



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

**Modelamiento matemático de la dinámica de
transmisión de una infección parasitaria**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Yuditd Araceli CUMBA TINIPUCLLA

ASESOR

Dr. José Raúl LUYO SÁNCHEZ

Lima, Perú

2022



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Cumba, Y. (2022). *Modelamiento matemático de la dinámica de transmisión de una infección parasitaria*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Yuditd Araceli Cumba Tinipuella
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	75587332
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-0370-8605
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	José Raul Luyo Sánchez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09394743
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0001-5120-5274
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	43688114
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Datos de investigación	
Línea de investigación	Ecuaciones diferenciales Parciales, Teoría de la probabilidad
Grupo de investigación	Implicit Theorem Bourbaki Group
Agencia de financiamiento	-
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2022
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34

Teléfono: 619-7000, Anexo 1610

Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe

Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 4:00 horas del jueves 21 de julio del 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (PRESIDENTE), Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (MIEMBRO) y el Dr. José Raúl Luyo Sánchez (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: “MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA DINÁMICA DE TRANSMISIÓN DE UNA INFECCIÓN PARASITARIA”, presentado por la Bachiller YUDITD ARACELI CUMBA TINIPUCLLA, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación sobresaliente con un calificativo promedio de 18 (dieciocho).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas, manifestó que la Bachiller YUDITD ARACELI CUMBA TINIPUCLLA, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo 5:00 pm se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
PRESIDENTE

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
MIEMBRO

Dr. José Raúl Luyo Sánchez
MIEMBRO ASESOR

INFORME DE EVALUACIÓN DE ORIGINALIDAD

1. FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
2. ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
3. AUTORIDAD ACADÉMICA QUE EMITE EL INFORME DE ORIGINALIDAD

Director de La Escuela Profesional de Matemática

4. APELLIDOS Y NOMBRE DE LA AUTORIDAD ACADÉMICA

Víctor Hilario Tarazona Miranda

5. OPERADOR DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUD

Alex Armando Cruz Huallpara

6. DOCUMENTO DE EVALUACIÓN

Título de pre grado: Modelamiento matemático de la dinámica de transmisión de una infección parasitaria

7. AUTOR DEL DOCUMENTO

Nombre y Apellido: Yuditd Araceli Cumba Tinipuella

8. FECHA DE RECEPCIÓN DE DOCUMENTO

.....

9. FECHA DE APLICACIÓN DEL PROGRAMA INFORMÁTICO DE SIMILITUDES

Procesado el: 13-jun.-2022 12:25 -05

Identificador: 1856164612

Número de palabras: 20386

Entregado: 1

10. SOFTWARE UTILIZADO

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
TURNITIN	x	
ITHENTICATE		x
OTROS(ESPECIFICAR)		x

11. CONFIGURACION DEL PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
EXCLUYE TEXTOS ENTRECOMILLADOS	x	
EXCLUYE BIBLIOGRAFÍA	x	
EXCLUYE CADENAS MENOS A 40 PALABRAS	x	
OTRO CRITERIO (ESPECIFICAR)		x

12. PORCENTAJE DE SIMILITUDES SEGÚN PROGRAMA DETECTOR DE SIMILITUDES

EN LETRA	NÚMEROS
Seis Porciento	6%

13. FUENTES ORIGINALES DE LAS SIMILITUDES ENCONTRADAS

1% match (Internet desde 02-dic.-2020)
<https://aprenderly.com/doc/3418393/introducci%C3%B3n-a-la-probabilidad>

1% match (Internet desde 10-dic.-2020)
<https://qdoc.tips/zill-3-edicion-pdf-free.html>

1% match (Internet desde 19-feb.-2020)
<https://pt.scribd.com/document/330852557/Prob1-2016>

<1% match (Internet desde 14-dic.-2020)
<https://qdoc.tips/introduccion-a-la-investigacion-de-operaciones-9na-edicion-frederick-s-hillier-amp-gerald-j-liebermanpdf-5-pdf-free.html>

<1% match (trabajos de los estudiantes desde 24-dic.-2021)
 Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA on 2021-12-24

<1% match (trabajos de los estudiantes desde 21-oct.-2019)
 Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA on 2019-10-21

<1% match (Internet desde 07-ene.-2022)
<https://es.slideshare.net/ludovicosforza12/final-grupo-markov>

<1% match (Internet desde 22-jul.-2008)
<http://www.math.mcgill.ca>

<1% match (Internet desde 09-ago.-2017)
<http://ri.ues.edu.sv>

<1% match (Internet desde 05-dic.-2009)
<http://math.stanford.edu>

<1% match (Internet desde 30-jun.-2013)
<http://marialejandraunefa2.lacoctelera.net>

<1% match (Internet desde 12-mar.-2022)
<https://vsip.info/aplicaciones-de-la-cadena-de-markov-pdf-free.html>

<1% match (Internet desde 18-feb.-2018)
<https://es.scribd.com/doc/52004631/curso-de-estadistica2009?cv=1>

<1% match (Internet desde 19-ene.-2022)
https://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12672/16628/Abanto_mj.pdf?isAllowed=y&sequence=1

<1% match (trabajos de los estudiantes desde 04-abr.-2020)
 Submitted to Instituto Politecnico Nacional on 2020-04-04

<1% match (Internet desde 16-nov.-2020)
<https://www.studocu.com/gt/document/universidad-de-san-carlos-de-guatemala/estadistica-1/otros/probabilidad-y-estadistica-para-ingenieria-y-ciencias/8438750/view>

14. OBSERVACIONES

.....

15. CALIFICACIONES DE ORIGINALIDAD

ASPECTOS INFORMATIVOS	SI	NO
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, SIN OBSERVACIONES.	X	
DOCUMENTO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD, CON OBSERVACIONES.		X

DOCUMENTO NO CUMPLE CRITERIOS DE ORIGINALIDAD		X
---	--	---

16. FECHA DE INFORME

.....



Firmado digitalmente por TARAZONA
MIRANDA Victor Hilario FAU
20148092282 soft
Motivo: Soy el autor del documento
Fecha: 07.07.2022 01:09:41 -05:00

Miranda

Dr. Víctor Hilario Tarazona

Director (e) de la EP de Matemática

Me gustaría dedicar esta Tesis a toda mi familia. Para mis padres Adrián y Vicki, por su comprensión y ayuda en momentos no tan gratos. Me han enseñado a encarar las adversidades sin perder nunca la visión final de la meta y siempre confiar en mí. Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi perseverancia y mi empeño, y todo ello con una gran dosis de amor.

Agradecimientos

Ante todo mi principal agradecimiento va para Dios que me dio la vida y me da la fortaleza cuando lo necesito.

Gracias a mi familia por siempre apoyarme en las decisiones que he tomado y confiar tanto en mí. A mi padre por lanzar la iniciativa de postular a la universidad aunque aún no me sentía preparada, pero sin duda fue la mejor decisión ya que su confianza que depositó en mí fue inmensa al igual que su amor. A mi madre que pesar de las circunstancias siempre me dio ánimos en cada etapa de mi vida y me dio el soporte para dedicarle el tiempo debido a los estudios y de esa forma lograr mis objetivos.

A mi hermanos menores por brindarme la motivación de querer ser mejor persona para ser un buen ejemplo a seguir.

