Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

La propiedad del árbol finito y el teorema de Enflo

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Richar BARTOLO AUCCATOMA

ASESOR

Dr. Leonardo Henry ALEJANDRO AGUILAR

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Bartolo, R. (2022). *La propiedad del árbol finito y el teorema de Enflo*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Richar Bartolo Auccatoma
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	44282100
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43069051
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-5354-4325
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Mg. Willy David Barahona Martínez
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10078450
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Mg. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08249640
Datos de investigación	
Línea de investigación	Análisis Funcional

Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima
Año o rango de años en que se realizó la investigación	abril 2022 - julio 2022
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 15:30 horas del sábado 23 de julio del 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2022-I): Mg. Willy David Barahona Martínez (PRESIDENTE), Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo (MIEMBRO) y el Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: “**LA PROPIEDAD DEL ÁRBOL FINITO Y EL TEOREMA DE ENFLO**”, presentado por el señor **Bachiller Richar Bartolo Auccatoma**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de **diecisiete (17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Richar Bartolo Auccatoma** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 16:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Willy David Barahona Martínez
PRESIDENTE

Lic. Carlos Augusto Ruiz De La Cruz Melo
MIEMBRO

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO ASESOR

UNMSM
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América.

INFORME DE EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

1. FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
2. ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
3. AUTORIDAD ACADÉMICA QUE EMITE EL INFORME DE ORIGINALIDAD
   Director de La Escuela Profesional de Matemática
4. APELLIDOS Y NOMBRE DE LA AUTORIDAD ACADÉMICA
   Víctor Hilario Tarazona Miranda
5. OPERADOR DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUD
   Alex Armando Cruz Huallpara
6. DOCUMENTO DE EVALUACIÓN

   Título de pre grado: LA PROPIEDAD DEL ÁRBOL FINITO Y EL TEOREMA DE ENFLO
7. **AUTOR DEL DOCUMENTO**

   Nombre y Apellido: Richar Bartolo Auccatoma

8. **FECHA DE RECEPCIÓN DE DOCUMENTO**

   ...
   ..

9. FECHA DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUDES

   Procesado el: 28-jun.-2022 16:42 -05
   Identificador: 1864308575
   Número de palabras: 21204
   Entregado: 1

10. SOFTWARE UTILIZADO

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
TURNITIN	x	
ITHENTICATE		x
OTROS(ESPECIFICAR)		x

11. CONFIGURACION DEL PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
EXCLUYE TEXTOS ENTRECOMILLADOS	x	
EXCLUYE BIBLIOGRAFÍA	x	
EXCLUYE CADENAS MENOS A 40 PALABRAS	x	
OTRO CRITERIO (ESPECIFICAR)		x

12. PORCENTAJE DE SIMILITUDES SEGÚN PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

EN LETRA	NÚMEROS
Nueve Porciento	**9%**

13. FUENTES ORIGINALES DE LAS SIMILITUDES ENCONTRADAS

4% match (Internet desde 20-oct.-2015)
http://www.readbag.com
2% match (Internet desde 15-jul.-2020)
http://www.pg.im.ufrj.br
1% match (Internet desde 16-jul.-2020)
http://www.ciencias.ula.ve
1% match (Internet desde 02-jul.-2018)
https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/14906/C_043-430.pdf?isAllowed=y&sequence=1
<1% match (Internet desde 17-jul.-2020)
https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/398404/TOT1de1.pdf?isAllowed=y&sequence=1
<1% match (Internet desde 29-ene.-2016)
http://bibcyt.ucla.edu.ve
<1% match (Internet desde 27-dic.-2021)
https://coek.info/pdf-the-dunklwilliams-constant-convexity-smoothness-and-normal-structure-.html
<1% match (Internet desde 19-may.-2020)
https://www.scribd.com/document/391688340/ApuntedeCalculoIIngemat-pdf

14. OBSERVACIONES

....

15. CALIFICACIONES DE ORIGINALIDAD

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, SIN OBSERVACIONES.	X	
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, CON OBSERVACIONES.		X
DOCUMENTO NO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD		X

16. FECHA DE INFORME

....

UNMSM
Firmado digitalmente por TARAZONA MIRANDA Victor Hilario FAU 20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 20.07.2022 09:16:15 -05:00

Dr. Víctor Hilario Tarazona Miranda

Director (e) de la EP de Matemática

Dedicatoria

El presente trabajo lo dedico a mi esposa por su apoyo y motivación y a mis familiares que estuvieron incentivandome para desarrollarme profesionalmente muy a pesar de las situaciones adversas.

Resumen

El objetivo de esta tesis es investigar las propiedades de los conjuntos convexos en los espacios de Banach. Concretamente buscamos entender la respuesta de Enflo a la siguiente interrogante: ¿bajo qué condiciones un espacio de Banach admite una norma uniformemente convexa equivalente?. Empezamos este manuscrito estudiando los espacios normados estrictamente convexo y damos ejemplos variados. Se introduce el concepto de convexidad estricta y damos una aplicación al estudio de la existencia y unicidad de la mejor aproximación en espacios normados. Luego, investigamos los espacios normados uniformemente convexos definido por Clarkson en 1936. Se demuestra el teorema de Milman-Pettis, que conecta la convexidad de un espacio de banach (propiedad métrica) con la reflexividad (propiedad topológica). Además introducimos es concepto de árboles en espacio de Banach, definido por R.C.James, y estudiamos las propiedades del árbol finito y del árbol infinito.
Finalmente, detallamos la demostración de Enflo al teorema que caracteriza la existencia de una norma uniformemente convexa con la propiedad del árbol finito.

Palabras-clave: conjunto convexo, espacio reflexivo, norma uniformemente convexa, propiedad del árbol finito.

Abstract

The objective of this thesis is to investigate the properties of convexor sets in Banach spaces. Specifically, we seek to understand Enflo's answer to the following question: under what conditions does a Banach space admit an equivalent uniformly convex norm? We begin this manuscript by studying strictly convex normed spaces and give various examples. The concept of strict convexity is introduced and we give an application to the study of the existence and uniqueness of the best approximation in normed spaces. Then, we investigate the uniformly convex normed spaces, defined by Clarkson in 1936. The Milman-Pettis theorem is proved, which connects the uniform convexity of a Banach space (metric property) with reflexivity (topological property). In addition, we introduce the concept of trees in Banach spaces, defined by R.C. James, and we study the properties of the finite tree and the infinite tree.
Finally, we detail Enflo's proof of the theorem that characterizes the existence of a uniformly convex norm with the finite tree property.

Keywords : convex set, reflexive space, uniformly convex norm, property of the finite tree.

Índice general

Introducción

En Análisis Funcional es muy común, después de estudiar extensivamente una propiedad dada una propiedad métrica de una clase de espacios de Banach, indagar que condiciones garantizan la existencia de una norma equivalente al original con esta propiedad. Esto es particularmente interesante cuando, dado un espacio de Banach sin la propiedad métrica deseada, se puede realizar un ïntercambio de normas", a fin del espacios en mensión, dotado de la nueva norma, posea tal propiedad. Por supuesto, realizar este "intercambio" es encontrar un isomorfismo del espacio dotado con su norma original sobre el mismo espacio provisto de una nueva norma, que cuente con la propiedad deseada. Por supuesto, realizar este "intercambio" es encontrar un isomorfismo del espacio equipado con su norma original sobre el mismo espacio equipado de una nueva norma, que posea la propiedad deseada. Lo que haremos aquí es un exposición sobre esto.En nuestro caso, la propiedad deseada es la convexidad uniforme de la norma, un concepto introducido por Clarkson en 1936. Exponemos aquí la respuesta obtenida por Enflo a la siguiente pregunta: ¿Cuales son las condiciones para que dado un espacio de Banach admita una norma uniformemente convexa equivalente?. Es bastante cierto que una condición necesaria fue encontrada po R.C.James. Sin embargo, una de las preguntas más desafiantes de la llamada Geometría de los Espacios de Banach era encontrar una condición suficiente. Lo que mostró Enflo en 1972, de manera totalmente constructiva y sin utilizar ningún resultado específico de la teoría, fue que la condición necesaria de James era también suficiente. Precisamente, Enflo demostró el siguiente resultado: Sin un espacio de Banach no posee la propiedad del Árbol finito, entonces admite una norma uniformemente convexa equivalente.
Este trabajo esta dividido en tres capítulos. En el primer capítulo, hacemos una exposición de los espacios normados estrictamente convexo y se discute varios ejemplos. En la última sección de este capítulo, presentamos una aplicación del concepto de convexidad estricta al problema de existencia de la mejor aproximación en espacios normados y también bajo qué condiciones tenemos la unicidad. En el segundo capitulo entran en escena los espacios normados uniformemente convexo. Tal vez el resultado más notable de este capítulo sea el Teorema de Milman-Pettis, que relaciona la convexidad uniforme de un espacio de Banach (una propiedad métrica)con reflexividad (una propiedad topológica). Este resultado garantiza que todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo. En el capítulo final introduciremos el concepto del Árboles en espacio de Banach, el cual fue creado por R.C.James al estudiar espacios súper-reflexivos (también creación suya). Luego seguidamente definiremos la Propiedad del Árbol Finto y del Árbol Infinito y demostraremos algunos resultado interesante involucrando tales propiedades con reflexividades, y con convexidad uniforme. En la segunda sección de este capítulo presentaremos la demostración del Teorema de Enflo, el cual relaciona los arboles de James con el concepto de partición de un elemento de un espacio de Banach.

Finalizamos esta tesis adicionando algunas conclusiones.

Capítulo 1

Espacios Estrictamente Convexos

Al pensar en una bola unitaria cerrada de un espacio normado, nuestra intuición euclidiana nos lleva a pensar en un objeto redondo “suave”, de modo que no existen “picos”. Sin embargo, este no es el caso en general. Véase, por ejemplo, como son los bolas unitarias cerradas de espacios normados reales l_1^2 y l_∞^2 y observemos cómo sus formas contrastan fuertemente con lo que entendemos por “bola”:

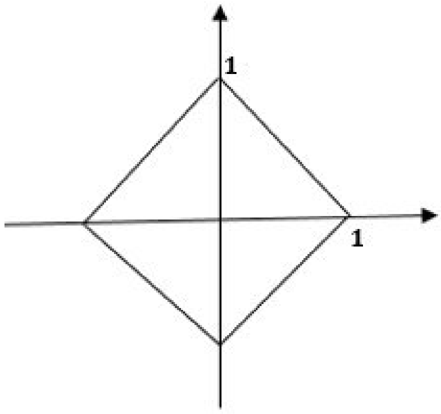


*Figura*1.1: $S_{l_1^2}$

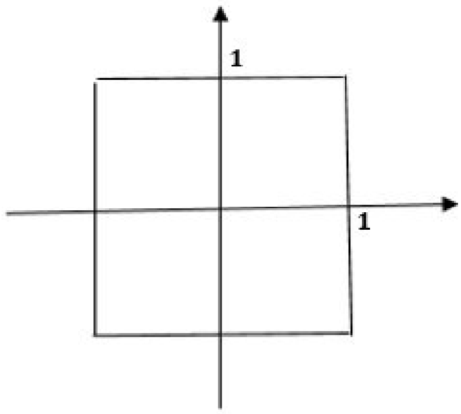


*Figura*1.2: $S_{l_\infty^2}$

En estos dos casos observamos que cada una de las bolas unitarias cerradas tiene forma de un cuadrado, de modo que sus respectivas esferas unitarias se componen de cuatro segmentos rectos. Por tanto, ambas bolas no son “redondas” como podríamos imaginar.

En este primer capítulo estudiaremos espacios normados cuya bola unitaria cerrada es “redonda”, de manera que su esfera de radio 1 no contiene ningún segmento de recta no trivial.

1.1. Definiciones y ejemplos

En el presente trabajo $\mathbb{K}$ denotará el campo $\mathbb{R}$ de números reales o el campo $\mathbb{C}$ de números complejos. La norma de un espacio normado X sobre $\mathbb{K}$ estará representada por $\|.\|$. Los hechos básicos y ejemplos de Análisis Funcional, que supondremos conocidos, pueden ser encontrados en el libro [11]. Además, también adoptaremos la terminología y las notaciones de este libro.

En lo que sigue, B_X indicará la bola unitaria cerrada del espacio normado X, es decir $B_X = \{x \in X; \|x\| < 1\}$ mientras S_X indicará la esfera unitaria $S_X = \{x \in X; \|x\| = 1\}$. En esta tesis, el interior de un conjunto C se representa por $\overset{o}{C}$.

Definición 1.1.1. *Un espacio normado X es estrictamente convexo si*

$$\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| < 1$$

siempre que x_1 y x_2 son puntos distintos en S_X y $0 < \lambda < 1$.

Geométricamente, la definición nos dice que un espacio normado es estrictamente convexo cuando su esfera unitaria no contiene ningún segmento de recta no trivial. En realidad, Sea X un espacio normado y sea (x_1, x_2) un segmento de recta abierto

$$\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2; 0 < \lambda < 1\} \qquad (x_1, x_2 \in X).$$

Si X es estrictamente convexo y x_1,x_2 son puntos distintos de S_X, entonces por la definición de convexidad estricta, se tiene $(x_1, x_2) \subset \overset{o}{B}_X$. Supongamos recíprocamente, que ningún segmento de recta no trivial está contenida en S_X. Tomamos x_1 y $x_2 \in S_X$ distintos. De ahí, por hipótesis, algún punto de $(x_1 x_2) \in \overset{o}{B}_X$. Como B_X es convexa, todos los puntos de $(x_1 x_2)$ están en $\overset{o}{B}_X$ (la convexidad de B_X asegura que $\lambda B_X + (1-\lambda)\overset{o}{B}_X \subset \overset{o}{B}_X \,\forall\, 0 < \lambda < 1$), donde X es estrictamente convexo.

El concepto de convexidad estricta fue introducido por Clarkson en 1936 (ver [6]) y por Akhiezer y Kerin en 1938 (ver [1]).

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.1.1. *El campo $\mathbb{K}$ de escalares, visto como un espacio dotado con una norma sobre $\mathbb{K}$, es estrictamente convexo, trivialmente. Más generalmente, todo espacio dotado con una norma cuya dimensión es 0 o 1 es estrictamente convexo.*

Ejemplo 1.1.2. *Sea μ una medida positiva sobre un σ -álgebra Σ de subconjuntos de un conjunto Ω. Supongamos que existe dos conjuntos medibles disjuntos B_1 y B_2 tal que $0 < \mu(B_1) < \infty$ y $0 < \mu(B_2) < \infty$. Sean ahora I_{B_1} y I_{B_2} las funciones características de estos conjuntos y pongamos $h_1 = \mu(B_1)^{-1} I_{B_1}$, $h_2 = \mu(B_2)^{-1} I_{B_2}$, $p_1 = I_{B_1} + I_{B_2}$ y $p_2 = I_{B_1} - I_{B_2}$. tenemos que*

$$\|h_1\|_1 = \|h_2\|_1 = \left\|\frac{h_1 + h_2}{2}\right\| = 1$$

y

$$\|p_1\|_\infty = \|p_2\|_\infty = \left\| \frac{\|p_1 + p_2\|}{2} \right\|_\infty = 1,$$

y esto demuestra que los espacios $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ y $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ no son estrictamente convexos. En particular, los espacios l_1 y l_∞ no son estrictamente convexos.

Además, los espacios l_1^n ($\mathbb{K}^n$ provisto de la norma suma) y l_∞^n ($\mathbb{K}^n$ provisto de la norma máximo) no son estrictamente convexo cuando $n > 1$. Si $1 < p < \infty$, tenemos que $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ es estrictamente convexo. Para probar este hecho, necesitaremos una caracterización del concepto de convexidad estricta que veremos en la siguiente sección.

Por ahora, continuaremos con más ejemplos:

Ejemplo 1.1.3. *Sean* $y_1 = (1, 1, 0, 0, ...)$ *y* $y_2 = (1, -1, 0, 0, ...)$ *tales que* $y_1, y_2 \,\epsilon\, c_o$. *Dado que*
$\|y_1\|_\infty = \|y_2\|_\infty = \left\| \frac{y_1 + y_2}{2} \right\|_\infty = 1$, *se concluye que* c_o *no es estrictamente convexo.*

Ejemplo 1.1.4. *Sea* $\hat{K}$ *un espacio de Hausdorff compacto que tiene al menos dos elementos. Considere* k_1 *y* k_2 *dos puntos distintos en* $\hat{K}$. *El lema de Urysohn garantiza la existencia de una función continua* $h_1 : \hat{K} \mapsto [0, 1]$ *tal que* $h_1(k_1) = 0$ *y* $h_1(k_2) = 1$ *consideremos ahora* h_2 *una función de manera que* $h_2(x) = 1\, \forall x\, \in \hat{K}$. *Como*

$$\|h_1\|_\infty = \|h_2\|_\infty = \left\| \frac{1}{2}(h_1 + h_2) \right\|_\infty = 1,$$

observamos que el espacio $C(\hat{K})$ *no es estrictamente convexo.*

Con los primeros ejemplos dados, se podría decir que cualquier espacio de Banach estrictamente convexo es reflexivo. El siguiente ejemplo demuestra que esto no es cierto en general. La construcción de tal ejemplo es un poco técnica pero también servirá para nuestros propósitos más adelante. Veamos esto:

Ejemplo 1.1.5. *El objetivo aquí es encontrar una norma estrictamente convexa equivalente a la norma origina de* l_1. *Así, con esta nueva norma,* l_1 *será un espacio de Banach no reflexivo y estrictamente convexo. Comenzamos definiendo, para cada entero m positivo, la función*

$$f_m(t) = \frac{t^2 + mt}{m + 1} \qquad (t \geq 0).$$

Entonces las funciones f_m satisfacen las siguientes propiedades:

(1) $f_m : [0, 1] \to [0, 1]$ es continua y suryectiva, $f_m(0) = 0$ y $f_m(1) = 1$;

(2) La primera y la segunda derivada de f_m son positivas en $(0, \infty)$, así f_m es estrictamente creciente en $[0, \infty)$;

(3) $\frac{m}{m+1} t \leq f_m(t) \leq t$ siempre que $t \in [0, 1]$, y con desigualdad estricta si $t \in (0, 1)$;

(4) $f_m\,(st_1 + (1-s)t_2) \;<\; sf_m\,(t_1) + (1-s)f_m(t_2)$ siempre que t_1 y t_2 son puntos distintos de $[0,\infty)$ y $0 < s < 1$;

(5) $|f_m(t_1) - f_m(t_2)| \leq max\,\{f'_m(t);\, 0 \leq t \leq 1\}\,|t_1 - t_2| \leq \dfrac{3}{2}\,|t_1 - t_2|$ siempre que t_1 y $t_2 \in [0,1]$.

Sea $\{A_m;\, m \in \mathbb{N}\}$ la colección numerable de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ de modo que $A_i \neq A_j$ si $i \neq j$ y cuya unión es $\mathbb{N}$ y, dado n $n \in \mathbb{N}$, sea $m(n)$ el índice m del conjunto A_m que contiene n. Sea

$$C = \left\{ (\alpha_n) \in l_1; \sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \leq 1 \right\}.$$

Afirmamos que si $(\alpha_n) \in C$ entonces $|\alpha_n| \leq 1$ para cada n. De hecho, si hubiera $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha_{n_o}| > 1$, tendríamos

$$\sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \geq f_{m(n_o)}(|\alpha_n|) > f_{m(n_o)}(1) = 1,$$

lo que contradice al hecho de que $(\alpha_n) \in C$. Veamos ahora que C es un conjunto cerrado. En efecto, sea $((c_{n,j}))_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en C convergente a algún elemento $(c_n) \in l_1$. Para cada j, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_n f_{m(n)}(|\alpha_{n,j}|) - \sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \right| &\leq \sum_n \left| f_{m(n)}(|\alpha_{n,j}|) - f_{m(n)}(|\alpha_n|) \right| \\
&\leq \frac{3}{2} \sum_n ||c_{n,j}| - |c_n|| \leq \frac{3}{2} \sum_n |c_{n,j} - c_n| \\
&\leq \frac{3}{2} \left\| (c_{n,j}) - (c_n) \right\|_1 .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $((c_{n,j}))_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $c_n \in l_1$, se tiene que

$$\sum_n f_{m(n)}(|c_n|) = \lim_j \sum_n f_{m(n)}(|c_{n,j}|) \leq 1,$$

donde $(c_n) \in C$. Esto prueba que C es cerrado en l_1. El conjunto C también es convexo, pues si $(\beta_n), (\gamma_n) \in C$ y $0 < s < 1$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_n f_{m(n)}(|s\beta_n + (1-s)\gamma_n|) &\leq \sum_n f_{m(n)}\left(s\,|\beta_n| + (1-s)\,|\gamma_n|\right) \\
&\leq s \sum_n f_{m(n)}\left(|\beta_n|\right) + (1-s) \sum_n f_{m(n)}\left(|\gamma_n|\right) \leq 1,
\end{aligned}$$

así $s(\beta_n) + (1-s)(\gamma_n) \in C$. Además, de la definición, C es un conjunto equilibrado. Ahora notemos que $B_{l_1} \subset C$ ya que dado $(\alpha_n) \in B_{l_1}$ se tiene que

$$\textstyle\sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \leq \sum_n |\alpha_n| \leq 1.$$

Como $B_{l_1} \subset C$, tenemos que C es un conjunto absorvente. Por lo tanto, como C es un conjunto convexo, equilibrado y absorbente su p_C funcional de Minkowski es una semi-norma en l_1. Afirmación p_C es una norma en l_1. En efecto, fijamos $x = (x_n) \in l_1$ tal que $p_C(x) = 0$ probaremos que $x = 0$. Dado $\epsilon > 0$, tenemos que $x \in C$, es decir, $\frac{x}{\epsilon} \in C$. Asimismo,

$$1 \geq \sum_n f_{m(n)} \left(\left| \frac{x_n}{\epsilon} \right| \right) \geq \sum_n \frac{1}{2} \left| \frac{x_n}{\epsilon} \right| = \frac{\|x_x\|_1}{2\epsilon},$$

es decir,

$$\|x_n\|_1 \leq 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ es cualquiera, debemos tener que $x = 0$, lo que prueba que p_C es una norma sobre l_1. Pongamos $\|x\|_r = p_C(x)$ para cada $x \in l_1$ y, cuando esté equipado con esta nueva norma, denotaremos l_1 por $l_{1,r}$. Mostraremos que esta nueva norma es equivalente a la norma original de l_1. Más precisamente, mostraremos que

$$\frac{1}{2} \|x\|_1 \leq \|x\|_r \leq \|x\|_1$$

para todo $x \in l_1$. De hecho, demostramos la desigualdad de la izquierda:fije $x = (x_n) \in l_1 \setminus \{0\}$. Sea $s > 0$ tal que $x = (x_n) \in sC$, es decir, $\left(\frac{x_n}{s} \right) \in C$. Por la definición de C,

$$1 \geq \sum_n f_{m(n)} \left(\left| \frac{x_n}{\epsilon} \right| \right) \geq \sum_n \frac{1}{2} \left| \frac{x_n}{s} \right| = \frac{1}{s} \frac{\|x_x\|_1}{2},$$

osea,

$$\frac{1}{2} \|x\|_1 \leq s.$$

Como esto vale para todo $s > 0$ tal que $x \in sC$, se sigue que $\frac{1}{2} \|x\|_1 \leq p_C(x) = \|x\|_r$. Ahora veamos la desigualdad de la derecha: tomamos $x = (x_n) \in l_1 \setminus (0)$ tal que $\|x\|_1 = 1$. Como $B_{l_1} \subset C$, se sigue que $\|x\|_r \leq 1 = \|x\|_1$. Ahora tomando $x \in l_1 \setminus (0)$ cualquiera, consideremos $y = \frac{x}{|x|_1} \in S_{l_1}$. luego $\|y\|_r \leq 1 = \|y\|_1$. lo que nos da

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_r \leq 1$$

así mismo,

$$\|x\|_r \leq \|x\|_1.$$

Finalmente, verificamos que la nueva norma es estrictamente convexa. Para ello, recuerda que por propiedad de la funcional de Minkowski tenemos

$$\{x \in l_1; \|x\|_r < 1\} \subset C \subset \{x \in l_1; \|x\|_r < 1\},$$

Además de eso, como la normas son equivalentes en C es cerrado en la norma original, C también es cerrado en la nueva norma. Por lo tanto $C = B_{l_{1,r}}$. Ahora, supongamos que $(\beta_n)\, y\, (\gamma_n)$ son elementos distintos en $S_{l_{1,r}}$. Consideremos $(\mu_n) = \frac{1}{2}\left((\beta_n) + (\gamma_n)\right)$. Es suficiente encontrar un $k \in \mathbb{R} \,/\, k > 1$ de modo que $k\,(\mu_n) \in C$, esto nos conducirá a que $\|k\,(\mu_n)\|_r \leq 1$ así tendremos $\|(\mu_n)\|_r \leq 1$. Sea entonces $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_{n_o} \neq \gamma_{n_o}$ luego tenemos,

$$\left|\frac{1}{2}\left(\beta_{n_o} + \gamma_{n_o}\right)\right| < \frac{1}{2}\left|\beta_{n_o}\right| + \frac{1}{2}\left|\gamma_{n_o}\right| \text{ ó } \left|\beta_{n_o}\right| \neq \left|\gamma_{n_o}\right|.$$

En efecto si

$$\left|\frac{1}{2}\left(\beta_{n_o} + \gamma_{n_o}\right)\right| = \frac{1}{2}(\left|\beta_{n_o}\right| + \frac{1}{2}\left|\gamma_{n_o}\right|),$$

entonces

$$\left|\frac{1}{2}\left(\beta_{n_o} + \gamma_{n_o}\right)\right| = \left|\beta_{n_o}\right| = \left|\gamma_{n_o}\right|,$$

lo que es un absurdo pues $\mathbb{K}$ es estrictamente convexo. Luego, una de las dos primeras desigualdades a continuación es estricto:

$$\begin{aligned}\sum_n f_{m(n)}\left(|\mu_n|\right) &= \sum_n f_{m(n)}\left(\left|\frac{1}{2}(\beta_n + \gamma_n)\right|\right) \leq \sum_n f_{m(n)}\left(\frac{1}{2}\left|\beta_n\right| + \frac{1}{2}\left|\gamma_n\right|\right)\\ &\leq \frac{1}{2}\sum_n f_{m(n)}(|\beta_n|) + \frac{1}{2}\sum_n f_{m(n)}(|\gamma_n|) \leq 1.\end{aligned}$$

Siendo asimismo, $\sum\limits_n f_{m(n)}\left(|\mu_n|\right) < 1$. De ahí, $\underset{n}{sup}\,|\mu_n| < 1$. En efecto si existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu_{n_0}| \geq 1$, entonces tendríamos

$$\sum_n f_{m(n)}\left(|\mu_n|\right) \geq f_{m(n_0)}\left(|\mu_{n_0}|\right) \geq f_{m(n_0)}(1) = 1,$$

que es una contradicción. Dado que $\underset{n}{sup}\,|\mu_n| < 1$, $\exists\, k > 1$ de modo que $\underset{n}{sup}\,|k\mu_n| < 1$. Además de eso,

$$\left|\sum_n f_{m(n)}\left(|k\mu_n|\right) - \sum_n f_{m(n)}(|\mu_n|)\right| \leq \frac{3}{2}\left\|k(\mu_n) - (\mu_n)\right\|_1 = \frac{3}{2}(k-1)\left\|(\mu_n)\right\|_1,$$

así que

$$\left|\sum_n f_{m(n)}\left(|k\mu_n|\right)\right| \leq \frac{3}{2}(k-1)\left\|(\mu_n)\right\|_1 + \sum_n f_{m(n)}\left(|\mu_n|\right).$$

Dado que

$$\textstyle\sum_n f_{m(n)}\left(|\mu_n|\right) < 1,$$

$\exists\, k \,/\, k > 1$ tan próximo de 1 que se tiene

$$\left| \sum_n f_{m(n)} \left(|k\mu_n| \right) \right| < 1,$$

lo que nos da $k\,(\mu_n) \in C$. con eso tenemos que $l_{1,r}$ es estrictamente convexo.

