Si $\|u\|^2 \leq M$, entonces existe $C = C(\beta, M, q) > 0$ tal que,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q \left(e^{\beta|u|^2} - 1\right) dx \leq C(\beta)\|u\|^q.$$

Demostración. Ver [24] □

Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sea una función medible para cada $t \in \mathbb{R}$ y localmente Lipchitz para cada $x \in \mathbb{R}^2$ verificando:

(h_2) Existe $t_0 \geq 0$ tal que

$$f(x,t) = 0 \text{ para } t < t_0 \text{ y todo } \ x \in \mathbb{R}^2$$

y

$$f(x,t) > 0 \text{ para } t > t_0 \text{ y todo } \ x \in \mathbb{R}^2.$$

(h_*) Existen constantes positivas $\alpha_0, c_1, c_2 > 0$ tal que

$$|\xi| \leq c_1|u| + c_2(e^{\alpha_0|u|^2} - 1), \quad \text{para todo } \xi \in \partial_t F(x,u) \text{ y } x \in \mathbb{R}^2$$

donde $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$.

Teorema 4.6. *Supongamos que se satisface (h_2) y (h_*). Entonces, el funcional $\Psi : E_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\Psi(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx \tag{4.3}$$

está bien definida y $\Psi \in Lip_{loc}(E_\Phi(\Omega), \mathbb{R})$.

Demostración. Ver **??** □

Lema 4.7. *Sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sea una N-función y*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \text{ en } E_\psi(\Omega) \tag{4.4}$$

Entonces , existe $\hat{f} \in E_\psi(\Omega)$ y una subsucesión de $\{f_n\}$, denotado por $\{f_{m_k}\}$, tal que

(i) $\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x) = f(x)$ *c.t.p* $x \in \Omega$

(ii) $|f_{m_k}(x)| \leq \hat{f}(x)$ *c.t.p* $x \in \Omega$

Demostración. Como

$$\lim_{m\to\infty} |f_m - f|_\psi = 0$$

Tenemos por la Proposición 2.27

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \psi(f_m - f)\,dx = 0.$$

Entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}$, denotado por $\{f_{m_k}\}$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \psi(f_{m_k} - f)(x) = 0 \text{ c.t.p en } \Omega$$

y

$$\lim_{k\to\infty} (f_{m_k} - f)(x) = \lim_{k\to\infty} \psi^{-1} \circ \psi(|(f_{m_k} - f)(x)|)(x) = 0 \text{ c.t.p en } \Omega$$

así

$$\lim_{k\to\infty} f_{m_k}(x) = f(x) \text{ c.t.p en } \Omega.$$

Definimos:

$$\zeta_m = \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}} - f_{m_k}|$$

además $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in E_\psi(\Omega)$, entonces $(\zeta_m) \in E_\psi(\Omega)$ con

$$|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|_\psi < \frac{1}{2^k},\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Denotaremos $f_k := f_{n_k}$. Para $n \leq m$,

$$|\zeta_m - \zeta_n|_\psi \leq \sum_{k=n}^{m} |f_{k+1} - f_k|_\psi \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{2^k}$$

de donde el ultimo termino converge a 0 cuando m tiende al infinito, obtenemos que $\{\zeta_m\} \subset E_\psi(\Omega)$ es una sucesión de Cauchy en $E_\psi(\Omega)$. Como $E_\psi(\Omega)$ es un espacio de Banach, existe $\zeta \in E_\psi(\Omega)$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} \zeta_m = \zeta, \quad \text{en} \quad E_\psi(\Omega).$$

Luego

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \psi(\zeta_m - \zeta)\, dx = 0$$

entonces existe una subsucesión con

$$\lim_{k\to\infty} \zeta_{m_k}(x) = \zeta(x) \text{ en c.t.p de } \Omega,$$

$$\zeta_{m_k}(x) \leq \zeta(x) \text{ en c.t.p de } \Omega \text{ y } k \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, para $n \leq m$,

$$|(f_m - f_n)(x)| \leq \zeta_m(x) \leq \zeta(x) \text{ en c.t.p de } \Omega \tag{4.5}$$

Tomando $\hat{f} = \zeta + |f| \in E_\psi(\Omega)$ y haciendo tender n hacia el infinito, obtenemos

$$|f_m(x)| \leq \hat{f}(x) \quad \text{en c.t.p de } \Omega \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Teorema 4.8. *Supongamos que se cumple (h_*) y que $\underline{f}(x,t)$ y $\overline{f}(x,t)$ son N-funciones medibles. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio acotado o $\Omega = \mathbb{R}^2$, luego para cada $u \in E_\Phi(\Omega)$,*

$$\partial\Psi(u) \subset \partial_t F(x,u) = [\underline{f}(x,u(x)), \overline{f}(x,u(x)] \text{ c.t.p en } \Omega. \tag{4.6}$$

Más aún

$$\partial\Psi|_X(u) \subset \partial\Psi(u), \quad u \in X, \tag{4.7}$$

donde $X = H_0^1(\Omega)$ o $X = H^1(\Omega)$, la inclusión anterior significa que dado $\xi \in \partial\Psi(u) \subset E_\Phi(\Omega)^*$, existe $\tilde{\xi} \in L^{\tilde{\Phi}}$ la cual satisface

(a) $\langle \xi, v\rangle = \int_\Omega \tilde{\xi} v\, dx$, *para todo* $v \in E_\Phi(\Omega)$.

(b) $\tilde{\xi}(x) \in \partial_t F(x,u)$ *c.t.p en* Ω.

