Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

El enfoque de Grothendieck al teorema de Dvoretzky-Rogers

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Maiker Wilmer CHUQUILLANQUI PASTOR

ASESOR

Dr. Leonardo Henry ALEJANDRO AGUILAR

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Chuquillanqui, M. (2022). *El enfoque de Grothendieck al teorema de Dvoretzky-Rogers*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Maiker Wilmer Chuquillanqui Pastor
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42458943
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43069051
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-5354-4325
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martinez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10078450
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08249640
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis Funcional
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Lima - Perú
Año o rango de años en que se realizó la investigación	abril 2022 - julio 2022
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 18:00 horas del sábado 23 de julio del 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I): Mg. Willy David Barahona Martínez (PRESIDENTE), Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo (MIEMBRO) y el Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**EL ENFOQUE DE GROTHENDIECK AL TEOREMA DE DVORETZKY-ROGERS**", presentado por el señor **Bachiller Maiker Wilmer Chuquillanqui Pastor**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de **diecisiete (17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Maiker Wilmer Chuquillanqui Pastor** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 18:30 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Willy David Barahona Martínez
PRESIDENTE

Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo
MIEMBRO

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO ASESOR

UNMSM
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América.

INFORME DE EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

1. FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
2. ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
3. AUTORIDAD ACADÉMICA QUE EMITE EL INFORME DE ORIGINALIDAD
   Director de La Escuela Profesional de Matemática
4. APELLIDOS Y NOMBRE DE LA AUTORIDAD ACADÉMICA
   Víctor Hilario Tarazona Miranda
5. OPERADOR DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUD
   Alex Armando Cruz Huallpara
6. DOCUMENTO DE EVALUACIÓN

   Título de pre grado: EL ENFOQUE DE GROTHENDIECK AL TEOREMA DE DVORETZKY-ROGERS
7. AUTOR DEL DOCUMENTO

   Nombre y Apellido: MAIKER WILMER CHUQUILLANQUI PASTOR

8. **FECHA DE RECEPCIÓN DE DOCUMENTO**

   ....
   ....

9. FECHA DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUDES

   Procesado el: 28-jun.-2022 17:16 -05
   Identificador: 1864321556
   Número de palabras: 18481
   Entregado: 1

10. SOFTWARE UTILIZADO

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
TURNITIN	x	
ITHENTICATE		x
OTROS(ESPECIFICAR)		x

11. CONFIGURACION DEL PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
EXCLUYE TEXTOS ENTRECOMILLADOS	x	
EXCLUYE BIBLIOGRAFÍA	x	
EXCLUYE CADENAS MENOS A 40 PALABRAS	x	
OTRO CRITERIO (ESPECIFICAR)		x

12. PORCENTAJE DE SIMILITUDES SEGÚN PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

EN LETRA	NÚMEROS
Ocho Porciento	8%

13. FUENTES ORIGINALES DE LAS SIMILITUDES ENCONTRADAS

2% match (Internet desde 16-abr.-2020)
http://docplayer.com.br
1% match (Internet desde 09-feb.-2020)
http://docplayer.com.br
1% match (Internet desde 30-nov.-2020)
https://www.ugr.es/~fjperez/textos/Analisis_Funcional_en_Espacios_de_Banach.pdf
1% match (Internet desde 08-oct.-2010)
http://www.unizar.es
1% match (Internet desde 01-jun.-2021)
https://dokumen.pub/el-teorema-de-categoria-de-baire-3846575909-9783846575901.html
<1% match (Internet desde 27-may.-2015)
http://archive.org
<1% match (Internet desde 25-nov.-2020)
https://archive.org/stream/Analisis_201504/Analisis_djvu.txt
<1% match (Internet desde 20-may.-2020)
https://pt.scribd.com/doc/246989565/Analisis-funcional-y-variable-compleja-Villanueva-pdf
<1% match (Internet desde 29-may.-2020)
https://pt.scribd.com/document/372459922/Analisis-funcional-I-pdf
<1% match (publicaciones)
Idan Eisner. "Exotic cluster structures on SL n with Belavin–Drinfeld data of minimal size, II. Correspondence between cluster structures and Belavin–Drinfeld triples", Israel Journal of Mathematics, 2017
<1% match (Internet desde 10-sept.-2021)
https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/57262/67873.pdf
<1% match (Internet desde 19-mar.-2020)
http://fs.unm.edu
<1% match (Internet desde 28-ene.-2022)
https://qdoc.tips/integrar-espacios-banach-pdf-free.html
<1% match (Internet desde 29-may.-2020)
https://studylib.net/doc/10668156/icm-i-c-m
<1% match (Internet desde 09-dic.-2019)
https://studylib.es/doc/4577347/notas-de-an%C3%A1lisis-funcional---universidad-central-de-vene...
<1% match ()
Mosquera Meza, Suzanne Mauricy. "Fundamentos de topología algebraica: el teorema de Seifert Van Kampen", 'Baishideng Publishing Group Inc.', 2021

14. OBSERVACIONES

....

15. CALIFICACIONES DE ORIGINALIDAD

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, SIN OBSERVACIONES.	X	

DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, CON OBSERVACIONES.		X
DOCUMENTO NO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD		X

16. FECHA DE INFORME

....

UNMSM

Firmado digitalmente por TARAZONA MIRANDA Victor Hilario FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 20.07.2022 09:20:18 -05:00

Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda

Director (e) de la EP de Matemática

RESUMEN.

El objetivo fundamental de este informe de tesis es introducir lo que Diestel denomina el Enfoque de Grothendieck al Teorema de Dvroetzky – Rogers, es decir, definiremos los operadores p-sumantes y demostraremos que una sucesión débilmente p-sumable en un espacio de Banach X es p-sumable si y solo si X tiene dimensión finita. Además, demostraremos demostraremos los teoremas de factorización y dominación de Pietsch y el teorema de Bessaga-Pelczynski que afirma que una sucesión débilmente 1-sumable en un espacio de Banach X es incondicionalmente si y solo si X no posee una copia de c_0. Finalmente, usando los resultados anteriores, demostramos el teorema de Dvroetzky -Rogers que afirma que toda serie incondicionalmente convergente en un espacio de Banach X es absolutamente convergente si y solo si X tiene dimensión finita.

Palabras clave: Espacio de Banach, serie incondicionalmente convergente, serie absolutamente convergente, operadores p-sumables y factorización de Pietsch.

ABSTRACT

The fundamental objective of this thesis report is to introduce what Diestel calls the Grothendieck . Approach to the Dvroetzky-Rogers Theorem, that is, we will define p-summation operators and show that a weakly p-summable sequence in a Banach space X is p-summable if and only if X is finite dimensional. Inaddition, we will prove Pietsch factorization and dominance theorems and the Bessaga –Pelczynski theorem which states that a weakly 1-summable sequence on a Banach space X is unconditionally if and only if X does not possess, a copy of c_0 . Finally, using the previous results, we prove the Dvroetzky-Rogers theorem which states that every unconditionally convergent series on a Banach space X is absolutely convergent if and only if X has finite dimension.

KEYWORDS: Banach space, unconditionally convergent series, absolutely convergent series, p-sumable operators and Pietsch factorization.

Indice

Introducción

El principal objetivo de este informe de tesis es estudiar la convergencia de series definido en espacios normados.Conocemos el caso de espacios de dimensión finita, la convergencia absoluta implica la convergencia simple mientras que los conceptos de convergencia absoluta y convergencia incondicional son equivalentes. Mientras tanto, un ejemplo en $P([0,1])$ nos muestra que en los espacios normados de dimensión infinita la convergencia absoluta no siempre implica la convergencia simple .En la verdad, es una caracterización de los espacios normados completos el hecho de que toda serie que converge absolutamente es convergente. Como consecuencia inmediata de esto y de la equivalencia entre los conceptos de convergencia absoluta y convergencia incondicional en el caso escalar, tenemos que un espacio normado es completo si, solo si, toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente. Por otro lado, observando ejemplos en c_0 y ℓ_2, el hecho de un espacio normado ser completo no es suficiente para garantizar la convergencia absoluta de series incondicionalmente convergentes. Pero precisamente, en un espacio normado de dimensión infinita siempre existe una serie convergente incondicionalmente que no es absolutamente convergente. Este hecho fue demostrado en 1950 por A. Dvoretzky y C.A. Rogers en [5] (ver también [1] y[9]).En 1956, A. Grothendieck introdujo y estudio los operadores p-sumables en el caso p=1 o p=2 . La extensión al caso en que p es número real positivo cualesquiera se debe a A. Pietsch (1967). En este trabajo presentamos lo que Diestel llama el enfoque de Grothendieck al teorema de Dvoretzky-Rogers, es decir, demostraremos a través de los operadores p-sumables que una sucesión débilmente p –sumable en un espacio de Banach X es p-sumable si, y solo si, X tiene dimensión finita. Además demostraremos el teorema de Bessaga-Pelczncki, que nos garantiza que una sucesión débilmente 1-sumable en un espacio de Banach X es incondicionalmente sumable si, y solo si, X no posee una copia de c_0 .Usando estos dos resultados demostraremos que toda serie incondicionalmente convergente en un espacio de

Banach X es absolutamente convergente si, y solo si, X tiene dimensión finita, que es el teorema de Dvoretzky-Rogers.

Esta tesis está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 1 enunciaremos sin demostración algunos teoremas del Análisis Funcional y de la teoría de integración que serán usados en otros capítulos. En el capítulo 2 estudiaremos las convergencias absoluta e incondicional en espacios normados. Demostraremos que un espacio normado es completo si, y solo si, toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente. Presentaremos dos ejemplos de series en espacio de Banach que convergen incondicionalmente pero no convergen absolutamente. Después haremos un estudio de las sucesiones p-sumables y débilmente p-sumables y demostraremos el teorema de Bessaga-Pelczynski. Finalizaremos este capítulo presentando un ejemplo de una sucesión en c_o que es débilmente p-sumable pero no es p-sumable. En el capítulo 3 definiremos los operadores p-sumables entre espacios de Banach y probaremos algunas de sus caracterizaciones. Demostraremos también los teoremas de factorización y dominación de Pietsch. Estudiaremos los operadores compactos y débilmente compactos. Demostraremos que todo operador p-sumables es débilmente compacto y que la composición de dos operadores p-sumables es compacto. Con eso, mostraremos con lo que Diestel llama el enfoque al Teorema de Dvoretzky-Rogers que nos dice , si X es un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$, entonces toda sucesión débilmente p-sumable es p-sumable si ,y solo si ,X tiene dimensión finita. Como corolario de esto, se sigue que el operador identidad es p- sumable si, y solo si, X tiene dimensión finita. Concluiremos este capítulo con la demostración del Teorema de Dvoretzky- Rogers.

Capítulo 1

Aspecto teóricos de Análisis Funcional

En este capítulo se presentará algunos conceptos y principales teoremas de las teorías de análisis funcional e integración que serán usando en este trabajo.

1.1 Análisis Funcional

Estaremos interesados en espacios vectoriales reales y complejos. por lo tanto, representaremos por K el cuerpo de reales y de complejos. Consideremos siempre X e Y espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Iniciaremos enunciando dos desigualdades.

Proposición 1.1 (DESIGUALDAD DE HOLDER)

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Donde p, q> 1 son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demostración.

Ver [6], Teorema 1.5, p.1.

Proposición 1.2. (Desigualdad de Minkowski)

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$ entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Donde p$\geq$ 1.

Demostración .ver[6]. Teorema 1.7, p.2.

Ahora iremos definir algunos espacios de sucesiones que son ejemplos clásicos de espacios normados y que aparecen muchas veces en este trabajo. Todos estos espacios son completos, esto son espacios de Banach.

Dado $1 \leq p < \infty$ un número real fijo, definimos $\ell_p = \ell_p(\mathbb{K})$ como siendo el conjunto de todas las sucesiones $(x_n)_n$ tal que $x_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ .Si $x = (x_n)_n$ $e\ y = (y_n)_n$ entonces en ℓ_p $e\ \lambda \in \mathbb{K}$, tomamos ℓ_p un espacio vectorial con las siguientes operaciones $x + y = (x_n + y_n)_n$ e $\lambda x = (\lambda x_n)_n$. Haciendo $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$, usando la desigualdad de Minkowski muestre que $\ell_p = (\ell_p, \ \|.\|_p)$*es un espacio de Banach.*

Definimos $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{K})$ es el conjunto de todas las sucesiones $(x_n)_n$ tal que $x_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\sup_n |x_n| < \infty$. Tomamos ℓ_∞un espacio vectorial con las mismas operaciones de ℓ_p. Si $x = (x_n)_n \in \ell_\infty$,haciendo $\|x\|_\infty \sup_n |x_n|$ obteniéndose una norma en ℓ_∞. Es trivial ver que $\ell_\infty = (\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Definimos c_0 como el conjunto de todas las sucesiones $(x_n)_n$ tal que $x_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ .Observe que $c_0 \subsetneq \ell_\infty$ es claro que c_0 es un subespacio vectorial cerrado de ℓ_∞ .Considerando en c_0 y la norma inducida por la norma ℓ_∞ , se sigue que $c_0 = (c_0, \|.\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Definición 1.1. Una sucesión de elementos $(x_n)_n$ de un espacio de Banach X se dice que es una base para X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(x_n)_n$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$.

Definición 1.2. Una sucesión de elementos $(x_n)_n$ de un espacio de Banach X se dice que es una sucesión básica si $(x_n)_n$ es una base para $\overline{L\imath n}[x_n]$, donde el $\overline{L\imath n}[x_n]$ denota el conjunto de todas las combinaciones lineales de $(x_n)_n$.

Es claro que toda subsucesión de una sucesión básica es una sucesión básica. Sea una sucesión $(x_n)_n$ tal que $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es posible mostrar que una condición necesaria y suficiente para que $(x_n)_n$ sea una sucesión básica es que exista un número real k>0 tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{m+n} a_i x_i \right\| \geq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \qquad (*)$$

Para todo $m, n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in K$ (ver A [10]). Llamamos al supremo de todos los K tal que la desigualdad (*) satisface la constante básica. Es trivial ver que si Kes una constante básica de una sucesión básica $(x_n)_n$ entonces para $a_1, \dots\dots, a_n$ arbitrarios tenemos

.

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \geq \frac{K}{2} \max_{0\leq i\leq n} \{|a_i| \|x_i\|\}$$

Denotaremos por $(e_n)_n$ la sucesión canónica tal que e_n=$(\delta_{nm})_m$ donde $\delta_{nm} = 1\ si\ n = m$ y $\delta_{nm} = 0\ si\ n \neq m$ para m,$n \in \mathbb{N}$. Observe que esta sucesión $(e_n)_n$ pertenece a los espacios c_0 y ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, Es fácil ver que para todo elemento x de c_0 o ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_n$ en K tal que $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \alpha_n e_n$, lo que hace esto un espacio separable. Decimos entonces que una sucesión (e_n) es una sucesión básica canónica de c_0 o de ℓ_p ($1 \leq p < \infty$). Observe que $c_0 = \overline{L\imath n}[e_n] \subsetneq l_\infty$ y $\ell_p = \overline{L\imath n}[e_n]$ (cerrados con respectivas normas)

Otro ejemplo clásico de espacio normado completo que aparecerá en este informe de tesis es el siguiente: Sea K un subconjunto compacto de un espacio topológico X. Definimos C(K) como el conjunto de todas las funciones continuas f: K $\longrightarrow$ $\mathbb{K}$. Si f , g $\in C(K)\ y\ \lambda \in \mathbb{K}$

Tomamos C(K) un espacio vectorial con las operaciones usuales de funciones. Haciendo $\|f\|_K = \sup_{x\in K}|f(x)|$, muestre que C(K)=(C(K), $\|.\|_K$) es un espacio de Banach.

Definición 1.3. Sean X e Y espacios normados. Una aplicación T:X $\longrightarrow$ Y es un operador lineal cuando para todo u, v $\in$ X e Y $\in$ $\mathbb{K}$, T$(u+\lambda v)$=Tu+λTv.

Definición 1.4. Sean X e Y espacios normados. Una aplicación T:X $\longrightarrow$ Y es limitado si existe c$>$ 0 tal que $\|Tu\| \leq c\|u\|$ para todo u $\in$ X

A rigor deberíamos de escribir $\|.\|_X\ e\ \|.\|_Y$ para indicarnos normas en X e Y , respectivamente . Para no sobrecargar la notación, iremos usar la misma notación $\|.\|$ para indicar las normas en X e Y.

Teorema1.1. Sean X e Y espacios normados y sea T:X $\longrightarrow$ Y es un operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) T es limitado.

b) T es continua en algún $u_0 \in X$.

c) T es continua.

Demostración. Ver [6], proposición 1.17, recordando que, como T es lineal, es claro que vale (b) si, y solamente si T es continua en el origen.

Definición 1.5. Sean X e Y espacios normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ el conjunto de todos los operadores lineales T:X $\longrightarrow$ Y que son limitados.

Observación 1.1 Definiendo $\|T\| = inf\{c > 0; \|Tu\| \leq c\|u\|$ para todo u ∈ X} para todo $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tenemos:

1) $\|T\| = \sup_{u\neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| = \sup_{\|u\|\leq 1} \|Tu\|.$
2) T es continuo si, y solamente si $\|T\| < \infty$.
3) $\|.\|$ define una norma en $\mathcal{L}(X,Y)$

Proposición 1.3. Si X e Y son espacios normados, entonces $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio normado con las operaciones usuales de funciones y con la norma anterior.

Demostración. Trivial

A partir de adelante $\mathcal{L}(X,Y)$ denotara el espacio normado.

Definición 1.6. Sean X e Y espacios normados. Diremos que X e Y son isomorfos si existe un operador lineal biyectivo continuo T: X→ Y. Si además T es una isometría (esto es $\|Tu\| = \|u\|\ para\ todo\ u \in X$) entonces diremos que X e Y son isométricamente isomorfos.

Recordemos que una función continua con inversa también es continua se dice que es un homeomorfismo. Cuando un espacio normado tiene dimensión finita tenemos lo siguiente:

Proposición 1.4. Supongamos que el espacio normado X tiene dimensión finita y sea n la dimensión de X. entonces X y $\mathbb{K}^n$ son isomorfos. Además, X y $\mathbb{K}^n$ son homeomorfismo y X es un espacio de Banach.

Demostración. Ver [4], teorema 1, p.1.

Definición 1.7. Sea X un espacio normado. El dual topológico de X, denotado por X^*, es el conjunto de funciones lineales continuas de X en $\mathbb{K}$ $, esto\ es\ ,\ X^* = \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$.

