Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Las propiedades de Schur y Dunford-Pettis

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Carla Patricia RAYO ACUÑA

ASESOR

Dr. Leonardo Henry ALEJANDRO AGUILAR

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Rayo, C. (2022). *Las propiedades de Schur y Dunford-Pettis*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Carla Patricia Rayo Acuña
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	42258382
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43069051
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-5354-4325
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Willy David Barahona Martinez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10078450
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Carlos Augusto Ruiz De la Cruz Melo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08249640
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis Funcional
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima

Año o rango de años en que se realizó la investigación	abril 2022 - julio 2022
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 17:30 horas del sábado 23 de julio del 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I): Mg. Willy David Barahona Martínez (PRESIDENTE), Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo (MIEMBRO) y el Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**LAS PROPIEDADES DE SCHUR Y DUNFORD-PETTIS**", presentado por la señorita **Bachiller Carla Patricia Rayo Acuña**, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de **diecisiete (17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que la participante **Bachiller Carla Patricia Rayo Acuña** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 18:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Willy David Barahona Martínez
PRESIDENTE

Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo
MIEMBRO

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO ASESOR

UNMSM
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América.

INFORME DE EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

1. **FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**
2. **ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**
3. **AUTORIDAD ACADÉMICA QUE EMITE EL INFORME DE ORIGINALIDAD**
   Director de La Escuela Profesional de Matemática
4. **APELLIDOS Y NOMBRE DE LA AUTORIDAD ACADÉMICA**
   Víctor Hilario Tarazona Miranda
5. **OPERADOR DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUD**
   Alex Armando Cruz Huallpara
6. **DOCUMENTO DE EVALUACIÓN**

   Título de pre grado: LAS PROPIEDADES DE SCHUR Y DUNFORD-PETTIS

7. **AUTOR DEL DOCUMENTO**

   Nombre y Apellido: RAYO ACUÑA CARLA PATRICIA

8. **FECHA DE RECEPCIÓN DE DOCUMENTO**

   ……………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………

9. **FECHA DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUDES**

   Procesado el: 28-jun.-2022 16:29 -05
   Identificador: 1864308040
   Número de palabras: 13653
   Entregado: 1

10. **SOFTWARE UTILIZADO**

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
TURNITIN	x	
ITHENTICATE		x
OTROS(ESPECIFICAR)		x

11. **CONFIGURACION DEL PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES**

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
EXCLUYE TEXTOS ENTRECOMILLADOS	x	
EXCLUYE BIBLIOGRAFÍA	x	
EXCLUYE CADENAS MENOS A 40 PALABRAS	x	
OTRO CRITERIO (ESPECIFICAR)		x

12. **PORCENTAJE DE SIMILITUDES SEGÚN PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES**

EN LETRA	NÚMEROS
Cinco Porciento	**5%**

13. FUENTES ORIGINALES DE LAS SIMILITUDES ENCONTRADAS

1% match (Internet desde 23-jul.-2021)
https://bibliotecadigital.exactas.uba.ar/download/tesis/tesis_n5624_Turco.pdf
1% match ()
Cabrera Serrano, Ana María. "Operadores extremos en espacios de Banach", 'Editorial de la Universidad de Granada', 2017
1% match (trabajos de los estudiantes desde 27-jul.-2019)
Submitted to Universidad de Salamanca on 2019-07-27
1% match (Internet desde 18-mar.-2019)
https://eprints.ucm.es/53098/1/5309866306.pdf
1% match (Internet desde 06-ene.-2007)
http://grad.uprm.edu
<1% match (trabajos de los estudiantes desde 20-feb.-2021)
Submitted to Universidad Nacional de Educación a Distancia on 2021-02-20
<1% match (trabajos de los estudiantes desde 23-abr.-2019)
Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA on 2019-04-23

14. OBSERVACIONES

....

15. CALIFICACIONES DE ORIGINALIDAD

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, SIN OBSERVACIONES.	X	
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, CON OBSERVACIONES.		X
DOCUMENTO NO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD		X

16. FECHA DE INFORME

....

UNMSM
Firmado digitalmente por TARAZONA MIRANDA Victor Hilario FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 20.07.2022 09:18:54 -05:00

Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda

Director (e) de la EP de Matemática

Tabla de contenidos

Resumen

El objetivo fundamental de este informe de tesis es definir la Propiedad de Dunford-Pettis e investigar diversas condiciones necesarias y suficientes para que un espacio de Banach posea dicha Propiedad.Definiremos también la propiedad de Schur y demostraremos que todo espacio que posee La propiedad de Schur posee La Propiedad de Dunford-Pettis. Además ,damos un resultado que estable condiciones suficientes para que un espacio que posea La Propiedad de Dunford-Pettis posea La Propiedad de Schur. Diversos ejemplos de espacios que poseen y no poseen La Propiedad de Dunford-Pettis son estudiados.

Esta tesis también contiene otros resultados importantes, destacamos el Teorema de Shauder y el Teorema de Smulian,que afirma que si K es un subconjunto débilmente compacto de un espacio normado ,entonces toda sucesión en K admite una subsucesión débilmente convergente.

Palabras claves:Operador adjunto,operador compacto,Operador débilmente compacto, Propiedad de Dunford Pettis, Propiedad de Schur

Abstract

The fundamental objective of this thesis report is to define the Dunford-Pettis Property and to investigate various necessary and sufficient conditions for a Banach space to possess this Property. We will also define the Schur property and show that every space that possesses the Schur property possesses The Dunford-Pettis Property. In addition, we give a result that establishes sufficient conditions for a space that possesses The Dunford-Pettis Property to possess The Schur Property. Various examples of spaces that possess and do not possess The Dunford-Pettis Property they are studied.

This thesis also contains other important results, we highlight Shauder's theorem and Smulian's theorem, which states that if K is a weakly compact subset of a normed space, then every sequence in K admits a weakly convergent subsequence.

Keyword: Adjunct operator, compact operator, Weakly compact operator, Property of Dunford Pettis, Property of Schur

Introdución.

Un espacio de Banach $\mathcal{X}$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis si todo operador lineal débilmente compacto definido en $\mathcal{X}$ y con valores en un espacio de Banach arbitrario lleva sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes en norma.

Un resultado clásico de N. Dunford y B.J. Pettis publicado en 1940 (c.f. [12]) demostró que el espacio $l_1(\nu)$ de las funciones integrables en un espacio de medida arbitrario goza de esta propiedad. Pero, fue recién en 1953 que Grothendieck aisló y estudió esta propiedad, habiendo dado a ella el nombre de Dunford-Pettis. En [15] Grothendieck estableció condiciones necesarias y suficientes para que un espacio de Banach tenga la Propiedad de Dunford-Pettis y demostró que, si $\mathcal{K}$ es un espacio de Hausdorff compacto entonces $C(\mathcal{K})$ tiene la Propiedad Dunford-Pettis. También demostró que si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach cuyo dual tiene la Propiedad Dunford-Pettis, entonces $\mathcal{X}$ tiene la Propiedad Dunford-Pettis. Por casi veinte años, el problema de decidir si el dual de un espacio con la Propiedad de Dunford-Pettis también tiene la Propiedad de Dunford-Pettis quedó en abierto. Fue solo en 1972 que Stegall dio el primer ejemplo de un espacio Banach $\mathcal{X}$ con la Propiedad de Dunford-Pettis pero cuyo dual no tiene la Propiedad Dunford-Pettis (ver [23]). El problema de caracterizar cuando el hecho de un espacio de Banach tener la Propiedad de Dunford-Pettis garantiza que su dual tiene la Propiedad de Dunford-Pettis continúa en abierto. Decidir si un espacio de Banach tiene la propiedad de Dunford-Pettis es siempre un problema difícil. Algunos espacios importantes no tienen esta propiedad. Por ejemplo, los espacios reflexivos de dimensión infinita no pueden tener la Propiedad de Dunford-Pettis. (ver Corolario 3.1.17). En particular, $\mathcal{L}_p(\nu)$ para $1 < p < \infty$ no tiene la Propiedad de Dunford Pettis.

Nuestro objetivo en este informe de tesis es presentar un estudio de los espacios de Banach con la Propiedad de Dunford-Pettis. Nuestra tesis está organizada de la siguiente manera:

En el primer capítulo, dividido en dos secciones, presentaremos definiciones y enunciaremos sin demostración, resultados que serán importantes para la comprensión de este trabajo y que pueden ser encontrados en los textos básicos de los referidos asuntos. La primera sección contendrá resultados relacionados condicionado a Bases de Schauder. A continuación, haremos una sección donde presentaremos la Desigualdad de Khintchine y en la cuarta y última sección será dedicada a la Teoría de Integración

En el segundo capítulo introduciremos algunos tipos especiales de operadores lineales, como el operador adjunto, el operador compacto, el operador débilmente compacto y el casi débilmente compacto. El propósito de este capítulo no es el de desarrollar una teoría completa de tales operadores, pero sí el de abordar resultados necesarios para estudiar la Propiedad Dunford-Pettis. Entre los resultados tratados, destacamos el Teorema de Schauder que dice que un operador lineal $\mathcal{T}$ es compacto sí,y sólo sí, su adjunto $\mathcal{T}^*$ es compacto; el teorema que dice que un operador lineal $\mathcal{T}$ es débilmente compacto sí,y sólo sí, $\mathcal{T}^*$ es débilmente compacto;y el Teorema de Smulian que garantiza que, si $\mathcal{K}$ es un subconjunto débilmente compacto de un espacio normado, entonces toda sucesión en $\mathcal{K}$ admite un subsucesión débilmente convergente.

En el tercer capítulo, en la primera sección, definiremos la Propiedad de Dunford-Pettis así como presentaremos ejemplos de espacios que tienen y de espacios que no tienen esta propiedad. Varias condiciones necesarias y suficientes para que un espacio de Banach tenga la propiedad de Dunford-Pettis serán establecidas. Presentaremos demostraciones de los resultados antes mencionados, es decir, el hecho del espacio (ν), de las funciones integrables en un espacio de medida arbitraria y del espacio $C(\mathcal{K})$, donde $\mathcal{K}$ es un espacio Hausdorff compacto, gozan de la Propiedad de Dunford-Pettis (ver Corolario 3.1.30 y Teorema 3.1.8 respectivamente). Además, presentaremos el ejemplo construido por Stegall de un espacio de Banach que posee la Propiedad Dunford-Pettis, sin que su dual lo posea (ver Ejemplo 3.1.23). En relación al problema de establecer condiciones bajo las cuales $\mathcal{X}^*$ tiene la Propiedad Dunford-Pettis, presentaremos la demostración de que si un espacio de Banach $\mathcal{X}$ tiene la propiedad de Dunford-Pettis y $l_1 \not\hookrightarrow \mathcal{X}$ (no está inmerso continuamente) ,entonces $\mathcal{X}^*$ tiene la Propiedad de Dunford-Pettis (ver Proposición 3.1.25). Un estudio asociando la Propiedad de Schur a la Propiedad de Dunford-Pettis será hecho. Este estudio incluirá un resultado demostrando que todo espacio que tiene la Propiedad Schur tiene la Propiedad Dunford-Pettis y un resultado estableciendo condiciones suficientes para que un espacio que posea la Propiedad de Dunford-Pettis posea la Propiedad de Schur.

Capítulo 1. Definiciones y resultados preliminares

1.2 Bases Schauder

Definición 1.2.1.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio vectorial normado de dimensión infinita sobre $\mathbb{R}$ .Una sucesión (x_i) en $\mathcal{X}$ se llama base de Schauder de $\mathcal{X}$ si para todo $x \in \mathcal{X}$. existe una sucesión única de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$, tal que $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Decimos que, en este caso,los escalares $a_i(i \in \mathbb{N})$ son las coordenadas de x.

Es inmediato de la definición que $(x_i)_i$ es un conjunto linealmente independiente. En efecto, Si $\mathcal{J} \subset \mathbb{N}$ y finito y $(a_i)_{i\in\mathcal{J}}$ es una familia finita de escalares tal que $\sum\limits_{i\in j} a_i x_i = 0$, entonces $a_i = 0$ para todo $i \in \mathcal{J}$.

Además, si $\mathcal{X}$ tiene dimensión finita, entonces la noción de base de Schauder de $\mathcal{X}$ coincide con la de base algebraica de $\mathcal{X}$.

Exemplo 1.2.2.

Si $\mathcal{X} = c_0$ o $\mathcal{X} = \ell_p$ para $1 \leq p < \infty$, entonces una sucesión $(e_n)_n$ forma una base de Schauder para $\mathcal{X}$. En este caso, decimos que esta es la base canónica de $\mathcal{X}$.

Si (x_i) es una base de Schauder de un espacio normado $\mathcal{X}$, definimos las proyecciones canónicas $P_n : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ para $n \in N$ por $P_n(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$. Note que, de hecho, para cada $n \in N$ fijo, P_n es una proyección de $\mathcal{X}$ sobre $[\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^{n}]$ ya que $(x_i)_{i=1}^{n}$ es linealmente independiente.

Proposición 1.2.3.

Sea (x_i) una base de Schauder de un espacio normado $\mathcal{X}$.Las proyecciones P_n canónicas $\mathcal{X}$ satisfacen:

i) $\dim(P_n(\mathcal{X})) = n$

ii) $P_n P_m = P_m P_n = P_{\text{mín}(m,n)}$

iii) $P_n(x) \to x$ en $\mathcal{X}$ $\forall x \in \mathcal{X}$

Recíprocamente, si las proyecciones lineales acotadas en un espacio normado $\mathcal{X}$ satisfacen de **(i)** a **(iii)**, entonces P_n son proyecciones canónicas asociadas con alguna base de Schauder $\mathcal{X}$.

Demostracción: Ver [14]. Lema 6,2 p.161.

Corolario 1.2.4.

Las proyecciones canónicas asociadas a alguna base de Schauder de un espacio normado están puntualmente acotados.

Demonstración. Sigue inmediatamente la proposición anterior.

Note que si $\mathcal{X}$ es un espacio normado con base de Schauder $(x_i)_i$, por item (iii) de Proposición 1.2.3, para cada $x \in \mathcal{X}$, $\sup_n \|P_n(x)\| < \infty$.

Siendo así, podemos definir la siguiente norma, $|||.|||$ en $\mathcal{X}$.

Lema 1.2.5

Sea $(x_i)_i$ una base de Schauder de un espacio de Banach $(\mathcal{X}, \|.\|)$. Sea $|||.|||$ definida en $\mathcal{X}$ por $|||x||| = \sup_n \|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\| = \sup_n \|P_n(x)\|$ para $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ Entonces

1) $|||.|||$ *es una norma en $\mathcal{X}$,$(x_i)_i$ y base de Schauder de $(\mathcal{X}, |||.|||)$ y una sucesión $(P_n)_n$ de proyecciones canónicas vistas como aplicaciones lineales de $(\mathcal{X}, |||.|||)$ en $(\mathcal{X}, |||.|||)$ y uniformemente acotada por 1.*

2) $|||.|||$ *es equivalente a $\|.\|$ en $\mathcal{X}$.*

Demonstración. Ver [14], Lema 6.4, p.162.

Sea $|||P_n||| = \sup\limits_{|||x|||\leq 1} |||P_n|||$ para todo $n \in N$. por el Lema 1.2.5-(1) $\sup_n |||P_n||| \leq 1$

Como, por el Lema 1.2.5-(2) las normas $|||.|||$ y $\|.\|$ son equivalentes en $\mathcal{X}$, es fácil verificar que existe $\mathcal{M} > 0$ tal que $\sup\limits_n \|P_n\| \leq \mathcal{M}$. Tenemos, asimismo, el siguiente resultado:

Corolario 1.2.6.

si $(x_i)_i$ y una base de Schauder de un espacio normado $(\mathcal{X}, \|.\|)$, entonces la sucesión $(P_n)_n$ las proyecciones canónicas asociadas a la base $(x_i)_i$ y uniformemente acotada.

