Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Existencia de infinitas soluciones para una clase de ecuaciones diferenciales parciales sublineales de tipo Schrödinger en R^N

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jhon Paúl SÁNCHEZ GUTIERREZ

ASESOR

Dr. Yony Raúl SANTARIA LEUYACC

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Sánchez, J. (2022). *Existencia de infinitas soluciones para una clase de ecuaciones diferenciales parciales sublineales de tipo Schrödinger en RN*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	.Jhon Paúl Sánchez Gutierrez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	47253517
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42159219
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-8279-7460
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43069051
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Dr. Victor Hilario Tarazona Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09264893
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Grupo de investigación	Dyamical Systems, Differential Equations and their Applications - EQUATION
Agencia de financiamiento	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Fondo Nacional de Desarrollo Científico, Tecnológico y de Innovación Tecnológica (PROCIENCIA-FONDECYT). Proyecto Investigación Básica 2019-01. 410-2019

Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.0603526554608 Longitud: -77.0821112394333
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Enero 2021 - octubre 2022
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:00 horas del jueves 06 de octubre de 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de la Tesis: Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (PRESIDENTE), Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda (SECRETARIO) y el Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada**: "EXISTENCIA DE INFINITAS SOLUCIONES PARA UNA CLASE DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES SUBLINEALES DE TIPO SCHRÖDINGER EN R^N"** presentado por el señor Bachiller Jhon Paúl Sánchez Gutierrez, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **sobresaliente** con un calificativo promedio de **dieciocho (18)**.

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar, manifestó que el señor Bachiller Jhon Paúl Sánchez Gutierrez, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 11:17 am horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
PRESIDENTE

Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda
SECRETARIO

Dr. Yony Raúl Santaria Leuyacc
MIEMBRO ASESOR

INFORME DE EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

1. FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
2. ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
3. AUTORIDAD ACADÉMICA QUE EMITE EL INFORME DE ORIGINALIDAD
   Director de La Escuela Profesional de Matemática
4. APELLIDOS Y NOMBRE DE LA AUTORIDAD ACADÉMICA
   Víctor Hilario Tarazona Miranda
5. OPERADOR DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUD
   Alex Armando Cruz Huallpara
6. DOCUMENTO DE EVALUACIÓN

   Título de pre grado: Existencia de infinitas soluciones para una clase de ecuaciones diferenciales parciales sublineales de tipo Schrödinger en R_N"
7. AUTOR DEL DOCUMENTO

   Nombre y Apellido: Jhon Paúl Sanchez Gutierrez
8. **FECHA DE RECEPCIÓN DE DOCUMENTO**

   ....
   ....
9. FECHA DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUDES

   Procesado el: 05-sept.-2022 13:48 -05
   Identificador: 1893185664
   Número de palabras: 13579
   Entregado: 1

10. SOFTWARE UTILIZADO

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
TURNITIN	x	
ITHENTICATE		x
OTROS(ESPECIFICAR)		x

11. CONFIGURACION DEL PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
EXCLUYE TEXTOS ENTRECOMILLADOS	x	
EXCLUYE BIBLIOGRAFÍA	x	
EXCLUYE CADENAS MENOS A 40 PALABRAS	x	
OTRO CRITERIO (ESPECIFICAR)		x

12. PORCENTAJE DE SIMILITUDES SEGÚN PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

EN LETRA	NÚMEROS
Diez Porciento	10%

13. FUENTES ORIGINALES DE LAS SIMILITUDES ENCONTRADAS

3% match ()Santaria Leuyacc, Yony Raúl. "Ecuaciones y sistemas elípticos con crecimiento superlineal", 'Baishideng Publishing Group Inc.', 2015
1% match ()Chávez Machado, Elfren. "Existencia de soluciones débiles de un sistema elíptico no lineal vía el teorema de Schauder", 'Baishideng Publishing Group Inc.', 2017
1% match (Internet desde 29-jul.-2022)
https://arxiv.org/pdf/1609.08999.pdf
1% match (publicaciones)Yao, J.. "Solutions for Neumann boundary value problems involving p(x)-Laplace operators", Nonlinear Analysis, 20080301
1% match (Internet desde 28-sept.-2021)
http://www.aimspress.com
1% match (trabajos de los estudiantes desde 23-jun.-2020)Submitted to Universidad de Almeria on 2020-06-23
<1% match ()Anco Blas, Edith Chavely. "Modelos de dinámica poblacional vía ecuaciones diferenciales estocásticas", 'Baishideng Publishing Group Inc.', 2020
<1% match ()Quispe Vega, Luz Teresa. "Controlabilidad exacta interna para la ecuación semilineal del calor", 'Baishideng Publishing Group Inc.', 2018
<1% match ()Aycho Flores, Milton Angelino. "Pre-semigrupos de operadores lineales : problema de cauchy abstracto", 'Baishideng Publishing Group Inc.', 2013
<1% match (Internet desde 18-feb.-2022)
https://projecteuclid.org/journalArticle/Download?isResultClick=True&urlid=10.1215%2Fijm%2F1415023513
<1% match (Internet desde 19-may.-2022)
https://www.ppgme.propesp.ufpa.br/ARQUIVOS/dissertacoes/2021/ENIELSON%20EWERTON%20DA%20SILVA%20GAMA.pdf
<1% match (Internet desde 19-ene.-2022)
https://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12672/15302/Castro_vf.pdf?isAllowed=y&sequence=1
<1% match (publicaciones)Wang, F.. "On a semi-linear Schrodinger equation in R^N", Nonlinear Analysis, 20050831
<1% match (trabajos de los estudiantes desde 19-may.-2021)
Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA on 2021-05-19
<1% match ()Ojeda Marulanda, David. "Soluciones de una Clase de Ecuaciones Integrales No-lineales en L^p(.)(a,b).", 2017
<1% match (publicaciones)Liuyang Shao. "Non-trivial solutions for Schrödinger-Poisson systems involving critical nonlocal term and potential vanishing at infinity", Open Mathematics, 2019

14. OBSERVACIONES

……………………………………………………………………………………………

15. CALIFICACIONES DE ORIGINALIDAD

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, SIN OBSERVACIONES.	X	

DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, CON OBSERVACIONES.		X
DOCUMENTO NO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD		X

16. FECHA DE INFORME

....

Firmado digitalmente por TARAZONA MIRANDA Victor Hilario FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 26.09.2022 10:15:16 -05:00

Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda

Director (e) de la EP de Matemática

FICHA CATALOGRÁFICA

JHON PAÚL SÁNCHEZ GUTIERREZ

Existencia de infinitas soluciones para una clase de ecuaciones diferenciales parciales sublineales de tipo Schrödinger en $\mathbb{R}^N$, (Lima) 2022.

V, 63 p., 29,7 cm (UNMSM, Licenciada, Matemática, 2022). Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por la oportunidad de poder realizar este trabajo. A mis padres, por la formación y el cariño brindado, a mis amistades por el apoyo y la confianza. A CONCYTEC-PROCIENCIA en el marco de la convocatoria Proyecto Investigación Básica 2019-01[número de contrato 410-2019], por el financiamiento de este trabajo. Finalmente, agradezco a mi asesor el Dr. Yony Santaria por sus enseñanzas, su tiempo e interés que mostró desde el inicio de este trabajo.

Índice general

Resumen

En este trabajo, estamos interesados en la existencia y multiplicidad de soluciones estacionarias no triviales para el siguiente problema de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u) \quad \text{en} \quad \mathbb{R}^N,$$

donde $N \geq 3$, V es un potencial que cambia de signo, K es un potencial positivo y f es una funcion continua. Consideramos el caso donde la no linealidad posee un crecimiento sublineal. La existencia de al menos una o infinitas soluciones de energía pequeña se obtienen utilizando métodos variacionales y un resultado de compacidad adecuado para tratar el presente problema. Más precisamente, combinaremos el teorema de la fuente dual con alguna desigualdad de tipo Hardy.

Palabras clave: Ecuación de Schrödinger; nolinealidad sublineal; teorema de la fuente dual; desigualdad de tipo Hardy.

Abstract

In this work, we are concerned with the existence and multiplicity of stationary nontrivial solutions for the following Schrödinger problem

$$-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N,$$

where $N \geq 3$, V is a sign-changing potential, K is a positive potential and f is a continuous function. We consider the case where the nonlinearity possesses sublinear growth. The existence of at least one or infinitely many small energy are obtained using variational methods and compactness result suitable to deal with the problem. More precisely, we are combining dual fountain theorem with some Hardy-Type inequality.

Keywords: Schrödinger equation; sublinear nonlinearity; dual fountain theorem; Hardy-type inequality; theorem.

Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar la existencia y multiplicidad de soluciones para las siguientes ecuaciones de Schrödinger con una no linealidad sublineal, los cuales se encuentran basados en los resultados de Ye Xue y Zhiqing Han (Ver [18])

$$-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u), \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{$\mathcal{P}$}$$

donde $N \geqslant 3$, V es un potencial que cambia de signo, K es un potencial positivo y $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Una solución clásica o fuerte para $(\mathcal{P})$ es una función $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$ para debilitar esta condición multiplicaremos a la ecuación $(\mathcal{P})$ por $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e integrando en el espacio $\mathbb{R}^N$ de donde se obtiene

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u\phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)\phi \, dx.$$

Por la identidad de Green y observado que ϕ tiene soporte compacto, se infiere

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla\phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\phi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)\phi \, dx.$$

Luego, por la densidad de $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ en $H^1(\mathbb{R}^N)$, se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v \, dx \quad \text{para todo} \;\; v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Denotando por $V = V^+ - V^-$ podemos escribir la anterior igualdad como

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla v + V^+(x)uv \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)uv \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v \, dx. \tag{0.1}$$

Luego, diremos que una función $u \in E \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ si satisface la igualdad (0.1), será llamada **solución débil** de la ecuación $(\mathcal{P})$. A continuación asociaremos el funcional de Euler-Lagrange para el problema $(\mathcal{P})$ definido por $\mathcal{J} : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx.$$

donde

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Bajo ciertas condiciones para f, K y V el funcional $\mathcal{J}$ estará bien definido y pertenece a $\mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$ y además

$$\langle \mathcal{J}'(u), v\rangle = \langle u, v\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)uv\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v\,dx.$$

En particular, $u \in E$ un punto critico del funcional $\mathcal{J}$ si y solo si

$$\langle \mathcal{J}'(u), v\rangle = 0, \quad \text{para todo } \ v \in E.$$

Por lo tanto, diremos que $u \in E$ es solución débil de la ecuación $(\mathcal{P})$ sí solo sí u es punto crítico del funcional $\mathcal{J}$.

Como se ha visto en problemas relacionados a $(\mathcal{P})$ (Ver [4, 5]), una de las principales condiciones impuestas a V, es que sea coerciva, para el problema $(\mathcal{P})$ eliminaremos dicha condición. Además, si queremos obtener la existencia de al menos una o infinitas soluciones de pequeña energía pura para la el problema $(\mathcal{P})$ y otros similares, debemos obtener un resultado adecuado de compacidad en las inmersiones de Sobolev. Finalmente, la no linealidad de la ecuación $(\mathcal{P})$ dependerá de la función f. A continuación mencionaremos algunas definiciones con respecto a la no linealidad de una función f:

i) Una función f posee crecimiento superlineal si y solo si

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{|s|} = +\infty.$$

ii) Una función f posee crecimiento sublineal si y solo si

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{|s|} = 0.$$

Ahora enunciaremos las condiciones necesarias y suficientes que deben presentar las funciones V, K y f para dar solución al problema $(\mathcal{P})$:

(K_1) $K(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $K(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(V_1) $V = V^+ - V^-$, donde $V^+ = \text{máx}\{V(x), 0\}$ y $V^- = \text{máx}\{-V(x), 0\}$. Además $V^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ y $V^- \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) < 0\} \neq \phi,$$

$|\Omega| > 0$ y existe una constante suficientemente grande R_0 tal que $V(x) > 0$ para cada $|x| \geqslant R_0$.

(V_2) Existe una constante $\eta_0 > 1$ tal que

$$\eta_1 := \inf_{0\neq u\in H^1(\mathbb{R}^N)} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V^+(x)u^2)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2 dx} \geqslant \eta_0.$$

(KV) $\dfrac{K}{|V|} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(f_1) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y existen constantes $\tau_1, \tau_2 \in (1,2)$ con $\tau_1 < \tau_2$ tal que

$$0 \leq f(u)u \leq |u|^{\tau_1} + |u|^{\tau_2}, \quad \text{para todo } \ u \in \mathbb{R}.$$

(f_2) $f(u) \geqslant C|u|^{\tau_1}, para \ todo \ u \in \mathbb{R}$, donde C es una constante positiva,

$$F(u) = \int_0^u f(\tau)d\tau.$$

Consecuentemente, podemos decir que la ecuación de Schrödinger a estudiar son de la forma sublineal debido a la condición satisfecha (f_1). En efecto, tomando valor absoluto y dividiendo por $|u|^2$ obtenemos

$$0 \leq \frac{|f(u)|}{|u|} \leq |u|^{\tau_1 - 2} + |u|^{\tau_2 - 2},$$

como $\tau_i - 2 < 0$ para todo $i = 1, 2$ entonces por el teorema del sándwich

$$\frac{f(u)}{|u|} = 0 \quad \text{cuando} \quad u \to +\infty.$$

A continuación mencionaremos los principales teoremas de este trabajo:

Teorema 0.1. *Si las condiciones* (K_1), (V_1), (V_2), (KV), (f_1) *y* (f_2) *se cumplen. Entonces la ecuación* $(\mathcal{P})$ *posee al menos una solución no trivial.*

Teorema 0.2. *Si las condiciones* (K_1), (V_1), (V_2), (KV), (f_1) *y* (f_2) *se cumplen. Además,* $f(u) = -f(-u)$ *para todo* $u \in \mathbb{R}$. *Entonces la ecuación* $(\mathcal{P})$ *posee infinitas soluciones de pequeña energía.*

En el campo de la Física moderna la ecuación de Schrödinger juega un papel importante en el mundo cuántico, como en su momento lo fue la ecuación de la segunda ley de Newton de la física clásica. Está ecuación $(\mathcal{P})$ está esencialmente relacionada con la búsqueda de las ondas estacionarias $\psi(t, x) = e^{-i\omega t} u(x)$ para las ecuaciones de Schrödinger dependiente del tiempo,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta \psi + U(x)\psi - g(x, \psi), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde el potencial V es dado por $V(x) = U(x) - \omega$, por lo tanto V tiene signo indefinido para ω suficientemente grande (Ver [6, 7, 20]).

A continuación mencionaremos y haremos una breve comparación de algunas ecuaciones de derivadas parciales de tipo Schrödinger en $\mathbb{R}^N$ similares a $(\mathcal{P})$ bajo otras condiciones:

En [4], los autores estudiaron la ecuación de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u), \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{$\mathcal{Q}$}$$

donde $N \geq 3$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bajo las siguientes condiciones:

(S_1) V es continua y $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > 0$.