A mis compañeros de universidad que me acompañaron desde el primer ciclo en adelante y me brindaron su soporte en los momentos precisos.

Agradecer a mi asesor, el Dr. José Raul Luyo Sánchez que me acompañó en mi proceso profesional y vio en mí un gran potencial. A lo largo del proceso más que un profesor se volvió un amigo que tiene mi admiración y me ayudó a encontrar mi camino dentro del vasto mundo de las matemáticas.

A mis amigos en general por sus palabras de aliento y por la confianza que depositaron en mí. A todas las personas que confiaron en mí y me apoyaron en todo momento.

Índice general

1. Introducción a la teoría de la probabilidad	3
1.1. Conceptos generales	4
1.2. Algunas propiedades elementales	7
1.3. Variables aleatorias	11
1.4. Algunas distribuciones de una variable aleatoria	14
1.5. Esperanza y funciones generadoras	19
2. Procesos estocásticos que dependen del tiempo	23
2.1. Ideas preliminares	24
2.2. Proceso de Poisson	30
2.2.1. Definición constructiva	30
2.2.2. Definición infinitesimal	31
2.3. Proceso puro de nacimiento	36
2.4. Proceso de nacimiento y muerte	38
2.5. Teorema de Daniell-Kolgomorov	41
3. Cocientes demográficos	43
3.1. Flujo y stock	44
3.2. Tipos de cocientes más relevantes	45
4. Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales semilineales	47
4.1. Soluciones generales y condiciones auxiliares	48
4.2. Soluciones generales y condiciones auxiliares	49
4.3. Curvas integrales de campos vectoriales	50
4.4. Resolución de las ecuaciones diferenciales parciales semilineales .	51
5. Análisis y modelamiento matemático de la enfermedad esquistoso-	53
miasis.	
5.1. Datos generales	54
5.2. Sistema de Ecuación diferencial ordinaria de Kolgomorov	58
5.3. Ecuaciones de Kolgomorov	60
5.4. Resolución de nuestra ecuación diferencial parcial	61
Bibliografía	69

Introducción

Entre los problemas de salud pública de los trópicos y subtrópicos, uno de los más graves es el control de la esquistosomiasis humana, una infección parasitaria que se estima afecta a más de doscientos millones de personas en todo el mundo. La dinámica de transmisión de esta infección depende de dos procesos estocásticos relacionados, que dependen de un huésped temporal y otro definitivo. Las intensidades de estos están determinados por una serie de factores biológicos identificables y parámetros ambientales. Como sucede tan a menudo en matemática, esta dependencia funcional puede ser descrita por ecuaciones diferenciales. Este trabajo presenta una explicación introductoria de los pasos necesarios para modelar y obtener distribuciones de probabilidad de la cantidad de parásitos que puede llegar a albergar un huésped en determinado espacio de tiempo.

Está dividida en cinco secciones donde las cuatro primeras desarrollan conceptos fundamentales, teoremas y proposiciones básicas para poder realizar el modelo matemático y su respectiva solución.

Una introducción a la teoría de la probabilidad es expuesta en la primera sección. Se trata de un tópico atrayente que nos muestra algunas definiciones y teoremas importantes con ejemplos que facilitan su comprensión.

La segunda sección se centra en mostrar ideas preliminares de una idea más generalizada de variables aleatorias expuestas en la primera sección conocida como ecuaciones estocásticas. Además muestran los teoremas básicos que permitan el modelo de una ecuación de Kolmogorov, pieza clave para la sección 5.

La tercera es una sección intermedia que deja atrás por un momento los teoremas, para centrarse en definiciones valiosas de cocientes demográficos que son usados para definir las variables de nuestra ecuación.

Los métodos para la resolución de una ecuación diferencial parcial semilineal son estudiadas en la sección 4.

En sección final empezará modelando un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de Kolmogorov, la cual, utilizando la función generadora de probabilidad, se reducirá a resolver una ecuación diferencial parcial de primer orden conocida como ecuación de transporte cuya resolución nos dará como resultado una distribución de probabilidad.

Aunque el modelo que desarrollamos se refiere específicamente a la enfermedad

esquistosomiasis, el método y los resultados tienen implicaciones generales para una amplia clase de infecciones parasitarias en el ser humano y en animales que podrían ser útiles en el Perú.

Capítulo 1

Introducción a la teoría de la probabilidad

Hacer predicciones es extremadamente importante y útil pues ayuda a tener una visión más amplia del comportamiento de sucesos cotidianos como enfermedades, el medio ambiente, seguridad vial, seguridad aérea, entre otros. Usamos aviones para trasladarnos porque se sabe que sólo hay una pequeña posibilidad de fatalidad en un accidente aéreo, mientras que muchas personas en el mundo se mantuvieron en confinamiento a principios del año 2020 porque la posibilidad de contraer el COVID-19 era muy alta.

A través de la historia el cálculo y teoría de la probabilidad ha llegado a ser de vital importancia para construir modelos matemáticos en diversas disciplinas científicas donde el factor principal ha sido la presencia de la incertidumbre.

Muchos fenómenos en donde el azar está presente han sido modelados gracias a la probabilidad. He ahí su vital importancia.

1.1. Conceptos generales

En la naturaleza encontramos dos tipos de fenómenos o experimentos: deterministas y aleatorios. El primero se define como aquel cuyo resultado puede ser predecido si se imponen las mismas condiciones iniciales previo al experimento. En contraste a esto, un experimento aleatorio es aquel cuyo resultado no resultará ser el mismo a pesar de que se repitan las mismas condiciones iniciales. Las definiciones y teoremas presentados en esta sección fueron tomados de [4] [5].

Ejemplo 1.1.1. *Algunos ejemplos de experimentos deterministas son los siguientes:*

- a) *El cálculo de la distancia que recorre un automóvil en 1 hora a una velocidad constante.*
- b) *Registrar el tiempo que toma un objeto en caída libre desde un punto de altura fija antes de llegar al piso.*

Ejemplo 1.1.2. *Algunos ejemplos de experimentos aleatorios pueden ser:*

- a) *El registro de el número de accidentes de tránsito que ocurren en el distrito de Ate en cada fin de semana.*
- b) *Determinar en una escuela el número de estudiantes infectados de un virus si estos se exponen a una fuente de contagio.*

Cuando se tratan de experimentos aleatorios, es decir cuyos resultados no se conocen a priori, da lugar a un resultado que será parte de un conjunto de posibilidades que conformará una clase que denominaremos Ω .

Definición 1.1.1. *Un espacio muestral es un conjunto arbitrario Ω que agrupa todos los posibles resultados del experimento aleatorio en estudio u observación.*

Ejemplo 1.1.3. *Los espacios muestrales respecto a los experimentos aleatorios descritos en el ejemplo (1.1.2) serían:*

- a) $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- b) $\Omega = \{true, false\}$

De manera intuitiva, los subconjuntos de todos los posibles resultados que comparten alguna característica en común reciben el nombre de sucesos aleatorios. Estos subconjuntos recibirán esta etiqueta literal si cumplen determinadas condiciones. Cuando el resultado de un experimento realizado pertenece a un suceso específico A , decimos que " A ha ocurrido o se ha realizado".