Teorema1.2. Sea X un espacio normado e Y un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{L}(X,Y)$ es un espacio de Banach. En particular, X^* es un espacio de Banach.

Demostración. Ver [6], proposición 1.19. p5.

Ejemplo 1.1. Dado $\xi = (\xi_n)_n \in l_1$, sea $T_\xi: c_0 \to \mathbb{K}$ definido por $T_\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ para todo $x = (x_n)_n \in c_0$. La aplicación T:$l_1 \longrightarrow (c_0)^*$ definida por $T(\xi) = T_\xi$ establece un isomorfismo isométrico entre $(c_0)^*$ y l_1 , esto es , $(c_0)^* = l_1$ a menos de un isometría.

Ejemplo 1.2. Sea $1 \leq p \leq \infty$ y tomamos p^* tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ si $p > 0$ (con $p^* = \infty$ si $p = 1$.

Dado $\xi = (\xi_n)_n \in l_{p^*}$, sea $T_\xi: l_p \to \mathbb{K}$ definido por $T_\xi(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \lambda_n$ para todo $\lambda = (\lambda_n)_n \in l_{p^*}$. La aplicación $T: l_{p^*} \to \left(l_p\right)^*$ definida por $T(\xi) = T_\xi$ establece un isomorfismo isométrico entre $\left(l_p\right)^*$ y l_{p^*} , esto es , $\left(l_p\right)^* = l_{p^*}$ al menos de una isometría.

Ejemplo 1.3. Sea $l_p^m = \{(\lambda_n)_n \in l_p: \lambda_n = 0, n > m\}$, para $1 \leq p \leq \infty$. Es claro que $l_{p^*}^m \subset l_{p^*}$ es la aplicación T del ejemplo 1.2 restricta a $l_{p^*}^m$ establece un isomorfismo isométrico entre $\left(l_p^m\right)^*$ y $l_{p^*}^m$.

Proposición 1.5.(extensión de operadores lineales limitados) Sea X un espacio normado, G un subespacio de X e Y es un espacio de Banach, Si $T: G \to Y$ es un operador lineal limitado , entonces existe una extensión $\tilde{T}: \bar{G} \longrightarrow Y$ lineal y limitada tal que $\tilde{T}x = Tx$ para todo $x \in G$ y $\|\tilde{T}\| = \|T\|$,

Teorema1.3.(Teorema de Hahn-Banach).

Sean X un espacio normado y $G \subsetneq X$ un subespacio. Si $f: G \longrightarrow \mathbb{K}$ es lineal y continua , entonces existe $\tilde{f}: X \longrightarrow \mathbb{K}$, $\tilde{f} \in X^*$ tal que $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo x$\in G$ y $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

Demostración. Ver[2]. Corolario I.2, p.3.

Como consecuencias inmediatas del teorema de Hahn-Banach tenemos:

Corolario 1.1. Sean X un espacio normado y $x \in X$, $x \neq 0$ .Entonces existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$.

Corolario 1.2. Sean X un espacio normado .Si $(f(x) = 0 \in X$ $para\ todo$ $f \in X^*$ entonces x=0.

Corolario 1.3. Sean X un espacio normado. Para todo $x \in X$ entonces

$$\sup_{f\in X^*\|f\|_{X^*}=1} |f(x)| = \sup_{f\in X^*\|f\|_{X^*}\le 1} |f(x)|$$

Tenemos que un conjunto A de un espacio vectorial es convexo si dados cualesquiera x, y $\in A$ entonces el segmento de recta que une estos dos puntos están en A, esto es , $tx + (1-t)y \in A$ para todo $t \in [0,1]$.

Teorema 1.4.(forma geométrica del teorema de Hahn-Banach)

Sean X un espacio normado sobre $\mathbb{R}$, A y B subconjuntos convexos de X, no vacíos tales que $A \cap B = \emptyset$. Supongamos que A es abierto. Entonces existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in X^*, f \neq 0$ $tales\ que\ f(x) < \alpha \leq f(y)\ para\ todo\ x \in A\ e\ y \in B$.

Demostración. Ver [2], teorema 1.6, p.5.

Teorema 1.5.(Teorema de Banach-Steinhaus)

Sean X un espacio de Banach e Y un espacio normado. Sea $(T_\alpha)_{\alpha\in I} \subset \mathcal{L}(X,Y)\ tal\ que$ $\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha x\|$ es finito para cada $x \in X$. entonces $\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha\|$ es finito .

Demostración. Ver [2],teorema II.1, p.16.

Teorema 1.5. Sea B un subconjunto de un espacio normado X. Entonces B es un subconjunto limitado de X si y solamente si $f(B)$ es un subconjunto limitado de $\mathbb{K}$ para todo $f \in X^*$.

Demostración . Ver [2*, corolario II.3, p.17.

Definición 1.8. Sean X e Y espacios normados y $T: X \longrightarrow Y$ un operador lineal. El grafico de T es el conjunto $G_T = \{(x,y) \in X \times Y; y = Tx\}$.

Teorema 1.7. (Teorema del gráfico cerrado) Sean X e Y espacios de Banach y sea $T: X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si, y solamente si el gráfico de T es cerrado.

Demostración. Ver [2], teorema II.7, p.20.

Definición 1.9. Sean X e Y espacios normados y sea T$\in$ $\mathcal{L}(X,Y)$. Definimos el adjunto T, y denotamos por T^*, como siendo la aplicación $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ definida por $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$ para todo $\varphi \in Y^*$.

Observe que como $T: X \longrightarrow Y$ y $\varphi: Y \longrightarrow \mathbb{K}$ son lineales y continuas , tenemos que $\varphi \circ T: X \longrightarrow \mathbb{K}$ es lineal y continua. T^* está bien definida. La linealidad de T^* es clara .Así mismo , por el Teorema de Hahn-Banach (corolario 1.3) tenemos que $\sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\varphi(Tx)| = \|Tx\|$, donde se sigue que $\|T^*\| = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \|Tx\| = \|T\|$, Concluimos que $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ y $\|T^*\| = \|T\|$.

Vamos a denotar por B_X a la bola cerrada del centro de origen y radio 1 y por S_X es la esfera de centro en el origen y el radio 1 , esto es , $B_X = \{x \in X;\ \|x\| \leq 1\}$ y $S_X = \{\ x \in X;\ \|x\| = 1\}$. Tenemos la siguiente caracterización:

Teorema 1.8. (Teorema de Riesz)

Sea X un espacio normado. Entonces B_X es compacta si y solamente si, la dimensión de X es finita.

Demostración. Ver [4], teorema 4, p.3.

Sabemos que los espacios métricos es consecuentemente , los espacios normados, vale el criterio secuencial de continuidad es una caracterización de subconjuntos compactos K a través del comportamiento de secuencias contenidas en K. De la topología general sabemos que, cuando trabajamos con espacios topológicos arbitrarios, se convierte necesario la introducción del concepto de red (la secuencia generalizada) que definiremos a seguir.

Definición 1.10. un conjunto D es dicho dirigido si existe una relación binaria, denotada por $\leq$ $, en\ D$ que satisface :

i) $d \leq d\ para\ todo\ d \in D$

ii) Si $a \leq b\ \ y\ b \leq c\ \ entonces\ a \leq c\ para\ todos\ a, b, c \in D$

iii) Dados $a, b \in D\ existe\ d \in D\ tal\ que\ a \leq d\ y\ b \leq d.$

Definición 1.11. Sea X un espacio topológico. Una red en X es una aplicación $\lambda: D \longrightarrow X$, donde D es un conjunto dirigido. Denotamos esta red por $(\lambda_d)_{d \in D}$ .Diremos que una red $(\lambda_d)_{d \in D}$ converge para $x \in X$ si, para toda vecindad U de x en X, existe $d_0 \in D$ tal que $\lambda_d \in U$ si $d_0 \leq d$.

Recordemos que una sub-base para una topología Γ en X es una colección de subconjuntos no vacíos de X cuya unión de elemento de S es igual a X y, que la base Base B asociada a S es una colección de todas las intersecciones finitas de elementos de S. A seguir, definiremos una topología en espacios normados que en general, estrictamente menos fina de que la topología de norma que desempeña un papel muy importante en el análisis funcional.

Definición 1.12. sea X un espacio normado. A es una topología débil de X , denotado por w , es la topología que tiene como sub-base a la colección S=$\{\varphi^{-1}(A);\ \varphi \in X^*, A \subset \mathbb{K}\ abierto\}$.

Diremos que la topología de una norma es una topología débil de X e indicaremos por $\beta.$ A partir de la definición , es fácil ver que w$\subset$ β , por la definición de topología débil , tenemos que la colección $\{V_{\varphi,\epsilon}(x_o); x_o \in X;\ \varphi \in X^*; \epsilon > 0\}$, donde $V_{\varphi,\epsilon}(x_o) = \{x \in X; |\varphi(x - x_o)| < \epsilon\}$ para $x_o \in X;\ \varphi \in X^*; \epsilon > 0,$ forma una sub-base para la topología débil de X .Asimismo , una red $(x_o)_{d\in D} \subset X$ converge para $x \in X$ una topologia débil si, y solamente si $\varphi(x_d) \rightarrow \varphi(x)\ para$ toda $\varphi \in X^*$. En este caso diremos que $(x_o)_{d\in D}$ converge débilmente para x e indicamos este hecho por $x_d \overset{w}{\rightarrow} x$.

El resultado a seguir, cuya demostración puede ser vista en [9]. Nos dice que, en un espacio de Banach X, cualquier sucesión débilmente converge a cero tal que ninguna de sus subsecciones converge a cero la norma admite siempre una subsucesion básica.

Teorema 1.9.(Principio de la selección de Bessaga-Pelczynski) .Sea $(x_i)_i$ una sucesión de elementos de un espacio de Banach X tal que $x_i \overset{w}{\rightarrow} 0$ e $\inf_i \|x_i\| > 0$. Entonces dado $\epsilon > 0$ existe una subsucesión $(y_i)_i$ de $(x_i)_i$ que es una sucesión básica con constante básica mayor o igual a 1- ϵ.

Demostración. Ver [4], p.42.

Sea K un subconjunto de un espacio normado X. En este trabajo $\overline{K}$ representará el cerrado de K en la topología de norma y $\overline{K}^w$ representará el cerrado de K en la topología débil. En general, $\overline{K} \subsetneq \overline{K}^w$. El siguiente resultado es una consecuencia del teorema de Hahn-Banach:

Teorema 1.10. Sean X un espacio normado y K un subconjunto convexo de X. Entonces $\overline{K} = \overline{K}^w$

Demostración. Ver [2],teorema III.7, p.38.

Teorema 1.11. Sean X e Y espacios de Banach. Entonces $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ si, y solamente si $T \in \mathcal{L}((X,w),(Y,w))$.

Demostración. Ver [2], teorema III.9, p.39.

Representaremos por X^{**} al dual topológico de X^*, donde X es un espacio normado.

Definimos $J: X \longrightarrow X^{**}$ siendo $Jx = \delta_x$ para todo $x \in X$, donde $\delta_x: X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ y tal que $\delta_x(x) = f(x)$ para todo $f \in X^*$. J es llamado la aplicación canónica de X en X^{**}.es fácil ver que J está bien definida, es lineal y es una isometría, por lo tanto X y J(X) $\subset X^{**}$ son isométricamente isomorfos.

Definición 1.13. diremos que un espacio de Banach X es reflexivo si J es sobreyectiva. en este caso, X y X^{**} son isométricamente isomorfos .

Teorema 1.12. Sea X un espacio de Banach. Entonces X es reflexivo si, y solamente si B_X es compacta por la topología débil de X.

Demostración. Ver [2], teorema III.16, p.44.

Proposición 1.6. Sea X un espacio de Banach reflexivo. Si M es un subespacio vectorial cerrado de X entonces M es un subespacio de Banach reflexivo.

Demostración. Ver [2], proposición III.17, p.45.

Sea X^* el dual topológico de un espacio normado X, podemos considerar en X^*, además las topología fuerte y débil, otra topología importante, es llamado topología estrella débil.

Definición 1.14. Sea X un espacio normado. La topología estrella débil de X^* , denotada por w^*, es la topología que tiene como sub-base a la colección $\mathcal{S} = \{\varphi^{-1}(A);\ \varphi \in J(X) \subset\ X^{**}$, A$\subset \mathbb{K}$ abierto}={δ_x^{-1}(A); x $\in$ X, A $\subset \mathbb{K}$ abierto}.

Es claro que la topología estrella débil de X^* es menos fina de que la topología débil de X^*. De la definición tenemos que la colección $\mathcal{S}$ ={$W_{x,\epsilon}(\varphi_0)$; x $\in$ X, $\varphi_0 \in X^*$,$\epsilon > 0$}, donde $W_{x,\epsilon}(\varphi_0)$={$\psi \in X^*$;$|(\psi - \varphi_0)(x)| < \epsilon$} para x $\in$ X, $\varphi_0 \in X^*$ y $\epsilon > 0$ es una sub-base para la topología débil estrella. Además una red $(\varphi_d)_{d \in D} \subset X^*$ converge para $\varphi \in X^*$ topología débil estrella si y solamente si $\varphi_d\,(x) \longrightarrow\ \varphi(x)$ para todo x ∈ X. En este caso, diremos que $(\varphi_d)_{d\in D}$ converge débil estrella para φ e indicaremos este caso por $\varphi_d \overset{w^*}{\to} \varphi$. Tenemos el siguiente teorema para la bola unitaria cerrada del dual de un espacio de Banach X con respecto a la topología débil estrella.

Teorema 1.13. (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) Sea X un espacio de Banach . Entonces el conjunto B_{X^*} es compacto en la topología débil estrella de X^*.

Demostración. Ver [2], teorema II.15, p,42.

1.2 Teoría de Integración

Definición 1.15. Sea X un conjunto no vacío arbitrario. Un $\sigma - algebra$ en X es una colección $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, donde $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto de partes de X, que satisface las siguientes condiciones:

(i) $X \in \mathcal{A}$.

(ii) $Si\ A \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus A \in\ \mathcal{A}$.

(iii) $Si\ A_n \in \mathcal{A}$ para todo n∈ ℕ , entonces $\bigcup_n A_n$

$si\ \mathcal{A}$ es una $\sigma - \acute{a}lgebra$ en X, entonces diremos que los elementos de $\mathcal{A}$ son los conjuntos mensurables en X y que (X, $\mathcal{A}$) es un espacio mensurable.

Proposición 1.7. Sea X un conjunto cualquier. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, entonces existe una menor $\sigma - \acute{a}lgebra\ \ \sigma(\mathcal{F}) en\ X$ que contiene $\mathcal{F}$, esto es, si C es una $\sigma - \acute{a}lgebra$ en X que contiene $\mathcal{F}$ entonces $\sigma(\mathcal{F}) \subset C$. Diremos que $\sigma(\mathcal{F})$ es un $\sigma - \acute{a}lgebra$ en X generada por $\mathcal{F}$.

Demostración. Ver[3], proposición 1.1.1, p.2.

Definición 1.16. Sea (X, Γ) un espacio topológico cualquiera y sea $\mathcal{B}\ un\ \sigma - \acute{a}lgebra$ en X generada por Γ, esto es , $\mathcal{B} = \sigma(\ \Gamma)$. Los elementos de $\mathcal{B}$ son los conjuntos de Borel , o conjuntos de Borel mensurables o conjuntos mensurables a Borel.

Definición 1.17. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mensurable. Una medida sobre X es una función $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0. +\infty]$ que satisface:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ siempre que $\{ A_i; i \in \mathbb{N} \}$ es una familia enumerable de elementos de $\mathcal{A}$ dos a dos disjuntos

Definición 1.18. Un espacio medida es un espacio mensurable $(X, \mathcal{A})$ que tiene una medida μ definida en $\sigma - \acute{a}lgebra$ $\mathcal{A}$ de sus conjuntos mensurables. Denotamos estos espacios como triples $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Observación 1.2. el caso en que $X = \mathbb{R}^n$, H.Lebesgue construyo una $\sigma - \acute{a}lgebra$ $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ que contiene a los borelianos y una medida m sobre $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Esta medida m es llamada medida de Lebesgue.

Definición 1.19. una medida μ definida en $\sigma - \acute{a}lgebra$ de todos los conjuntos de Borel en un espacio de Hausdorff localmente compacto X es llamado una medida de Borel sobre X.

Supongamos que $\mathcal{A}$ es una $\sigma - \acute{a}lgebra$ que contiene todos los borelianos. Entonces , una medida μ definida en $\mathcal{A}$ se llama regular si

(i) Para todo subconjunto compacto K de X tiene $\mu(K) < \infty$.

(ii) Para cada A $\in \mathcal{A}$ tenemos $\mu(U)=inf\{\mu(V): A \subset V, V\ abierto\}$.

(iii) Para cada conjunto abierto U de X tenemos $\mu(U)=sup\{\mu(K): K \subset U, K\ compacto\}$.

Una medida que satisface las condiciones (ii) y (iii) es llamado regular exterior e interior, respectivamente.

Observación 1.3. Recordemos que un espacio de Hausdorff X es un espacio topológico que dados x , y $\in X$, $x \neq y$, existen abiertos disjuntos V y W tales que, x$\in V$ e y$\in W$. Un espacio topológico X es localmente compacto si todo punto x de X está contenido en un abierto V tal que $\bar{V} es\ compacto.$

Definición 1.20. Si $(X, \mathcal{A})$ es un espacio mensurable y (Y, Γ) es un espacio topológico, X

Observación 1.4. Si $(X, \mathcal{B})$ es un espacio mensurable donde $\mathcal{B}$ es un $\sigma - \acute{a}lgebra$ de Borel e Y es un espacio topologico, entonces toda función continua $f: X \longrightarrow Y$ es mensurable, o Borel mensurable. Las funciones Borel mensurables son frecuentemente llamados de funciones de Borel.

Las definiciones que se siguen, iremos siempre considerando que $\mathcal{A}$ es un $\sigma - álgebra$ en un conjunto X cualquiera y μ una medida definida en $\mathcal{A}$. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces definimos una función característica I_A como

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Definición 1.21. una función $u: X \longrightarrow [0, +\infty)$ es una función simple si tu conjunto imagen es finito, esto es, $u(X) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots., \alpha_n\}$. En este caso u es de la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i}$, donde $A_i = \{x \in X; u(x) = \alpha_i\}$.

Definición 1.22. Si u es una función simple y E$\in \mathcal{A}$, definimos la integral de u sobre E como

$$\int_E u\, du = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E).$$

Observación 1.5. Como puede acontecer que $\mu(A_i \cap E) = \infty$ para algún i, por convención escribiremos $0. \infty = 0$.