(S_2) Para todo $M > 0$, existe un x_0 tal que

$$\lim_{|y|\to\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R}^N : |x-y| \leq x_0,\ V(x) \leq M\}) = 0.$$

(S_3) $f(x,t) = \mu\varepsilon(x)|t|^{\mu-2}t$, donde $\mu \in (1,2)$ es una constante y $\varepsilon : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función continua positiva tal que $\varepsilon \in L^{\frac{2}{2-\mu}}(\mathbb{R}^N, [0,+\infty])$.

Cumpliendo las condiciones anteriores, ecuación $(\mathcal{Q})$ posee infinitas soluciones no triviales. También se puede observar que bajo la condición (S_1) el potencial V es siempre positivo para la ecuación $(\mathcal{Q})$, a diferencia de la ecuación $(\mathcal{P})$ que cambia de signo. Además, la ecuación $(\mathcal{Q})$ es sublineal debido a las condición (S_3).

En [5], Cheng y Wu estudiaron la existencia de soluciones no triviales para la siguiente ecuación semilineal de Schrödinger

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u), \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{$\mathcal{Q}$}$$

donde $N \geq 3$, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Bajo las siguientes:

(R_1) $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ está acotado.

(R_2) Para todo $M > 0$,

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leq M\}) < \infty.$$

(R_3) $f(x,u) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ y existen constantes $\tau_1, \tau_2 \in (1,2)$ con $\tau_1 < \tau_2$. Además, $\xi_i(x) \in L^{\frac{2}{2-\tau_i}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ para $i = 1,2$ tal que

$$0 \leq f(u)u \leq \xi_1(x)|u|^{\tau_1} + \xi_2(x)|u|^{\tau_2}, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Además de otras condiciones sobre la función f se obtienen dos teoremas importantes. El primer teorema garantiza que la ecuación $(\mathcal{Q})$ posee al menos una solución no trivial; y el segundo, utilizando una variante del teorema de la fuente dual, se logra probar que la ecuación ($\mathcal{Q}$) posee infinitas soluciones de energía pequeña. Además, la condición (R_3) implica en particular que el potencial V es de tipo coercivo. Finalmente, por la condición (R_3) dada para f podemos afirmar que es ecuación de tipo sublineal.

Las condiciones (S_2) y (R_2) que se vieron en los trabajos [4] y [5] respectivamente, es decir, la condición coerciva de V jugó un papel importante en la compacidad de las inmersiones de Sobolev. Como se mencionó al principio, eliminaremos la condición coercitiva de V y debilitaremos las condiciones para la función f.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el **Capitulo 1** mencionaremos algunos teoremas y definiciones importantes que serán usados en los capítulos posteriores. En el **Capitulo 2** estudiaremos la ecuación ($\mathcal{P}$) sublineal de tipo Schrödinger en $\mathbb{R}^N$ y las consideraciones previas, además su formulación variacional.

En el **Capitulo 3** enunciaremos y demostraremos los teoremas más importantes, estos garantizaran la existencia y multiplicidad de soluciones de la ecuación ($\mathcal{P}$).

Capítulo I

Preliminares

1.1. Espacios L^p

Definición 1.1. *Sea* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida, es decir,* Ω *es un conjunto y*
(i) $\mathcal{M}$ *es un* σ*- álgebra, es decir,* $\mathcal{M}$ *es una colección de subconjuntos tal que:*

a) $\phi \in \mathcal{M}$.

b) $A \in \mathcal{M}$ *entonces* $A^c \in \mathcal{M}$.

c) $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{M}$ *siempre que* $A_k \in \mathcal{M}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathcal{M}$ *es medida, es decir,* $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ *satisface*

a) $\mu(\phi) = 0$.

b) Para toda colección numerable y disjunta dos a dos $\{A_k\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ *se tiene* $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Los elementos de $\mathcal{M}$ se llaman conjuntos medibles, en ocasiones denotaremos $|A|$ en lugar de $\lambda(A)$.

Definición 1.2. *Sea* $(X; \mathcal{A})$ *e* $(Y, \mathcal{B})$ *dos espacios medibles. Decimos que* $f : X \to Y$ *es un espacio medible si y solo si para todo* $B \in \mathcal{B}$ *se tiene que* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

En la mayoría de funciones medibles que veremos se considera $X = \mathbb{R}^N$ y $Y = \mathbb{R}$.

Definición 1.3. *Sea* $(\Omega, \mathbb{M}, \mu)$ *un espacio de medida y* $1 \leq p < \infty$
a) Definimos el conjunto

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \, es\ medible\ y \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}.$$

b) Si $f \in L^p(\Omega)$*, entonces denotaremos*

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Definición 1.4. *Sea* $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ *es un espacio de medida y* $1 \leq p < \infty$*. Definimos el conjunto*

$$L^p_{Loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \in L^p(K) \ \ para\ todo\ conjunto\ compacto\ \ K \subset \Omega\}.$$

Definición 1.5. *Sea* $(\Omega, \mathbb{M}, \mu)$ *un espacio de medida*
a) Decimos que la función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es esencialmente acotada sí y solo si existe una constante* $C = C(f) > 0$ *tal que*

$$|f(x)| \leq C, \quad c.t.p\ de\ \ \Omega.$$

b) Definimos el conjunto

$$L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \, es\ medible\ y\ esencialmente\ acotada\}.$$

c) Si $f \in L^{\infty}(\Omega)$*, entonces denotaremos*

$$\|f\|_{L^{\infty}} = \|f\|_{\infty} = \text{ínf}\{C : |f(x)| \leq C \, c.t.p\ en \, \Omega\}.$$

Teorema 1.6. $L^p(\Omega)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Demostración. Ver [3]. □

Teorema 1.7. $L^p(\Omega)$ *es un espacio reflexivo para* $1 < p < \infty$*.*

Demostración. Ver [3]. □

Corolario 1.8. *Sea $1 \leq p < q \leq \infty$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}$ conjunto abierto y acotado. Entonces $L^q(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$. Además para $f \in L^q(\Omega)$, existe un $C > 0$ tal que*

$$\|f\|_p \leq C\|f\|_q.$$

Teorema 1.9. *(Desigualdad de Hölder). Sea p y q conjugados, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Demostración. Ver [3]. □

Corolario 1.10. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Omega)$. Entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2\|g\|_2.$$

Es útil tener en cuenta que la desigualdad de Hölder puede ser generalizada.

Teorema 1.11. *(Desigualdad de Hölder generalizado) Si las funciones medibles f_1, f_2, f_3, ... , f_k son funciones tales que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega), \ \textit{para} \ 1 \leq i \leq k.$$

Además,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Entonces el producto $f = f_1 f_2 f_3 \cdots f_k$ pertenece a $L^p(\Omega)$ y

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\|f_3\|_{p_3} \cdots \|f_k\|_{p_k}.$$

Teorema 1.12. *(Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue). Sea (f_n) una sucesión de funciones en $L^1(\Omega)$ que satisfacen*

(a) $f_n(x) \to f(x)$ *c.t.p en* Ω.

(b) Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo n, $f_n(x) \leq g(x)$ c.t.p en Ω.

Entonces

$$f \in L^1(\Omega) \quad y \quad \|f_n - f\|_1 \to 0.$$

Teorema 1.13. *(Fubinni). Sea* $f \in L^1(\Omega_1, \Omega_2)$*. Entonces para c.t.p* $x \in \Omega_1$, $f(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ *y* $\int_{\Omega_2} f(x,y)d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$*. Análogamente para c.t.p* $y \in \Omega_2$, $f(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ *y* $\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$.
Además, se cumple

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2 \right) d\mu_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1 \right) d\mu_2 = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x,y) d\mu_1 d\mu_2.$$

Teorema 1.14. *(Teorema de representación de Riesz). Sea* $1 < p < \infty$ *y dado* $\phi \in (L^p(\Omega))^*$*. entonces existe una función única* $u \in L^q(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf\, dx \quad \text{para todo } f \in L^p(\Omega).$$

Además,

$$\|u\|_q = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))^*}.$$

Demostración. Ver [3]. □

1.2. Espacios de Hilbert

Definición 1.15. *Un espacio* $\mathcal{H}$ *se le denomina pre-Hilbert si es un espacio vectorial con producto interno, es decir, una función real* $\langle , \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ *tal que para todo x,y,z* $\in \mathcal{H}$ *y* α, $\beta \in \mathbb{R}$ *se tiene:*

(p_1) $\langle x, x \rangle \geq 0.$

(p_2) $\langle x, x \rangle = 0$ *sí solo sí* $x = 0.$

(p_3) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle .$

(p_4) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle .$

Definición 1.16. *En un espacio pre-Hilbert* $\mathcal{H}$*, la norma de un vector* $x \in \mathcal{H}$*, denota* $\|x\|$ *un número real no negativo definido por* $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Proposición 1.17. *En un espacio pre-Hilbert, se cumple:*

(a) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

(b) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Desigualdad triangular).*

Demostración. Ver [14]. □

Definición 1.18. *En un espacio pre-Hilbert, la* $\|x - y\|$ *se define como la distancia de* x *a* y.

Definición 1.19. *Un espacio métrico* (X, d) *es un par conformado por un conjunto* $X \neq \phi$ *y una métrica, es decir, una función* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *tal que para todo x,y,z* $\in X$ *se cumple:*

(m_1) $d(x, y) \geq 0$.

(m_2) $d(x, y) = 0$ *sí y solo sí* $x = y$.

(m_3) $d(x, y) = d(y, x)$.

(m_4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Todo espacio pre-Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio métrico, con $d(x, y) = \|x - y\|$, a este lo denominaremos espacio métrico $(\mathcal{H}, d)$.

Definición 1.20. *Sea* $(\mathcal{H}, d)$ *un espacio métrico, dado un punto* $x_0 \in \mathcal{H}$ *y* $r > 0$, *definimos los siguientes conjuntos.*
1) Bola abierta de centro x_0 *y radio* r

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathcal{H} : d(x, x_0) < r\}.$$

2) Bola cerrada de centro x_0 *y radio* r

$$B_r[x_0] = \{x \in \mathcal{H} : d(x, x_0) \leq r\}.$$

3) Esfera de centro x_0 *y radio* r

$$S_r[x_0] = \{x \in \mathcal{H} : d(x, x_0) = r\}.$$

Definición 1.21. *Sea $X \neq \phi$ una sucesión $(x_n) \subset X$ es acotada si solamente sí existe un $M > 0$ tal que $\|x_n\| < M$.*

Definición 1.22. *En un espacio métrico $(\mathcal{H}, d)$ una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathcal{H}$, es decir, $\|x_n - x\| \to 0$ sí y solamente sí para todo $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x\| \leq \epsilon$ para todo $n \geq n_0$.*
Notación: $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ o $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Definición 1.23. *En un espacio métrico $(\mathcal{H}, d)$ una sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy, es decir, $\|x_n - x_m\| \to 0$ cuando $n, m \to \infty$ sí solamente sí para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ para todo $n,m \geq n_0$.*

Observación 1.24. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*

Definición 1.25. *Un espacio pre-Hilbert es completo sí solo sí toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Definición 1.26. *Un espacio pre-Hilbert y completo es un espacio de Hilbert.*

1.3. Espacios de Sobolev

Definición 1.27. *Sea $f, g \in L^1_{Loc}(\Omega)$ diremos que g es la derivada débil de f si solo si*

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)\,dx = -\int_\Omega g(x)\phi(x)\,dx, \qquad \text{para todo} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Generalizando la definición anterior tenemos:

Definición 1.28. *Sea $f, g \in L^1_{Loc}(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$, diremos que g es la derivada débil de orden α de f si solo si*

$$\int_\Omega f(x)D^\alpha\phi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x)\phi(x)\,dx, \qquad \text{para todo} \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega),$$

donde $D^\alpha\phi = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\dfrac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}\phi \qquad y \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N.$

Definición 1.29. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ y $1 \leq p < \infty$. Definimos el espacio*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq 1\}.$$

con la norma

$$\|f\|_{1,p} \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Generalizando la definición anterior tenemos:

Definición 1.30. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^{\alpha} f \in L^p(\Omega),\ \forall\, \mathbb{N}^N |\alpha| \leq m\},$$

con la norma

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{para} \quad 1 \leq p < \infty \quad \textit{y}$$

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} f(x)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{para} \quad p = \infty.$$

Proposición 1.31 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado. entonces existe una constante $C > 0$ (dependiente de $|\Omega| < \infty$) tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \textit{parta todo}\, u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Ver [3]. □

Teorema 1.32. *El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es de Banach.*

Demostración. Ver [1]. □

Teorema 1.33. *El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Definición 1.34. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio*

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \textit{la cerradura de } C_0^{\infty}(\Omega) \textit{ en el espacio } W^{m,p}(\Omega),$$

es decir,

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \{f \in W^{m,p}(\Omega) : \exists (u_n) \subset C_0^{\infty}, \textit{tal que } u_n \to u \textit{ en}\, W^{m,p}(\Omega)\}.$$

Observación 1.35. *Cuando $\Omega = \mathbb{R}^N$, obtenemos*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N).$$

Además, si $p = 2$ y $m = 1$ denotaremos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) \quad y \quad H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

Definición 1.36. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto no vacio para $N \geq 3$ y $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$. Definimos el espacio*

$$\mathcal{D}^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^{2^*}(\Omega) : \nabla u \in L^2(\Omega)\},$$

con el producto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx,$$

y la norma correspondiente

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u\rangle} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorema 1.37. *(Inmersiones continuas de Sobolev). Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto acotado regular. Entonces las siguientes inmersiones son continuas:*

(i) Si $mp < N$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq q \leq \dfrac{pN}{N-mp}$.

(ii) Si $mp = N$ y $p > 1$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$.

Demostración. Ver [1]. □

Corolario 1.38. *(i) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto acotado regular. Entonces las inmersiones*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad para\ todo\ 1 \leq q < \infty$$

son continuas.

(ii) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ un abierto acotado regular. Entonces las inmersiones

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad para\ todo\ 1 \leq q \leq \frac{2N}{N-2}$$

son continuas.

Teorema 1.39. *(Inmersiones Compactas) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un abierto acotado regular. Entonces las siguientes inmersiones son compactas:*

(i) Si $mp < N$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \dfrac{pN}{N-mp}$.

(ii) Si $mp = N$ y $p > 1$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$.

Demostración. Ver [1]. □

Corolario 1.40. *(i) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto acotado regular. Entonces las inmersiones*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \textit{para todo } 1 \leq q < \infty$$

son compactas.

(ii) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ un abierto acotado regular. Entonces las inmersiones

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \textit{para todo } 1 \leq q < \frac{2N}{N-2}$$

son compactas.