Definición 1.1.2. *Una colección de subconjuntos \mathcal{F} de un conjunto arbitrario Ω es un σ – álgebra si satisface las siguientes condiciones:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$
3. Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

Formalmente, los elementos de un σ -álgebra \mathcal{F} se denominan eventos o conjuntos medibles. Veamos un ejemplo que nos ayuda a ver intuitivamente el concepto de σ -álgebra.

Ejemplo 1.1.4. Supongamos que queremos registrar el número final que tienen las placas de los autos que circulan por alguna avenida de nuestra ciudad, para poder aplicar la regla de "pico y placa". Para este caso, el espacio muestral de todos los posibles números finales de una placa arbitraria serían

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

Sea ω el resultado del experimento, sea cual su valor, $\omega \in \Omega$, por tanto, Ω debe ser un evento; al cual llamaremos evento seguro. Esto es $\Omega \in \mathcal{F}$.

Definamos el evento $A = \{0, 2, \dots, 8\}$. Esto se interpreta al suceso de que la placa del auto arbitrario termine en número par. Sí tiene perfecto sentido pensar en que el resultado ω pueda ser un número par (es decir $\omega \in A$), así como también es pertinente asumir que este podría ser un número impar (es decir que $\omega \in A^c$) por tanto, no es difícil pensar que A^c sea un evento si A lo es. Esto es $A^c \in \mathcal{F}$ si $A \in \mathcal{F}$.

Si definimos el evento $B = \{1\}$ que ocurre cuando la placa acabe en el número 1, es oportuno creer que escogiendo un auto arbitrario, el resultado ω podría ser un par ($\omega \in A$) o quizá el resultado podría ser 1 ($\omega \in B$). Por ser ambos eventos, puede ocurrir que $\omega \in A \cup B$, por lo tanto exigiremos que unión finita de sucesos deba ser un suceso. Esto es si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{F}$.

Sin embargo exigir estabilidad frente a uniones contables resulta ser menos intuitiva, esto dará lugar a que tengamos en su formalización una teoría matemática más robusta.

Definición 1.1.3. Sea \mathcal{C} una clase no vacía de subconjuntos de un conjunto arbitrario Ω .

La σ -álgebra generada por \mathcal{C} , y denotada por $\sigma(\mathcal{C})$ es

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \{ \mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es un } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \}$$

Este conjunto consigue ser la menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{C} .

Ejemplo 1.1.5. La clase de todos los subconjuntos de Ω , que denominamos $\mathcal{P}(\Omega)$, es una σ -álgebra trivial en Ω a la cual llamaremos σ -álgebra discreta.

Un conjunto numerable provisto de esta σ -álgebra denominaremos espacio medible discreto.

En lo que sigue de este documento, un conjunto numerable cualquiera será provisto de esta σ -álgebra discreta, a menos que se suponga lo contrario.

Ejemplo 1.1.6. Se llamará σ -álgebra trivial al conjunto $\{\Omega, \emptyset\}$ siendo esta la más pequeña σ -álgebra que podemos considerar de Ω .

Definición 1.1.4. Sea \mathcal{F} una σ -álgebra del espacio muestral Ω , $k \in \mathbb{N}$ A_k , sucesos asociados a \mathcal{F} . Una función $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad si cumple que $P(\Omega) = 1$ y P es σ -aditiva, es decir que se cumple que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

donde $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$

Que la probabilidad de la ocurrencia de un evento sea próxima a 0 indica que este es poco factible de ocurrir, mientras que una probabilidad cercana a 1 indica que es casi seguro que el resultado del experimento ocurra.

Tomar el control de las posibilidades que un evento ocurra, es vital en la toma de decisiones, gracias a que nos otorga una manera de medir y analizar los sucesos futuros con sus respectivas incertidumbres.

Definición 1.1.5. Sea Ω un espacio muestral, \mathcal{F} un σ -álgebra de Ω , P una medida de probabilidad.

A la terna (Ω, \mathcal{F}) se le llama espacio de medida o espacio medible y a la terna (Ω, \mathcal{F}, P) se le conoce como espacio de probabilidad.

1.2. Algunas propiedades elementales

La capacidad de estimar o predecir eventos es la esencia vital de la aplicación de los métodos del cálculo de probabilidades.

Mientras mayor sea el número de datos que tengamos a disposición para calcular la probabilidad de que un evento suceda, mayor precisión obtendremos al calcular el resultado. Debido a la complejidad de las situaciones en las que es necesario aplicarse el cálculo de las probabilidades, es imprescindible que existan ciertas propiedades que lo faciliten.

Las demostraciones de los resultados expuestos en este capítulo son de común conocimiento de aquellos que estudiamos matemática a un cierto nivel avanzado, se pueden encontrar en [13], [3],[4], [5].

Proposición 1.2.1. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, A, B conjuntos tales que, $A, B \subset \Omega$, se cumple que:

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.
4. Si $A \subseteq B$ entonces $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

Definición 1.2.1. Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio. El conjunto de eventos $\{D_i\}_{i=1}^n$ es una partición finita de Ω si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) $D_i \cap D_j = \emptyset$, para $i \neq j$.
- b) $\bigcup_{i=1}^n D_i = \Omega$.
- c) $D_i \subset \Omega$ $i = 1, 2, \dots, n$.
- d) $D_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Queremos destacar la importancia del siguiente resultado ya que establece un método práctico para el cálculo de las probabilidades. Gracias a esto, considerando un evento A , del cual queremos encontrar la probabilidad de que suceda, se trata de encontrar una partición de A donde cada evento de esta partición sea más simple de calcular.

Proposición 1.2.2. Sea un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) , $\{A_k\}_{k=1}^n$ una partición finita de Ω , se tiene que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

Corolario 1.2.1. Si (Ω, \mathcal{F}, P) es un espacio de probabilidad, A y B eventos, entonces se tiene que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En algunos casos, nos encontramos con una colección de eventos que tienen cada uno la misma probabilidad de que sucedan. A estos eventos se le conocen como equiprobables. Dado $n, N \in \mathbb{N}$, tal que $n < N$, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ un espacio muestral y $A = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un evento del espacio muestral Ω . Si suponemos que los conjuntos $\{\omega_k\}_{k=1}^N$, son equiprobables, entonces $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$ para $i, j = 1, 2, \dots, N$, y como consecuencia

$$1 = P\left(\bigcup_{k=1}^N \{\omega_k\}\right) = \sum_{k=1}^N P(\{\omega_k\}) = NP(\omega_k).$$

$$P(\omega_k) = \frac{1}{N} \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.1)$$

Además

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^n \{\omega_k\}\right) = \sum_{k=1}^n P(\{\omega_k\}) = nP(\{\omega_k\})$$

Usando la expresión (1.1)

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Esta forma de calcular probabilidades, apoyado en la equiprobabilidad de los posibles resultados, es conocido en nuestro medio de actuación como la definición clásica de probabilidad.

La historia confirma que este mecanismo, el de calcular probabilidades es una de las primeras en ser usada; se aplicó con bastante éxito en problemas de juegos de azar y ayudó a sentar las bases para construir la teoría matemática.

Definición 1.2.2. Sea Ω un espacio muestral de cardinalidad finita y $A \subset \Omega$. Si denotamos la cardinalidad del conjunto A por $\#A$. Se define la probabilidad clásica del evento A como el cociente

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Ejemplo 1.2.1. Al observar un dado equilibrado que es lanzado sobre una mesa y observar el número que muestra la cara superior, obtenemos un clásico ejemplo de equiprobabilidad.