Llamamos constante básica de $(x_i)_i$ al número $bc(x_i) = \sup\limits_n \|P_n\|$ donde $(P_n)_n$ es la sucesión de proyecciones asociada a $(x_i)_i$.

Sean $(\mathcal{X}, \|.\|)$ un espacio de Banach y $(x_i)_i$ una base de Schauder de $\mathcal{X}$. Decimos que $(x_i)_i$ y normalizada si $\|x_i\| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Además, para $j \in \mathbb{N}$ y $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ denotemos $f_j(x) = a_j$ Entonces

$$\|P_j(x) - P_{j-1}(x)\| = |f_j(x)|\|x_j\|$$

y por tanto, para cada $x \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$,

$$|f_j(x)| = \|f_j(x)x_j\|\|x_j\|^{-1} \leq 2 \sup_n \|P_n\|\|x_j\|^{-1}$$

lo que muestra que $f_j \in \mathcal{X}^*$ sus funciones f_j son llamados en funciones coordenadas de $(x_i)_i$ y evidentemente tenemos $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)x_i$.

Definición 1.2.7.

Una sucesión $(x_i)_i$ en un espacio de Banach $\mathcal{X}$ es llamada una sucesión básica si $(x_i)_i$ y una base de Schauder para $\overline{[\{x_i\}_i]}$, donde $[\{x_i\}_i]$ denota el espacio vectorial generado por $\{x_i : i \in N\}$

Tenemos la siguiente caracterización de sucesiones básicas:

Proposición 1.2.8.

Sea $(x_i)_i$ una sucesión en un espacio de Banach $\mathcal{X}$. Entonces $(x_i)_i$ es una sucesión básica si y solamente si existe $\mathcal{K} > 0$ tal que para todo $n < m$ y escalares $a_1 \ldots a_m$ tenemos $\| \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \| \leq K \| \sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i \|$. Además, el menor $\mathcal{K}$ con tal propiedad es igual a $bc(x_i)$.

Demonstración. Ver[14], Proposición 6.13, p.169.

Definición 1.2.9.

Sean $(x_i)_i$ e $(y_i)_i$ bases de Schauder de $\mathcal{X}$ y de $\mathcal{Y}$, respectivamente. Decimos que $(x_i)_i$ y equivalente a $(y_i)_i$ si existe un isomorfismo $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{T}(x_i) = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$

Presentaremos ahora resultados que nos proveen condiciones necesarias y suficientes para que las dos sucesiones básicas sean equivalentes.

Proposición 1.2.10

Sea $(x_i)_i$una sucesión básica en un espacio de Banach $\mathcal{X}$,y sea $(f_i)_i$ una sucesión en un espacio de Banach $\mathcal{Y}$. Son equivalentes:

i) $(f_i)_i$ y una sucesión básica equivalente a $(x_i)_i$

ii) Para todas las sucesiones de escalares $(a_i)_i$, $\sum a_i x_i$ converge si y solamente si $\sum a_i f_i$ converge.

iii) Existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que para todos los escalares $a_1 \ldots a_n$ tenemos

$$\frac{1}{C_1} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_{\mathcal{X}} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right\|_{\mathcal{Y}} \leq C_2 \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_{\mathcal{X}}$$

Demonstración. Ver [14], Hecho 6.17, p.170.

Cuando trabajamos con la base unitaria de c_0, tenemos el siguiente resultado, que es un ejercicio en [10], p.52.

Proposición 1.2.11

Una sucesión normalizada básica $(z_n)_n$ *y equivalente a la base unitaria de* c_0 *si,y sólamente si, existe una constante* $\mathcal{K} > 0$ *tal que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right\| \leq K \sup_{1\leq i\leq n} |c_i|$$

para todo $n \in N$ y cualquier escalares $c_1 \ldots c_n$.

Observación 1.2.12.

Se $(y_n)_n$ *es una sucesión equivalente a la base unitaria de* c_0 *y* $(z_n)_n$ *es sucesión tal que* $\lim_n \|z_n - y_n\| = 0$ *entonces* $(z_n)_n$ *también es equivalente a base unitaria de* c_0*. De hecho, existe una constante* $\mathcal{K}_1 > 0$ *tal que*

$$\left\|\sum_{n=1}^{r} a_n y_n\right\| \leq K_1 \sup_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

para todo $r \in \mathbb{N}$ y cualquiera escalar $a_1 \ldots a_r$. Si $(z_n)_n$ es una sucesión tal que

$$\lim_n \|z_n - y_n\| = 0$$

Entonces existe una constante $\mathcal{K}_2 > 0$ tal que

$$\left\|\sum_{n=1}^{r} a_n z_n\right\| \leq K_2 \sup_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

para todo $r \in \mathbb{N}$ y culesquiera escalares $a_1 \ldots a_r$.

En efecto ,dados cualesquiera $a_1 \dots a_r$ tenemos

$$\left\|\sum_{n=1}^{r} a_n z_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{r} a_n(z_n - y_n)\right\| + \left\|\sum_{n=1}^{r} a_n y_n\right\|$$

$$\overset{1,1}{\leq} \left\|\sum_{n=1}^{r} a_n(z_n - y_n)\right\| + \mathcal{K}_1 \sup_{1\leq n\leq r} |a_n| \qquad (1{,}2)$$

Por otro lado, $\| \sum_{n=1}^{r} a_n(z_n - y_n)\| \leq \sum_{n=1}^{r} |a_n|\|z_n - y_n\|$ y

$$\lim_n \|z_n - y_n\| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists N \in \mathbb{N} : \|z_n - y_n\| < \dfrac{1}{r} \ \ \forall\, n > N \ (1{,}3) \\ \exists \mathcal{K} \in \mathbb{N} : \|z_n - y_n\| < \mathcal{K}\ \forall\, n \in \mathbb{N} \ (1{,}4) \end{cases}$$

de ahi tenemos, si $r > N$

$$\sum_{n=1}^{r} |a_n|\|z_n - y_n\| = \sum_{n=1}^{N} |a_n|\|z_n - y_n\| + \sum_{n=N+1}^{r} |a_n|\|z_n - y_n\|$$

$$\overset{(1,3)(1,4)}{\leq} (N\mathcal{K} + 1) \sup_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

si $r \leq N$,tenemos

$$\sum_{n=1}^{r} |a_n|\|z_n - y_n\| < r\mathcal{K} \sup_{1\leq n\leq r} |a_n| < N\mathcal{K} \sup_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

Luego, en cualquier caso tenemos

$$\sum_{n=1}^{r} |a_n|\|z_n - y_n\| < (N\mathcal{K} + 1) \sup_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

donde $\mathcal{K}$ y N no dependen de elección de $r \in \mathbb{N}$ y los escalares $a_1 \dots a_r$

De esto,y de (1.2) tenemos

$$\left\|\sum_{n=1}^{r} a_n z_n\right\| \leq (N\mathcal{K} + 1 + k_1) \sup_{1\leq n\leq r} |a_n|$$

Para todo $r \in \mathbb{N}$ y cualquier de los escalares $a_1 \ldots a_r$.

Proposición 1.2.13.

Si $(z_n)_n$ *y una sucesión básica, entonces* $(z_n)_n$ *es equivalente a la sucesión básica normalizada* $\left(\frac{z_n}{\|z_n\|}\right)_n$ *si existen* $m > 0$ *y* $M > 0$ *tales que* $m \leq \|z_n\| \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.14.

Sea $(z_i)_i$ *una sucesión básica en un espacio de Banach* $\mathcal{X}$*,y sea* $(z_i^*)_i$ *una sucesión de funciones coeficientes de base* $(z_i)_i$ *de* $\overline{[\{z_i\}_i]}$ *Asumir que* $(f_i)_i$ *es una sucesión en* $\mathcal{X}$ *tal que* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|z_i - f_i\| \|z_i^*\| = C < 1$. *Entonces* $(f_i)_i$*es una sucesión básica equivalente a* $(z_i)_i$

Demonstración. Ver [14], Teorema 6.18, p.171.

Defininción 1.2.15.

Sea $(x_i)_i$ *una sucesión básica en un espacio de Banach* $\mathcal{X}$. *Una sucesión de vectores no nulos* $(u_j)_j$ *en* $\mathcal{X}$ *de la forma* $u_j = \sum\limits_{i=p_j+1}^{p_j+1} a_i x_i$ *con escalares* a_i *y* $p_1 < p_2 \ldots$ *es llamada una sucesión de bloques de* $(x_i)_i$

Note que, si $(u_j)_j$ es una sucesión de bloques de $(x_i)_i$, entonces $(u_j)_j$es una sucesión básica.

En efecto, si $k, l \in \mathbb{N}$, com $k \leq l$, tenemos:

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=p_j+1}^{p_j+1} \alpha_j a_i x_i \right\| \overset{1,2,8}{\leq} bc(x_i) \left\| \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=p_j+1}^{p_j+1} \alpha_j a_i x_i \right\|$$

$$= bc(x_i) \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j \right\|$$

y, nuevamente por la Proposición 1.2.8, concluimos que $(u_j)_j$ es una sucesión básica.

Definición 1.2.16. (Principio de Selección de Bessaga-Pelczynski)

Sea $(x_i)_i$ una sucesión normalizada de elementos de un espacio de Banach $\mathcal{X}$ tal que $x_i \overset{\omega}{\to} o$.Entonces $(x_i)_i$ admite una subsucesión básica $(y_i)_i$

Demonstración. Ver [10], p.42.

Proposición 1.2.17.

Sea $\mathcal{X} = c_0$ o $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ Si $(u_j)_j$ es una sucesión de bloques normalizada de $(e_i)_i$ entonces:

1 $(u_j)_j$ y equivalente a $(e_i)_i$

2 Existe una proyección de norma 1 de $\mathcal{X}$ sobre $\overline{[\{u_j\}_j]}$

Demonstración. Ver [14], Proposición 6.22, p.173.

1.3 Desigualdad de Khintchine

Vamos a comenzar esta sección introduciendo un sistema ortonormal de funciones en $[0,1]$. Las funciones de Rademacher $(r_n)_n$ son definidas por

$$r_n(t) = sign(sen(2^{\pi}t)) \text{ para todo } t \in [0,1] \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

En particular $r_1(t) = 1$ si $t \in [0, \frac{1}{2})$, $r_1(t) = -1$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1)$, $r_2(t) = 1$ si $t \in [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, $r_2(t) = -1$ si $t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{4}, 1)$, etc

Para mayor detalles, ver [20], Capitulo 16.

Proposición 1.3.1.

Dados Enteros positivos $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ y $m_1, \ldots, m_k$ tenemos que

$$\int_0^1 r_{n_1}^{m_1} \ldots r_{n_k}^{m_k}(t)\, dt = 1 \text{ si cada } m_j espar$$

$$\int_0^1 r_{n_1}^{m_1} \dots r_{n_k}^{m_k}(t)\, dt = 0 \text{ si cada } m_j \text{ es impar}$$

Demonstración, Ver [20], Proposición 16.2, p.76.

Corolario 1.3.2.

(a) *$(r_n)_n$ es una sucesión ortonormal en $\mathcal{L}_2[0,1]$*

(b) *Para cada sucesión $(\Lambda_n)_n \in \ell_2$ tenemos que*

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \Lambda_n r_n(t) \right\|_{\mathcal{L}_2[0,1]} = \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n r_n(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\Lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|(\Lambda_n)_n\|_2$$

Observe que el corolario arriba, junto con el Teorema 1.2.10, nos garantiza que $(r_n)_n$ es una sucesión básica en $\mathcal{L}_2[0,1]$ equivalente a la base canónica de ℓ_2(con constante 1)

Teorema 1.3.3.

(Desigualdad de Khintchine) Para todo $p \in [1,\infty)$ existen constantes positivas $\mathcal{A}_p$ y $\mathcal{B}_p$ tal que,para todo $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m \in R$

$$\mathcal{A}_p \left(\sum_{n=1}^{m} |\Lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{m} \Lambda_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{m} |\Lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $\mathcal{A}_p$ y $\mathcal{B}_p$ denotan las mejores constantes posibles.

Demonstración Ver [20], Teorema 16.4, p.77.

Observe que, en el teorema arriba, tenemos $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_2 = 1$

Capítulo 2. Operadores compactos y débilmente compacto

El objetivo de este capítulo es presentar resultados sobre operadores compactos y débilmente compactos que serán necesarios para el estudio de la propiedad de Dunford-Pettis. En el estudio de estas dos clases de operadores necesitaremos algunos resultados básicos sobre operadores adjuntos, que se presentarán en el primer párrafo.

2.1 Operadores Adjuntos

Definición 2.1.1.

Sean $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{X}$ espacios de Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Definimos el operador adjunto $\mathcal{T}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$ como el operador que a cada $f \in \mathcal{Y}^*$ asocia un elemento $\mathcal{T}^*(f)$ de $\mathcal{X}^*$ definido por $\mathcal{T}^*(f)(x) = f(\mathcal{T}(x))$, $\forall x \in \mathcal{X}$.

Note que $\mathcal{T}^*$ está bien definido.En efecto,la linealidad es clara y $\mathcal{T}^*(f) = f \circ \mathcal{T}$.

Por tanto, $\mathcal{T}^*(f) \in \mathcal{X}^*$ siempre que $f \in \mathcal{Y}^*$. Más aún, para cada $x \in \mathcal{X}$ y $f \in \mathcal{Y}^*$ tenemos:

$$|\mathcal{T}^*(f)(x)| = |f(\mathcal{T}(x))| \leq \|f\| \|\mathcal{T}\| \|x\|.$$

se sigue de que

$$\|\mathcal{T}^*(f)\| = \sup_{\|x\|=1} |\mathcal{T}^*(f)(x)| \leq \|f\| \|\mathcal{T}\|$$

y

$$\sup_{\|f\| \leq 1} \|\mathcal{T}^*(f)\| \leq \|\mathcal{T}\| < \infty.$$

Asi, $\mathcal{T}^*$ es continua y $\|\mathcal{T}^*\| \leq \|\mathcal{T}\|$. De hecho, tenemos:

Proposición 2.1.2.

Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios de Banach. Si $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ entonces $\|\mathcal{T}^*\| = \|\mathcal{T}\|$.

Demonstración. Tenemos

$$\|\mathcal{T}^*\| = \sup_{f\in B_{\mathcal{Y}^*}} \|\mathcal{T}^*(f)\|_{\mathcal{X}^*} = \sup_{f\in B_{\mathcal{Y}^*}} \left\{ \sup_{x\in B_X} |\mathcal{T}^*(f)| \right\}$$

$$= \sup_{f\in B_{\mathcal{Y}^*}} \left\{ \sup_{x\in B_X} |f(\mathcal{T}(x)| \right\} = \sup_{x\in B_X} \left\{ \sup_{f\in B_{\mathcal{Y}^*}} |f(\mathcal{T}(x))| \right\}$$

$$\overset{(1,1,35)}{=} \sup_{x\in B_X} \{\|\mathcal{T}(x)\|_Y\} = \|\mathcal{T}\|$$

Note que si $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ son espacios de Banach, $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y $U \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ entonces tenemos que $(\mathcal{S}\mathcal{T})^* = \mathcal{T}^* S^*$. De hecho, dado $x \in \mathcal{X}$ y $f \in Z^*$ entonces

$$(\mathcal{S}\mathcal{T})^*(f)(x) = f(\mathcal{S}\mathcal{T}(x)) = (\mathcal{S}^*(f))(\mathcal{T}(x)) = (\mathcal{T}^*\mathcal{S}^*(f)(x).$$

Proposición 2.1.3.

El adjunto $\mathcal{T}^*$ de un operador $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es una aplicación $\sigma(\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y}) - \sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$ continua. En particular $\mathcal{T}^{**}$ es una aplicación $\sigma(\mathcal{X}^{**}, \mathcal{X}^*) - \sigma(\mathcal{Y}^{**}, \mathcal{Y}^*)$ continua.