Definición 1.23. Si $f: X \longrightarrow [0, +\infty)$ es numerable y E$\in \mathcal{A}$, definimos

$$\int_E f d\mu = sup \int_E \mu d\mu,$$

Donde el supremo es tomado sobre todas las funciones simples mesurables tal que $0 \leq u \leq f$.

El número $\int_E f d\mu$ es llamado integral de Lebesgue de f sobre Econ respecto a la medida μ.

Sea $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos asociar a f , a su parte positiva (f^+) $es\ negativa$ (f^-) del siguiente modo $f^+(x) = (f \vee 0)(x) = \max\{f(x), 0\}, f^-(x) = -(f \wedge 0)(x) = -\min\{f(x), 0\}$,

Luego, tenemos que $f = f^+ - f^-$. Por lo que se muestra que

- $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ es mensurable si y solamente si $f^+ \ y\ f^-$ son mensurables.
- $si\ f\ es\ mensurable, entonces$ $|f|$ es mensurable.

Definición 1.24. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio mensurable y μ es una medida en $\mathcal{A}$. Definimos $\mathcal{L}^1(\mu)$ como el conjunto de todas las funciones mensurables $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Los elementos de $\mathcal{L}^1(\mu)$ son llamados funciones Lebesgue integrables (con respecto μ).

Definición 1.24. Sea $f = u + iv$ donde u e v son funciones reales mensurables en X. Si $f C \mathcal{L}^1(\mu)$ y E$\in$ $\mathcal{A}$, definimos

$$\int_E f d\mu = \int_E u^+ d\mu - \int_E u^- d\mu + i \int_E v^+ d\mu - i \int_E v^- d\mu \,,$$

donde u^+, u^- y $v^+, \quad v^-$ son las partes positivas y negativas de u e v , respectivamente.

Proposición 1.8. $\mathcal{L}^1(\mu)$ es un espacio vectorial y $\left|\int_X f d\mu\right| \leq \int_X |f| d\mu$ para todo $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Además la aplicación $\varphi: \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(f) = \int_X f d\mu$ es una funcional lineal.

Demostración. Ver [3], proposición 2.3.7, p.66.

Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff. Denotamos por $C_c(X)$ como siendo el conjunto de funciones continuas f de X en $\mathbb{K}$ tal que $suppf = \overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$ es compacto. Diremos que una funcional lineal φ sobre $C_c(X)$ es positivo si $\varphi(f) > 0$ para todo $f \in C_c(X)$ tal que $f > 0$.

Teorema 1.14. (Teorema de representación de Riesz) Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto y sea φ una aplicación lineal, continua y positiva sobre $C_c(X)$. Entonces existe una única medida de Borel regular μ sobre X tal que para toda $f \in C_c(X)$ entonces

$\varphi(f) = \int_X f d\mu.$

Demostración. Ver [3], teorema 7.2.8, p.209.

Observación 1.6. el teorema de representación de Riesz continua valido si intercambiamos $C_c(X)$ por C(X) y consideramos X un espacio compacto.

Si $\mathcal{M}(X)$ denota el conjunto de medidas de Borel μ sobre X , esto es , $\mu: \mathcal{B} \to [0, \infty]$ donde $\mathcal{B}$ es un $\sigma -$ á$lgebra$ de todos los conjuntos de Borel en un espacio compacto X, podemos definir en $\mathcal{M}(X)$ la norma $\|\mu\| = \mu(X)$ y el teorema de representación de Riesz nos dice que cada aplicación lineal positiva φ sobre C(X) corresponde una y solo una $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\|\varphi\| = \|\mu\|$.

Teorema 1.15. Sean p y q números reales positivos tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, X un espacio mensurable con medida μ y $f, g: X \to [0, \infty]$ funciones mensurables, entonces :

a) Desigualdad de Holder

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

b) Desigualdad de Minkowski

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Ver [3]. Proposiciones 3.3.2 y 3.3.3, p.101.

Definición 1.26. Si $0 < p < \infty$, el espacio $\mathcal{L}^p(\mu)$ consiste de todas las funciones complejas mensurables definidas en X tal que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$.

Proposición 1.9. Sea $0 < p < \infty$. Definido

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

Tenemos que $\|.\|_p$ es una semi-norma en $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Demostración. Ver [3], corolario 3.3.4, p.102.

Definición 1.27. Sea $f: X \to [0, +\infty]$ una función mensurable. Definimos el supremo esencial de f, y denotamos por $\|f\|_\infty$ como siendo el "número"

$$\|f\|_\infty \begin{cases} \inf S, S \neq \emptyset \\ \infty, S = \emptyset \end{cases}$$

Donde $S = \{\alpha > 0; \mu(|f|^{-1}[(\alpha, \infty)]) = 0\}$.

Definición 1.27. Definimos $\mathcal{L}^{\infty}(\mu)$ como siendo el espacio de todas las funciones complejas mensurables en X tal que $\|f\|_{\infty} < \infty$.

Proposición 1.10. Sean p y q números reales positivas tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in \mathcal{L}^{p}(\mu)$ y

$g \in \mathcal{L}^{q}(\mu), entonces\ \ fg \in \mathcal{L}^{1}(\mu)\ \ y\ \ \|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q$

Demostración. Sale directo de la desigualdad de Holder.

Sea $1 \leq p \leq \infty$: Podemos definir en $\mathcal{L}^{p}(\mu)$ a la siguiente relación de equivalencia:

$f \sim g$ si, y solo si $\|f - g\|_p$=0 si , y solo si $\mu(\{x \in X; f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Denotaremos por $\mathcal{L}^{p}(\mu)$ como siendo el espacio cociente $\mathcal{L}^{p}(\mu)/\sim$. De este modo tenemos que $\|.\|_p$ es una norma. Además , tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.16.(Teorema d Riesz-Fisher) $(\mathcal{L}^{p}(\mu), \|.\|_p)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. Ver [3], teorema 3.4.1, p.106.

Teorema 1.17. los espacios $\mathcal{L}^{p}(\mu)$ son reflexivos para $1 \leq p \leq \infty$.

Demostración. Ver [2], teorema IV.10, p.59.

Teorema 1.18. (Teorema de convergencia Dominada de Lebesgue) Sea (f_n) una sucesión de funciones mensurables en X tal que existe $f(x) = \lim_{n} f_n(x)$ para todo x$\in X$. Suponga que exista $g \in \mathcal{L}^{1}(\mu)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todos x$\in X$ y n$\in \mathbb{N}$. Entonces:

$$fg \in \mathcal{L}^{1}(\mu)\ y\ \int_X f\, d\mu = \lim_{n} \int_X f_n\, d\mu$$

Demostración. Ver [3], teorema 2.4.4, p.72.

Capítulo 2

Convergencia de sucesiones en espacios de Banach

En este capítulo, iremos definir convergencias de series en espacios normados y veremos sobre qué condiciones las definiciones son equivalentes. En particular, mostraremos que el hecho que una serie es absolutamente convergente será incondicionalmente convergente está relacionado con la completitud del espacio. Aunque, presentaremos ejemplos en c_0 y l_2 que nos muestran la existencia de series incondicionalmente convergentes que no convergen absolutamente. Estudiaremos las sucesiones p-sumables y débilmente p-sumables y por fin , probaremos el teorema de Bessaga-Pelczynski.

2.1 convergencias Absoluta e Incondicional

Definición 2.1. Sean X un espacio normado y $(x_n)_n$ una sucesión en X. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si la sucesión de sus sumas parciales converge, esto es , si existe un x$\in X$ tal que la sucesión $(s_k)_k$ converge para x, donde $s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$ para todo k $\in \mathbb{N}$.

Definición 2.2. Sean X un espacio normado y $(x_n)_n$ una sucesión en X. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge.

Cuando una función $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es biyectiva, diremos que π es una permutación de $\mathbb{N}$.

Definición 2.3. Sean X un espacio normado y $(x_n)_n$ una sucesión en X. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge cualquiera que sea la permutación π de $\mathbb{N}$.

Observación 2.1. Observe que si una serie convergente incondicionalmente , entonces converge pues la identidad es una permutación de $\mathbb{N}$.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de un conocido resultado de análisis real.

Proposición 2.1. Sean X un espacio normado. Sean $(x_n)_n$ y $(a_n)_n$ sucesiones en X y en $\mathbb{R}$, respectivamente, tal que $\|x_n\| \leq a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente.

La definición de series incondicionalmente convergentes no exige que las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ sean convergentes para un mismo limite, sea cualquiera de las permutaciones π de $\mathbb{N}$. Cuando estudiamos convergencia de series de números reales, tenemos el siguiente:

Teorema 2.1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es un<a serie de números reales absolutamente convergente , entonces para toda permutación π de $\mathbb{N}$ tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Riemann demostró un hecho sorprendente para las series condicionalmente convergente, esto es, la serie converge mas no convergen absolutamente.

Teorema 2.2 (teorema de Riemann) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números reales condicionalmente converge. Entonces, fijado a $\in \mathbb{R}$, existe una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = a$. Además , existen permutaciones para los cuales la serie diverge para$+\infty$ y$-\infty$.

Sus demostraciones pueden ser vista en [12] (teorema 3.54, página 76). Como consecuencia de este teorema tenemos:

Teorema 2.3. Una serie de números reales es absolutamente convergente si, y solamente si converge incondicionalmente.

Esto nos dice que las convergencias absoluta e incondicional de series de números reales son conceptos equivalentes. Este teorema continua valido en $\mathbb{R}^n$ debido a la convergencia coordenada a coordenada y por lo tanto este hecho es válido, también, para cualquier espacio de dimensión finita . Además, los teoremas 2.1 y 2.3 muestran que una serie de números reales converge incondicionalmente entonces toda permutación converge para el mismo limite. Veremos ahora que este hecho es válido en espacios normados no importan su dimensión.

Proposición 2.2 Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es un espacio normado X e incondicionalmente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge para el mismo limite, cualquiera que sea la permutación π de $\mathbb{N}$.

Demostración. Supongamos, por el absurdo, que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$ y que exista una permutación π tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = s' \neq s$. Por corolario 1.1, como $s' \neq s$, existe funcional $f \in X^*$ tal que $f(s') \neq f(s)$. Como f es lineal y continua tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ es una serie convergente en $\mathbb{K}$. Por otro lado, por el teorema 2.3, esta serie no puede converger absolutamente pues la permutación π es tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) = f(s) \neq f(s')$=$\sum_{n=1}^{\infty} f(x_{\pi(n)})$ luego por el teorema de Riemann (teorema 2.2) existe una permutación σ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_{\sigma(n)})$ diverge . Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ diverge, pues si $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = a$, entonces por linealidad y continuidad de f, tendríamos $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_{\sigma(n)})$=f(a) y que contradice la elección de σ. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ es divergente esto contradice la hipótesis de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ser incondicionalmente convergente.

Un ejemplo a seguir muestra que un espacio normado de dimensión infinita puede ser una serie que converge absolutamente mas no converge.

Ejemplo 2.1. Sea X=$\wp(K)$ el espacio de polinomios reales con dominio $K = [0,1]$. Para todo n $\in \mathbb{N}$, sea $p_n: K \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $p_n = \frac{x^n}{n!}$. Tenemos que $(p_n)_n \subset \wp(K) \subset C(K)$ y $\|p_n\|_K = \frac{1}{n!}$ Para todo n $\in \mathbb{N}$. Sabemos de análisis real que $\sum_{n=0}^{\infty} \|p_n\|_K = e$, de modo que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)$ es absolutamente convergente para todo x $\in K$. Por otro lado tenemos que $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ converge en C(K) para una función $f \in C(K)$ definida por $f(x) = e^x$, que no es un polinomio.

De hecho vamos a ver el teorema 2.4 que la existencia de una serie absolutamente convergente que no sea convergente solo es posible si este espacio no está completo. Antes de presentar el teorema 2.4, vamos enunciar el criterio de Cauchy, cuya demostración se hace de manera similar en el caso de series en $\mathbb{K}$, una vez que los espacios de Banach son completos.

Proposición 2.3. (Criterio de Cauchy) Sea X un espacio de Banach. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

Converge si y solamente si la sucesión de la sumas parciales es de Cauchy, esto es

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\right\| = 0$$

Teorema 2.4. un espacio normado X es un espacio de Banach si y solamente si toda serie absolutamente convergente es convergente.

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en un espacio de Banach X tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ converge. Demostraremos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge , usando la proposición anterior. De hecho, sea $n > m$, entonces tenemos que $\|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\| \leq \sum_{i=m+1}^{n}\|x_i\|$ y dar, como $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|$ es una serie convergente de números reales tenemos que $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|\sum_{i=m+1}^{n} x_i\| = 0$ de donde se sigue de la proposición anterior que la serie converge. Recíprocamente, sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces para cada k ∈ ℕ existe $n_k > n_{k-1}$ tal que $\|x_m - x_n\| < \frac{1}{2^k}$ para todos m,n $\geq n_k$.

Como $n_{k+1} > n_k$ tenemos $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$. llamando $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ entonces $\|y_k\| \leq \frac{1}{2^k}$. Como $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ converge , tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ converge absolutamente y, por hipótesis , es convergente .Pero tenemos que $x_{n_1} + y_1 + \ldots\ldots + y_k = x_{n_{k+1}}$ y haciendo k→ ∞ sigue que $(x_{n_k})_k$ es convergente. Luego $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy y tiene una subsucesion convergente, donde se sigue que $(x_n)_n$ es convergente, y que prueba que X es un espacio de Banach.

Corolario 2.1. Un espacio normado X es un espacio de Banach si y solamente si toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente.

Demostración. Supongamos que toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente. Luego, en particular, tenemos que la serie y ella misma converge, y por lo tanto, por el teorema anterior, tenemos que X es un espacio de Banach. Recíprocamente, sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie absolutamente convergente es un espacio de Banach X .Luego $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ es absolutamente convergente en ℝ, donde por el teorema 2.3 tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_{\pi(n)}\|$ converge para toda permutación $\pi\ de$ ℕ. Como X es un espacio de Banach por el teorema anterior, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ es convergente para toda permutación $\pi\ de\ \mathbb{N}$, esto es $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente.

Vimos entonces para toda serie absolutamente convergente en un espacio normado es incondicionalmente convergente y es importante el espacio de ser completo y esto no depende de la dimensión del espacio. Por otro lado, el hecho que el espacio es completo no es suficiente para garantizar la convergencia absoluta de series incondicionalmente convergente. Veremos a través de dos ejemplos , que lo contrario del caso de la dimensión finita , en un espacio de Banach de dimensión infinita la convergencia incondicional de una serie no garantiza la convergencia absoluta de esta serie.

Ejemplo 2.2 sea X=c_0 y tomemos la sucesión $(x_n)_n$ con $x_n = \frac{e_n}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. analicemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en c_0.

Esta serie no converge absolutamente, pues $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que la serie armónica. Ahora veamos que esta serie converge incondicionalmente para $x = \left(\frac{1}{n}\right)_n \in c_0$. En efecto sea σ una permutación de $\mathbb{N}$ y sea $\epsilon > 0$. Existe N$\in$ $\mathbb{N}$ tal que N $> \frac{1}{\epsilon}$. Para todo k$\in$ $\{1, \ldots \ldots, N\}$ existe $n_k \in \mathbb{N}\ tal\ que\ \sigma(n_k) = k$. Sea $n_0 = \max\{n_1, \ldots \ldots n_N\}$. Para n$\geq n_0$, tenemos

$$\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} = x_{\sigma(1)} + \cdots + x_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n_1)} + \cdots + x_{\sigma(n_N)} + \sum_{j \in A} x_{\sigma(j)} = x_1 + \cdots + x_N + \sum_{j \in A} x_{\sigma(j)}$$

Donde A=$\{1,\ldots,n\} \setminus \{n_1, \ldots, n_N\}$.

Luego para todo n $\geq n_0$,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - x\right\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Como la permutación σ fue tomada arbitrariamente tenemos que la serie converge incondicionalmente.

Ejemplo 2.3. Sea X=l_2 y tomemos la misma sucesión $(x_n)_n$ del ejemplo 2.2 y analicemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en l_2.

Asi como el ejemplo 2.2 tenemos que esta serie no converge absolutamente en l_2, pues $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es la serie armónica. Resta verificar que esta serie converge incondicionalmente para x=$\left(\frac{1}{n}\right)_n \in l_2$.Para eso , sea σ una permutación cualquiera de ℕ y sea $\epsilon > 0$. Tomemos N∈ ℕ tal que para todo n> N tenemos $\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^2} < \epsilon^2$ .Para k∈ $\{1, \dots, N\}$ existe $n_k \in$ ℕ tal que $\sigma(n_k) = k$. Sea n_0=max$\{n_1, \dots \dots n_N\}$. Para n≥ n_0 ya hemos visto que

$\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} = x_{\sigma(n_1)} + \cdots + x_{\sigma(n_N)}$+$\sum_{j\in A} x_{\sigma(j)}$=$x_1$ Donde A={1,…,n}\ $\{n_1, \dots, n_N\}$.

Reorganizamos los elementos del conjunto A de la forma que A=$\{j_1, \dots, j_{n-N}\}$ donde $\sigma(j_1) < \sigma(j_2) < \cdots < \sigma(j_{n-N})$. Como $\sigma(j_i) \geq N + i$ para todo i=1,……,n-N, obtenemos que $\left\|\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - x\right\|_2^2$=$\left\|(0, \dots, 0, \frac{1}{N+1}, \frac{1}{N+2}, \dots)\right\|_2^2$ que tiene apenas un numero finito de ceros, luego

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - x\right\|_2^2 \leq \sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^2} < \epsilon^2.$$

Y por lo tanto, como σ es tomada una permutación cualquiera, tenemos que la serie converge incondicionalmente.

Observe que si intercambiamos la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ por una sucesión $(a_n)_n$ tal que $(a_n)_n \in l_2$ pero $(a_n)_n \notin l_1$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge incondicionalmente mas no absolutamente. El Teorema Clásico de Dvoretzky-Rogers, que será demostrado en el capítulo 3, nos garantiza que un espacio de Banach de dimensión infinita siempre podemos encontrar una serie incondicionalmente convergente que no se absolutamente convergente.

Antes de terminar este párrafo vamos introducir el concepto de serie perfectamente convergente y mostrar que el espacio de Banach, este concepto es equivalente a la de serie incondicionalmente convergente.

Definición 2.4. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio normado y perfectamente convergente si la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge para toda sucesión $(\alpha_n)_n$ donde $\alpha_n \in \{-1,1\}$ para todo n∈ ℕ.