Consideramos el espacio muestral asociado a este evento como $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si deseamos calcular la probabilidad (clásica) de obtener un número impar del evento A , es decir $A = \{1, 3, 5\}$, entonces

$$P(A) = \frac{\#\{1, 3, 5\}}{\#\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}} = \frac{3}{6} = 0,5$$

En ocasiones el resultado de un experimento aleatorio depende del resultado de otros que también son aleatorios, los cuales se realizan consecutivamente. Como la probabilidad está asociada al desconocimiento que tenemos del futuro resultado de un evento, entonces esto puede cambiar la probabilidad de ocurrencia de las demás.

Definición 1.2.3. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad, $A, B \subset \Omega$ tal que $P(B) > 0$. La probabilidad condicional de algún evento A , dado que el evento B suceda previamente, es una función que se denota $P(\cdot | B) : \Omega \rightarrow [0, 1]$ y se define como

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Cuando ocurre un suceso antes de realizar otro experimento, se reduce el espacio muestral y es por eso que cambia la probabilidad. A veces es más fácil calcular la probabilidad condicionada teniendo en cuenta este cambio de espacio muestral. No tiene por qué haber una relación temporal entre A y B . Además A puede anteceder en el tiempo a B , ocurrir después o quizá pueden suceder a la misma vez. A puede causar B , viceversa o pueden no tener relación.

"Siendo la probabilidad condicional una probabilidad calculada en un espacio muestral reducido (el cual sería B), es de esperarse que esta tenga las mismas propiedades que cualquier medida de probabilidad."

Proposición 1.2.3. $P(\cdot | B)$ es una medida de probabilidad con el espacio de medida (Ω, \mathcal{F})

Gracias a esta propiedad tenemos una útil herramienta para calcular probabilidades conocida como la regla del producto, la cual se puede utilizar para determinar la probabilidad de la intersección de dos eventos. Esta ley se deriva de la definición de probabilidad condicional.

$$P(A \cap B) = P(A | B)P(B)$$

En los casos en si evento A no altera la probabilidad de otro evento B , se puede hablar de un caso de independencia de probabilidad.

Definición 1.2.4. Se dice que los eventos A y B son independientes si se satisface la ecuación o identidad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si agregamos la hipótesis de que B suceda irremediabilmente, es decir, $P(B) > 0$. La condición de independencia puede escribirse como $P(A | B) = P(A)$.

Intuitivamente esto significa que la ocurrencia del evento B no afecta en el acontecimiento del evento A .

El siguiente resultado es bastante útil cuando se quiere determinar la probabilidad de algún conjunto grande, bastará con hallar las probabilidades de conjuntos más pequeños y probabilidades condicionales con respecto a esos conjuntos

Teorema 1.2.1. *Sea $\{B_i\}_{i=1}^n$ una partición del espacio muestral Ω tal que $P(B_i) \neq 0$, para $i = 1, \dots, n$, para cualquier evento A ,*

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)$$

1.3. Variables aleatorias

En algunas ocasiones el interés principal que tenemos frente a un experimento es un análisis numérico con el resultado obtenido. Un ejemplo de ello puede ser que frente al lanzamiento de dos dados equilibrados estamos interesados en la suma de los resultados más que en los valores resultantes.

Nuestra primera dificultad es que no todos los espacios muestrales Ω son subconjuntos de \mathbb{R} , por ello, es necesario introducir la definición de una función que traslade los elementos de Ω a números reales con los cuales podamos "trabajar matemáticamente".

Las demostraciones de los resultados expuestos en este capítulo se pueden encontrar en [13], [3],[4] [5].

Definición 1.3.1. Sean $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ espacios medibles. Una variable aleatoria (llamado función medible en teoría de la medida) es una función $X : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ tal que para cualquier $F \in \mathcal{F}_2$ se cumple que

$$X^{-1}(F) \in \mathcal{F}_1.$$

Al conjunto $X(\Omega_1)$ se le conocerá como el conjunto de estados de X

Observación: Si el conjunto de estados $X(\Omega_1)$ es numerable o finito, entonces X será llamado una variable aleatoria discreta.

Ejemplo 1.3.1. Consideremos un experimento aleatorio que consiste en tener que lanzar 2 dados, cuyo espacio muestral es

$$\Omega_1 = \{(1, 1), \dots, (1, 6), (2, 1), \dots, (2, 6), \dots, (6, 6)\}$$

con el σ -álgebra asociado $\mathcal{P}(\Omega)$.

Si lo queremos analizar la diferencia de los valores máximo y mínimo del resultado, entonces definamos a la variable aleatoria X como

$$X : \Omega_1 \rightarrow \{0, 1, \dots\},$$

donde $X(a, b) = \max\{a, b\} - \min\{a, b\}$

Si $(\Omega_1, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad, gracias a la variable aleatoria X se puede definir una nueva medida de probabilidad P_X sobre el espacio de medida $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$, definida como $P_X(F) = P(X^{-1}(F))$, ya que $X^{-1}(F) \in \mathcal{F}_1$. Además,

$$P_X(\Omega_2) = P(X^{-1}(\Omega_2)) = P(\Omega_1) = 1$$

$$P_X\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right)\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} X^{-1}(F_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X^{-1}(F_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} P_X(F_k)$$

de donde se concluye que $P_X(\Omega_2) = 1$ y P_X es σ -aditiva.

De aquí se concluye que $P_X : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ también es una medida de probabilidad (inducida) por la variable aleatoria X .

Observación: Para un uso más práctico, el conjunto $X^{-1}(\{a\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}$ será denotado $(X = a)$

En la literatura especializada es común omitir el término de la variable aleatoria para X , por ello escribiremos P en lugar de P_X

Las variables aleatorias establecen una relación funcional entre elementos del espacio muestral asociado al experimento y números reales, por ello, de manera práctica, la mayoría de variables aleatorias discretas no puedan ser expresadas matemáticamente, por lo cual suelen usarse expresiones que den entender el comportamiento de la variable aleatoria.

Algunos ejemplos de estos casos serían: $X = \text{"Número de fallecidos en Enero el 2020."}$, $X = \text{"Cantidad de bacterias en determinado cultivo en un tiempo determinado"}$, $X = \text{"Número de infectados por día de determinada enfermedad."}$, etc.

De un mismo experimento aleatorio se puede definir diferentes variables aleatorias.

Ejemplo 1.3.2. Al lanzar 3 monedas al aire podemos asignar a cada suceso la variable aleatoria $X = \text{"Número de caras"}$, pero también se puede definir otra variable aleatoria $Y = \text{"Número de sellos"}$, cuyo espacio muestral es:

$$\Omega = \{(C, C, C), (C, X, C), (X, C, C), (C, C, X), (X, X, C), (X, C, X), (X, X, C), (X, X, X)\}$$

Consideremos a P como la probabilidad clásica sobre Ω y P_X, P_Y la probabilidad inducida por las variables aleatorias X, Y , respectivamente. Se desea saber cuál es la probabilidad de obtener 2 caras al lanzar las 3 monedas consecutivamente.

$$P_X(X = 2) = P(X^{-1}(2)) = P(\{(C, X, C), (X, C, C), (C, C, X)\}) = \frac{3}{8}$$

Intuitivamente, esta probabilidad vendría a ser la misma a obtener solo un sello al lanzamiento de las 3 monedas. En efecto,

$$P_Y(Y = 1) = P(Y^{-1}(1)) = P(\{(C, X, C), (X, C, C), (C, C, X)\}) = \frac{3}{8}$$

Esto sucede como consecuencia a que el conjunto $(Y = 1)$ tiene los mismos elementos que $(X = 2)$.