Demostración. Por la observación 1.1.46, basta mostrar $\sigma(\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y}) - \sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$-continuidad de $\mathcal{T}^*$ en el origen. Sea $O^*_{\mathcal{X}^*} = \{x^* \in \mathcal{X}^*; |(\mathcal{X}^*)(x_i)| < \epsilon \,\text{para}\, i = 1, \ldots, n\}$ una $\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$- cercana basica a cero en $\mathcal{X}^*$ y tomemos a $\sigma(\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y})$-cercana basica a cero en $\mathcal{Y}^*$ dada por

$$O^*_{\mathcal{Y}^*} = \{y^* \in \mathcal{Y}^*; |y^*(T(x_i))| < \epsilon \,\text{para}\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Verificaremos que $\mathcal{T}^*(O^*_{\mathcal{Y}^*}) \subset O^*_{\mathcal{X}^*}$ o que nos garantiza que $\mathcal{T}^*$ es $\sigma(\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y}) - \sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$ -continua en el origen.

De hecho, para cada $y^* \in O^*_{\mathcal{Y}^*}$ tenemos:

$$|(\mathcal{T}^* y^*)x_i| = |y^*(T(x_i))| < \epsilon \quad i = 1, \ldots, n.$$

Esto, junto con el hecho de que $\mathcal{T}^* y^* \in \mathcal{X}^*$, asegura que $\mathcal{T}^* y^* \in O^*_{\mathcal{X}^*}$. Así $\mathcal{T}^*$ es $\sigma(\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y}) - \sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X})$- continua en el origen y tenemos un resultado.

Proposición 2.1.4.

Sea $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. el segundo adjunto $\mathcal{T}^{**} : \mathcal{X}^{**} \to \mathcal{Y}^{**}$ es una extensión de $\mathcal{T}$ en sentido de que $\mathcal{T}^{**}(\mathcal{J}(\mathcal{X})) = \mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{X}))$ para todo $x \in X$. Si X es reflexivo entonces $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{**}$.

Demonstración. Sean $x \in \mathcal{X}$ e $y^* \in \mathcal{Y}^*$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{**}(\mathcal{J}(x))(y^*) &= \mathcal{J}(x)(\mathcal{T}^*(y^*)) = \mathcal{J}(x)(y^* \circ \mathcal{T}) \\ &= (y^* \circ \mathcal{T})(x) = \mathcal{J}(\mathcal{T}(x))(y^*)\end{aligned}$$

La segunda parte de la Proposición sigue inmediatamente, ya que $\mathcal{X}$ es reflexivo entonces $\mathcal{J}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^{**}$.

2.2 Operadores Compactos

Definición 2.2.1.

Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios de Banach. Decimos que $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es compacto si $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$ es compacto en $\mathcal{Y}$.

Observación 2.2.2.

Note que todo operador compacto es acotado. Basta observar que $\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ es acotado, ya que $\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}) \subset \overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$ compacto y por lo tanto es acotado. De hecho, se puede verificar que el conjunto de operadores compactos provistos de la norma inducida por $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ es el subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Tal subespacio será denotado por $\mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (ver [14] Proposición 7.2, p. 203).

Proposición 2.2.3.

Sean $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ espacios de Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{K}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Si $z_n \overset{\omega}{\to} z$ en $\mathcal{X}$, entonces $\mathcal{T}(z_n) \to \mathcal{T}(z)$ en $\mathcal{Y}$.

Demostración. Se $z_n \overset{\omega}{\to} z$, entonces $(z_n)_n$ es acotada y podemos suponer que $z \in \mathcal{B}_z$ y $z_n \in \mathcal{B}_z$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{T}$ es acotado, $\mathcal{T}$ es $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*) - \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^*)$ continuo o que implica en $T(z_n) \overset{\omega}{\to} \mathcal{T}(z)$. Además, como $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_z)}$ es un espacio compacto en la topología normal,y la topología débil y más débil y Hausdorff, obtenemos que estas dos topologias coinciden en $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_z)}$. Luego $\mathcal{T}(z_n) \to \mathcal{T}(z)$.

La propiedad presentada anteriormente motiva la siguiente definición.

Definición 2.2.4.

Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios de Banach. Un operador lineal $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es completamente continuo si $\mathcal{T}(z_n) \to \mathcal{T}(z)$ en $\mathcal{Y}$ siempre que $z_n \overset{\omega}{\to} z$.

Observación 2.2.5

Es inmediato a partir de la definición y la Proposición 2.2.3 que todo operador completamente continuo y que todo operador compacto es completamente continuo.

Proposición 2.2.6.

Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios de Banach y $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Entonces $\mathcal{T}$ es completamente continuo si y solamente si $\mathcal{T}$ toma conjuntos débilmente compactos sobre conjuntos fuertemente compactos.

Demostración. Sea $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ y supongamos que esto lleva conjuntos débilmente compactos a conjuntos fuertemente compactos. Dado $(z_n)_n \subset \mathcal{X}$ tal que $z_n \overset{\omega}{\to} z$, afirmamos que $\mathcal{T}(z_n) \to \mathcal{T}(z)$. en efecto, $\mathcal{E} = \{z_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ es débilmente compacto y, utilizando la hipotesis, obtenemos que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \{\mathcal{T}(z_n) : n \in \mathbb{N} \cup \{\mathcal{T}(z)\}$ es compacto.

Mostraremos que toda subsucesión de $(\mathcal{T}(z_n))_n$ admite subsucesión que converge para $\mathcal{T}(z)$ o que nos garantiza que $\mathcal{T}(z_n) \to \mathcal{T}(z)$. Sea entonces $(\mathcal{T}(z_{n_k}))_k$ subsucesión arbitraria de $(\mathcal{T}(z_n))_n$. Como $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ es compacto, $(\mathcal{T}(z_{n_k}))_k$ admite subsucesión $(\mathcal{T}(x_{n_{k_j}}))_j$

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{T}$ sea completamente continuo, tomemos $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ conjunto débilmente compacto y $(\mathcal{T}(z_n))_n \subset \mathcal{T}(\mathcal{A})$. Como $(z_n)_n \subset \mathcal{A}$, conjunto débilmente compacto, por el Teorema 2.3.7 existe $z_0 \in \mathcal{A}$ y subsucesión $(z_{n_k})_k$ tal que $z_{n_k} \overset{\omega}{\to} z_0$. Como $\mathcal{T}$ es completamente continua, concluimos que $\mathcal{T}(z_{n_k}) \to \mathcal{T}(z_0) \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ y por tanto $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ es compacto.

Proposición 2.2.7.

Todo operador lineal completamente continuo de un espacio de Banach reflexivo en un espacio de Banach es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ un Banach espacio reflexivo, $\mathcal{Y}$ un Banach espacio reflexivo y $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operador lineal completamente continuo. Como $\mathcal{X}$ es reflexivo entonces $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ es débilmente compacto. Como $\mathcal{T}$ es completamente continuo, por la Proposición 2.2.6, $\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ es compacto. Luego, $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})} = \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ es compacto.

El próximo teorema nos asegura que el operador $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es compacto si,y solamente si, su adjunto también es compacto.Para demostrar tal resultado, enunciaremos antes el Teorema de Arzelá-Ascoli.

Teorema 2.2.8.

Se $\mathcal{K}$ es espacio compacto, entonces un subconjunto de $C(\mathcal{K})$ es relativamente compacto si, y solamente si, es acotado y equicontinuo.

Demostración Ver [13], Teorema 7, p.266.

Teorema 2.2.9.

(Teorema de Schauder)Un operador lineal de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ es compacto si,y solamente si, su adjunto es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operador compacto y (ψ_n) una sucesión arbitraria en $B_{\mathcal{Y}^*}$. Afirmamos que existe subsucesión $(\psi_{n_k})_k$ de (ψ_n) tal que $(\mathcal{T}^*(\psi_{n_k}))_k$ es convergente. En efecto, consideremos las ψ_n restringidas a $\overline{\mathcal{T}(B_{\mathcal{X}})}$.Para simplificar, aún denotaremos tales restricciones por ψ_n.

Entonces,

$$|\psi_n(y) - \psi_n(z)| \leq \|\psi_n\| \|y - z\| \leq \|y - z\|$$

$\forall\ y,\ z \in \overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$. Luego, la familia de funciones $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ restringidas al conjunto $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$ es acotada y equicontinua. Por el Teorema de Arzelá-Ascoli se sigue que existe $(\psi_{n_k})_k$ subsucesión de $(\psi_n)_n$ que converge uniformemente en $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$. Luego, dado $\epsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\psi_{n_k}(\mathcal{T}(x)) - \psi_{n_l}(\mathcal{T}(x))| < \epsilon$$

para todo $k,\ l \geq k_0$ y $\forall\ x \in B_{\mathcal{X}}$. Entonces

$$|(\mathcal{T}^*(\psi_{n_k}) - \mathcal{T}^*(\psi_{n_l}))(x)| < \epsilon$$

$\forall\ k,\ l \geq k_0$ y para todo $x \in B_{\mathcal{X}}$ se muestra que

$$\|\mathcal{T}^*(\psi_{n_k}) - \mathcal{T}^*(\psi_{n_l})\| < \epsilon \, \text{para} \;\text{todo}\, k, l \geq k_0.$$

Asimismo, $(\mathcal{T}^*(\psi_{n_k}))_k$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{X}^*$, que es completo y, consecuentemente converge en $\overline{\mathcal{T}^*(\mathcal{B}^*_{\mathcal{Y}})}$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ tal que $\mathcal{T}^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$ sea compacto. Por la implicación anterior, ya sabemos que $\mathcal{T}^{**} : \mathcal{X}^{**} \to Y^{**}$ es compacto.

Note que, como $\overline{\mathcal{T}^{**}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}^{**}})}$ es compacto y como $\overline{\mathcal{T}^{**}(\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))} \subset \overline{\mathcal{T}^{**}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}^{**}})}$, entonces $\overline{\mathcal{T}^{**}(\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))}$ es compacto.

De la Proposición 2.1.4, tenemos que $\mathcal{T}^{**}(\mathcal{J}(B_{\mathcal{X}})) = \mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))$. Así
$\overline{\mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))} = \mathcal{J}(\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})})$ es compacto y, por tanto, $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$ es
compacto. □

2.3 Operadores Débilmente Compactos

Definición 2.3.1.

Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios de Banach ,y $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operador lineal. Diremos que $\mathcal{T}$ es débilmente compacto si $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}\mathcal{X})}$ es débilmente compacto en $\mathcal{Y}$.

Observación 2.3.2.

Si $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ es débilmente compacto entonces $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.En efecto, si para cada $z^* \in \mathcal{Y}^*$ fijo, definimos

$$V_{n,z^*} = \{z \in \mathcal{Y}; |z^*(z)| < n\}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, de la definición de la topología débil se sigue que cada V_{n,z^*} es débilmente abierto. Como cada z^* es acotado obtenemos también que $\mathcal{Y} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{n,z^*}$ y, de $\mathcal{T}$ siendo débilmente compacto se sigue que para cada z^* existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{T}(B_{\mathcal{X}}) \subset V_{n_0,z^*}$. Asimismo $z^*(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))$ es acotado para todo $z^* \in \mathcal{Y}^*$. Del Teorema del Teorema 1.1.36 sigue que $\mathcal{T}(B_{\mathcal{X}})$ es acotado, o sea, $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. De esa forma vemos que el conjunto de los operadores débilmente compactos es un subconjunto de $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Proposición 2.3.3.

Sean $\mathcal{X}$ un espacio de Banach reflexivo e $\mathcal{Y}$ un espacio de Banach .Si $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ entonces $\mathcal{T}$ es débilmente compacto.

Demostración. Como $\mathcal{X}$ es reflexivo, entonces $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ y $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$-compacto y como $\mathcal{T}$ es acotado, $\mathcal{T}$ es $\sigma(\mathcal{X},\mathcal{X}^*)-\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*)$ continuo, garantizando que $\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ es $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*)$-compacto. De esa forma, $\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ y $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*)$-cerrado y convexo lo que implica en $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}=\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}^{\omega}=\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ es débilmente compacto.

Teorema 2.3.4.

Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios de Banach y $\mathcal{T}:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ un operador lineal y acotado. Son equivalentes:

a) $\mathcal{T}$ *es débilmente compacto.*

b) $\mathcal{T}^{**}(\mathcal{X}^{**})\subset\mathcal{J}(\mathcal{Y})$.

c) $\mathcal{T}:\mathcal{Y}^*\to\mathcal{X}^*$ y $\sigma(\mathcal{Y}^*,\mathcal{Y})-\sigma(\mathcal{X}^*,\mathcal{X}^{**})$ *continuo.*

d) $\mathcal{T}^*$ *es débilmente compacto.*

Demostración. (a $\Rightarrow$ b)

Supongamos que $\mathcal{T}$ sea débilmente compacto. Entonces $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$ y $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*)$-compacto. Como $\mathcal{J}$ y $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*)-\sigma(\mathcal{Y}^{**},\mathcal{Y}^{***})$-continuo y la topología $\sigma(\mathcal{Y}^{**},\mathcal{Y}^*)$ y menos fina que $\sigma(\mathcal{Y}^{**},\mathcal{Y}^{***})$ entonces $\mathcal{J}$ y $\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*)-\sigma(\mathcal{Y}^{**},\mathcal{Y}^*)$-continuo lo que nos proporciona

$$\overline{\mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))}^{\sigma(\mathcal{Y}^{**},\mathcal{Y}^*)}\subset\overline{\mathcal{J}(\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})})}^{\sigma(\mathcal{Y}^{**},\mathcal{Y}^*)}=\mathcal{J}(\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})})\subset\mathcal{J}(\mathcal{Y})\quad(2{,}1)$$

Por otro lado, por el Teorema de Goldstine, tenemos que $\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ y $\sigma(\mathcal{X}^{**},\mathcal{X}^*)$-denso en $\mathcal{B}_{\mathcal{X}^{**}}$. Luego, $\mathcal{T}^{**}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}^{**}})=\mathcal{T}^{**}(\overline{\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))}^{\sigma(\mathcal{X}^{**},\mathcal{X}^*)}$ y la $\sigma(\mathcal{X}^{**},\mathcal{X}^*)-\sigma(\mathcal{Y}^{**},\mathcal{Y}^*)$ continuidad de $\mathcal{T}^{**}$ (Proposición 2.1.3) obtenemos

$$\mathcal{T}^{**}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}^{**}})=\mathcal{T}^{**}\left(\overline{\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}^{\sigma(\mathcal{X}^{**},\mathcal{X}^*)}\right)\subset\overline{\mathcal{T}^{**}(\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))}^{\sigma(\mathcal{Y}^{**},\mathcal{Y}^*)}$$

Luego, utilizando la Proposición 2.1.4, concluimos que

$$\mathcal{T}^{**}(B_{X^{**}})\subset\overline{\mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))}^{\sigma(\mathcal{Y}^{**},\mathcal{Y}^*)}\overset{(2,1)}{\subset}\mathcal{J}(\mathcal{Y}),$$

probando y deseando.

(b $\Rightarrow$ c) Sea $(y^*_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{Y}^*$ una sucesión generalizada tal que $y^*_\alpha \overset{\sigma(\mathcal{Y}^*,\mathcal{Y})}{\longrightarrow} y^* \in \mathcal{Y}^*$. Dado cualquier $x^{**} \in \mathcal{X}^{**}$, por (b) existe $y \in \mathcal{Y}$ tal que $\mathcal{T}^{**}(x^{**}) = \mathcal{J}(y)$. asimismo

$$\mathcal{T}^{**}(x^{**})(y^*_\alpha) = \mathcal{J}(y)(y^*_\alpha) = y^*_\alpha(y) \to y^*(y) = \mathcal{J}(y)(y^*) = \mathcal{T}^{**}(x^{**})(y^*)$$

Esto significa que

$$x^{**}(\mathcal{T}^*(y^*_\alpha)) \to x^{**}(\mathcal{T}^*(y^*))$$

para todo $x^{**} \in \mathcal{X}^{**}$, o sea, $\mathcal{T}^*(y^*_\alpha) \overset{\sigma(\mathcal{X}^*,\mathcal{X}^{**})}{\to} \mathcal{T}^*(y^*)$.