Observación 1.1.1. *Lo anterior nos muestra que si* $(\alpha_n) \in l_{1,r}$ *y* $\sum_n f_{m(n)} \left(|\alpha_n| \right) < 1$ *entonces* $\|(\alpha_n)\|_r < 1$. *Usaremos este resultado en un ejemplo más adelante.*

1.2. Propiedades

Veamos ahora algunas caracterizaciones de convexidad estricta. El más trivial es el siguiente

Proposición 1.2.1. *Todo espacio normado isomorfo e isométrico a un espacio normado estrictamente convexo es estrictamente convexo.*

Demostración. Se sigue del hecho de que la convexidad estricta es una propiedad métrica. Ahora, algo un poco más interesante: □

Proposición 1.2.2. *sea X un espacio normado. Son equivalentes :*

(1) X es estrictamente convexo;

(2) $\left\| \dfrac{y_1 + y_2}{2} \right\| < 1$ *siempre que* $\|y_1\| = \|y_2\| = 1$ *e* $y_1 \neq y_2$;

(3) solo ocurre que $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$ *cuando uno de los dos vectores es un múltiplo real no negativo del otro.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): basta tomar $t = \frac{1}{2}$ en la definición de convexidad estricta.
(2) $\Rightarrow$ (3): supongamos que $y_1, y_2 \in X$ son tales que $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|\, 1$. Asumamos que los dos son no nulos y que $1 = \|y_1\| \leq \|y_2\|$. Pongamos $z = \|y_2\|^{-1} y_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} 2 &\geq \|y_1 + z\| = \left\|y_1 + \|y_2\|^{-1} y_2\right\| = \left\|y_1 + y_2 - y_2 + \|y_2\|^{-1} y_2\right\| \\ &= \left\|y_1 + y_2 - y_2(1 - \|y_2\|^{-1})\right\| \geq \|y_1 + y_2\| - \|y_2\| \,(1 - \|y_2\|^{-1}) \\ &= \|y_1\| + \|y_2\| - \|y_2\| + 1 = 2. \end{aligned}$$

Luego, $\left\| \dfrac{y_1 + z}{2} \right\| = 1$. Por (2), tenemos que $y_1 = z$, donde $y_1 = \|y_2\|^{-1} y_2$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Sean y_1 y $y_2 \in S_X$. En particular, ninguno de estos dos vectores es múltiplo real no negativo del otro. De ahí $\|y_1 + y_2\| < \|y_1\| + \|y_2\| = 2$, lo que nos da $\left\| \dfrac{y_1 + y_2}{2} \right\| <$ 1 Entonces vemos que el punto medio del segmento (y_1, y_2) está contenido en $\overset{o}{B}_X$. Esto nos dice que X es estrictamente convexo. □

Ejemplo 1.2.1. *Usando una proposición anterior podemos demostrar sin dificultades que si μ es una medida positiva en un $\sigma-$álgebra Γ de subconjuntos de un conjunto $A \neq \varnothing$ y $1 < p < \infty$, entonces $L_p(A, \Gamma, \mu)$ es estrictamente convexo. Dados $f_1 \neq f_2$ en $S_{L_p(A,\Gamma,\mu)}$, tenemos que ninguna de estas dos funciones es un múltiplo real no negativo del otro. Por lo tanto, la desigualdad de Minkowski en este caso es estricta (ver[13], pág 63, Teorema 3.5):*

$$\left\| \frac{f_1 + f_2}{2} \right\|_p < \frac{1}{2} \|f_1\|_p + \frac{1}{2} \|f_2\|_p = 1.$$

En particular, son estrictamente convexos los espacios l_p y l_p^n, con $n \in \mathbb{N}$ y $1 < p < \infty$.

Proposición 1.2.3. *Un $(X, \|.\|)$ es estrictamente convexo si y solamente si si cada punto de S_X es un punto extremo de B_X.*

Demostración. ($\Leftarrow$) esto es inmediato por la definición.
($\Rightarrow$) Si $y_o \in S_X$ no es un punto extremo de B_X, existe existe una combinación convexa no trivial de puntos de S_X que da y_o, digamos $y_o = ry_1 + (1-r)y_2$ con $y_1, y_2 \in S_X$ y $0 < r < 1$. Por lo tanto, X no es estrictamente convexo.
Para la siguiente caracterización, necesitaremos recordar lo siguiente □

Definición 1.2.1. *Sea A un subconjunto de un espacio normado de X. diremos que $y^* \in X \setminus \{0\}$ es una* ***funcional soporte de*** *A si existe $y_o \in A$ tal que $Re\, y^*(y_o) = sup\,\{Re\, y^*(y); y \in A\}$. Luego, diremos a x_o un punto soporte de A, y que el conjunto*

$$P = \{y \in X;\ Re\, y^*(y) = Re\, y^*(y_o)\}$$

es un ***soporte hiperplano*** *para A y que el punto y_o es un punto soporte de A a través del hiperplano P.*

Lema 1.2.1. *Si P es un hiperplano soporte para un subconjunto A de un espacio normado X, entonces $P \cap \overset{o}{A} = \varnothing$.*

Demostración. Sean $y^* \in X \setminus \{0\}$ y $y_o \in X$ tales que

$$Re\, y^*(y_o) = sup\,\{Re\, y^*(y);\ y \in A\}$$

y

$$P = \{y \in X;\ Re\, y^*(y) = Re\, y^*(y_o)\}.$$

Supongamos que exista $z \in H \cap \overset{o}{A}$. Entonces $Re\, y^*(z) = Re\, y^*(y_o)$. Sean $y_1 \in A$ de modo que $Re\, y^*(y_1) = 1$ (recuerde que todo función lineal no nulo es sobreyectiva). Dado que $z \in \overset{o}{A}$, existe $\delta > 0$ tal que $z + \delta y_1 \in \overset{o}{A}$. Luego,

$$Re\, y^*(y_o) \geq Re\, y^*(z + \delta y_1) = Re\, y^*(y_o) + \delta Re\, y^*(y_1) = Re\, y^*(y_o) + \delta > Re\, y^*(y_o),$$

lo que es un absurdo.

□

Teorema 1.2.1. *Un $(X, \|.\|)$ es estrictamente convexo si y solamente si cada hiperplano soporte para B_X es soporte de B_X en un único punto.*

Demostración. ($\Rightarrow$) X es estrictamente convexo. Sea P un hiperplano soporte de B_X. Entonces $P \cap B_X \subset S_X$ pues $P \cap \overset{o}{B}_X = \varnothing$ (por el lema anterior). Luego como P y B_X con convexos entonces $P \cap B_X$ es convexo. De ahí si, $P \cap B_X$ tiene dos puntos distintos, entonces debe contener todo el segmento que los une, lo cual no es posible ya que ya que $P \cap B_X \subset S_X$ y X es estrictamente convexo. Recíprocamente, Asumamos X no es estrictamente convexo. Luego existe $y_1 \neq y_2$ en S_X tales que

$$\{\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2;\ 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset S_X.$$

Llamemos a este segmento C. De la consecuencia del teorema de Separación de Hahn-Banach (ver [12], Teorema 3.4), Existen $y^* \in X^* \setminus \{0\}$ y $k \in \mathbb{R}$ tales que $Re\, y^*(y_o) \geq k$ para $y \in C$ y $Re\, y^*(y) \leq r$ para $y \in B_X$ En particular $Re\, y^*(y_1) = Re\, y^*(y_2) = k$. Luego,

$$\{y \in X;\ Re\, y^*(y) = k\}$$

es un hiperplano que soporta B_X en y_1 y en y_2.

□

Observación 1.2.1. *Se tiene que $y^* \in X^*$ es soporte de B_X en algún punto de $y_o \in S_X$ si y solamente si $Re\, y^*(y_o) = y^*(y_o) = 1$. en efecto, primero probaremos dos afirmaciones que usaremos:*

(1) $\sup\limits_{z \in B_X} |y^*(z)| = \sup\limits_{z \in B_X} |Re\, y^*(z)|$:

En efecto, si $z \in B_X$, escribimos $y^*(z) = |y^*(z)|\, e^{it_z}$, para algún $t_z \in \mathbb{R}$. Ahora, notemos $0 \leq |y^*(z)| = y^*(z)e^{-it_z} = y^*(e^{-it_z}z) \leq Re\, y^*(e^{-it_z}z)$. De ahí

$$\sup_{z \in B_X} |y^*(z)| \leq \sup_{z \in B_X} Re\, y^*(e^{-it_z}z) \leq \sup_{z \in B_X} |Re\, y^*(z)|,$$

y se obtiene

$$\sup_{z \in B_X} |y^*(z)| = \sup_{z \in B_X} |Re\, y^*(z)|.$$

(2) $\sup\limits_{z \in B_X} |Re\, y^*(z)| = \sup\limits_{z \in B_X} Re\, y^*(z)$:

como B_X es simétrico, se tiene que $z \in B_X$ si y solamente si $-z \in B_X$. De ahí, como $Re\, y^*(z) \geq 0$ o $Re\, y^*(-z) \geq 0$ para $z \in B_X$, se tiene

$$\sup_{z \in B_X} |Re\, y^*(z)| = \sup_{z \in B_X} Re\, y^*(z)$$

Ahora, supongamos que $y^* \in S_{X^*}$ soporta B_X en $y_o \in S_X$ Tenemos entonces

$$Re\, y^*(y_o) = \sup_{z \in B_X} Re\, y^*(z) = \sup_{z \in B_X} |Re\, y^*(z)| = \sup_{z \in B_X} |y^*(z)| = \|y^*\| = 1$$

Como $|y^*(y_o)| \leq 1$ se tiene que $y^*(y_o) = 1 = Re\, y^*(y_o)$.

Ahora, supongamos que $Re\, y^*(y_o) = y^*(y_o) = 1$. entonces se cumple
$Re\, y^*(y_o) = y^*(y_o) = 1 = \|y^*\| = \sup_{z \in B_X} |y^*(z)| = \sup_{z \in B_X} |Re\, y^*(z)| = \sup_{z \in B_X} Re\, y^*(z)$

Asimismo ,

$$Re\, y^*(y_o) = \sup_{z \in B_X} Re\, y^*(z).$$

del (1.2.1) y la observación anterior tenemos lo siguiente

Colorario 1.2.1. *Sea $(X, \|.\|)$ son equivalentes*

(a) X es estrictamente convexo

(b) ningún $x^* \in S_{X^*}$ soporta B_X en más de un punto;

(c) Para cada $x^* \in S_{X^*}$, existe a lo más un $x \in S_X$ tal que $Re\, x^*(x) = 1$;

(d) Para cada $x^* \in S_{X^*}$ existe a lo más un $x \in S_X$ tal que $x^*(x) = 1$.

Ahora, veremos caracterizaciones de convexidad estricta que involucran subespacios:

Proposición 1.2.4. *Si un espacio normado es estrictamente convexo entonces ocurre lo mismo para cada uno de sus subespacios.*

Demostración. Esto es del hecho de que todo subespacio vectorial es convexo y de que $B_Y = B_X \cap Y$, para todo subespacio $Y \subset X$. $\square$

Proposición 1.2.5. *Un $(X, \|.\|)$es estricatamente convexo si y solamente si cada uno de sus subespacios bidimensionales son estricatamente convexo.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Se sigue de la proposición anterior.
$(\Rightarrow)$ Asumamos X no es estrictamente convexo. Luego existen $x_1 \neq x_2$ en S_X tales que $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) \in S_X$. Si existiera un escalar α tal que $x_1 = \alpha x_2$, entonces 1 y α serian escalares distintos con valor absoluto 1 lo que contradice el hecho de que $\mathbb{K}$ es estrictamente convexo. luego x_1 y x_2 son linealmente independientes, donde $[x_1, x_2]$ es un subespacio bidimensional de X que no es estrictamente convexo. $\square$

Luego de discutir la convexidad estricta en los subespacios, nos viene a la mente la siguiente pregunta: ¿el cociente de un espacio estrictamente convexo es también un espacio estrictamente convexo?. La respuesta es negativa incluso en espacios de Banach. El siguiente ejemplo, referente a esta situación, se debe a Victor Klee.

Ejemplo 1.2.2. *Recordemos algunas partes de la construcción del espacio de Banach estrictamente convexo y no reflexivo $l_{1,r}$ dado en el Ejemplo 1.1.5:*

(i) La propiedad (3) de la función $f_m : \dfrac{mt}{m+1} \leq f_m(t) \leq t$, $\forall\, t \in [0,1]$ con desigualdades estrictas en $(t, 1)$;

(ii) La definición de los A_i: $\forall\, i \in \mathbb{N}$, A_i es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, tal que $A_i \cap A_j = \varnothing$ cuando $i \neq j$ y $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{N}$;

(iii) La definición de : $C = \left\{ (\alpha_n) \in l_1; \sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \le 1 \right\}$;

(iv) Sea $(\alpha_n) \in C$ entonces $|\alpha_n| \le 1$ para cada n;

(v) $C = B_{l_{1,r}}$;

(vi) $\|(\alpha_n)\|_r \le 1$ siempre que $(\alpha_n) \in l_{1,r}$ y $\sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) < 1$.

Sea ahora Y cualquier espacio de Banach Separable no estrictamente convexo; por ejemplo, c_o o l_1. Tomemos D un subconjunto contable y denso de $\overset{o}{B}_Y$ y considere g una función de $\mathbb{N}$ sobre D tal que $g(A) \subset \frac{m}{m+1} B_Y$ para cada m. Defina $T : l_{1,r} \to Y$ por la expresión $T((\alpha_n)) = \sum_n \alpha_n g(n)$. T está bien definida pues

$$\sum_n \|\alpha_n g(n)\| = \sum_n |\alpha_n| \, \|g(n)\| \le \sum_n |\alpha_n| = \|(\alpha_n)\|_1 < \infty.$$

Además de eso, T es lineal. Mostraremos que T lleva $U(0,1)$ abierta de $l_{1,r}$ a una $U(0,1)$ abierta en Y. Para esto, probaremos primero $T(C) \subset B_Y$. Sea $(\alpha_n) \in C$. Entonces,

$$\begin{aligned} T((\alpha_n)) &= \left\| \sum_n \alpha_n g(n) \right\| \le \sum_n |\alpha_n| \, \|g(n)\| \\ &\le \sum_m \left(\sum_{n \in A_m} |\alpha_n| \frac{m}{m+1} \right) \le \sum_m \left(\sum_{n \in A_m} f_m(|\alpha_n|) \right) \\ &= \sum_n f_{m(n)}(|\alpha_n|) \le 1 \end{aligned}$$

Asimismo $T(C) \subset B_Y$. Note que esto también muestra que T está acotado pues $C = B_{l_{1,r}}$. Sean ahora $U_{l_{1,r}}$ y U_Y las bolas unitarias abiertas de $l_{1,r}$ y Y respectivamente. Mostraremos que $U_Y \subset T(U_{l_{1,r}})$. Fijemos $z \in U_z$. Como $\|2z\| < 2$, las bolas abiertas de radio 1 con centro en $2y$ y en el origen se intersectan (en z por ejemplo), donde existe $k_1 \in D \, / \, \|2z - k_1\| < 1$ (pues D es denso en U_z). como $\|4z - 2k_1\| < 2$, existe $k_2 \in D \, / \, \|4z - 2k_1 - k_2\| < 1$. Como $\|8z - 4k_1 - 2k_2\| < 2$, existe $k_3 \in D \, / \, \|8z - 4k_1 - 2k_2 - k_1\| < 1$. Siguiendo el proceso, obtenemos una sucesión $(k_n) \subset D$ tal que $\|z - \sum_{n=1}^{p} 2^{-n} k_n\| \le 2^p$, para cada $p \ge 1$, donde $z = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} k_n$. para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m(n) \in \mathbb{N}$ tal que $k_n = g(m(n))$. luego,

$$z = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} k_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} g(m(n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n g(n) = T((\gamma_n)),$$

donde

$$\gamma_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n = m(n) \\ 0 & \text{si } n \ne m(n) \end{cases}$$

Luego tenemos de (i) que $\sum_{n \in \mathbb{N}} fm(n) < \sum_n 2^{-n} = 1$ donde $(\gamma_n) \in U_{l_{1,r}}$. Con eso, $z = T((\gamma_n)) \in T(U_{l_{1,r}})$. Lo que prueba que $U_z \subset T(U_{l_{1,r}})$. Como T es lineal, tenemos que $rU_z \subset T(rU_{l_{1,r}})$ para todo $r > 0$, así $T(l_{1,r}) = Y$. Por tanto T es lineal, continua y sobreyectiva entre los espacios $l_{1,r}$ y Y. Así T es una aplicación abierta. Como

$U_z \subset T(U_{l_{1,r}}) \subset B_Y$ y $T(U_{l_{1,r}})$ es abierto, se tiene que $T(U_{l_{1,r}}) = U_Y$. Por el teorema de isomorfismos para espacio de banach (ver [11], pág 56, Teorema 1.7.14), existe un isomorfismo de S de $l_{1,r}/Kert\,T$ en Y y satisface $T = So\pi$ donde π es la aplicación cociente que va de $l_{1,r}$ sobre $l_{1,r}/Kert\,T$. Sea $U_{l_{1,r}}/Kert\,T$ una bola unitaria abierta de $l_{1,r}/Kert\,T$. entonces, $\pi(U_{l_{1,r}}) = U_{l_{1,r}}/Kert\,T$. Dado que $T(U_{l_{1,r}}) = U_Y$, se tiene $S(U_{l_{1,r}/Ker\,T}) = U_Y$ luego S es un isomorfismo isométrico de $l_{1,r}/Ker\,T$ sobre Y. Entonces, aunque $l_{1,r}$ sea estrictamente convexo, el espacio cociente $l_{1,r}/Ker\,T$ no lo es.

Apesar de que un espacio cociente de un espacio estrictamente convexo no es necesariamente estrctamente convexo, las sumas directas satisfacen lo esperado. De hecho, vale lo siguiente

Teorema 1.2.2. *Supongamos que* $Y_1, \dots, Y_k$ *son espacio normados. entonces,* $Y_1 \oplus \dots \oplus Y_k$ *es estrictamente convexo si y solamente si cada* Y_i *es estrictamente convexo.*

Demostración. Podemos asumir que $k = 2$ pues $(Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{p-1}) \oplus X_p$ es isomorfo e isométrico a $Y_1 \oplus \dots \oplus Y_{p-1} (2 \leq p \leq n)$ y usando inducción nos da el caso general. Usaremos también el hecho de que l_2^2 sobre $\mathbb{R}$ es un espacio normado estrictamente convexo. Supongamos inicialmente Y_1 o (Y_2) no son estrictamente convexo. Luego como $Y_1 \oplus Y_2$ poseen un subespacio isomorfo e isométrico a Y_1 (o a Y_2), se sigue que $Y_1 \oplus Y_2$ no es estrictamente convexo. Ahora, supongamos que Y_1 y Y_2 son estrictamente convexos. Sean (y_1, y_2) y (z_1, z_2) elemetos distintos de $S_{Y_1 \oplus Y_2}$. Probaremos que $\left\| \frac{1}{2}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) \right\|_{Y_1 \oplus Y_2} < 1$ lo que finaliza la demostración. Primero notemos como (y_1, y_2) , $(z_1, z_2) \in S_{Y_1 \oplus Y_2}$, se tiene

$$(\|y_1\|_{Y_1}, \|y_2\|_{Y_2}), (\|z_1\|_{Y_1}, \|z_2\|_{Y_2}) \in S_{l_2^2}.$$

Por simplicidad, ignoraremos el espacio en la notación de la norma, es decir,

$$\|y_i\|_{Y_i} = \|y_i\|, \|z_i\|_{Y_i} = \|z_i\| \ (1 \leq i \leq 2)$$

Observamos que si $\|y_1\| \neq \|z_1\|$ o $\|y_2\| \neq \|z_2\|$, se tiene:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) \right\| &= \left(\left\| \frac{1}{2}(y_1 + z_1) \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(y_2 + z_2) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\| \frac{1}{2}(\|y_1 + z_1\|, \|y_2 + z_2\|) \right\|_2 \leq \left\| \frac{1}{2}(\|y_1\| + \|z_1\|, \|y_2\| + \|z_2\|) \right\|_2 \\
&= \left\| ((\frac{1}{2}(\|y_1\|, \|y_2\|) + (\|z_1\|, \|z_2\|)) \right\|_2 < 1,
\end{aligned}$$

pues $(\|y_1\|, \|y_2\|), (\|z_1\|, \|z_2\|)$ son puntos distintos de $S_{l_2^2}$ (recordemos que estamos suponiendo que $\|y_1\| \neq \|z_1\|$ o $\|y_2\| \neq \|z_2\|$) y l_2^2 sobre $\mathbb{R}$ es estrictamente convexo. Podemos entonces suponer que $\|y_1\| = \|z_1\|$ y $\|y_2\| = \|z_2\|$, También podemos suponer sin perdida de generalidad que $y_1 \neq z_1$. Entonces, $\left\| \dfrac{1}{2}(y_1 + z_1) \right\| < \dfrac{1}{2}(\|y_1\| + \|z_1\|)$ por la convexidad estricta de Y_1. Luego,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2}(y_1 + z_1, y_2 + z_2) \right\| &= \left\| \frac{1}{2}(\|y_1 + z_1\|, \|y_2 + z_2\|) \right\|_2 \\
&< \left\| \frac{1}{2}(\|y_1\| + \|z_1\|, \|y_2\| + \|z_2\|) \right\|_2 = \|(\|y_1\|, \|y_2\|)\|_2 = 1,
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. $\square$

El resultado anterior se puede extender a sumas directas infinitas enumerables. Para mostrar este hecho, necesitamos lo siguiente

Lema 1.2.2. *Sea (X_n) una familia contable de espacios normados. Consideremos el el conjunto $X = \left\{(x_n) \in \Pi X_n;\ \sum \|x_n\|^2 < \infty\right\}$ dotado con las operaciones $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$, $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$ y $\|x_n\| = \left(\sum \|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Entonces X es un espacio normado y cada X_n es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de X además, si cada X_n es de Banach, entonce X es de Banach ,y si cada X_n es reflexivo entonces X es reflexivo.*

El espacio de banach X definido anteriormente se dice l_2- suma de la la familia X_n y es frecuentemente denotado por $(\sum X_n)_2$.