1.4. Funcionales Diferenciables

Definición 1.41. *Sea $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ donde Ω es un subconjunto abierto de un espacio de Banach X. El funcional Φ es derivable según Gateux en $x_0 \in \Omega$ si*

$$\frac{\partial \Phi(x_0)}{\partial h} = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(x_0 + th) - \Phi(x_0)}{t} \qquad \textit{para todo } h \in X.$$

Definición 1.42. *Sea $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ donde Ω es un subconjunto abierto de un espacio de Banach X. El funcional Φ es derivable según Fréchet en $x_0 \in \Omega$ existe $T : X \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que*

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) - T(h)}{\|h\|_X} = 0.$$

Si Φ es derivable según Fréchet entonces es derivable según Gateux.

Proposición 1.43. *Si el funcional Φ tiene derivada de Gateux continua en Ω, entonces $\Phi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.*

Definición 1.44. *(Condición PS) Sea E un espacio de Banach, $c \in \mathbb{R}$ y $J \in C^1(E; \mathbb{R})$. La función J se dice que satisface la condición $(PS)_c$ en E si para cada sucesión $(u_n) \subset E$ tal que*

$$\mathcal{J}(u_n) \to c \;\; y \;\; \mathcal{J}'(u_n) \to 0 \;\; ; \quad cuando \;\; n \to \infty$$

tiene una subsucesión fuertemente convergente en E.

Sea e_j una base ortonormal del espacio de Hilbert E y defina

$$X_j = \mathbb{R}e_j, \qquad Y_k = \bigoplus_{j=1}^{k} X_j, \qquad Z_k = \overline{\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j}$$

Para el enunciado del teorema de la fuente dual, necesitamos la siguiente condición, para más detalles ver [17].

Condición (A_1) Un grupo compacto G actúa isometricamente sobre el espacio de Hilbert $E = \overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{N}}^{\infty} X_j}$; los espacios X_j, son invariantes y existe un espacio de dimensión finita V tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $X_j \backsimeq V$ y es admisible la acción de G sobre V.

Proposición 1.45. *Si se cumple la condición (A_1) y sea $\mathcal{J} \in C^1(E, \mathbb{R})$ un funcional invariante. Si existen dos sucesiones $0 < r_k < \rho_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Además se cumplen las condiciones $(D_1)-(D_4)$, entonces existe una sucesión de valores críticos negativos que convergen a 0, donde*

(D_1) $a_k := \inf_{u\in Z_k, \|u\|=\rho_k} \mathcal{J}(u) \geq 0.$

(D_2) $b_k := \max_{u\in Y_k, \|u\|=r_k} \mathcal{J}(u) < 0.$

(D_3) $d_k := \inf_{u\in Z_k, \|u\|\leq\rho_k} \mathcal{J}(u) \to 0$ *cuando* $k \to \infty$.

(D_4) *Para todo $c \in [d_k, 0)$, $\mathcal{J}$ satisface la condición $(PS)_c$, es decir, dada una sucesión $(u_{n_j}) \subset E$ que satisface*

$$u_{n_j} \in Y_{n_j}, \;\; \mathcal{J}(u_{n_j}) \to c, \;\; \mathcal{J}|'_{Y_{n_j}}(u_{n_j}) \to 0, \;\; n_j \to \infty$$

contiene una subsucesión que converge a un punto crítico de $\mathcal{J}$.

Demostración. Ver [17]. $\square$

Capítulo II

Ecuación sublineal de tipo Schrödinger en $\mathbb{R}^N$

En este capítulo estudiaremos la ecuación de tipo Schrödinger en $\mathbb{R}^N$ con una no linealidad sublineal,el cual fue estudiado por Ye Xue y Zhiqing Han 2021 (Ver[18]). A continuación mencionaremos la ecuación de Schrödinger bajo ciertas condiciones, luego estableceremos un espacio de Hilbert E y las inmersiones con otros espacios. Finalmente definiremos un funcional de Euler- Lagrange asociado a la solución de la ecuación mencionada.

2.1. Hipótesis y consideraciones previas

Consideremos la siguiente ecuación de tipo Schrödinger en $\mathbb{R}^N$ con una no linealidad sublineal

$$-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u), \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{$\mathcal{P}$}$$

donde $N \geqslant 3$, V cambia de signo, K es positivo y $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Además eliminaremos la condición coerciva generalmente impuesta sobre V y obtener la existencia de al menos una o infinitas soluciones de pequeña energía pura de $(\mathcal{P})$.

Antes de exponer nuestros principales resultados, mencionaremos las condiciones quee se deben de cumplir para dar solución a la ecuación $(\mathcal{P})$.

(K_1) $K(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ y $K \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$.

(V_1) $V = V^+ - V^-$, donde $V^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ y $V^- \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N : V(x) < 0\} \neq \phi,$$

$|\Omega| > 0$ y existe una constante suficientemente grande R_0 tal que $V(x) > 0$ para cada $|x| \geqslant R_0$.

(V_2) Existe una constante $\eta_0 > 1$ tal que

$$\eta_1 := \inf_{0 \neq u \in H^1(\mathbb{R}^N)} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V^+(x)u^2)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2 dx} \geqslant \eta_0.$$

(KV) $\dfrac{K}{|V|} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(f_1) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y existen constantes $\tau_1, \tau_2 \in (1,2)$ con $\tau_1 < \tau_2$ tal que

$$0 \leq f(u)u \leq |u|^{\tau_1} + |u|^{\tau_2}, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}.$$

(f_2) $f(u) \geqslant C|u|^{\tau_1}, \textit{para todo } u \in \mathbb{R}$, donde C es una constante positiva,

$$F(u) = \int_0^u f(\tau)d\tau.$$

Observación 1. *Se pueden encontrar condiciones similares a (V_2) con (V_1) y las desigualdades de Hölder y Sobolev. Además se cumple la siguiente desigualdad:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+|u|^2\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V|u|^2 dx \geq \left(\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+|u|^2 dx.$$

Demostración: Primero probaremos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2 dx < \infty.$$

Sea $u \in E \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, donde $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$, por desigualdad de Hölder obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx \leq \|V^-\|_{\frac{N}{2}}\|u^2\|_{\frac{N}{N-2}}. \tag{2.1}$$

Por la condición (V_1) se tiene que $V^- \in L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$ por tanto $\|V^-\|_{\frac{N}{2}}$ es finito, faltaría probar que $\|u^2\|_{\frac{N}{N-2}}$ es finito. En efecto

$$\|u^2\|_{\frac{N}{N-2}} = \left[\int_{\mathbb{R}^N} (u^2)^{\frac{N}{N-2}}\, dx\right]^{\frac{N-2}{N}} = \left[\int_{\mathbb{R}^N} u^{\frac{2N}{N-2}}\, dx\right]^{\frac{N-2}{N}} = \left[\int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*}\, dx\right]^{\frac{N-2}{N}}. \tag{2.2}$$

Como $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ entonces $\int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*}$ es finito, logrando así que $\|u^2\|_{\frac{N}{N-2}}$ sea finito, entonces se ha probado que $\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx < \infty$ es finito. Además por (2.1) y (2.2) se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx \leq \|V^-\|_{\frac{N}{2}}\|u^2\|_{\frac{N}{N-2}} = \|V^-\|_{\frac{N}{2}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*}\right)^{\frac{N-2}{2N}}\right]^2.$$

Dado que $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx \leq \|V^-\|_{\frac{N}{2}}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\right]^2 = \|V^-\|_{\frac{N}{2}}\|u\|_{2^*}^2,$$

es decir,

$$\frac{1}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx} \geq \frac{1}{\|V^-\|_{\frac{N}{2}}\|u\|_{2^*}^2}. \tag{2.3}$$

Además, como $u \in E$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\, dx. \tag{2.4}$$

Entonces de las desigualdades (2.3) y (2.4) se tiene

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |(\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx} \geq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2dx}{\|V^-\|_{\frac{N}{2}}\|u\|_{2^*}^2}. \tag{2.5}$$

Ahora, definimos

$$S := \inf_{\substack{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \|\nabla u\|_2^2.$$

Dado $0 \neq u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ considere a $w = u/\|u\|_{2^*}$. Luego $\|w\|_{2^*} = 1$, entonces por definición de ínfimo

$$S \leq \|\nabla w\|_2^2 = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2},$$

es decir,

$$\frac{1}{\|u\|_{2^*}^2} \geq \frac{1}{S^{-1} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx}.$$

Consecuentemente, multiplicamos por

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\|V^-\|_{\frac{N}{2}}} > 0,$$

obtenemos

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\|V^-\|_{\frac{N}{2}} \|u\|_{2^*}^2} \geq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\|V^-\|_{\frac{N}{2}} S^{-1} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}. \tag{2.6}$$

Por (2.5) y (2.6) tenemos

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^- u^2 dx} \geq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}{\|V^-\|_{\frac{N}{2}} \|u\|_{2^*}^2} \geq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx}{\|V^-(x)\|_{\frac{N}{2}} S^{-1} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx},$$

es decir,

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2 dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) u^2 dx} \geq \frac{S}{\|V^-\|_{\frac{N}{2}}}.$$

Si $\|V^-\|_{\frac{N}{2}} < S$, entonces

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx} \geq \frac{S}{\|V^-\|_{\frac{N}{2}}} > 1.$$

Por lo tanto, se ha probado que existe $\eta_0 = \dfrac{S}{\|V^-\|_{\frac{N}{2}}} > 1$ cumpliendo la siguiente desigualdad

$$\eta_1 = \inf_{0\neq u\in H^1(\mathbb{R}^N)} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+(x)u^2dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx} \geqslant \eta_0.$$

Además, por la condición (V_2) tenemos

$$\frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2\,dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx} \geq \eta_0.$$

Luego,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2\,dx \geq \eta_0 \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2dx.$$

Consecuentemente,

$$-\eta_0 \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)u^2\,dx \geq -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2\,dx.$$

Entonces,

$$\eta_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+|u|^2 - \eta_0 \int_{\mathbb{R}^N} V^-u^2dx \geq \eta_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+|u|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+|u|^2dx.$$

Por lo tanto,

$$\eta_0 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+|u|^2 - V^-|u|^2\,dx \geq (\eta_0 - 1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+|u|^2dx,$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V|u|^2\,dx \geq \left(\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+|u|^2\,dx.$$

Finalmente, se obtiene la siguiente desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+|u|^2\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V|u|^2 dx \geq \left(\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+|u|^2 dx. \tag{2.7}$$

□

2.2. Formulación Variacional

En esta sección definiremos el espacio de solución E, también las inmersiones que presenta con respecto a otros espacios., finalmente definiremos el funcional de Euler-Lagrange y su diferenciabilidad.

2.2.1. Estableciendo el espacio E

En esta subsección definimos el siguiente espacio:

$$E = \{u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)|u|^2 dx < +\infty\}.$$

Lema 2.1. *Sea $E \subseteq D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ y se satisface la condición (V_1). Entonces*
(a) La forma bilineal

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : E \times E &\to \mathbb{R} \\ \langle u, v \rangle \to \langle u, v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + V^+(x) uv\,dx \end{aligned}$$

define un producto interno en $E \times E$. Además

$$\|u\|_E = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla |u|^2 + V^+(x) u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) E es un espacio de Hilbert separable y reflexivo.

Demostración. (a) Para que la forma bilineal defina un producto interno debe satisfacer las siguientes condiciones:

(i) $\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ para todo $u,v \in E$.

(ii) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ para todo $u,v \in E$.

(iii) $\langle \alpha u,v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$ para todo $u,v \in E$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) $\langle u,u\rangle \geq 0 \quad$ para todo $u \in E$.

(v) $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

En efecto (i) Sean u, v y $w \in E$

$$\begin{aligned}
\langle u+v,w\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u+v)\nabla w + V^+(x)(u+v)w\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla w\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\nabla w\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)uw\,dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)vw\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla w + V^+(x)uw\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\nabla w + V^+(x)vw\,dx \\
&= \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle .
\end{aligned}$$

(ii) Sean u y $v \in E$. Luego,

$$\langle u,v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u\nabla v + V^+(x)uv\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\nabla u + V^+(x)vu\,dx = \langle v,u\rangle .$$

(iii) Sean u y $v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha u,v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla(\alpha u)\nabla v + V^+(x)(\alpha u)v\,dx] \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} [\alpha\nabla u\nabla v + \alpha V^+(x)uv\,dx] \\
&= \alpha\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u\nabla v + V^+(x)uv\,dx] \\
&= \alpha\langle u,v\rangle .
\end{aligned}$$

(iv) Sea $u \in E$. Luego,

$$\langle u, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+(x)u^2 dx \geq 0.$$

(v) Sea $u \in E$
Si $u = 0$ entonces $\langle u, u\rangle = 0$. Por otro lado $\langle u, u\rangle = 0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V^+(x)u^2 dx = 0,$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = 0,$$

por desigualdad de Poíncare existe un $C > 0$ tal que

$$\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2 = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Entonces $\|u\|_2 = 0$. Por lo tanto $u = 0$.
(b) Dado E un subconjunto cerrado de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, el cual es un espacio de Hilbert separable y reflexivo, entonces se cumple que E es un espacio de Hilbert separable y reflexivo. □

A continuación mencionaremos algunos espacios de Hilbert que serán utilizados en estos capítulos.

Definimos $L^q_K(\mathbb{R}^N)$ el espacio ponderado de las funciones medibles $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que satisface:

$$\|u\|_{K,q} = \left[\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Denotemos $L^q(\mathbb{R}^N)$ con

$$\|u\|_q = \left[\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

donde $1 \leq q < \infty$ y con norma

$$\|u\|_\infty = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x)|, \quad u \in L^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Por $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)(2 \leq s \leq 2^*)$. Ahora damos una desigualdad de tipo Hardy que extiende la de [2] y es adecuada para tratar con nuestros problemas sublineales.

2.2.2. Inmersión del espacio E

Antes de enunciar el resultado, recordamos la siguiente condición (A).

Condición (A). Si $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^N$ es una sucesión de conjuntos de Borel tal que $|A_n| \leq R$ para algún $R > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{r \to \infty} \int_{A_n \cap B_r^c(0)} K(x)\, dx = 0, \text{ uniformemente en } n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Como se indica en [2], si $K \in L^1(\mathbb{R}^N - B_\rho(0))$ para algún $\rho > 0$, sabemos que K satisface la condición (A).