Consecuentemente, $\mathcal{T}^*$ es $\sigma(\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y}) - \sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^{**})$-continuo.

(c $\Rightarrow$ d) Por Banach-Alaoglu (Teorema 1.1.52) $\mathcal{B}_{\mathcal{Y}^*}$ y $\sigma(\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y})$-compacto y asi que usando (c) tenemos que $\mathcal{T}^*(\mathcal{B}_{\mathcal{Y}^*})$ y $\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^{**})$-compacto, o sea,

$$\overline{\mathcal{T}^*(\mathcal{B}_{\mathcal{Y}^*})}^{\omega} = \mathcal{T}^*(\mathcal{B}_{\mathcal{Y}^*})$$

y $\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^{**})$-compacto. Sigue así que $\mathcal{T}^*$ es débilmente compacto.

(d $\Rightarrow$ a) Note que si $\mathcal{T}^*$ y débilmente compacto entonces $\mathcal{T}^{**}$ también es débilmente compacto ya que (a $\Rightarrow$ d). Luego, $\overline{\mathcal{T}^{**}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}^{**}}))}$ es $\sigma(\mathcal{Y}^{**}, \mathcal{Y}^{***})$-compacto.

Mas, $\mathcal{J} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}^{**}$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{J}(\mathcal{Y})$ y, por la Proposición 2.1.4, tenemos

$$\mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})) = \mathcal{T}^{**}(\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})).$$

Entonces,

$$\overline{\mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))} = \overline{\mathcal{T}^{**}(\mathcal{J}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))} \subset \overline{\mathcal{T}^{**}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}^{**}})}.$$

y como $\overline{\mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))} = \overline{\mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))}^{\sigma(\mathcal{Y}^{**},\mathcal{Y}^{***})}$, tenemos que $\overline{\mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))}$ es

$\sigma(\mathcal{Y}^{**}, \mathcal{Y}^{***})$-compacto. Consecuentemente $\overline{\mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))}$ es $\sigma(\mathcal{Y}^{**}, \mathcal{Y}^{*})$-compacto.

Más

$$\mathcal{J}(\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}) = \overline{\mathcal{J}(\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))} \subset \overline{\mathcal{J}(\mathcal{Y})} = \mathcal{J}(\mathcal{Y}),$$

de modo que $\mathcal{J}(\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})})$ es $\sigma(\mathcal{Y}^{**}, \mathcal{Y}^{*})|_{\mathcal{J}(\mathcal{Y})}$-compacto.

Identificando $\mathcal{J}(\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})})$ y $\mathcal{J}(\mathcal{Y})$ como sus imagenes isométricas $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$ e $\mathcal{Y}$, respectivamente,y observando que $\sigma(\mathcal{Y}^{**}, \mathcal{Y}^{*})|_{\mathcal{J}(\mathcal{Y})} = \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^{*})$, obtenemos que $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$ es $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^{*})$-compacto. $\square$

Sabemos que dado un conjunto compacto $\mathcal{K}$ en un espacio normado $\mathcal{X}$, cada sucesión en este conjunto admite una subsucesión que conerverge en $\mathcal{K}$. Presentaremos a continuación el Teorema de Smulian, que garantiza que tal resultado continua válido en topología débil, esto es, que si $\mathcal{K}$ es un conjunto débilmente compacto, entonces cada sucesión en $\mathcal{K}$ admite uma subsucesión que converge débilmente en $\mathcal{K}$.

Proposición 2.3.5.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado separable, y sea $\mathcal{K}$ un subconjunto débilmente compacto de $\mathcal{X}$. Entonces $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^{*}))$ metrizable.

Para probar este teorema, utilizaremos el resultado siguiente.

Proposición 2.3.6.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado separable. Entonces existe una sucesión $(\psi_n)_n$ normalizada tal que el operador

$$\mathcal{T} : z \in \mathcal{X} \to (\psi_n(z))_n \in \ell_\infty$$

es un isomorfismo isométrico sobre su imagen. En particular, la sucesión $(\psi_n)_n$ separa los puntos de $\mathcal{X}$, esto es, dados z_1, $z_2 \in \mathcal{X}$ tal que $z_1 \neq z_2$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\psi_n(z_1) \neq \psi_n(z_2)$.

Demostración. Como $\mathcal{X}$ es un espacio normado separable, existe (z_n) subconjunto enumerable denso en $\mathcal{X}$. Por el Teorema de Hahn-Banach (Corolario 1.1.33) existe una sucesión $(\psi_n)_n$ en $\mathcal{X}^*$ tal que

$$\psi_n(z_n) = \|z_n\| \text{ y } \|\psi_n\| = 1 \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \qquad (2,2)$$

Sea $\mathcal{T} : \mathcal{E} \to \ell_\infty$ que para cada $z \in \mathcal{X}$ asocia $\mathcal{T}(z) = (\psi_n(z))_n$.

Utilizando el hecho de $(\psi_n)_n$ esta normalizada, según que $\mathcal{T}$ queda bien definida. Además, claramente $\mathcal{T}$ es operador lineal $\mathcal{Y}$ como $\|\psi_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces, para cada $z \in \mathcal{X}$

$$\|\mathcal{T}(z)\|_\infty = \sup_n |\psi_n(z)| \leq \sup_n \|\psi_n\|\|z\| \leq \|z\|.$$

Esto, junto a (2.2), nos garantiza que

$$\|\mathcal{T}(z_n)\|_\infty = \|z_n\| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

finalmente, utilizando el hecho de $(z_n)_n$ ser denso en $\mathcal{X}$, concluimos que dado $z \in \mathcal{X}$ existe $(z_{n_k})_k$ tal que $z_{n_k} \to z$ y por tanto

$$\|\mathcal{T}(z)\|_\infty = \lim_k \|\mathcal{T}(z_{n_k})\|_\infty = \lim_k \|z_{n_k}\| = \|z\|.$$

sigue desde que $\mathcal{T}$ es inyectiva (portanto $(\psi_n)_n$ separa los puntos de $\mathcal{X}$) es una verdad $\mathcal{Y}$ un isomorfismo isométrico de $\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{T}(\mathcal{X})$.

Pasemos a demostrar la Proposición 2.3.5:

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado separable. Por la Proposición 2.3.6 existe un conjunto numerable $\mathcal{D} = \{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{X}^*$ que separa los puntos de $\mathcal{X}$. Sea $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ a topología em $\mathcal{X}$ que admite como base de vecinal de cero los conjuntos de forma

$$V_n = \left\{ z \in \mathcal{X} : \sup_{1 \leq j \leq n} |\psi_j(z)| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Es fácil verificar que V_n es totalmente convexo $\mathcal{Y}$ absorvente. Además, como $\mathcal{D}$ separa los puntos de $\mathcal{X}$ es fácil ver que $\mathcal{P} = \{m_{U_n} : n \in \mathbb{N}\}$ separa los puntos de $\mathcal{X}$. Como $\mathcal{P}$ es numerable, por el Teorema 1.1.59, $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ es una topologia localmente convexa metrizable $\mathcal{Y}$ como $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ entonces $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{D}) \subset \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$.

Notemos que, en caso de $\mathcal{K}$ ser subconjunto $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$-compacto, entonces las topologías $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ e $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ coinciden en $\mathcal{K}$. En efecto, consideremos la aplicación continua

$$\mathcal{I} : (\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)) \to (\mathcal{X}, \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{D}))$$

$$z \mapsto z$$

Como $\mathcal{K}$ y $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$-compacto, por un hecho conocido sobre compacidad obtenemos que $\mathcal{I}^{-1}$ es continua. Consecuentemente, $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ y $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ coinciden en $\mathcal{K}$.

Por tanto, como la topologia $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ es metrizable, sigue que $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*))$ es metrizable.

Teorema 2.3.7.

Sea $\mathcal{K}$ un subconjunto débilmente compacto de un espacio normado $\mathcal{X}$. Entonces, cada sucesión en $\mathcal{K}$ admite una subsucesión que converge débilmente a un punto de $\mathcal{K}$.

Demostración. Supongamos primero que $\mathcal{X}$ sea espacio normado separable y $\mathcal{K}$ un subconjunto débilmente compacto. Según la Proposición 2.3.6 que $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*))$ es metrizable. Luego, cada sucesión en $\mathcal{K}$ admite una subsucesión que converge débilmente a un punto de $\mathcal{K}$.

En caso de $\mathcal{X}$ ser espacio normado cualquiera, sea $(z_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{K}$ y considere $\mathcal{E} = \overline{[\{z_n\}_n]}$. por el Lema 1.1.31, $\mathcal{E}$ es separable. Por el caso anterior, $(z_n)_n$ admite una subsucesión que converge a un punto de $\mathcal{K}$ en topología $\sigma(\mathcal{E}, \mathcal{E}^*)$ restringida a $\mathcal{K}$ y, por el Teorema de Hahn-Banach converge en topología $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$.

Proposición 2.3.8.

Si $\mathcal{E}$ contiene una copia isomorfa de ℓ_1, entonces existe un operador lineal completamente continuo y sin compacidad $\mathcal{S} : \mathcal{E} \to \ell_2$ tal que $\mathcal{S}$ acepta en ℓ_2 la copia isomorfa de l_1.

Demostración. Ver la primera parte de la demostración del Teorema em [1].

finalmente, definimos que son operadores casi débilmente compactos.

Definición 2.3.9.

Sean $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espacios con norma. Un operador lineal $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ y dicho casi débilmente compacto si para cada sucesión $(z_n)_n \subset \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$, la sucesión $(\mathcal{T}(z_n))_n$ contiene una subsucesión débilmente Cauchy.

Observación 2.3.10.

Observe que todo operador lineal casi débilmente compacto y acotado. En efecto, si $\mathcal{T}$ es casi débilmente compacto, entonces cualquier $(z_n)_n \subset \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ admite una subsucesión $(z_{n_k})_k$ tal que $(\mathcal{T}(z_{n_k}))_k$ es una sucesión débilmente de Cauchy en $\mathcal{Y}^*$. Esto significa que, dada cualquier $\psi \in \mathcal{Y}^*$,la sucesión $(\psi(\mathcal{T}(z_{n_k})))_k$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y consecuentemente, es acotada. Más, si $\mathcal{T}$ no es acotado, $\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})$ no es débilmente acotado. así mismo, existe $\psi \in \mathcal{Y}^*$ tal que

$$\sup\{|\psi(\mathcal{T}(x))| : x \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}\} = \infty.$$

Sigue desde que existe $(z_n)_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ tal que $|\psi(\mathcal{T}(z_n))| > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y claro que, para esta $(z_n)_n$, $(\mathcal{T}(z_n))_n$ no admite subsucesión débilmente de Cauchy.

Observación 2.3.11.

Según la definición de operador casi débilmente compacto y del Teorema de Smulian que todo operador débilmente compacto y casi débilmente compacto. En efecto, si $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *es operador débilmente compacto, entonces* $\overline{\mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$ *es débilmente compacto. Asimismo, dado* $(z_n)_n \subset \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$*, por el Teorema de Smulian,* $(\mathcal{T}(z_n))_n$ *admite subsucesión que converge débilmente en* $\overline{\mathcal{T}(B_{\mathcal{X}})}$ *siendo, por tanto, débilmente Cauchy.*

Capítulo 3. Las Propiedades de Dunford-Pettis y de Dunford-Pettis Heereditaria

3.1 La Propiedad de Dunford-Pettis

Definición 3.1.1.

Decimos que $\mathcal{X}$ tiene la Propiedad de Dunford-Pettis si $z_n^*(z_n) \to 0$ siempre que $(z_n)_n$ y $(z_n^*)_n$ son sucesiones en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente, tal que $z_n \xrightarrow{\omega} 0$ y $z_n^* \xrightarrow{\omega} 0$. En ese caso, por simplicidad, escribiremos que $\mathcal{X}$ tiene (DP).

Gran parte del interés de una Propiedad de Dunford-Pettis resulta de importancia desde espacios que la poseen. Un primer ejemplo de espacio con tal propiedad ℓ_1 es.

Ejemplo 3.1.2.

ℓ_1 tiene (DP) pues si $z_n \xrightarrow{\omega} 0$ en ℓ_1 entonces $z_n \to 0$ ya que ℓ_1 tiene la Propiedad de Schur. Además, si $z_n^* \xrightarrow{\omega} 0$ en $(\ell_1)^*$ entonces existe $\mathcal{M} > 0$ tal que $\|z_n^*\| \leq \mathcal{M}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Asimismo,

$$|z_n^*(z_n)| \leq \|z_n^*\|\|z_n\| \leq \mathcal{M}\|z_n\|$$

y como $z_n \to 0$ tenemos el resultado.

Note que, el hecho determinante para que ℓ_1 tiene (DP) y tal espacio posee la Propiedad de Schur. Siendo así, el mismo argumento usado arriba puede ser usado para verificar:

Proposición 3.1.3

Si $\mathcal{X}$ tiene la Propiedad de Schur entonces $\mathcal{X}$ tiene (DP)

Corolario 3.1.4

Si $\mathcal{X}$ es espacio de dimension finita, entonces $\mathcal{X}$ tiene (DP).

Demostración. Inmediato la Proposición anterior ya que, si dim$(\mathcal{X}) < \infty$ *entonces las topologías debil y fuerte de* $\mathcal{X}$ *coinciden, garantizando que* $\mathcal{X}$ *tiene la Propiedad de Schur.*

Ejemplo 3.1.5.

ℓ_2 *no tiene (DP). De hecho, considere* $(a_n)_n \subset \ell_2$ *una sucesión formada por los vectores de base canónica de* ℓ_2. *Note que* $a_n \xrightarrow{\omega} 0$ *ya que, por el ejemplo 1.1.25, para cada* $g \in \mathcal{X}^*$ *existe único* $x_g = ({x^1}_g, {x^2}_g, \dots) \in (\ell_2)^* \cong \ell_2$ *tal que* $g(x) = \langle x, x_g \rangle$ *para todo* x *en* ℓ_2. *Siendo así* $|g(a_n)| = |{x^n}_g| \to 0$ *pues* $x_g \in \ell_2$. *De esta forma, para cada* $g \in \mathcal{X}^*$, $g(a_n) \to 0$ *lo que muestra que* $(a_n)_n$ *es débilmente nula. Además, tomando* $(a_n^*)_n \subset (\ell_2)^*$ *nuevamente los vectores de base canónica, tenemos que* $(a_n^*)_n$ *y* $(a_n)_n$ *son sucesiones débilmente nulas, mas* $a_n^*(a_n) = 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *y por tanto* ℓ_2 *no tiene (DP).*

La próxima proposición nos dará una condición suficiente para que $\mathcal{X}$ tiene (DP).

Proposición 3.1.6

Si $\mathcal{X}^*$ *tiene (DP) entonces* $\mathcal{X}$ *tiene (DP).*

Demonstración. Sean $(z_n)_n$ y $(z_n^*)_n$ sucesiones débilmente nulas en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente por la Proposición 1.1.48 $\widehat{z}_n \xrightarrow{\omega} 0$ en $\mathcal{X}^{**}$. De esa forma, $(\widehat{z}_n)_n \subset \mathcal{X}^{**}$ y $(z_n^*)_n \subset \mathcal{X}^*$ sucesiones débilmente nulas. Como $\mathcal{X}$ tiene (DP), por hipótesis, entonces $(\widehat{z}_n)(z_n^*) \to 0$ esto es $z_n^*(z_n) \to 0$ y por tanto $\mathcal{X}$ propia (DP).

Con esto, obtenemos de forma casi inmediata un segundo ejemplo de espacio con (DP).