Demostración. Es fácil verificar que X es un espacio vectorial dotado con las operaciones definidas arriba. Verifiquemos que $\|x_n\| = \left(\sum \|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ es una norma para X:

- $\|(x_n)\| = 0 \Leftrightarrow (x_n) = (0)$;
- $\|(\lambda x_n)\| = \left(\sum \|\lambda x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\sum \|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda|\, \|(x_n)\|$;
- $\|(x_n) + (y_n)\| = (\sum \|x_n + y_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum(\|x_n\| + \|y_n\|)^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|(x_n)\| + \|(y_n)\|$, donde la primera desigualdad se sigue de la desigualdad triangular en los espacios X_n y la segunda de la desigualdad triangular en el espacio l_2.

Supongamos que cada X_n es de Banach. Sea $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X escribimos $x^{(k)} = (x_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $k, l \geq k_o$ implica $\left\|x^{(k)} - x^{(l)}\right\| < \epsilon$ osea,

$$\left(\sum_n \left\|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon \quad (*)$$

cuando $k, l \geq k_o$. Asimismo $\left\|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right\| < \epsilon$, $\forall\, n \geq 1\,, \exists\, x_n \in X_n$ de modo que $x_n = \lim_{k\to\infty} x_n^{(k)}$ (en la norma de X_n). Pongamos $x = (x_1, x_2, ...)$. Demostraremos que $x \in X$ y $x^{(k)} \to x$ en X cuando $k \to \infty$. Realmente, como $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $C > 0$ tal que $\left\|x^{(k)}\right\| \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, esto es, $\left(\sum_n \left\|x_n^{(k)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, $\left(\sum_{n=1}^p \left\|x_n^{(k)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C$ para todo $p \geq 1$ y todo $k \geq 1$. Fijando $p \geq 1$ y haciendo $k \longrightarrow \infty$, obtenemos $\left(\sum_{n=1}^p \|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C$. Haciendo $p \longrightarrow \infty$, tenemos $(\sum \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq C$, donde $(x_n) \in X$.Ahora de $(*)$,tenemos $\left(\sum_{n=1}^p \left\|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$, para todo $p \geq 1$ y todo $k, l \geq k_o$. Fijando $p \geq 1$,$k \geq k_o$ y haciendo $l \longrightarrow \infty$ obtenemos

$\left(\sum_{n=1}^{p}\left\|x_n^{(k)}-x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$. Por lo tanto manteniendo fijo $k \geq k_o$ y haciendo $m \longrightarrow \infty$ se tiene $\left(\sum_{n}\left\|x_n^{(k)}-x_n\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \epsilon$, es decir,

$$\left\|x^{(k)}-x\right\| \leq \epsilon \text{ siempre que } k \geq k_o.$$

Así, $x^{(k)}$ converge a x en X cuando $k \longrightarrow \infty$, Luego X es completo.

Demostraremos ahora que los X_n son isomorfo e isométrico a un subespacio cerrado de X:

Para cada $n \geq 1$, pongamos $X_n^{'} = \{(x_m) \in X; x_m = 0\ \forall m \neq n\}$ cada $X_n^{'}$ es un subespacio cerrado de X. claramente,$X_n^{'}$ es un subespacio de X y si $(0,0,0,...,x^{(k)},0,...)$ es una sucesión de $X_n^{'}$ (con $x^{(k)}$ n-énesima coordenada) tal que $\left\|(0,...,x^{(k)},0,...)-(x_1,x_2,...)\right\| \rightarrow 0$ entonces por la definición de la norma de X se tiene que $x_m = 0\ \forall m \neq n$ lo que muestra de que $X_n^{'}$ es cerrado. Ahora mostraremos de que X_n es isomorfo e isométrico a $X_n^{'}$ $(n \geq 1)$. De hecho consideremos una aplicación $x \in X_n \mapsto (0,0,..,0,x,0,0,...) \in X_n^{'}$ el cual es Lineal y biyectiva. Como $\|x_n\| = \left(\sum\|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|x_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$ para todo $(x_n) = (0,0,...,0,x,0,0,...) \in X$ se ve que es una isometría.

Ahora si demostraremos que si cada X_n es reflexivo, entonces X es reflexivo. Para esto, primero necesitamos construir un isomorfismo isométrico entre

$$\left(\sum X_n^*\right)_2$$

y

$$\left(\sum X_n\right)_2^*,$$

lo haremos de la siguiente manera: para cada $x_n^* \in (\sum X_n^*)_2$ definimos $f_{(x_n^*)}((x_n)) = \Sigma x_n^*(x_n)$ $((x_n) \in (\Sigma X_n)_2)$. Notemos que $f_{(x_n^*)}$ esta bien definida para cada $(x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$ pues

$$\sum|x_n^*(x_n)| \leq (\sum\|x_n^*\|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum\|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|(x_n^*)\|\,\|(x_n)\|,$$

para todo $(x_n) \in (\sum X_n)_2$. Por otro lado como $f_{(x_n^*)}$ es claramente lineal, se tiene que $f_{(x_n^*)} \in (\sum X_n)_2^*$ y $\left\|f_{(x_n^*)}\right\| \leq \|(x_n^*)\|$.

consideremos la aplicación lineal $R : (x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2 \longmapsto f_{(x_n^*)} \in (\sum X_n)_2^*$ como

$$\|R((x_n^*))\| \leq \|(x_n^*)\|$$

para todo $(x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$ se tiene que R es continua . Ahora basta demostrar que R es sobreyectiva y que $\|(x_n^*)\| \leq \|R((x_n^*))\|$ para todo $(x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$ Sea

$$p_m : X_m \longmapsto (\sum X_n)_2$$

el isomorfismo isométrico dado por $p_m(x_m) = (0,0,...,x_m,0,0,...)$ (x_m es la m-ésima coordenada). Tomamos $h \in (\sum X_n)_2^*$ y definimos $x_n^* = h\,o\,p_n \in X_n^*$ $(n \geq 1)$ observemos que

$$f_{(x_n^*)}((x_n)) = \sum x_n^*(x_n) = \sum h\, o\, p_n(x_n) = \sum h(p_n(x_n)) = h((x_n))$$

para todo $(x_n) \in (\sum X_n)_2$, donde $h = f_{(x_n^*)} = R((x_n^*))$. Lo que prueba R es sobreyectiva.

Demostraremos que $\|(x_n^*)\| \leq \|R((x_n^*))\|$, $\forall\, (x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$. fijemos $(x_n^*) \in (\sum X_n^*)_2$ y $t > 1$. Podemos suponer que $x_n^* \neq 0$. Para n tomamos $x_n \in S_{X_n}$ de manera que

$$x_n^*(x_n) \geq \frac{\|x_n^*\|}{t}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\|(x_n^*)\|^2 &= \Sigma \|x_n^*\|^2 \leq \Sigma\, t\, \|x_n^*\|\, x_n^*(x_n) = t\, \Sigma x_n^*(\|x_n^*\|\, x_n^*) \\
&= t f_{(x_n^*)}((\|x_n^*\|\, x_n^*)) \leq t \left\| f_{(x_n^*)} \right\| \|(\|x_n^*\|\, x_n^*)\| \\
&= t \left\| f_{(x_n^*)} \right\| \|((x_n))\|,
\end{aligned}$$

donde $\left\| f_{(x_n^*)} \right\| \geq \frac{1}{t} \|(x_n^*)\|$. Haciendo $t \longrightarrow 1^+$, obtenemos que $\|R((x_n^*))\| = \left\| f_{(x_n^*)} \right\| \geq \|(x_n^*)\|$. Dado que existe un isomorfismo isométrico entre

$$(\sum X_n^*)_2$$

y

$$(\sum X_n)_2^*\ ,$$

aplicando dos veces obtenemos

$$X^{**} = (\sum X_n)_2^{**} = (\sum X_n^{**})_2.$$

Asumiendo los X_n reflexivo, también

$$(\sum X_n^{**})_2 = (\sum X_n)_2 = X\ .$$

Por lo tanto, valen las siguientes identificaciones hechos através de isomorfismos isómetricos

$$X^{**} = (\sum X_n)_2^{**} = (\sum X_n^{**})_2 = (\sum X_n)_2 = X$$

Dado que la composición de estos isomorfismos isométricos coincide con la inmersión canónica de X en X^{**}, se tiene que X es reflexivo. Esto concluye con la demostración del lema. □

Observación 1.2.2. *Usaremos la reflexividad de l_2-suma de espacios reflexivos solamente en el capítulo 2.*

Teorema 1.2.3. *Sean (X_n) una familia contable de espacios normados. Entonces, un l_2-suma $(\Sigma X_n)_2$ es un espacio normado estrictamente convexo si y solamente si cada X_j es estrictamente convexo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Esto se sigue del hecho de que cada X_j es isométricamente isomorfo a un subespacio (cerrado) de $(\sum X_n)_2$.

($\Leftarrow$) Pongamos $X = (\Sigma X_n)_2$ y sean (y_n) , (z_n) dos elementos distintos de S_n. Demostraremos que

$$\left\| \frac{(y_n) + (z_n)}{2} \right\| < 1.$$

Primero, observemos que $(\|y_n\|), (\|z_n\|) \in S_{l_2}$, pues $\Sigma \|y_n\|^2 = 1 = \Sigma \|z_n\|^2$. Ahora si $\|y_n\| \neq \|z_n\|$ para algún n, es decir, si $(\|y_n\|) \neq (\|z_n\|)$, tenemos

$$\left\| \frac{(y_n) + (z_n)}{2} \right\| = \left(\sum \left\| \frac{y_n + z_n}{2} \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \frac{(\|y_n + z_n\|)}{2} \right\|_2 \leq \left\| \frac{(\|y_n\| + \|z_n\|)}{2} \right\|_2 < 1$$

pues l_2 es estrictamente convexo. Podemos entonces suponer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\|y_n\| = \|z_n\|$. Dado que $(y_n) \neq (z_n)$, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ de modo que $y_k \neq z_k$. Particularmente, observamos que y_k no es un múltiplo real no negativo de z_k. Luego, como X_k es estrictamente convexo, se cumple la desigualdad triangular estricta, es decir,

$$\left\| \frac{y_k + z_k}{2} \right\| < \frac{1}{2}(\|y_k\| + \|z_k\|).$$

Por lo tanto

$$\left\| \frac{(y_n) + (z_n)}{2} \right\| = \left\| \frac{(\|y_n + z_n\|)}{2} \right\|_2 < \left\| \frac{(\|y_n\| + \|z_n\|)}{2} \right\|_2 \leq 1.$$

□

1.3. Aplicación al problema de la mejor aproximación

En esta sección obtenemos una caracterización de espacios normados estrictamente convexos que establece que son exactamente aquellos espacios que satisfacen la propiedad de unicidad de minimizar distancias en subconjuntos convexos y no vacíos del espacio total. Es en este sentido que utilizaremos el término "mejor aproximación". También demostraremos que si el espacio normado estrictamente convexo es reflexivo, entonces la débil compacidad de B_X nos da la existencia de tal minimización, pero cuando el subconjunto convexo no es vacío en cuestión también está cerrado. Para aclarar, comenzaremos con tres definiciones:

Definición 1.3.1. *Un subconjunto no vacío B de un espacio métrico (M, d) es un conjunto de unicidades si para todo elemento $y \in M$ existe a lo mas un $z \in B$ tal que $d(y, z) = d(y, B) = inf\,\{d(y, b);\, b \in B\}$.*

Definición 1.3.2. *Sea (M, d), un subconjunto B de M no vacío se dice que es un conjunto de existencia o un conjunto proximal si $\forall\, y \in M$ existe por lo menos un $z \in B$ tal que $d(y, z) = d(y, B) = inf\,\{d(y, b);\, b \in B\}$. En este caso decimos que z es una mejor aproximación para y en B.*

Definición 1.3.3. *Un subconjunto no vacío B de un espacio métrico (M, d) es un conjunto de Chebyshev si $\forall\, y \in M$, $\exists!\, z \in B \,/\, d(y, z) = d(y, B) = inf\,\{d(y, b);\, b \in B\}$, es decir , B es un conjunto de existencia y también de unicidades.*

Teorema 1.3.1. *Sea$(Y, \|.\|)$. Se cumple la equivalencia:*

(a') Y es estrictamente convexo;

(b') Todo subconjunto $A \subset Y$, $A \neq \varnothing$ y convexo, entonces A es un conjunto de unicidades;

(c') Todo subconjunto $A \subset Y$, $A \neq \varnothing$, cerrado y convexo, entonces A es un conjunto de unicidades;

Demostración. (a') implica (b'): Si Y es estrictamente convexo, considere A un subconjunto convexo no vacío de Y y tomamos un $x_o \in Y$. Probaremos que no puede existir dos o más puntos de A mas próximos de x_o, es decir, que no puede existir dos mejores aproximaciones para x_o en A Observemos que como $y \in A$ es una mejor aproximación de x_o en A si y solamente si $y - x_o$ es una mejor aproximación de 0 en $A - x_o$, podemos suponer que $x_o = 0$. También podemos suponer que $d(x, A) > 0$ Además, después de multiplicar todo los puntos de A por la misma constante positiva, podemos asumir $d(0, A) = 1$. Considere a_1 y a_2 elementos de A muy próximo a 0. Luego, $\|a_1\| = \|a_2\| = 1$ donde $\{ka_1 + (1-k)a_2;\, 0 \leq k \leq 1\} \subset B_Y \subset S_Y$. Dado que Y es estrictamente convexo, se tiene $a_1 = a_2$ lo que muestra que A es un conjunto de unicidades.
(b') implica (c'): Es evidente.
(c') implica (a'): supongamos que Y no es estrictamente convexo. entonces, existe un segmento no degenerado en S_Y de la forma $\{ky_1 + (1-k)y_2;\, 0 \leq k \leq 1\}$ $(y_1 \neq y_2)$. dicho segmento es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de Y de modo que cada uno de sus puntos distan 1 del origen. Esto muestra que la la negación de (a') implica la negación de (c'). □

Para probar un corolario importante de este teorema, necesitamos recordar la

Proposición 1.3.1. *Sea X un espacio normado. Si $(y_i)_{i\in I} \subset X$ es una red que converge débilmente para $y \in X$ entonces*

$$\|y\| \leq \lim_{i} inf \, \|y_i\|.$$

Demostración. Asumamos que $y \neq 0$ Sea $y^* \in S_{X^*} \,/\, y^*(y) = \|y\|$ tenemos entonces $\|y\| = \lim_{i} |y^*(y_i)|$. Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, i_o(\epsilon)$ en $I \,/\, \|y\| - \epsilon \leq |y^*(y_i)| \leq \|y_i\|$ desde que $i \geq i_o(\epsilon)$. Luego $\|y\| \leq \lim_{i} inf \, \|y_i\|$. □

Colorario 1.3.1. *Sea $(Y, \|.\|)$ estrictamente convexo y reflexivo, si $A \neq \varnothing$, cerrado, convexo y $A \subset Y$ entonces A es un conjunto de* ***Chebyshev****.*

Demostración. Sea $A \subset Y$ no vacío, convexo y cerrrado tomamos $y_o \in Y$. Existe $(z_n) \subset A$ tal que $\text{lím}_n \|z_n - y_o\| = d(y_o, A)$. Dado que (z_n) esta acotado en Y es reflexivo, existe una subsucesión (z_{n_j}) que converge débilmente para algún z_o (vea [11],pág 251, Corolario 2.8.9). Por hipótesis A es convexo y cerrado, A es débilmente cerrado. Luego $z_o \in A$. Ahora, notemos que $d(y_o, A) \leq \|z_o - y_o\| \leq \text{lím}_j \left\|z_{n_j} - y_o\right\| = d(y_o, A)$, donde z_o es una mejor aproximación para y_o en A (la segunda desigualdad se sigue de la proposición anterior). Como Y es estrictamente convexo, se sigue entonces del teorema anterior que el conjunto A es de Chebyshev. □

Observación 1.3.1. *La demostración del corolario anterior, vimos que si Y es un espacio normado reflexivo entonces todo subconjunto convexo, cerrado y no vacio de Y es un conjunto de existencia.*

también se cumple:

Teorema 1.3.2. *Sea Y un espacio de Banach. Si todo subconjunto convexo, cerrado y no vacío de Y es un conjunto de existencia, entonces Y es reflexivo.*

Demostración. Podemos suponer, sin perdida de generalidad, que Y es un espacio real. Sea $g \in Y^*$ y consideremos el conjunto $A = \{x \in X;\, g(x) = \|g\|\}$ lo cual es convexo, cerrado y no vacío. Si probamos que existe $x_o \in A \cap B_Y$, el Teorema de James(ver [11], pág 262,Teorema 2.9.4) garantiza que Y es reflexivo, ya que $g \in Y^*$ es arbitrario. De la hipotesis A es un conjunto de existencia, que es lo mismo decir que A posee un elemento mínima norma. Sea $x_o \in A$ dicho punto. Se verifica que $x_o \in B_Y$; supongamos que $\|x_o\| > 1$. Como

$$\|f\| = \sup_{y \in B_Y} f(y) \;,$$

podemos escoger $y \in B_Y$, $\|y\| < 1$ tal que $f(y) \geq \frac{\|y\|}{\|x_o\|}$, donde $f(\|x_o\|\, y) \geq \|f\|$. De ahí escogiendo $0 < c \leq 1$ tal que

$$f(c\,\|x_o\|\, y) = cf(\|x_o\|\, y) = \|f\|,$$

observemos que $c\,\|x_o\|\, y \in C$ y $c\,\|x_o\|\, \|y\| < \|x_o\|$, una contradicción. □

Observación 1.3.2. *Un resultado de Jörg Blatter en 1976 (ver [5])garantiza que un espacio normado y completo si todo subconjunto convexo, cerrado y no vacío,del espacio tiene un elemento de norma mínima, esto es si todo subconjunto convexo, cerrado no vacío es un conjunto de existencia. Luego si* $(Y, \|.\|)$ *en el que todo subconjunto convexo, cerrado y no vacío es un conjunto de existencia, por (teorema 1.3.2) se concluye que* Y *es reflexivo.*

Usando (1.3.2), (1.3.4) y (1.3.5) obtenemos la demostración de lo siguiente.

Teorema 1.3.3. *Un* $(X, \|.\|)$ *es estrictamente convexo y reflexivo si y solamente si cada subconjunto convexo, cerrado y no vacío de* X *es un conjunto de Chebyshev.*

La importancia del teorema de mejor aproximación, que caracteriza a los espacios normados estrictamente convexo y reflexivo, a menudo se le llama Teorema de Day-James.
Ya vimos que si X es un espacio normado estrictamente convexo y $M \subset X$ es un subespacio cerrado entonces el cociente X/M no necesariamente es estrictamente convexo. Sin embargo, si M también es un conjunto de existencia, entonces el resultado es verdadero. Tenemos lo siguiente

Teorema 1.3.4. *Sea* $(X, \|.\|)$ *estrictamente convexo y* $M \subset X$ *un subespacio que es un conjunto de existencia. Entonces* X/M *es estrictamente convexo.*

Demostración. Notemos que el hecho de que M sea un conjunto de existencia nos lleva a que M es cerrado: en efecto, sea $z \in \overline{M}$. Como M es un conjunto de existencia , si existe $y \in M \;/\; \|z - y\| = \underset{w\in M}{inf} \|z - w\| = 0$, donde $z = y \in M$. Sean ahora $y + M$ y $z + M$ dos elementos de $S_{X/M}$. Recordando la definición de la norma cociente.

$$\|y + M\| = \underset{w\in M}{inf} \|y - w\|$$

en vista que M es un conjunto de existencia, existen w_y y w_z en M tales que

$$1 = \|y + M\| = \underset{w\in M}{inf} \|y - w\| = \|y - w_y\|$$

y

$$1 = \|z + M\| = \underset{w\in M}{inf} \|z - w\| = \|z - w_z\|$$

De ahi, $y - w_y$ y $z - w_z$ están en S_X. Como X es estrictamente convexo, se sigue que

$$\|k\,(y - w_y) + (1 - k)\,(z - w_z)\| \leq 1 \;\; (0 < k < 1)$$

Luego

$$\|k(y + M) + (1 - k)(z + M)\| \leq \|k(y - w_y) + (1 - k)(z - w_z)\| < 1 \;\; (0 < k < 1)$$

y X/M es estrictamente convexo. □

Capítulo 2

Espacios Uniformente Convexos

En el anterior capítulo $(X, \|.\|)$ es estrictamente convexo si y solo si todo segmento de recta no trivial con extremos en la esfera unitaria tiene su punto medio en el interior de la bola unitaria cerrada. En ese momento, no cuestionamos a qué distancia de la esfera unitaria está dicho punto medio, si escogemos inicialmente una longitud mínima para el segmento de recta que une los dos puntos. Veremos más adelante que es posible que un espacio normado X sea estrictamente convexo y que existen sucesiones (x_n) y (y_n) en S_X tal que la sucesión $(\|(x_n + y_n)\|)$ es acotado inferiormente por un numero mayor que cero y el $\underset{n}{sup}\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| = 1$. Cuando esto no ocurre, diremos que el espacio normado X es uniformemente convexo.

2.1. Definiciones y ejemplos

Definición 2.1.1. *sea X un espacio normado. Definimos la función $\delta_X : [0, 2] \to [0, 1]$ mediante la fórmula*

$$\delta_X(\epsilon) = inf\left\{1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x + y)\right\|; x, y \,\epsilon\, S_X, \|x - y\| \geq \epsilon\right\} si\, X \neq \{0\}$$

y por la fórmula

$$\delta_X(\epsilon) = \begin{cases} 0 & si\ \epsilon = 0 \\ 1 & si\ \epsilon = 1 \end{cases} \qquad\qquad si\ X = \{0\}$$

Diremos que δ_X es un módulo de convexidad de X. El espacio X es uniformemente convexo cuando $\delta_X(\epsilon) \geq 0$ siempre que $0 < \epsilon \leq 2$. Equivalentemente, un espacio normado X se dice uniformemente convexo si dado $0 < \epsilon \leq 2$, $\exists\, \delta(\epsilon) > 0$ de modo que $\left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\| \leq 1 - \delta$, siempre que $x, y \in S_X$ y $\|x - y\| \geq \epsilon$

supongamos que $X \neq 0$ y sea $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$. Por definición, $\delta_X(\epsilon_2) \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\|$ para cada $x, y \in S_X$ tal que $\|x - y\| \geq \epsilon_2$. Como $\epsilon_2 > \epsilon_1$, en particular vale

$$\delta_X(\epsilon_2) \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(x + y)\right\|$$

para cada $x, y \in S_X$ tal que $\|x - y\| \geq \epsilon_1$. Por lo tanto, $\delta_X(\epsilon_2) \leq \delta_X(\epsilon_1)$, donde vemos que $\delta_X(\epsilon)$ es una función no decreciente de ϵ tal que $\delta_X(0) = 0$ ademas es claro que si M es un subespacio de X entonces $\delta_M(\epsilon) \geq \delta_X(\epsilon)$ para cada $0 \leq \epsilon \leq 2$
Luego, si X es un espacio real unidemensional, entonces

$$\delta_X(\epsilon) = \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < \epsilon \leq 2 \end{cases}$$

Ejemplo 2.1.1. *Sea X un espacio de Hilbert, entonces X es uniformemente convexo provisto de la norma que proviene del producto interno. De hecho la ley del paralelogramo nos dice que*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2$$

Luego, si $\|x\| = \|y\| = 1$ *y* $\|x-y\| \geq \epsilon$ *entonces*

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq 1 - \frac{\epsilon^2}{4}$$

donde obtenemos $\delta_X(\epsilon) \geq 1 - \sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}$

Observación 2.1.1. *Cabe señalar que, en general, no es una tarea sencilla de completar si un espacio normado es o no es uniformemente convexo a través del cálculo explícito del módulo de convexidad. En la mayoría de los casos necesitamos resultados auxiliares para concluir si existe o no un límite inferior positivo y uniforme para la diferencia*

$$1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \qquad (x, y \in X \ \|x\| = \|y\| = 1, \ \|x-y\| \geq \epsilon).$$

Observación 2.1.2. *Hay otras formas de calcular el módulo de convexidad; por ejemplo, si X es un espacio normado con dimensión mayor que 0 si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *o con dimensión mayor que 1 si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, se cumplen las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} \delta_X(\epsilon) &= inf \left\{ 1 - \left\| \tfrac{1}{2}(x+y) \right\| ; x, y \in B_X, \|x-y\| \geq \epsilon \right\} \\ &= inf \left\{ 1 - \left\| \tfrac{1}{2}(x+y) \right\| ; x, y \in S_X, \|x-y\| = \epsilon \right\} \\ &= inf \left\{ 1 - \left\| \tfrac{1}{2}(x+y) \right\| ; x, y \in B_X, \|x-y\| = \epsilon \right\} \end{aligned}$$

,
cuando $0 \leq \epsilon \leq 2$, *y*

$$\begin{aligned} \delta_X(\epsilon) &= inf \left\{ 1 - \left\| \tfrac{1}{2}(x+y) \right\| ; x, y \in S_X, \|x-y\| > \epsilon \right\} \\ &= inf \left\{ 1 - \left\| \tfrac{1}{2}(x+y) \right\| ; x, y \in B_X, \|x-y\| > \epsilon \right\} \end{aligned}$$

cuando $0 \leq \epsilon < 2$,.