Demostración. Dados $v, u \in E_\Phi(\Omega)$, sea $\{g_j\} \subset E_\Phi(\Omega)$ con $\lim\limits_{j\to\infty} g_j = 0$ en $E_\Phi(\Omega)$ y $\{g_j\} \subset \mathbb{R}_+$ con $\lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j = 0$ tal que

$$\Psi^0(u,v) = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \frac{F(u+g_j+\lambda_j v) - F(u+g_j)}{\lambda_j}\, dx \tag{4.8}$$

Tomando

$$F_j(u,v) := \frac{F(u+g_j+\lambda_j v) - F(u+g_j)}{\lambda_j}$$

el teorema de Lebourg garantiza que existe $\xi_j \in \partial_t F(x,\theta_j)$, con θ_j en el segmento $[u+g_j+\lambda_j v, u+g_j]$ tal que

$$|F_j(u,v)| = \frac{1}{\lambda_j} |\langle \xi_j, \lambda_j v\rangle| \leq |\xi_j||v|$$

de la condición (h_*)

$$|F_j(u,v)| \leq \Big(c_1|\theta_j| + c_2(e^{\alpha|\theta_j|^2} - 1)\Big)\, |v|$$

para $\alpha > \alpha_0$ y α cerca a α_0. Fijando

$$b_j = (|u| + |g_j|) + (|u| + |g_j| + \lambda_j|v|) = 2|u| + 2|g_j| + \lambda_j|v|.$$

de lo cual

$$|F_j(u,v)| \leq \left(c_1|\beta_j| + c_2(e^{\alpha|\beta_j|^2} - 1)\right)|v| \tag{4.9}$$

Aplicando el Lema 4.7, como $\lim\limits_{j\to\infty} g_j = 0$ entonces existe $g_* \in E_\Phi(\Omega)$ tal que $g_{j_k} \leq g_*$

$$|\beta_j| \leq 2|u| + 2g_* + c|v| \quad \text{c.t.p en } \Omega,$$

para alguna subsucesión. Así, por (4.8) y (4.9), existe una subsucesión $\{F_{j_k}(u,v)\}$ tal que

$$|F_{j_k}(u,v)| \leq \left(c_1(2|u| + 2g_* + c|v|) + c_2(e^{\alpha(2|u|+2g_*+c|v|)^2} - 1)\right)|v|,$$

donde el ultimo termino pertenece al espacio $L^1(\Omega)$. Por el lema de Fatou

$$\Psi^0(u,v) = \lim_{j_k\to\infty}\int_\Omega F_{j_k}(u,v)\,dx = \limsup_{j_k\to\infty}\int_\Omega F_{j_k}(u,v)\,dx \leq \int_\Omega \limsup F_{j_k}(u,v)\,dx$$

luego

$$\Psi^0(u,v) \leq \int_\Omega F^0(u,v)\,dx$$

del Lema 1.8

$$\Psi^0(u,v) \leq \int_\Omega \max\{\langle\xi,v\rangle; \xi \in \partial_t F(x,u)\}\,dx \leq \int_{[v<0]} \underline{f}(x,u)v\,dx + \int_{[v>0]} \overline{f}(x,u)v\,dx.$$

Ahora, mostraremos que para cada $\xi \in \partial\Psi(u) \subset (E_\Phi(\Omega))^*$, la función $\tilde{\xi} \in L^{\tilde{\Phi}}(\Omega)$, cual satisface

$$\langle\xi,w\rangle = \int_\Omega \tilde{\xi}w\,dx, \quad \text{para todo } w \in E_\Phi(\Omega)$$

también se verifica que

$$\tilde{\xi}(x) \in [\,\underline{f}(x,u(x)), \overline{f}(x,u(x))\,] \quad \text{c.t.p en } \Omega$$

En efecto, asumimos por contradicción que existe un conjunto medible $\mathcal{M} \subset \Omega$, con $0 < |\mathcal{M}| < +\infty$, satisfaciendo

$$\tilde{\xi}(x) < \overline{f}(x, u(x)), \text{ con } x \in \mathcal{M}. \tag{4.10}$$

Tomando $v = -\mathcal{X}_{\mathcal{M}}$ en $E_\Phi(\Omega)$, con lo que tenemos

$$-\int_{\mathcal{M}} \tilde{\xi}\, dx = \int_\Omega \tilde{\xi}(-\mathcal{X}_{\mathcal{M}})\, dx \leq \Psi^0(u, -\mathcal{X}_{\mathcal{M}}) \leq -\int_{\mathcal{M}} \overline{f}(x, u(x))\, dx$$

concluyendo que

$$\int_\Omega \tilde{\xi}\mathcal{X}_{\mathcal{M}}\, dx \geq \int_{\mathcal{M}} \overline{f}(x, u(x))\, dx$$

lo que contradice con (4.10). De este modo,

$$\tilde{\xi}(x) \geq \underline{f}(x, u(x))\, dx, \quad \text{c.t.p en } \Omega.$$

Análogamente se muestra que

$$\tilde{\xi}(x) \leq \overline{f}(x, u(x))\, dx, \quad \text{c.t.p en } \Omega.$$

De la definición de X, sabemos que $\overline{X}^{\|\,\|_\Phi} = E_\Phi(\Omega)$, luego por la inmersión continua expuesta en el Lema 4.1 en E_Φ y la regla de la cadena nos da

$$\partial\Psi|_X(u) \subset \partial\Psi(u), \ \forall\, u \in X.$$

$\square$

4.3. Existencia de solución vía el Principio Variacional de Ekeland

Lema 4.9. *Supongamos que se cumple* $(h_0), (h_2) - (h_4)$. *Entonces existen constantes positivas* $\epsilon_0, r, \alpha, \gamma$ *tales que*

$$c_\epsilon = \inf_{\|u\| \leq r} I_\epsilon(u) < -\gamma$$

y

$$I_\epsilon(u) \geq \alpha \ para \ \|u\| = r$$

para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$. El valor de r es independiente de ϵ, pero α y γ depende de ϵ. Mas aún, los números $\epsilon_0, r, \alpha, \gamma$ no dependen de t_0 de la condición (h_2).