Proposición 1.3.1. Sea k una constante y X una variable aleatoria, entonces kX es una variable aleatoria.

Proposición 1.3.2. Si Y y X son variables aleatorias, entonces $X + Y$ es una variable aleatoria

Observación: En ocasiones denotaremos a la probabilidad de que ocurran los sucesos A y B como $P(A, B)$ en lugar de $P(A \cap B)$. Esto es para simplificar la notación cuando queremos expresar la probabilidad de múltiples conjuntos.

1.4. Algunas distribuciones de una variable aleatoria

De forma intuitiva, una variable aleatoria es entendida como un número que es determinado y afectado por la incertidumbre de los sucesos futuros. Por ejemplo si una enfermedad que afecta a una población por encima de lo esperado, es decir una epidemia, y se sabe que una persona cualquiera puede enfermar o no (estos serían los sucesos), pero no se puede determinar con antelación si es que una persona caerá enferma, solo se puede afirmar de que exista la posibilidad de ello. Dependiendo de las circunstancias, estos sucesos no siempre serán equiprobables.

Para poder realizar un adecuado tratamiento estadístico será necesario reproducir una gran cantidad de los mismos experimentos de modo que sea posible asignar un valor real a cada posible resultado. Para conseguir esto se necesita definir estas funciones que asignan estos valores a la variable aleatoria.

Consideremos particularmente el caso discreto donde X es una variable aleatoria que toma los valores x_0, x_1, x_2, \dots con sus respectivas probabilidades

$$p_0 = P(X = x_0)$$

$$p_1 = P(X = x_1)$$

$$p_2 = P(X = x_2)$$

$$\vdots$$

La función de probabilidad de X se define como aquella función que asigna a un valor real resulta al medir la probabilidad de que el suceso coincida con aquel valor real (que pueden ser de manera finita o infinita, pero numerable).

Definición 1.4.1. Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores sobre un conjunto finito S , P la probabilidad inducida por la variable aleatoria X . La función de probabilidad de X es una función $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que se define como

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{Si } x \in S \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 1.4.2. Al conjunto $\{f(x) : x \in S\}$ o $\{P(X = x) : x \in S\}$ se le conoce como *distribución de probabilidad*.

Para hallar la probabilidad de algún evento $B \subset \mathbb{R}$ numerable con variable aleatoria discreta asociada X ,

$$P(B) = P(X \in B) = P\left(\bigcup_{x \in B} (X = x)\right) = \sum_{x \in B} P(X = x) = \sum_{x \in B} f_X(x)$$

Si f es una función de probabilidad asociada a X se cumple que

$$f(x) \geq 0, \quad \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1 \tag{1.2}$$

Recíprocamente, toda función cuyo conjunto de puntos de discontinuidad es numerable y que cumpla las dos propiedades de (1.2) será también una función de probabilidad sin que exista necesariamente de por medio una variable aleatoria. Algunas distribuciones son muy recurrentes y tienen aplicaciones muy útiles.

Ejemplo 1.4.1. *Requerimos registrar el número de bacterias por cm^2 de cultivo. Para modelar esta situación podemos definir la variable aleatoria X como el número de bacterias que aparecen en 1 hora de observación en $1cm^2$ de cultivo. X puede tomar los valores $0, 1, 2, \dots$*

Situaciones como la expuesta en el ejemplo (1.4.1) son bastantes recurrentes y por ello es necesario definir una distribución que modele estas situaciones.

Definición 1.4.3. *(Distribución de Poisson) Sea X una variable aleatoria que toma valores $0, 1, 2, \dots$, esta tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$ y será denotado $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ cuando su función de probabilidad es*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{Si } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El parámetro λ es interpretada como el promedio de ocurrencias en determinado tiempo y espacio del evento.

Ejemplo 1.4.2. *Volviendo al caso del ejemplo (1.4.1), la cual adicionalmente conocemos que la tasa media de bacterias por cm^2 es 10. Si queremos calcular la probabilidad de que existan 8 bacterias por cm^2 usamos la distribución de Poisson, el cual para $x = 8$ y $\lambda = 10$ se tiene,*

$$f(8) = \frac{e^{-10} 10^8}{8!} = 0,112599032.$$

Es importante resaltar la vital importancia de esta distribución. Sus principales casos de uso vienen de situaciones donde es necesario determinar la probabilidad de que una situación suceda una cantidad de veces en un intervalo de tiempo y/o espacio bajo determinadas circunstancias.

Esta distribución se puede hacer derivar de un proceso experimental de observación en el que tengamos las siguientes características.

- El experimento debe ser aleatorio.
- Se observa el experimento durante un cierto periodo de tiempo o a lo largo de un espacio de observación.
- La probabilidad de que se produzcan un número n de éxitos en un intervalo de amplitud t no depende del origen del intervalo (aunque, sí de su amplitud).

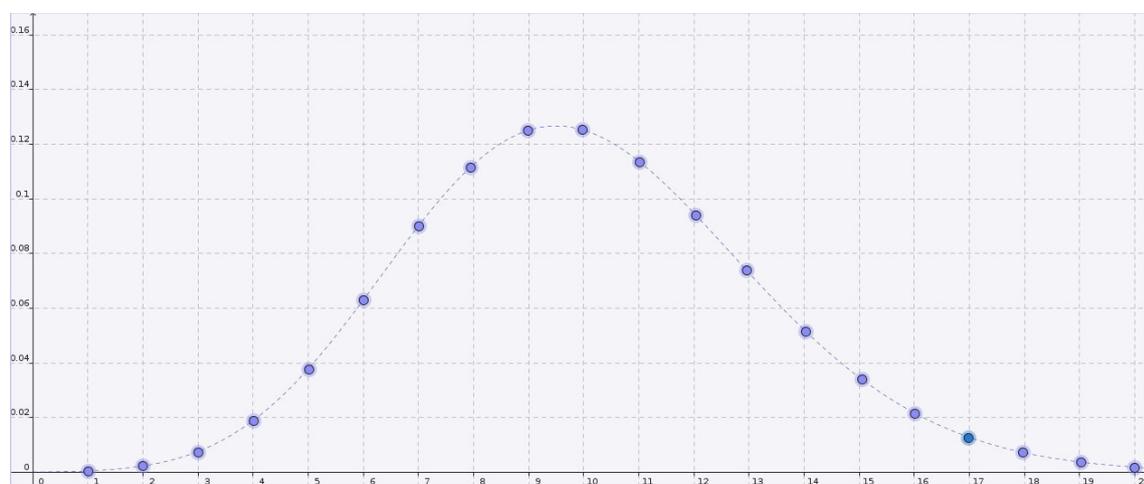


Figura 1.1: Gráfica de la probabilidad de que en determinado tiempo haya "x" bacterias por cm^2 de cultivo cuando la tasa media es 10.