Lema 2.2. *Se cumple la siguiente desigualdad:*

$$|s|^r \leq \epsilon(|s| + |s|^{2^*}) + C_\epsilon \chi_{[a.b]} |s|^{2^*}, \textit{ donde } 1 < r \leq 2. \tag{2.9}$$

Demostración. En efecto, se cumple

$$\lim_{s \to 0} \frac{|s|^r}{|s| + |s|^{2^*}} = \lim_{s \to 0} \frac{|s|^{r-1}}{1 + |s|^{2^*-1}} = 0,$$

es decir, dado un $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |s| < \delta_1 \text{ entonces } \frac{|s|^r}{|s| + |s|^{2^*}} < \epsilon. \tag{2.10}$$

También se cumple el siguiente límite:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{|s|^r}{|s| + |s|^{2^*}} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{\dfrac{1}{|s|^{r-1}} + |s|^{2^*-1}} = 0,$$

es decir, dado un $\epsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|s| > \delta_2 \text{ entonces } \frac{|s|^r}{|s| + |s|^{2^*}} < \epsilon. \tag{2.11}$$

Usando (2.10) y (2.11) obtenemos

$$|s|^r \leq \epsilon(|s| + |s|^{2^*}) \text{ cuando } |s| < \delta_1 \ \vee \ |s| > \delta_2. \tag{2.12}$$

Siendo $0 < \delta_1 < \delta_2$ se cumple

$$\max_{|s| \in [\delta_1, \delta_2]} \frac{|s|^r}{|s|^{2^*}} = \frac{1}{|\delta_1|^{2^*-r}} = C_\epsilon.$$

Por lo tanto,

$$|s|^r \leq C_\epsilon |s|^{2^*} \quad \text{para todo} \quad \delta_1^{2^*} \leq |s|^{2^*} \leq \delta_2^{2^*}. \tag{2.13}$$

Finalmente, de (2.12) y (2.13) se cumple

$$|s|^r \leq \epsilon(|s| + |s|^{2^*}) + C_\epsilon \chi_{[\delta_1^{2^*}, \delta_2^{2^*}]} |s|^{2^*} \quad 1 < r \leq 2.$$

□

Lema 2.3. *Si las siguientes condiciones* (K_1), (V_1) *y* (KV) *se cumplen. Entonces* E *es inmerso compactamente en* $L^r_K(\mathbb{R}^N)$ *para* $r \in (1, 2]$.

Demostración. Dado una sucesión $(v_n) \subset E$ tal que $v_n \rightharpoonup v \in E$, por demostrar que $v_n \to v \in L^r_K(\mathbb{R}^N)$ para $r \in (1, 2]$. En efecto, por la condición (V_1) se cumple que $V^+ \in L^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Además, para cualquier $\epsilon > 0$ podemos elegir un $R_\epsilon > R_0$ tal que

$$\int_{B^c_{R_\epsilon}} V(x)\, dx = \int_{B^c_{R_\epsilon}} V^+(x)\, dx < \epsilon^2. \tag{2.14}$$

Afirmación: Dado un $1 < r \leq 2$ y $\epsilon > 0$, existe un $0 < T^0_\epsilon < T_\epsilon$ y $C_\epsilon > 0$ tal que para $|x| \geq R_\epsilon$ se cumple

$$K(x)|s|^r \leq C\epsilon(V(x)|s| + |s|^{2^*}) + C_\epsilon K(x) \chi_{[T^0_\epsilon, T_\epsilon]} |s|^{2^*} \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R}^N. \tag{2.15}$$

En efecto, por (KV) existe un $C_1 > 0$ tal que

$$\frac{K(x)}{|V(x)|} \leq C_1 \text{ entonces } K(x) \leq C_1 V(x) \quad \text{si } R_\epsilon > R_0 \text{ y } |x| \geq R_\epsilon. \tag{2.16}$$

Por (K_1) existe $C_2 > 0$ tal que

$$K(x) \leq C_2. \tag{2.17}$$

Ahora, a la desigualdad (2.9) le multiplicamos por $K(x)$ obteniendo

$$K(x)|s|^r \leq \epsilon(K(x)|s| + K(x)|s|^{2^*}) + C_\epsilon K(x)\chi_{[T_\epsilon^0, T_\epsilon]}|s|^{2^*}.$$

Entonces, por (2.16) y (2.17) logramos probar que

$$\begin{aligned} K(x)|s|^r &\leq \epsilon(C_1 V(x)|s| + C_2|s|^{2^*}) + C_\epsilon K(x)\chi_{[T_\epsilon^0, T_\epsilon]}|s|^{2^*} \\ &\leq C\epsilon(V(x)|s| + |s|^{2^*}) + C_\epsilon K(x)\chi_{[T_\epsilon^0, T_\epsilon]}|s|^{2^*} \end{aligned}$$

donde $C = \max\{C_1, C_2\}$.

A continuación integraremos la desigualdad (2.15) sobre el conjunto $B^c_{R_\epsilon}(0)$, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{B^c_{R_\epsilon}(0)} K(x)|u|^r dx &\leq C\epsilon \left(\int_{B^c_{R_\epsilon}(0)} V(x)|u|\, dx + \int_{B^c_{R_\epsilon}(0)} |u|^{2^*}\, dx \right) \\ &\quad + C_\epsilon \int_{B^c_{R_\epsilon}(0)} K(x)\chi_{[T_\epsilon^0, T_\epsilon]}|u|^{2^*}\, dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{B^c_{R_\epsilon}(0)} K(x)|u|^r dx &\leq C\epsilon \left(\int_{B^c_{R_\epsilon}(0)} V(x)|u|\, dx + \int_{B^c_{R_\epsilon}(0)} |u|^{2^*}\, dx \right) \\ &\quad + C_\epsilon \int_{B^c_{R_\epsilon}(0)\cap A} K(x) T_\epsilon^{2^*} dx, \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde $A = \{x \in \mathbb{R}^N : T_\epsilon^0 \leq |u(x)| \leq T_\epsilon\}$. Además, por hipótesis se tiene una sucesión $(v_n) \subset E$ tal que $v_n \rightharpoonup v \in E$. Entonces como E es un espacio de Banach y reflexivo la sucesión (v_n) está acotada, es decir, existe $M_1 > 0$ tal que

$$\|v_n\|_E \leq M_1. \tag{2.19}$$

Además, se cumple que la siguiente inmersión:

$$E \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N).$$

Entonces, existe $k > 0$ tal que

$$\|v_n\|_{2^*} \leq k\|v_n\|_E \leq kM_1.$$

Por lo tanto,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \leq kM_1,$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} dx \leq (kM_1)^{2^*}.$$

En particular,

$$\int_{B^c_{R_\epsilon}} |v_n|^{2^*} dx \leq (kM_1)^{2^*}. \tag{2.20}$$

Luego, por (2.19) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)|v_n|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla|v_n|^2 + V^+(x)|v_n|^2 dx \leq M_1^2,$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^+(x)|v_n|^2 dx \leq M. \tag{2.21}$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\int_{B^c_{R_\epsilon}} V^+(x)|v_n|\,dx &= \int_{B^c_{R_\epsilon}} [V^+(x)]^{\frac{1}{2}}|v_n|[V^+(x)]^{\frac{1}{2}}\,dx \\ &\leq \left[\int_{B^c_{R_\epsilon}} [V^+(x)]|v_n|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{B^c_{R_\epsilon}} [V^+(x)]\,dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} [V^+(x)]|v_n|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{B^c_{R_\epsilon}} [V^+(x)]\,dx\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Usando (2.14) y (2.21) se tiene

$$\int_{B^c_{R_\epsilon}} V^+(x)|v_n|\,dx \leq M\epsilon. \tag{2.22}$$

Entonces, por (2.14), (2.20) y (2.22) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{B^c_{R_\epsilon}} V^+(x)|v_n|\,dx + \int_{B^c_{R_\epsilon}} |v_n|^{2^*} dx &= \int_{B^c_{R_\epsilon}} V(x)|v_n|\,dx + \int_{B^c_{R_\epsilon}} |v_n|^{2^*} dx \\ &\leq M\epsilon + (kM_1)^{2^*}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Luego, por (2.14) y (KV) se tiene

$$\int_{B^c_{R_\epsilon}} K(x)\,dx = \int_{B^c_{R_\epsilon}} \frac{K(x)}{V(x)} V(x)\,dx \leq C \int_{B^c_{R_\epsilon}} V(x)\,dx \leq C\epsilon. \tag{2.24}$$

Además, $A_n = \{x \in \mathbb{R}^N : T^0_\epsilon \leq |v_n(x)| \leq T_\epsilon\}$. Luego, elevando a la 2^*, integrando sobre A_n y por (2.20) tenemos

$$(T^0_\epsilon)^{2^*}|A_n| \leq \int_{A_n} |v_n|^{2^*} dx \leq (kM_1)^{2^*} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.25}$$

Entonces, se tiene que sucesión $\{A_n\}$ que está es acotada superiormente para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |A_n| < +\infty. \tag{2.26}$$

Por lo tanto, se tiene (2.24) y (2.26) cumplen las premisas de la condición (A).

Entonces, existe una contante $\overline{R}_\epsilon > 0$ tal que

$$\int_{B^c_{\overline{R}_\epsilon}(0)\cap A_n} K(x)dx < \frac{\epsilon}{C_\epsilon T_\epsilon^{2*}} \quad \textit{para todo}\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Luego, por (2.18) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{B^c_{\widehat{R}_\epsilon}(0)} K(x)|v_n|^r\,dx \;&\leq C\epsilon \left(\int_{B^c_{\widehat{R}_\epsilon}(0)} V(x)|v_n|\,dx + \int_{B^c_{\widehat{R}_\epsilon}(0)} |v_n|^{2^*}\,dx\right)\\ &+C_\epsilon T_\epsilon^{2^*}\int_{B^c_{\widehat{R}_\epsilon}(0)\cap A_n} K(x)\,dx,\end{aligned}$$

donde $\widehat{R}_\epsilon = \text{máx}\{\overline{R}_\epsilon, R_\epsilon\}$, por tanto se cumplen las siguientes inclusiones:

$$B^c_{\widehat{R}_\epsilon}(0) \subseteq B^c_{R_\epsilon}(0) \quad \text{y} \quad B^c_{\widehat{R}_\epsilon}(0) \subseteq B^c_{\overline{R}_\epsilon}(0).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{B^c_{\widehat{R}_\epsilon}(0)} K(x)|v_n|^r\,dx \;&\leq C\epsilon \left(\int_{B^c_{R_\epsilon}(0)} V(x)|v_n|\,dx + \int_{B^c_{R_\epsilon}(0)} |v_n|^{2^*}\,dx\right)\\ &+C_\epsilon T_\epsilon^{2^*}\int_{B^c_{\overline{R}_\epsilon}(0)\cap A_n} K(x)\,dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto, por (2.23) y (2.27)

$$\int_{B^c_{\widehat{R}_\epsilon}(0)} K(x)|v_n|^r\,dx \leq C\epsilon(M\epsilon + (kM)^2 + \epsilon) \leq \widehat{C}\epsilon. \tag{2.28}$$

Otras de las condiciones que se cumple es que $E \hookrightarrow \overline{E}$, donde $\overline{E} = D^{1,2}(B_\epsilon)$ y como $|B_\epsilon| < \infty$ entonces

$$D_0^{1,2}(B_\epsilon) = H_0^1(B_\epsilon) \quad y \quad H_0^1(B_\epsilon) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^p(B_\epsilon) \quad \text{para} \quad 1 \leq p < 2^*$$

entonces

$$E \hookrightarrow \overline{E} \overset{comp}{\hookrightarrow} L^r(B_\epsilon) \quad \textit{donde}\;\, 1 \leq r < 2^*.$$

Sea $v_n \rightharpoonup v$ en E, entonces $v_n \to v$ en $L^r(B_\epsilon)$, es decir, dado un $\epsilon > 0$ se cumple

$$\int_{B_{\widehat{R}_\epsilon}} |v_n|^r - |v|^r dx < \epsilon.$$

Además, como $K \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, entonces existe un $C > 0$ tal que

$$|K(x)| < C \qquad \text{c.p.t de } \mathbb{R}^N.$$

Entonces, por la desigualdad de Hölder tenemos

$$\int_{B_{\widehat{R}_\epsilon}} K(x)[|v_n|^r - |v|^r]\, dx < C\epsilon. \tag{2.29}$$

Consecuentemente, por desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[|v_n|^r - |v|^r]\, dx\right| &\leq \left|\int_{B_{\widehat{R}_\epsilon}} K(x)[|v_n|^r - |v|^r]\, dx + \int_{B^c_{\widehat{R}_\epsilon}} K(x)[|v_n|^r - |v|^r]\, dx\right| \\
&\leq \left|\int_{B_{\widehat{R}_\epsilon}} K(x)[|v_n|^r - |v|^r]\, dx\right| + \left|\int_{B^c_{\widehat{R}_\epsilon}} K(x)[|v_n|^r - |v|^r]\, dx\right| \\
&\leq \left|\int_{B_{\widehat{R}_\epsilon}} K(x)[|v_n|^r - |v|^r]\, dx\right| + \left|\int_{B^c_{\widehat{R}_\epsilon}} K(x)|v_n|^r\, dx\right|.
\end{aligned}$$

Finalmente, por (2.28) y (2.29) obtenemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[|v_n|^r - |v|^r]\, dx\right| \leq \overline{C}\epsilon,$$

es decir, $v_n \to v \in L^r_K(\mathbb{R}^N)$ para $r \in (1, 2]$.

□

2.2.3. El funcional Euler-Lagrange asociado

En esta subsección nos enfocaremos a probar que el funcional $\mathcal{J} : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\, dx. \tag{2.30}$$

está bien definido y es de clase $\mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$.