Demostración. Usando las condiciones de F, dado $0 < \beta < \lambda_1$, $q > 2$ y $\alpha > \alpha_0$ tendiendo a α_0, además de la condición (h_3), existe $\epsilon > 0$

$$\limsup_{t\to 0} \frac{2\max\{|\xi|, \xi \in \partial F(x,t)\}}{|t|} < (\lambda_1 - \epsilon) < \lambda_1 \tag{4.11}$$

así, por definición existe $r_0 > 0$ tal que $|t| < r_0$ entonces

$$|\xi| < (\lambda_1 - \epsilon)\frac{|t|}{2}, \text{ para todo } \xi \in \partial F(x,t)$$

Por el teorema de Lebourg, existe $\xi_0 \in \partial F(x,t)$ con $|t| \leq r_0$ tal que

$$|F(x,t) - F(x,0)| \leq |\xi_0||t - 0| = (\lambda_1 - \epsilon)\frac{|t|^2}{2}, \tag{4.12}$$

además por hipótesis dada (h_0):

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\max\{|\xi|, \xi \in \partial F(x,t)\}}{e^{\alpha_0|t|^2}} < +\infty$$

Sea $M = \max\{|\xi|, \xi \in \partial F(x,t)\}$

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{M}{e^{\alpha_0|t|^2}} = L$$

Luego $L = L_2$ En particular obtenemos

$$\lim_{|t|\to+\infty} \frac{M}{|t|^{q-1}(e^{\alpha_0|t|^2} - 1)} = 0$$

dado $C_1 > 0$ existe r_1 tal que $|t| > r_1$ con lo que

$$M \leq C_1|t|^{q-1}(e^{\alpha_0|t|^2} - 1)$$

por otro lado, existe $r_0 > 0$ con

$$\frac{M}{|t|^{q-1}(e^{\alpha_0|t|^2}-1)} \leq C_2,\ r_0 \leq |t| \leq r_1$$

tomando $C = \max\{C_1, C_2\}$

$$M \leq C|t|^{q-1}(e^{\alpha_0|t|^2}-1),\ |t| \geq r_0$$

nuevamente por el teorema de Lebourg, existe $\xi_1 \in \partial F(x,t)$ con $|t| \geq r_0$ tal que

$$|F(x,t) - F(x,0)| \leq |\xi_1||t-0| \leq C|t|^{q-1}(e^{\alpha_0|t|^2}-1),\ |t| \geq r_0 \tag{4.13}$$

Se obtiene por (4.12) y (4.13):

$$F(x,t) \leq \frac{(\lambda_1-\beta)}{2}|t|^2 + C|t|^q(e^{\alpha|t|^2}-1),\ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{4.14}$$

En

$$I_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(x.u)\, dx - \epsilon\int_{\mathbb{R}^2} hu\, dx$$

de (4.14) se tiene

$$I_\epsilon(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{(\lambda_1-\beta)}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|u|^2 - C\int_{\mathbb{R}^2}|u|^q(e^{\alpha|u|^2}-1) - \epsilon\int_{\mathbb{R}^2} hu\, dx \tag{4.15}$$

ahora de (4.11)

$$\lambda_1 = \inf_{u\neq 0,\, u\in E}\frac{\|u\|^2}{|u|_2^2}$$

así

$$\lambda_1 \leq \frac{\|u\|^2}{|u|_2^2}\ \forall\, u \neq 0$$

entonces

$$-\frac{(\lambda_1-\beta)}{2}|u|_2^2 \geq -\frac{(\lambda_1-\beta)}{2\lambda_1}\|u\|^2$$

y por la desigualdad de Hölder en el tercer termino de (4.15), tomando p y p' conjugados mayor que 1

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q (e^{\alpha|u|^2} - 1) \leq \left(\int |u|^{qp'} \right)^{1/p'} \left(\int (e^{\alpha|u|^2} - 1)^p \right)^{1/p} \tag{4.16}$$

luego existe $p > 1$ tal que $\alpha p r^2 < 4\pi$ y sea $\|u\| \leq r$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^q (e^{\alpha|u|^2} - 1) &\leq |u|_{p'}^q \left[\int (e^{p\alpha \frac{|u|^2}{\|u\|^2}\|u\|^2} - 1) \right]^{1/p} \\ &\leq |u|_{p'}^q \left[\int (e^{4\pi \left(\frac{|u|}{\|u\|}\right)^2} - 1) \right]^{1/p} \\ &\leq \tilde{C} |u|_{p'}^q \leq c\|u\|^q \end{aligned} \tag{4.17}$$

por la desigualdad de Trudinger-Moser y la inmersión de $E \hookrightarrow L^q$.

Sean $\beta > L\lambda_1, L < 1$

$$I_\epsilon(u) \geq \frac{L}{2}\frac{\beta}{\lambda_1}\|u\|^2 - c\|u\|^q - \epsilon\|h\|_*\|u\|$$

para $u \in E$ con $\|u\| \leq r$. Por tanto, I_ϵ esta acotado inferiormente. Más aún, asumiendo que r satisface la desigualdad

$$\frac{L}{2}r^2 - cr^q \geq \frac{L}{4}r^2,$$

se obtiene que

$$I_\epsilon(u) \geq \frac{L}{4}r^2 - \epsilon\|h\|r, \quad \text{con } \|u\| = r.$$

Por tanto, si fijamos ϵ_0 tal que

$$\alpha_\epsilon = \frac{1}{4}r^2 - \epsilon\|h\|r > 0, \; \forall\, \epsilon \in (0, \epsilon_0)$$

Luego

$$I_\epsilon(u) \geq \alpha, \quad \text{con } \|u\| = r.$$

Para la siguiente parte, supongamos

$$\int_{\mathbb{R}^2} h\varphi\, dx = 0, \ \ \forall\ \varphi \in E, \text{ entonces } h = 0 \tag{4.18}$$

una contradicción, por lo que existe $\hat{v} \in E$, $\displaystyle\int h\hat{v} \neq 0$.