Teorema 2.5. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie en un espacio de Banach X. Son equivalentes:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente ,
b) Toda serie de la forma $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$(subserie de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$) donde $(n_i)_i$ es una sucesión creciente, convergente.
c) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge perfectamente.

Demostración. (b)$\rightarrow (c)$

Sea $(\alpha_n)_n$ una sucesión arbitraria tal que $\alpha_n \in \{-1,1\}$ para todo n$\in$ $\mathbb{N}$. Particionemos el conjunto de números naturales de la siguiente manera , $\mathbb{N} = A \cup B$, donde A=$\{n_1, n_2, ...\}$ y el conjunto de índices tal que $\alpha_n = 1$ y B=$\{m_1, m_2, ...\}$ es el conjunto de índices tal que $\alpha_n = -1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las sucesiones $(n_i)_i$ $y \left(m_j\right)_j$ son crecientes. Por hipótesis, tenemos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ y $\sum_{j=1}^{\infty} x_{m_j}$ convergen. Como para todo k$\in$ $\mathbb{N}$ tenemos $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{k} x_{n_i} -$
$\sum_{j=1}^{k} x_{m_j}$ $, entonces\ , tomando\ el\ limite\ cuando\ k \rightarrow \infty\ sigue\ que\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n =$
$\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} - \sum_{j=1}^{\infty} x_{m_j}$ converge.

(c)$\rightarrow (b)$

Sea $(n_i)_i$ una sucesión arbitraria creciente en $\mathbb{N}$. Considere A=$\{n_1, n_2, ...\}$ y B= $\mathbb{N}\backslash A$.

Sean $(\alpha_k)_k$ y $(\beta_k)_k$ sucesiones tal que $\alpha_k = 1$ para todo k$\in$ $\mathbb{N}$ y $\beta_k = 1$ si k$\in$ A o -1 si k$\in$ B. Por hipótesis, tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_k \quad x_k$ convergen y por lo tanto, $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k x_k + \beta_k \quad x_k)/2$ converge.

(a)$\rightarrow (b)$

Supongamos, por el absurdo, que exista la sucesión creciente de números naturales $(n_i)_i$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ diverge. Luego por el criterio de Cauchy, existen $\epsilon_0 > 0$ y números naturales $m_k < r_k$<m_{k+1} tal que $\left\|\sum_{i=m_k}^{r_k} x_{n_i}\right\| \geq \epsilon_0$ para todo k$\in$ $\mathbb{N}$. Denotemos los términos de la sucesión $(x_k)_k$ que no aparecen en ninguno de los segmentos $\left(x_{n_i}\right)_{i=m_2}^{r_k}$ por $y_1, y_2, \ldots \ldots$ Construimos un reordenamiento de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ de la siguiente manera : añadimos los elementos del segmento $(x_{n_i})_{i=m_2}^{r_i}$ seguido del termino y_2 etc .Por construcción, tenemos que esta serie diverge ,esto contradice (a).

$(b) \to (a)$

Supongamos, por el absurdo, que exista una permutación π de $\mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} x_\pi(k)$ diverge . Por el criterio de Cauchy tenemos que existen $\epsilon_0 > 0$ y números naturales $l_i < p_i < l_{i+1}$ tal que $\left\|\sum_{k=l_i}^{p_i} x_\pi(k)\right\| \geq \epsilon_0$ para todo i $\in \mathbb{N}$. Denotamos por Δ_i el segmento $\left(x_{\pi_{(k)}}\right)_{k=l_i}^{p_i}$ para todo i $\in \mathbb{N}$. Tenemos que los Δ_i son disjuntos e $\inf_i \left\|\sum_{k=l_i}^{p_i} x_{\pi(k)}\right\| = \delta > 0$ reorganizamos los Δ_i de modo creciente y denotamos por m_i y r_i como el menor y mayor índice, respectivamente. Luego $\Delta_i \subset (x_n)_{n=m_i}^{r_i}$ para todo i $\in \mathbb{N}$. Pasando a una subsucesión es necesario , podemos escribir los Δ_i de modo que $r_1 < m_2 < r_2 < m_3 < r_3 < \cdots \ldots Por\ lo\ tanto, sumando\ los\ terminos\ de$ Δ_1 con Δ_2 después Δ_3 así sucesivamente , obtenemos una subserie de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ que diverge , esto contradice (b)

2.2 Los espacios $\boldsymbol{\ell_p(X)}$ y $\boldsymbol{\ell_p^w(X)}$

Definición 2.5. Sea X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Una sucesión $(x_n)_n$ en X y fuertemente p-sumable (o simplemente p-sumable) si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$, es decir , la sucesión de escalares $(\|x_n\|)_n$ está en ℓ_p.

Por simplicidad, denotaremos las sucesiones $(x_n)_n$ por (x_n). Observe que directamente de la definición, tenemos (x_n) es 1-sumable si y solamente si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es absolutamente convergente .

Indicaremos por $\ell_p(X)$ el conjunto de sucesiones p-sumables en X. Definido la adición y el producto por escalar en $\ell_p(X)$ de la siguiente manera

(x_n)+(y_n)=$(x_n + y_n)$, $\quad (x_n), (y_n) \in \ell_p(X)$,

$\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$, $\quad \lambda \in \mathbb{K}, (x_n) \in \ell_p(X)$,

Muestre que $\ell_p(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Es natural definir $\|.\|_p: \ell_p(X) \to \mathbb{R}$ por

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{1/p}$$

Para toda $(x_n) \in \ell_p(X)$. Afirmamos que $\|.\|_p$ es una norma en $\ell_p(X)$ y que $(\ell_p(X), \|.\|_p)$ es un espacio de Banach. La demostración de este hecho es de forma análogo en el caso de ℓ_p.

Definición 2.6. Sea X un espacio de Banach y $1 \leq p < \infty$. Una sucesión (x_n) en X y fuertemente p –sumable si $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty$ para todo $\varphi \in X^*$, es decir , $(\varphi(x_n)) \in \ell_p$ para todo $\varphi \in X^*$.

Indicaremos por $\ell_p^m(X)$ como siendo el conjunto de sucesiones fuertemente p-sumables en X. Tomamos $\ell_p^m(X)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ definido en $\ell_p^m(X)$ una adición y un producto por escalar de manera análogo en el hecho en $\ell_p(X)$.

Observación 2.2. Tenemos que $\ell_p(X) \subset \ell_p^m(X)$.

En efecto, si $(x_n) \in \ell_p(X)$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p$ converge. Si $\varphi \in X^*$, entonces para todo k$\in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{k} |\varphi(x_n)|^p < \|\varphi\|^p \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p$y luego tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p$ converge .Como es tomada arbitrariamente , se sigue que $(x_n) \in \ell_p^m(X)$.

Es natural definir $\|.\|_p^w : \ell_p^m(X) \to \mathbb{R}$ por

$$\|(x_n)\|_p^w = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Para toda $(x_n) \in \ell_p^m(X)$.

Proposición 2.4. la función $\|.\|_p^w$ es una norma en $\ell_p^m(X)$ y $(\ell_p^m(X), \|.\|_p^w)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Es fácil de verificar que $\ell_p^m(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones definidas. Veremos que $\|(x_n)\|_p^w$ es una norma en $\ell_p^m(X)$. Tenemos que $\|(x_n)\|_p^w < \infty$ para toda $(x_n) \in \ell_p^m(X)$ .De hecho ,asociamos a cada $(x_n) \in \ell_p^m(X)$ a la siguiente aplicación:

$$u: X^* \to \ell_p$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi(x_n))$$

Tenemos que u está bien definida, pues $(x_n) \in \ell_p^m(X)$.Ademas , es claro que u es lineal. Veremos que u es continua. Para probar este hecho, usaremos el teorema del grafico cerrado (teorema 1.7). Supongamos que $(\varphi_k\ , u(\varphi_k)) \to (\varphi, (y_n))$ en X^*xl_p. Esto significa que cuando k$\to \infty$ tenemos $\varphi_k \ \to \ \varphi$ en X^* y $(\varphi_k(x_n))_n = u(\varphi_k) \ \to (y_n)$ en l_p. Mostraremos que $u(\varphi\ \ )$= (y_n), donde el grafico de u es cerrado y por lo tanto , u es continua . En efecto , como $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|^p < \infty$ para todo $\varphi \in\ X^*$ tenemos que $\lim_{n\to\infty}|\varphi(x_n)| = 0$ para todo $\varphi \in\ X^*$, luego { $\varphi(x_n); n \in \mathbb{N}\}$ es limitada en X , es decir M>0 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq M, o\ sea\ \left\|\frac{1}{M}x_n\right\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero como $\varphi_k \ \to \ \varphi$ en X^*, dado $\epsilon > 0$, existe un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi_k - \varphi\| < \frac{\epsilon}{2M}$ para todo $k \geq k_1$, esto es $|\varphi_k(z) - \varphi(z)| < \frac{\epsilon}{2M}$ para todo $k \geq k_1$ y para todo $z \in X$ con $\|z\| = 1$. En particular, para $z_n = \frac{1}{M}x_n$, n$\in \mathbb{N}$, tenemos que $|\varphi_k(x_n) - \varphi(x_n)|$<$\frac{\epsilon}{2}$ (*)

para todo $k \geq k_1$ y para todo n$\in \mathbb{N}$. Por otro lado, tenemos $u(\varphi_k) \to (y_n)$ en l_p mas $u(\varphi_k) = \left(\varphi_k(x_n)\right)_n$, luego existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_k(x_n) - y_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \frac{\epsilon}{2}$ Para todo $k \geq k_2$, donde

$$|\varphi_k(x_n) - y_n| < \frac{\epsilon}{2} \qquad (**)$$

para todo $k \geq k_2$ y para todo n$\in \mathbb{N}$. Sea k_0=max$\{k_1, k_2\}$. Entonces para todo n$\in \mathbb{N}$ tenemos

$$0 \leq |\varphi(x_n) - y_n| \leq |\varphi(x_n) - \varphi_{k0}(x_n)| + |\varphi_{k0}(x_n) - y_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \ \epsilon$$

Luego para todo $\epsilon > 0$ tenemos $0 \leq |\varphi(x_n) - y_n| <\ \epsilon$ para todo n$\in \mathbb{N}$. Donde $\varphi(x_n) = y_n$ para todo n$\in \mathbb{N}$, es decir (y_n)=($\varphi(x_n)) = u(\varphi)$. *Por lo tanto* u es continua . De $\|u\| < \infty$ y

$$\|u\| = \max_{\varphi\in B_{X^*}} \ \|u(\varphi)\|_p = \max_{\varphi\in B_{X^*}} \ \|(\ \varphi(x_n))\|_p = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} (\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} = \|(x_n)\|_p^w ,$$

concluimos que $\|(x_n)\|_p^w < \infty$.

Verificamos las condiciones de norma. Sean $(x_n), (y_n) \in l_p^w(X)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Tenemos :

(i) $\|(x_n)\|_p^w \geq 0\ , por\ la\ definición.$

(ii) $si \ \|(x_n)\|_p^w = 0$ entonces $(x_n) = 0$. De hecho , pues si $(x_n) \neq 0$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \neq 0$ y por el teorema Hahn-Banach (corolario 1.1), existe $\varphi_0 \in X^*$ tal que $\|\varphi_0\|$=1 y $\varphi_0(x_{n_0}) = \|x_{n_0}\| \neq 0$ .Por lo tanto,

$$\|(x_n)\|_p^w = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |\varphi_0(x_{n_0})| > 0$$

Esto es $\|(x_n)\|_p^w \neq 0 \ \ si \ (x_n) \neq 0.$

(iii) $\|\lambda(x_n)\|_p^w = |\lambda| \|(x_n)\|_p^w$

$En\ efecto$

$$\|\lambda(x_n)\|_p^w = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} (\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(\lambda x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{X^*}} [|\lambda| (\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}}] = |\lambda| \|(x_n)\|_p^w.$$

(iv) $\|(x_n) + (y_n)\|_p^w \leq \|(x_n)\|_p^w + \|(y_n)\|_p^w$ .Basta recordar la desigualdad de Minkowski tenemos que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n) + \varphi(y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Y tomar el supremo cuando $\varphi \in B_{X^*}$.

Veamos finalmente que $(l_p^w(X), \|.\|_p^w)$ es un espacio de Banach. Sea $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $l_p^w(X)$. Para cada k $\in \mathbb{N}$, sea $x^k = \left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo k'>k$\geq k_0$, tenemos $\left\|x^{(k)} - x^{(k')}\right\|_p^w < \epsilon$, es decir

$$\sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi(x_n{}^{(k)}) - \varphi\left(x_n{}^{(k')}\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Luego, para todo k'>k$\geq k_0$ y para todo $\varphi \in B_{X^*}$ entonces,

$$\left(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi(x_n{}^{(k)}) - \varphi\left(x_n{}^{(k')}\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon^p \quad (***)$$

Además, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\left|\varphi(x_n{}^{(k)}) - \varphi(x_n{}^{(k')})\right| < \epsilon$ para todo $\varphi \in B_{X^*}$ y para todo k'>k$\geq k_0$.

Por el coralario 1.3, tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\left\|x_n{}^{(k)} - x_n{}^{(k')}\right\| = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left|\varphi\left(x_n{}^{(k)}\right) - \varphi\left(x_n{}^{(k')}\right)\right| < \epsilon$$

para todo k'>k≥ k_0. Así , fijando $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X que es completo , donde existe $x_n \in X$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_n{}^{(k)} = x_n$ .Veamos que x= $(x_n) \in l_p^w(X)$. y $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ en $l_p^w(X)$.

para $\varphi \in B_{X^*}$ tenemos $\lim_{k'\to\infty} \varphi\left(x_n{}^{(k')}\right) = \varphi(x_n)$ donde por (***) se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi\left(x_n{}^{(k)}\right) - \varphi(x_n)\right|^p \leq \epsilon^p$$

Para todo $k \geq k_0$, entonces $\left\|x - x^{(k)}\right\|_p^w = \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi\left(x_n{}^{(k)}\right) - \varphi(x_n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$ Para todo $k \geq k_0$

Ahora observe que x=$(x_n) = \left(x_n{}^{(k_0)}\right) - (x_n{}^{(k_0)} - x_n)$ y como $(x_n{}^{(k_0)} - x_n)$, $\left(x_n{}^{(k_0)}\right) \in l_p^w(X)$. y $l_p^w(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, tenemos que x∈ $l_p^w(X)$. Concluimos que $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ en $(l_p^w(X), \|.\|_p^w)$ y que completa la demostración .

Observación 2.3. Por la observación 2.2 la aplicación id : $(l_p^w(X), \|.\|_p) \to (l_p^w(X), \|.\|_p^w)$, donde id es una aplicación identidad , esta bien definida y además , para todo $(x_n) \in l_p(X)$ y $\varphi \in X^*$ tenemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi(x_n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\|\left\|(x_n)\right\|_p$$

Y por lo tanto, tomando el supremo en relación a todos $\varphi \in B_{X^*}$ tenemos que $\|(x_n)\|_p^w \leq \|(x_n)\|_p$.

Esto significa que la aplicación inclusión arriba definida es continua.

Observación 2.4. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ **y** sea P un conjunto dirigido de semi-normas en E. Supongamos que P separa los puntos de E, esto es , dado $x \neq 0$, $x \in E$, existe $\alpha \in P$ tal que $\alpha(x) \neq 0$. Sea S=$\{B_\epsilon^\alpha : \epsilon > 0, \alpha \in P\}$ $donde$ $B_\epsilon^\alpha = \{x \in E;\ \alpha(x) < \epsilon\}$. El conjunto {a

+S} es una base para una topología de Hausdorff en E tal que las operaciones de espacio vectorial (x,y)∈ $ExE \mapsto x + y \in E$ y $(\lambda, x) \in \mathbb{K}xE \mapsto \lambda x \in E$ son continuas. Además, S es una base de vecindades de cero en esta topología (formada por conjuntos absolutamente convexos). Diremos que un espacio E equipado con esta topología y un espacio vectorial topológico localmente convexo o simplemente , es un espacio localmente convexo. Podemos definir $l_p(E)$ como siendo el conjunto de sucesiones (x_n) en E tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(x_n)|^p < \infty$ para toda $\alpha \in P$. Diremos que los elementos de $l_p(E)$ son las sucesiones p-sumables o absolutamente p-sumables es un espacio localmente convexo E.

Si E es un espacio normado con dual topológico E^* , podemos asociar a cada $\varphi \in E^*$ la semi-norma m_φ definida por $m_\varphi(x) = |\varphi(x)|$ para todo $x \in E$. Observe que la familia P={$m_\varphi;\ \varphi \in E^*\}\ es$ un conjunto de semi-normas que separa los puntos de E. En efecto, dado $x \neq 0, x \in E$, por el corolario 1.2, existe $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ y por lo tanto, existe $m_\varphi \in P$ tal que $m_\varphi(x) \neq 0$. La topología generada en E por esta familia de semi-normas es la topología débil.

Vamos denotar por E_w el espacio normado E equipado con una topología débil. Entonces

$$l_p(E_w) = l_p^w(E)$$

Pues $(x_n) \in l_p(E_w)$ si y solamente si $\sum_{n=1}^{\infty} |m_\varphi(x_n)|^p < \infty$ para toda $\varphi \in E^*$, o que equivale a decir que $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty$ para toda $\varphi \in E^*$ o sea , $(x_n) \in \ell_p^w(E)$.

Sea E un espacio normado . Una sucesión $(x_n) \subset E$ será dicho incondicionalmente sumable si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente en E. Mostraremos la proposición 2.2 que si (x_n) es una sucesión incondicionalmente sumable, entonces todas las sucesiones $(\sum_{n=1}^{k} x_{\pi(n)})$ converge en E para el mismo limite cuando π recorre el conjunto de permutaciones de $\mathbb{N}$.

Proposición 2.5. Toda sucesión incondicionalmente sumable en un espacio normado y débilmente 1-sumable.

Demostración . En efecto , sea (x_n) es una sucesión incondicionalmente sumable en un espacio normado E. Mostraremos que $(x_n) \in l_1^w(E)$. Por hipótesis la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente en E , esto es , $(\sum_{n=1}^{k} x_{\pi(n)})_k$ converge para toda permutación π de $\mathbb{N}$. Esto implica que para todo $\varphi \in E^*$ la sucesión $(\sum_{n=1}^{k} \varphi(x_n))$ converge incondicionalmente en $\mathbb{K}$, donde el teorema 2.3 converge absolutamente, esto es, $\sum_{n=1}^{\infty}\|\varphi(x_n)\|$ converge para todo $\varphi \in E^*$. O sea $(x_n) \in l_1^w(E)$.