Lema 2.4. *Sean* $V^- \in L^{N/2}(\Omega)$, $(u_n) \subset E$ *una sucesión tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *en* E *. Entonces*

$$\int_\Omega V^-(x)|u_n|^2dx \to \int_\Omega V^-(x)|u|^2dx.$$

Demostración. Definimos el funcional

$$\phi : D_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$u \to \int_\Omega V^-(x)|u|^2dx.$$

El funcional ϕ está bien definido. En efecto, sea $u \in D_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, aplicando la desigualdad de Hölder

$$\int_\Omega V^-(x)|u|^2dx \leq \|V^-\|_{N/2}\|u^2\|_{N/N-2}.$$

Como $\|V^-\|_{N/2}$ y $\|u^2\|_{N/N-2}$ son finitos, entonces $\int_\Omega V^-(x)|u|^2dx$ es finito. Ahora, asumiendo que $u_n \rightharpoonup u$ en $D_0^{1,2}(\Omega)$ y de las siguientes inmersiones

$$D_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^P_{Loc}(\Omega).$$

se deduce que,

$$D_0^{1,2}(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^P_{Loc}(\Omega),$$

por lo tanto, existe una subsucesión $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$ tal que

$$u_{n_k} \to u \quad \text{en} \quad L^2_{Loc}(\Omega) \quad \text{cuando} \quad k \to +\infty$$

si es necesario a la subsucesión podemos asumir que $u_{n_k} \to u$ en c.t.p en Ω, dado que (u_{n_k}) es acotada en $L^{2^*}(\Omega)$. Entonces $(u_{n_k}^2)$ es acotada en $L^{\frac{N}{N-2}}(\Omega)$. Luego,

$$\psi(u_{n_k}^2) \to \psi(u^2) \quad \textit{para} \quad \textit{todo} \quad \psi \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega).$$

En particular

$$\phi(u_{n_k}^2) \to \phi(u^2) \quad \text{cuando} \quad k \to +\infty,$$

es decir,

$$\int_\Omega V^- u_{n_k}^2 dx \to \int_\Omega V^- u^2 dx \quad \textit{cuando} \quad k \to +\infty.$$

□

Lema 2.5. *Si las condiciones* (K_1), (K_2) *y* (KV) *se cumplen. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u+tv)-f(u)]^2\,dx \to 0 \quad \textit{cuando} \quad t \to +\infty.$$

Demostración. Sea $u_n \rightharpoonup u$ en E, como E es compacto se cumple que dado una $(u_{n_k}) \subseteq (u_n)$ tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ casi todo punto de $\mathbb{R}^N$ y $\mathcal{Q}_1(x) \in L_K^2(\mathbb{R}^N)$, donde

$$Q_1(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_{n_k}(x) - u(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} K(x)|f(u_{n_k}) - f(u)|^2 &\leq 2K(x)(|f(u_{n_k})^2 + |f(u)|^2) \\ &\leq 4\sum_{i=0}^{2}(K(x)|u_{n_k}|^{2(\tau_i-1)} + K(x)|u|^{2(\tau_i-1)}). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} K(x)|f(u_{n_k}) - f(u)|^2 &\leq 4\sum_{i=0}^{2}(K(x)|u_{n_k} - u + u|^{2(\tau_i-1)} + K(x)|u|^{2(\tau_i-1)}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)(K(x)|u_{n_k} - u|^{2(\tau_i-1)} + K(x)|u|^{2(\tau_i-1)}) \\ &\leq \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)(K(x)|Q_1(x)|^{2(\tau_i-1)} + K(x)|u|^{2(\tau_i-1)}), \end{aligned}$$

es decir,

$$K(x)|f(u_{n_k}) - f(u)|^2 \leq \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)(K(x)|Q_1(x)|^{2(\tau_i-1)} + K(x)|u|^{2(\tau_i-1)}),$$

donde,

$$Q_2(x) = \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)(K(x)Q_1(x)|^{2(\tau_i-1)} + K(x)|u|^{2(\tau_i-1)}).$$

Ahora,integramos sobre $\mathbb{R}^N$, obteniendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} Q_2(x)\,dx \ = \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)\int_{\mathbb{R}^N}(K(x)|Q_1(x)|^{2(\tau_i-1)} + K(x)|u|^{2(\tau_i-1)})\,dx,$$

es decir,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} Q_2(x)\,dx \ &= \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)\int_{\mathbb{R}^N}(K^{\tau_i-1+2-\tau_i}(x)|Q_1(x)|^{2(\tau_i-1)}dx \\ &\quad + \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)\int_{\mathbb{R}^N} K^{\tau_i-1+2-\tau_i}(x)|u|^{2(\tau_i-1)})\,dx.\end{aligned}$$

Luego, por (V_1) y (KV), se obtiene que $K \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Además, se cumple que

$$\frac{1}{\tau_i - 1} > 1 \ \ y \ \ \frac{1}{2-\tau_i} > 1.$$

y por desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} Q_2(x)\,dx \ &\leq \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)\left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)Q_1^2\,dx\right)^{\tau_i-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\,dx\right)^{2-\tau_i} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)\left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u|^2\,dx\right)^{\tau_i-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\,dx\right)^{2-\tau_i},\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} Q_2(x)\,dx \ &\leq \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)|Q_1|_{K,2}^{2(\tau_i-1)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\,dx\right)^{2-\tau_i} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{2} C(\tau_i)|u|_{K,2}^{2(\tau_i-1)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\,dx\right)^{2-\tau_i} < \infty.\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la convergencia dominada

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(u_{n_k})-f(u)|^2dx = 0.$$

$\square$

Lema 2.6. *Si las condiciones* (K_1), (K_2) *y* (KV) *se cumplen. Entonces el funcional* $\mathcal{J}: E\to\mathbb{R}$ *dado en (2.30) Está bien definido y pertenece a* $\mathcal{C}^1(E,\mathbb{R})$ *y además*

$$\langle \mathcal{J}'(u),v\rangle = \langle u,v\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)uv\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v\,dx. \tag{2.31}$$

Demostración. Primero probaremos que el funcional $\mathcal{J}: E\to\mathbb{R}$ está bien definido. Sea $u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Por desigualdad de Hölder

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2dx \le \|V^-\|_{\frac{N}{2}}\|u^2\|_{\frac{N}{N-2}}.$$

Usando la condición (V_1) y por (2.2) obtenemos

$$\|V^-\|_{\frac{N}{2}} < +\infty \quad y \quad \|u^2\|_{\frac{N}{N-2}} < +\infty.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^-u^2\,dx < +\infty.$$

Ahora, por la condición (f_1) se tiene $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ y existen constantes $\tau_1,\tau_2\in(1,2)$ con $\tau_1<\tau_2$ tal que

$$0\le f(u)u \le |u|^{\tau_1}+|u|^{\tau_2} \qquad \text{para todo } \; u\in\mathbb{R}.$$

Tomando el valor absoluto y multiplicando por $1/|u|$ tenemos

$$|f(u)| \le |u|^{\tau_1-1}+|u|^{\tau_2-1} \tag{2.32}$$

Además, por la condición (f_2) tenemos

$$F(u) = \int_0^u f(u)\,ds.$$

Ahora, tomando valor absoluto y por (2.32) se tiene

$$|F(u)| \leq \int_0^u |f(s)|\, ds \leq \int_0^u |s|^{\tau_1 - 1} + |s|^{\tau_2 - 1}\, ds = \frac{|s|^{\tau_1}}{\tau_1} + \frac{|s|^{\tau_2}}{\tau_2}\Big|_0^u,$$

es decir,

$$|F(u)| \leq \frac{|u|^{\tau_1}}{\tau_1} + \frac{|u|^{\tau_2}}{\tau_2} \leq c|u|^{\tau_1} + c|u|^{\tau_2} \tag{2.33}$$

donde $c = \text{máx}\{\frac{1}{\tau_1}, \frac{1}{\tau_2}\}$.

Por el Lema 2.4 se cumple que $E \overset{comp}{\hookrightarrow} L_k^r(\mathbb{R}^N)$ para $r \in (1,2]$, es decir, dado $u \in E$ existe un $c > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq c\|u\|, \text{ para todo } r \in (1,2]. \tag{2.34}$$

Entonces, por (2.33) y (2.34) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} K(x)|F(u)|\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u|^{\tau_1} + K(x)|u|^{\tau_2}\, ds \\ &\leq c\|u\|^{\tau_1} + c\|u\|^{\tau_2}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

es decir,

$$\int_{\mathbf{R}^N} K(x) f(u) dx < +\infty.$$

Por lo tanto, $\mathcal{J}$ está bien definido para $u \in E$. A continuación probaremos que $\mathcal{J} \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$. Primero escribiremos el funcional $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3$, donde

$$\mathcal{J}_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2, \quad \mathcal{J}_2(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)\|u\|^2 dx \quad J_3(x) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\, dx.$$

Probaremos que $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \in C^1(E, \mathbb{R})$.

$\mathcal{J}_1$ es diferenciable según Gateux. En efecto

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1(u)}{\partial v} = \lim_{t \to 0} \frac{\mathcal{J}_1(u + tv) - \mathcal{J}_1(u)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{2}\langle u + tv, u + tv\rangle - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle}{t}.$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1(u)}{\partial v} = \frac{1}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\langle u,u\rangle + 2t\langle u,v\rangle + t^2\langle v,v\rangle - \langle u,u\rangle}{t} = \lim_{t\to 0}\langle u,v\rangle + \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} t\langle v,v\rangle\,,$$

es decir,

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1(u)}{\partial v} = \langle u,v\rangle\,.$$

$\mathcal{J}_1$ es diferenciable según Fréchet. En efecto, observe que la aplicación definida en E por

$$v \mapsto \langle u,v\rangle\,,$$

es lineal y continua. Luego,

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\mathcal{J}_1(u+v) - \mathcal{J}_1(u) - \langle u,v\rangle}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0} \frac{\frac{1}{2}\langle u+v,u+v\rangle - \frac{1}{2}\langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle}{\|v\|}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\mathcal{J}_1(u+v) - \mathcal{J}_1(u) - \langle u,v\rangle}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0} \frac{\frac{1}{2}\langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \frac{1}{2}\langle v,v\rangle - \frac{1}{2}\langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle}{\|v\|}$$

Consecuentemente,

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\mathcal{J}_1(u+v) - \mathcal{J}_1(u) - \langle u,v\rangle}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{2}\frac{\|v\|^2}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{2}\|v\|,$$

es decir,

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\mathcal{J}_1(u+v) - \mathcal{J}_1(u) - \langle u,v\rangle}{\|v\|} = 0.$$

Hemos probado que $\mathcal{J}_1$ es diferenciable, ahora veamos que $\mathcal{J}_1'$ es continua.
Sea la sucesión $(u_n) \subset E$ tal que $u_n \to u$. Probaremos que $\|\mathcal{J}_1'(u_n) - \mathcal{J}_1'(u)\|_* \to 0$, donde $\|.\|_*$ denota la norma en E'. Luego,

$$\|\mathcal{J}_1'(u_n) - \mathcal{J}_1'(u)\|_* = \sup_{\|v\|\leq 1} |\mathcal{J}_1'(u_n) - \mathcal{J}_1'(u)|$$

$$|[\mathcal{J}_1'(u_n) - \mathcal{J}_1'(u)]v| = |\,\langle u_n,v\rangle - \langle u,v\rangle\,| = |\,\langle u_n - u, v\rangle\,| \leq \|u_n - u\|.\|v\|$$

Finalmente,

$$\|\mathcal{J}_1'(u_n) - \mathcal{J}_1'(u)\| \leq \|u_n - u\| \to 0.$$

$\mathcal{J}_2$ es diferenciable según Gateux. En efecto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{J}_2(u)}{\partial v} &= \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{J}_2(u+tv) - \mathcal{J}_2(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u+tv|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2 dx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)[u^2 + 2tuv + t^2v^2 - u^2] dx}{t}.
\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{J}_2(u)}{\partial v} &= \lim_{t\to 0} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)[tuv] dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)[t^2v^2] dx}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)[uv] dx + \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)[tv] dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) uv \, dx.
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{\partial \mathcal{J}_2(u)}{\partial v} = \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) uv \, dx.$$

$\mathcal{J}_2$ es diferenciable según Fréchet. En efecto, observe que la aplicación definida en E por

$$v \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) uv \, dx,$$

es lineal y continua. Luego,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\mathcal{J}_2(u+v)-\mathcal{J}_2(u)-\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)uvdx}{\|v\|}\\
&= \lim_{\|v\|\to 0} \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u+v|^2dx - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2dx - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)2uvdx}{\|v\|}\\
&= \lim_{\|v\|\to 0} \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|v|^2dx}{\|v\|}.
\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|v|^2dx}{\|v\|} \leq \lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{2}\frac{\|v\|^2}{\|v\|}.$$

Entonces,

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\mathcal{J}_2(u+v)-\mathcal{J}_2(u)-\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)uvdx}{\|v\|} \leq \lim_{\|v\|\to 0} \frac{1}{2}\|v\| = 0.$$

Hemos probado que $\mathcal{J}_2$ es diferenciable, ahora veamos que $\mathcal{J}_2'$ es continua.
Sea la sucesión $(u_n) \subset E$ tal que $u_n \to u$, probaremos que $\|\mathcal{J}_2'(u_n) - \mathcal{J}_1'(u)\|_* \to 0$.
En efecto, sea

$$\|\mathcal{J}_2'(u_n) - \mathcal{J}_2'(u)\|_* = \sup_{\|v\|\leq 1} |[\mathcal{J}_2'(u_n) - \mathcal{J}_2'(u)]v|$$

Luego, tenemos

$$|[\mathcal{J}_2'(u_n) - \mathcal{J}_2'(u)]v| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} V^-u_nv\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} V^-uv\,dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} V^-(u_n-u)v\,dx\right|$$

Usando la condición (V_2)

$$|[\mathcal{J}_2'(u_n) - \mathcal{J}_2'(u)]v| \leq |\langle u_n - u, v\rangle| \leq \|u_n - u\|.\|v\|$$

Finalmente,

$$\|\mathcal{J}_2'(u_n) - \mathcal{J}_2'(u)\| \leq \|u_n - u\| \to 0.$$

$\mathcal{J}_3$ es diferenciable según Fréchet. En efecto, observe que la aplicación definida en E por

$$v \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v\,dx,$$

es lineal y continua. Sea $u \in E$ fijo, para cada $v \in E$, definimos

$$r(v) = \mathcal{J}_3(u+v) - \mathcal{J}_3(u) - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v\,dx.$$

Luego,

$$r(v) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)[F(u+v) - F(u)]\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v\,dx. \tag{2.36}$$

Denotamos $\phi(t) = K(x)F(u+tv)$, entonces por el teorema fundamental del cálculo se cumple

$$\phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\phi(t)\,dt.$$

Reemplazando,

$$K(x)F(u+v) - K(x)F(u) = \int_0^1 \frac{d}{dt}K(x)F(u+tv)\,dt.$$

Además,

$$\frac{d}{dt}F(u+tv) = f(u+tv)v.$$

Entonces,

$$K(x)F(u+v) - K(x)F(u) = \int_0^1 K(x)f(u+tv)v\,dt. \tag{2.37}$$

Ahora, reemplazando (2.37) en (2.36) obtenemos

$$r(v) = \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1 K(x)f(u+tv)v\,dt\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v\,dx.$$

Por lo tanto,

$$r(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 K(x)f(u+tv)v\,dt - K(x)f(u)v \right) dx.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} r(v) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 K(x)f(u+tv)v\,dt - \int_0^1 K(x)f(u)v\,dt \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 K(x)f(u+tv)v - K(x)f(u)v\,dt \right) dx, \end{aligned}$$

es decir,

$$r(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 K(x)[f(u+tv) - f(u)]v\,dt \right) dx$$

Intercambiando las integrales por el Teorema de Fubini, se obtiene

$$r(v) = \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u+tv) - f(u)]v\,dx \right) dt. \tag{2.38}$$

Por el Lema 2.6 se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u+tv) - f(u)]^2\,dx = 0,$$

es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|v\| < \delta$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u+tv) - f(u)]^2\,dx < \epsilon. \tag{2.39}$$

Además, por el Lema 2.3 se cumple que $E \overset{comp}{\hookrightarrow} L^2_K(\mathbb{R}^N)$, es decir, existe um $C > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|v\|_E. \tag{2.40}$$