Si $\displaystyle\int h\hat{v}\, dx < 0$, $v_0 = -\hat{v}$ con lo que $\displaystyle\int hv_0\, dx > 0$. Tomando $v = \frac{v_0}{\|v_0\|}$, entonces

$$\|v\| = 1 \text{ y } \int_{\mathbb{R}^2} hv\, dx > 0.$$

Para cada $s > 0$

$$I_\epsilon(sv) = \frac{s^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, sv)\, dx - \epsilon s \int_{\mathbb{R}^2} hv\, dx < \frac{s^2}{2} - \epsilon s \int_{\mathbb{R}^2} hv\, dx$$

Fijando $s = s(\epsilon) > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\gamma = -\frac{s^2}{2} + \epsilon s \int_{\mathbb{R}^2} hv\, dx > 0$$

se sigue que $\|sv\| < r$ y

$$I_\epsilon(sv) < -\gamma < 0$$

de lo cual resulta

$$c_\epsilon = \inf_{\|u\| \leq r} I_\epsilon(u) < -\gamma < 0.$$

□

Teorema 4.10. *Suponga que* $(V_1), (V_2), (h_0), (h_2)$ *y* (h_3)*. Entonces, el problema (P) posee una solución* $u_\epsilon \in E$*, con* $I_\epsilon(u_\epsilon) = c_\epsilon < -\gamma < 0$*, para todo* $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ *y* $t_0 \in [0, t_*)$*, con* $t_* = t_*(\epsilon) = \frac{2\gamma}{\epsilon \int_{\mathbb{R}^2} hv\, dx} > 0$

Demostración. Fijo $r > 0$ tal que $\alpha_0 r^2 < 4\pi$. Aplicando el Lema 4.9 junto con el Principio variacional de Ekeland, existe $\{u_n\} \subset \overline{B_r}(0)$ cual satisface

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_\epsilon(u_n) = c_\epsilon$

(ii) $\lambda_\epsilon(u_n) := \min\{\|\xi\|_{E^*} : \xi \in \partial I_\epsilon(u_n)\}$, luego $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \lambda_\epsilon(u_n) = 0$

Sea $w_n \in \partial I_\epsilon(u_n)$ y $\{\rho_n\} \subset L_{\tilde{\Phi}}(\mathbb{R}^2)$ satisface $\|w_n\|_{E^*} := \lambda_\epsilon(u_n)$,

$$\langle w_n, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_n \nabla v + V(x)u_n v\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n v\, dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} hv\, dx,\ \forall\ v \in E, \quad (4.19)$$

y

$$\rho_n(x) \in \partial_t F(x, u_n) \text{ c.t.p en } \mathbb{R}^2$$

Afirmamos que $\{\rho_n\}$ es acotado en $L_{\tilde{\Phi}}(\mathbb{R}^2)$. En efecto, tomando $p > 4$, $\alpha > \alpha_0$ con $\alpha r^2 < 4\pi$, la condición (h_*) asegura que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\Phi}(\rho_n)\, dx \le \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\Phi}\left(c_1|u_n| + c_2|u_n|^p(e^{\alpha|u_n|^2} - 1)\right)\, dx$$

de la convexidad de $\tilde{\Phi}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\Phi}(\rho_n)\, dx \le \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\Phi}\left(2c_1|u_n| + 2c_2|u_n|^p(e^{\alpha|u_n|^2} - 1)\right)\, dx\right]$$

y la condición Δ_2 en $\tilde{\Phi}$ se se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\Phi}(\rho_n)\, dx \le \xi(2c_1)\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\tilde{\Phi}(|u_n|)\, dx + \xi(2c_2)\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}\tilde{\Phi}\left(|u_n|^p(e^{\alpha|u_n|^2} - 1)\right)\, dx.$$

Por , existen constantes positivas C_1, C_2 tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\Phi}(\rho_n)\, dx \le C_1(|u_n|_1 + |u_n|_2^2) + C_2\int_{\mathbb{R}^2} (|u_n|^{p+1} + |u_n|^{2(p+1)})\left(e^{\alpha_0|u_n|^2} - 1\right)\, dx$$

Como el espacio E es inmersamente continuo en $L^1(\mathbb{R}^2)$ y $L^2(\mathbb{R}^2)$, el Lema 4.5 asegura que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\Phi}(\rho_n)\, dx \le C_3,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

para algún $C_3 > 0$ de donde se sigue que $\{\rho_n\}$ es acotado en $L_{\tilde{\Phi}}(\mathbb{R}^2)$. Luego, la sucesión de funcionales $\{\tilde{\rho}_n\} \subset \partial\Psi(u_n) \subset (E_\Phi(\mathbb{R}^2))^*$ asociado con $\{\rho_n\}$ es también acotada en $(E_\Phi(\mathbb{R}^2))^*$, así, existe $\tilde{\rho}_0 \in (E_\Phi(\mathbb{R}^2))^*$, tal que $\tilde{\rho}_n \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\rho}_0$ en $(E_\Phi(\mathbb{R}^2))^*$ para alguna subsucesión, esto es,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\rho_n v\,dx = \lim_{n\to\infty}\langle\tilde{\rho}_n, v\rangle = \langle\tilde{\rho}_0, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2}\rho_0 v\,dx,\ \forall v\in E, \tag{4.20}$$

para algún $\rho_0 \in L_{\tilde{\Phi}}(\mathbb{R}^2)$.