Corolario 3.1.7.

c_0 *tiene (DP).*

Demonstración. Como sea visto, ℓ_1 tiene (DP) y por tanto basta utilizar la Proposición 3.el hecho de que $(c_0)^* = \ell_1$

Note que, por la Proposición 3.1.3, si $\mathcal{X}$ tiene la Propiedad de Schur, entonces $\mathcal{X}$ tiene (DP). Como acabamos de ver, c_0 tiene (DP) pero no tiene la Propiedad de Schur una vez que $a_n \overset{\omega}{\to} 0$ en c_0 y $\|a_n\| = 1$ para todo $n \in N$. Así que, la recíproca de la Proposición 3.1.3 no es valida.

Además, después enunciada la Proposición 3.1.6, es natural nos perguntamos si la recíproca es verdadera, esto es, si $\mathcal{X}$ posee (DP) implica en $\mathcal{X}^*$ tiene (DP). Más adelante, construiremos un contra-ejemplo para verificar que tal hecho no valdra siempre. Ver ejemplo 3.1.23.

Teorema 3.1.8.

Sea $\mathcal{K}$ un espacio de Hausdorff compacto. Entonces $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ tiene (DP).

Demonstración. Sean $(h_n)_n$ y $(H_n)_n$ sucesiones débilmente nulas em $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ y $\mathcal{C}(\mathcal{K})^*$ respectivamente $\epsilon > 0$ arbitrario. Afirmamos que $H_n(h_n) \to 0$

Como $h_n \overset{\omega}{\to} 0$ y $H_n \overset{\omega}{\to} 0$ por Teorema 1.1.36 tenemos que $A = \sup_n \| \ h_n(x)\| \leq \infty$ y $B = \sup_n \| \ H_n(x)\| \leq \infty$

Ahora, para cada $n \in N$, podemos escribir $H_n = H_n^+ - H_n^-$ donde H_n^+ y H_n^- son funciones lineales positivos contınuos. Usando el Teorema 1.4.26 podemos identificar cada H_n con una carga α_n en $\mathcal{K}$ y, por el Teorema 1.4.20, cada α_n puede ser identificada con un par de medidas finitas α_n^+ y α_n^- tal que $\alpha_n = \alpha_n^+ - \alpha_n^-$ y $|\alpha_n| = \alpha_n^+ + \alpha_n^-$

Como $H_n^+(h_n) \to 0$ y $H_n^-(h_n) \to 0$ implica $H_n(h_n) \to 0$ sin perdida de generalidad podemos suponer que los H_n son todos positivos. Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, a medida ν_n de Borel regular finita identificada con H_n por el Teorema 1.4.26. entonces [

$$H_n(h_n) = \int h_n d\nu_n \text{ y } \|H_n(x)\| = \nu_n(\mathcal{K}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

De esta forma, como $(H_n)_n$ es débilmente nula, $\nu_n \overset{\omega}{\to} 0$ en $\mathcal{M}(\mathcal{K})$ y, por la Proposición

1.4.29, existe una medida finita ν sobre $\mathcal{K}$ tal que la sucesión $(\nu_n)_n$ de medidas y equiabsolutamente contınua con respecto a ν, esto es, dado $\epsilon > 0$, existe $\Lambda > 0$ tal que.

$$|\nu_n(\cup)| < \epsilon \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ siempre que } \cup \subset A \text{ y } \nu(\cup) < \delta$$

(3.1) donde $\mathcal{A}$ representa a σ-álgebra de Borel.

Además como $(h_n)_n$ es sucesión débilmente nula en $\mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{A}, \nu)$ y $\nu(\mathcal{K}) < \infty$, por el Teorema 1.4.23 $(h_n)_n$ converge casi uniformemente para cero, esto es, existe V_0 en $\mathcal{A}$ tal que $\nu(V_0) = 0$ y $(h_n)_n$ converge uniformemente a cero en $\mathcal{K} \setminus V_0$. De esta convergencia uniforme obtenemos la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\ h_n(t)| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ y } t \in \mathcal{K} \setminus V_0 \qquad (3,2)$$

y, de (3.1), obtenemos también que

$$|\nu_n(V_0)| < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Recordamos que $A = \sup_n \|\ h_n(x)\|$ y, por el Teorema de Representación de Riesz

$\sup_n \nu_n(\mathcal{K} \setminus U_0) \leq \sup_n \nu_n(\mathcal{K}) \sup_n \|\ H_n(x)\| = B$ de modo que para todo $n \geq n_0$ tenemos

$$|H_n(h_n)| = \left| \int_k h_n d\nu_n \right| \leq \int_{U_0} \|\ h_n(x)\| d\nu_n + \int_{\mathcal{K} \setminus U_0} \|h_n(x)\| d\nu_n$$

$$\leq A\nu_n(U_0) + B \sup |h_n(t)| : t \in \mathcal{K} \setminus U_0 < A\epsilon + B\epsilon$$

mostrando que $H_n(h_n) \to 0$

Corolario 3.1.9.

Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida. Entonces $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$ tiene (DP).

Demonstración. Observamos que, por el Teorema 1.4.24, existe un espacio de Hausdorff $\mathcal{K}$ es un isomorfismo entre $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$ y $\mathcal{M}(\mathcal{K})$, y por la última proposición, este tiene (DP).

En particular, la Observación 1.4.16, sigue que ℓ_∞ tiene (DP).

Corolario 3.1.10.

Sea $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida. Entonces $\mathcal{L}_1(X, \mathcal{A}, \nu)$ tiene (DP).

Demostración. Por el Corolario anterior,$\mathcal{L}_\infty(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$ tiene (DP). Como $(L_1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu))^*$ es isometricamente isomorfo a $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$, entonces $(L_1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu))^*$ tiene (DP) y según la Proposición 3.1.6 el resultado.

Proposición 3.1.11.

Si $\mathcal{X}$ tiene (DP) e $\mathcal{Y}$ es un subespacio complementado de $\mathcal{X}$, entonces $\mathcal{Y}$ tiene (DP).

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ espacio que tiene (DP) e $\mathcal{Y}$ un subespacio complementado de $\mathcal{X}$.Luego, existe $P : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ proyección lineal acotada. Como $\mathcal{Y}$ es subespacio complementado, por la observación 1.1.20 $\mathcal{Y}$ es cerrado y por tanto es espacio de Banach. Falta demostrar que si $(y_n)_n$ e $({y^*}_n)_n$ son sucesiones débilmente nulas en $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Y}^*$ respectivamente, entonces $y_n^*(y_n) \to 0$. Consideremos entonces sucesiones con tales propiedades. Como $y_n \overset{\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*)}{\to} 0$ entonces $y_n \overset{\sigma(\mathcal{X},\mathcal{X}^*)}{\to} 0$ ya que si $h \in \mathcal{X}^*$ entonces $h|_\mathcal{Y} \in \mathcal{Y}^*$. Además, observe que $P^*(y_n^*)$ converge débilmente a cero en $\mathcal{X}^*$ entonces, como P es acotado, sigue que su adjunto P^* también lo es, siendo por tanto $\sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^*) - \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ continua y llevando sucesiones débilmente nulas en débilmente nulas. Asimismo, $(P^*(y_n^*))_n$ e $(y_n)_n$ son sucesiones débilmente nulas en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente es, como $\mathcal{X}$ tiene (DP) entonces $P^*(y^*)_n(y_n) \to 0$ esto es $y_n^*(P(y_n)) \to 0$ Como P es proyección de $\mathcal{X}$ sobre $\mathcal{Y}$, entonces $P(y) = y$ para cada $y \in \mathcal{Y}$, por tanto $y_n^*((y_n)) \to 0$ que garantice que $\mathcal{Y}$ también tiene (DP).

Corolario 3.1.12

Si $\mathcal{Y} = \overline{[\{e_n\}_n]}$ *donde* e_n *denotan las funciones de Rademacher, entonces* $\mathcal{Y}$ *es subespacio complementado de* $\mathcal{L}_p[0,1]$ *para* $1 < p < \infty$*, más* $\mathcal{Y}$ *no es complementado en* $\mathcal{L}_1[0,1]$

Demostración. Se fija $1 < p < \infty$ y define la aplicación lineal $\mathcal{T}_p : \ell_2 \to \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{L}_p[0,1]$ por

$$\mathcal{T}_p((b_n)_n) = \sum_{i=1}^{\infty} b_n e_n$$

Note que, por Teorema 1.3.3, existen constantes positivas A_p, B_p tal que

$$A_p \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \right\|_p \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y como $(b_n)_n \in \ell_2$ haciendo $n \to \infty$ obtenemos que

$A_p \|(b_n)_n\|_2 \leq \|\mathcal{T}((b_n)_n)\|_p \leq B_p \|(b_n)_n\|_2$ lo que muestra que $Y \hookrightarrow \mathcal{L}_p[0,1]$ es isomorfo a ℓ_2 Más, por el Teorema 1.4.25, tenemos que $\ell_2 \hookrightarrow \mathcal{L}_p[0,1]$ es complementado. Como $Y \cong \ell_2$ obtenemos que $\mathcal{Y}$ es complementado en $\mathcal{L}_p[0,1]$. Por otro lado, observe que $\mathcal{Y}$ no es complementado en $\mathcal{L}_1[0,1]$ De hecho, por la Proposición 3.1.10, $\mathcal{L}_1[0,1]$ tiene (DP) y si $\mathcal{Y}$ fuera complementado, también la tendría. Más, en este caso, $\ell_2 \cong Y$ tendría (DP), lo que no ocurre por el ejemplo 3.1.5.

El próximo teorema nos daria algunas condiciones que son equivalentes a un espacio propio (DP).Para demostrar las implicaciones, necesitaremos las siguientes proposiciones.

Proposición 3.1.13

Sea $\mathcal{X}$ *un espacio normado y* $(z_n)_n \subset \mathcal{X}$ *una sucesión que converge débilmente en* $\mathcal{X}$*. Si* $\mathcal{E} = \{z_n : n \in N\}$ *entonces el hecho* $\overline{\mathcal{E}_b}$ *da envoltoria absolutamente convexa de* $\mathcal{E}$ *y débilmente compacto.*

Demonstración. Por la Proposición 1.1.51 tenemos que el cerrado $\overline{\Gamma(\mathcal{E})}$ da envoltoria convexa de $\mathcal{E}$ es débilmente compacto. Por otro lado, por la Observación 1.1.13 tenemos que

$$\mathcal{E}_b = p([-1,1] \times \Gamma(\mathcal{E}))$$

donde $p : R \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ y la aplicación produto $p((\Lambda, x)) = \Lambda x$. Y fácil verificar que

$$p : R \times (\mathcal{X}, \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)), \to (\mathcal{X}, \sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*))$$

es continuo. Asimismo ,$p([-1,1] \times \Gamma(\mathcal{E}))$ es un subconjunto débilmente compacto de $\mathcal{X}$ y, consecuentemente, $\mathcal{E}_b = p([-1,1] \times \Gamma(\mathcal{E}))$ y relativamente débilmente compacto, o sea, $\overline{\mathcal{E}_b}$ es débilmente compacto.

Proposición 3.1.14

Si $\mathcal{Q}$ es un subconjunto compacto de un espacio de Banach $\mathcal{X}$, entonces existe un espacio de Banach reflexivo $\mathbb{R}$ *y un operador lineal* $\mathcal{T} : R \to \mathcal{X}$ tal que $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{R}})$

Demonstración. ver [7], Proposición 2, p.314.

Teorema 3.1.15.

Son equivalentes:

i) $\mathcal{X}$ tiene (DP).

ii) Para cada espacio de Banach $\mathcal{Y}$, todo operador lineal débilmente compacto de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ acepta conjuntos débilmente compactos de $\mathcal{X}$ sobre conjuntos fuertemente compactos de $\mathcal{Y}$.

iii) Para todo espacio de Banach $\mathcal{Y}$, todo operador lineal débilmente compacto de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ y completamente continuo.

iv) La condición (iii) y satisface para $\mathcal{Y} = c_0$

v) Para todo espacio de Banach $\mathcal{Y}$, todo operador lineal débilmente compacto de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ acepta sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones de Cauchy.

vi) La condición (v) es satisfecha para $\mathcal{Y} = c_0$

vii) Si $(z_n)_n$ es una sucesión débilmente Cauchy en $\mathcal{X}$ y $({z^*}_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $\lim_n z_n^*(z_n) = 0$

viii) Si $(z_n)_n$ es una sucesión débilmente nula en $\mathcal{X}$ y $({z^*}_n)_n$ es una sucesión débilmente Cauchy en $\mathcal{X}^*$ entonces $\lim_n {z^*}_n(z_n) = 0$

ix) Si $(z_n)_n$ y $(z_n^*)_n$ son sucesiones débilmente Cauchy en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente, entonces $z_n^*(z_n)$ es convergente.

x) Para todo espacio de Banach $\mathcal{Y}$, todo operador $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ com adjunto casi débilmente compacto y completamente continuo.

xi) La condición (x) es satisfecha para $y = c_0$

xii) Para todo espacio de Banach $\mathcal{Y}$, todo operador lineal casi débilmente compacto $\mathcal{T} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ tiene adjunto completamente continuo.

xiii) La condición (xiii) y satisfecha para $\mathcal{Y}$ espacio de Banach reflexivo.

Demonstración. $(i \Rightarrow iii)$ Sea $\mathcal{X}$ espacio que tiene (DP), tome $\mathcal{Y}$ espacio de Banach $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operador lineal débilmente compacto. Basta mostrarnos que dada $(z_n)_n \subset \mathcal{X}$ tal que $z_n \overset{w}{\to} 0$ entonces $\mathcal{T}(z_n) \to 0$. Suponga que esto no ocurra. En ese caso, existe $\Lambda > 0$ tal que, pasando a una subsucesión si necesario, tenemos

$$\|\mathcal{T}(z_n)\| \geqslant \Lambda \text{ para cada } n \in \mathbb{N}$$

Por el Corolario 1.1.33 para cada $n \in N$ existe $y_n^* \in \mathcal{Y}^*$ tal que $\|y_n^*\| = 1$ e $y_n^*(\mathcal{T}(z_n)) = \|\mathcal{T}(z_n)\| \geqslant \Lambda$. Como $\mathcal{T}$ es débilmente compacto, por el Teorema 2.3.4, $\mathcal{T}^*$

débilmente compacto y por tanto $\overline{\mathcal{T}^*(\mathcal{B}_{\mathcal{Y}^*})}$ es débilmente compacto. Asimismo, como la sucesión $\mathcal{T}^*(\mathcal{Y}^*)_n$ esta contenida en $\overline{\mathcal{T}^*(\mathcal{B}_{\mathcal{Y}^*})}^w$ nuevamente pasando la subsucesión es necesario, por el Teorema de Teorema 2.3.7 existe $z_0^* \in \overline{\mathcal{T}^*(\mathcal{B}_y^*)}$ tal que $\mathcal{T}(y_n^*) \xrightarrow{\omega} z_0^*$. Más entonces, $(\mathcal{T}(y_n^*) - z_0^*) \xrightarrow{\omega} 0$ en $\mathcal{X}^*$ y $z_n \xrightarrow{\omega} 0$ en $\mathcal{X}$ lo que nos da

$$\lim_n (\mathcal{T}(y_n^* - z_0^*)(z_n) = \lim_n (y_n^*(\mathcal{T}(z_n)) - z_0^*(z_n) = 0 \qquad (3{,}4)$$

ya que $\mathcal{X}$ tiene (DP). Además, como $z_n \xrightarrow{\omega} 0$. entonces $z_0^*(z_n) \to 0$ escribiendo

$$y_n^*(\mathcal{T}(z_n)) = (y_n^*(\mathcal{T}(z_n)) - z_0^*(z_n)) + z_0^*(z_n)$$

concluimos, pasando hacia limite en ambos lados la igualdad y usando (3.4), que

$$\lim_n y_n^*(\mathcal{T}(z_n)) = 0$$

lo que contradice el hecho de $\|\mathcal{T}(z_n)\| \geq \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Luego, $\mathcal{T}(z_n) \to 0$ es completamente continuo.

$(iii \Rightarrow iv)$ Basta hacer $\mathcal{Y} = c_0$, ya que este es espacio de Banach.