- La probabilidad de que ocurra un hecho en un intervalo infinitésimo es prácticamente proporcional a la amplitud del intervalo.
- La probabilidad de que se produzcan 2 o más hechos en un intervalo infinitésimo es un infinitésimo de orden superior a dos.

Gracias a estas características podemos identificar cuando nos encontramos en el caso de una distribución de Poisson.

Otra distribución sumamente útil es la binomial, para la cual primero será necesario definir la distribución de Bernoulli.

Esta distribución es utilizado para representar una variable aleatoria que puede tener solo dos posible resultados. Éxito y fracaso.

Si suponemos que la probabilidad de que el experimento sea exitoso es p , la de fracaso sería $1 - p$.

Si definimos X como una variable aleatoria que asigna 1 a el resultado exitoso y 0 a el fracaso, entonces se dice que X tiene una distribución Bernoulli con parámetro $p \in [0, 1]$.

Ahora suponga que se lleva a cabo una serie de n experimentos de Bernoulli consecutivamente, todos independientes, los cuales cada uno tiene probabilidad p . Denotamos E para un resultado exitoso y F para un resultado de fracaso. El espacio muestral para esta prueba vendría a ser todas las n -sucesiones de E y F . De esta forma el espacio muestral consiste de 2^n elementos.

Si ahora definimos una variable aleatoria X como el contador de éxitos de estas

cadena, se tiene que

$$\begin{aligned} X(EE \dots E) &= n \\ X(FE \dots E) &= n - 1 \\ &\vdots \\ X(FF \dots F) &= 0 \end{aligned}$$

Los posibles resultados de estos experimentos Bernoulli puede ser algún valor de $\{0, 1, \dots, n\}$. Analicemos esto con un ejemplo.

Ejemplo 1.4.3. *Se realiza un experimento con un novedoso fertilizante orgánico, el objetivo es eliminar el musgo en una plantación. Se encontró una efectividad en los primeros experimentos del 75%. Si se aplica el mismo fertilizante en 3 parcelas del mismo tamaño y bajo las mismas condiciones, esto nos dice que tenemos 3 experimentos Bernoulli independientes con probabilidad de éxito de $p = 0,75$ cada una. En esta situación nuestro espacio muestral es*

$$\Omega = \{EEE, FEE, EFE, EEF, FFE, FEF, EFF, FFF\}$$

Por ser independientes, la probabilidad de obtener que 2 parcelas no pierdan su cosecha es preliminarmente,

$$p p(1 - p) = (0,75)^2(0,25) \tag{1.3}$$

Estamos en el caso donde las dos primeras pruebas fueron exitosas, sin embargo eso no sucederá siempre. Las diferentes formas en que los 2 éxitos pueden distribuirse es de 3 formas distintas (FEE, EFE, EEF). Gracias a (1.3) obtenemos la probabilidad que deseamos.

$$3(0,75)^2(0,25)$$

Para generalizar esto, en un experimento de Bernoulli repetido n veces, el coeficiente binomial $\binom{n}{x}$ representa los casos en que los x éxitos pueden ser distribuidos en los n ensayos. El producto de el término $p^x(1 - p)^{n-x}$ con el coeficiente binomial viene a ser la regla de correspondencia de la función de probabilidad para la distribución binomial.

Definición 1.4.4. *Sea X variable aleatoria. X tiene una distribución binomial con parámetros n y p y se denota por $X \sim \text{bin}(n, p)$ si por función de probabilidad tiene a la siguiente relación:*

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Un experimento se puede modelar con una distribución binomial si cumple que:

- Sólo hay dos posibles sucesos resultantes del experimento: (éxito y fracaso).

- Las probabilidades de cada suceso son las mismas en cualquier realización del experimento (p y $1 - p$, respectivamente).
- Toda realización del experimento es independiente del resto.

Gracias a estas características podemos identificar cuando un experimento modela una distribución binomial.

Definición 1.4.5. *Decimos que una variable aleatoria continua X tiene distribución exponencial con parámetro $\lambda > 0$, cuando su función de densidad es*

$$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se trata pues de una variable aleatoria continua con conjunto de valores en el intervalo $[0, \infty)$. Esta distribución se usa para modelar tiempos de espera para la ocurrencia de un cierto evento.

Aunque a simple vista la función no es de una estructura compleja, la distribución exponencial es utilizada para modelar los conocidos tiempos de espera en un modelo de Poisson.

Tiene una gran utilidad en los siguientes casos:

- Distribución del tiempo de espera entre sucesos de un proceso de Poisson.
- Distribución del tiempo que transcurre hasta que se produce un fallo, si se cumple la condición que la probabilidad de producirse un fallo en un instante no depende del tiempo transcurrido.

Existen muchas más distribuciones recurrentes para variables aleatorias discretas, pero las mencionadas serán de nuestro principal interés.

1.5. Esperanza y funciones generadoras

Para lograr una mayor simplicidad, suele ser mejor describir las probabilidades con algunos valores típicos. Entre aquellos valores, la media o esperanza es la más importante. Su definición va de acuerdo con el concepto común de promedio. Las demostraciones de los resultados expuestos en este capítulo se pueden encontrar en [4], [5], [3].

Si en una población determinada de 50 familias, 30 de ellas tienen 1 hijo por familia, 10 familias tienen 2, 7 tienen 3 y 3 familias tienen 4 hijos. El número total de hijos es $83 = 1(30) + 2(10) + 3(7) + 4(3)$

El número promedio de hijos por familia es

$$\frac{83}{50} = 1\left(\frac{30}{50}\right) + 2\left(\frac{10}{50}\right) + 3\left(\frac{7}{50}\right) + 4\left(\frac{3}{50}\right) \quad (1.4)$$

Sea la variable aleatoria $X = \text{"Números de hijos por familia"}$ y f la función de probabilidad asociada a X . Usando la probabilidad clásica se obtiene que $f(1) = \frac{30}{50}$, $f(2) = \frac{10}{50}$, $f(3) = \frac{7}{50}$, $f(4) = \frac{3}{50}$ que coincide con los valores expuestos en 1.4 los cuales al reemplazarlos obtenemos que el promedio de hijos por familia es $1f(1) + 2f(2) + 3f(3) + 4f(4)$.

Una generalización de esta situación induce a la siguiente definición.

Definición 1.5.1. Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores reales $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cuyas funciones de probabilidad son $\{f(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, la esperanza se define por

$$E(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k f(x_k)$$

Si la serie converge absolutamente decimos que X tiene esperanza finita.

Intuitivamente, la esperanza de una variable aleatoria X es el valor promedio de los valores que se esperan de un ensayo aleatorio cuando la posibilidad de que cada evento suceda es constante cuando el experimento se repite muchas veces.

Definición 1.5.2. Consideremos una variable aleatoria discreta X , que toma valores en el conjunto de estados $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ con distribución de probabilidad $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, tal que

$$p_k = P(X = x_k)$$

La función generadora de probabilidad (f.g.p.) G asociada a la variable aleatoria X (o equivalentemente a su distribución $\{p_k\}$) es una función que se define por

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^{x_k} \quad (1.5)$$

donde, $|s| \leq 1$.

Como $\{f(x_k) \mid x_k \in S\}$ es una distribución de probabilidad, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, por lo tanto, la serie definida en (1.5) converge absolutamente para $|s| \leq 1$ pues

$$|G(s)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |s|^k p_k \leq \sum_{j=0}^{\infty} p_k = 1$$

Como su nombre lo menciona, la *f.g.p.* genera la probabilidad asociada a su distribución.