A continuación tenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} |r(v)| &\leq \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|f(u+tv) - f(u)|v\, dx \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)^{\frac{1}{2}}(x) v K^{\frac{1}{2}}(x)|f(u+tv) - f(u)|\, dx \right) dt. \end{aligned}$$

Luego, por desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)^{\frac{1}{2}}(x) v K^{\frac{1}{2}}(x)|f(u+tv) - f(u)|\, dx \right) dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u+tv) - f(u)]^2\, dx \right) dt. \end{aligned}$$

Además, por (2.39) y (2.40) obtenemos

$$\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u+tv) - f(u)]^2\, dx \right) dt \leq \int_0^1 C\|v\|\epsilon\, dt,$$

es decir,

$$|r(v)| \leq C\|v\|\epsilon.$$

Finalmente,

$$\frac{r(v)}{\|v\|} \leq C\epsilon, \quad 0 < \|v\| < \delta.$$

Lo que implica

$$\lim_{\|v\| \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

Hemos probado que $\mathcal{J}_3$ es diferenciable, ahora veamos que $\mathcal{J}_3'$ es continua.
Sea la sucesión $(u_n) \subset E$ tal que $u_n \to u$. Probaremos que $\|\mathcal{J}_3'(u_n) - \mathcal{J}_3'(u\|_* \to 0$.
En efecto, sea

$$\|\mathcal{J}_3'(u_n) - \mathcal{J}_3'(u)\|_* = \sup_{\|v\| \leq 1} |[\mathcal{J}_3'(u_n) - \mathcal{J}_3'(u)]v|.$$

Aplicando la desigualdad (3.23) y la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}_3'(u_n) - \mathcal{J}_3'(u)\|_* &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_n) - f(u)]v \, dx \right| \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)^{\frac{1}{2}} v K(x)^{\frac{1}{2}} |f(u_n) - f(u)| \, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_n) - f(u)]^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_n) - f(u)]^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} C\|v\|_E.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\|\mathcal{J}_3'(u_n) - \mathcal{J}_3'(u)\|_* \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_n) - f(u)]^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \to 0$$

Entonces, se ha probado que los funcionales $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3 \in C^1(E, \mathbb{R})$ y como el funcional $\mathcal{J}$ está definido como $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3$, por lo tanto se cumple que $\mathcal{J} \in C^1(E, \mathbb{R})$. Además

$$\langle \mathcal{J}'(u), v \rangle = \langle u, v \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)uv \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)v \, dx.$$

$\square$

Capítulo III

Demostración de los teoremas de existencia

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar la existencia de una solución no trivial y la multiplicidad de soluciones de pequeña energía para la ecuación de tipo Schrödinger con una no linealidad sublineal

$$-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u), \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \qquad (\mathcal{P})$$

donde $N \geqslant 3$, $V(x)$ cambia de signo, K es positivo y $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

3.1. Existencia de al menos una solución para el problema $(\mathcal{P})$

En esta sección estudiaremos la existencia de la solución no trivial de la ecuación $(\mathcal{P})$ a partir de ciertas condiciones.

Lema 3.1. *Si se cumplen las condiciones (K_1), (V_1), (V_2), (KV) y (f_1). Entonces el funcional $\mathcal{J}$ es coercivo y está acotado por debajo en E.*

Demostración. Basta probar que

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \mathcal{J}(u) = \infty.$$

De (2.30) se tiene el funcional

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx,$$

es decir,

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \Big(|\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2\Big)dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx.$$

Como $V = V^+ - V^-$ entonces obtenemos

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx.$$

Luego, por (2.7) y (2.35) se tiene

$$\mathcal{J}(u) \geq \Big(\frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0}\Big)\|u\|^2 - c\|u\|^{\tau_1} - c\|u\|^{\tau_2},$$

es decir,

$$\mathcal{J}(u) \geq \|u\|^2\left(\frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0} - c\|u\|^{\tau_1-2} - c\|u\|^{\tau_2-2}\right). \tag{3.1}$$

Además, dado que $\tau_1,\ \tau_2 \in (1,2)$ entonces $\tau_1 - 2 < 0$ y $\tau_2 - 2 < 0$, por lo tanto se cumple

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\left(\frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0} - c\|u\|^{\tau_1-2} - c\|u\|^{\tau_2-2}\right) = \frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0}$$

Luego,

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\|u\|^2\left(\frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0} - c\|u\|^{\tau_1-2} - c\|u\|^{\tau_2-2}\right) = \infty. \tag{3.2}$$

Finalmente, por (3.1) y (3.2) se concluye que el funcional $\mathcal{J}$ es coercivo. □

Por el Lema 3.1 y el principio variacional de Ekeleand, existe una sucesión minimizante (u_n) tal que

$$\mathcal{J}(u_n) \to \inf_E \mathcal{J} \;\; y \;\; \mathcal{J}'(u_n) \to 0, \;\; si \;\; n \to \infty.$$

Por el Lema 3.1, la sucesión minimizante (u_n) está acotada en E.

Lema 3.2. *Si se cumplen las condiciones* (K_1), (V_1),(V_2),(KV) *y* (f_1). *Entonces existe una subsucesión convergente de la sucesión minimizante* (u_n).

Demostración. Sea la sucesión minimizante $(u_n) \subset E$, probaremos que existe una subsucesión $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ tal que

$$\|u_{n_k} - u\| \to 0 \quad \textit{cuando } \ k \to \infty.$$

En efecto, por el Lema 3.1, la sucesión minimizante (u_n) está acotada. Pasando a una subsucesión, se tiene

$$\begin{cases} u_{n_k} \rightharpoonup u \ \textit{ en } \ E \quad \textit{cuando } \ k \to \infty \\ u_{n_k} \to u \ \textit{ en } \ L^2_k(\mathbb{R}^N) \quad \textit{cuando } \ k \to \infty \\ u_{n_k}(x) \to u(x) \ \textit{ casi todo punto en } \ \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{3.3}$$

De (2.31) deducimos que

$$\langle u, v \rangle = \langle \mathcal{J}'(u), v \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) uv \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u) v \, dx.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|u_{n_k} - u\|^2 \ &= \langle u_{n_k} - u, u_{n_k} - u \rangle \\ &= \langle \mathcal{J}'(u_{n_k} - u), u_{n_k} - u \rangle + \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) |u_{n_k} - u|^2 \, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} K(x) [f(u_{n_k}) - f(u)](u_{n_k} - u) \, dx. \end{aligned}$$

Luego, por el Lema 2.4

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x) |u_{n_k} - u|^2 dx \to 0, \ \text{ cuando } \ k \to \infty.$$

Además,

$$\langle \mathcal{J}'(u_{n_k} - u), u_{n_k} - u \rangle \leq \|\mathcal{J}'(u_{n_k}) - \mathcal{J}'(u)\|_* \|u_{n_k} - u\| \to 0, \ \text{ cuando } \ k \to \infty.$$

Por tanto, basta probar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_{n_k}) - f(u)](u_{n_k} - u)\, dx \to 0, \text{ cuando } k \to \infty.$$

En efecto, primero probaremos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_{n_k})](u_{n_k} - u)\, dx < C\epsilon \text{ cuando } k \to \infty. \tag{3.4}$$

Veamos que

$$\frac{1}{\frac{2}{2-\tau_i}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{2}{\tau_i - 1}} = 1$$

para $i = 1, 2$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u_{n_k}|^{\tau_i - 1}|u_{n_k} - u|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} K^{(\frac{2-\tau_i}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\tau_i - 1}{2})}(x)|u_{n_k}|^{\tau_i - 1}|u_{n_k} - u|\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} K^{\frac{2-\tau_i}{2}}(x) K^{\frac{\tau_i - 1}{2}}(x)|u_{n_k}|^{\tau_i - 1} K^{\frac{1}{2}}(x)|u_{n_k} - u|\, dx;
\end{aligned}$$

y por desigualdad de Hölder generalizado obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u_{n_k}|^{\tau_i - 1}|u_{n_k} - u|\, dx &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} (K^{(\frac{2-\tau_i}{2}}(x))^{\frac{2}{2-\tau_i}}\right]^{\frac{2-\tau_i}{2}} \\
&\quad \left[\int_{\mathbb{R}^N} (K^{(\frac{\tau_i - 1}{2}}(x)|u_{n_k}|^{\tau_i - 1})^{\frac{2}{\tau_i - 1}}\right]^{\frac{\tau_i - 1}{2}} \\
&\quad \left[\int_{\mathbb{R}^N} (K^{\frac{1}{2}}(x)|u_{n_k} - u|)^2\right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u_{n_k}|^{\tau_i - 1}|u_n - u|\, dx \leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\right]^{\frac{2-\tau_i}{2}} \|u_{n_k}\|_{K,2}^{\tau_i - 1} \|u_{n_k} - u\|_{K,2}. \tag{3.5}$$

Luego, por (f_1) se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_n)](u_{n_k}-u)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)[|u_{n_k}|^{\tau_1-1}+|u_{n_k}|^{\tau_2-1}](u_{n_k}-u)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\sum_{i=1}^{2}|u_{n_k}|^{\tau_i-1}(u_{n_k}-u)\,dx,\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_n)](u_{n_k}-u)\,dx = \sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u_{n_k}|^{\tau_i-1}(u_{n_k}-u)\,dx.$$

Ahora, por (3.5) se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_n)](u_{n_k}-u)\,dx \le \sum_{i=1}^{2}\left[\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\right]^{\frac{2-\tau_i}{2}}\|u_{n_k}\|_{K,2}^{\tau_i-1}\|u_{n_k}-u\|_{K,2}$$

Como la sucesión miniminizante (u_n) está acotada en E. Además, por (K_1) y (3.2) existe un $C>0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_n)](u_{n_k}-u)\,dx \le C\epsilon. \tag{3.6}$$

De manera similar se demuestra que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u)](u_n-u)\,dx \le \epsilon.$$

En efecto, Luego, por (f_1) se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u)](u_{n_k}-u)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)[|u|^{\tau_1-1}+|u|^{\tau_2-1}](u_{n_k}-u)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\sum_{i=1}^{2}|u|^{\tau_i-1}(u_{n_k}-u)\,dx,\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u)](u_{n_k} - u)\, dx = \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u|^{\tau_i - 1}(u_{n_k} - u)\, dx.$$

Ahora, por (3.5) se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u](u_{n_k} - u)\, dx \leq \sum_{i=1}^{2} \left[\int_{\mathbb{R}^N} K(x)\right]^{\frac{2-\tau_i}{2}} \|u\|_{K,2}^{\tau_i - 1} \|u_{n_k} - u\|_{K,2}$$

Por (K_1) y (3.2)

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u)](u_{n_k} - u)\, dx \leq \epsilon. \tag{3.7}$$

Finalmente, aplicando desigualdad triangular logramos obtener

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_{n_k}) - f(u)](u_{n_k} - u)\, dx \leq & \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|[f(u_{n_k})](u_{n_k} - u)| \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|[f(u)](u_{n_k} - u)|.\end{aligned}$$

Además, por (3.6) y (3.7) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)[f(u_{n_k}) - f(u)](u_{n_k} - u)\, dx \leq C\epsilon + \epsilon = \epsilon.$$

Por lo tanto, se ha demostrado que

$$\|u_{n_k} - u\| \to 0 \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

□

Teorema 3.3. *Si se cumplen las condiciones (K_1), (V_1),(V_2),(KV), (f_1) y (f_2). Entonces el límite u_0 de la sucesión minimizante (u_n) es no trivial.*

Demostración. Sea la sucesión minimizante (u_n) tal que $u_n \to u_0$, cuando $n \to \infty$, probaremos que $u_0 \neq 0$.

Primero consideraremos un subespacio $\hat{E} \subset E$, donde $\dim \hat{E} < \infty$. Por el Lema 2.3 y un discusión similar al Lema 2.4 de [19] (Ver(5) del Lema 2.4 en [15]), existe una constante k tal que

$$\Omega := \{x : K(x)|u(x)|^{\tau_1} \geq k\|u\|^{\tau_1}, \forall u \in E\} \qquad y \qquad |\Lambda| \geq k. \tag{3.8}$$

A continuación consideraremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \{x : K(x)F(u) \geq k\|u\|^{\tau_1}, \forall u \in \hat{E}\} \quad y \\ \Omega &:= \{x : K(x)|u(x)|^{\tau_1} \geq k\|u\|^{\tau_1}, \forall u \in \hat{E}\}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Afirmación : el conjunto $\Omega \subseteq \Lambda$.
En efecto, sea $x \in \Omega$, entonces por definición del conjunto Λ y la condición (f_2) existe un $C > 0$ tal que

$$k\|u\|^{\tau_1} \leq K(x)|u(x)|^{\tau_1} \leq K(x)\frac{1}{C}F(u) = \hat{C}K(x)F(u),$$

es decir, existe un $\hat{k} > 0$ tal que

$$\hat{k}\|u\|^{\tau_1} \leq K(x)F(u).$$

Por lo tanto $x \in \Lambda$. En consecuencia de la afirmación 1 y por (3.8) se cumple que

$$k \leq |\Omega| \leq |\Lambda|. \tag{3.10}$$

Entonces, para cualquier $u \in \hat{E} - \{0\}$ fijo y $s > 0$ y por (2.30) se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(su) &= \frac{1}{2}\|su\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|su|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(su)\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|su\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(su)\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|su\|^2 - \int_{\Lambda} K(x)F(su)\,dx \end{aligned}$$

Luego, por la condición (f_2) y la definición (3.9) ovtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(su) &\leq \frac{1}{2}\|su\|^2 - \int_\Lambda k\|su\|^{\tau_1}dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|su\|^2 - k\|su\|^{\tau_1}|\Lambda| \\
&\leq \frac{1}{2}\|su\|^2 - ks^{\tau_1}\|u\|^{\tau_1}k \\
&\leq \frac{1}{2}\|su\|^2 - k^2s^{\tau_1}\|u\|^{\tau_1} \\
&= s^2\|u\|^2\left(\frac{1}{2} - k^2s^{\tau_1-2}\|u\|^{\tau_1-2}\right),
\end{aligned}$$

donde $1 < \tau_1 < 2$. Además, para un s muy pequeño y $\tau_1 - 2 < 0$ se tiene

$$s^2\|u\|^2 \geq 0 \quad y \quad \frac{1}{2} - k^2s^{\tau_1-2}\|u\|^{\tau_1-2} < 0.$$

entonces

$$\mathcal{J}(su) < 0.$$

Por el Lema 3.1 el funcional $\mathcal{J}$ es coercivo, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{J}(u_n) = \mathcal{J}(u_0) = \inf_{u\in E}\mathcal{J}(u).$$

De lo anterior si $u_0 = 0$ se cumpliría que

$$\mathcal{J}(u_0) = \inf_{u\in E}\mathcal{J}(u) = 0 < 0$$

lo cual seria una contradicción. Por tanto queda demostrado que $u_0 \neq 0$. $\square$

3.2. Geometría de la fuente dual

En esta sección mostramos que el funcional de Euler-Lagrange tiene las propiedades geométricas de la Proposición 1.45 bajo las condiciones del Teorema 0.2. A continuación haremos mención de la condición P.S y del teorema de la fuente dual.