Ahora, como $\{u_n\}$ es acotada en E, entonces existe $u_\epsilon \in E$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_\epsilon \text{ in } E. \tag{4.21}$$

De (4.19)-(4.21)

$$0 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_\epsilon\nabla v + V(x)u_\epsilon v\,dx - \int_{\mathbb{R}^2}\rho_0 v\,dx - \epsilon\int_{\mathbb{R}^2}hv\,dx,\ v\in E. \tag{4.22}$$

para concluir que u_ϵ es una solución de (P), debemos probar que:

i) $\rho_0(x) \in \partial_t F(x, u_\epsilon(x))$ c.t.p en $\mathbb{R}^2$ y

ii) $|[u_\epsilon > t_0]| > 0$

Para probar i), debemos mostrar que $\{u_n\}$ converge fuertemente a u_ϵ en E, porque esto implicará que $\tilde{\rho}_0 \in \partial\Psi(u_0)$. De esta manera por el Teorema 4.8

$$\rho_0(x) \in \partial_t F(x, u_\epsilon) \text{ c.t.p en } \mathbb{R}^2$$

En relación al siguiente ítem:
Si $t_0 = 0$, luego $|[u_\epsilon > t_0]| > 0$, porque $u_\epsilon \geq 0$ y $u_\epsilon \neq 0$. Consideraremos el caso $t_0 \in (0, t^*)$. Una vez que $\rho_0, u_\epsilon \geq 0$, se sigue

$$0 = \|u_\epsilon\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2}\rho_0 u_\epsilon\,dx - \epsilon\int_{\mathbb{R}^2}hu_\epsilon\,dx \leq \|u_\epsilon\|^2 - \epsilon\int_{\mathbb{R}^2}hu_\epsilon\,dx$$

esto es,

$$\|u_\epsilon\|^2 \geq \epsilon\int_{\mathbb{R}^2}hu_\epsilon\,dx \tag{4.23}$$

Por contradicción, supongamos que $|[u_\epsilon > t_0]| = 0$, para algún $t_0 \in (0, t^*)$. De este modo,

$$f(x, u_\epsilon(x)) = 0 \text{ c.t.p en } \mathbb{R}^2$$

así

$$\partial_t F(x, u_\epsilon(x)) = \{0\} \text{ c.t.p en } \mathbb{R}^2$$

Por consecuente

$$\rho_0(x) = 0 \text{ c.t.p en } \mathbb{R}^2$$

Por otro lado, por el Lema 4.9 y (4.23),

$$0 > -\gamma > I_\epsilon(u_\epsilon) = \frac{1}{2}\|u_\epsilon\|^2 - \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} hu_\epsilon \, dx \geq -\frac{1}{2}\epsilon \int_{\mathbb{R}^2} hu_\epsilon \, dx \geq -\frac{t_0}{2}u_n$$

lo cual resulta

$$t_0 \geq \frac{2\gamma}{\epsilon \int_{\mathbb{R}^2} h \, dx} = t_* \tag{4.24}$$

lo cual es una contradicción.

Probaremos la convergencia de $\{u_n\}$ a u_ϵ en E. Sea $\delta_n := u_n - u_0$ y $\delta_n \rightharpoonup 0$ en E.

$$\|u_n\|^2 = \|u_\epsilon\|^2 + \|\delta_n\|^2 + o_n(1)$$

Además, tenemos

$$o_n(1) = \langle w_n, u_n \rangle = \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n u_n dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} hu_n dx - \|u_\epsilon\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \rho_0 u_\epsilon dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} hu_\epsilon dx$$

$$o_n(1) = \|\delta_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_0 - \rho_n)u_\epsilon \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n(u_n - u_\epsilon) \, dx + o_n(1)$$

$$o_n(1) = \|\delta_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n(u_n - u_\epsilon) \, dx + o_n(1) = \|\delta_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n \delta_n \, dx + o_n(1). \tag{4.25}$$

de (h_1)

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n \delta_n \, dx \right| \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^2} |u_n||\delta_n| \, dx + c_2 \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_n| \left(e^{\alpha |u_n|^2} - 1 \right) \, dx$$

$$\leq c_1 |u_n|_2^2 |\delta_n|_2^2 + c_2 \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_n| \left(e^{\alpha |\delta_n|^2} - 1 \right) \, dx$$

Con $\alpha r^2 < 4\pi$, existe $q > 1$ tiende a 1, tal que

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{\alpha|\delta_n|^2} - 1 \right)^q \, dx \right)^{\dfrac{1}{q}} < +\infty$$

Por lo tanto, por el Lema 4.5 y la desigualdad de Hölder

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n \delta_n \, dx \right| \leq c_1 |u_n|_2^2 |\delta_n|_2^2 + C|\delta|_{q'},$$

donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Desde que las inmersiones de $E \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ y $E \hookrightarrow L^{q'}(\mathbb{R}^2)$ son compactas, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n \delta_n \, dx = 0 \tag{4.26}$$

De (4.25) y (4.26), $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ en E, o equivalente $\lim_{n\to\infty} u_n = u_\epsilon$ en E, concluyendo la prueba. $\square$

4.4. Existencia de solución vía el Teorema del Paso de Montaña

En esta sección, se asumirá una serie de condiciones para la función f, estas son $(h_0), (h_2), (h_6)$. Por (h_3), existe $\hat{\epsilon}, \hat{\delta} := \hat{\delta}_{\hat{\epsilon}}$ que satisface

$$2 \max\{|\xi| : \xi \in \partial_t F(x,t)\} < (\lambda_1 - \hat{\epsilon})|t|, \ \text{ para } |t| \leq \hat{\delta} \text{ y } x \in \mathbb{R}^2$$

Por teorema de Lebourg, existe $\theta(t)$ en el segmento $[0,t]$ con $|t| \leq \hat{\delta}$ y $\xi \in \partial_t F(x,\theta)$ que verifica

$$|F(x,t)| = |F(x,t) - F(x,0)| \leq |\xi_0||t-0| \leq (\lambda_1 - \hat{\epsilon})\frac{|t|^2}{2}, \quad \text{para } \ x \in \mathbb{R}^2$$

Por (h_0), dado $2 \leq q$ y $\alpha_0 \leq \alpha$, existe $C = C(\hat{\delta}, q) > 0$ tal que

$$|\xi| \leq C|t|^{q-1} \left(e^{\alpha|t|^2} - 1 \right), \quad \text{para } \ \xi \in \partial_t F(x,t),\, \hat{\delta} \leq |t| \, \text{y} \, x \in \mathbb{R}^2$$

Aplicando nuevamente el teorema de Lebourg

$$|F(x,t)| \leq C|t|^q \left(e^{\alpha|t|^2} - 1\right), \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } x \in \mathbb{R}^2$$

De esto, para $u \in E$ no nulo y $\|u\| := \eta_0 < \sqrt{\dfrac{4\pi}{\alpha_0}}$, se observa que:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(x,u)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} C|u|^q \left(e^{\alpha|u|^2} - 1\right) \leq \tilde{C}\|u\|^q \tag{4.27}$$

Aquí, $\tilde{C} := C(q, \hat{\delta}, \alpha_0)$ fijamos α cerca de α_0 tal que $\alpha\eta_0^2 < 4\pi$.