Veremos la demostración de este hecho en el siguiente sección.
El concepto de convexidad uniforme fue introducido por Clarkson en 1936. (ver [6]) Obviamente, todo espacio uniformemente convexo es estrictamente convexo, ya que dados x, y dos elementos distintos en la esfera unitaria de un espacio uniformemente normado X convexa, tenemos

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta_X(\|x-y\|) < 1.$$

En dimension finita los conceptos anteriores son equivalentes.

Teorema 2.1.1. *Consideremos X un espacio de dimension finita. Si X es estrictamente convexo se concluye que X es uniformemente convexo.*

Demostración. Asumiendo que X no es uniformemente convexo. Entonces $\exists$, $0 < \epsilon \leq 2$, $/ \forall n \in \mathbb{N}$, existen y_n, z_n , $en\, S_X\, con\, \|y_n - z_n\| \geq \epsilon$ y

$$1-\frac{1}{n} < \left\|\frac{y_n+z_n}{2}\right\| \leq 1$$

Como X es de dimension finita, se tiene que S_X es compacta, luego podemos suponer que existen y, z , $en\, S_X$ tal que y_n converge a y y z_n converge a z luego tenemos que $\|y-z\| \geq \epsilon$,$\|y\| = \|z\| = 1$ y

$$\left\|\frac{y+z}{2}\right\| = 1$$

esto contradice a la convexidad estricta de X □

En dimensiones infinitas, un espacio normado puede ser estrictamente convexo sin ser uniformemente convexo, veamos los siguiente:

Ejemplo 2.1.2. *Para cada número entero $n \geq 1$ sea $p_n = 1 + \frac{1}{n}$. Consideremos un espacio de Banach $X = (\sum l^2_{p_n})_2$ Como cada $l^2_{p_n}$ es estrictamente convexo por el teorema 1.2.3 que X es estrictamente convexo. Sabemos que X contiene una copia isométrica de cada $l^2_{p_n}$. Observemos que $(1,0),(0,1) \in S_{l^2_{p_n}}$, $\|(1,0)-(0,1)\|_{p_n} = 2^{\frac{n}{n+1}} \geq \sqrt{2}$ y*

$$\left\|\frac{(1,0)-(0,1)}{2}\right\|_{p_n} = 2^{\frac{-1}{n+1}}$$

Como $2^{\frac{-n}{n+1}} \longrightarrow 1$ si $n \longrightarrow \infty$ se concluye que X no es uniformemente convexo.

El lema que sigue es interesante para demostrar el teorema de Clarkson, el cual dice, si μ es una medida positiva en un $\sigma-$álgebra Γ de subconjuntos de A y $1 < p < \infty$, entonces $L_p(A,\Gamma,\mu)$ es uniformemente convexo. aunque presentaremos el lema de forma mas general de lo necesario para demostrar el resultado de Clarkson, esto nos será útil cuando discutamos la convexidad uniforme de las sumas directas.

Lema 2.1.1. *Para todo $1 < p < \infty$ y $\forall t \in (0,2]$ y cada función $k : (0,2] \longrightarrow 0,1]$,$\exists\, \gamma_{p,t,k} \in (0,1]$ talque si X es un espacio normado uniformemente convexo cuyo módulo de convexidad δ_X que satisface $k(\epsilon) \leq \delta_X(\epsilon)$ cuando $0 < \epsilon \leq 2$, entonces*

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^p \leq (1-\gamma_{p,t,k})(\frac{\|x\|^p+\|y\|^p}{2})$$

siempre que x, y sean elementos de X tal que $\|x-y\| \geq tmax\{\|x\|, \|y\|\}$.

Demostración. observemos que es suficiente probar el resultado para $x, y \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|y\| \leq 1$(Después de probar para este caso, se puede suponer que $\|x\| \geq \|y\|$ y dividimos la desigualdad obtenida por $\|x\|^p$). Ahora, supongamos por el absurdo que existe $1 < p < \infty, t \in (0,2]$ y una función $k : (0,2] \to (0,1]$ / $\nexists\, \gamma_{p,t,k} \in (0,1]$ con la propiedad deseada. Sea

$$f(t) = \frac{\left(\frac{1}{2}(1+t)\right)^p}{\frac{1}{2}(1+t^p)} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Mediante el criterio de la derivada comprobamos que f es estrictamente creciente en $(0,1]$, de modo que f alcanza su valor máximo de 1 en el intervalo $[0,1]$ exactamente en $t = 1$. Luego, si X es un espacio normado y x,y son elementos de X tales que $\|x\| = 1$ y $\|y\| \leq 1$, entonces

$$\frac{\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\|^p}{\frac{1}{2}(\|x\|^p + \|y\|^p)} \leq \frac{(\frac{1}{2}(1+\|y\|))^p}{\frac{1}{2}(1+\|y\|^p)}. \ (\blacklozenge)$$

Como estamos Asumiendo que no existe una constante $\gamma_{p,t,k} \in (0,1]$ que satisfaga dicho resultado, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, existe X_n espacio normado uniformemente convexo con módulo de convexidad δ_{X_n} satisfaciendo $k(\epsilon) \leq \delta_{X_n}(\epsilon)$ $(0 < \epsilon \leq 2)$ y elementos $x_n, y_n \in X_n$ tal que:

(1) $\|x_n\| = 1 y \, \|y_n\| \leq 1$

(2) $\|x_n - y_n\| \geq t max \left\{\|x_n, \|y_n\|\|\right\}$

(3) $\left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\|^p > \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{\|x_n\|^p + \|y_n\|^p}{2}\right)$

Por ($\blacklozenge$) y por (3) tenemos

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\|^p}{\frac{1}{2}\left(|x_n\|^p + \|y_n\|^p\right.} \leq \frac{\left(\frac{1}{2}(\|x_n + y_n\|)\right)^p}{\frac{1}{2}\left(\|x_n\|^p + \|y_n\|^p\right)}, \ (\blacklozenge\blacklozenge)$$

donde

$$\lim_n \frac{\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\|^p}{\frac{1}{2}\left(|x_n\|^p + \|y_n\|^p\right.} = 1, \ (\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge)$$

Por ($\blacklozenge\blacklozenge$), tenemos $\lim_n \frac{(\frac{1}{2}(1+\|y_n\|))^p}{\frac{1}{2}(1+\|y_n\|)^p} = 1$y como $1 = f(1) = \max_{0\leq t\leq 1} f(t)$, se sigue que $\|y_n\| \to 1$. Podemos asumir entonces $y_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $z_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$ para cada n. Dado que $\|y_n\|$ converge a 1, luego de ($\blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$) se tiene

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|\frac{1}{2}(x_n + z_n)\right\| = \lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|\frac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| = 1$$

Por otro lado, notemos que

$$\|x_n - z_n\| = \left\|x_n - \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| = \|\|y_n\|\, x_n - y_n\| \cdot \frac{1}{\|y_n\|} \geq \|\|y_n\|\, x_n - y_n\| \, (n \in \mathbb{N}).$$

Dado que $\|x_n - y_n\| \geq t$ y $\|y_n\|$ converge a 1, se puede asumir que $\|x_n - z_n\| \geq \dfrac{t}{2}$ para cada n. luego,

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n - z_n)\right\| \leq \frac{t}{2} \leq 1 - \delta_{X_n}\left(\frac{t}{2}\right) \leq 1 - \lambda\left(\frac{t}{2}\right) < 1$$

así para cada n se tiene

$$\lim_n \left\|\frac{1}{2}\left(x_n - z <_n\right)\right\| < 1.$$

Esta contradicción finaliza la demostración del resultado. □

Utilizando las notaciones del lema anterior y considerando λ como un módulo de convexidad del espacio normado uniformemente convexo $\mathbb{K}$ se obtiene el siguiente resultado, que será usado en la demostración del Teorema de Clarson:

Lema 2.1.2. *Sea $1 < p < \infty$. Existe una función $\gamma_p : (0, 2] \to (0, 1]$ tal que*

$$\left|\frac{\alpha + \beta}{2}\right|^p \leq (1 - \gamma_p(t))\left(\frac{|\alpha|^p + |\beta|^p}{2}\right)$$

siempre que α,$\beta \in \mathbb{K}$ satisfaga $|\alpha - \beta| \geq t max\left\{|\alpha|, |\beta|\right\}$.

Ahora se demostrará lo siguiente.

Teorema 2.1.2. *Sea μ una medida positiva en un $\sigma-$ álgebra $\sum$ de subconjuntos de un conjunto $\Omega \neq \varnothing$ y tomemos $1 < p < \infty$. Entonces, $L_p\left(\Omega, \Sigma, \mu\right)$ es uniformemente convexo.*

Demostración. Fijamos $\epsilon > 0$ y consideramos $g_1, g_2 \in S_{L_p(\Omega,\Sigma,\mu)}$ / $\|g_1 - g_2\|_p \geq \epsilon$. Sea

$$A = \left\{z \in \Omega; |g_1(z) - g_2(z)|^p \geq \frac{\epsilon^p}{4}(|g_1(z)|^p - |g_2(z)|^p)\right\}$$

observemos que

$$|g_1(z) - g_2(z)| \geq \frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}} max\left\{g_1(z), g_2(z)\right\} \text{ cuando } z \in A. \; (*)$$

si $A = \varnothing$ entonces

$$\int_\Omega |g_1 - g_2|^p \, d\mu \leq \frac{\epsilon^p}{4}\left(\int_\Omega |g_1|^p \, d\mu + \int_\Omega |g_2|^p \, d\mu\right) = \frac{\epsilon^p}{4}\left(\|g_1\|_p^p + \|g_2\|_p^p\right) = \frac{\epsilon^p}{2}$$

donde

$$\|g_1 - g_2\|_p \leq \frac{\epsilon}{2^{\frac{1}{p}}} < \epsilon$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $A \neq \varnothing$. Siendo γ_p como el lema anterior, tenemos

$$\left|\frac{g_1(z) + g_2(z)}{2}\right|^p \leq \left(1 - \gamma_p\left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}}\right)\right)\left(\frac{|g_1(z)|^p + |g_2(z)|^p}{2}\right)$$

siempre que $z \in A \,(por \, (*))$ y

$$\left|\frac{g_1(z) + g_2(z)}{2}\right|^p \leq \left(\frac{|g_1(z)|^p + |g_2(z)|^p}{2}\right)$$

siempre que $z \in \Omega$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
1 - \left\| \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \right\|_p^p &= \frac{\|g_1\|_p^p + \|g_2\|_p^p}{2} - \left\| \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \right\|_p^p \\
&= \int_\Omega \left(\frac{|g_1|^p + |g_2|^p}{2} - \left| \frac{g_1 + g_2}{2} \right|^p \right) d\mu \\
&\geq \int_A \left(\frac{|g_1|^p + |g_2|^p}{2} - \left| \frac{g_1 + g_2}{2} \right|^p \right) d\mu \\
&\geq \int_A \left(\frac{|g_1|^p + |g_2|^p}{2} \right) d\mu + \int_A \left(\gamma_p \left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}} \right) - 1 \right) \left(\frac{|g_1|^p + |g_2|^p}{2} \right) d\mu \\
&= \gamma_p \left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}} \right) \int_A \left(\frac{|g_1|^p + |g_2|^p}{2} \right) d\mu. \quad (**)
\end{aligned}
$$

Sea I_A una función característica de A. Luego,

$$
\begin{aligned}
\|g_1 I_A - g_2 I_A\|_p^p &= \|g_1 - g_2\|_p^p - \int_{\Omega \setminus A} |g_1 - g_2|^p \\
&\geq \epsilon^p - \frac{\epsilon^p}{4} \int_{\Omega \setminus A} (|g_1|^p + |g_2|^p) d\mu \\
&\geq \epsilon^p - \frac{\epsilon^p}{4} \left(\|g_1\|_p^p + \|g_2\|_p^p \right) = \frac{\epsilon^p}{2}
\end{aligned}
$$

donde

$$
max \left\{ \|g_1 I_A\|_p , \{ \|g_2 I_A\|_p \right\} \geq \frac{\epsilon^p}{2{,}2^{p+2}}
$$

Luego por $(**)$ tenemos que

$$
1 - \left\| \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \right\|_p^p = \gamma_p \left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}} \right) \frac{\|g_1 I_A\|_p^p + \|g_2 I_A\|_p^p}{2} \geq \gamma_p \left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}} \right) \left(\frac{\epsilon^p}{2^{p+2}} \right)
$$

donde

$$
\left\| \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \right\|_p \leq \left(1 - \gamma_p \left(\frac{\epsilon}{4^{\frac{1}{p}}} \right) \frac{\epsilon^p}{2^{p+2}} \right)^{\frac{1}{p}} < 1
$$

así observamos que existe $\delta = \delta_\epsilon > 0$, tal que $\left\| \frac{1}{2}(g_1 + g_2) \right\|_p \leq 1 - \delta$. Esto termina la demostración $\square$

Colorario 2.1.1. *Supongamos que $1 < p < \infty$. Entonces l_p es uniformemente convexo así como l_n^p siempre que n sea un entero no negativo.*

2.2. Propiedades

Antes de entrar realmente a las propiedades de los espacios normados uniformemente convexos, precisaremos algunos hecho sobre las posiciones de los puntos en los espacios dotado con una norma. Daremos a continuación los siguientes lemas.

Lema 2.2.1. *Sea X un espacio normado real bidimesional. Entonces S_X es conexo. Además de eso si $x^* \in X^*$ entonces*

$$\{x \in S_X;\, x^*(x) \geq 0\}$$

es conexo.

Demostración. Tengamos en cuenta que la segunda afirmación implica la primera, basta tomar $x^* = 0$. Probaremos entonces la segunda afirmación. Primero, se tiene que que la imagen de un conjunto conexo por una función continua es también conexo y X es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ como espacio normado, supongamos que X es $\mathbb{R}^2$. Dotemos a X, con dos normas $\|.\|_X$ su norma original y $\|.\|_2$ la norma euclidiana. tomamos $x^* \in X^*$. Definimos
$g : \left\{x \in S_{l_2^2};\ x^*(x) \geq 0\right\} \longrightarrow \{x \in S_X;\, x^*(x) \geq 0\}$ por $g(x) = \frac{x}{\|x\|x}$ siendo l_2^2 el espacio $\mathbb{R}^2$ equipado con la norma euclidiana. Como todas las normas son equivalentes en $\mathbb{R}^2$, la función norma $\|.\|_X$ es continua en l_2^2 donde g también lo es. Además de eso, g es una biyección con inversa $f : \{y \in S_X;\ x^*(y) \geq 0\} \longrightarrow \left\{y \in S_{l_2^2};\ x^*(y) \geq 0\right\}$, $f(y) = \frac{y}{\|y\|_2}$. Por tanto, dado que $\left\{x \in S_{l_2^2};\ x^*(x) \geq 0\right\}$ es conexo, se sigue que $\{x \in S_X;\, x^*(x) \geq 0\}$ también es conexo. □

Lema 2.2.2. *Sea $(X, \|.\|)$ que tiene una dimensión de al menos 1 si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o tiene una dimensión de al menos 2 si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dados $x_o \in S_X$ y $y_o \in B_X$, existen x_1 y x_2 en S_X tales que $x_1 - y_1 = x_o - y_o$ y*

$$\left\|\frac{1}{2}(x_1 + y_1)\right\| \geq \left\|\frac{1}{2}(x_o + y_o)\right\|$$

Demostración. Como X es un espacio normado real cuando los vectores se multiplican por escalares es restringida a $\mathbb{R}xX$, y como es un espacio normado complejo unidimensional se convierte en un espacio bidimensional real también cuando se ve por esta restricción, podemos suponer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y por tanto,que X es bidimensional. Así podemos suponer también que $X = \mathbb{R}^2$. Es claro también que podemos asumir que $\|y_o| < 1$. Definimos $x^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $x^*(ax_o + by_o) = b$. Por el lema anterior, el conjunto $\{x \in S_X\,;\ x^*(x) \geq 0\}$ es convexo. Como $\|x_o + y_o - x_o\| < 1$ y $\|-x_o + y_o - x_o\| \geq 2\,\|x_o\| - \|y_o\| > 1$, el Teorema del Valor Intermedio garantiza que $\exists\, x_1 \in \{x \in S_X\,;\ x^*(x) \geq 0\}$, necesariamente diferente de x_o y de $-x_o$, / $\|x_1 + y_o - x_o\| = 1$. pongamos $y_1 = x_1 + y_o - x_o$. entonces, $x_1, x_2 \in S_X$ y $x_1 - y_1 = x_o + y_o$. Falta apenas verificar que

$$\left\|\frac{1}{2}(x_1 + y_1)\right\| \geq \left\|\frac{1}{2}(x_o + y_o)\right\|$$

Si $z_1 \in B_X$ y $z_2 \in int\, B_X$, entonces $kz_1 + (1-k)z_2 \in int\, B_X$ para cada $0 < k < 1$: notemos que como B_X es convexa, se tiene $kz_1+(1-k)z_2 \in kB_X+(1-k)int\, B_X \subset B_X$. Dado que $kB_X + (1-k)int\, B_X$ es abierto siendo X normado, se cumple $kB_X + (1-k)int\, B_X \subset int\, B_X$. Usaremos este hecho varias veces en los argumentos subsiguientes. Pongamos $\overline{z_1, z_2}$ para representar una línea recta (no solo un segmento) pasando por los puntos z_1 y z_2 en X, $z_1 \neq z_2$. La Figura 2.1 abajo, defina W_o como siendo el conjunto de los puntos sobre o arriba $\overline{x_o, -x_o}$ y sobre o a la izquierda de $\overline{x_o, -x_1}$, y W_1 el conjunto de puntos estrictamente por encima de $\overline{x_1, -x_o}$ y estrictamente a la izquierda de $\overline{x_o, x_1}$. Como $x_o, x_1, -x_{o,-x_1}$ están en S_X por la convexidad de B_X se sigue que el paralelogramo cuyos vértices son estos puntos están contenidos en B_X y su interior está contenido en $int\, B_X$. Dado que $x^*(y_o) \geq 0$, entonces en la Figura 2.1 y_o esta ubicado sobre o arriba de $\overline{x_o, -x_o}$. si y_o estuviera estrictamente a la izquierda de $\overline{x_o, x_1}$ pero fuera de A (ver Figura 2.1) entonces podríamos encontrar un punto z_o en el interior del paralelogramo (y por tanto en el interior de B_X) tal que x_o o x_1 pertenecen al segmento $\overline{y_o, z_o}$, lo que es imposible pues $\|y_o\| < 1$ y $\|z_o\| < 1$ implicaría que $\|x_o\| < 1$ o $\|x_1\| < 1$. Si $y_o \in A$, como $y_1 = y_o + x_1 - x_o$, podríamos conectar y_1 a un punto z_1 en el interior del paralelogramo pasando por x_1, lo que nuevamente seria imposible pues $\|z_1\| < 1$ y $\|x_1\| = 1$ implicaría que $\|y_1\| < 1$, lo cual es absurdo. Luego, y_o está sobre o a la derecha de $\overline{x_o, x_1}$. Si y_o estuviera sobre esta recta, existiría $k > 0 \,/\, y_o = x_o + k(x_1 - x_o)$ y, dado que $y_1 = y_o + x_1 - x_o$, tendríamos $x_1 = y_1 - y_o + x_o = y_1 - x_o - k(x_1 - x_o) + x_o$ y así, $x_1 = \frac{1}{k+1}y_1 + \frac{1}{k+1}x_o$, donde x_1 es una combinación convexa de $y_1, x_o \in S_X$ y que junto con la convexidad estricta de l_2^2 nos daría $\|x_1\| < 1$ lo cual es absurdo. Por tanto, y_o está estrictamente a la derecha de $\overline{x_o, x_1}$. Como $-x_o$ y $-x_1$ son puntos distintos de S_X, por el mismo argumento anterior tenemos que los puntos en $\overline{-x_o, -x_1}$ sobre o arriba de $\overline{-x_o, x_o}$ tienen norma mayor que 1. Luego, y_o no está sobre $\overline{-x_o, -x_1}$ y arriba de $\overline{x_o, -x_o}$. si estuviera estrictamente a la derecha de $\overline{-x_o, -x_1}$ y arriba de $\overline{x_o, -x_o}$ entonces $-x_o$ seria una combinación convexa de y_o en un punto de z_o en el interior del paralelogramo, lo cual es imposible ya que $\|-x_o\| = 1$, $\|y_o\| < 1$ y $\|z_o\| < 1$. Así y_o está estrictamente a la izquierda de $\overline{-x_o, -x_1}$. Luego, como $\overline{x_o, x_1}$, $\overline{0, x_1 - x_o}$ y $\overline{-x_o, -x_1}$ son paralelos, entonces el punto medio $\frac{1}{2}(x_o + y_o) = m_o$ está estrictamente entre $\overline{x_o, x_1}$ y $\overline{0, x_1 - x_o}$ pues de lo contrario, y_o estaría a la derecha de $\overline{-x_o, -x_1}$, lo que es una contradicción. Así, $\overline{0, m_o}$ intersecta a $\overline{x_o, x_1}$ sobre o arriba de $\overline{x_o, -x_o}$ (ver Figura 2.2). Entonces este argumento no da $r > 1$ y

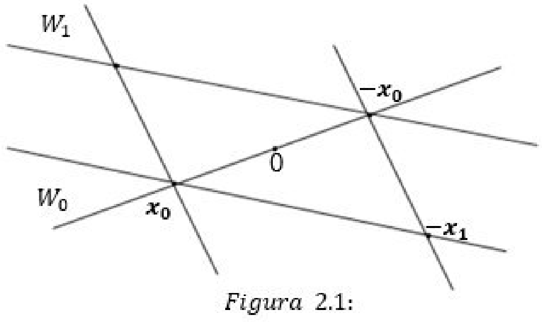


Figura 2.1:

a

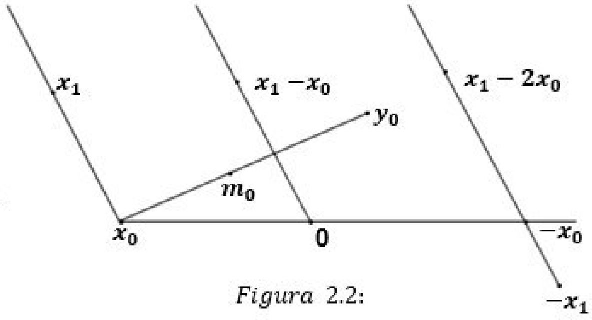


Figura 2.2:

$k \geq 0$ que satisface la ecuación $\dfrac{r}{2}(x_o + y_o) = x_o + k(x_1 - x_o)$. De ahí, tenemos que

$$\frac{r}{2}(x_1+y_1) = \frac{r}{2}(x_1+y_o+x_1-x_o) = \frac{r}{2}(2x_1+x_o+y_o-2x_o)$$
$$= rx_1 - rx_o + x_o + k(x_1-x_o) = x_o + (k+r)(x_1-x_o).$$

Si $k \leq 1$, se cumple

$$\left\| \frac{r}{2}(x_o+y_o) \right\| = \|x_o + k(x_1-x_o)\| = \|(1-k)x_o + kx_1\|$$
$$\leq 1 \leq \|x_o + (k+r)(x_1-x_o)\| = \left\| \frac{r}{2}(x_1+y_1) \right\|,$$

donde la última desigualdad es válida pues

$$\|x_o + (k+r)(x_1-x_o)\| = \|(1-(k+r))x_o + (k+r)x_1\|$$
$$\geq (k+r)\|x_1\| - (1-(k+r))\|x_o\| = 2(k+r) - 1 \geq 1.$$

si $k > 1$ como $\|x_1\| = 1$, $\|x_o + (k+r)(x_1-x_o)\| \geq 1$ y $x_o + k(x_1-x_o)$ está sobre el segmento de recta que une x_1 y $x_o + (k+r)(x_1-x_o)$, luego tenemos

$$\left\| \tfrac{r}{2}(x_o+y_o) \right\| = \|x_o + k(x_1-x_o)\| \leq \|x_o + (k+r)(x_1-x_o)\| = \left\| \tfrac{r}{2}(x_1+y_1) \right\|.$$

por tanto, en cualquiera de los casos se tiene $\left\| \frac{r}{2}(x_o+y_o) \right\| \leq \left\| \frac{r}{2}(x_1+y_1) \right\|$, donde

$$\left\| \tfrac{1}{2}(x_o+y_o) \right\| \leq \left\| \tfrac{1}{2}(x_1+y_1) \right\|$$

lo que queríamos.