$(iv \Rightarrow i)$ Sea $\mathcal{X}$ espacio con la propiedad (iv).Tomemos (z_n) y (z_n^*) sucesiones débilmente nulas en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente y considere

$$\mathcal{T} : \mathcal{X} \to c_0$$

$$z \longmapsto (z_n^*(z))_n$$

$\mathcal{T}$ queda bien definida entonces como $z_n^* \to 0$ entonces $z_n^*(z) \to 0$ para cada $z \in \mathcal{X}$ Además, $\mathcal{T}$ claramente es lineal,y es acotada entonces si $z \in \mathcal{X}$ entonces

$$\|\mathcal{T}(z)\| = \sup_n |z_n^*(z)| \leq \sup_n \|z_n^*\| \|(z)\| \leq c\|z\|$$

ya que, como (z_n^*) es débilmente nula,y acotada.

Afirmamos que es débilmente compacto. Para eso, mostraremos que $\mathcal{T}^{**}(\mathcal{X}^{**}) \subset \mathcal{J}(c_0)$ y usaremos el Teorema 2.3.4. En efecto, como c_0^* isometricamente isomorfo a ℓ_1 tenemos

$$\mathcal{T}^* : \ell_1 \to \mathcal{X}^*$$

$$\xi = (\Lambda_n)_n \longmapsto \xi \circ \mathcal{T}$$

donde, para cada $z \in \mathcal{X}$

$$\mathcal{T}^*(\xi)(z) = \xi(\mathcal{T}(z)) = \xi((z_n^*(z))_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(\Lambda_n z_n^*)(z)$$

Luego, $\mathcal{T}^*(\xi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n z_n^*(z)$ para cada $\xi = (\Lambda_n)_n \in \ell_1$

Además,

$$\mathcal{T}^{**} : \mathcal{X}^{**} \to c_0^{**}$$

$$\mathcal{X}^{**} \longmapsto z^{**} \circ \mathcal{T}^*$$

y, para cada $\xi = (\Lambda_n)_n \in \ell_1$ tenemos

$$\mathcal{T}^{**}(z^{**})(\xi) = z^{**}(\mathcal{T}^*(\xi)) = z^{**}(\sum_{n=1}^{\infty}(\Lambda_n z_n^*)) = z^{**}(\lim_k \sum_{n=1}^{k}(\Lambda_n z_n^*))$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_k \sum_{n=1}^{k}(\Lambda_n(z^{**}(z_n^*)) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n(z^{**}(z_n^*) = \xi(z^{**}((z_n^*)_n))$$

$$= \mathcal{J}((z^{**}(z_n^*))_n))(\xi)$$

donde en $(*)$ fue utilizado el hecho z^{**} de ser lineal y acotado.

Así, $\mathcal{T}^{**}(z^{**}) = \mathcal{J}((z^{**}(z_n^*))_n))$ y como $((z^{**}(z_n^*)))_n) \in c_0$ ya que $(z_n^*)_n$ es débilmente nula, entonces $\mathcal{T}^{**}(z^{**}) \in \mathcal{J}(c_0)$. Por el Teorema 2.3.4 $\mathcal{T}$ es débilmente compacto y por la hipótesis sería completamente continuo. Luego, como $(z_n)_n$ es débilmente nula,

$T(z_n) \to 0$, lo que proporciona

$$\lim_m \|\mathcal{T}(z_m)\| = \lim_m \sup_n |z_n^*(z_m)| = 0 \qquad (3,5)$$

Más

$$0 \leq |z_m^*(z_m)| \leq \sup_n |z_n^*(z_m)| \qquad (3,6)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Esto, junto a (3.5), permite concluir que $z_m^*(z_m) \to 0$ mostrando que $\mathcal{X}$ tiene (DP).

$(ii \Leftrightarrow iii)$ Basta observar que, por definición, todo operador lineal débilmente compacto es acotado y utilizar la Propocisión 2.2.6.

$(v \Leftrightarrow iii)$ Supongamos que $\mathcal{X}$ tiene la propiedad (iii). Sea $\mathcal{Y}$ un espacio de Banach,$\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un operador lineal débilmente compacto y $(z_n)_n \subset \mathcal{X}$ una sucesión débilmente Cauchy. Entonces, para cada $z^* \in \mathcal{X}^*$, $(z^*(z_n))_n \subset R$ es Cauchy y por tanto

$$\lim_k (z^*(z_{n_k}) - z^*(z_{n'_K})) = \lim_k (z^*(z_{n_k} - z_{n'_K}) = 0$$

Siempre que $(z_{n_k})_k$ y $(z_{n'_k})_k$ son subsucesiones de $(z_n)_n$. Así $(z_{n_k} - z_{n'_k})_k$ es débilmente nula y como $\mathcal{T}$ es completamente continuo entonces $\mathcal{T}(z_{n_k} - z_{n'_k}) \to 0$. Como $\mathcal{T}$ es lineal y $(z_{n_k})_k$ y $(z_{n'_k})_k$ son subsucesiones arbitrarias de $(z_n)_n$ concluimos que $\mathcal{T}(z_n))_n$ es de Cauchy.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{X}$ es un espacio con la propiedad (v). Sea $\mathcal{Y}$ un espacio de Banach, $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un operador lineal débilmente compacto y $(z_n)_n \subset \mathcal{X}$ una sucesión débilmente nula.Es claro que $(z_n)_n$ es débilmente Cauchy y, por hipótesis,$\mathcal{T}(z_n))_n$ también es Cauchy, siendo por tanto convergente, ya que $\mathcal{Y}$ es espacio de Banach. Además,como $(z_n)_n$ converge débilmente a cero y $\mathcal{T}$ es $\sigma(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*) - \sigma(\mathcal{Y}, \mathcal{Y}^*)$continuo (ya que es acotado) obtenemos que $\mathcal{T}(z_n)$ converge débilmente a cero donde concluimos, utilizando el hecho de $\mathcal{T}(z_n)$ ser convergente, que

$\mathcal{T}(z_n) \to 0$, lo que muestra que $\mathcal{T}$ es completamente continuo.

$(vi \Leftrightarrow iv)$ Basta tomar $\mathcal{Y} = c_0$ una demostración anterior.

$(i \to viii)$ Supongamos que $\mathcal{X}$ tiene (DP) y tomemos una sucesión débilmente Cauchy $(z_n)_n \subset \mathcal{X}$ es una sucesión débilmente nula $(z_n^*) \subset \mathcal{X}^*$. Afirmamos que $z^*(z_n) \to 0$. Suponga que esto no ocurra. En este caso, existe $\Lambda > 0$ tal que, pasando la subsucesión sea necesario, podemos suponer

$$|z_n^*(z_n)| \geq \Lambda \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \qquad (3{,}7)$$

Ahora,como $(z_n^*)_n$ es débilmente nula entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo, $\lim\limits_n n^*(z_k) = 0$ Asimismo, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_{n_k}^*(z_k)| \leq \frac{\Lambda}{2} \qquad (3{,}8)$$

Consideremos entonces la subsucesión débilmente nula $(z_{n_k}^*)_k$ de z_n^* como $(z_n)_n$ y débilmente Cauchy resulta que $(z_{n_k} - z_k)_k$ es débilmente nula y como, por hipótesis, $\mathcal{X}$ tiene (DP), entonces $\lim\limits_k z_{n_k}^*(z_{n_k} - z_k) = 0$ por tanto existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_{n_k}^*(z_{n_k} - z_k)| \leq \frac{\Lambda}{4} \text{ para cada } k \geq k_0 \qquad (3{,}9)$$

Más entonces, para $k \geq k_0$ tenemos

$$0 < \Lambda \leq |z_{n_k}^*(z_{n_k})| \leq |z_{n_k}^*(z_{n_k} - z_k)| + |z_{n_k}^*(z_k)| \overset{(3,8),(3,9)}{\leq} \frac{3\Lambda}{4}$$

lo que es absurdo. Este absurdo fue generado por suponer que $(z_n^*(z_n))_n$ no converja a cero.Luego, $\lim\limits_n z_n^*(z_n) = 0$ y tenemos el resultado.

$(vii \Rightarrow xiii)$ Supongamos que $\mathcal{X}$ es un espacio con la propiedad (vii). Sea $\mathcal{Y}$ un espacio de Banach arbitrario y $T : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un operador lineal casi débilmente compacto.Afirmamos que $\mathcal{T}^*$ completamente continuo.En efecto, suponga que exista $(z_n^*)_n \subset \mathcal{X}^*$ tal que $z_n^* \overset{\omega}{\to} 0$ más que $\mathcal{T}^*(z_n^*)) \subset \mathcal{Y}^*$ no converje a cero. En este caso, existe $\Lambda > 0$ tal que, pasandola subsucesión sea necesario, tenemos $\|\mathcal{T}^*(z_n^*)\| \geq \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Más

$$\|\mathcal{T}^*(z_n^*)\| = \sup_{y \in B_y} |(\mathcal{T}^*(z_n^*)(y))| > \Lambda$$

y por tanto, usando la definición de supremo, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos mostrar

$$y_n \in \mathcal{B}_y \text{ tal que } |(\mathcal{T}^*(z_n^*)(y_n))| = |z_n^*(\mathcal{T}(y_n))| > \Lambda \qquad (3{,}10)$$

Ahora, como $\mathcal{T}$ es casi débilmente compacto e $(y_n)_n$ es una sucesión acotada tenemos que $(\mathcal{T}(y_n))_n$ admite subsucesión débilmente Cauchy que, por simplicidad, vamos a suponer la propiedad $(\mathcal{T}(y_n))_n$.

Además, $\mathcal{T}^*$ y $\sigma(\mathcal{X}^*, \mathcal{X}^{**}) - \sigma(\mathcal{Y}^*, \mathcal{Y}^{**})$ continuo y, como $z_n^* \overset{\omega}{\to} 0, \mathcal{T}^*(z_n^*) \overset{\omega}{\to} 0$ en $\mathcal{Y}^*$ y por tanto $\mathcal{T}^*(z_n^*(y) \to 0$ para todo $y \in \mathcal{Y}$. En particular, para cada $k \in N$ fijo

$$\lim_n \mathcal{T}^*(z_n^*)(y_k) = 0$$

y entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\mathcal{T}^*(z_{n_k}^*)(y_k)| < \frac{\Lambda}{2}$$

Asimismo tenemos:

$$|\mathcal{T}^*(z_{n_k}^*)(y_{n_k})| \leq |\mathcal{T}^*(z_{n_k}^*)(y_{n_k}) - \mathcal{T}^*(z_{n_k}^*)(y_k)| + |\mathcal{T}^*(z_{n_k}^*(y_k)|$$

$$< |(z_{n_k}^*(T(y_{n_k}) - T(y_k))| + \frac{\Lambda}{2}$$

ya que vale (3.11). Aun más, como $(\mathcal{T}(y_n))_n$ es débilmente Cauchy e $(\mathcal{T}(y_{n_k}))_k$ es subsucesión de $(\mathcal{T}(y_n))_n$ tenemos que $(\mathcal{T}(y_{n_k}) - \mathcal{T}(y_k))_k$ converge débilmentea cero.

Siendo $(\mathcal{X}_n^*)_n$ débilmente nula, y utilizando el hecho de $\mathcal{X}$ tiene la propiedad (vii) concluimos que

$$\lim_k (z_{n_k}^*)(\mathcal{T}(y_{n_k}) - \mathcal{T}(y_k)) = 0$$

y por tanto es posible obtener $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$|\mathcal{T}^*(z_{n_k}^*(y_{n_k})| < \Lambda$

siempre que $k \geq k_0$, lo que es absurdo de acuerdo con (3.10). el absurdo fue generado por suponer que $\mathcal{T}^*$ no era completamente continuo y por tanto tenemos el resultado.

$(xii \Rightarrow xiii)$ Inmediato.

$(xiii \Rightarrow i)$ Sea $\mathcal{X}$ espacio que tiene la propiedad $(xiii)$, esto es, tal que si $\mathcal{Y}$ es un espacio de Banach reflexivo arbitrario y $\mathcal{T} : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ es un operador lineal casi débilmente compacto entonces $\mathcal{T}^* : \mathcal{X}^* \to \mathcal{Y}^*$ es completamente continuo. Afirmamos que $\mathcal{X}$ tiene (DP). En efecto, sean $(z_n)_n$ y $(z_n^*)_n$ sucesiones débilmente nulas en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente. Sea $\mathcal{E} = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ y considere el operador lineal $\mathcal{G} : \ell_1 \to \mathcal{X}$ definido por

$$\mathcal{G}((\Lambda_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n z_n$$

Note que $\mathcal{G}$ queda bien definida ya que, como $(z_n)_n$ es una sucesión débilmente convergente entonces es acotada, digamos por $\mathcal{M}$. Asimismo, dada $(\Lambda_n)_n \in \ell_1$ arbitraria, para cada $\mathcal{Q} \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\left\| \sum_{n=1}^{Q} \Lambda_n z_n \right\| \leq \mathcal{M} \sum_{n=1}^{k} |\Lambda_n|$$

haciendo $\mathcal{Q} \to \infty$ una desigualdad arriba, siguiendo que

$$\|G((\Lambda_n)_n)\| \leq \mathcal{M}\|(\Lambda_n)_n\|$$

y por tanto, $\mathcal{G}$ queda bien definida y es acotada.

Además,por la Proposición 3.1.13, el cerrado $\overline{\mathcal{E}_b}$ de la envoltoria absolutamente convexa de $\mathcal{E}$ es débilmente compacto.

Ahora, porla Proposición 3.1.14, existe un espacio reflexivo R y un operador $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}, \mathcal{X})$ tal que $\mathcal{E}_b \subset \mathcal{T}(\mathcal{B}_{\mathcal{R}})$. Más, como $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{R}, \mathcal{X})$ con R reflexivo, por la Proposición 2.3.3 $\mathcal{T}$ es débilmente compacto y por tanto casi débilmente compacto. por la hipótesís, $\mathcal{T}^*$ será completamente contínuo de donde obtenemos que $\mathcal{T}^*(z_n^*) \to 0$
Ahora, como $\mathcal{E}_b \subset \mathcal{T}(\mathcal{B}_R)$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $e_n \in \mathcal{B}_R$ tal que $\mathcal{T}(e_n) = z_n$
Luego

$$\|\mathcal{T}(z_n^*)\| = \sup_{\substack{e \in R \\ \|e\| = 1}} |\mathcal{T}^*(z_n^*)(e)| \geq |\mathcal{T}^*(z_n^*)(e_n)| = |z_n^*(\mathcal{T}(e_n))| = |z_n^*(z_n)|$$

y como $\mathcal{T}^*(z_n^*) \to 0$ entonces $z_n^*(z_n) \to 0$

$(viii \iff i)$ Si $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach con la propiedad (viii) entonces claramente $\mathcal{X}$ posee (DP) ya que, dadas $(z_n)_n$ y $(z_n^*)_n$ sucesiones débilmente nulas en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente entonces $(z_n^*)_n$ es débilmente Cauchy y por (viii) concluimos que $z_n^*(z_n) \to 0$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{X}$ espacio con (DP). Tomemos $(z_n)_n \subset \mathcal{X}$ sucesión débilmente nula y $(z_n^*)_n \subset \mathcal{X}^*$ sucesión débilmente Cauchy. Si $(z_n^*(z_n)_n$ al converger a cero entonces existe $\Lambda > 0$ tal que, pasando la subsucesión si necesario,

$$|z_n^*(z_n)| \geq \Lambda \qquad (3{,}12)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.Ahora, como $(z_n)_n$ es sucesión débilmente nula, por argumento análogo al hecho en $(i \Rightarrow viii)$ obtenemos sucesión $(z_k^*(x_{n_k}))_k \subset \mathbb{R}$ tal que

$$|z_k^*(z_{n_k})| \leq \frac{\Lambda}{2} \qquad (3{,}13)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$

además, como $(z_n^*)_n$ es débilmente Cauchy, entonces $(z_{n_k}^* - z_k^*)_k$ es débilmente nula y,utilizando el hecho de $\mathcal{X}$ posea (DP) y de $(z_{n_k})_k$ también sera débilmente nula, obtenemos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(z_{n_k}^* - z_k^*)(z_{n_k})| \leq \frac{\Lambda}{4} \qquad (3{,}14)$$

para todo $k \geq k_0$.Luego ,para $k \geq k_0$ tenemos

$$0 < \Lambda \overset{(3,12)}{\leq} |z_{n_k}^*(z_{n_k})| \leq |(z_{n_k}^* - z_k^*)(z_{n_k})| + |z_k^*(z_{n_k})| \overset{(3,12),(3,14)}{\leq} \frac{3\Lambda}{4}$$

lo que es absurdo. Este absurdo fue generado por el hecho de suponer que $(z_n^*(z_n))_n$ converga a cero. Luego, $\lim_n z_n^*(z_n) = 0$ tenemos el resultado.