Es natural preguntarnos que una sucesión débilmente 1-sumable será incondicionalmente sumable. El ejemplo a seguir muestra que no siempre esto será verdad.

Ejemplo 2.4. Considere la sucesión canónica (e_n) en c_0. Tenemos que $(e_n) \in l_p^w(c_0)$. De hecho, para todo $\varphi \in (c_0)^*$=l_1, tenemos $\varphi = (\alpha_i)$, donde $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(e_n)| =$
$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\, e_{n,i}\right|$=$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$=$\|\varphi\| < \infty$.

Por otro lado, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ diverge pues $\|e_n\|_\infty = 1$ para todo n$\in \mathbb{N}$. Por lo tanto (e_n) no es incondicionalmente sumable .

Además , $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ también diverge en la topología débil, de lo contrario, existiría un $s = (\alpha_j) \in c_0$ tal que $\varphi(s_k) \to \varphi(s)$ para todo $\varphi \in (c_0)^*$, donde (s_k) es una sucesión de sus sumas parciales. En particular, dado $j \in \mathbb{N}$, tomando $\varphi = e_n \in (c_0)^*$ tenemos $\varphi(s_k)$=1 para todo $k \geq j$ y luego concluimos que $x_j = \varphi(s) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto tendríamos que (1,1,1,…)=s$\in c_0$, lo que es un absurdo.

Definición 2.7. diremos que un espacio de Banach X contiene una copia de c_0 si existe un homeomorfismo lineal entre c_0 y un subespacio de X.

En los ejemplos 2.2 y 2.4 se observa que cualquier espacio de Banach que contenga una copia de c_0 existen una serie que converge incondicionalmente mas no absolutamente es una sucesión débilmente 1-sumable que tiene una serie fuertemente divergente. El Teorema de Bessaga – Pelczynski nos garantiza que cuando el espacio de Banach no contiene una copia de c_0 en toda sucesión débilmente 1-sumable será incondicionalmente sumable.

Lema 2.1. Sean X un espacio de Banach y $(x_n) \in l_1^w(X)$. Entonces existe una constante A>0 tal que $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)| \leq A\|\varphi\|$ para toda $\varphi \in X^*$.

Demostración. Sea $(x_n) \in l_1^w(X)$ y considere (e_n) la sucesión canónica de l_1. Definimos para todo k$\in \mathbb{N}$ los operadores $S_k\colon X^* \to l_1$ por $S_k(\varphi) = \sum_{n=1}^{k} \varphi(x_n)\, e_n$ para toda $\varphi \in X^*$. Es fácil ver que $(S_k) \subset \mathcal{L}(X^*, l_1)$. Como $(x_n) \in l_1^w(X)$, tenemos que $\sup_k\|S_k(\varphi)\|_1$. es finito para todo $\varphi \in X^*$.Como X^* es un espacio de Banach, por el teorema de Banach-Steinhaus (teorema 1.5), tenemos que $\sup_k \|S_k\|$ es finito. A sí que tomando A=$\sup_k \|S_k\|$, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)| \leq A\|\varphi\|$ para toda $\varphi \in X^*$.

Teorema 2.6. (Teorema de Bessaga-Pelczynshi)

Sea X un espacio de Banach . Son equivalentes:

a) X no contiene una copia de c_0
b) Toda sucesión en $l_1^w(X)$ tiene una serie débilmente convergente.
c) Toda sucesión en $l_1^w(X)$ es incondicionalmente sumable.
d) Toda sucesión en $l_1^w(X)$ tiene una serie débilmente convergente.
e) Toda sucesión en $l_1^w(X)$ tiene una serie convergente.

Demostración . (d)⇒ (c)

Supongamos que $(x_n) \in l_1^w(X)$ y sea una sucesión de escalares $(\alpha_n) \subset \{-1,1\}$. Entonces para $\varphi \in X^*$ tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(\alpha_n x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|$ converge. Luego, $(\alpha_n x_n) \in l_1^w(X)$ y por hipótesis, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge. Como la sucesión $(\alpha_n) \subset \{-1,1\}$ fue elegido arbitrariamente, tenemos por el teorema 2.5 que (x_n) es incondicionalmente sumable.

$(c) \Rightarrow (b)$

Sea $(x_n) \in l_1^w(X)$. Por hipótesis, (x_n) es incondicionalmente sumable, donde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge y por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es débilmente convergente.

$(b) \Rightarrow (a)$

Se sigue del hecho que todo espacio de Banach que contiene una copia de c_0 tiene una sucesión débilmente 1-sumable que tiene una serie débilmente divergente (ver ejemplo 2.4)

$(a) \Rightarrow (d)$

Supongamos que exista en X una sucesión (x_n) débilmente 1-sumable tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ diverge. Por el criterio de Cauchy, existen ϵ_0 y números naturales $n_{k+1} > n_k + 1$ tal que $\left\|\sum_{i=n_{k+1}}^{n_{k+1}} x_i \right\| \geq \epsilon_0$ para todo k$\in \mathbb{N}$. Consideremos la sucesión (y_k) tal que $y_k = \sum_{i=n_{k+1}}^{n_{k+1}} x_i$ para todo k$\in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que $\inf_k \|y_k\| = \delta \geq \epsilon_0 > 0$. Además , $(y_k) \in l_1^w(X)$. De hecho. Si $\varphi \in X^*$ tenemos que si p$\in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{p} |\varphi(y_k)| = \sum_{k=1}^{p} \left| \sum_{i=n_{k+1}}^{n_{k+1}} \varphi(x_i) \right| \leq \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=n_{k+1}}^{n_{k+1}} |\varphi(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{n_{p+1}} |\varphi(x_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|$$

Y haciendo p$\to \infty$ tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(y_k)|$ converge pues a (x_i) y débilmente 1-sumable. Consecuentemente $y_k \xrightarrow{w} 0$ y, como $\inf_k \|y_k\| > 0$, por el teorema 1.9 , podemos extraer de (y_k) una subsucesión básica (z_k) es débilmente 1-sumable donde, por el lema 2.1, existe una constante A>0 tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(z_k)| \leq A\|\varphi\|$ para todo $\varphi \in X^*$. Sea (e_k) la sucesión canónica de c_0 y considere $T: Lin[e_k] \to \overline{Lin}[z_k] \subset X$ definida por T$e_k = z_k$ para todo k$\in \mathbb{N}$ .Por definición >Entonces, por el teorema de Hahn –Banach (corolario 1.3) tenemos

$$\|Tx\| = \|\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z_k\| = \sup_{\varphi \in S_{X^*}} |\varphi(\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z_k)| = \sup_{\varphi \in S_{X^*}} |\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi(z_k)| \leq$$

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \sup_{\varphi \in S_{X^*}} \textstyle\sum_{k=1}^{n} |\varphi(z_k)| \leq A \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| = A\|x\|_\infty ,$$

Y esto vale para todo x$\in$ $Lin[e_k]$, donde T es continua. Por lo tanto, tenemos que T es un operador lineal continuo y $\overline{Lin}[z_k]$ es un espacio de Banach y de allí la proposición 1.5 nos garantiza que existe un operador lineal continuo $\tilde{T}: \overline{Lin}\ [e_k] \to \overline{Lin}[z_k]$ que extiende T. Veamos que $\tilde{T}^{-1}$ es continua. En efecto, sea $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z_k \in \overline{Lin}[z_k]$, entonces como (z_k) es una subsucesión básica existe una constante M >0 tal que $\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z_k\| \geq M \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \, \|z_k\|$ donde sigue que $\|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z_k\| \geq \ M \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \min_k \|z_k\| \geq M\delta \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k|$. Observando que T($\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$)= $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k$, se sigue que T($\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$) $\geq M\delta \|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|_\infty$. Recordando que $\tilde{T}$ es una extensión continua de T , tomando el limite cuando n $\to \infty$ en la desigualdad anterior tenemos que $\left\|\tilde{T}\ (\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k)\ \right\| \geq M\delta \|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|_\infty$ y esto muestra que T es un homeomorfismo lineal . Observando que el hecho de que la norma en c_0 del espacio generado por la sucesión canonica y el propio c_0, tenemos que X contiene una copia de c_0, y esto contradice a nuestra hipótesis.

Observación 2.5. Sea X un espacio de Banach y K$\subset X^*$. Supongamos que para todo $x \in X$ entonces $\|x\| = \sup_{\varphi \in K} |\varphi(x)|$. Si $(x_n) \in l_p^w(X)$ entonces

$$\|x_n\|_p^w = \sup_{\varphi\in K}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

En efecto por la definición tenemos

$$\|x_n\|_p^w = \sup_{\varphi\in K}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi\in B_{X^*}}\sup_{m}\left(\sum_{n=1}^{m}|\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{m}\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{n=1}^{m}|\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Entonces, $\|(x_n)\|_p^w{=}\sup\limits_{m}\sup\limits_{\varphi\in B_{X^*}}\|\varphi(x_n)_{n=1}^m\|_p$

Por el corolario 1.3 y el ejemplo 1.3, si $\varphi(x_n)_{n=1}^m \in l_p^m$

$$\|\varphi(x_n)_{n=1}^m\|_p = \sup_{\alpha\in B_{(l_p^m)^*}}\left|\alpha[(\varphi(x_n))]\right| = \sup_{(\alpha_n)\in B_{(l_p^m)^*}}\left|\sum_{n=1}^{m}\alpha_n\varphi(x_n)\right|$$

Por lo tanto , $\|(x_n)\|_{p=}^w \sup\limits_{m}\sup\limits_{\varphi\in B_{X^*}}\sup\limits_{(\alpha_n)\in B_{(l_p^m)^*}}|\sum_{n=1}^m\alpha_n\varphi(x_n)| =$

$\sup\limits_{m}\sup\limits_{(\alpha_n)\in B_{(l_p^m)^*}}\sup\limits_{\varphi\in B_{X^*}}|\varphi(\sum_{n=1}^m\alpha_n x_n)|{=}\sup\limits_{m}\sup\limits_{(\alpha_n)\in B_{(l_p^m)^*}}\|\sum_{n=1}^m\alpha_n x_n\| =$

$\sup\limits_{m}\sup\limits_{(\alpha_n)\in B_{(l_p^m)^*}}\sup\limits_{\varphi\in K}|\varphi(\sum_{n=1}^m\alpha_n x_n)| = \sup\limits_{m}\sup\limits_{\varphi\in K}\sup\limits_{(\alpha_n)\in B_{(l_p^m)^*}}|\sum_{n=1}^m\alpha_n\varphi(x_n)| = \sup\limits_{m}\|\varphi(x_n)_{n=1}^m\|_p =$

$\sup\limits_{\varphi\in K}\sup\limits_{m}(\sum_{n=1}^m|\varphi(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} {=}\sup\limits_{\varphi\in K}(\sum_{n=1}^\infty|\varphi(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}}$

Ya vimos que $l_p(X) \subset l_p^m(X)$. La igualdad no vale en general, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.5. Sea X= c_0 y $x_n = \frac{1}{n}e_n$, para todo n ∈ ℕ.

Tenemos $x_n = (x_{n,k})_{k=1}^\infty$ donde

$$x_{n,k} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \dfrac{1}{n}, & k = n \end{cases}$$

Donde $\|x_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ para todo n ∈ ℕ , luego $\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|_\infty$ diverge así que $(x_n) \notin\ l_1(c_0)\ Veamos$ que $(x_n) \in l_1^w(c_0)$. Para esto tenemos que $l_1 = (c_0)$ *(ejemplo 1.1.)

Luego, para todo $\xi = (\xi_k) \in l_1$ tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi(x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_k x_{n.k} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\xi_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| < \infty.$$

Además $l_1(c_0) \subsetneq l_1^w(c_0)$

Aun mas, $l_p(c_0) \subsetneq l_p^w(c_0)$ parea p>1 . Basta tomar para todo n $\in \mathbb{N}$ la sucesión $x_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} e_n$ y usando el mismo argumento utilizado anteriormente , recordando que $l_1 \subsetneq l_p$.

Pero en el ejemplo anterior, tenemos que no siempre $l_p(X) = l_p^w(X)$ para un espacio de Banach X cualquiera y $1 \leq p \leq \infty$. Mostraremos en el capítulo 3 que una condición necesaria y suficiente para que esto ocurra es que la dimensión de X es finita.

Capítulo 3

El Teorema de Dvoretzky-Rogers

En este capítulo, a menos que se indique explícitamente lo contrario, nuestros espacios serán siempre espacios de Banach. A fin de probar el teorema de Dvoretzky-Rogers, definiremos los operadores p-sumas, daremos ejemplos de operadores y probaremos algunas caracterizaciones de estos operadores así como también el teorema de dominación y factorización de Pietsch. Asimismo, probaremos que todo operador p-suma es completamente continuo, es decir toma sucesiones débilmente convergente en sucesiones convergentes en la norma. Por fin , definiremos los operadores compacto y débilmente compactos, veremos que todo operador p-suma y débilmente compactos donde concluiremos que la composición de operadores p-suma y compacto. . Además , mostraremos que el operador identidad en X será p-suma si, y solamente si X tiene dimensión finita. Usando este resultado en conjunto con el teorema de Bessaga-Pelczynski, probaremos el teorema de Dvoretzky-Rogers.

3.1 Operadores p-sumantes

Definición 3.1. un operador S:$X \to Y$ es absolutamente p-sumante (o , simplemente, p-sumante) si $(Sx_n) \in l_p(Y)$ siempre que $(x_n) \in l_p^m(X)$.

Denotamos por $\prod_p(X,Y)$ o espacio de operadores p-sumantes de X en Y

Si X=c_0 , en el ejemplo 2.5 mostramos que $l_p(c_0) \subsetneq l_p^w(c_0)$ por lo tanto el operador identidad id: :$X \to X$ no es p-sumante. Observe que la dimensión de X es finita . Mas adelante se probará que un operador identidad es p-sumante si y solamente si la dimensión de X es finita.

Proposición 3.1. Todo operador p-sumante de X en Y es continuo.

Demostración: En efecto , sea S:$X \to Y$ un operdador p-sumante y supongamos, por absurdo, que S no es continuo, es decir , dado n ∈ ℕ existe $x_n \in X, \|x_n\| \leq 1$ tal que $\|Sx_n\| > 2^n$.

Mas $\left(\frac{x_n}{2^n}\right) \in l_p(X)$ pues $\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{x_n}{2^n}\right\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$,

Y como $l_p(X) \subset l_p^m(X)$ tenemos $\left(\frac{x_n}{2^n}\right) \in l_p^m(X)$.

Por otro lado (S$\left(\frac{x_n}{2^n}\right)$) $= \left(\frac{Sx_n}{2^n}\right) \notin l_p(Y)$, pues lo contrario $\frac{Sx_n}{2^n} \to 0$, cuando n→ ∞ donde existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\frac{Sx_n}{2^n}\right\| < 1$ para todo $n \geq n_0$ lo que contradice la construcción de (x_n). Entonces S no es p-sumante, lo que contradice la hipótesis.

Lema 3.1. Para toda S∈ $\prod_p(X,Y)$ la aplicación

$\sum_S$: $l_p^w(X) \to l_p(Y)$

$(x_n) \mapsto (Sx_n)$

Es lineal y continua.

Demostración. Sea S∈ $\prod_p(X,Y)$ cualquier . La aplicación $\sum_S$ está bien definida pues S es p-sumante.Es fácil verificar que $\sum_S$ es lineal. Asimismo, basta mostrar la continuidad de $\sum_S$.

Sea $(z^k)_k \subset l_p^w(X)$ una sucesión convergente en $l_p^w(X)$ tal que $\sum_S z^k)_k$ converge $l_p(Y)$.

Sean z=$\lim_{k\to\infty} z^k \in l_p^w(X)$ e y $=\lim_{k\to\infty} \sum_S z^k \in l_p(Y)$. Mostraremos que y=$\sum_S z^k$ donde, por el teorema del grafico cerrado (teorema 1.7), $\sum_S$ es continua. Como z, $z^k \in l_p^w(X)$ para todo k$\in \mathbb{N}$ entonces z=(z_n) y $z^k = ({z_n}^k)_n$ para todo k$\in \mathbb{N}$. luego , dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si k$\geq k_0$ tenemos $\|z^k - z\|_p^w < \epsilon$. Dado $\varphi \in B_{X^*}$, para todo n$\in \mathbb{N}$ tenemos

$$|\varphi({z_n}^k - z_n)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi({z_n}^k - z_n)|^p\right)^{1/p}$$

Y tomando el supremo cuando $\varphi \in B_{X^*}$ tenemos

$$\sup_{\varphi\in B_{X^*}} |\varphi({z_n}^k - z_n)| \leq \|z^k - z\|_p^w.$$

Además , para cualquier n$\in \mathbb{N}$ fijado , por el corolario 1.3, obtenemos

$$\|{z_n}^k - z_n\| \leq \|z^k - z\|_p^w < \epsilon$$

Para todo k$\geq k_0$. Esto es , fijando n$\in \mathbb{N}$ tenemos $\lim_{k\to\infty} {z_n}^k = z_n$ en X, y como S es continua, pues si p-sumante, $\lim_{k\to\infty} S\, {z_n}^k = Sz_n$ en Y para todo n$\in \mathbb{N}$. Ahora como y$\in l_p(Y)$, tenemos y=(y_n). Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que cualquier que sea k$\geq k_1$ tenemos que $\left\|\sum_S z^k - y\right\|_p = \|(S\, {z_n}^k)_n - (y_n)_n\|_p < \epsilon$. Mas $\|.\|_p^w \leq \|.\|_p$ en $l_p(Y)$, donde para todo k$\geq k_1$ tenemos $\|(S\, {z_n}^k)_n - (y_n)_n\|_p^w < \epsilon$. Usando el mismo argumento usando para mostrar que $\lim_{k\to\infty} {z_n}^k = z_n$ en X, obtenemos que $\lim_{k\to\infty} S\, {z_n}^k = y_n$ en Y para todo n$\in \mathbb{N}$. de la unicidad de limites $Sz_n = y_n$ para todo n$\in \mathbb{N}$ y por lo tanto y=$(y_n) = (Sz_n)$ $=\sum z_S$.