□

Lema 2.2.3. *Supongamos que Xes un espacio normado, $0\epsilon < 2$ y $x, y \in S_X$ son tales que $\|x-y\| = \epsilon$. Entonces existen sucesiones (x_n) y (y_n) en S_X tales que $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$ y $\|x_n - y_n\| > \epsilon$ para cada n*

Demostración. Como en el lema anterior, basta considerar $X = X = \mathbb{R}^2$. Sea $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ tal que $x^*(ax+by) = a+b$. Luego, $x^*(x+y) = 0$. Si $x^*(x) = 0$ entonces $x, y \in S_X \cap Ker\, x^*$ y, por consiguiente $\|x-y\| = 0$ o 2, lo que es una contradicción. Entonces, podemos suponer que $x^*(x) = x^*(y) = 1$ para cada real δ, definimos

$$H_\delta = \{z \in X;\ x^*(z) = \delta\},$$

que representa el hiperplano generado por x^* y δ.

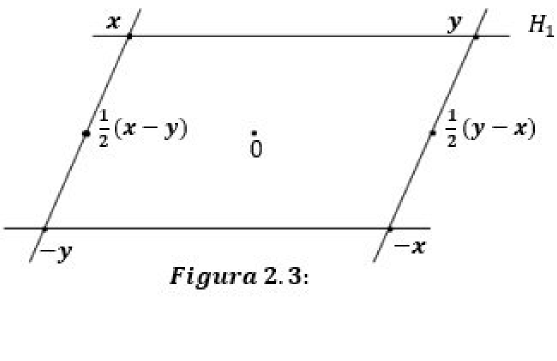


Figura 2.3:

La convexidad de B_X garantiza que el paralelogramo cuyos vértices son $x, y, -x, -y$ están en B_X. La conclusión del lema es inmediata si el segmento de recta $H_1 \cap B_X$ tiene longitud mayor que ϵ (por la simetría de B_X y como $x, y \in H_1 \cap S_X$). Se entonces asumir que x e y son los extremos de $H_1 \cap B_X$. supongamos que $H_{\delta_o} \cap B_X$ tiene longitud ϵ para algún $0 < \delta_o < 1$. Entonces algunos puntos de S_X estaría en la línea que pasa por x y $-y$, entre estos puntos, lo que implica que $\left\|\frac{1}{2}(x-y)\right\| = 1$ Pero esto es imposible ya que $\|x+y\| = \epsilon < 2$. Por lo tanto $H_{\delta_o} \cap B_X$ tiene longitud mayor que ϵ cada vez que $0 < \delta < 1$. Sea ahora (δ_n) una sucesión estrictamente creciente en $(0,1)$ de manera que $\delta_n \longrightarrow 1$. Para cada n sea x_n, y_nlos extremos del segmento $H_{\delta_o} \cap B_X$ tales que x_n esta sobre o a la izquierda de la recta que pasa por x y $-y$, y (y_n) está sobre o a la derecha de la recta que pasa por y y $-x$. Entonces, $x_n, y_n \in S_X$ y $\|x_n - y_n\| > \epsilon$ para cada n Por la compaxidad de S_X, Se puede suponer $\exists\, x_o, y_o \in S_X$. tales que $x_n \longrightarrow x_o$ y $y_n \longrightarrow y_o$. De ahí, como $\delta_n \longrightarrow 1$ y x^* es continua, se tiene que $x_o, y_o \in H_1 \cap B_X$. También se tiene $\|x_o - y_o\| \geq \epsilon$. Como x y y son los extremos de $H_{\delta_o} \cap B_X$,entonces $x = x_o$ y $y = y_o$ $\square$

Estos dos últimos lemas serán útiles para demostrar el siguiente resultado, que nos da otras formas de calcular el módulo de convexidad δ_X.

Teorema 2.2.1. *Supongamos que X es un espacio normado con dimensión mayor que 0 si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o con dimensión mayor que 1 si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sea*

$$\delta_X(\epsilon) = inf\left\{1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\| \; ; \, x, y \in S_X, \, \|x-y\| \geq \epsilon\right\}$$

el módulo de convexidad de X. Entonces:

$$\begin{aligned}
\delta_X(\epsilon) &= inf\left\{1 - \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \; ; \, x, y \in B_X, \, \|x-y\| \geq \epsilon\right\} \\
&= inf\left\{1 - \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \; ; \, x, y \in S_X, \, \|x-y\| = \epsilon\right\} \\
&= inf\left\{1 - \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \; ; \, x, y \in B_X, \, \|x-y\| = \epsilon\right\}
\end{aligned}$$

cuando $0 \leq \epsilon \leq 2$, y

$$\begin{aligned}
\delta_X(\epsilon) &= inf\left\{1 - \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \; ; \, x, y \in S_X, \, \|x-y\| > \epsilon\right\} \\
&= inf\left\{1 - \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \; ; \, x, y \in B_X, \, \|x-y\| > \epsilon\right\},
\end{aligned}$$

cuando $0 \leq \epsilon \leq 2$.

Demostración. Otra vez podemos asumir, que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sean $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$ los 5 ínfimos de la conclusión del teorema en el orden en que aparecen.
Afirmación 1: $\delta_X(\epsilon) = \delta_1(\epsilon)$ cuando $0 \leq \epsilon \leq 2$. Esto es evidente si $\epsilon = 0$. Fijemos $0 < \epsilon \leq 2$ y tomemos $y_o, z_o \in B_X$ con $\|y_o + z_o\| \geq \epsilon$. Como $S_X \subset B_X$, basta demostrar que

$$\delta_X(\epsilon) \leq 1 - \left\|\tfrac{1}{2}(y_o + z_o)\right\|.$$

Podemos asumir que $y_o \in S_X$. Como $y_o \in S_X$ y $z_o \in B_X$, Por el lema 2.2.2, existen $y_1, z_1 \in S_X$ tales que $y_1 - z_1 = y_o - z_o$ y

$$\left\|\tfrac{1}{2}(y_o + z_o)\right\| \leq \left\|\tfrac{1}{2}(y_1 + z_1)\right\|.$$

De ahí, $\|y_1 - z_1\| = \|y_o - z_o\| \geq \epsilon$, donde

$$\delta_X(\epsilon) \leq 1 - \left\|\tfrac{1}{2}(y_1 + z_1)\right\| \leq 1 - \left\|\tfrac{1}{2}(y_o + z_o)\right\|,$$

como queríamos.
Afirmación 2: $\delta_4(\epsilon) = \delta_5(\epsilon)$ cuando $0 \leq \epsilon < 2$ Dicho resultado es evidente para $\epsilon = 0$. Fijemos $0 < \epsilon < 2$ y $y_1, z_1 \in B_X$ / $\|y_1 - z_1\| > \epsilon$. Como $S_X \subset B_X$, bastará demostrar que $\delta_4(\epsilon) \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(y_1 + z_1)\right\|$. Nuevamente podemos suponer que $y_1 \in S_X$ y, por el Lema 2.2.2, existe $y_2, z_2 \in S_X$ tales que $y_2 - z_2 = y_1 - z_1$ y

$$\left\|\tfrac{1}{2}(y_1 + z_1)\right\| \leq \left\|\tfrac{1}{2}(y_1 + z_2)\right\|.$$

Luego, $\|y_2 - z_2\| = \|y_1 - z_1\| > \epsilon$ y, por lo tanto,

$$\delta_4(\epsilon) \leq 1 - \left\|\tfrac{1}{2}(y_2 + z_2)\right\| \leq 1 - \left\|\tfrac{1}{2}(y_1 + z_1)\right\|,$$

como queríamos.
Afirmación 3: $\delta_X(\epsilon) = \delta_4(\epsilon)$ cuando $0 \leq \epsilon < 2$. Es claro para $\epsilon = 0$. Supongamos $0 < \epsilon < 2$ y $y_3, z_3 \in S_X$ con $\|y_3 - z_3\| = \epsilon$. Como

$$\left\{1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x + y)\right\|; x, y \in S_X,\ \|x - y\| > \epsilon\right\}$$

está contenido en

$$\left\{1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x + y)\right\|; x, y \in S_X,\ \|x - y\| \geq \epsilon\right\},$$

luego será suficiente demostrar que $\delta_4(\epsilon) \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(y_3 + z_3)\right\|$. Por el Lema 2.2.3, existen sucesiones $(a_n), (b_n) \in S_X$ tales que $\|a_n - b_n\| > \epsilon$ para cada n y $a_n \longrightarrow y_3$, $b_n \longrightarrow z_3$. De ahí, $\delta_4(\epsilon) \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(a_n + b_n)\right\|$ para todo n donde hacemos $n \longrightarrow \infty$

$$\delta_4(\epsilon) \leq 1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x_3 + y_3)\right\|,$$

como queríamos.
Afirmación 4: $\delta_2(\epsilon) = \delta_3(\epsilon)$ cuando $0 \leq \epsilon \leq 2$. Como

$$\left\{1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x + y)\right\|;\ x, y \in S_X,\ \|x - y\| = \epsilon\right\}$$

está incluido en

$$\left\{1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x + y)\right\|;\ x, y \in B_X,\ \|x - y\| = \epsilon\right\}$$

bastará demostrar que $\delta_2(\epsilon) \leq \delta_3(\epsilon)$ cuando $0 < \epsilon \leq 2$. Fijemos $0 < \epsilon \leq 2$ y $y_4, z_4 \in B_X$ tales que $\|y_4 - z_4\| = \epsilon$. Será suficiente demostrar que $\delta_2(\epsilon) \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(y_4 + z_4)\right\|$. Asumamos un momento en que y_4 y z_4 tienen una norma menor que 1. Entonces existen dos segmentos de recta cerrados de longitud ϵ sobre la recta que pasa por y_4 y z_4 tal que cada segmento tiene un extremo en S_X y el otro extremo en $\overset{o}{B}_X$. como $\frac{1}{2}(y_4 + z_4)$ es una combinación convexa de los puntos medios de estos dos segmentos, el punto medio de por lo menos uno de estos segmentos tiene por lo menos una norma $\left\|\frac{1}{2}(y_4 + z_4)\right\|$. Por lo tanto, podemos suponer que $y_4 \in S_X$. Por el Lema 2.2.2, existe $y_5, z_5 \in S_X$ tales que $y_5 - z_5 = y_4 - z_4$ y

$$\left\|\tfrac{1}{2}(y_4+z_4)\right\| \leq \left\|\tfrac{1}{2}(y_5+z_5)\right\|.$$

Luego, $\|y_5 - z_5\| = \|y_4 - z_4\| = \epsilon$ y, así

$$\delta_X(\epsilon) \leq 1 - \left\|\tfrac{1}{2}(y_5+z_5)\right\| \leq 1 - \left\|\tfrac{1}{2}(y_4+z_4)\right\|.$$

Afirmación 5 :$\delta_X(\epsilon) = \delta_2(\epsilon)$ cuando $0 \leq \epsilon \leq 2$. Como

$$\left\{1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\|;\, x, y \in S_X,\, \|x-y\| = \epsilon\right\}$$

está incluido en

$$\left\{1 - \left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\|;\, x, y \in S_X,\, \|x-y\| \geq \epsilon\right\},$$

Será suficiente demostrar que $\delta_2(\epsilon) \leq \delta_X(\epsilon)$ cuando $0 \leq \epsilon \leq 2$. Esto es claro para $\epsilon = 0$ Fijemos entonces $0 < \epsilon \leq 2$ y $y_6, z_6 \in S_X$ tales que $\|y_6 - z_6\| \geq \epsilon$. Luego será suficiente demostrar que $\delta_2(\epsilon) \leq 1 - \left\|\tfrac{1}{2}(y_6+z_6)\right\|$ El segmento de recta cerrado con extremos y_6 y z_6 contiene un segmento de recta cerrado de longitud ϵ centrado en $\tfrac{1}{2}(y_6+z_6)$ y por el mismo argumento de la afirmación 4, obtenemos $y_7, z_7 \in S_X$ tales que $\|y_7 - z_7\| = \|y_6 - z_6\| \geq \epsilon$ y

$$\left\|\frac{1}{2}(y_7+z_7)\right\| \geq \left\|\frac{1}{2}(y_6+z_6)\right\|$$

por lo tanto,

$$\delta_2(\epsilon) \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(y_7-z_7)\right\| \leq 1 - \left\|\frac{1}{2}(y_6-z_6)\right\|.$$

Con esto termina la demostración del teorema. □

Asimismo como ocurre con la convexidad estricta, la convexidad uniforme es preservada mediante los isomorfismo; veamos esto con un ejemplo:

Ejemplo 2.2.1. *El espacio l_2^2 es uniformemente convexo e isomorfo a l_1^2, que no es estrictamente convexo.*
Lo máximo que se puede garantizar en este sentido es el siguiente

Proposición 2.2.1. *Todo espacio normado que es isomorfo e isométrico a un espacio normado uniformemente convexo es también uniformemente convexo.*

Demostración. Esto se sigue inmediatamente del hecho de que la convexidad uniforme es una propiedad métrica. □

El resultado siguiente es un **"criterio secuencial"** para la convexidad uniforme en espacios normados.

Proposición 2.2.2. *Sea X un espacio normado. Son equivalentes*

(a) X es uniformemente convexo.

(b) Si x_n y y_n son sucesiones en S_X tales que $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1$, entonces se tiene que $\|x_n - y_n\| \longrightarrow 0$.

(c) *Si x_n y y_n son sucesiones en B_X tales que* $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1$, *entonces se tiene que* $\|x_n-y_n\| \longrightarrow 0$.

(d) *Si x_n y y_n son sucesiones en X tales que $\|x_n\|$, $\|y_n\|$ y* $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\|$ *converge a 1, entonces se tiene que* $\|x_n-y_n\| \longrightarrow 0$.

Demostración. Supongamos que se verifica (b), consideremos (x_n) y (y_n) sucesiones en X tales que $\|x_n\| \longrightarrow 1$, $\|y_n\| \longrightarrow 1$ y $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1$. Demostraremos que $\lim\limits_n \|x_n-y_n\| = 0$. Dado que $\lim\limits_n \|x_n\| = 1$ y $\lim\limits_n \|y_n\| = 1$, se puede suponer que $x_n \neq 0$ y $y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, se cumple la desigualdad triangular reversa

$$\begin{aligned} 1 &\geq \left\|\frac{1}{2}(\|x_n\|^{-1}x_n + \|y_n\|^{-1}y_n)\right\| \\ &\geq \left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| - \left\|\frac{1}{2}(1-\|x_n\|^{-1})x_n\right\| - \left\|\frac{1}{2}(1-\|y_n\|^{-1})y_n\right\| \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

donde

$$\left\|\frac{1}{2}(\|x_n\|^{-1}x_n + \|y_n\|^{-1}y_n)\right\| \longrightarrow 1.$$

Por (b), se tiene que $\left\|\|x_n\|^{-1}x_n - \|y_n\|^{-1}y_n\right\| \longrightarrow 0$ y así

$$0 \leq \|x_n-y_n\| \leq \left\|\|x_n\|^{-1}x_n - \|y_n\|^{-1}y_n\right\| + \left\|(1-\|x_n\|^{-1})x_n\right\| + \left\|(1-\|y_n\|^{-1})y_n\right\| \to 1.$$

Luego $(b) \Rightarrow (d)$

Ahora, supongamos que se verifica (d) y consideremos (x_n), (y_n) sucesiones en B_X tales que

$$\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1.$$

como $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \leq \frac{1}{2}(\|x_n\|+\|x_n\|)\,\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1$ y $(x_n),(y_n) \in B_X$, se tiene que $\|x_n\| \longrightarrow 1$ y $\|y_n\| \longrightarrow 1$. Por (d) se sigue que $\|x_n-y_n\| \longrightarrow 0$, lo que demuestra que (d)$\Rightarrow$(c). Como es inmediato que (c)$\Rightarrow$(b), se tiene que (b)$\Leftrightarrow$(c)$\Leftrightarrow$(d).
Ahora demostraremos que (a)$\Rightarrow$(b): supongamos que X es uniformemente convexo y consideremos las sucesiones $(x_n),(y_n)$ en S_X tales que $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1$ pero $\|x_n-y_n\| \nrightarrow 0$. Luego, existe un $\epsilon > 0$ y subsucesiones (x_{n_j}) de (x_n) y (y_{n_j}) de (y_n) tales que $\left\|x_{n_j}-y_{n_j}\right\| \geq \epsilon$ para todo j. Luego si δ_X es el módulo de convexidad de X, por definición de convexidad uniforme se tiene $\left\|\frac{1}{2}(x_{n_j}+y_{n_j})\right\| \leq 1-\delta_X(\epsilon)$ para cada j, lo que es una contradicción. Luego se cumple que (a) implica (b).
Ahora Asumamos que X no es estrictamente convexo. Existe $0 < \epsilon \leq 2$ tal que $\delta_X(\epsilon) = 0$. Luego existen sucesiones $(x_n),(y_n)$ en S_X tales que $\|x_n-y_n\| \geq \epsilon$ para cada n y $\left\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\right\| \longrightarrow 1$, donde no se cumple (b). Esto termina la demostración □

El siguiente teorema nos dice que una condición necesaria para que un espacio de Banach sea uniformemente convexo es ser reflexivo. Primero, veamos lo siguiente que se usará en la demostración:

Proposición 2.2.3. *consideremos X un espacio normado. Si $(y_i^*)_{i\in I} \subset X^*$ una red que converge para $y^* \in X^*$ en la topología débil estrella entonces*

$$\|y^*\| \leq \liminf_j \left\|y_j^*\right\|.$$

Demostración. Fijamos $\epsilon > 0$. Existe $y \in B_X$ tal que

$$\lim_j \left|y_j^*(y)\right| = |y^*(y)| \geq \|y^*\| - \epsilon.$$

También $\exists\, j_o = j_o(\epsilon) \in I \,/\, j \geq j_o \Rightarrow \|y^*\| - 2\epsilon \leq \left|y_j^*(y)\right| \leq \left\|y_j^*\right\|$. Luego, $\|y^*\| \leq \liminf_j \left\|y_j^*\right\|$. □

Teorema 2.2.2. *Todo espacio de Banach uniformemente convexo es reflexivo*

Demostración. Consideremos X un espacio de Banach uniformemente convexo. Tome $y^{**} \in S_{X^{**}}$ y consideremos Q la aplicación canónica de X en X^{**} luego del teorema Goldstine (ver[11], pág 232, teorema 2.6.26) existe una red $(y_i)_{i\in I}$ en B_X tal que

$$(Q(y_i))_{i\in I} \xrightarrow{w^*} y^{**}.$$

Definimos $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2)$ cuando $i_1 \leq i_2$ y $j_1 \leq j_2$ $(i_1, i_2, j_1, j_2 \in I)$. Así tenemos

$$\left(Q(\tfrac{1}{2}(y_i + y_j))\right)_{(i,j)\in IxI}$$

una red tal que

$$\left(Q(\tfrac{1}{2}(y_i + y_j))\right)_{(i,j)\in IxI} \xrightarrow{w^*} y^{**}.$$

Por la proposición anterior,

$$\begin{aligned} 1 = \|y^{**}\| &\leq \liminf_{(i,j)\in IxI} \left\|Q\left(\frac{1}{2}(y_i + y_j)\right)\right\| \\ &= \liminf_{(i,j)\in IxI} \left\|\frac{1}{2}(y_i + y_j)\right\| \leq \limsup_{(i,j)\in IxI} \left\|\frac{1}{2}(y_i + y_j)\right\| \leq 1, \end{aligned}$$

donde

$$\left\|\frac{1}{2}(y_1 + y_j)\right\| \longrightarrow 1,$$

dado que X es uniformemente convexo, se sigue $\|y_i - y_j\| \longrightarrow 0$ luego $(y_i)_{i\in I}$ es una red de Cauchy. Como X es completo, existe $y_o \in X$ tal que $(y_i)_{i\in I} \longrightarrow y_o$. Luego $(Q(y_i))_{i\in I} \longrightarrow Q(y_o)$, donde $y^{**} = Q(y_o)$. Por lo tanto, X es reflexivo. □

Colorario 2.2.1. *Todo espacio de Banch que posee una norma uniformemente convexo equivalente es un espacio de reflexivo.*

Observación 2.2.1. *Una vez conocido el teorema de Milman-Pettis, observamos por qué no fue tan fácil construir un ejemplo de un espacio de Banach no reflexivo y estrictamente convexo ($l_{1,r}$). Apesar de ser estrictamente convexo un ejemplo de este tipo no puede ser uniformemente convexo.*

Cualquier subconjunto convexo, cerrado y no vacío de un espacio normado estrictamente convexo es un conjunto de Chebyshev.
El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema 2.2.2.

Colorario 2.2.2. *Todo subconjunto convexo, cerrado y no vacío de un espacio de Banach uniformemente convexo es un conjunto de chebyshev.*

En lo siguiente Demostraremos que los espacios normados uniformemente convexos poseen una propiedad importante conocido como la propiedad de **Radon-Riez**.
Primero, veamos la definición de eta propiedad:

Definición 2.2.1. *Un espacio normado X tiene la propiedad de **Radon-Riez** cuando dada una sucesion (x_n) en X y $x \in X$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*

Teorema 2.2.3. *Cualquier espacio normado uniformemente convexo tiene la propiedad de **Radon-Riez**.*

Demostración. Sea X un espacio normado uniformemente convexo, $(x_n) \subset X$ una sucesión y $x \in X$ tales que x_n converge débilmente a x y $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$. Demostraremos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Podemos suponer que $x \neq 0$ De ahí, podemos suponer también $x_n \neq 0$ para todo n. como

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} \xrightarrow{w} \frac{x}{\|x\|}$$

es suficiente demostrar que

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} \longrightarrow \frac{x}{\|x\|}$$

Podemos suponer que x y cada x_n están en S_X. Como $\frac{1}{2}(x_n + x) \xrightarrow{w} x$, tenemos

$$\|x\| = 1 \leq lim\,inf \left\|\tfrac{1}{2}(x_n + x)\right\| \leq lim\,sup \left\|\tfrac{1}{2}(x_n + x)\right\| \leq 1$$

y asimismo

$$\left\|\tfrac{1}{2}(x_n + x)\right\| \longrightarrow 1.$$

Por lo tanto

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

por el criterio secuencial de convexidad uniforme □

Uniendo el teorema anterior con el teorema de Clarkson nos da lo siguiente

Colorario 2.2.3. *Sea μ una medida positiva sobre una $\sigma -$ álgebra Σ de subconjuntos de un conjunto $\Omega \neq \varnothing$ y $1 < p < \infty$, entonces $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ tiene la propiedad de Radon-Riesz.*

Observación 2.2.2. *El corolario anterior fue demostrado por Radon-Riesz 10 años antes de que Clarkson introdujera el concepto de convexidad uniforme.*

Finalizaremos el capítulo, discutiendo la convexidad uniforme de subespacio , de cocientes y de sumas directas.

Proposición 2.2.4. *Todo subespacio de un espacio normado uniformemente convexo es uniformemente convexo.*

Demostración. consideremos X un espacio normado uniformemente convexo y $M \subset X$ un subespacio. Por la definición de módulo de convexidad de M y de X se sigue directamente que $\delta_M(\epsilon) \geq \delta_X(\epsilon)$ y $0 \leq \epsilon \leq 2$. Luego, como X es uniformemente convexo, tenemos $\delta_X(\epsilon) > 0$ siempre que $0 < \epsilon \leq 2$. De ahí, $\delta_M(\epsilon) > 0$ siempre que $0 < \epsilon \leq 2$, donde M es uniformemente convexo por definición □

Para el resultado correspondiente a los cocientes, necesitaremos la siguiente

Proposición 2.2.5. *Sean M un subespacio cerrado de un espacio normado X.*

(a) si $x \in X$ entonces $\|x\| \geq \|x + M\|$;

(b) si $x \in X$ y dado $\epsilon > 0$, entonces existe $x' \in X$ tal que $x' + M = x + M$ y $\|x'\| < \|x + M\| + \epsilon$.