Notamos que al derivar la *f.g.p.* y considerar $s = 0$ se obtiene que

$$G(0) = p_0$$

$$G'(0) = p_1$$

$$G''(0) = 2!p_2$$

⋮

Desde que la serie (1.5) converge absolutamente cuando $|s| \leq 1$, entonces es infinitamente diferenciable en el intervalo de convergencia. En general, por inducción se demuestra que la k -ésima derivada de la *f.g.p.* de X es

$$G^{(k)}(0) = k!p_k$$

De esta forma obtenemos que

$$p_k = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$$

recuperando lo que inicialmente era nuestra distribución de probabilidad.

Ejemplo 1.5.1. *Veamos un experimento que suele utilizarse constantemente: El lanzamiento de una moneda. Los resultados posibles de esto pueden ser solo dos opciones: cara C o sello S . Si X es una variable aleatoria tal que $X(C) = 1$, $X(S) = 0$ con $P(X = 0) = \frac{3}{4}$ y $P(X = 1) = \frac{1}{4}$ Por lo tanto la función generadora de probabilidad es*

$$G(s) = \frac{3}{4} + \frac{s}{4}.$$

Ahora supongamos que no sabemos la distribución de probabilidad al lanzar esta moneda, pero sí se sabe que la función generadora de probabilidad asociada que es $G(s) = \frac{3}{4} + \frac{s}{4}$.

Se recupera la función de probabilidad

$$P(X = 0) = G(0) = \frac{3}{4}.$$

$$P(X = 1) = G'(0) = \frac{1}{4}.$$

Algo que es importante destacar de la importancia de las funciones generadoras de probabilidades es que determina la unicidad de una distribución en el sentido de esperanza. Si las distribuciones de probabilidad de X e Y son las mismas, entonces, por supuesto, $E(X) = E(Y)$ significa $G_X = G_Y$ para el valor para el cual existe este valor esperado.

De lo contrario, X e Y tal que $G_X = G_Y$ existen y coincide en un pequeño espacio cercano a cero. En ese caso, la distribución de X y Y tendrán la misma distribución.

Proposición 1.5.1. Sean X y Y dos variables aleatorias con valores enteros no negativos tales que $G_X(s)$ y $G_Y(s)$ coinciden en algún intervalo alrededor de $s = 0$. Entonces X y Y tienen la misma distribución de probabilidad.

Proposición 1.5.2. Sean X e Y independientes con f.g.p. G_X y G_Y respectivamente, entonces $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$

Definición 1.5.3. La función de probabilidad de dos valores aleatorios X y Y con valores reales discretos en \mathbb{N} es la función $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} P(X = x, Y = y), & x, y = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta función es la función de probabilidad de las variables X e Y .

Si X e Y son variables aleatorias independientes, con valores enteros no negativos y con distribuciones de probabilidad $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ y $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ respectivamente, donde $a_j = P(X = j)$ y $b_k = P(Y = k)$, $j, k \in \mathbb{N}$, entonces $P(X = j, Y = k) = a_j b_k$.

La suma $X + Y$ es una nueva variable aleatoria por la proposición (1.3.2), y se cumple que

$$P(X + Y = m) = \sum_{j=0}^m P(X = j, Y = m - j)$$

Por lo tanto la distribución de la variable aleatoria $X + Y$, $\{c_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, donde $c_m = P(X + Y = m)$, viene dada por

$$c_m = \sum_{j=0}^m P(X = j, Y = m - j) = \sum_{j=0}^m a_j b_{m-j} \tag{1.6}$$

La nueva distribución de probabilidad 1.6 que parte de las dos sucesiones $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ y conduce a una nueva sucesión $\{c_k\}$ ocurre con tanta frecuencia que es conveniente darle un nombre y una notación especial para ella

Definición 1.5.4. Sean $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ dos sucesiones de enteros no negativos (no necesariamente distribuciones de probabilidades). La nueva sucesión $\{c_m\}$ definida en 1.6, se llamará convolución de a_k y b_k , y se denotará por

$$\{c_k\} = \{a_k\} * \{b_k\} \tag{1.7}$$

Observación: Si $f_X(k)$ y $f_Y(k)$ son funciones de probabilidad de las variables aleatorias X e Y respectivamente, denotaremos a la convolución $c_k = (f_X * f_Y)(k)$

Capítulo 2

Procesos estocásticos que dependen del tiempo

Hasta el momento se ha investigado el carácter aleatorio de los posibles resultados de los fenómenos futuros, sin embargo, esto ha sido con la premisa de que las circunstancias bajo las que se reproduce el experimento se mantiene constante durante el paso del tiempo, lo cual en caso prácticos no sucede.

Supongamos que nos encontramos en una sala de espera de un hospital. Se quiere analizar el comportamiento de llegada de pacientes en una hora transcurrida desde la apertura del hospital usando la variable aleatoria "Número de pacientes en la primera hora de apertura". Si cambiamos la premisa de 1 hora y consideramos 2 es evidente que la cantidad de pacientes va a aumentar (en un día normal de consulta) y como consecuencia la distribución asociada a esta variable aleatoria cambiaría.

Esto nos lleva a concluir que por cada tiempo transcurrido se debe generar una nueva aleatoria que en su mayoría son distintas entre sí.

Para tratar este asunto surgen los procesos estocásticos, que son familias de variables aleatorias, que de forma práctica, dependen de una variable determinista que es el tiempo.

En esta sección estudiaremos algunos de estos procesos en los que sólo intervienen algunos estados contables, pero que dependen de un parámetro de tiempo continuo. Se mostrarán resultados interesantes, así como la construcción de procesos de nacimiento y muerte, que son fundamentales en la construcción de nuestro modelo matemático.

2.1. Ideas preliminares

Consideremos un experimento cuyo resultado puede cambiar con el paso del tiempo. Cada estado del resultado del experimento en el tiempo t será representado por X_t . Cada X_t viene a ser una variable aleatoria. Esta colección de variables aleatorias se conoce como proceso estocástico, y sirve como modelo para representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo.

Las demostraciones de los resultados expuestos en este capítulo se pueden encontrar en [3], [6]

Definición 2.1.1. *Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in T}$ definida en algún espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}) , está parametrizada por un conjunto T (denominado espacio parametral), en donde las variables aleatorias toman valores en un conjunto S denominado espacio de estados.*

Un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo el cual puede estar en un espacio continuo (sin interrupciones), o en un espacio discreto (sobre intervalos de tiempo o con pausas que se pueden numerar). En el caso más simple, se utiliza un conjunto discreto como espacio de parámetros $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ y estos números se interpretan como tiempos épocas. En este caso se dice que el proceso es a tiempo discreto (también conocido como cadenas), este tipo de procesos será denotado en general por $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, o $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ dependiendo de la complejidad de la notación de la variable aleatoria a utilizar.

Por lo tanto para cada n , se tiene que X_n viene a ser el valor del proceso o estado del sistema al tiempo n . Se puede tomar como ejemplo a los cambios que podrían ocurrir cada día, cada mes, cada año, etc."

Cuando el tiempo es continuo, el espacio parametral se considera como el conjunto $T = [0, +\infty)$ donde los cambios de estado se podrían realizar en cualquier instante.