Proposición 3.2. Un operador S:$X \to Y$ es p-sumante si y solamente si existe $\rho \geq 0$ tal que para todo conjunto finito $\{x_1,\ldots.. x_n\} \subset X$ vale la desigualdad

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|Sx_i\|^p\right)^{1/p} \leq \rho \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (*)$$

En este caso, $\|\sum_S\|$ es menor $\rho \geq 0$ que satisface (*)

Demostración. Por el lema 3.1, $\sum_S$ es lineal y continua, y por lo tanto $\|(Sx_n)\|_p \leq \left\|\sum_S\right\| \|(x_n)\|_p^w$ si $(x_n) \in l_p^w(X)$. Consecuentemente, dado cualquier subconjunto finito $\{x_1,\ldots.. x_n\} \subset X$, definido x=(ξ_n) donde

$$\xi_n = \begin{cases} x_n, n = 1, \ldots., k \\ 0, \quad n > k \end{cases}$$

Tenemos que

$(\xi_n) \in l_p^w(X)$ además

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|Sx_i\|^p\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_S\right\| \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

Donde satisface (*)

Recíprocamente, supongamos que existe $\rho \geq 0$ tal que para todo conjunto finito $\{x_1,\ldots.. x_n\}\ de\ X$ vale la desigualdad (*). Sea $(x_n) \in l_p^w(X)$. Tenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|Sx_i\|^p\right)^{1/p}$$

$$= \sup_k \left(\sum_{i=1}^{k} \|Sx_i\|^p\right)$$

$$\leq \rho \sup_k \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \rho \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \sup_k \left(\sum_{i=1}^{k} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

Donde sigue que $\|(Sx_i)\|_p \leq \rho \|(x_i)\|_p^w < \infty$ pues $(x_n) \in l_p^w(X)$ .Entonces por la definición 3.1 tenemos que S es p-sumante.

Por (1), $\left\|\sum \quad _S\right\| \in \{\,\rho \geq 0; \rho\ satisface\ (*)\}$, luego $\left\|\sum \quad _S\right\| \geq \inf\{\,\rho \geq 0; \rho\ satisface\ (*)\}$.
Por otro lado, si $\rho\ satisface$ (*), tenemos $\|(Sx_i)\|_p \leq \rho\|(x_i)\|_p^w$ para todo $(x_n) \in\ l_p^w(X)$ donde $\left\|\sum \quad _S\right\| \leq \rho$ y por lo tanto

$\left\|\sum \quad _S\right\| \leq \inf\{\,\rho \geq 0; \rho\ satisface\ (*)\}$.

Se sigue que $\left\|\sum \quad _S\right\| = \inf\{\,\rho \geq 0; \rho\ satisface\ (*)\}$.

Iremos denotar el número $\left\|\sum \quad _S\right\|$ por $\prod \quad _p(S)$. Además la desigualdad (*) puede ser escrita del siguiente modo:

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\|Sx_i\|^p\right)^{1/p} \leq \prod \quad _p(S) \sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Donde $\{x_1, \ldots.. x_n\}\ \subset X$ es un subconjunto finito de X.

Observacion 3.1. $\|S\| = \prod \quad _p(S)$.

Ejemplo 3.1. Sean K un espacio de Hausdorff compacto, μ una medida de Borel regular sobre K y $1 \leq p < \infty$. Para cada $\varphi \in L^p(\mu)$ podemos definir un "operador multiplicación" $M_\varphi\colon C(K) \to L^p(\mu)$ definido por $M_\varphi(f) = f\varphi$ tal que M_φ es un operador p-sumante y $\prod \quad _p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p$.
En efecto:

Es claro que M_φ es lineal. Definimos para cada w$\in K$ y la aplicación $\delta_w\colon C(K) \to \mathbb{C}$ tal que $\delta_w(f) = f(w)$. Entonces δ_w está bien definida .Además es claro que es lineal y como w$\in K$, tenemos $|\delta_w(f)| = |f(w)| \leq \sup_{x\in K}|f(x)| = \|f\|_K$. Esto implica la continuidad de δ_w.

Además, tenemos que $\delta_w \in C(K)^*$ para todo w$\in K$ .Sea D=$\{\delta_w : w\ \in K\} \subset\ C(K)^*$ y $f_1, \ldots \ldots . f_m \in\ C(K)$. Observe que $\|f\|_K = \sup_{w\in K}|\delta_w(f)| = \sup_{\psi\in K}|\psi(f)|$ y ,por la observación 2.5 , tenemos

$$\|(f_i)_{i=1}^m\|_p^w = \sup_{\psi\in D}\left(\sum_{i=1}^{m}|\psi(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\psi\in K}\left(\sum_{i=1}^{m}|\delta_w(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\psi\in K}\left(\sum_{i=1}^{m}|f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

De ahí

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|M_{\varphi}f_i\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{m}\int_K |f_i\varphi|^p\, du\right)^{\frac{1}{p}} \leq [\int_K |\varphi|^p(\sup_{w\in K}\sum_{i=1}^{m}|f_i(w)|^p)du]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{w\in K}\left(\sum_{i=1}^{m}|f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}}(\int_K |\varphi|^p du)^{\frac{1}{p}} = \|(f_i)_{i=1}^{m}\|_p^w\|\varphi\|_p$$

$$= \|\varphi\|_p \sup_{\psi\in B_{C(K)^*}}\left(\sum_{i=1}^{m}|\psi(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Por la proposición anterior, tenemos que M_{φ} es p-sumante y $\prod\ _p(M_{\varphi}) \leq \|\varphi\|_p$. Por otro lado, por la observación 3.1 $\prod\ _p(M_{\varphi}) \geq \left\|M_{\varphi}\right\|_p$ y sigue de allí que $\prod\ _p(M_{\varphi}) \geq \left\|M_{\varphi}1\right\|_p = \|\varphi\|_p$. Por lo tanto , M_{φ} es p-sumante y $\prod\ _p(M_{\varphi}) = \|\varphi\|_p$.

Ejemplo 3.2. Sean K y μ con las condiciones del ejemplo anterior. Sea $1 \leq p < \infty$. El operador inclusión $J_p: C(K) \to L^p(\mu)$ es p-sumante .En efecto, tomando φ en el ejemplo 3.1, tenemos que $\varphi \in L^p(\mu)$y $M_1 = J_p$. Además tenemos $\prod\ _p(J_p) = (\mu(K))^{1/p}$

Proposición 3.3. Para todo $1 \leq p < \infty$ tenemos

a) Si $T \in \mathcal{L}(X,Y) y\ S \in \prod\ _p(Y,Z)$ entonces $ST\ \in \prod\ _p(X,Z)$ donde $ST = SoT$.
b) Si $R \in \mathcal{L}(Y,Z) y\ S \in \prod\ _p(X,Y)$ entonces $RS\ \in \prod\ _p(X,Z)$ donde $RS = RoS$.

Demostración a) Si T$\equiv$ 0 , entonces es afirmativa se verifica trivialmente, Supongamos que $T \neq 0$. Sea $\{x_1,\ldots.. x_k\} \subset X$ un subconjunto finito. Entonces $\{Tx_1,\ldots.. Tx_k\} \subset Y$ es un subconjunto finito de Y es por la proposición 3.2, como S es p-sumante, existe $\rho \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{k}\|ST(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq\ \rho \sup_{\varphi\in B_{Y^*}}\left(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(Tx_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas por la definición 1.9, $\varphi(Tx_n) = T^*(\varphi)(x_n)$, donde

$$\left(\sum_{n=1}^{k}\|ST(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq\ \rho \sup_{\varphi\in B_{Y^*}}\left(\sum_{i=1}^{k}|T^*(\varphi)(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho\|T^*\| \sup_{\varphi\in B_{Y^*}}\left(\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{T^*}{\|T^*\|}(\varphi)(x_n)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Como $\frac{T^*(\varphi)}{\|T^*\|} \in X^*$ y $\left\|\frac{T^*(\varphi)}{\|T^*\|}\right\| \leq 1$ si $\varphi \in B_{Y^*}$, tenemos que $\frac{T^*(\varphi)}{\|T^*\|} \in B_{Y^*}$ si $\varphi \in B_{Y^*}$, De allí

$$\sup_{\varphi \in B_{Y^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} \left| \frac{T^*}{\|T^*\|}(\varphi)(x_n) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Y por lo tanto

$\left(\sum_{n=1}^{k} \|ST(x_n)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho_1 \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Donde $\rho_1 = \rho\|T^*\|$. Donde se sigue de la proposición 3.2 que ST $\in \prod_p (X, Z)$.

Demostración parte b) Sean $\{x_1, \ldots.. x_k\} \subset X$ un subconjunto finito. Luego $\{Sx_1, \ldots.. Sx_k\} \subset Y$ es finito. Como $R \in \mathcal{L}$(Y,Z) tenemos que

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \|RS(x_n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|R\| \left(\sum_{n=1}^{k} \|S(x_n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Como S es p-sumante, por la proposición 3.2, existe $\rho \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \|S(x_n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \rho \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Donde sigue que

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \|RS(x_n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|R\|\rho \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Luego, por la proposición 3.2 tenemos que RS $\in \prod_p (X, Z)$.

Proposición 3.4. Para todo $1 \leq p < \infty$ tenemos:

a) $(\prod_p (X, Y), \prod_p (.)$ Es un espacio de Banach.
b) Si S $\in \prod_p (E, F)$, $R \in \mathcal{L}(F, Y)$ y $T \in \mathcal{L}(X, E)$ entonces RST$\in \prod_p (X, Y)$. Además, $\prod_p (RST) \leq \|R\| \prod_p (S)\|T\|$.

Demostración a) Es fácil verificar que $\prod_p (.)$ Es una norma en $\prod_p (X,Y)$. Veamos que $(\prod_p (X,Y), \prod_p (.))$ es completo . En efecto sea $(S_n)\subset \prod_p (X,Y)$ una sucesión de Cauchy, esto es , dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si n, m $\geq n_0$ entonces

$$\prod\nolimits_p (S_n - S_m) < \epsilon \qquad (1)$$

Como $\|S_n - S_m\| \leq \prod_p (S_n - S_m)$ si n, m$\in \mathbb{N}$, tenemos que (S_n) es una sucesión de cauchy en $\mathcal{L}(X,Y)$, que es completo , pues Y es un espacio de Banach y, por lo tanto, existe S$\in$ $\mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\|S_n - S\| \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. Como $S_n - S_m$ es p-sumante para todo n, m $\in \mathbb{N}$, dado cualquier $\{x_1, \ldots . x_k\} \subset X$ finito tenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|S_n x_i - S_m x_i\|^p\right)^{1/p} \leq \prod\nolimits_p (S_n - S_m) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Luego , para todos n, m$\geq n_0$, usando (1) obtenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|S_n x_i - S_m x_i\|^p\right)^{1/p} < \epsilon \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Mas $\|S_n - S\| \to 0$, donde $S_n(x) \to S(x)$ para todo x$\in X$ *cuando* $n \to \infty$, luego, para $1 \leq i \leq k$ tenemos que $S_n(x_i) \to S(x_i)$ cuando $n \to \infty$. Manteniendo m$\geq n_0$ fijo y cuando $n \to \infty$ a la desigualdad mencionada , tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|S_n x_i - S_m x_i\|^p\right)^{1/p} \leq \epsilon \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Y por la proposición 3.2 tenemos S_m-S$\in$ $\prod_p (X,Y)$ y $\prod_p (S_m - S) \leq \epsilon$ para todo m$\geq n_0$. Sigue de allí que S$\in$ $\prod_p (X,Y)$ y $\lim_{m\to\infty} S_m = S$ en $\prod_p (X,Y)$. Por lo tanto probamos (a).

(b) Como consecuencia directa de la proposición 3.3 tenemos que RST $\in \prod_p (X,Y)$. Por lo tanto nos resta verificar que $\in \prod_p (RST) \leq \|R\| \prod_p (S)\|T\|$. Si T $\equiv 0$, la desigualdad es trivialmente satisface. Supongamos entonces T$\neq 0$. Sea $\{x_1,\ldots.. x_k\} \subset X$ finito. Tenemos que $R \in \mathcal{L}(F,Y)$,

Donde

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \|RST(x_I)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|R\| \left(\sum_{n=1}^{k} \|ST(x_I)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Como S $\in \prod_p (E,F)$,entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \|RS(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \prod\nolimits_p (S) \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(Tx_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mas $\varphi(Tx_i) = T^*(\varphi)(x_i)$ para todo i=1,2,3,…,k y de allí , como $\|T^*\| = \|T\|$, obtenemos como una demostración de la proposición 3.3, la desigualdad

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \|ST(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \prod\nolimits_p (S) \|T\| \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$donde$$

$$\left(\sum_{n=1}^{k} \|RST(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \prod\nolimits_p (S) \|T\| \|R\| \sup_{\varphi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k} |\psi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Y , por lo tanto, por la definición de $\prod_p (RST)$, Tenemos $\prod_p (RST) \leq \|R\| \prod_p (S)\|T\|$

Proposición 3.5. Si $1 \leq p < \infty$, entonces $\prod_p (X,Y) \subset \prod_p (X,Y)$ y $\prod_q (.) \leq \prod_p (.)$ en $\prod_p (X,Y)$.

Demostración. Sea r$r > 0$ $tal\ que$ $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.

Observe que $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$ si y solo si $\frac{pq}{r}$+p=q si y solo si $\frac{1}{r/p}+\frac{1}{q/p}=1$. Sean S$\in \prod_p(X,Y)$ y $\{x_1,\ldots.. x_k\}\subset X$ un subconjunto finito. Definimos λ_i=$\|Sx_i\|^{\frac{q}{r}}$ para todo $i=1,2,\ldots,k$ tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\|Sx_i\|^q\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{k}\|Sx_i\|^{\frac{pq}{r}+p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k}\|Sx_i\|^p\|Sx_i\|^{\frac{pq}{r}}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{k}\|Sx_i\|^p{\lambda_i}^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{k}\|S(\lambda_i x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Como S es p-sumante

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\|S(\lambda_i x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\prod\nolimits_p(S)\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(\lambda_i x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Luego $\left(\sum_{i=1}^{k}\|Sx_i\|^q\right)^{\frac{1}{p}}\leq\prod_p(S)\sup\limits_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(\lambda_i x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. (1)

Tomando $\varphi\in B_{X^*}$ y usando la desigualdad de Holder(proposición 1.1) para los exponentes $\frac{r}{p},\frac{q}{p}$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k}{\lambda_i}^p|\varphi(x_i)|^p\leq(\sum_{i=1}^{k}{\lambda_i}^r)^{p/r}(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(x_i)|^q)^{p/r}$$

Además $\left(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(\lambda_i x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq(\sum_{i=1}^{k}{\lambda_i}^r)^{1/r}(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(x_i)|^q)^{1/q}$

Y tomando el supremo cuando $\varphi\in B_{X^*}$ en esta desigualdad, obtenemos

$$\sup_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(\lambda_i x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq(\sum_{i=1}^{k}{\lambda_i}^r)^{1/r}\sup_{\varphi\in B_{X^*}}(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(x_i)|^q)^{1/q}$$

De (1) tenemos entonces $\left(\sum_{i=1}^{k}\|Sx_i\|^q\right)^{\frac{1}{p}}\leq\prod_p(S)\left(\sum_{i=1}^{k}\|Sx_i\|^q\right)^{\frac{1}{r}}\sup\limits_{\varphi\in B_{X^*}}\left(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Donde $\left(\sum_{i=1}^{k}\|Sx_i\|^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \prod_p (S) \sup_{\varphi\in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^{k}|\varphi(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

Y por la proposición 3.2 esto nos dice que S∈ $\prod_q (X,Y)$ y $\prod_q (S) \leq \prod_p (S)$. Como S es tomado arbitrariamente en $\prod_p (X,Y)$, tenemos que $\prod_p (X,Y) \subset \prod_q (X,Y)$ y $\prod_q (S) \leq \prod_p (S)$ para todo S∈ $\prod_p (X,Y)$.

Observación 3.2. la proposición anterior también nos menciona que la inclusión

$$id: (\prod_p (X,Y), \prod_p (.)) \to (\prod_q (X,Y), \prod_q (.))$$

Es continua.

Ejemplo 3.3. Sea (X, $\mathcal{A},\mu$) un espacio de medida tal que $\mu(X) = 1$ (0 sea un espacio de mediada de probabilidad). Dado $1 \leq p < \infty$,cada $\varphi \in L^p(\mu)$ induce un “operador multiplicación” .

$M_\varphi: L^\infty(\mu) \to L^p(\mu)$

$f \mapsto f\varphi$

Tal que $M_\varphi\ es\ p - sumante$ y $\prod_p (M_\varphi) = \|\varphi\|_p$. En efecto:

Sean $f_1, \dots, f_m \in L^\infty(\mu)$ y tomamos p^*tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*}$=1 si p>1 (o $p^* = \infty\ si\ p = 1$).