Demostración. (a) Dado que $0 \in M$, se tiene que $\|x\| = \|x - 0\| \geq d(x, M)$ para cada $x \in X$.
(b) Fijemos $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Por la definición de la norma del cociente, existe $y \in M$ tal que $\|x - y\| < \|x + M\| + \epsilon$. Entonces, Poniendo $x' = x - y$, se tiene (b). □

Teorema 2.2.4. *Sean N un subespacio cerrado de un espacio normado uniformemente convexo Y, entonces Y/N es uniformemente convexo.*

Demostración. Sean $(x_n + N)$ y $(y_n + N)$ sucesiones en $S_{X/N}$ tales que

$$\left\|\tfrac{1}{2}(x_n + y_n)\right\| \longrightarrow 1.$$

Por el criterio secuencial de convexidad uniforme, basta demostrar que
$\|(x_n - y_n) + N\| \longrightarrow 0$ Por la anterior proposición, $\forall n$ existen x'_n y y'_n en Y tales que

$$1 = \|x_n + N\| = \|x'_n + N\| \leq \|x'_n\| < \|x_n + N\| + \tfrac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{n}$$

y

$$1 = \|y_n + N\| = \|y'_n + N\| \leq \|y'_n\| < \|y_n + N\| + \tfrac{1}{n} = 1 + \tfrac{1}{n}$$

haciendo $n \longrightarrow \infty$ obtenemos $\|x'_n\| \longrightarrow 1$ y $\|y'_n\| \longrightarrow 1$. como

$$\left\|\tfrac{1}{2}(x_n + y_n) + N\right\| = \left\|\tfrac{1}{2}(x'_n + y'_n) + N\right\| \leq \left\|\tfrac{1}{2}(x'_n + y'_n)\right\| \leq \tfrac{1}{2}(\|x'_n\| + \|y'_n\|),$$

haciendo $n \longrightarrow \infty$ tenemos que

$$\left\|\tfrac{1}{2}(x'_n + y'_n)\right\| \longrightarrow 1,$$

donde $\|x'_n - y'_n\| \longrightarrow 0$ (por el criterio secuencial de convexidad uniforme). Entonces,

$$\|(x_n - y_n) + N\| = \|(x'_n - y'_n) + N\| \leq \|x'_n - y'_n\| \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow \infty$ con lo que se termina la demostración. □

Veamos los siguiente resultados correspondientes para sumas directas

Teorema 2.2.5. *consideremos $Y_1, ..., Y_n$ espacios normados. Luego, $Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n$ es uniformemente convexo si y solo si cada Y_i es uniformemente convexo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos $Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n$ es uniformemente convexo. Dado que los X_i es isomorfo e isométrico a un subespacio de $Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n$, se tiene que cada Y_i es uniformemente convexo.
($\Leftarrow$) Supongamos que cada Y_i es uniformemente convexo. Fijamos $\epsilon > 0$ y consideremos $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in S_{Y_1 \oplus \cdots \oplus Y_n}$ tales que $\|(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n)\| \geq \epsilon$ Sea

$$B = \left\{ i \in \{1, ..., n\}\, ;\, \|x_i - y_i\|^2 \geq \tfrac{\epsilon^2}{4}(\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2) \right\}$$

notemos que $B \neq \varnothing$ pues de los contrario, tendríamos $\|x_i - y_i\| < \dfrac{\epsilon^2}{4}(\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2)$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$ sumando en i obtendríamos

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \|x_i - y_i\|^2 < \frac{\epsilon^2}{4}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \|y_i\|^2\right) = \frac{\epsilon^2}{4}(1+1) = \frac{\epsilon^2}{2}$$

luego $\|(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n)\| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ esto sería una contradicción. Observemos también que $\|x_i - y_i\| \geq \frac{\epsilon}{2} max\{\|x_i\|, \|y_i\|\}$ para cada $i \in B$.
Sea $\lambda(t) = min\{\delta_{X_1}(t), ..., \delta_{X_n}(t)\}$ $(0 < t \leq 2)$. Para $t = \frac{\epsilon}{2}$, consideremos una constante $\gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda}$ por el lema 2.1.1 se tiene.

$$\left\|\frac{1}{2}(x_i + y_i)\right\|^2 \leq (1 - \gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda})\left(\frac{\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2}{2}\right)$$

siempre que $i \in B$ y

$$\left\|\frac{1}{2}(x_i + y_i)\right\|^2 \leq \left(\frac{\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2}{2}\right)$$

para cada $i \in \{1...n\}$. Luego

$$\begin{aligned}
1 - \left\|\frac{1}{2}((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n))\right\|^2 &= 1 - \sum_{i=1}^n \left\|\frac{1}{2}(x_i + y_i)\right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2}{2} - \left\|\frac{1}{2}(x_i + y_i)\right\|^2 \\
&\geq \sum_{i \in B} \frac{\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2}{2} - \left\|\frac{1}{2}(x_i + y_i)\right\|^2 \\
&\geq \gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda} \sum_{i \in B} \frac{\|x_i\|^2 + \|y_i\|^2}{2}
\end{aligned}$$

Además si $C = \{1, ..., n\} \setminus B$ entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in B} \|x_i - y_i\|^2 &= \|(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n)\|^2 - \sum_{i \in C} \|x_i - y_i\|^2 \\
&\geq \epsilon^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{i \in C} (\|x_i\|^2 + \|x_i\|^2) \\
&\geq \epsilon^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \sum_{i=1}^n (\|x_i\|^2 + \|x_i\|^2) = \epsilon^2 - \frac{\epsilon^2}{2} = \frac{\epsilon^2}{2}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\left(\sum_{i\in B}\|x_i-y_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}.$$

De ahí,

$$max\left\{\left(\sum_{i\in B}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{i\in B}\|x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \geq \frac{\epsilon}{2\sqrt{2}}$$

por lo tanto,

$$1-\left\|\frac{1}{2}((x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n))\right\|^2 \geq \gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda}\sum_{i\in B}\frac{\|x_i\|^2+\|y_i\|^2}{2} \geq \gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda}\frac{\epsilon^2}{16}$$

así mismo se tiene

$$\left\|\frac{1}{2}((x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n))\right\| \leq \left(1-\gamma_{2,\frac{\epsilon}{2},\lambda}\frac{\epsilon^2}{16}\right)^{\frac{1}{2}} < 1.$$

Esto demuestra que $Y_1\oplus\cdots\oplus Y_n$ es uniformemente convexo. □

Observación 2.2.3. *El ejemplo 2.1.2 nos muestra que el resultado anterior puede ser falso si consideramos sumas directas infinitas.*

Capítulo 3

Teorema de Enflo

3.1. Arboles en espacio de Banach

Definición 3.1.1. *Consideremos X un espacio de Banach. Dado un real $\epsilon > 0$ y un entero $n \geq 1$, un (n, ϵ)-árbol en X es un conjunto de la forma*

$$T_n = \{x_o\} \cup \{x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k};\ 1 \leq k \leq n, \epsilon_i = \pm 1\}$$

tal que:

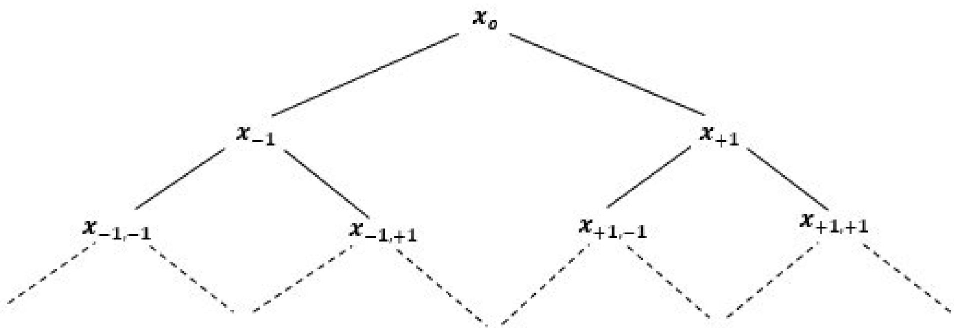
(1) $x_o = \dfrac{x_{-1} + x_{+1}}{2}$ *y* $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_2} = \dfrac{x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,-1} + x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,+1}}{2}$, *para* $1 \leq k \leq n-1$*;*

(2) $\|x_{-1} - x_{+1}\| \geq \epsilon$ *y* $\|x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,-1} - x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k,+1}\| \geq \epsilon$ *para* $1 \leq k \leq n-1$.

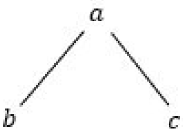
Un (∞, ϵ)-*árbol* e X es un conjunto de la forma

$$T_\infty = \{x_o\} \cup \{x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_2};\ k \geq 1, \epsilon_i = \pm 1\}$$

Tal que las condiciones anteriores (1) y (2) se verifican para todo $k \geq 1$.
Podemos observar tales arboles de la siguiente manera:



El punto x_o se dice que es la raíz del árbol y cada vértice a sale de exactamente dos ramas que conducen a dos vértices b y c:



La condición (1) nos dice que a es el punto medio del segmento de recta que conecta b con c, la condición (2) nos dice que el segmento de recta tiene una longitud mayor o igual a ϵ. diremos que (x_o) es un *0-parte del árbol*, (x_{-1}, x_{+1}) es un 1-*parte del árbol*, $(x_{-1,-1}, x_{-1,+1}, x_{+1,-1}, x_{+1,+1})$ es un 2-*parte del árbol* y así sucesivamente.En general, para $k \geq 1$, un *k-parte del árbol* es una secuencia de 2^k elementos obtenidos ordenándose los 2^k elementos del conjunto $\{x_{\epsilon_{1,\ldots}}, x_{\epsilon_k}; \epsilon_i = \pm 1\}$ en el orden lexicográfico de sus índices. En situaciones en la que estamos especialmente interesados en una determinada $k-parte$ de un árbol es común usar una indexación lineal, denotando un $k-parte$ del árbol por

$$(a_1, a_2, ..., a_{2^k}),$$

por ejemplo. Con esta notación, de la propiedad (1) se tiene que

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{2^k-1} + a_{2^k}}{2}\right)$$

es exactamente un $(k-1)$- parte del árbol.

Ejemplo 3.1.1. *El espacio l_∞^n, y el conjunto*

$$T_n = \{(0, 0, \ldots, 0)\} \cup \{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, 0, 0, \ldots, 0);\ 1 \leq k \leq n\,, \epsilon_i = \pm 1\}$$

es un $(n, 2)$-árbol, que está contenida en la bola $B_{l_\infty^n}$. Ya en el espacio l_∞ el conjunto

$$T_\infty = \{(0, 0, \ldots)\} \cup \{(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k, 0, 0, \ldots);\ k \geq 1\,, \epsilon_i = \pm 1\}$$

es una $(\infty, 2)$-árbol contenida en la bola B_{l_∞}.

Definición 3.1.2. *Diremos que un espacio de Banach X posee la* ***propiedad del Árbol Finito*** *(P.A.F) si, para algún $0 < \epsilon \leq 2$, existe un (n, ϵ)-árbol T_n incluido en B_X, $\forall\, n \geq 1$*

Definición 3.1.3. *Diremos que un espacio de Banach X posee la* ***propiedad del Árbol Infinito*** *(P.A.I) si, para algún $0 < \epsilon \leq 2$, existe un (∞, ϵ)-árbol T_∞ incluido en B_X.*

Por lo que se vio en el ejemplo 3.1.1, l_∞ es un ejemplo de un espacio de Banach que tiene la **P.A.I**. Veremos en adelante que ningún espacio de Banach reflexivo tiene la **P.A.I**. Sin embargo, es posible que un espacio de Banach tenga la **P.A.F**, como se muestra en lo siguiente

Ejemplo 3.1.2. *Sea el espacio de Banach*

$$X = \left(\sum_n l_\infty^n \right)_2 .$$

Dado que cada l_∞^n es reflexivo, se sigue del lema 1.2.2 que X es reflexivo. Como X contiene una copia isométrica de cada l_∞^n y dado que $B_{l_\infty^n}$ contiene un $(n, 2)$-árbol (Ejemplo 3.1.1), tenemos que B_X contiene un $(n, 2)$-árbol, para cada $n \geq 1$ .Luego, X tiene la **P.A.F**.
Veamos ahora la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. *Las propiedades de árbol son invariante mediante isomorfismo (no necesariamente isométricos).*

Demostración. Sea X e Y espacios de Banach e isomorfos vía la función $g : X \longrightarrow Y$. Luego existen $r > 0$ y $R > 0$ tales que

$$r \|x\| \leq \|g(x)\| \leq R \|x\| \text{ para todo } x \in X$$

Así, observamos que g trasforma un (n, ϵ)-árbol en B_X en un $(n, r\epsilon)$-árbol en RB_Y; multiplicando este último árbol por R^{-1}, se convierte en un $\left(n, \frac{r\epsilon}{R}\right)$-árbol en B_Y. Análogamente, g^{-1} trasforma un (n, ϵ)-árbol en B_Y en un $\left(n, \frac{\epsilon}{R}\right)$-árbol en $r^{-1}B_X$; multiplicando este último árbol por r, se trasforma en un $\left(n, \frac{r\epsilon}{R}\right)$-árbol en B_X lo mismo ocurre con (∞, ϵ)-arboles. esto demuestra la proposición. □

Con el finalidad de demostrar que ningún espacio de Banach reflexivo tiene la **P.A.I.**, enunciaremos una proposición y un lema siguiente.

Proposición 3.1.2. *Consideremos $\hat{K}$ un subconjunto convexo y compacto de un espacio localmente convexo X y $\hat{U}$ un subconjunto compacto de $\hat{K}$. los siguientes son equivalentes:*

(a) $\hat{K} = \overline{co}(\hat{U})$;

(b) $E(\hat{K}) \subset \hat{U}$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): El teorema de Milman (ver [12], pág 76, Teorema 3.25) nos garantiza que si F es un conjunto compacto en un espacio localmente convexo X y $\overline{co}(F)$ también es compacto, entonces todo punto extremo de $\overline{co}(F)$ está en F, es decir, $E(\overline{co}(F)) \subset F$. Luego poniendo $F = \hat{U}$, se tiene de (a) que $E(\hat{K}) \subset \hat{U}$.
(b) $\Rightarrow$ (a) Por el teorema de Krein-Milman (ver [12], pág 75,Teorema 3.23) y por (b), $K = \overline{co}(E(K)) \subset \overline{co}(U) \subset K$ donde $K = \overline{co}(U)$

□

El siguiente lema es debido a **Asplund y Namioka**.

Lema 3.1.1. *consideremos $\hat{K}$ un subconjunto convexo, separable y w-compacto (débilmente - compacto) en un espacio de Banach X. dado $\epsilon > 0$, existe un subconjunto convexo y cerrado $\hat{C}$ de $\hat{K}$ diferente de $\hat{K}$ tal que diam$(\hat{K} \setminus \hat{C}) < \epsilon$, es decir,* $\sup\limits_{x,y \in \hat{K} \setminus \hat{C}} \|x - y\| < \epsilon$.

Demostración. Hagamos $D = \overline{E(\hat{K})}^{w}$. Dado que $D \subset \hat{K}$ y $\hat{K}$ es w-compacto, se tiene que D también es w-compacto, en la cual es un espacio de Baire en la topología débil. fijemos $\epsilon > 0$. Como $\hat{K}$ es separable, $\hat{K}$ puede ser cubierto por una familia numerable de bolas cerradas (B_n) de radio $\dfrac{\epsilon}{3}$. Observemos que cada (B_n) también es w-cerrado. Como $D = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cap D)$ y $B_n \cap D$ es w-cerrado para cada $n \geq 1$. El teorema de Baire nos garantiza que existe $n_o \geq 1$ tal que $(B_{n_o} \cap D)$ tiene interior no vacío relativo a D provisto de la topología débil. Luego, existe un conjunto w-abierto O tal que $\varnothing \neq O \cap D \subset B_{n_o} \cap D$. Pongamos $\hat{U} = D \backslash O$, que es un conjunto $w-$compacto. Haciendo $\hat{K}_1 = \overline{co}(\hat{U})$, obtenemos que $\hat{K}_1 \neq D$. de hecho, si tuviéramos $\overline{co}(\hat{U}) = D = \overline{E(\hat{K})}^{w}$, entonces la proposición anterior garantizaría que $E(\hat{K}) = E(\overline{E(\hat{K})}) \subset E(\overline{E(\hat{K})}^{w}) \subset \hat{U}$, lo que no puede ser posible ya que O es w- abierto y $O \cap \overline{E(\hat{K})}^{w} \neq \varnothing$ (donde $O \cap \overline{E(\hat{K})} \neq \varnothing$) además, observemos que $E(\hat{K}) \nsubseteq \hat{K}_1$ pues de lo contrario, tendríamos por el teorema de Krein-Milman que $\hat{K} = \overline{co}(E(\hat{K})) \subset \overline{co}(\hat{K}_1) = \hat{K}_1$ lo que seria una contradicción. fijamos entonces un $x_o \in E(\hat{K}) - \hat{K}_1$. Notemos que no podemos tomar $\hat{K}_1$ como siendo $\hat{C}$ la conclusión de lema pues nos garantiza de que el diámetro de $\hat{K} \setminus \hat{K}_1$ sea pequeño. Hagamos ahora $\hat{K}_2 = \overline{co}(O \cap D)$ Afirmamos que $\hat{K} = \overline{co}(\hat{K}_1 \cup \hat{K}_2)$. De hecho como $\hat{K}$ es convexo y contiene a $\hat{K}_1 \cup \hat{K}_2$, tenemos que $co(\hat{K}_1 \cup \hat{K}_2) \subset \hat{K}$. Por otro lado, como $\hat{K}_1$ y $\hat{K}_2$ son convexos y compactos, se sigue que $co(\hat{K}_1 \cup \hat{K}_2)$ es compacto (ver [12], pag 72, teorema 3.20 (a)). Luego como $E(\hat{K}) \subset D \subset \hat{K}_1 \cup \hat{K}_2$ tenemos $\hat{K} = \overline{co}(E(\hat{K})) \subset co(\hat{K}_1 \cup \hat{K}_2)$. Esto demuestra la afirmación. Como consecuencia, todo punto $k \in \hat{K}$ tiene una descomposición.

(1) $k = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$; $0 \leq \lambda \leq 1$, $k_1 \in \hat{K}_1$, $k_2 \in \hat{K}_2$.

Definamos A_r, el conjunto de puntos de $\hat{K}$ que admiten una descomposición de la forma (1) para algún $\lambda \geq r$ $(0 < r \leq 1)$. demostraremos que si r es muy pequeño entonces se puede escoger $\hat{C} = A_r$ requerido. Así:

(a) A_r es cerrado: sea k_n una sucesión de puntos en A_r que converge en un elemento $k \in \hat{K}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $k_n = \lambda_n k_{1,n} + (1-\lambda_n)k_{2,n}$ una descomposición (1) de k_n. Como $\hat{K}_1$ y $\hat{K}_2$ son w-compactos, existe una sucesión estrictamente creciente $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de números naturales para cual existen $k_1 \in \hat{K}_1$ y $k_2 \in \hat{K}_2$ y $\lambda \in [0,1]$ tales que $k_{1,n_j} \longrightarrow k_1$, $k_{2,n_j} \longrightarrow k_2$ y $\lambda_n \longrightarrow \lambda$. Luego, haciendo $j \longrightarrow \infty$, tenemos que $k = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$ con $\lambda \geq r$, donde $k \in A_r$.

(b) A_r es convexo: si $k, k' \in A_r$, entonces $k = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$ y $k' = \lambda' k_1' + (1-\lambda')k_2'$ con $\lambda, \lambda' > r$, $k_1, k_1' \in \hat{K}_1$ y $k_2, k_2' \in \hat{K}_2$. Luego,

$$\frac{k+k'}{2} = \left(\frac{\lambda+\lambda'}{2}\right)\frac{\lambda k_1 + \lambda' k_1'}{\lambda+\lambda'} + \left(1 - \frac{\lambda+\lambda'}{2}\right)\frac{(1-\lambda)k_2 + (1-\lambda')k_2'}{(1-\lambda)+(1-\lambda')} \in A_r$$

dado que $\left(\dfrac{\lambda+\lambda'}{2}\right) \geq r$, $\dfrac{\lambda k_1 + \lambda' k_1'}{\lambda+\lambda'} \in \hat{K}_1$ y $\dfrac{(1-\lambda)k_2 + (1-\lambda')k_2'}{(1-\lambda)+(1-\lambda')} \in \hat{K}_2$. Como A_r es cerrado, esto demuestra que A_r es convexo.

(c) A_r no es todo $\hat{K}$: dado que $x_o \in E(\hat{K}) \subset \hat{K}_1 \cup \hat{K}_2$ y $x_o \notin \hat{K}_1$, tenemos que $x_o \in \hat{K}_2$. como $x_o \in E(\hat{K})$ y $\hat{K}_1 \cup \hat{K}_2 \subset \hat{K}$, la única descomposición para x_o en la forma (1) es $x_o = 0.k_1 + 1.x_o$ ($k_1 \in \hat{K}_1$ cualquiera). Luego $x_o \notin A_r$ para todo $0 < r \leq 1$.

(d) Si $M = sup\left\{\|x\|\,; x \in \hat{K}\right\}$, entonces el $diam(\hat{K}\backslash A_r) < \epsilon$ y $0 < r \leq \dfrac{\epsilon}{9M}$: Primero observemos que como $\hat{K}_2 = \overline{co}(O \cap D)$, se tiene que $\hat{K}_2 \subset B_{n_o}$ (pues $O \cap D \subset B_{n_o} \cap D \subset B_{n_o}$). luego, $diam(\hat{K}_2) \leq \dfrac{2\epsilon}{3}$. Ahora sean $k, k' \in \hat{K}\backslash A_r$ y consideremos sus respectivas descomposiciones $k = \lambda k_1 + (1-\lambda)k_2$ y $k' = \lambda' k_1' + (1-\lambda')k_2'$, con $\lambda < r$ y $\lambda' < r, k_1, k_1' \in \hat{K}_1$ y $k_2, k_2' \in \hat{K}_2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|k - k'\| &= \|\lambda k_1 + (1-\lambda)k_2 - \lambda' k_1' - (1-\lambda')k_2'\| \\ &= \|\lambda k_1 - \lambda' k_1' + (1-\lambda)(k_2 - k_2') + (\lambda' - \lambda)k_2'\| \\ &\leq \lambda \|k_1\| + \lambda' \|k_1'\| + (1-\lambda)\|k_2 - k_2'\| + |\lambda' - \lambda|\,\|k_2'\| \\ &\leq 3rM + \frac{2\epsilon}{3} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Con esto se termina la demostración del lema.
Ahora podemos demostrar lo siguiente □

Teorema 3.1.1. *consideremos X un espacio de Banach reflexivo entonces X no tiene la **P.A.I**.*

Demostración. Por contradicción, Supongamos que X posee la **P.A.I**, es decir, que existe un (∞, ϵ_o)-árbol T incluido en B_X. Sea $\hat{K} = \overline{co}(T)$. notemos que $\hat{K}$ es separable, dado que T es enumerable, de modo que las combinaciones convexas de elementos de T con coeficientes teniendo partes reales e imaginarias racionales, forman un subconjunto enumerable y denso en $\hat{K}$. Como X es reflexivo, B_X es w-compacta, por lo tanto, $\hat{K}$ satisface la hipótesis del lema anterior. Sea $\epsilon = \dfrac{\epsilon_o}{3}$ y sea $\hat{C}$ un conjunto convexo cerrado dado por el lema anterior. El conjunto $\hat{K} \setminus \hat{C}$ debe contener algún punto del árbol de los contrario, todo el árbol estaría incluido en $\hat{C}$, donde $\hat{K} = \hat{C}$ lo cual no es posible pues el lema garantiza que $\hat{C} \neq \hat{K}$. consideremos entonces $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$ un punto del árbol que pertenece a $\hat{K} \setminus \hat{C}$. Luego, como $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \dfrac{x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,-1} + x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,+1}}{2}$ con $\|x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} - x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n - 1}\| \geq \dfrac{\epsilon_o}{2}$, $\|x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} - x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n + 1}\| \geq \dfrac{\epsilon_o}{2}$ y $diam(\hat{K} \setminus \hat{C}) < \epsilon$, se tiene $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,-1}$ y $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,+1}$ no pueden esta en $\hat{K} \setminus \hat{C}$. Luego ambos están en $\hat{C}$. Como $\hat{C}$ es convexo, su punto medio $x_{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$ también esta en $\hat{C}$, lo que no es posible. Esta contradicción termina la demostración del teorema. □

Ahora veremos que ningún espacio uniformemente convexo tiene la **P.A.F**

Teorema 3.1.2. *Sea X de Banach uniformemente convexo, entonces X no tiene la **P.A.F***

Demostración. supongamos que X tiene la **P.A.F**, es decir, para un cierto $0 < \epsilon \leq 2$ existe un (n, ∞)-árbol incluido en B_X para cada $n \geq 1$. Dado que X es uniformemente convexo, $\exists\, \delta > 0$ de modo que

$$(1)\ \ x, y \in B_X \text{ y } \|x-y\| \geq \epsilon \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$$

afirmamos que

$$(2)\ \ x, y \in B_X \text{ y } \|x-y\| \geq \epsilon \Rightarrow \|x\| \geq \frac{1}{1-\delta}\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \text{ o } \|y\| \geq \frac{1}{1-\delta}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|$$