$(ix \iff i)$ Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach con la propiedad (ix) y tomemos $(z_n)_n$ y $(z_n^*)_n$ sucesiones debilmente nulas en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente. En este caso, estas también son débilmente Cauchy y, por hipótesis, $\mathcal{X}_n^*(z_n) \to a$ Afirmamos que $a = 0$. En efecto,sean

$$y_k = \begin{cases} z_n & , si \quad k = 2n \\ 0 & , si \quad k = 2n-1 \end{cases} \quad , \qquad y_k^* = \begin{cases} z_n^* & , si \quad k = 2n \\ 0 & , si \quad k = 2n-1 \end{cases}$$

con $n \in \mathbb{N}$ Claramente. $(y_k)_k$ e $(y_k^*)_k$ convergen débilmente a cero en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente y, nuevamente por la hipótesis, $y_k(y_k)^*$ converge. Luego,

$$a = \lim_n \mathcal{Y}_{2n}^*(y_{2n}) = \lim_n \mathcal{Y}_{2n-1}^*(y_{2n-1}) = 0$$

lo que demuestra que $\mathcal{X}$ posee (DP).

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{X}$ posea (DP) y sean $(z_n)_n$ y $(\mathcal{X}_n^*)_n$ sucesiones débilmente Cauchy en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente. Entonces las sucesiones $(z_{n_k} - z_{n'_k})_k$ y $(z_{n_k}^* - z_{n'_k}^*)_k$ convergen débilmente a cero, donde $(z_{n_k})_k$ y $(z_{n'_k})$ son subsucesiones arbitrarias de $(z_n)_n$ y $(z_{n_k}^*)_k$ y $(z_{n'_k}^*)_k$ son subsucesiones arbitrarias de $(\mathcal{X}_n^*)_n$. Como

$(z_{n_k})_k$ y $(z^*_{n'_k})_k$ son aún débilmente Cauchy, utilizando la hipótesis y las implicaciones, ya conocidas, $(i) \Rightarrow (vii)$ y $(i) \Rightarrow (viii)$ tenemos que

$$\lim_k |z^*_{n'_k}(z_{n_k} - z_{n'_k})| = 0 \qquad (3{,}15)$$

$$\lim_k |(z^*_{n_k} - z^*_{n'_k})(z_{n_k})| = 0$$

Luego, como

$$|(z^*_{n_k}(z_{n_k}) - z^*_{n_k}(z_{n'_k})| \leq |z^*_{n'_k}(z_{n_k} - z_{n'_k})| + |(z^*_{n'_k} - z^*_{n'_k})(z_{n_k})|$$

para todo k,

$$\lim_k |z^*_{n_k}(z_{n_k}) - z^*_{n'_k}(z_{n'_k})| = 0 \qquad (3{,}16)$$

Por tanto, $\lim\limits_k |(z^*_{n_k}(z_{n_k}) - x^*_{n'_k}(x_{n'_k})| = 0$ y como $(z^*_{n_k}(z_{n_k})_k$ y $(x^*_{n'_k})(x_{n'_k}))_k$ son subsucesiones arbitrarias de $(z^*_n(z_n))_n$, obtenemos que $(z^*_n(z_n))_n$ es sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ es completo, concluimos que $(z^*_n(z_n))_n$ es convergente,lo que nos da el resultado

$(i \iff x)$ Sean $\mathcal{X}$ un espacio que posea (DP), $\mathcal{Y}$ un espacio de Banach arbitrario y $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un operador lineal continuo tal que $\mathcal{T} : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$ y casi débilmente compacto. Para verificar que $\mathcal{T}$ es completamente continuo, tomemos una sucesión débilmente nula $(z_n)_n$ en $\mathcal{X}$. Si $(\mathcal{T}(z_n))_n$ converge a cero entonces existe $\Lambda > 0$ tal que, pasando a una subsucesión sea necesario,tenemos $\|\mathcal{T}(z_n)\| \geq \Lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Asimismo, por el Corolario 1.1.33 de Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y^*_n \in \mathcal{Y}^*$ tal que $\|y^*_n = 1\|$ y

$$y^*_n(\mathcal{T}(z_n)) = \|\mathcal{T}(z_n)\| \geq \Lambda \qquad (3{,}17)$$

Ahora, como $(y^*_n)_n \subset B_y$ y $\mathcal{T}^*$ es casi débilmente compacto entonces $(\mathcal{T}^*(\mathcal{Y}^*_n))$ admite subsucesión débilmente Cauchy que, por simplicidad, asumiremos siendo la propia sucesión.

Además, como $(z_n)_n$ es débilmente nula y $\mathcal{T}$, siendo acotado,y $\sigma(\mathcal{X},\mathcal{X}^*)-\sigma(\mathcal{Y},\mathcal{Y}^*)$ continuo, entonces $(\mathcal{T}(z_n))_n \subset \mathcal{Y}$ también es débilmente nula o que implica en

$$\lim_n (y_k^*(\mathcal{T}(z_n))) = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$

Asimismo, para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$|y_k^*(\mathcal{T}(z_{n_k}))| = |\mathcal{T}^*(y_k^*)(z_{n_k})| < \frac{\Lambda}{2} \qquad (3{,}18)$$

De esta forma, obtenemos que

$$|\mathcal{T}^*(y_k^*)(z_{n_k})| \leq |\mathcal{T}^*(y_{n_k}^* - y_k^*)(z_{n_k})| + |\mathcal{T}^*(y_k^*)(z_{n_k})|$$

$$\overset{(3{,}18)}{\ll} |\mathcal{T}^*(y_{n_k}^* - y_k^*)(z_{n_k})| + \frac{\Lambda}{2} \qquad (3{,}19)$$

Más, como $(z_{n_k})_k$ es débilmente nula y $(\mathcal{T}^*(y_{n_k}^* - y_k^*)_k$ también lo es, ya que $(\mathcal{T}^*(y_n^*))_n$ es débilmente Cauchy, de hecho de $\mathcal{X}$ posee (DP) concluimos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$

$$|\mathcal{T}^*(y_{n_k}^* - y_k^*)(z_{n_k})| < \frac{\Lambda}{2}$$

Esto, junto a (3.19), resulta en

$$|\mathcal{T}^*(y_{n_k}^*)(z_{n_k})| = |y_{n_k}^*(T(z_{n_k}))| < \Lambda$$

para todo $k \geq k_0$, lo que es absurdo por 3.17. Tal absurdo fue generado por suponer que $\mathcal{T}$ no es completamente continuo y por tanto tenemos el resultado.

$(x \Rightarrow xi)$ Basta hacer $\mathcal{Y} = c_0$ ya que c_0 es espacio de Banach.

$(xi \Rightarrow i)$ Sea $\mathcal{X}$ un espacio tal que todo operador $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, c_0)$ con adjunto casi débilmente compacto sea completamente continuo. Tomemos $(z_n)_n$ y $(z_n^*)_n$ sucesiones débilmente nulas en $\mathcal{X}$ y $\mathcal{X}^*$ respectivamente y definimos

$$T : \mathcal{X} \to c_0$$

$$z \to (z_n^*(z))_n$$

la demonstración de $(iv \Rightarrow i)$ sabemos que $\mathcal{T}$ queda bien definido y que $\mathcal{T}$ es débilmente compacto. De esa forma, por el Teorema 2.3.4, $\mathcal{T}^*$ también es y débilmente compacto y entonces, por hipótesis, $\mathcal{T}$ es completamente continuo. finalmente, como $z_n \xrightarrow{\omega} z$ entonces $T(z_n) = z_n^*(z_n) \to 0$,mostrando que $\mathcal{X}$ posee (DP).

Corolario 3.1.16.

Sea $\mathcal{X}$ espacio que posee (DP). Si Y_1, Y_2 son espacios de Banach y $\mathcal{T}_1 : \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{X}$, $\mathcal{T}_2 : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_2$ son operadores lineales débilmente compactos, entonces $\mathcal{T}_2$ o $\mathcal{T}_1$ operador lineal compacto.

Demonstración. Como $\overline{\mathcal{T}(B_{Y_1})}$ es débilmente compacto y como, por el Teorema 3.1.15-(ii), el operador $\mathcal{T}_2$ lleva conjuntos débilmente compactos en compactos (ya que $\mathcal{X}$ posee (DP))

Entonces $\mathcal{T}_2(\overline{\mathcal{T}_1(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})})$ es compacto,y por tanto cerrado. Asimismo,

$$\overline{\mathcal{T}_2(\mathcal{T}_1(\mathcal{B}_{\mathcal{X}}))} \subset \overline{\mathcal{T}_2(\overline{\mathcal{T}_1(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})})} = \mathcal{T}_2(\overline{\mathcal{T}_1(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})})$$

y segun que $\overline{(\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1)(\mathcal{B}_{\mathcal{X}})}$ es compacto, ya que es subconjunto cerrado de compacto.

Observe que, a partir de este Corolario, resulta de forma inmediata que si $\mathcal{X}$ posee (DP) y $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ es operador lineal débilmente compacto, entonces $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T} \circ \mathcal{T}$ es compacto. Este resultado sería útil en el próximo Corolario.

Corolario 3.1.17.

Un espacio de Banach reflexivo $\mathcal{X}$ posee (DP) si,y solamente si, $\mathcal{X}$ tiene dimensión finita

Demonstración. Tomemos $\mathcal{X}$ espacio reflexivo que posee (DP). Consideremos la aplicacación identidad de $\mathcal{X}$, denotada por $I_{\mathcal{X}}$. por la Proposición 2.3.3, $I_{\mathcal{X}}$ es débilmente compacto ya que $\mathcal{X}$ es reflexivo y, por la última observación, $I_{\mathcal{X}} = I_{\mathcal{X}} \circ I_{\mathcal{X}}$ es compacto. Luego, por el Teorema 1.1.7, $\mathcal{X}$ tiene dimensión finita. La recíproca ya fue demostrada (ver Corolario 3.1.4).

Observe que la recíproca del último resultado vale sin la hipótesis de $\mathcal{X}$ sea reflexivo.

Como consecuencia inmediata del Corolario 3.1.17, obtenemos el siguiente exemplo:

Ejemplo 3.1.18.

Se $\mathcal{X} = \mathcal{L}_p(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$com $1 < p < \infty$, entonces $\mathcal{X}$ no posee (DP).

De la demostración¸ 1.4.16 sigue que, en particular, ℓ_p no posee (DP) cuando $1 < p < \infty$.

Corolario 3.1.19.

Si $\mathcal{Y}$ es un subespacio complementado reflexivo de $C[0,1]$, entonces $\mathcal{Y}$ tiene dimensión finita.

Demostración por el Teorema 3.1.8, $C[0,1]$ posee (DP) y, por la Proposición 3.1.11, $\mathcal{Y}$ también posee (DP). Luego, $\mathcal{Y}$ es reflexivo y posee (DP) y utilizando el corolario anterior concluimos que $\mathcal{Y}$ tiene dimensión finita.

Coroario 3.1.20.

Si $\mathcal{Y}$ es un subespacio complementado reflexivo de $L_1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$, donde $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$ es un espacio de medida, entonces $\mathcal{Y}$ tiene dimensión finita.

Demostración según el corolario anterior, utilizando ahora el Teorema 3.1.10, que garantiza que $L_1(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \nu)$ posee (DP).

ya verificamos que si $\mathcal{X}^*$ posee(DP) entonces $\mathcal{X}$ también lo posee. presentaremos ahora un ejemplo de espacio que posee (DP), sin que sea dual o propio. Para esto, utilizaremos el Principio de Selección Local. La demonstración El Principio de Selección Local será omitida una vez que utiliza recursos que escapan de nuestro trabajo.

Teorema 3.1.21.

(Principio de Selección Local) Sea $\mathcal{T}$ un operador lineal acotado de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$ y sea $(F_\alpha)_{\alpha \in D}$ una sucesión generalizada de subespacios de $\mathcal{Y}$, direccionados por inclusión con $Y_0 = \cup F_\alpha$ siendo un conjunto denso en $\mathcal{Y}$. Asuma que, para cada α, exista un operador lineal $\mathcal{L}_\alpha : F_\alpha \to \mathcal{X}$ tal que

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{L}_\alpha = Id_{F_\alpha} \text{ y } \limsup_{\alpha} \|\mathcal{L}_\alpha\| \leq \Lambda < \infty$$

Entonces, $\mathcal{T}^*$ es un isomorfismo de $\mathcal{Y}^*$ en $\mathcal{X}^*$ con inversa $\mathcal{S}$, satisfaciendo $\|S\| \leq \Lambda$; y existe una proyección $\mathcal{P}$ de $\mathcal{X}^*$ sobre $\mathcal{T}^*(\mathcal{Y}^*)$ con $\|P\| \leq \Lambda \|\mathcal{T}\|$.

Demonstración Vea, [16], Proposición 1, p.302.

Observación 3.1.22.

Del teorema arriba, sigue de forma inmediata que $\mathcal{T}^*(\mathcal{Y}^*)$ y complementado en $\mathcal{X}^*$. Este hecho será útil en el ejemplo que sigue.

Exemplo 3.1.23.

Sea $\mathcal{X} = (\oplus_{n=1}^{\infty} \ell_2^n)_1$ donde,para cada $n \in \mathbb{N}$, ℓ_2^n representa el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana y, si $z \in \mathcal{X}$, entonces $z = (z_n)_n$ com $z_n = (z_n^1, z_n^2 \dots z_n^n) \in \ell_2^n$

$$\|z\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{n} (z_n^i)^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Sigue de forma análoga el hecho para los espacios ℓ_p, $1 < p < \infty$, que $\mathcal{X}$ es espacio de Banach. Afirmamos que $\mathcal{X}$ posee (DP) y, para verificar tal hecho, exhibiremos un isomorfismo entre $\mathcal{X}$ y un subespacio de ℓ_1. Para esto, consideremos los conjuntos

$$\mathcal{D}_1 = \{1, -1\}, \mathcal{D}_2 = \{(1, -1), (-1, 1), (1, 1), (-1, -1)\}, \dots,$$

$$\mathcal{D}_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in \{1, -1\}\}$$

y, para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos los elementos de $\mathcal{D}_n$ por ϵ_n^k, donde $k = 1, \dots 2^n$.