Definimos $u: \ell_{p^*}^m \to L^\infty(\mu)$ tal que $u(x) = u_x = \sum_{i=1}^m x_i f_i$ para todo x=$(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p^*}^m$, donde $\ell_{p^*}^m$ esta definido en el ejemplo 1.3. Veamos fácilmente que u es lineal. Sean $B_{p^*} = B_{\ell_{p^*}^m} = B_{(\ell_{p^*}^m)^*}$ y E=$L^\infty(\mu)$. Para todo T∈ B_{E^*} , tenemos $(Tf_i)_{i=1}^m \in \ell_p^m$ y en este caso , usando el corolario 1.3, tenemos

$$\|(Tf_i)_{i=1}^m\|_p = \sup_{\tilde{x}\in B_{p^*}} |\tilde{x}((Tf_i)_{i=1}^m| = \sup_{(x_i)_{i=1}^m \in B_{p^*}} |\sum_{i=1}^m x_i Tf_i| = \sup_{x\in B_{p^*}} |T(u(x))|.$$

De allí, tomando un supremo cuando T∈ B_{E^*}.

$$\sup_{\tilde{x}\in B_{p^*}} \|(Tf_i)_{i=1}^m\|_p = \sup_{T\in B_{E^*}} \sup_{x\in B_{p^*}} |T(u(x))| = \sup_{x\in B_{p^*}} \sup_{T\in B_{E^*}} |T(u(x))| = \sup_{x\in B_{p^*}} \|u(x)\|_\infty$$

Por otro lado , $\sup_{T\in B_{E^*}} \|(Tf_i)_{i=1}^m\|_p = \sup_{T\in B_{E^*}} (\sum_{i=1}^m |Tf_i|^p)^{1/p} = \|(f_i)_{i=1}^m\|_p^w$. Luego

$\|u\| = \sup_{x\in B_{p^*}} \|u(x)\|_\infty = \|(f_i)_{i=1}^m\|_p^w$. (*)

Fijemos x=$(x_i)_{i=1}^\infty \in B_{p^*}$ y sea (c_n) una sucesión de números reales tal que $c_n \geq \|u(x)\|_\infty$ y $c_n \to \|u(x)\|_\infty$. Considere $N_n(x) = \{v \in X; u_x(v) > c_n\}$ para todo n$\in \mathbb{N}$. es fácil verificar que $N_n(x) \in \mathcal{A}$ y $\mu(N_n(x)) = 0$ para todo n$\in \mathbb{N}$ .Sea $N_x = \bigcup_{n=1}^\infty N_n(x)$. Tenemos $N_n(x) \in \mathcal{A}$ y $\mu(N_x) = 0$ .Ademas , para todo $v \in X \setminus N_x$ tenemos $|u_x(v)| \leq \|u_x\|_\infty$, por lo contrario, existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_x\|_\infty \leq c_{n_0} < |u_x(v)|$, donde tendríamos $v \in N_{n_0}(x) \subset N_x$, o que no puede ocurrir. Como $\ell_{p^*}^m$ es un espacio separable, pues es homeomorfo a $\mathbb{K}^m$, podemos considerar un conjunto $D \subset B_{p^*}$. Sea N=$\bigcup_{x\in D} N_x$. Tenemos que N$\in$ $\mathcal{A}$ y $\mu(N) = 0$. Además vale $|u_x(v)| \leq \|u_x\|_\infty$ para todo $v \in X \setminus$ N y x$\in$ D $(**)$. Así , por $\overline{D} = B_{p^*}$, (**) y (*), tenemos

$$\sup_{v\in X\setminus N} \left(\sum_{i=1}^m |f_i(v)|^p\right)^{1/p} = \sup_{v\in X\setminus N} \|(f_i(v))_{i=1}^m\|_p$$

$$= \sup_{v\in X\setminus N} \sup_{x\in B_{p^*}} \left|x((f_i(v))_{i=1}^m)\right| = \sup_{v\in X\setminus N} \sup_{x\in B_{p^*}} |u_x(v)| = \sup_{v\in X\setminus N} \sup_{x\in D} |u_x(v)| = \sup_{x\in D} \sup_{v\in X\setminus N} |u_x(v)| \leq \sup_{x\in D} \|u_x\|_\infty$$

$$= \sup_{x\in B_{p^*}} \|u_x\|_\infty = \|(f_i)_{i=1}^m\|_p^w$$

Por lo tanto

$$\left(\sum_{i=1}^m \left\|M_\varphi(f_i)\right\|_p^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^m \int_X |f_i\varphi|^p du\right)^{1/p} = \left(\int_{X\setminus N} \sum_{i=1}^m |f_i\varphi|^p du\right)^{1/p}$$

$$\leq \left[\int_{X\setminus N} |\varphi|^p (\sup_{v\in X\setminus N} \sum_{i=1}^m |f_i(v)|^p) du\right]^{\frac{1}{p}} = \left[(\sup_{v\in X\setminus N} \sum_{i=1}^m |f_i(v)|^p)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{X\setminus N} |\varphi|^p du\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left[(\sup_{v\in X\setminus N} \sum_{i=1}^m |f_i(v)|^p)\right]^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_p \|(f_i)_{i=1}^m\|_p^w$$

Acabamos de mostrar que para $f_1, \dots \dots f_m \in L^\infty(\mu)$ tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|M_{\varphi}(f_i)\right\|_p^p\right)^{1/p} \leq \|\varphi\|_p \sup_{T\in B_{E^*}}\left(\sum_{i=1}^{m}|Tf_i|^p\right)^{1/p}.$$

Luego, M_φ es p-sumante y $\prod_p(M_\varphi) \leq \|\varphi\|_p$. Mas, por otro lado $\prod_p(M_\varphi) \geq \left\|M_\varphi\right\|$ donde se sigue que $\prod_p(M_\varphi) = \|\varphi\|_p$.

Ejemplo 3.4. Las condiciones del ejemplo anterior, el operador inclusión $I_p: L^\infty(\mu) \to L^p(\mu)$ es p-sumante. En efecto, tomando $\varphi = 1$ en el ejemplo 3.3, tenemos que $\varphi \in L^p(\mu)$ y $M_1 = I_p$.

Además, tenemos $\prod_p(I_p) = 1$.

Teorema 3.1. (Teorema de dominación de Pietsch)

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Tenemos que un operador $S: X \to Y$ es p-sumante si y solamente si existen una medida de probabilidad μ sobre B_{X^*} es una constante $\rho \geq 0$ tal que para todo x$\in X$, tenemos

$$\|Sx\| \leq \rho\left(\int_{B_{X^*}}|a(x)|^p d\,\mu(a)\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (*)$$

En este caso, $\prod_p(S)$ es el menor $\rho \geq 0$ que satisface (*).

Definición 3.2. Una función $f: X \to Y$ es dicho completamente continua si lleva sucesiones débilmente convergente en sucesiones convergentes con norma.

Denotamos por $\mathcal{V}(X,Y)$ el espacio de aplicaciones $T: X \to Y$ que son lineales y completamente continuas.

Observación 3.3. Observe que $\mathcal{V}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Basta recordar que la topología débil es menos fina que la topología de la norma y $T: X \to Y$ es continua si $T(x_n) \to T(x)$ siempre que $x_n \to x$.

Proposición 3.6. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $\prod_p(X,Y) \subset \mathcal{V}(X,Y)$.

Demostración . Sea $S \in \prod_p(X,Y)$. Por el teorema de dominación de Pietsch, teorema 3.1, existen $\rho \geq 0$ es una medida de probabilidad μ sobre B_{X^*} tal que para todo x$\in X$ tenemos

$$\|Sx\| \leq \rho \left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\,\mu(a) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (*)$$

Sea $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \xrightarrow{w} 0$. Mostraremos que $\|Sx_n\| \longrightarrow 0$, $cuando\ n \longrightarrow \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\widetilde{x_n}: B_{X^*} \to \mathbb{K}$ tal que $\widetilde{x_n}(\varphi) = \varphi(x_n)$. Recordemos que estamos considerando B_{X^*} tiene la topología débil-estrella. Dado $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in I} \subset B_{X^*}$ tal que $\varphi_\alpha \xrightarrow{w^*} \varphi \in B_{X^*}$ es claro que $\widetilde{x_n}(\varphi_\alpha) \longrightarrow \widetilde{x_n}(\varphi)$, tenemos que $\widetilde{x_n} \in C(B_{X^*})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, fijado $\varphi \in B_{X^*}$, como $x_n \xrightarrow{w} 0$, tenemos $\widetilde{x_n}(\varphi) = \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(0) = 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, luego $(\widetilde{x_n})$ converge puntualmente a cero en $C(B_{X^*})$. Por otro lado, como $x_n \xrightarrow{w} 0$, entonces $\{\varphi(x_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ es limitado para toda $\varphi \in X^*$ y , por el teorema 1.6, $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ es limitado la norma. Así , existe M>0 tal que dada $\varphi \in B_{X^*}$, tenemos

$$0 \leq |\varphi(x_n)|^p \leq \|\varphi\|^p \|x_n\|^p \leq \|x_n\|^p \leq \sup_n \|x_n\|^p = M$$

Y como $\int_{B_{X^*}} M d\,\mu = M\mu(B_{X^*}) = M,$

Tenemos que M $\in L^1(\mu)$. Entonces $(|\widetilde{x_n}|^p) \subset \quad C(B_{X^*})$ es una sucesión de funciones medibles en B_{X^*} tal que $|\widetilde{x_n}|^p \xrightarrow{w^*} 0$ y existe M $\in L^1(\mu)$ tal que $\widetilde{x_n^p}(\varphi) \leq M$ para todo $\varphi \in B_{X^*}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue (teorema 1.18)

$$\lim_n \int_{B_{X^*}} |\widetilde{x_n}(\varphi)|^p d\,\mu = 0.$$

De allí, por (*) tenemos que $\lim_n \|Sx_n\| = 0$ y, por lo tanto que $S \in \mathcal{V}(X,Y)$.

Iremos ahora a probar el teorema de factorización de Pietsch, que nos dice que podemos factorizar un operador p-sumante a través de un espacio de funciones continuas y de un espacio $L^p(\mu)$ donde μ es una medida de probabilidad. Inicialmente vamos establecer algunas notaciones . Si S es un conjunto cualquiera, podemos definir $\ell_\infty(S) = \{ f: S \to \mathbb{K}; \sup_{x \in S} |f(x)| < \infty\}$. Es claro que $\ell_\infty(S)$ es un espacio vectorial con las operaciones de adición y multiplicación por escalar definidas puntualmente. Además , es fácil ver que $\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|$ define una norma en $\ell_\infty(S)$. Cuando S=B_{X^*}, denotaremos $\ell_\infty(S)$ por X^∞ . Dada cualquier $x \in X$, continuaremos denotando por $\tilde{x}$ la restricción a B_{X^*} la aplicación canónica $\tilde{x}$: $X^* \to \mathbb{K}$. Podemos considerar la siguiente aplicación J_X: $X \to X^*$ definida por J_X(x)= $\tilde{x}$ para todo $x \in X$, esto es, J_X(x)=$(\varphi(x))_{B_{X^*}}$ para todo $x \in X$. Por el teorema de Hahn-Banach, corolario 1.3, la aplicación lineal J_X es una isometría . Luego sigue , J_p denota la inclusión de C(K) en $L^p(\mu)$ (ver ejemplo 3.2)

Proposicion 3.7. (Propiedad de extensión)

Sea F un subespacio de un espacio normado E y sea S un conjunto cualquiera. Entonces, toda aplicación lineal y continua $T: F \to \ell_\infty(S)$ tiene una extensión lineal y continua $\check{T}: E \to \ell_\infty(S)$ tal que $\|T\| = \|\check{T}\|$.

Demostracion ; Dada $f \in \ell_\infty(S)$ podemos representarla por $f = ((f(s))_{s\in S}$ y tenemos $\|f\|_\infty$ finito . Sea una aplicación lineal y continua $T: F \to \ell_\infty(S)$ donde $T(y) = f_y$ para $y \in F$, esto es , $T(y) = ((f_y\ (s))_{s\in S}$. Fijemos $s_0 \in S$ y sea $\prod_{s_0}: \ell_\infty(S) \to \mathbb{K}$ y la proyección definida por $\prod_{s_0}(\ ((f(s))_{s\in S}) = f(s_0)$. Es claro que $\prod_{s_0}$ es lineal y continua con $\left\|\prod_{s_0}\right\| \leq 1$. Sea $F \to H_{s_0}: F \to \mathbb{K}$ tal que $H_{s_0}(y) = (\prod_{s_0} o\ T)(y) = f_y(s_0)$ para todo $y \in F$. Tenemos que H_{s_0} es lineal y continua, y por el teorema de Hahn-Banach (teorema 1.3), existe $\widehat{H_{s_0}} \in E^*$ extensión de H_{s_0} tal que $\left\|\widehat{H_{s_0}}\right\| = \left\|H_{s_0}\right\|$. Observe que esto vale para todo $s_0 \in S$ arbitrario, luego para todo $s_0 \in S$ existe $\widehat{H_s} \in E^*$ extensión de H_s tal que $\left\|\widehat{H_s}\right\| = \|H_s\|$. Consideremos $\tilde{T}: F \to \ell_\infty(S)$ donde $\tilde{T}$(x)= $\tilde{T}_x$ es tal que:$\tilde{T}_x : S \to \mathbb{K}$ es definida por $\tilde{T}_x(s) = \widehat{H_s}(x)$, esto es , $\tilde{T}_x = (\widehat{H_s}(x))_{s\in S}$ y veremos que $\tilde{T}$ es una extensión de T. Tenemos que $\tilde{T}$ está bien definida. De hecho, fijemos $x \in E$ y sea $s \in S$ tenemos $|\tilde{T}_x(s)|$=$|\widehat{H_s}(x)| \leq \left\|\widehat{H_s}\right\|\|x\| = \|H_s\|\|x\| \leq \|\prod_s\|\|T\|\|x\| \leq \|T\|\|x\| < \infty$, donde tomando el supremo cuando $s \in S$ obteniéndose que $\left\|\tilde{T}_x\right\|_\infty < \infty$ y $\left\|\tilde{T}_x\right\|_\infty \leq \|T\|\|x\|$ (*). Por lo tanto, $\tilde{T}$ está bien definida y como vale para todo $x \in E$ fijado , tenemos por (*) que $\tilde{T}$ es continua. Es fácil ver que $\tilde{T}$ es lineal, donde por (*) tenemos $\|T\| \geq \|\check{T}\|$. Por otro lado , $\tilde{T}|_F = T$ es claro que $\|T\| \leq \|\check{T}\|$, donde $\|T\| = \|\check{T}\|$.

Teorema 3.2. (Teorema de Factorizacion de Pietsch)

Un operador $S: X \rightarrow Y$ es p-sumante si y solamente si existe un espacio compacto K , una medida de Borel regular μ en K y operadores A∈ $\mathcal{L}(X, C(K))$ y B∈ $\mathcal{L}(L^p(\mu), Y^\infty)$ tales que $B \circ J_p \circ A = J_Y \circ S$. En este caso, podemos escoger μ siendo una medida de probabilidad, A es una isometría de B tal que $\|B\| = \prod_p S$.

$$
\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{S} & Y & \xrightarrow{J_Y} & Y^\infty \\
\downarrow & & & & \uparrow \\
C(K) & & \xrightarrow{J_p} & & L^p(\mu)
\end{array}
$$

Demostracion Supongamos que existen un espacio compacto K, una medida de Borel regular μ en K y operadores A∈ $\mathcal{L}(X, C(K))$ y B∈ $\mathcal{L}(L^p(\mu), Y^\infty)$ tales que $B \circ J_p \circ A = J_Y \circ S$. Y vimos el ejemplo 3.2 , que $J_p \in \prod_p(C(K), L^p(\mu))$ y, por lo tanto, $B \circ J_p \circ A = J_Y \circ S$ es un operador p-sumante de X en Y^∞. Por el teorema de dominación de Pietsch, teorema 3.1, existen $\rho \geq 0$ es una medida de Borel regular μ_0 sobre B_{X^*} satisfaciendo $\mu_0(B_{X^*})$=1 tal que

$$\|J_Y \circ S(x)\| \leq \rho\left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\,\mu(a)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Sea x∈ X mas $\|J_Y \circ S(x)\| = \|S(x)\|$ y de allí

$$\|S(x)\| \leq \rho\left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\,\mu(a)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si x∈ X donde $\rho \geq 0$ y μ_0 es una medida de probabilidad, y nuevamente por el teorema de dominación de Pietsch tenemos $S \in \prod_p(X, Y)$. Entonces por el teorema de dominación de Pietsch existe una medida de Borel regular μ con $\mu(B_{X^*}) = 1$ tal que

$$\|S(x)\| \leq \prod_p (S) \leq \rho\left(\int_{B_{X^*}} |a(x)|^p d\,\mu(a)\right)^{\frac{1}{p}} \text{ Si x} \in X$$

Consideremos la aplicación A:$X \to C(B_{X^*})$ definida por $A(x) = \tilde{x}$. Consideremos B_{X^*} con la topología w^*. Ya vimos una demostración de la proposición 3.6 que $\tilde{x} \in C(B_{X^*})$, de modo que A esta bien definida. Ademas es claro que A es lineal y por el corolario 1.3, si x $\in X$, entonces tenemos que $\|Ax\|= \sup_{\varphi \in B_{X^*}} |\varphi(x)|$. Donde sigue que A$\in \mathcal{L}(X, C(K))$ donde K=B_{X^*} y w^*-compacto por el teorema de Banach-Alaoglu-Burdaki (teorem 1.13) y A es una isometría. Considere el conjunto A(X)=$X^\infty \subset C(K)$ y la inclusión $J_p\colon C(K) \to L^p(\mu)$ (ver ejemplo 3.2). Tenemos que $J_p(Ax) = \tilde{x} \in L^p(\mu)$ para todo x $\in X$. Ademas $J_p(Ax)$ *es un subespacio* de $L^p(\mu)$. Sea ahora $B_0\colon J_p(Ax) \to Y$ definida por $B_0\left(J_p(Ax)\right) = Sx$ para todo x $\in X$. Entonces B_0 está bien definida, pues si $J_pA(x_1) = J_pA(x_2)$ entonces $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ para todo φ en B_{X^*} y por el corolario 1.2, $x_1 = x_2$ donde S$x_1 = Sx_2$ .Veremos que $B_0 \in \mathcal{L}(J_p(Ax), Y)$ y $\|B_0\| \leq \prod_p(S)$. La linealidad de B_0 es clara. Además, para todo x $\in X$ tenemos

$$\left\|B_0\left(J_p(Ax)\right)\right\|=\|S(x)\| \leq \textstyle\prod_p(S)\left(\int_{B_{X^*}}|a(x)|^p d\,\mu(a)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\textstyle\prod_p(S)\left(\int_{B_{X^*}}\left|J_p(\tilde{x})a\right|^p d\,\mu(a)\right)^{\frac{1}{p}} = \prod_p(S)\left\|J_p(Ax)\right\|_p$$

Y por lo tanto, B_0 es continua con $\|B_0\| \leq \prod_p(S)$. Consideremos $\overline{B_0}\colon\overline{J_p(Ax)} \to Y$ la extensión de B_0 el hecho de $J_p(Ax)$ con $L^p(\mu)$. Observamos que A(X)$\subset C(K)$ y que $\overline{J_p(A(X))} \subset L^p(\mu)$ son ambos espacios de Banach. Sea $\widehat{J_p}\colon A(X) \to \overline{J_p(A(X))}$ definida de manera natural, esto es $\widehat{J_p}(A(X))$= $J_p(\tilde{x})$ para todo x $\in X$. Sabemos del ejemplo 3.2 que $J_p \in \prod_p(C(K), L^p(\mu))$ y $\prod_p(J_p)$=1. De allí es fácil verificar que $\widehat{J_p} \in \prod_p$(A(X), $\overline{J_p(A(X))}$) y $\prod_p(\widehat{J_p})$=1. Por un abuso de notación, consideremos $\overline{B_0} \in \mathcal{L}(, \overline{J_p(A(X))}, Y)$ y A$\in$

$\mathcal{L}(\mathrm{X}, A(X))$.Tenemos que para todo $x \in X$, $\overline{B_0}\, o\widehat{J_p} oA(x) = B_0\; o\; J_p oA(x)$=Sx y por la proposición 3.4, tenemos

$\prod_p(S)$=$\prod_p(\overline{B_0}\; o\widehat{J_p} oA) \leq \|\overline{B_0}\| \prod_p(\widehat{J_p})\; \|A\|$=$\|\overline{B_0}\|$

De allí $\|\overline{B_0}\| = \|B_0\| \leq \prod_p(S)$, sigue que $\|\overline{B_0}\| = \prod_p(S)$. Como Y^∞ tiene la propiedad de extensión (proposición 3.7), existe B: $L^p(\mu) \rightarrow\; Y^\infty$ que extiende $J_Y\; o\overline{B_0}$ tal que B $\in$ $\mathcal{L}(L^p(\mu), Y^\infty\,)$ y $\|B\|$=$\|\; J_Y\; o\overline{B_0}\|$. Por lo tanto, tenemos que $J_Y\; oS =$ $J_Y\; o\overline{B_0}\;\; o\, J_p\; oA$ =B $o\, J_p\; oA$ y como J_Y es una isometría $\|B\|$=$\|\; J_Y\; o\overline{B_0}\| = \|B_0\| = \prod_p(S)$

3.2 El Teorema de Dvoretzky-Rogers

Definición 3.3. Un operador $T: X \rightarrow Y$ es dicho compacto si T(B_X) es relativamente compacto en Y y es dicho débilmente compacto si T(B_X) es relativamente compacto en (Y, w) , esto es $\overline{\mathrm{T}(B_X)}$ es compacto en y $\overline{\mathrm{T}(B_X)}^{\,w}$ es compacto en (Y, w), respectivamente . Denotaremos por $\mathcal{K}(X, Y) y\; \mathcal{W}(X, Y)$ como el conjunto de operadores lineales $T: X \rightarrow Y$ compactos y débilmente compactos, respectivamente.