En efecto, Fijamos x, y como en (2) es evidente que podemos suponer que $\frac{1}{1-\delta}\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 0$. supongamos por el absurdo, que

$$\|x\| < \frac{1}{1-\delta}\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \ \ y\ \ \|y\| < \frac{1}{1-\delta}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|$$

pongamos $c = max\left\{\|x\|, \|y\|\right\} \in (0,1]$. Entonces $\frac{x}{c}, \frac{y}{c} \in B_X$ y $\left\|\frac{x}{c} - \frac{y}{c}\right\| \geq \frac{\epsilon}{c} \geq \epsilon$. Por (1), $\left\|\frac{\frac{x}{c}+\frac{y}{c}}{2}\right\| \leq 1-\delta$ donde $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq (1-\delta)c < (1-\delta)\frac{1}{(1-\delta)}\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$ una contradicción. esto demuestra (2). Consideremos $n \geq 1$ un entero tal que

$$\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{n-1}\epsilon > 2$$

y consideremos un (n,ϵ)-árbol T_n incluido en B_X. por lo menos uno de los vectores en 1-parte de T_n tiene norma $\geq \frac{\epsilon}{2}$, ya que la distancia entre ellos es $\geq \epsilon$; sea x_1 tal vector. En 2-parte de T_n existen dos vectores que distan del uno al otro por lo menos ϵ y cuyo punto medio es x_1. Por (2), por lo menos un de esos vectores tiene norma $\geq \frac{1}{1-\delta}\frac{\epsilon}{2}$; sea x_2 tal vector. De la misma manera, el 3-parte de T_n contiene un vector x_3 con norma $\geq \left(\frac{1}{1-\delta}\right)^2\frac{\epsilon}{2}$. Continuando este proceso, obtenemos un vector x_n en n-parte de T_n con norma $\geq \left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{n-1}\frac{\epsilon}{2} > 1$, que es una contradicción. □

3.2. El Teorema de Enflo

Enseguida presentaremos el resultado central de este trabajo

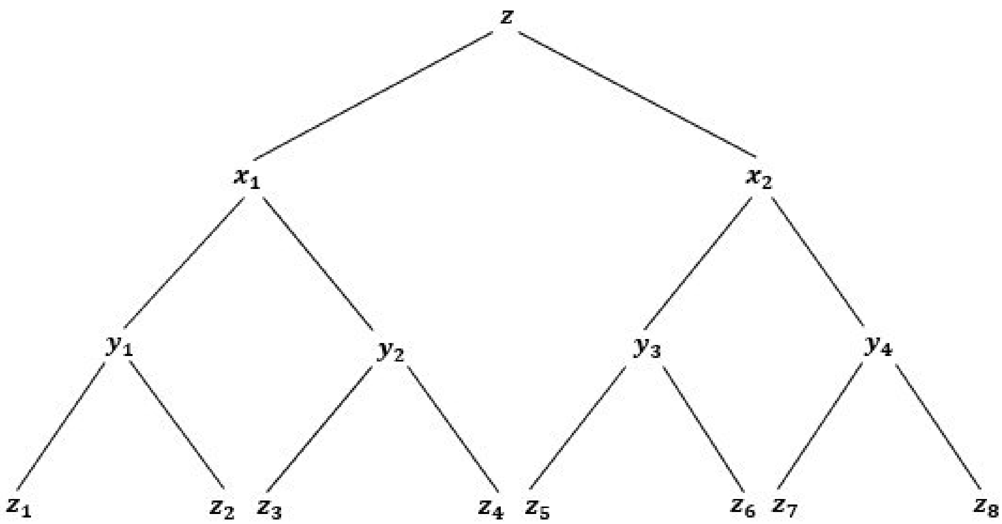
Teorema 3.2.1. *Un espacio de banach X admite una norma uniformemente convexa equivalente si y solamente si X no tiene la Propiedad del Árbol Finito (**P.A.F**)*

La condición necesaria se obtiene de la proposición 3.1.1 y del teorema 3.1.2. La demostración de la condición suficiente se basa en 5 lemas, que presentaremos a continuación . Antes veamos la siguiente definición

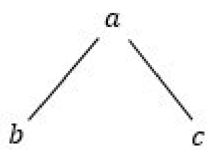
Definición 3.2.1. *Consideremos X un espacio de Banach, $z \in X$ y $\epsilon > 0$ El par ordenando (z_1, z_2) es un $(1,\epsilon)$-partición de z si $z = z_1 + z_2$, $\|z_1\| = \|z_2\|$ y $\left\|\frac{z_1}{\|z_1\|} - \frac{z_2}{\|z_2\|}\right\| \geq \epsilon$. Al tener definido un (n,ϵ)-partición de z, diremos que $2^{n+1}-$ coordenada $(z_1, z_2, ..., z_{2^{n+1}})$*

es un $(n+1,\epsilon)$*-partición de* z *si* $\|z_{2j-1}\| = \|z_{2j}\|$, $\left\| \frac{z_{2j-1}}{\|z_{2j-1}\|} - \frac{z_{2j}}{\|z_{2j}\|} \right\| \geq \epsilon$, *para cada* $1 \leq j \leq 2^n$, *y un* 2^n*-coordenada* $(z_1+z_2, z_3+z_4, ..., z_{2^{n+1}-1}+z_{2^{n+1}})$ *es un* (n,ϵ)*-partición de* z*. Si* $(z_1, z_2, ..., z_{2^n})$ *es un* (n,ϵ)*-partición de* z*, entonces para todo* $1 \leq k \leq n$*, se tiene un* (k,ϵ)*-partición de* z *dada por* $(z_1 + z_2 + ... + z_{2^{n-k}}, z_{2^{n-k}+1} + z_{2^{n-k}+2} + ... + z_{2^{n-k+1}}, ..., z_{2^n-2^{n-k+1}+1} + ... + z_{2^n-2^{n-k}}, z_{2^n-2^{n-k}+1} + ... z_{2^n})$ *es dicho un* $k-$*coordenada de* (n,ϵ)*-partición* $(z_1, z_2, ..., z_{2^n})$*. Por comodidad, diremos que* (z) *es un* $(0,\epsilon)$*-partición de* z

Se puede observar un (n,ϵ)-partición de z juntamente con sus $k-$coordenada atravez de una estructura de árbol, Por ejemplo, a continuación mostramos un $(3,\epsilon)$-partición $(z_1, ..., z_8)$ de z junto con su 2-coordenada $(y_1, ..., y_4)$ y a su 1-coordenada (x_1, x_2) y a su 0-coordenada (z)



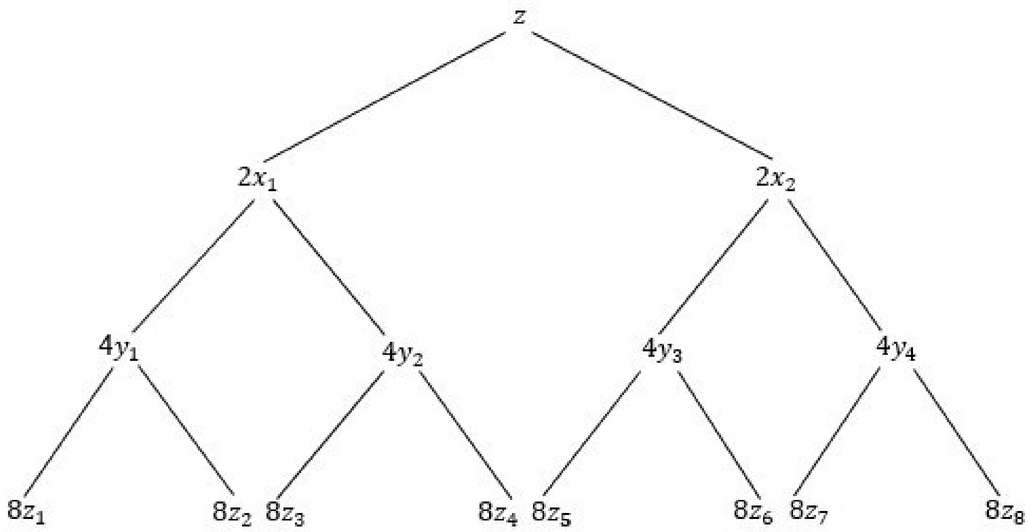
Para cada pieza de este árbol de forma



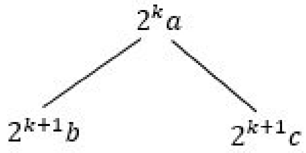
se tiene que $a = b + c$, $\|b\| = \|c\|$ y $\left\| \frac{b}{\|b\|} - \frac{c}{\|c\|} \right\| \geq \epsilon$. En particular

$$\begin{aligned} z &= x_1 + x_2 \\ &= (y_1 + y_2) + (y_3 + y_4) \\ &= ((z_1 + z_2) + (z_3 + z_4)) + ((z_5 + z_6) + (z_7 + z_8)). \end{aligned}$$

Observación 3.2.1. *Si* $\|z\| = 1$*. Un resultado valioso que utilizaremos en el primer lema es como un* (n,ϵ)*-partición* $(z_1, z_2, ... + z_{2^n})$ *de* z *produce un* (n,ϵ)*-árbol. Para eso es suficiente multiplicar cada k-coordenada de la* (n,ϵ)*-partición* $(z_1, z_2, ... + z_{2^n})$ *por* 2^k , $(0 \leq k \leq n)$*. En la visualización de las particiones dada anteriormente, podemos obtener una* $(3,\epsilon)$*-árbol de la siguiente forma*



Para demostrar que dicho procedimiento verdaderamente produce un (n,ϵ)-árbol, consideremos un pedazo de ese árbol de la forma



Como $a = b + c$ observamos que $2^k a$ es el punto medio de la recta que une $2^{k+1}b$ con $2^{k+1}c$ que establece la condición (1) de (n,ϵ)-árbol (Definición 3.1.1). Verifiquemos la condición (2) de (n,ϵ)-arbol. Asumamos, por inducción, que $\|a\| \geq \dfrac{1}{2^k}$ (observemos que esto es verdadero si $k = 0$ pues $a = z$ y $\|z\| = 1$). Luego,

$$\frac{1}{2^k} \leq \|a\| = \|b + c\| \leq \|b\| + \|c\| = 2\|b\| = 2\|c\|,$$

donde

$$\|b\| = \|c\| \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

De ahí

$$\epsilon \leq \left\| \frac{b}{\|b\|} - \frac{c}{\|c\|} \right\| = \frac{1}{\|b\|}\|b - c\| \leq 2^{k+1}\|b - c\| = \left\|2^{k+1}b - 2^{k+1}c\right\|,$$

demostrando que el segmento de recta que une $2^{k+1}b$ a $2^{k+1}c$ tiene una longitud mayor o igual a ϵ.
El primer nos afirma que si X es un espacio de Banach que no tiene **P.A.F.**, entonces su norma original satisface la desigualdad triangular üniformemente más fuerte", que es válido para vectores que forman particiones. Lo que se requiere es relacionar particiones y partes de árboles. Este es el inicio de la construcción de la norma uniformemente convexa equivalente buscada y, observemos que es un inicio "coherente" dado que la principal característica de dicha norma es también una desigualdad triangular Üniformemente más fuerte ", el cual es válido para vectores de la esfera unitaria. Veamos el dignificado más preciso de estos hechos.

Lema 3.2.1. *Consideremos un espacio de Banach X que no tiene la* ***P.A.F**, Luego, para cada $\epsilon > 0$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que si $z \in X$ y $(x_1, x_2, ..., x_{2^n})$ es una (n, ϵ)-partición de z, entonces*

$$\sum_{i=1}^{2^n} \|x_i\| \geq (1+\delta)\|z\|.$$

Demostración. Supongamos que el resultado es verdadero $\forall\, z \in S_X$, Sea $(y_1, ..., y_{2^n})$ una (n, ϵ)-partición de $y \in X \setminus \{0\}$. Entonces $\left(\frac{y_1}{\|y\|}, ..., \frac{y_{2^n}}{\|y\|}\right)$ es una (n, ϵ)-partición de $z = \frac{y}{\|y\|} \in S_X$. Por hipótesis,

$$\sum_{i=1}^{2^n} \left\| \frac{y_i}{\|y\|} \right\| \geq (1+\delta), \text{ es decir, } \sum_{i=1}^{2^n} \|y_i\| \geq (1+\delta)\|y\|$$

Luego, podemos Asumir $\|z\| = 1$.
Afirmación existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tales que todo (n, ϵ)-árbol en X tiene un vector de norma $\geq 1 + 2^n\delta$. En efecto supongamos que esto es falso. Fijamos $0 < \epsilon' < \epsilon$. Dado que X no tiene la **P.A.F**, existen $n \in \mathbb{N}$ para el cual no existe una (n, ϵ')-árbol incluido en B_X. Sea $\delta = \frac{\epsilon - \epsilon'}{2^n \epsilon'} > 0$. Como estamos negando la afirmación, para dicho n y δ, existe una (n, ϵ)-árbol T incluido en $(1+2^n\delta)B_X$. multiplicando este árbol T por $t = \frac{1}{1+2^n\delta} = \frac{\epsilon'}{\epsilon} > 0$, obtenemos una (n, ϵ')-árbol T' incluido en B_X lo que contradice la elección de n.
Sean, ahora n y δ como en la afirmación anterior. Consideremos $(x_1, ..., x_{2^n})$ una (n, ϵ)-partición de z. Sea T un (n, ϵ)-árbol producida por esta partición como en la observación 3.2.1. A través de nuestra afirmación algún vector de T tiene norma $\geq 1+2^n\delta$. Luego lo mismo es verdadero para algún vector de n-parte de T, donde existe $i_o \in \{1, ..., 2^n\}$ tal que $\|2^n x_{i_o}\| \geq 1 + 2^n\delta$. Dado que $\|x_i\| \geq \frac{1}{2^n}$ para todo $i \in \{1, ..., 2^n\}$ (ver observación 3.2.1.), concluimos que

$$\sum_{i=1}^{2^n} \|x_i\| = \|x_1\| + \cdots + \|x_{i_o}\| + \|x_{2^n}\| \geq \frac{1}{2^n} + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \delta\right) + \cdots + \frac{1}{2^n} = (1+\delta)\|z\|$$

lo que demuestra el primer lema. □

Para el siguiente lema veamos la siguiente definición

Definición 3.2.2. *Una función real $x \in X \longmapsto |x| \in \mathbb{R}$ es llamado función longitud en X si verifica lo siguiente:*

(a) $\forall\, z \in X$, $|z| \geq 0$ *y* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(b) $|\alpha z| = |\alpha|\,|z|$, $\forall\, z \in X$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$

Lema 3.2.2. *consideremos X un espacio de Banach que no tiene la* ***P.A.F.*** *Sea $\epsilon > 0$ y tomemos un $n \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ como la conclusión del lema anterior. Supongamos que $0 < \delta < \epsilon < \frac{1}{8}$. Entonces existe una función longitud en X y un $\delta_1 > 0$ tal que*

(a) $(1-\delta)\|x\| \leq |x| \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|x\|$.

(b) $\|x\| = \|y\| = 1$ *y* $\|x - y\| \geq \epsilon$ *entonces* $|x + y| < |x| + |y| - \delta_1$.

Demostración. $\forall z \in X$ y $\forall 0 \leq k \leq n$, Sea $Q_k(z)$ el conjunto de todas las (m, ϵ)-particiones de z con $0 \leq m \leq k$. Para cada $P = (u_1, \ldots, u_{2^m}) \in Q_n(z)$, se define

$$N(P) = \frac{\sum_{i=1}^{2^m} \|u_i\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^m}\right)}$$

además de eso definimos

$$|z| = \inf_{P \in Q_n(z)} N(P)$$

Dado que $\|z\| \leq \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right) N(P)$ para todo $P \in Q_n(z)$, se tiene que

$$|z| \geq \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right)^{-1} \|z\| \geq (1 - \delta)\|z\|$$

Teniendo en cuenta un $(0, \epsilon)$-partición (z) de z, tenemos que

$$|z| \leq N((z)) = \frac{\|z\|}{1 + \frac{\delta}{2}} \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|z\|$$

Luego, la condición (a) del lema se verifica. Así es obvio que la función $z \longrightarrow |z|$ cumple la primera condición de la función longitud. Demostraremos la segunda condición

$$|\alpha z| = \inf_{P \in Q_n(\alpha z)} N(P) = \inf_{Q \in Q_n(z)} N(\alpha Q) = |\alpha| \inf_{Q \in Q_n(z)} N(Q) = |\alpha|\,|z|$$

siempre que $z \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq 0$, Luego resta probar la condición (b) del lema. Para ello precisaremos el siguiente hecho de que

$$|z| = \inf_{P \in Q_{n-1}(z)} N(P). \quad (*)$$

De hecho, si Q es una (n, ϵ)-partición de z entonces el lema 3.2.1 implica que

$$N(Q) \geq \frac{1 + \delta\|z\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^m}\right)} \geq \frac{(1 + \delta)\|z\|}{1 + \frac{2}{3}\delta} \geq \frac{\|z\|}{1 + \frac{\delta}{2}} = N((z))$$

Fijemos $x, y \in X$ tales que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| \geq \epsilon$. Entonces (x, y) es un $(1, \epsilon)$-partición de $x + y$. Elijamos γ tal que $0 < \gamma < \frac{\delta}{2.4^{n+2}}$. Por $(*)$, existen una (k, ϵ)-partición $(u_1, ..., u_{2^k})$ de x y una (l, ϵ)-partición $(w_{l,1}, ..., w_{l,2^l})$ de y con $k, l \in \{0, ..., n - 1\}$ tales que

$$|x| > \frac{\sum_{i=1}^{2^k} \|u_i\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^k}\right)} - \gamma \text{ y } |y| > \frac{\sum_{i=1}^{2^l} \|w_{l,i}\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^l}\right)} - \gamma$$

Sin perdida de generalidad, podemos asumir que $k \leq l$. Denotemos por $(w_{k,1}, ..., w_{k,2^k})$ una k-parte de la (l, ϵ)-partición de y, Luego

$$|y| > \frac{\sum_{i=1}^{2^l} \|w_{l,i}\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^l}\right)} - \gamma \geq \frac{\sum_{i=1}^{2^k} \|w_{k,i}\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^l}\right)} - \gamma$$
$$\geq \frac{\sum_{i=1}^{2^k} \|w_{k,i}\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{k+1}} + \frac{1}{3.4^{k+1}}\right)} - \gamma$$

Sea un $(k+1, \epsilon)$-partición $(u_1, ..., u_{2^k}, w_{k,1}, ..., w_{k,2^k})$ de $x + y$ asociada a $(u_1, ..., u_{2^k})$ y $(w_{k,1}, ..., w_{k,2^k})$. dado que $k + 1 \leq n$ se tiene que

$$|x + y| \leq \frac{\sum_{i=1}^{2^k} \|u_i\| + \sum_{i=1}^{2^k} \|w_{k,i}\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{k+1}}\right)}.$$

Resumiendo tenemos :

- $|x| > \dfrac{\sum_{i=1}^{2^k} \|u_i\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^k}\right)} - \gamma$

- $|y| > \dfrac{\sum_{i=1}^{2^k} \|w_{k,i}\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{3.4^{k+1}}\right)} - \gamma.$

- $-|x - y| \geq \dfrac{-\sum_{i=1}^{2^k} \|u_i\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{k+1}}\right)} + \dfrac{-\sum_{i=1}^{2^k} \|w_{k,i}\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{k+1}}\right)}.$

Luego,

$$\begin{aligned}
|x| + |y| - |x + y| > {} & \frac{\sum_{i=1}^{2^k} \|u_i\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^k}\right)} + \frac{\sum_{i=1}^{2^k} \|w_{k,i}\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{k+1}} + \frac{1}{3.4^{k+1}}\right)} \\
& + \frac{-\sum_{i=1}^{2^k} \|u_i\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{k+1}}\right)} + \frac{-\sum_{i=1}^{2^k} \|w_{k,i}\|}{1 + \frac{\delta}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{4^{k+1}}\right)} - 2\gamma \\
& = \sum_{i=1}^{2^k} \|u_i\| \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}(1 + ... + \frac{1}{4^k})} - \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}(1 + ... + \frac{1}{4^{k+1}})} \right) \\
& - \sum_{i=1}^{2^k} \|w_{k,i}\| \left(\frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}(1 + ... + \frac{1}{4^{k+1}})} - \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2}(1 + ... + \frac{1}{4^{k+1}} + \frac{1}{3.4^{k+1}})} \right) \\
& - 2\gamma.
\end{aligned}$$

Afirmamos que

$$1 \leq \sum_{i=1}^{2^k} \|u_i\| \leq 1+\delta \text{ y } 1 \leq \sum_{i=1}^{2^k} \|w_{k,i}\| \leq 1+\delta.$$

De hecho, demostraremos solo el primer caso, el segundo es análogo. Como $|x| \leq \left(1-\frac{\delta}{3}\right)\|x\| = 1-\frac{\delta}{3}$, se obtiene $|x|+\gamma < 1$, donde

$$1 = \|x\| \leq \sum_{i=1}^{2^k} \|u_i\| < \left(1+\frac{\delta}{2}\left(1+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4^k}\right)\right)(|x|+\gamma) < 1+\delta$$

Luego

$$\begin{aligned}
|x|+|y|-|x+y| &> \frac{1}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^k}\right)} - \frac{1}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^{k+1}}\right)} \\
&- (1+\delta)\left(\frac{1}{1+\frac{\delta}{2}\left(1+...+\frac{1}{4^{k+1}}\right)} - \frac{1}{1+\frac{\delta}{2}(1+...+\frac{1}{4^{k+1}}+\frac{1}{3.4^{k+1}})}\right) \\
&- 2\gamma = \frac{\frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{k+1}}}{\left(1+\frac{\delta}{2}(1+...+\frac{1}{4^k})\right).\left(1+\frac{\delta}{2}(1+...+\frac{1}{4^{k+1}})\right)} \\
&- (1+\delta)\left(\frac{\frac{\delta}{2}.\frac{1}{3.4^{k+1}}}{\left(1+\frac{\delta}{2}(1+...+\frac{1}{4^{k+1}})\right).\left(1+\frac{\delta}{2}(1+...+\frac{1}{4^{k+1}}+\frac{1}{3.4^{k+1}})\right)}\right) \\
&- 2\gamma.
\end{aligned}$$

Cada parte del denominador de la primera fracción después de esta última igualdad es $\leq 1+\frac{2}{3}\delta \leq \frac{4}{3}$ (pues $\delta < \frac{1}{8}$) en cuanto a cada parte del denominador de la segunda fracción es ≥ 1. Además, $1+\delta < \frac{9}{8}$ y $\gamma \leq \frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{k+3}}$. Con todo esto tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
|x|+|y|-|x-y| &> \frac{9}{16}.\frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{k+1}} - \frac{9}{8}.\frac{\delta}{2}.\frac{1}{3.4^{k+1}} - 2.\frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{k+3}} \\
&= \frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{k+3}} \geq \frac{\delta}{2}.\frac{1}{4^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Luego, $\delta_1 = \frac{\delta}{2.4^{n+2}} > 0$ se resuelve □

Lema 3.2.3. *Consideremos un espacio de banach X con norma $\|.\|$ que no tiene la **P.A.F**. sea $\epsilon > 0$ y tomemos un n y δ como en la conclusión del primer lema. supongamos que $0 < \delta < \epsilon < \frac{1}{8}$. Luego es posible introducir una norma $\|.\|_{5\epsilon}$ en X tal que verifique lo siguiente :*

(a) $(1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_{5\epsilon} \leq \left(1-\dfrac{\delta}{3}\right)\|x\|$

(b) $\|x\| = \|y\| = 1$ *y* $\|x-y\| \geq 5\epsilon \Rightarrow \|x+y\|_{5\epsilon} \leq \|x\|_{5\epsilon} + \|y\|_{5\epsilon} - \epsilon\delta_1$ *donde* δ_1 *es el mismo de la conclusión del segundo lema.*

Demostración. Por el lema 2, existe una función longitud $|.|$ que satisface lo siguiente

(a) $(1-\delta)\|x\| \leq |x| \leq \left(1-\dfrac{\delta}{3}\right)\|x\|.$

(b) $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x-y\| \geq \epsilon$ entonces $|x+y| < |x| + |y| - \delta_1$.