Lema 4.11. *Supongamos que (h_0) y $(h_2) - (h_6)$ se cumplen. Luego, existe $\varphi_0 \in B_r^c$ tal que*

$$I_\epsilon(t\varphi_0) < \inf_{\|u\|=r} I_\epsilon(u), \quad \textit{para} \ \ \epsilon \in (0, \epsilon_0],$$

donde r y ϵ_0 son dados en el Lema 4.9.

Demostración. Sea $\psi_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\}$, con $\operatorname{supp}(\psi_0) \subset K$, donde $K \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto compacto fijado en (h_4). En este caso, para cualquier $\epsilon > 0$,

$$I_\epsilon(t\psi_0) = \frac{1}{2}\|t\psi_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, t\psi_0)\ dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} ht\psi_0\ dx$$

Para el segundo término:

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x,t\psi_0)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} (c_3 t^v \psi_0^v - c_4)\, dx = c_3 \int_K t^v \psi_0^v\, dx - c_4 \int_K dx = c_3 t^v \int_{\mathbb{R}^2} \psi_0^v\, dx - c_4|K|$$

entonces:

$$I_\epsilon(t\psi_0) \leq \frac{t^2}{2}\|\psi_0\|^2 - c_3 t^v \int_{\mathbb{R}^2} \psi_0^v + c_4|K| - t\epsilon \int_{\mathbb{R}^2} h\psi_0\, dx,$$

de donde se sigue que

$$\lim_{t\to+\infty} I_\epsilon(t\psi_0) = -\infty$$

así, el lema se sigue escogiendo $\psi_0 := t\psi_0 \in B_r^c(0)$ con t suficientemente grande. $\square$

Del Teorema 1.10 tomando $\epsilon = \dfrac{1}{n}$ junto a los Lemas 4.9 y 4.11, se obtiene una sucesión $\{v_n\} \subset E$ la cual satisface

$$\lim_{n\to\infty} I_\epsilon(v_n) = d_\epsilon \text{ en } \mathbb{R} \text{ y } \lim_{n\to\infty} \lambda_\epsilon(v_n) := \max\{\|\xi\|_* : \xi \in \partial I_\epsilon(v_n)\} = 0 \tag{4.28}$$

donde

$$d_\epsilon := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} \partial I_\epsilon(\gamma(t))$$

y

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1]; E) : \gamma(0) = 0 \text{ y } \gamma(1) = \varphi_0\}$$

Debido a que $I_\epsilon \in Lip_{loc}(E, \mathbb{R})$, por el Teorema 4.6, se tiene el máximo en (4.28).

En lo subsecuente, se mostrara que I_ϵ verifica la condición de Palais Smale $(P.S)$ si el parámetro μ dado en (h_6) es suficientemente grande. Para esta finalidad necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.12. *Sea $\{v_n\}$ la sucesión dada en (4.28), Entonces, $\{v_n\}$ es acotada en E y*

$$\limsup_{n\to\infty} \|v_n\| \leq \frac{\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)\epsilon + \sqrt{\epsilon^2\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^2 + 2d_\epsilon\left(\frac{\tau-2}{\tau}\right)}}{\left(\frac{\tau-2}{\tau}\right)}$$

donde τ es dado en (h_5).

Demostración. Sea $w_n \in E^*$ y $\rho_n \in \partial\Psi(v_n)$ satisface

$$\|w_n\|_* = \lambda_\epsilon(v_n) \text{ y } \langle w_n, v_n\rangle = \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \rho_n v_n \, dx - \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} h v_n \, dx.$$

De (h_5) y el Teorema 4.8,

$$\begin{aligned} d_\epsilon + o_n(1) + o_n(1)\|v_n\| &\geq I_\epsilon(v_n) - \frac{1}{\tau}\langle w_n, u_n\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau}\right)\|v_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\tau}\rho_n v_n - F(x, v_n) \, dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)\epsilon \int_{\mathbb{R}^2} h v_n \, dx \end{aligned}$$

así

$$d_\epsilon + o_n(1) + o_n(1)\|v_n\| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau}\right)\|v_n\|^2 + \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)\epsilon\|h\|_*\|v_n\|, \tag{4.29}$$

lo cual implica que $\{v_n\}$ es una sucesión acotada en E. Más aún, como $\{v_n\}$ no converge a $v = 0$ en E, podemos asumir que para alguna subsucesión,

$$l := \lim_{n\to\infty} \|v_n\| > 0.$$

En consecuencia, por (4.29):

$$d_\epsilon + \left(\frac{\tau - 1}{\tau}\right) \epsilon \|h\|_* l \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau}\right) l^2,$$

esto es

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau}\right) l^2 - \left(\frac{\tau - 1}{\tau}\right) \epsilon \|h\|_* l - d_\epsilon \leq 0$$

Como $l > 0$, se tiene

$$l \leq \frac{\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)\epsilon + \sqrt{\epsilon^2\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^2 + 4d_\epsilon\left(\frac{\tau-2}{2\tau}\right)}}{\left(\frac{\tau-2}{\tau}\right)} \tag{4.30}$$

con la cual se concluye. □

Lema 4.13. *Asuma $(h_0) - (h_6)$. Entonces, existe constantes positivas ϵ_1, μ^* y t_1 tal que*

$$\frac{\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)\epsilon + \sqrt{\epsilon^2\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^2 + 2d_\epsilon\left(\frac{\tau-2}{\tau}\right)}}{\left(\frac{\tau-2}{\tau}\right)}$$

para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$, $\mu \geq \mu^*$ y $t_0 \in [0, t_1)$.