Recordemos que T $\in \mathcal{L}(X, Y)$ si y solamente si $\overline{\mathrm{T}(B_X)}$ es limitado, pues $\|T\| < \infty$ si y solamente si existe M>0 tal que $\overline{\mathrm{T}(B_X)} \subset \{y \in Y;\; \|y\| \leq M\}$.

Veremos inicialmente que T $\in\; \mathcal{W}(X, Y)$ si y solo si $\overline{\mathrm{T}(B)}^{\,w}$ es compacto en (Y,w), para todo B⊂X limitado . De hecho si B⊂X y limitado , entonces B⊂ λB_X para algún $\lambda > 0$ y usando la linealidad de T tenemos $\overline{\mathrm{T}(B)}^{\,w} \subset \lambda\overline{\mathrm{T}(B)}^{\,w}$=$\overline{\lambda\mathrm{T}(B)}^{\,w}$ que es compacto en (Y,w) si T $\in$ $\mathcal{W}(X, Y)$. Reciprocamente, como $B_X \subset X$ es limitado, tenemos que T(B_X) es redlativamente compacto en (Y,w), donde T $\in\; \mathcal{W}(X, Y)$.

El mismo resultado es válido para $\mathcal{K}(X, Y)$, esto es T $\in\; \mathcal{K}(X, Y)$, si y solo si $\overline{T(B)}$ es compacto para todo B⊂ X limitado. Basta considerar la topología de la norma en vez de la topología débil.

En el capítulo 1, denotamos la topología débil de un espacio normado por w . A fin de simplificarnos la notación , iremos usar siempre esta notación para espacios normales diferentes. Si tuviéramos X e Y espacios normados, entonces (X,w) y (Y,w) representan los espacios X e Y con las respectivas topologías débil .

Proposicion 3.8.

a) $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{W}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y)$

b) Si $R \in \mathcal{L}(Y,F)$ y $T \in \mathcal{L}(E,X)$, entonces

i) $S \in \mathcal{W}(X,Y)$ entonces $RoSoT \in \mathcal{W}(E,F)$

ii) $S \in \mathcal{K}(X,Y)$ entonces $RoSoT \in \mathcal{K}(E,F)$

Demostración

a) como la topología débil es menos fina de la topología de la norma , tenemos que $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{W}(X,Y)$. Para mostrar la otra inclusión recordemos que , por la definición, si $T \in \mathcal{W}(X,Y)$ tenemos que $\overline{\mathrm{T}(B_X)}^w$ es compacto en (Y,w) y por lo tanto e limitado .Consecuentemente $\mathrm{T}(B_X)$ es limitado en (Y, w) y por el teorema 1.6 es limitado .Así T$\in \mathcal{L}(X,Y)$.

b) Sean , ahora $S \in \mathcal{W}(X,Y)$, $R \in \mathcal{L}(Y,F)$ y $T \in \mathcal{L}(E,X)$, y sea B$\subset X$ limitado . Probaremos que $\overline{\mathrm{RoSoT}(B)}^w$ es compacto en (F,w). Como $T \in \mathcal{L}(E,X)$, T(B)$\subset X$ es limitado. Mas $S \in \mathcal{W}(X,Y)$, donde $\overline{\mathrm{S}(\mathrm{T}(B))}^w$ es compacto en (Y,w). Siendo R:Y$\rightarrow F$ continua , tenemos que R:(Y,w)$\rightarrow (F,w)$ es continua y por lo tanto $\mathrm{R}(\overline{\mathrm{S}(\mathrm{T}(B))}^w)$ es compacto en (F,w), donde es cerrado en (F,w) tenemos $\mathrm{R}(\mathrm{S}(\mathrm{T}(B))) \subset \mathrm{R}(\overline{\mathrm{S}(\mathrm{T}(B))}^w)$, tomando la cerradura en (F,w) tenemos $\overline{\mathrm{R}(\mathrm{S}(\mathrm{T}(B)))}^w \subset \mathrm{R}(\overline{\mathrm{S}(\mathrm{T}(B))}^w)$ que un subconjunto cerrado de un compacto es por lo tanto $\overline{\mathrm{R}(\mathrm{S}(\mathrm{T}(B)))}^w$ es compacto en (F,w). Análogamente, si S$\in \mathcal{K}(X,Y)$ entonces $RoSoT \in \mathcal{K}(E,F)$

Proposición 3.9. $\boldsymbol{\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{V}(X,Y)}$

Demostración. Sea T$\in \mathcal{K}(X,Y)$ y sea $(b_n) \subset X$ tal que $b_n \overset{w}{\rightarrow} 0$. Devemos mostrar que T$b_n \rightarrow 0$. Supongamos , por el absurdo, que (Tb_n) no sea convergente para cero. En ese caso existen $\epsilon > 0$ es una sucesión (Tb_{n_k}) tal que $\|\mathrm{T}b_{n_k}\| \geq \epsilon$ para todo k$\in \mathbb{N}$. Como (b_n) es débilmente convergente , y limitada por lo tanto la subsucesión (b_{n_k}) también es limitada . Pero T es compacto , luego (Tb_{n_k}) admite subsucesión convergente , digamos T$b_{n_{k_j}} \rightarrow y \in Y$. Por lo tanto T$b_{n_{k_j}} \overset{w}{\rightarrow} y$. De $b_n \overset{w}{\rightarrow} 0$ se sigue que $b_{n_{k_j}} \rightarrow 0$, y de la continuidad de T se sigue que T$b_{n_{k_j}} \overset{w}{\rightarrow} 0$ De la unicidad de limite se sigue que y=0. Asi $Tb_{n_{k_j}} \rightarrow 0$ y $\left\|Tb_{n_{k_j}}\right\| \geq \epsilon$>0 para todo k$\in \mathbb{N}$, una contradicción. Por lo tanto $Tb_n \rightarrow 0$.

Proposición 3.10. Si $1 \leq p < \infty$ entonces $\prod_p(X,Y) \subset \mathcal{W}(X,Y)$.

Demostración, Sea S$\in \prod_p(X,Y)$ .En la demostración del teorema de factorización de Pietsch, teorema 3.2, mostramos que la aplicación A: X→C(B_{X^*}) definida por A(x) (φ)=$\tilde{x}(\varphi) = \varphi(x)$ para todo x$\in X$ y para todo $\varphi \in B_{X^*}$ es una isometría lineal. Luego, A $\in \mathcal{L}(X, \mathrm{C}(B_{X^*}))$ y $\|A\| = 1$. Además, por el ejemplo 3.2, sabemos que $J_p \in \prod_p(\mathrm{C}(B_{X^*}), L^p(\mu))$. Sea B_0: $J_p(A(X)) \to Y$ definida como la demostración del teorema 3.2, y sea $\overline{B_0}$ la extensión de B_0 es cerrado de $J_p(A(X))$en $L^p(\mu)$

Caso 1: 1< $p < \infty$

Como $L^p(\mu)$ es reflexivo, tenemos por la proposición 1.6 que $Y_0 = \overline{J_p(A(X))}$ es reflexivo, donde la bola B_{Y_0} es compacta en (Y_0, w) , por el teorema 1.12. Pero como $\overline{B_0}$ es continua, tenemos que $\overline{B_0}$:$(Y_0, w) \to (Y, w)$ es continua y por lo tanto , $\overline{B_0}(B_{Y_0})$ es compacto en (Y.w), donde $\overline{B_0} \in \mathcal{W}(Y_0, Y)$. Por lo tanto , por la proposición 3.8, como $\overline{B_0} \in \mathcal{W}(Y_0, Y)$ y $J_p oA \in \mathcal{L}(X, Y_0)$ obtenemos que S=$\overline{B_0}$ o $J_p oA \in \mathcal{W}(X,Y)$. Entonces $\prod_p$(X, Y) $\subset \mathcal{W}(X,Y)$, si $1 \leq p < \infty$

Caso 2: p=1

Como $\prod_1$(X, Y) $\subset \prod_q$(X, Y), para todo q>1 , tenemos que $\prod_1$(X, Y) $\subset \prod_2$(X, Y) $\subset \mathcal{W}(X,Y)$,

Por el caso 1.

Veamos ahora un ejemplo de que no es un resultado análogo de la proposición anterior $\mathcal{K}(X,Y)$ en lugar de $\mathcal{W}(X,Y)$.

Ejemplo 3.5. Consideremos $L^p(\mu)$ donde μ es la medida de Lebesgue en [0,2π]. Sea J_p como un ejemplo 3.2. Tenemos que $J_p \in \prod_1(\mathrm{C}([0,2\pi], L^p([0,2\pi])$ y por lo tanto, por la proposición 3.10, $J_p \in \mathcal{W}(X,Y)$ donde X= $\mathrm{C}([0,2\pi]$ e $Y = L^p([0,2\pi])$ .veamos que $J_p \notin \mathcal{K}(X,Y)$ Si por el absurdo $J_p \in \mathcal{W}(X,Y)$ tendríamos $\overline{J_p(A(X))}$ compacto en Y .Por otro lado, sea la sucesión de funciones f_n: $[0,2\pi] \to \mathbb{C}$ donde para cada n$\in \mathbb{N}$, $f_n(t) = e^{int}$, para todo t$\in [0,2\pi]$ y $\|f_n\|_{[0,2\pi]} = 1, donde\ (f_n) \subset B_X$, Si $\overline{J_p(B_X)}$ fuese compacto, entonces (f_n) tendría una subsucesión convergente y por lo tanto , de Cauchy.

Entretanto ,

$\|f_n - f_m\|_p^p = \int_0^{2\pi} |e^{int} - e^{imt}| dt \geq \int_V \sqrt{2}^p dt$

Donde V={t∈ $[0,2\pi]$; $\cos(\mathrm{kt}) < 0\}$. De allí

$$\|f_n - f_{n+k}\|_p \geq \sqrt{2}\sqrt[p]{\pi}$$

Para todo n y k interiores positivos. Luego ninguna subsucesión de $(f_n) \subset L^p([0,2\pi]$ y de Cauchy. Entonces $J_p \notin \mathcal{K}(X,Y)$.

Proposición 3.11. $\boldsymbol{\mathcal{V}(Y,Z)\ o\ \mathcal{W}(X,Y) \subset \mathcal{K}(X,Z)}$.

Demostración . Sean S ∈ $\mathcal{V}(Y,Z)$ y T ∈ $\mathcal{W}(X,Y)$.Para mostrar que SoT ∈ $\mathcal{K}(X,Z)$ vamos mostrar que $\overline{S(T(B))}$ es compacto en Z , siempre que B⊂ X es limitado y convexo. De la topología, sabemos que basta mostrar que toda sucesión en S(T(B)) tiene una subsuseción convergente en $\overline{S(T(B))}$ .Sean B⊂ X es limitado y convexo (z_n) una sucesión en S(T(B)) y (x_n) una sucesión en B tal que S(T(x_n))= z_n para todo n ∈ ℕ . Como T∈ $\mathcal{W}(X,Y)$, tenemos que $\overline{T(B)}^w$ es compacto en (Y,w) es como (T(x_n)) $\subset \overline{T(B)}^w$, existe una subsucesión (T(x_{n_k})) que converge para un $y \in \overline{T(B)}^w$, o sea T(x_{n_k}) $\overset{w}{\rightarrow} y$. Pero S ∈ $\mathcal{V}(Y,Z)$, luego S(T(x_{n_k})) → $S(y)$ ∈S($\overline{T(B)}^w$). Ademas , como B es convexo y T es lineal , tenemos que T(B) es convexo y por lo tanto , los cerrados en la relación de la norma y la topología débil coinciden , esto es $\overline{T(B)}^w = \overline{T(B)}$. Luego S(y) ∈ $S\overline{(T(B))} \subset \overline{S(T(B))}$ pues S es continua . Esto es si existe una subsucesión ((z_{n_k}) de (z_n) tal que $z_{n_k} = S(T(x_{n_k})) \rightarrow S(y) \in \overline{S(T(B))}$,Mostramos entonces que $\overline{SoT(B)}$ es compacto, luego SoT∈ $\boldsymbol{\mathcal{K}(X,Z)}$**.**

Observación 3.4. Es posible mostrar que si E y G son espacios de Banach entonces existe un espacio de Banach F tal que para todo A ∈ $\boldsymbol{\mathcal{K}(E,G)}$ **existen** S ∈ $\mathcal{V}(F,G)$ y T ∈ $\mathcal{W}(E,F)$ tal que A=SoT, esto es $\boldsymbol{\mathcal{K}(E,G)} \subset \mathcal{V}(F,G)\ o\ \mathcal{W}(E,F)$ (ver [8], teorema 17.1.4, página 369).

Corolario 3.1. a) $\prod_p(\mathrm{Y,Z}) o \mathcal{W}(X,Y) \subset \boldsymbol{\mathcal{K}(X,Z)}$.

$$b) \prod_p (\mathrm{Y,Z})\, o \prod_p (\mathrm{X,Y}) \subset \boldsymbol{\mathcal{K}(X,Z)}$$

Demostración a) se sigue de las proposiciones 3.6 y 3.11.

b) se sigue de (a) y de la proposición 3.10.

observación 3.5. Vimos que $J_p \in \prod_1(C([0,2\pi], L^p([0,2\pi])$ $y\, J_p \notin \mathcal{K}\big(C([0,2\pi], L^p([0,2\pi])\big)$ .Si $1 < p < \infty$, entonces $L^p([0,2\pi])$ es reflexivo y consecuentemente la bola unitaria cerrada de $L^p([0,2\pi])$ es compacta por la topología débil (teorema 1.12) donde id $\mathcal{W}\big((C([0,2\pi], L^p([0,2\pi])\big)$ donde id es la función identidad . Como $J_p = id\ o\ \ y\, J_p$ tenemos en general no es verdad que $\mathcal{W}(Y,Z) o \prod_p(X,Y) \subset \boldsymbol{\mathcal{K}(X,Z)}$.

Teorema 3.3. Sea X un espacio de Banach y $1 \le p < \infty$. Entonces $\ell_p(X)$= $\ell_p^w(X)$. Si y solamente si X tiene dimensión finita.

Demostración . Si la dimensión de X es finita , X=X_w y, como $\ell_p(X_w)$= $\ell_p^w(X)$, tenemos $\ell_p(X)$= $\ell_p^w(X)$. Recíprocamente, si $\ell_p(X)$= $\ell_p^w(X)$. Entonces id $\in \prod_p(X,X)$ es consecuentemente $id^2 = id\ o\ id\ \in \prod_p(X,X)\ o \prod_p(X,X) \subset \boldsymbol{\mathcal{K}(X,X)}$**. Como** $id^2 = id\ o\ id$ tenemos id $\in \boldsymbol{\mathcal{K}(X,X)}$**.**

Luego $B_X = \overline{\imath d(B_X)}$ es compacto , y por el teorema de Riesz(teorema 1.8) tenemos que la dimensión de X es finita.

Corolario 3.2. Sea X un espacio de Banch. Entonces el operador identidad id: $X \to X$ es p-sumante si y solamente si X tiene dimensión finita.

Demostracion. De hecho, id es p-sumante si y solamente si $(x_n) = id(x_n)\ \in \ell_p(X)$ siempre que $(x_n)\ \in \ell_p^w(X)$. Entonces , id $\in \prod_p(X,X)$ si y solamente si $\ell_p(X)$= $\ell_p^w(X)$ y el corolario se sigue del teorema anterior .

Del corolario anterior junto con el teorema de Bessaga-Pelczynski, resulta el siguiente teorema de Dvoretzky-Rogers.

Teorema 3.4. (Teorema de Dvoretzky-Rogers)

Toda serie incondicionalmente convergente es un espacio de Banach X y absolutamente convergente si y solamente si la dimensión de X es finita .

Demostracion : Sea X un espacio de Banach tal que la convergencia incondicional implica la convergencia absoluta, Luego, X no puede contener una copia de c_0 visto que en c_0 existe una serie que converge incondicionalmente mas no absolutamente (ver ejemplo 2.2). Siguiendo el teorema de Bessaga-Pelcznski que toda sucesión débilmente 1-sumable es incondicionalmente sumable y, por lo tanto toda sucesión débilmente 1-sumable posee una serie absolutamente convergente. Pero esto es lo mismo que decir que el operador identidad es 1-suma. Luego por el corolario anterior , X tiene dimensión finita.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] G. Botelho, Series incondicionalmente convergentes: de Dirichlet a Dvoretzky-Rogers, Matemática Universitaria no. 30, 2001 pp. 103-111.

[2] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications, Masson, Paris, 1983.

[3] D. Cohn, Measure Theory, Birkhauser, Boston, 1980.

[4] J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces, Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 92, 1984.

[5] A. Dvoretzky and C.A. Rogers, Absolute and unconditional convergence in normed spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36, 1950, 192-197.

[6] M. Fabian, P. Habala, P. H´ajek, V. Montesinos, J. Pelant e V. Zizler, Functional Analysis and Infinte-Dimensional Geometry, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] J. Horváth, Topological Vector Spaces and Distributions, Vol. I, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1966.

[8] H. Jarchow, Locally Convex Spaces, B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[9] M. Kadets and V. Kadets, Series in Banach Spaces: Conditional and Unconditional Convergence, Birkhauser-Verlag, Berlim, 1997. 64

[10] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag, Berlim, 1977.

[11] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, New York, 1973.

[12] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1964.

[13] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1966.