Sea $x \in X$ arbitrario. Dado $\hat{g}_x : 0 = x_1, x_2, ..., x_l = x$ un polígono que conecta 0 con x, Pongamos $|\hat{g}_x|$ como la longitud de $\hat{g}_x$ medido por la función de longitud; más precisamente:

$$|\hat{g}_x| = \sum_{i=1}^{l} |x_i - x_{i-1}|.$$

de la misma manera, pongamos $\|\hat{g}_x\|$ como la longitud del polígono $\hat{g}_x$ medido por la norma de X, es decir, $\|\hat{g}_x\| = \sum_{i=1}^{l} \|x_i - x_{i-1}\|$.
definimos

$$\|x\|_{5\epsilon} = \underset{\hat{g}_x \in P_x}{inf} |\hat{g}_x|$$

donde P_x es el conjunto de todos los polígonos que conecta 0 con x.
Consideremos el camino poligonal trivial $\hat{g}_x : 0 = x_o, x_1 = x$, observamos que

$$\|x\|_{5\epsilon} \leq |x - 0| = |x| \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right) \|x\|$$

Además si $\hat{g}_x : 0 = x_o, ..., x_l = x$ es cualquier polígono que conecta 0 a x, se tiene

$$(1-\delta)\|x\| = (1-\delta)\left\|\sum_{i=1}^{l}(x_i - x_{i-1})\right\| \leq (1-\delta)\sum_{i=1}^{l}\|x_i - x_{i-1}\| \leq \sum_{i=1}^{l}|x_i - x_{i-1}| = |g_x|$$

Entonces, se verifica

$$(1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_{5\epsilon}$$

También la propiedad (a) se verifica. Así, se cumple que $\|x\|_{5\epsilon} = 0$ si y solo si $x = 0$.
si $x \in X$ y $\alpha \neq 0$ entonces

$$\|\alpha x\|_{5\epsilon} = \underset{\hat{g}_{\alpha x} \in P_{\alpha x}}{inf} |\hat{g}_{\alpha x}| = \underset{f_x \in P_x}{inf} |\alpha f_x| = |\alpha| \underset{f_x \in P_x}{inf} |f_x| = |\alpha| \|x\|_{5\varepsilon}$$

Si $x, y \in X$, $\hat{g}_x : 0 = x_o, ..., x_l = x$ y $\hat{g}_y : 0 = y_o, ..., y_m = y$ son caminos poligonales que conectan 0 a x y 0 a y, entonces $\hat{g}_{x+y} : 0 = x_o, ..., x_l + y_o = x, x_l + y_1, ..., x_l + y_m = x + y$ es un camino poligonal que conecta 0 con $x + y$, donde

$$\|x+y\|_{5\epsilon} \leq |\hat{g}_{x+y}| = |\hat{g}_x| + |\hat{g}_y|.$$

tomamos el ínfimo en $\hat{g}_x \in P_x$ y después en $\hat{g}_y \in P_y$ tenemos

$$\|x+y\|_{5\epsilon} \leq \|x\|_{5\epsilon} + \|y\|_{5\epsilon}.$$

Por lo tanto $\|.\|_{5\epsilon}$ es una norma y solo falta demostrar que se verifica la propiedad (b). Asumamos $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| \geq 5\epsilon$. Fijamos $\gamma > 0$ tal que $\delta + \gamma < \epsilon$. consideremos $\hat{g}_x : 0 = x_o, ..., x_l = x$ en P_x y $\hat{g}_y : 0 = y_o, ..., y_m = y$ en P_y tales que

(1) $\quad |\hat{g}_x| \leq \|x\|_{5\epsilon} + \gamma$ y $|\hat{g}_y| \leq \|y\|_{5\epsilon} + \gamma$

Afirmamos que

(2) $\quad 1 \leq \|\hat{g}_x\| < 1 + \epsilon$ y $1 \leq \|\hat{g}_y\| < 1 + \epsilon$,

De hecho, dado que $\|x\| = \|y\| = 1$, se tiene $1 \leq \|\hat{g}_x\|$ y $1 \leq \|\hat{g}_y\|$ además,

$$(1-\delta)\|\hat{g}_x\| \leq |\hat{g}_x| \leq \|x\|_{5\epsilon} + \gamma \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right) + \gamma$$

donde

$$1 \leq \|\hat{g}_x\| \leq \frac{1 - \frac{\delta}{3} + \gamma}{1-\delta} \leq 1 + \delta + \gamma < 1 + \epsilon$$

Asimismo $1 \leq \|\hat{g}_y\| < 1 + \epsilon$.
Podemos asumir sin perdida de generalidad que $\|\hat{g}_x\| \leq \|\hat{g}_y\|$.
Introduciendo como máximo m puntos en la trayectoria poligonal $\hat{g}_x$ que subdividen sus segmentos y como máximo l puntos en la trayectoria poligonal $\hat{g}_y$ también subdividiendo sus segmentos es posible obtener trayectorias $\hat{g}'_x : 0 = x'_o, ..., x'_s = x$ en P_x y $\hat{g}'_y : 0 = y'_o, ..., y'_r = y$ en P_y de modo que

(3) $\quad \|x'_1\| = \|y'_1\|$ y $\left\|x'_j - x'_{j-1}\right\| = \left\|y'_j - y'_{j-1}\right\| \quad (1 \leq j \leq min\{s, r\})$.

En efecto, si $\|x_1\| \leq \|y_1\|$, pongamos $x'_1 = x_1$ y escojamos $y'_1 \in [0, y_1]$ tal que $\|y'_1\| = \|x_1\| = \|x'_1\|$. Si $\|x_1\| > \|y_1\|$, pongamos $y'_1 = y_1$ y escojamos $x'_1 \in [0, x_1]$ tal que $\|x'_1\| = \|y_1\| = \|y'_1\|$.así tenemos x'_1 y y'_1.
suponiendo ya construidos x'_j y y'_j, construiremos x'_{j+1} y y'_{j+1}. Sea i el menor indice tal que $x_i \notin \left\{x'_1, ..., x'_j\right\}$ y k el menor indice tal que $y_k \notin \left\{y'_1, ..., y'_j\right\}$. entonces tenemos 3 posibilidades :

(a) $\left\|x'_i - x'_j\right\| = \left\|y_k - y'_j\right\|$: en este caso pongamos $x'_{j+1} = x_i$ y $y'_{j+1} = y_k$.

(b) $\left\|x_i - x'_j\right\| < \left\|y_k - y'_j\right\|$: sean y'_{j+1} el único vector en el segmento $\left[y'_j, y_k\right]$ tal que $\left\|y'_{j+1} - y_k\right\| = \left\|x_i - x'_j\right\|$ y pongamos $x'_{j+1} = x_j$.

(c) Es similar a (b)

finalmente, después de agotarse los x' y los y' (lo que sucede primero, completamos la construcción con los puntos restantes.

Sabemos que si dividimos el segmento $\left[\hat{a}, \hat{b}\right]$ en dos segmentos $[\hat{a}, \hat{c}]$ y $\left[\hat{c}, \hat{b}\right]$, entonces la longitud de $\left[\hat{a}, \hat{b}\right]$ es igual a la suma de longitudes de $[\hat{a}, \hat{c}]$ y $\left[\hat{c}, \hat{b}\right]$ en relación a la norma:

$$\left\|\hat{b} - \hat{a}\right\| = \left\|\hat{b} - \hat{c}\right\| + \|\hat{c} - \hat{a}\|.$$

ello implique que

(4) $\quad \|\hat{g}'_x\| = \|\hat{g}_x\|$ y $\left\|\hat{g}'_y\right\| = \|\hat{g}_y\|$.

Apesar de que la función longitud $|.|$ no es una norma , se cumple lo mismo

$$\left|\hat{b} - \hat{a}\right| = \left|\hat{b} - \hat{c}\right| + |\hat{c} - \hat{a}|$$

y como consecuencia

(5) $\quad |\hat{g}'_x| = |\hat{g}_x|$ y $\left|\hat{g}'_y\right| = |\hat{g}_y|$

Ahora, podemos escribir $\hat{b}$ como $\hat{b} = \hat{a} + t(\hat{c} - \hat{a})$ para algún $k \geq 1$. Luego,

$$\left|\hat{b} - \hat{a}\right| = k\,|\hat{c} - \hat{a}| \text{ y } \left|\hat{b} - \hat{c}\right| = (k-1)\,|\hat{c} - \hat{a}|,$$

donde

$$\left|\hat{b} - \hat{c}\right| + |\hat{c} - \hat{a}| = (k-1)\,|\hat{c} - \hat{a}| + |\hat{c} - \hat{a}| = k\,|\hat{c} - \hat{a}| = \left|\hat{b} - \hat{a}\right|.$$

Luego, dado que asumimos $\|\hat{g}_x\| \leq \|\hat{g}_y\|$, se sigue de (3) y (4) que $s \leq r$, de manera que $mim\,\{s, r\} = s$. Dado que $1 \leq \|\hat{g}'_x\| \leq \left\|\hat{g}'_y\right\| < 1 + \epsilon$ (por (2)), se sigue de (3) que la suma de las longitudes de los segmentos de $\hat{g}'_y$ que conecta y'_s a y'_r tiene un tamaño menor que ϵ en la norma. Ello nos da

$$\|x - y'_s\| \geq \|x - y\| - \|y - y'_s\| \geq 4\epsilon. \tag{6}$$

Sean

$$J = \left\{1 \leq i \leq s\,;\, \left\|(x'_i - x'_{i-1}) - (y'_i - y'_{i-1})\right\| \geq \epsilon \left\|(x'_i - x'_{i-1})\right\|\right\}$$

y

$$I = \{1, ..., s\} \setminus J.$$

Usando (2),(3),(4) y (5) tenemos que

$$\begin{aligned}
4\epsilon \leq \|x - y'_s\| &= \left\|\sum_{i=1}^{s}(x'_i - x'_{i-1}) - \sum_{i=1}^{s}(y'_i - y'_{i-1})\right\| \\
&\leq \sum_{i \in I} \left\|(x'_i - x'_{i-1}) - (y'_i - y'_{i-1})\right\| + \sum_{i \in J} \left\|(x'_i - x'_{i-1}) - (y'_i - y'_{i-1})\right\| \\
&\leq \epsilon \sum_{i \in I} \left\|x'_i - x'_{i-1}\right\| + \sum_{i \in J}(\left\|x'_i - x'_{i-1}\right\| + \left\|y'_i - y'_{i-1}\right\|) \\
&\leq \epsilon \|g'_x\| + 2\sum_{i \in j} \left\|x'_i - x'_{i-1}\right\| \leq 2\epsilon + 2\sum_{i \in J} \left\|x'_i - x'_{i-1}\right\|
\end{aligned}$$

donde

$$\sum_{i \in j} \left\|x'_i - x'_{i-1}\right\| \geq \epsilon \tag{7}$$

También se tiene $\forall i \in J$, se tiene del segundo lema

$$\left|\frac{(x'_i - x'_{i-1})}{\left\|x'_i - x'_{i-1}\right\|} + \frac{(y'_i - y'_{i-1})}{\left\|y'_i - y'_{i-1}\right\|}\right| < \frac{\left|(x'_i - x'_{i-1}\right|}{\left\|(x'_i - x'_{i-1}\right\|} + \frac{\left|(y'_i - y'_{i-1}\right|}{\left\|(y'_i - y'_{i-1}\right\|} - \delta_1,$$

donde

$$\left|(x'_i - x'_{i-1}) + (y'_i - y'_{i-1})\right| < \left|x'_i - x'_{i-1}\right| + \left|y'_i - y'_{i-1}\right| - \left\|x'_i - x'_{i-1}\right\| \delta_1$$

Luego, por (7)

$$\textstyle\sum_{i \in J} \left|(x'_i - x'_{i-1}) + (y'_i - y'_{i-1})\right| < \sum_{i \in J} \left|x'_i - x'_{i-1}\right| + \sum_{i \in J} \left|y'_i - y'_{i-1}\right| - \epsilon\delta_1 \tag{8}$$

Escribimos $J = \{k_1, ..., k_l\}$ con $k_1 < ... < k_l$. Construiremos un ca,mimo poligonal h_{x+y} que conecta 0 a $x + y$ del siguiente modo

($\bullet$) Vayamos de 0 a $x'_{k_1-1}+y'_{k_1-1}$ caminando primero con los x' y luego con los y', y luego vamos directamente a $x'_{k_1}+y'_{k_1}$:

$$0, x'_1, ..., x'_{k_1-1}, x'_{k_1-1}+y'_1, ..., x'_{k_1-1}+y'_{k_1-1}, x'_{k_1}+y'_{k_1}.$$

($\bullet\bullet$) En general, vayamos de $x'_{k_i}+y'_{k_i}$ a $x'_{k_{i+1}-1}+y'_{k_{i+1}-1}$ caminando primero con los x' y luego con los y' , después nos vamos directamente a $x'_{k_{i+1}}+y'_{k_{i+1}}$:

$$x'_{k_i}+y'_{k_i}, x'_{k_i+1}+y'_{k_i}, ..., x'_{k_{i+1}-1}+y'_{k_i}, x'_{k_{i+1}-1}+y'_{k_i+1}, ..., x'_{k_{i+1}-1}+y'_{k_{i+1}-1}, x'_{k_{i+1}}+y'_{k_{i+1}}$$

($\bullet\bullet\bullet$) finalmente, vayamos de $x'_{k_l}+y'_{k_l}$ a $x+y$ caminando primero con los x' y luego con los y':

$$x'_{k_l}+y'_{k_l}, x'_{k_l+1}+y'_{k_l}, ..., x'_s+y'_{k_l}, x'_s+y'_{k_l+1}, ..., x'_s+y'_r = x+y.$$

De esta manera, usando (1),(5) y (8), tenemos que

$$\begin{aligned}\|x+y\|_{5\epsilon} \leq |h_{x+y}| &= \sum_{i\in J}\left|(x'_i-x'_{i-1})+(y'_i-y'_{i-1})\right| \\ &\quad+\sum_{i\in\{1,...,s\}\setminus J}\left|x'_i-x'_{i-1}\right|+\sum_{i\in\{1,...,r\}\setminus J}\left|y'_i-y'_{i-1}\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{s}\left|x'_i-x'_{i-1}\right|+\sum_{i=1}^{r}\left|y'_i-y'_{i-1}\right|-\epsilon\delta_1 = \left|\hat{g}'_x\right|+\left|\hat{g}'_y\right|-\epsilon\delta_1 \\ &= |\hat{g}_x|+|\hat{g}_y|-\epsilon\delta_1 \leq \|x\|_{5\epsilon}+\|y\|_{5\epsilon}-\epsilon\delta_1+2\gamma.\end{aligned}$$

Dado que $\gamma > 0$ y arbitrario, queda demostrado el lema. $\square$

Lema 3.2.4. *Consideremos X un espacio vectorial provisto de normas $\|.\|$ y $\|.\|_u$. Supongamos que $\forall y \in X$ se tiene que $\|y\|_u \leq \|y\| \leq 2\|y\|_u$. Supongamos también que existe una función real $\delta(\epsilon)$, con $\delta(\epsilon) > 0$ si $\epsilon > 0$, tal que si $\|y\| = \|z\| = 1$ y $\|y-z\| \geq \epsilon$ entonces $\|y+z\|_u \leq \|y\|_u + \|z\|_u - \delta(\epsilon)$. entonces, $\|.\|_u$ es una morma uniformemente convexa.*

Demostración. Vemos que para cualquier norma $\|.\|_1$ en un espacio normado se tiene que $\|y\|_1 = \|z\|_1 = 1$ y $1 \geq \|y-z\|_1 \geq \epsilon > 0$ implica que $\underset{\alpha\in\mathbb{R}}{inf}\|\alpha y - z\|_1 \geq \frac{\epsilon}{2}$: de hecho, pongamos $h(m) = \|my-z\|_1$ $(m \in \mathbb{R})$.
Afirmación, h es una función convexa de m:
Es suficiente demostrar $h(km+(1-k)n) \leq kh(m)+(1-k)h(n)$; incluso, observemos que

$$\begin{aligned}h(km+(1-k)n) &= \|(km+(1-k)n)y-z\|_1 \\ &= \|kmy-z+(1-k)ny\|_1 \\ &= \|kmy-z+(1-k)ny+kz-kz\|_1 \\ &\leq \|kmy-kz\|_1+\|(1-k)ny+kz-z\|_1 \\ &= k\|my-kz\|_1+(1-k)\|ny-z\|_1 \\ &= kh(m)+(1-k)h(n).\end{aligned}$$

Observemos que $h(0) = 1 \geq \|y-z\|_1 = h(1) \geq \epsilon > 0$. Por lo tanto, como h es convexo, no existe $m \leq 0/\, h(m) < \frac{\epsilon}{2}$, de hecho, por la convexidad de h obtenemos:

$$\frac{h(0)-h(m)}{0-m} \leq \frac{h(1)-h(m)}{1-m} \leq \frac{h(1)-h(0)}{1-0}$$

Luego, si existiera un $m \leq 0$ tal que $g(m) < \dfrac{\epsilon}{2}$, tendríamos

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{\frac{\epsilon}{2}}{-m} \leq \frac{1-\frac{\epsilon}{2}}{-m} \\ &< \frac{1-h(m)}{-m} \leq \frac{\|y-z\|_1 - h(m)}{1-m} \\ &\leq \|y-z\|_1 - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

lo que es un absurdo. Luego $h(m) \geq \dfrac{\epsilon}{2}$, $\forall\, m \leq 0$. Por otro lado si $|m-1| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$, tenemos

$$\begin{aligned} h(m) = \|my-z\|_1 &= \|y-z+my-z\|_1 = \|y-z+y(m-1)\|_1 \\ &\geq \|y-z\|_1 - |m-1|\,\|y\|_1 \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Si $m > 1 + \dfrac{\epsilon}{2}$ o $0 < m < 1 - \dfrac{\epsilon}{2}$ tenemos

$$h(m) = \|my-z\|_1 \geq |\|my\|_1 - \|z\|_1| = |m-1| > \frac{\epsilon}{2}.$$

Asimismo, se tiene que $h(m) \geq \dfrac{\epsilon}{2}$, $\forall\, m \in \mathbb{R}$, donde $\underset{m\in\mathbb{R}}{inf}\, \|my-z\|_1 \geq \dfrac{\epsilon}{2}$.
Ahora, supongamos que $\|y\|_u = \|z\|_u = 1$ y $\|y-z\|_u \geq \epsilon$. Dado que $\|w\|_u \leq \|w\| \leq 2\,\|w\|_u$ para todo $w \in X$, existen $\dfrac{1}{2} \leq m, n \leq 1$ tales que $\|my\| = \|nz\| = 1$. Luego, por la observación inicial

$$\|my-nz\| \geq \|my-nz\|_u = \left\|\frac{m}{n}y - z\right\| n \geq \frac{1}{2}\left\|\frac{m}{n}y-z\right\|_u \geq \frac{\epsilon}{4}.$$

Luego, $\|my\| = \|nz\| = 1$ y $\|my-nz\| \geq \dfrac{\epsilon}{4}$ nos da, por hipótesis,

$$\begin{aligned} \|my+nz\|_u &\leq \|my\|_u + \|nz\|_u - \delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) \\ &= |m| + |n| - \delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right). \end{aligned}$$

de ahí se obtiene,

$$\begin{aligned} \|y+z\|_u &= \|my+nz+(1-m)y+(1-n)z\|_u \\ &\leq \|my+nz\|_u + \|(1-m)y+(1-n)z\|_u \\ &\leq |m|+|n| - \delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) + |1-m| + |1-n| \\ &= m+n-\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) + 1 - m + 1 - n = 2 - \delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right) \end{aligned}$$

donde

$$\left\|\frac{1}{2}(y+z)\right\|_u \leq 1 - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\epsilon}{4}\right)$$

así se concluye que $\|.\|_u$ es uniformemente convexo. $\square$

Lema 3.2.5. *Si en un espacio de Banach X en la cual es posible introducir, para cada $\epsilon > 0$, una norma que satisface las condiciones (a) y (b) del tercer lema, entonces X admite una norma equivalente uniformemente convexa.*

Demostración. Fijamos un $\epsilon > 0$ y, con las notaciones del tercer lema, definimos

$$\|x\|_u = \frac{1}{2}\|x\|_\epsilon + \frac{1}{4}\|x\|_{\frac{\epsilon}{2}} + \frac{1}{8}\|x\|_{\frac{\epsilon}{4}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|x\|_{\frac{\epsilon}{2^{n-1}}}$$

Por el tercer lema,obtenemos

$$(1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_{\frac{\epsilon}{2^{n-1}}} \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|x\|$$

$\forall n \geq 1$. Luego la serie que define $\|.\|_u$ converge. Además, se verifica que $\|.\|_u$ es una norma sobre X. Demostraremos que $\|.\|_u$ es equivalente a la original:
observemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1-\delta)\|x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\|x\|_{\frac{\epsilon}{2^{n-1}}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|x\| \Leftrightarrow$$

$$(1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_u \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|x\|.$$

Dado que $0 < \delta < \epsilon < \frac{1}{8}$, se tiene

$$\frac{7}{8}\|x\| \leq (1-\epsilon)\|x\| \leq (1-\delta)\|x\| \leq \|x\|_u \leq \left(1 - \frac{\delta}{3}\right)\|x\| \leq \|x\|,$$

donde

$$\frac{7}{8}\|x\| \leq \|x\|_u \leq \|x\|$$

$\forall x \in X$. Luego, $\|.\|_u$ es equivalente a la norma original de X por último demostraremos que $\|.\|_u$ es uniformemente convexa

$$\begin{aligned} 2\|x\|_u &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\|x\|_{\frac{\epsilon}{2^{n-1}}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}((1-\delta)\|x\|) \\ &= (1-\delta)\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2(1-\delta)\|x\| \geq \|x\|. \end{aligned}$$

como ya tenemos que $\|x\| \geq \|x\|_u$, se sigue que

$$\|x\|_u \leq \|x\| \leq 2\|x\|_u$$

Ahora asumamos que $\|x\| = \|y\| = 1$ y $\|x - y\| \geq \epsilon_1$. Fijemos $k > 1$ tal que $\epsilon_1 > \frac{\epsilon}{2^k}$
Luego del tercer lema se tiene que

$$\|x+y\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} \leq \|x\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} + \|y\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} - \frac{\epsilon}{5.2^k}\delta_1\left(\frac{\epsilon}{5.2^k}\right)$$

donde $\delta_1\left(\frac{\epsilon}{5.2^k}\right)$ es el δ_1 del tercer lema correspondiente a $\frac{\epsilon}{2^k}$ ahora, notemos que

$$\begin{aligned}\|x+y\|_u &= \frac{1}{2}\|x+y\|_\epsilon + \frac{1}{4}\|x+y\|_{\frac{\epsilon}{2}} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\|x+y\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} \\ &\quad + \frac{1}{2^{k+2}}\|x+y\|_{\frac{\epsilon}{2^{k+1}}} + \cdots \leq \frac{1}{2}(\|x\|_\epsilon + \|y\|_\epsilon) + \frac{1}{4}(\|x\|_{\frac{\epsilon}{2}} + \|y\|_{\frac{\epsilon}{2}}) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\left(\|x\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} + \|y\|_{\frac{\epsilon}{2^k}} - \frac{\epsilon}{5.2^k}\delta_1\left(\frac{\epsilon}{5.2^k}\right)\right) + \frac{1}{2^{k+2}}\left(\|x\|_{\frac{\epsilon}{2^{k+1}}} + \|y\|_{\frac{\epsilon}{2^{k+1}}}\right) \\ &\quad + \cdots \leq \|x\|_u + \|y\|_u - \frac{\epsilon}{5.2^k}\delta_1\left(\frac{\epsilon}{5.2^k}\right) \leq \|x\|_u + \|y\|_u - \frac{1}{2^{k+1}}\frac{\epsilon}{2^k}\delta_1\left(\frac{\epsilon}{5.2^k}\right),\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es válida dado que $k > 1$. Se tiene entonces del cuarto lema que $\|.\|_u$ es uniformemente convexa. $\square$

Esto termina la demostración del teorema de Enflo.

3.3. Conclusiones

Finalizamos este trabajo con algunas conclusiones:

- Dado un espacio de Banach sin la propiedad de ser uniformemente convexa, es posible bajo ciertas condiciones encontrar una norma equivalente, así el el espacio de Banach con la nueva norma es uniformemente convexa.
- El espacio de Hilbert no tiene la **P.A.F**
- El espacio l_∞^n no admite una norma uniforme convexa equivalente.
- La bola cerrada y acotada en un espacio de Banach que no tiene la **P.A.F** es compacta en la topología débil.

Bibliografía

[1] Akhiezer, N.I. and Krein, M.G., Some questions in the theory of moments(en russo), Gosudarstv. Naucno-Tehn. Izdat. Ukrain., Kharkov, 1938.

[2] Akhiezer, N.I. and Krein, M.G., Some questions in the theory of moments(traducción al ingles de [1]), Translations of Mathematical Monographs, vol. 2, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962.

[3] Asplund, E., Averaged norms, Israel J. Math. 5 (1967), 227-233.

[4] Beauzamy, B., Introduction to Banach Spaces and Their Geometry, Notas de Matemtica [86], Mathematics Studies, vol. 68, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[5] Blatter, J., Reflexivity and the existence of best approximations, Approximation Theory, II (George G.Lorentz, Charles K. Chui, and Larry L. Schumaker, eds.), Proc. Internat, Sympos., Univ. Texas, Austin, Tex., Academic Press, New York, 1976, pp.299-301.

[6] Clarkson, J.A., Uniformly convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936),396-414.

[7] Day, M. M., Normed Linear Spaces, third ed.,Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[8] Diestel, J., Geometry of Banach Spaces, Selected Topics. Lecture Notes vol. 485, Springer.

[9] Enflo, P., Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm, Israel J. Math. 13 (1972), 281-288.

[10] Fabian et al, Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, CMS Books in Mathematics, Canadian Mathematical Society, Springer, 2001.

[11] Megginson, R. E., An Introduction to Banach Space Theory, Graduate texts in mathematics; 183, Springer-Verlag New York, Inc, 1998.

[12] Rudin, W., Functional Analysis, Second Edition, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, 1991.

[13] Rudin, W., Real and Complex Analysis, Third Edition, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, 1987.