Demostración. Considere la función ψ_0 usado en la prueba de Lema 4.11. Entonces,

$$\sup_{t\in[0,t_0]} I_\epsilon(t\psi_0) \leq \frac{t_0^2}{2}\|\psi_0\|^2,$$

y así, existe $t_2 > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,t_0]} I_\epsilon(t\psi_0) \leq \epsilon^2$$

para $t_0 \in [0, t_2)$. Por otra parte, por (h_6),

$$\sup_{t \geq t_0} I_\epsilon(t\psi) \leq \max_{t \geq 0} \left\{ \frac{t^2}{2} \|\psi_0\|^2 - \mu t^p \int_{\mathbb{R}^2} \psi_0^p \, dx \right\} + \mu c_2 t_0^p |\text{supp}\,(\psi_0)|,$$

esto es,

$$\sup_{t \geq t_0} I_\epsilon(t\psi_0) \leq \left(\frac{1}{2p^{\frac{2}{p-2}}} - \frac{1}{p^{\frac{p}{p-2}}} \right) \frac{1}{\mu^{\frac{2}{p-2}}} \left(\frac{\|\psi_0\|}{|\psi_0|_p} \right)^{\frac{2p}{p-2}} + \mu c_2 t_0^p |\text{supp}\,(\psi_0)|.$$

Ahora, fije $\mu^* > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{2p^{\frac{2}{p-2}}} - \frac{1}{p^{\frac{p}{p-2}}} \right) \frac{1}{\mu^{\frac{2}{p-2}}} \left(\frac{\|\psi_0\|}{|\psi_0|_p} \right)^{\frac{2p}{p-2}} \leq \epsilon^2, \text{ para todo } t \in \mu \geq \mu^*.$$

y $t_3 = t_3(\mu, \epsilon) > 0$ tal que

$$\mu c_2 t_0^p |\text{supp}\,(\psi_0)| \leq \epsilon^2, \text{ para todo } t \in [0, t_3].$$

de esto, para $t_1 = \min\{t_2, t_3\}$, tenemos que

$$\sup_{t \geq t_0} I_\epsilon(t\psi_0) \leq 2\epsilon^2,$$

así

$$d_\epsilon \leq \max_{t \geq 0} I_\epsilon(t\psi_0) \leq 2\epsilon^2.$$

Por lo tanto, existe $c_1 > 0$ independiente de ϵ tal que

$$\frac{\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^2 + 2d_\epsilon \left(\frac{\tau-2}{\tau}\right)}}{\left(\frac{\tau-2}{\tau}\right)} \leq c_1 \epsilon.$$

Luego, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\frac{\left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 \left(\frac{\tau-1}{\tau}\right)^2 + 2d_\epsilon \left(\frac{\tau-2}{\tau}\right)}}{\left(\frac{\tau-2}{\tau}\right)} < \sqrt{\frac{4\pi}{\alpha_0}}, \text{ para todo } \epsilon \in (0, \epsilon_0).$$

□

A partir del último lema, se presenta el siguiente corolario.

Corolario 4.14. *Sea $\{v_n\}$ una sucesión dada en (4.28). Entonces existe ϵ_0 tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \|v_n\|^2 < \frac{4\pi}{\alpha_0}$$

Más aún, existe una subsucesión de $\{v_n\}$ que denotaremos de igual manera, y $v_\epsilon \in E$ tales que $\lim_{n\to\infty} v_n = v_\epsilon$ en E.

Demostración. La primera parte del lema es consecuencia inmediata de los Lemas 4.12 y 4.13. La segunda parte parte de la misma idea de la demostración del Teorema 4.10, obteniendo que el funcional I_ϵ verifica la condición de $P.S.$ □

Teorema 4.15. *Si $(V_1)-(V_2)$ y $(h_0)-(h_6)$. Entonces, existen constantes positivas ϵ_0, μ^* y t_1, tales que, el problema posee una solución $v_\epsilon \in E$, con $I_\epsilon(v_\epsilon) = d_\epsilon > 0$, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$, $t_0 \in [0, t_1)$ y $\mu \geq \mu^*$. Más aún, disminuyendo ϵ_0 y t_1, y aumentando μ^*, si es necesario, se tiene dos soluciones $\mu_\epsilon, v_\epsilon \in E$ con*

$$I_\epsilon(u_\epsilon) = c_\epsilon < 0 < d_\epsilon = I_\epsilon(v_\epsilon).$$

Demostración. Se aplicara el TPM, probamos la primera condición y segunda condición

(i) Por el Lema 4.9 se tiene que existen $r, \alpha > 0$ tal que $I_\epsilon(u) \geq \alpha$ para $\|u\| = r$.

(ii) Del Lema 4.11 se tiene que $\lim_{t\to\infty} I_\epsilon(t\psi_0) = -\infty$, entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\|t_0\psi_0\| > r \qquad \text{y} \qquad I_\epsilon(t_0\psi_0) < 0 \tag{4.31}$$

tomamos $e = t_0\psi_0$

Por otra parte del corolario 4.14 se obtiene la condición $(P.S)$, aplicando el teorema de Paso de la Montaña en la observación, haciendo "n"tender al infinito

$$I_\epsilon(u_\epsilon) = d_\epsilon \geq \alpha > 0 \tag{4.32}$$

Por verificar Del Teorema 4.10 y el Corolario 1.14, existe $(u_n) \in \overline{B}_r(0)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} I_\epsilon(u_n) = c_\epsilon = \inf_{\|u\|\leq r} I_\epsilon(u) \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} \|I'_\epsilon(u_n)\|_{E'} = 0$$

como $\|u_n\|^2 \leq r^2 < \dfrac{4\pi}{\alpha_0}$, por el corolario 4.14 existe una subsucesión de (u_n) que converge a una solución u_ϵ.

$$I_\epsilon(u_\epsilon) = c_\epsilon < 0 \tag{4.33}$$

$\square$

Bibliografía

[1] Adimurthi, A., & Yadava, S. L. (1990). Critical exponent problem in $\mathbb{R}^2$ with Neumann boundary condition. Communications in Partial Differential Equations, 15(4), 459-470.