Definición 3.4. *(Condición PS) Sea E un espacio de Banach, $c \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{J} \in C^1(E;\mathbb{R})$. La función $\mathcal{J}$ se dice que satisface la condición $(PS)_c$ en E si hay alguna $(PS)_c$ sucesión (u_n) tal que*

$$\mathcal{J}(u_n) \to c \ \ y \ \ \mathcal{J}'(u_n) \to 0 \ ; n \to \infty$$

tiene una subsucesión fuertemente convergente en E.

Sea e_j una base ortonormal del espacio de Hilbert E y defina

$$X_j = \mathbb{R}e_j, \qquad Y_k = \bigoplus_{j=1}^{k} X_j, \qquad Z_k = \overline{\bigoplus_{j=1}^{\infty} X_j}.$$

Para el enunciado del teorema de la fuente dual, necesitamos la siguiente condición. Se pueden obtener más detalles encontrado en [17]. (A_1) Un grupo compacto G actúa isometricamente sobre el espacio de Hilbert $E = \overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{N}}^{\infty} X_j}$; los espacios X_j, son invariantes y existe un espacio de dimensión finita V tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $X_j \backsimeq V$ y es admisible la acción de G sobre V.

Proposición 3.5 (Teorema de la fuente dual, Bartsch-Willem, 1995)**.** *Si se cumple la condición (A_1) y sea $\mathcal{J} \in C^1(E,\mathbb{R})$ un funcional invariante. Si existen dos sucesiones $0 < r_k < \rho_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Además se cumplen las siguientes condiciones:*

(D_1) $a_k := \inf\limits_{u\in Z_k, \|u\|=\rho_k} \mathcal{J}(u) \geq 0$;

(D_2) $b_k := \max\limits_{u\in Y_k, \|u\|=r_k} \mathcal{J}(u) < 0$;

(D_3) $d_k := \inf\limits_{u\in Z_k, \|u\|\leq\rho_k} \mathcal{J}(u) \to 0$ *cuando* $k \to \infty$;

(D_4) *para todo $c \in [d_k, 0)$, $\mathcal{J}$ satisface la condición $(PS)_c$, es decir, dada una sucesión $(u_{n_j}) \subset E$ que satisface*

$$u_{n_j} \in Y_{n_j}, \ \ \mathcal{J}(u_{n_j}) \to c, \ \ \mathcal{J}|'_{Y_{n_j}}(u_{n_j}) \to 0, \ \ n_j \to \infty$$

contiene una subsucesión que converge a un punto crítico de $\mathcal{J}$. Entonces existe la sucesión de valores críticos negativos que convergen a 0.

Lema 3.6. *si* $1 < p < 2^*$ *entonces se cumple*

$$\beta_k := \sup_{\|u\| \in Z_k, \|u\|=1} \|u\|_p \to 0 \quad \textit{cuando} \quad k \to \infty.$$

Demostración. Sea $u \in Z_k$ y $w \in Z_{k+1}$ entonces

$$u \in \overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty} X_j} \quad y \quad w \in \overline{\bigoplus_{j=k+1}^{\infty} X_j}.$$

Por lo tanto

$$\|u\|_p \geq \|w\|_p > 0.$$

Consecuentemente,

$$\sup_{\|u\| \in Z_k, \|u\|=1} \|u\|_p \geq \sup_{\|w\| \in Z_{k+1}, \|w\|=1} \|w\|_p,$$

es decir,

$$\beta_k \geq \beta_{k+1} > 0.$$

Como la sucesión (β_k) es monótona decreciente y acotada interiormente por 0 se cumple que existe un $\beta \geq 0$ tal que

$$\beta_k \to \beta \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Además, por definición de Z_k, $u_k \rightharpoonup 0$ en $H_0^1(\Omega)$ y por inmersión de Sobolev

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^P(\Omega) \quad \text{para} \quad 1 < p < 2^*$$

Entonces

$$u_k \to 0 \quad en \quad L^p(\Omega) \quad cuando \quad k \to \infty.$$

Luego, dado un $k \in \mathbb{N}$, existe $u_k \in Z_k$ tal que $\|u_k\| = 1$ y por definición de supremo

$$\|u_k\|_p > \frac{\beta_k}{2} > 0$$

Finalmente, $\beta = 0$ cuando $k \to \infty$ $\square$

Lema 3.7. *Si se cumplen las condiciones* (K_1), (V_1),(V_2),(KV), (f_1) *y* (f_2). *Además* $f(u) = -f(-u)$, *para todo* $u \in \mathbb{R}$. *Entonces existe un sucesión* $0 < \rho_k$ ($\rho_k \to 0$, *cuando* $k \to \infty$) *tal que*

$$a_k := \inf_{u \in Z_k, \|u\| = \rho_k} \mathcal{J}(u) \geq 0.$$

Demostración. De (2.30) se tiene el funcional

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx,$$

es decir,

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla u|^2 + V^+(x)|u|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx.$$

Como $V = V^+ - V^-$ entonces obtenemos

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} |\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx.$$

Luego, por (2.7) y (2.35) se tiene

$$\mathcal{J}(u) \geq \left(\frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0}\right)\|u\|^2 - c\|u\|_{K,\tau_1}^{\tau_1} - c\|u\|_{K,\tau_2}^{\tau_2}, \tag{3.11}$$

Ahora, para i=1,2 se define

$$\beta_{k,\tau_i} := \sup_{w \in Z_k, \|w\| = 1} \|w\|_{K,\tau_i} \qquad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

En particular, para i=1,2

$$\beta_{k,\tau_i} \geq \|w\|_{K,\tau_i} \qquad \text{para todo} \quad w \in Z_k, \quad \|w\| = 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Para cada $0 \neq u \in Z_k$, tomando $w = \frac{u}{\|u\|}$

$$\beta_{k,\tau_i} \geq \left\|\frac{u}{\|u\|}\right\|_{K,\tau_i},$$

es decir,

$$\beta_{k,\tau_i}\|u\| \geq \|u\|_{K,\tau_i}$$

Consecuentemente, para cada i=1, 2 tenemos

$$-\|u\|^{\tau_i}_{K,\tau_i} \geq -\beta^{\tau_i}_{k,\tau_i}\|u\|^{\tau_i} \qquad \text{para todo} \quad u \in Z_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Entonces, por (3.11) y (3.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(u) &\geq \left(\frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0}\right)\|u\|^2 - c\|u\|^{\tau_1}_{K,\tau_1} - c\|u\|^{\tau_2}_{K,\tau_2} \\ &\geq \left(\frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0}\right)\|u\|^2 - c\beta^{\tau_1}_{k,\tau_1}\|u\|^{\tau_1} - c\beta^{\tau_2}_{k,\tau_2}\|u\|^{\tau_2}, \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{J}(u) \geq \|u\|^2\left[\left(\frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0}\right) - c\beta^{\tau_1}_{k,\tau_1}\|u\|^{\tau_1 - 2} - c\beta^{\tau_2}_{k,\tau_2}\|u\|^{\tau_2 - 2}\right]. \tag{3.14}$$

Luego, elegimos la sucesión

$$\|u\| = \rho_k := \left(\frac{\eta_0}{\eta_0 - 1}\right)^{\frac{1}{2-\tau_1}}\left[8c\beta^{\tau_1}_{k,\tau_1} + \left(\frac{\eta_0}{\eta_0 - 1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2} - 1\right)}(8c\beta^{\tau_2}_{k,\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]^{\left(\frac{1}{2-\tau_1}\right)}. \tag{3.15}$$

Ahora elevaremos a la $\tau_1 - 2$ y multiplicamos por $c\beta^{\tau_1}_{k,\tau_1}$ obtenemos,

$$c\beta^{\tau_1}_{k,\tau_1}\rho_k^{\tau_1 - 2} = c\beta^{\tau_1}_{k,\tau_1}\left(\frac{\eta_0}{\eta_0 - 1}\right)^{\frac{\tau_1 - 2}{2-\tau_1}}\left[8c\beta^{\tau_1}_{k,\tau_1} + \left(\frac{\eta_0}{\eta_0 - 1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2} - 1\right)}(8c\beta^{\tau_2}_{k,\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]^{\left(\frac{\tau_1 - 2}{2-\tau_1}\right)}.$$

Consecuentemente,

$$c\beta^{\tau_1}_{k,\tau_1}\rho_k^{\tau_1 - 2} = c\beta^{\tau_1}_{k,\tau_1}\left(\frac{\eta_0}{\eta_0 - 1}\right)^{-1}\left[8c\beta^{\tau_1}_{k,\tau_1} + \left(\frac{\eta_0}{\eta_0 - 1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2} - 1\right)}(8c\beta^{\tau_2}_{k,\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]^{-1}.$$

Entonces

$$c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}\rho_k^{\tau_1-2} = \frac{c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}}{\left(\dfrac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)\left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1} + \left(\dfrac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]}. \tag{3.16}$$

Además,

$$0 \leq \left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}.$$

Seguidamente le sumamos $8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}$ y luego multiplicando por $\eta_0/(\eta_0-1)$ obtenemos

$$\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1} \leq \left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)\left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1} + \left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right].$$

Para después pasar a dividir y obtener

$$\frac{c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}}{\left(\dfrac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)\left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1} + \left(\dfrac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]} \leq \left(\frac{\eta_0-1}{8\eta_0}\right). \tag{3.17}$$

Finalmente, por (3,16) y (3.17) obtenemos

$$c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}\rho_k^{\tau_1-2} = \frac{c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}}{\left(\dfrac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)\left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1} + \left(\dfrac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]} \leq \left(\frac{\eta_0-1}{8\eta_0}\right). \tag{3.18}$$

Análogamente de la igualdad (3.15) elevamos a la τ_2-2 y multiplicamos por $c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}$

$$c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\rho_k^{\tau_2-2} = c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\frac{\tau_2-2}{2-\tau_1}}\left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1} + \left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]^{\left(\frac{\tau_2-2}{2-\tau_1}\right)}.$$

Consecuentemente,

$$c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\rho_k^{\tau_2-2} = c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\left[\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\frac{2-\tau_2}{2-\tau_1}}\left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}+\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]^{\left(\frac{2-\tau_2}{2-\tau_1}\right)}\right]^{-1}.$$

Entonces

$$c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\rho_k^{\tau_2-2} = \frac{c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}}{\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\frac{2-\tau_2}{2-\tau_1}}\left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}+\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]^{\left(\frac{2-\tau_2}{2-\tau_1}\right)}}. \tag{3.19}$$

Además, se cumple

$$0 \leq 8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1},$$

y sumándole

$$\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}.$$

Obtenemos

$$\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}} \leq 8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}+\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}.$$

Luego, elevando a la $\dfrac{2-\tau_2}{2-\tau_1}$ obtenemos

$$\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(1-\frac{2-\tau_2}{2-\tau_1}\right)} 8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2} \leq \left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}+\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]^{\frac{2-\tau_2}{2-\tau_1}},$$

y pasando a dividir se obtiene

$$\frac{c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}}{\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\frac{2-\tau_2}{2-\tau_1}}\left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}+\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]^{\frac{2-\tau_2}{2-\tau_1}}} \leq \left(\frac{\eta_0-1}{8\eta_0}\right). \tag{3.20}$$

Entonces, por (3.19) y (3.20) obtenemos

$$c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\rho_k^{\tau_2-2} = \frac{c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}}{\left(\dfrac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\frac{2-\tau_2}{2-\tau_1}}\left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}+\left(\dfrac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]^{\frac{2-\tau_2}{2-\tau_1}}} \leq \left(\frac{\eta_0-1}{8\eta_0}\right). \tag{3.21}$$

Ahora, sustituiremos (3.15) en (3.14) obteniendo

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(u) &\geq \|u\|^2\left[\left(\frac{\eta_0-1}{2\eta_0}\right) - c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}\|u\|^{\tau_1-2} - c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\|u\|^{\tau_2-2}\right] \\ &= \rho_k^2\left[\left(\frac{\eta_0-1}{2\eta_0}\right) - c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}\rho_k^{\tau_1-2} - c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\rho_k^{\tau_2-2}\right].\end{aligned} \tag{3.22}$$

Entonces, por (3.18) y (3.21)

$$\mathcal{J}(u) \geq \rho_k^2\left(\frac{\eta_0-1}{2\eta_0}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right),$$

es decir,

$$\mathcal{J}(u) \geq \frac{\eta_0-1}{4\eta_0}\rho_k^2 > 0$$

Asi, para todo k, $u \in Z_k$ y $\|u\| = \rho_k$ se obtiene

$$a_k = \inf_{u\in Z_k, \|u\|=\rho_k} \mathcal{J}(u) \geq 0.$$

Además,

$$\rho_k = \left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\frac{1}{2-\tau_1}}\left[8c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}+\left(\frac{\eta_0}{\eta_0-1}\right)^{\left(\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}-1\right)}(8c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2})^{\frac{2-\tau_1}{2-\tau_2}}\right]^{\left(\frac{1}{2-\tau_1}\right)}.$$

Ahora, usando el Lema 3.6 tenemos

$$\beta_{k,\tau_i} \to 0, \;\; para \;\; i=1,2, \quad \text{cuando } \; k \to \infty.$$

Finalmente, se cumple que

$$\rho_k \to 0, \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

$\square$

Lema 3.8. *Si se cumplen las condiciones (K_1), (V_1), (V_2), (KV), (f_1) y (f_2). Además $f(u) = -f(-u)$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Entonces existe un sucesión (r_k), $0 < r_k < \rho_k$, $r_k \to 0$ cuando $k \to \infty$ tal que*

$$b_k := \max_{u \in Y_k, \|u\| = r_k} \mathcal{J}(u) < 0.$$

Demostración. El espacio Y_k es de dimensión finita para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, de manera similar al Teorema 3.3 dado un $u \in E$ por (2.30) se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\Lambda} K(x)F(u)\,dx.
\end{aligned}$$

Luego, por la condición (f_2) y la definición (3.9) obtenemos

$$\mathcal{J}(u) \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\Lambda} k\|u\|^{\tau_1} dx \ \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - k\|u\|^{\tau_1}|\Lambda| \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - k\|u\|^{\tau_1} k,$$

es decir,

$$\mathcal{J}(u) \leq \|u\|^{\tau_1}\left(\frac{1}{2}\|u\|^{2-\tau_1} - k^2\right). \tag{3.23}$$