Definimos entonces la aplicación $\mathcal{T}_1 : \mathcal{X} \to \ell_1$ por

$$T_1(z) = T_1((z_n)_n) = \left(\frac{1}{2} \left\langle \epsilon_1^1, z_1 \right\rangle, \frac{1}{2} \left\langle \epsilon_1^2, z_1 \right\rangle, \frac{1}{2^2\sqrt{2}} \left\langle \epsilon_2^1 z_2 \right\rangle, \frac{1}{2^2\sqrt{2}} \left\langle \epsilon_2^2 z_2 \right\rangle, \right.$$

$$\left. \frac{1}{2^2\sqrt{2}} \left\langle \epsilon_2^3 z_2 \right\rangle, \frac{1}{2^2\sqrt{2}} \left\langle \epsilon_2^4 z_2 \right\rangle, \frac{1}{2^2\sqrt{2}} \left\langle \epsilon_3^1 z_3 \right\rangle, \dots \right)$$

donde $\langle \epsilon_n^k, z_n \rangle$ representa un producto interno en ℓ_2^n

Para desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$| \langle \epsilon_n^k, z_n \rangle | \leq \|\epsilon_n^k\|_2 \|z_n\|_2 = \sqrt{n} \|z_n\|_2 \text{ para todo } n, k \in \mathbb{N}$$

y por tanto

$$\frac{1}{2^n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{2^n} \left| \langle \epsilon_n^k, z_n \rangle \right| \leq \frac{1}{2^n\sqrt{n}} 2^n \sqrt{n} \|z_n\|_2 = \|z_n\|_2.$$

Luego, $\mathcal{T}_1(z) \in \ell_1$ para todo $z \in (\bigoplus_{n=1}^{\infty} \ell_2^n)_1$

Por otro lado $\mathcal{T}_1$ claramente es lineal (según las propiedades de produto escalar en ℓ_2^n) Como $\mathcal{T}_1(z) = 0$ si, y solo si, $\langle \epsilon_n^k, z_n \rangle = 0$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$, es fácil verificar que $\mathcal{T}_1(z) = 0$ si, y solo sí, $z = 0$ y, asimismo tenemos que $\mathcal{T}_1$ es isomorfismo de $\mathcal{X}$ sobre su imagen. Luego, $\mathcal{X}$ es un espacio de Banach isomorfo a un subespacio de ℓ_1, lo que hace que $\mathcal{X}$ posea la Propiedad de Schur. Según la Proposición 3.1.3 que $\mathcal{X}$ posee (DP).

Falta mostrar $\mathcal{X}^*$ no tiene (DP). Definamos a aplicación lineal $\mathcal{T}_2 : \mathcal{X} \to \ell_2$ por

$$\mathcal{T}_2(z) = \left(\sum_{i=n}^{\infty} z_i^n \right)_n = (z_1^1 + z_2^1 + z_3^1 + \ldots z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + \ldots,$$
$$\underbrace{z_n^n + z_{n+1}^n + z_{n+2}^n + \ldots}_{\text{n-ésimo}}, \ldots) \qquad (3{,}20)$$

Es claro que $\mathcal{T}_2$ es lineal y $\mathcal{T}_2(\mathcal{X}) \subset \ell_2$ después si $\mathcal{T}_2(z) = (y_n)_n$ entonces, fijo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\|(y_1, y_2, \ldots, y_n)\|_2$ y dada por

$$\|(z_1^1, 0, 0, 0, \ldots) + (z_1^1, z_2^2, 0, 0, 0, \ldots) + (z_3^1, z_3^2, z_3^3, 0, 0, \ldots) + \ldots + (z_n^1, z_n^2, z_n^3, \ldots, z_n^n, 0, \ldots) +$$

$$(z_{n+1}^1, z_{n+1}^2, \ldots, z_{n+1}^n, 0, \ldots) + (z_{n+2}^1, z_{n+2}^2, \ldots, z_{n+2}^n, 0, \ldots) + (z_{n+3}^1, z_{n+3}^2, \ldots, z_{n+3}^n, 0, \ldots) + \ldots\|_2$$

Por tanto,

$$\|(y_1, y_2, \ldots, y_n)\|_2 \leq \|z_1\|_2 + \|z_2\|_2 + \|z_3\|_2 + \ldots = \|z\|_1$$

y, haciendo $n \to \infty$ en la desigualdad anterior, concluimos que $\mathcal{T}_2(z) \in \ell_2$ con $\|\mathcal{T}_2(z)\|_2 \leq \|z\|_1$ para todo $z \in \mathcal{X}$, lo que también garantiza que $\mathcal{T}_2$ es acotado (ver observación 3.1.22).

Verificaremos ahora que $\mathcal{T}_2^*(\ell_2)$ es un subespacio complementado de $\mathcal{X}^*$ utilizando el Principio da Selección Local (Teorema 3.1.21). Para cada $i \in \mathbb{N}$, Sea $\mathcal{Y}_i = [e_1, \ldots, e_i]$

donde e_i es el n-ésimo vector de base canónica de ℓ_2. Claramente,tenemos.

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots Y_n \subset \ldots y \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = \ell_2$$

Consideremos ahora, para cada $i \in \mathbb{N}$ la aplicación lineal $\mathcal{S}_i : \mathcal{Y}_i \rightarrow \mathcal{X}$ definida por

$$S_i(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i) = (0, (0, 0), (0, 0, 0), \ldots, (\alpha_1 \ldots, \alpha_i), (0, \ldots, 0), \ldots) \qquad (3,21)$$

para todo $(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i) \in Y_i$

Note que, para todo $(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i) \in Y_i$ e $i \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$T_2 \circ S_i(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i) = T_2(S_i(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i))$$

$$\overset{(3,20),(3,21)}{=} (\alpha_1 + \ldots + \alpha_i, 0 \ldots) = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i$$

y por tanto $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{S}_i = Id_{Y_i}$

Además, por la forma como es definida la norma en $\mathcal{X}$, sigue que

$$\|\mathcal{S}_i\| = \sup\{\|\mathcal{S}_i(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i)\|_1 : \|(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i)\|_2 \leq 1\}$$

con

$$\|\mathcal{S}_i(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_i e_i)\|_1 = \|(0, (0, 0), (0, 0, 0), \ldots, (\alpha_1 \ldots, \alpha_i), (0, \ldots, 0), \ldots)\|_1$$

$$= \|(\alpha_1 \ldots, \alpha_i)\|_2$$

Luego $\|\mathcal{S}_i\| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$ donde se sigue que

$$\sup_i \|\mathcal{S}_i\| = 1 < \infty$$

De esta forma, estamos en la hipótesis del Teorema 3.1.21, El Principio da Selección Local, de donde concluimos que $\mathcal{T}_2^*$ es un isomorfismo sobre su imagen, que $\mathcal{T}_2^*(\ell_2)$ y complementado en $\mathcal{X}^*$ (ver Observación 3.1.22).

Por fin, obtenemos que $\mathcal{X}^*$ no puede poseer (DP) pues, si la tuviera, tendriamos que $\mathcal{T}_2^*(\ell_2)$ también la poseería, por ser subespacio complementado de $\mathcal{X}^*$ (Proposición 3.1.11). Más, en este caso,$\ell_2 \cong \mathcal{T}_2^*(\ell_2)$ posea (DP), lo que no ocurre, como se vio en el Ejemplo 3.1.5.

Proposición 3.1.24

Sea $\mathcal{X}$ espacio de Banach. el espacio $\mathcal{X}^*$ posee (DP) si y solamente si para todo espacio de Banach $\mathcal{Y}$ y operador lineal débilmente compacto $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, el biadjunto de $\mathcal{T}$ es completamente continuo.

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ espacio de Banach tal que $\mathcal{X}^*$ posea (DP). Tomemos $\mathcal{Y}$ espacio de Banach arbitrario y $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operador débilmente compacto. por el Teorema 2.3.4, $\mathcal{T}^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$ también es débilmente compacto y, por tanto, casi débilmente compacto. Como $\mathcal{X}^*$ posee (DP), resulta del Teorema 3.1.15-(xiii) que el adjunto de $\mathcal{T}^*$ es completamente continuo, esto es, que $\mathcal{T}^{**}$ y completamente continuo.

Recíprocamente, sea $\mathcal{X}$ espacio de Banach con la propiedad de que para todo espacio de Banach $\mathcal{Y}$ y el operador debilmente compacto $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, tengamos $\mathcal{T}^{**} : \mathcal{X}^{**} \to \mathcal{Y}^{**}$ completamente continuo. Tomemos $(z_n^{**})_n$ y $(z_n^*)_n$ sucesiones débilmente nulas en $\mathcal{X}^*$ y $\mathcal{X}^{**}$ respectivamente y definamos

$$\mathcal{T} : \mathcal{X} \to c_0$$

$$z \longmapsto (z_n^*(z))_n$$

por la demonstración de ($iv \Rightarrow i$) en el Teorema 3.1.15, sabemos que $\mathcal{T}$ es débilmente compacto y que $\mathcal{T}^{**}(x^{**}) = \mathcal{J}((z_n^{**}(z_n))_n)$ para todo z^{**} donde $\mathcal{J}$ es la inclusión natural de c_0 en c_0^{**}. Por la hipotesis, $\mathcal{T}^{**}$ será completamente continuo y por tanto

$$\mathcal{T}^{**}(x^{**}) = \mathcal{J}((z_n^{**}(z_n^*))_n) \to 0$$

Como $\mathcal{J}$ e isometría lineal, concluimos que $(z_n^{**}(z_n^*))_n$ converge a cero y por tanto $\mathcal{X}^*$ tiene (DP).

Teorema 3.1.25.

Sea $\mathcal{X}$ espacio de Banach. Si $\mathcal{X}$ posee propiedad (DP) y no contiene copia de ℓ_1, entonces $\mathcal{X}^*$ posee la Propiedad de Schur.

Demonstración. Supongamos que $\mathcal{X}^*$ no posee la Propiedad de Schur.

Sea $(z_n^*)_n \subset \mathcal{X}^*$ una sucesión débilmente nula que no converge a cero en la topología fuerte y tal que $\|z_n^*\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún, podemos tomar $(z_n)_n \subset \mathcal{X}$ sucesión de norma unitaria tal que

$$|z_n^*(z_n)| > \frac{1}{2} \qquad (3{,}22)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo

$$\|z_n^*\| = 1 \Rightarrow \sup_{\substack{z \in \mathbb{X} \\ \|z\| = 1}} |z_n^*(z)| = 1$$

y, usando la definición de supremo, queda clara la existencia de tal sucesión.

Además, por el Teorema ℓ_1 del Teorema 1.1.69, como $\mathcal{X}$ no contiene copia de $\ell_1, (z_n)_n$ admite una subsucesión $(z_{n_k})_k$ débilmente Cauchy. Como $(z_{n_k}^*)_k$ débilmente nula como $\mathcal{X}$ posee (DP), utilizando el Teorema 3.1.15-(viii), obtenemos

$$\lim_k (z_{n_k}^*)(z_{n_k}) = 0$$

lo que es absurdo, de acuerdo con (3.22). Luego, $\mathcal{X}^*$ posee la Propiedad de Schur y por tanto posee (DP).

Como conclusión temos:

Teorema 3.1.26.

Sea $\mathcal{X}$ un espacio de Banach. entonces $\mathcal{X}^*$ posee (DP) si,y solamente si, $\mathcal{X}$ tiene (DP) y no contiene copia de ℓ_1

Demostración. Por el Teorema 3.1.25, si $\mathcal{X}$ tiene (DP) y no contiene copia de ℓ_1 entonces $\mathcal{X}^*$ posea la propiedad de Schur y por la Proposición 3.1.3, $\mathcal{X}^*$ posee (DP).

Recíprocamente, suponga que $\mathcal{X}^*$ posea (DP). Por la Proposición 3.1.6, $\mathcal{X}$ posea (DP), restando verificar que $\ell_1 \not\hookrightarrow \mathcal{X}$. Si $\ell_1 \hookrightarrow \mathcal{X}$, por la Proposición 2.3.8, existe operador lineal completamente continuo y no compacto $\mathcal{S} : \mathcal{E} \to \ell_2$ tal que $\mathcal{S}$ lleva en ℓ_2 la copia isomorfa de ℓ_1.

Sea $(z_n^*)_n \subset \mathcal{S}^*(\mathcal{B}_{\ell_2}$ cualquiera. Luego, existe $(y_n^*)_n \subset \mathcal{B}_{\ell_2})$ tal que $\mathcal{S}^*(y_n^*) = z_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora, como ℓ_2 es reflexivo, entonces $\mathcal{B}_{\ell_2}$ es débilmente compacto y, de $\mathcal{S}^*$ será contınuo obtenemos que $\mathcal{S}^*(\mathcal{B}_{\ell_2})$es débilmente compacto. Del Teorema 2.3.7 obtenemos que existe subsucesión $(\mathcal{S}^*(y_{n_k}))_k$ que converge débilmente para un punto $z^* \in \mathcal{S}^*(\mathcal{B}_{\ell_2})$. Ahora, por hipótesis, $\mathcal{X}^*$ tiene la Propiedad de Schur lo que nos garantiza que, de hecho, $\mathcal{S}^*(y_{n_k}) \to z^*$

Por tanto, existe subsucesión $(z_{n_k}^*)$ tal que $z_{n_k}^* \to z^* \in \mathcal{S}^*(\mathcal{B}_{\ell_2})$ lo que garantiza que $\mathcal{S}^*(B_{\ell_2})$ es compacto y, por tanto, que $\mathcal{S}^*$ es operador lineal compacto.Por el Teorema de Schauder (Teorema 2.2.9) segun que $\mathcal{S}$ es operador lineal compacto, lo que es absurdo pues, por hipotesis, $\mathcal{S}$ es no compacto. Luego, $\ell_1 \not\hookrightarrow \mathcal{X}$ y tenemos el resultado.

Proposición 3.1.27.

Sea $\mathcal{X}$ espacio normado y $(z_n)_n \subset \mathcal{X}$ tal que $z_n \stackrel{\omega}{\to} z$ en $\mathcal{X}$. Entonces existe $(w_n)_n \subset \mathcal{X}$, donde cada w_n es combinación convexa dos elementos de $\{x_j : k_n + 1 \leq j \leq k_{n+1}\}$ y $w_n \to z$.

Demostración. En efecto,por la Proposición 1.1.50, como $(z_n)_n$ converge débilmente a X, entonces existe $(w_n^1)_n \subset conv(\{z_n\})_n$ tal que $(w_n^1)_n \to z$. Asimismo, podemos tomar $i_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|w_{i_1}^1 - z\| < 1, w_{i_1}^1 = \sum_{j=1}^{k_2} \Lambda_j z_j \text{ y } \sum_{j=1}^{k_2} |\Lambda_j| = 1 \qquad (3{,}23)$$

Además, como $(z_n)_{n>k_2}$ también converge débilmente a X, de forma análoga al anterior, existe $(w_n^2)_n \subset conv(\{z_n\}_n \geq k_2)$ índice $i_1 < i_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|w_{i_2}^2 - z\| < \frac{1}{2}, w_{i_2}^2 = \sum_{j=k_2+1}^{k_3} \Lambda_j z_j \text{ y } \sum_{j=k_2+1}^{k_3} |\Lambda_j| = 1 \qquad (3{,}24)$$

De modo general, dado $p \in \mathbb{N}$ arbitrario, podemos considerar una sucesión $(z_n)_{n>k_p}$ que converge débilmente a X y obtener índice i_p tal que

$$\|w_{i_p}^p - z\| < \frac{1}{p}, w_{i_p}^p = \sum_{j=k_p+1}^{k_{p+1}} \Lambda_j z_j \text{ y } \sum_{j=k_p+1}^{k_{p+1}} |\Lambda_j| = 1 \qquad (3{,}25)$$

Luego,una sucesión $(w_{i_p}^p)_p$ tiene la propiedad deseada.

Referencias Bibliográficas

[1] R.M. Aron, J. Diestel, A. K. Rajappa - Weakly continuous functions on Banach spaces containing l_1. In N. Kalton and E. Saab (edr), Banach Spaces, 1-3. Springer Lecture Notes in Mathemattics 1166, Berlin (1985).

[2] P. Cembranos, The hereditary Dunford-Pettis property for $l_1(E)$, Proc. Amer. Soc. Math. 108 (1990), 947-950.

[3] W. J. Davies, T. Figiel, W. V. Johnson, A. Pelczynski, Factoring weakly compact operators, J. Functional Analysis 17 (1974), 311-327.

[4] J. Diestel, A Survey of results related to the Dunford-Pettis property, Proc. Conference on Integration. Topology and Geometry in Linear Spaces. W.Graves(ed.). Contemp. Math. vol2. Amer.Math. Soc., Providence, R.I., (1980), 15-60.