[2] Alves, C.O., Gonçalves, J.V., Santos J.A. (2014). Strongly nonlinear multivalued elliptic equations on a bounded domain, J. Global Optim. 58, 565–593.

[3] Alves, C. O., & Santos, J. A. (2016). Multivalued elliptic equation with exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$. Journal of Differential Equations, 261(9), 4758-4788.

[4] Alves, C.O., João Marcos do Ó, Miyagaki O.H. (2004). On nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem in $\mathbb{R}^2$ involving critical growth, Nonlinear Anal. 56, 781–791.

[5] Ambrosetti, A., & Rabinowitz, P. H. (1973). Dual variational methods in critical point theory and applications. Journal of functional Analysis, 14(4), 349-381.

[6] Appell, J., Bandle, C., Kryszewski, W., Reich, S., Vignoli, A., Rădulescu, V. D. (2004). De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications.

[7] Badiale, M., & Tarantello, G. (1997). Existence and multiplicity results for elliptic problems with critical growth and discontinuous nonlinearities. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 29(6), 639-677.

[8] Brézis, H., Coron, J. M., & Nirenberg, L. (1980). Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz. Communications on pure and applied mathematics, 33(5), 667-684.

[9] Cao, D. M. (1992). Nontrivial solution of semilinear elliptic equations with critical exponent in $\mathbb{R}$. Communications in Partial Differential Equations, 17(3-4), 407-435.

[10] Carl, S., & Dietrich, H. (1995). The weak upper and lower solution method for quasilinear elliptic equations with generalized subdifferentiable perturbations. Applicable Analysis, 56(3-4), 263-278.

[11] Cerami G. (1983), Metodi variazionalli nello studio di problemi al contorno con parte nonlineare discontinua, Rend. Circ. Mat. Palermo 32, 336–357.

[12] Chang, K. C. (1981). Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 80(1), 102-129.

[13] Clarke, F. H. (1976). A new approach to Lagrange multipliers. Mathematics of Operations Research, 1(2), 165-174.

[14] Costa, D. G. (1994). On a Class of Elliptic Systems in R (N).

[15] Donaldson, T. K., & Trudinger, N. S. (1971). Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems. Journal of functional analysis, 8(1), 52-75.

[16] de Figueiredo, D.G., Miyagaki, O.H., Ruf, B.(1995). Elliptic equations in R2 with nonlinearities in the critical growth range, Calc. Var. 3, 139–153.

[17] de Figueiredo, D.G., do Ó, J.M., Ruf B. (2002). On an inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 55, 135–152.

[18] Fuchs, M. and Osmolovski, V. (1998). Variational integrals on Orlicz–Sobolev spaces, Z. Anal. Anwend. 17, 393–415.

[19] Gossez, J. P. (1986). A strongly nonlinear elliptic problem in Orlicz-Sobolev spaces. In Proc. Sympos. Pure Math (Vol. 45, pp. 455-462).

[20] Kufner, A., John, O., & Fucik, S. (1977). Function spaces (Vol. 3). Springer Science & Business Media.

[21] Krasnosel'skiĭ, M. A. (1960). Convex functions and Orlicz spaces (Vol. 4311). US Atomic Energy Commission.

[22] Liu, Z., Wang, Z.Q. (2005). Schrödinger equations with concave and convex nonlinearities, Z. Angew. Math. Phys. 56 (4), 609–629

[23] Meneses, J. P. F. D. (2016). Existência de múltiplas soluções positivas para uma classe de problemas elípticos quaselineares.

[24] Medeiros, E., & Severo, U. (2008). A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two. Journal of mathematical analysis and applications, 345(1), 286-304.

[25] Moser, J. (1971). A sharp form of an inequality by N. Trudinger. Indiana University Mathematics Journal, 20(11), 1077-1092.

[26] Musielak, J.(1983). Orlicz Spaces and Modular Spaces, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1034, Springer, Berlin.

[27] Orlicz, W. (1931). Uber konjugierte Exponentenfolgen ¨ , Studia Math. 3, 200–211

[28] do Ó, J.M.B. , de Souza, M., de Medeiros E., Severo, U.(2014). An improvement for the Trudinger–Moser inequality and applications, J. Differential Equations 256, 1317–1349.

[29] Pohožaev, S. (1965). *The Sobolev embedding in the special case* $pl = n$. Proceedings of the Tech. Sci conference on Adv. Sci. research Mathematics sections 1964-1965, Moscow. Energet. Inst., Moscow, 158-170.

[30] Pick, L., Kufner, A., John, O., & Fucík, S. (2012). Function Spaces, 1. de Gruyter.

[31] Rao, M. M., & Ren, Z. D. (1991). Theory of Orlicz spaces (Vol. 146). New York: M. Dekker.

[32] Rabinowitz, P. H. (1992). On a class of nonlinear Schrödinger equations. Zeitschrift Angewandte Mathematik und Physik, 43(2), 270-291.

[33] Soares, S. H. M., & Leuyacc, Y. R. S. (2019). Singular Hamiltonian elliptic systems with critical exponential growth in dimension two. Mathematische Nachrichten, 292(1), 137-158.

[34] de Souza, M., de Medeiros, E., Severo U. (2013). On a class of quasilinear elliptic problems involving Trudinger–Moser nonlinearities, J. Math. Anal. Appl. 403, 357–364.

[35] de Souza, M., de Medeiros E., Severo, U. (2014). On a class of nonhomogeneous elliptic problems involving exponential critical growth, Topol. Methods Nonlinear Anal. 44, 399–412.

[36] Trudinger, N. S. (1967). On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. Journal of Mathematics and Mechanics, 17(5), 473-483.

[37] Willem, M. (1997). Minimax theorems (Vol. 24). Springer Science & Business Media.