Ahora, definimos la sucesión

$$r_k := \min\{(k^2)^{\frac{1}{2-\tau_1}}, \frac{1}{2}\rho_k\}.$$

Por la definición anterior se obtiene

$$0 < r_k < \rho_k.$$

Además, considerando $\|u\| = r_k$, entonces

$$\|u\| \leq (k^2)^{\frac{1}{2-\tau_1}}.$$

Consecuentemente

$$\frac{1}{2}\|u\|^{2-\tau_1} \leq \frac{1}{2}k^2,$$

es decir,

$$\frac{1}{2}\|u\|^{2-\tau_1} - k^2 \leq -\frac{1}{2}k^2 < 0.$$

Por lo tanto, de la desigualdad (3.23) se obtiene

$$\mathcal{J}(u) \leq \|u\|^{\tau_1}\left(\frac{1}{2}\|u\|^{2-\tau_1} - k^2\right) < 0.$$

Luego, para cada $u \in Y_k$ con norma $\|u\| = r_k$ se cumple

$$\mathcal{J}(u) \leq r_k^{\tau_1}\left(\frac{-k^2}{2}\right) < 0.$$

Entonces

$$\sup_{u \in Y_k, \|u\| = r_k} \mathcal{J}(u) < 0.$$

Como Y_k es un conjunto cerrado, entonces

$$\max_{u \in Y_k, \|u\| = r_k} \mathcal{J}(u) = \sup_{u \in Y_k, \|u\| = r_k} \mathcal{J}(u).$$

Finalmente,

$$b_k := \max_{u \in Y_k, \|u\| = r_k} \mathcal{J}(u) < 0.$$

□

Lema 3.9. *Si se cumplen las condiciones* (K_1), (V_1), (V_2), (KV), (f_1) *y* (f_2). *Además,* $f(u) = -f(-u)$, *para todo* $u \in \mathbb{R}$. *Entonces se obtiene*

$$d_k := \inf_{u \in Z_k, \|u\| \leq \rho_k} \mathcal{J}(u) \to 0. \quad \textit{cuando} \quad k \to \infty.$$

Demostración. Sea $u \in Z_k$ y

$$\|u\| \leq \rho_k \tag{3.24}$$

obtenemos

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 \leq \frac{1}{2}\rho_k^2,$$

es decir,

$$\mathcal{J}(u) \leq \frac{1}{2}\rho_k^2.$$

En particular

$$\inf_{u \in Z_k, \|u\| \leq \rho_k} \mathcal{J}(u) \leq \frac{1}{2}\rho_k^2. \tag{3.25}$$

Por otro lado de (2.30) se tiene

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,dx.$$

Luego, por (3.11), (3.14) y (3.22)

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u) &\geq \left(\frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0}\right)\|u\|^2 - c\|u\|_{K,\tau_1}^{\tau_1} - c\|u\|_{K,\tau_2}^{\tau_2} \\
&\geq \left(\frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0}\right)\|u\|^2 - c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}\|u\|^{\tau_1} - c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\|u\|^{\tau_2} \\
&\geq -c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}\rho_k^{\tau_1} - c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\rho_k^{\tau_2},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{J}(u) \geq -c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}\rho_k^{\tau_1} - c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\rho_k^{\tau_2}.$$

Luego, por definición de ínfimo

$$\inf_{u\in Z_k,|u\|\leq\rho_k}\mathcal{J}(u)\geq -c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}\rho_k^{\tau_1}-c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\rho_k^{\tau_2}. \tag{3.26}$$

Entonces de las desigualdades (3.25) y (3.26) se obtiene

$$-c\beta_{k,\tau_1}^{\tau_1}\rho_k^{\tau_1}-c\beta_{k,\tau_2}^{\tau_2}\rho_k^{\tau_2}\leq\inf_{u\in Z_k,|u\|\leq\rho_k}\mathcal{J}(u)\leq\frac{1}{2}\rho_k^2.$$

Finalmente

$$\beta_{k,\tau_i}\to 0,\ \ para\ \ i=1,2,\quad cuando\ \ k\to\infty.$$

Entonces

$$\rho_k\to 0,\quad cuando\, k\to\infty.$$

Por lo tanto,

$$d_k:=\inf_{u\in Z_k,|u\|\leq\rho_k}\mathcal{J}(u)\to 0.\quad\text{cuando}\quad k\to\infty.$$

□

3.3. Existencia de infinitas soluciones para el problema $(\mathcal{P})$

En esta sección estudiaremos la existencia de infinitas soluciones de pequeña energía de la ecuación $(\mathcal{P})$ a partir de ciertas condiciones.

Teorema 3.10. *Si se cumplen las condiciones (K_1), (V_1),(V_2),(KV), (f_1) y (f_2). Además $f(u)=-f(-u)$, para todo $u\in\mathbb{R}$. Entonces la ecuación $(\mathcal{P})$ posee infinitas soluciones de pequeña energía.*

Demostración. Por los Lemas 3.7, 3.8 y 3.9 se ha demostrado que se cumplen las tres primeras condiciones de la Proposición 3.5, entonces bastaría demostrar la condición (P.S).
Consideremos una sucesión (u_{n_j}) tal que

$$u_{n_j}\in Y_j,\ \ \mathcal{J}(u_{n_j})\to c,\ \ \mathcal{J}|_{Y_j}'(u_{n_j})\to 0,\quad\text{cuando}\ \ n_j\to\infty. \tag{3.27}$$

Suponer que

$$\|u_{n_j}\| \to +\infty \quad \text{cuando } \; n_j \to +\infty. \tag{3.28}$$

Por el Lema 2.6 para todo $u_{n_j} \in Y_j$ se obtiene

$$\left\langle \mathcal{J}'(u_{n_j}), u_{n_j} \right\rangle = o_{n_j}(1). \tag{3.29}$$

De (2.31) tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{J}'(u_{n_j}), u_{n_j} \right\rangle &= \left\langle u_{n_j}, u_{n_j} \right\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)(u_{n_j})(u_{n_j})\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u_{n_j}) u_{n_j}\, dx. \\
&= \|u_{n_j}\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u_{n_j}|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u_{n_j}) u_{n_j}\, dx. \\
&= \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \nabla u_{n_j}^2 + V^+(x)|u_{n_j}|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} V^-(x)|u_{n_j}|^2\, dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u_{n_j}) u_{n_j}\, dx. \\
&= \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \nabla u_{n_j}^2 + V(x)|u_{n_j}|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u_{n_j}) u_{n_j}\, dx,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\left\langle \mathcal{J}'(u_{n_j}), u_{n_j} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \nabla u_{n_j}^2 + V(x)|u_{n_j}|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u_{n_j}) u_{n_j}\, dx.$$

Luego, aplicando límite cuando $n_j \to +\infty$ se tiene

$$\left\langle \mathcal{J}'(u_{n_j}), u_{n_j} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \nabla u_{n_j}^2 + V(x)|u_{n_j}|^2\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u_{n_j}) u_{n_j}\, dx \to 0.$$

Entonces, por (2.36) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \nabla u_{n_j}^2 + V(x)|u_{n_j}|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u_{n_j}) u_{n_j}\, dx + o_{n_j}(1) \tag{3.30}$$

Además, por (2.7) se deduce

$$\left(\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0}\right) \|u_{n_j}\|^2 \leq \left(\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{n_j}|^2 + V^+ |u_{n_j}|^2\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{n_j}|^2 + V|u_{n_j}|^2\, dx,$$

es decir,

$$\left(\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0}\right) \|u_{n_j}\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{n_j}|^2 + V|u_{n_j}|^2 \, dx, \tag{3.31}$$

Luego, de (3.30) y (3.31)

$$\left(\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0}\right) \|u_{n_j}\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{n_j}|^2 + V|u_{n_j}|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u_{n_j}) u_{n_j} \, dx + o_{n_j}(1). \tag{3.32}$$

Además, para $1 < \tau_1 < \tau_2 < 2$ y por el Lema 2.3 se deduce

$$Y_j \subseteq E \hookrightarrow L_K^{\tau_i}(\mathbb{R}^N) \quad \text{para } i = 1, 2.$$

es decir, dado un $C > 0$ se cumple

$$\|u_{n_j}\|_{K,\tau_i} \leq C\|u_{n_j}\|.$$

Por lo tanto,

$$\|u_{n_j}\|_{K,\tau_i}^{\tau_i} \leq C\|u_{n_j}\|^{\tau_i}. \tag{3.33}$$

Luego, por (2.35), (3.32) y (3.33) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0} &\leq \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} K(x) f(u_{n_j}) u_{n_j} \, dx}{\|u_{n_j}\|^2} \\
&\leq \frac{\|u_{n_j}\|_{K,\tau_1}^{\tau_1} + \|u_{n_j}\|_{K,\tau_2}^{\tau_2}}{\|u_{n_j}\|^2} \\
&\leq \frac{C\|u_{n_j}\|^{\tau_1} + C\|u_{n_j}\|^{\tau_2}}{\|u_{n_j}\|^2} \\
&\leq \frac{C}{\|u_{n_j}\|^{2-\tau_1}} + \frac{C}{\|u_{n_j}\|^{2-\tau_2}},
\end{aligned} \tag{3.34}$$

es decir,

$$\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0} \leq \frac{C}{\|u_{n_j}\|^{2-\tau_1}} + \frac{C}{\|u_{n_j}\|^{2-\tau_2}}.$$

Entonces, por (3.28) para $1 < \tau_1 < \tau_2 < 2$ obtenemos

$$\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0} \leq \frac{C}{\|u_{n_j}\|^{2-\tau_1}} + \frac{C}{\|u_{n_j}\|^{2-\tau_2}} = 0 \quad \textit{cuando} \quad n_j \to \infty$$

Finalmente

$$\frac{\eta_0 - 1}{\eta_0} \leq 0,$$

es decir, $\eta_0 \leq 1$ lo que resulta una contradicción. Por lo tanto deducimos que (u_{n_j}) está acotado en E. Siendo E un espacio reflexivo y (u_{n_j}) un sucesión acotada, existe una subsucesión el cual lo seguiremos denotando como (u_{n_j}), tal que

$$u_{n_j} \rightharpoonup u_j, \text{en } E$$

Luego, procediendo como en el Lema 3.2 se tiene $u_{n_j} \to u_k$ en E. Por lo tanto se cumple la última condición de la Proposición 3.5, entonces existe la sucesión de valores críticos negativos que convergen a 0. Además por la parte (D_3) de la Proposición 3.5 se infiere que el problema $(\mathcal{P})$ tiene infinitas soluciones de energía pequeña. $\square$

Conclusiones

En el presente trabajo se analizaron ecuaciones de Schrödinger de la forma

$$-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u), \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{$\mathcal{P}$}$$

para $N \geq 3$, a partir de ciertas condiciones impuestas en V, K y f, mencionadas en la introducción y usando el teorema de fuente dual. A continuación mencionaremos los resultados más importantes obtenidos en este trabajo, así como también los proyectos a futuro:

i) Bajo ciertas condiciones impuestas en V, K y f, se obtuvo un resultado importante de compacidad en las inmersiones de Sobolev, además de conseguio asociar un funcional de Euler-Lagrange adecuado $\mathcal{J} \in \mathcal{C}^1(E; \mathbb{R})$.

ii) Usando las condiciones impuestas en V, K y f se garantizo la existencia de una solución no trivial para el problema $(\mathcal{P})$.

iii) Adicionando, la condición de que la función f sea impar y usando el teorema de fuente dual, se probó la existencia infinitas soluciones de pequeña energía para el problema $(\mathcal{P})$.

iv) Un proyecto a futuro, podría basarse en el estudio de la existencia de soluciones no triviales para la siguiente clase de sistemas hamiltonianos

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = K(x)g(v), & x \in \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + V(x)v = K(x)f(u), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

donde f y g poseen crecimiento sublineal, V y K poseen condiciones similares a las impuestas en el problema $(\mathcal{P})$. Para la existencia se soluciones se utilizaría el teorema el teorema de enlace junto con una aproximación finita dimensional, argumentando de manera similar a los trabajos [9, 10, 12, 13] .

Bibliografía

[1] Adams, R.A, Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev spaces. Second edition*. Pure and applied mathematics. Elsevier.

[2] Alves, C.O, Souto, M. (2013). *Existence of solutions for a class of nonlinear Schrodinger equations with potential vanishing at infinity*, J. Differ. Equations, 245, 1977–1991.

[3] Brezis, H. (2010). *Functional analysis*, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext, Springer.

[4] Chen, J. y Tang X. H. (2015). *Infinitely many solutions for a class of sublinear Schrodinger equations*, ¨ Taiwan. J. Math., 19, 381–396.

[5] Cheng, R. y Wu, Y. (2020). *Remarks on infinitely many solutions for a class of Schrodinger equations with ¨ sublinear nonlinearity*, Math. Method. Appl. Sci., 43, 8527–8537.

[6] Ding, Y, Wei, J. (2017). *Multiplicity of semiclassical solutions to nonlinear Schrodinger equations*, J. Fixed Point Theory Appl., 19, 987–1010.

[7] Giovanni, M. (2020). *A group-theoretical approach for nonlinear Schrodinger equations*, Adv. Calc. Var., 13, 403–423.

[8] Hale, J. (1980). *Ordinary Differential Equations*. 2nd Ed., Krieger.

[9] Leuyacc, Y. R. S., & Soares, S. H. M. (2019). *On a Hamiltonian system with critical exponential growth*. Milan Journal of Mathematics, 87(1), 105-140.

[10] Leuyacc, Y. R. S. (2017). *On Hamiltonian elliptic systems with exponential growth in dimension two* (Doctoral dissertation, Universidade de São Paulo).

[11] Lima, E. L. (2005). *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA.

[12] Soares, S. H. M., & Leuyacc, Y. R. S. (2019). *Singular Hamiltonian elliptic systems with critical exponential growth in dimension two*. Mathematische Nachrichten, 292(1), 137-158.

[13] Soares, S. H. M., & Leuyacc, Y. R. S. (2018). *Hamiltonian elliptic systems in dimension two with potentials which can vanish at infinity*. Communications in Contemporary Mathematics, 20(08), 1750053.

[14] Sterling K. B. (1961). Introducción to Hilbert Space, New York Oxford University Press.

[15] Teng, K.M. (2015). *Multiple solutions for a class of fractional Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. Real, 21, 76–86.

[16] Teresa, I. (2018). *Positive solution for nonhomogeneous sublinear fractional equations in* $\mathbb{R}^N$, Complex Var. Elliptic Equ., 63, 689–714.

[17] Willem, M. (1996). *Minimax theorems*, Boston: Birkhauser.

[18] Ye Xue y Zhiqing Han (2021). *Existence and multiplicity of solutions for Schrödinger equations with sublinear nonlinearities*, AIMS Mathematics.

[19] Zhang, Q, Wang, Q. (2012), *Multiple solutions for a class of sublinear Schrödinger equations*, ¨ J. Math. Anal. Appl., 389, 511–518.

[20] Alves, C.O, Souto, M. (2013). *Existence of solutions for a class of nonlinear Schrodinger equations with ¨ potential vanishing at infinity*, J. Differ. Equations, 245, 1977–1991.