A partir de ahora, si el subíndice es n , seguiremos la convención de que el espacio parametral es discreta, mientras que si el subíndice es t , el tiempo se medirá de manera continua.

Ejemplo 2.1.1. *Una máquina de una planta de producción trabaja 8 horas diarias pero en determinados momentos del día la máquina deja de funcionar. Nos encontramos frente a dos posibles situaciones a lo largo del día: si la máquina está funcionando o no. Esta verificación se realiza cada hora de trabajo. Se le asigna a el estado inactivo un valor de 0 y al estado "activo", 1. Una colección de variables aleatorias es proporcionada por.*

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{Si la máquina está 'inactivo' en el tiempo } t \\ 1, & \text{Si la máquina está 'activo' en el tiempo } t \end{cases}$$

La figura (2.1) muestra una posible secuencia de cambios de estado a través del tiempo para esa máquina.

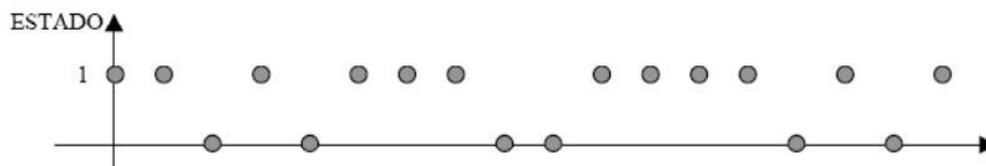


Figura 2.1: Estado que se encuentra la máquina al tiempo t

Según la gráfica, la máquina al tiempo 0 y 1 se encuentra en operación, por eso:

$$X_0 = 1$$

$$X_1 = 1$$

Al tiempo 2 la máquina cambia de estado y se encuentra fuera de funcionamiento.

$$X_2 = 0$$

Sucesivamente vemos como la máquina va cambiando de estado constantemente a través del tiempo.

$$X_3 = 1$$

$$X_4 = 0$$

$$\vdots$$

Observación: Para cualquier $t \in T$ se denota $P(X(t) = i)$, $P_t = i$ o $P(X_t = i)$ como la probabilidad que en el tiempo t el ensayo está en el estado i , es decir $P(\omega \in \Omega, X_t(\omega) = i)$.

Bajo otro ángulo podemos notar que un proceso estocástico es una función de dos variables

$$X : T \times \Omega \rightarrow S$$

donde cada tiempo (t, ω) es asociado a el valor o estado $X(t, \omega)$.

Además para cada $t \in T$, el mapeo $X_t, X_t : \Omega \rightarrow S$ es una variable aleatoria. Por otro lado, para cada ω en Ω fijo arbitrario, la función $X(\cdot, \omega)$ es llamada una trayectoria.

En el presente trabajo nuestro objetivo será analizar los procesos estocásticos bajo espacios discretos que son representados como:

$$(X_0 = k_0, \dots, X_n = k_n)$$

La principal preocupación de los estudios realizados en casos discretos es calcular la probabilidad de ocupación de cada estado a partir de la probabilidad particular de cambio de estado. ¿Con qué probabilidad se estará en el estado k_n en el instante n dado que en el instante $n - 1$ el proceso se encontraba en el estado k_{n-1} ? Esta probabilidad se llama probabilidad de cambio de estado o de transición y se denota

$$P(X_n = k_n | X_{n-1} = k_{n-1})$$

Otra forma de denotarlo es $P(X_n = k_n | X_{n-1} := k_{n-1}) = P_{ij}(n - 1, n)$

Ejemplo 2.1.2. Del proceso estocástico expuesto en el ejemplo (2.1.1),

$P_{0,1}(n - 1, n) = P(X_n = 1 | X_{n-1} = 0)$ denota la probabilidad de que en el tiempo n la máquina esté 'en operación', dado que previamente en el tiempo $n - 1$ se encontraría 'fuera de funcionamiento'.

$P_{1,0}(n - 1, n) = P(X_{n-1} = 0 | X_n = 1)$ denota la probabilidad de que en el tiempo n la máquina se encuentre 'fuera de operación', dado que previamente en el tiempo $n - 1$ estaba si lo estaba.

$P_{0,0}(n - 1, n) = P(X_{n-1} = 0 | X_n = 0)$ denota la probabilidad de que en el tiempo n la máquina esté 'fuera de funcionamiento', dado que previamente en el tiempo $n - 1$ también se encontraba 'fuera de funcionamiento'.

Una propiedad interesante que se presentan en algunas cadenas, es que los valores de sus probabilidades de transición no dependan del instante en que se encuentran, es decir, del valor de n , si no que se enfocarán en el tiempo que transcurra desde el valor anterior. Esto es

$$P_{ij}(0, n) = P_{ij}(k, k + n), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

.

A este tipo de transiciones se le conoce como estacionarias y se denotan por simplicidad $P_{i,j}(n)$, en lugar de $P_{i,j}(k, k + n)$ para cualquier $k \in T$, de esta manera se resalta que el tiempo transcurrido es n .

Observación: Sea $P_{i,j}(m, n)$ una probabilidad de transición estacionaria arbitraria. Por definición tenemos que $P_{i,j}(m, n) = P_{i,j}(n - m)$

Definición 2.1.2. Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso estocástico con valores en el conjunto de estados $S = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ (S puede ser finito o numerable). Decimos que $\{X_t\}_{t \in T}$ es una cadena de Markov si cumple la siguiente propiedad conocida como la condición de Markov

$$P(X_{n+1} = k_{n+1} | X_0 = k_0, \dots, X_n = k_n) = P(X_{n+1} = k_{n+1} | X_n = k_n) \quad (2.1)$$

Esto significa que la probabilidad de que el suceso k_{n+1} ocurra en el tiempo $n+1$ (futuro) solo dependerá de la ocurrencia del evento k_n en el tiempo n (presente), mientras que la información de lo que ocurrió en los tiempos $0, 1, 2, \dots, n - 1$ (pasado) es irrelevante.

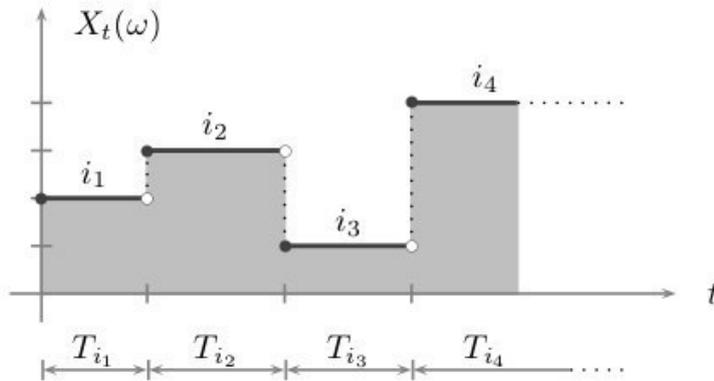


Figura 2.2: Proceso estocástico a tiempo continuo

Teorema 2.1.1. La condición de Markov (2.1) es equivalente a poder calcular la distribución conjunta de las variables $\{X_k\}_{k=1}^n$ de la siguiente forma:

$$P(X_0 = k_0, \dots, X_{n+1} = k_{n+1}) = P(X_0 = k_0)P(X_1 = k_1 | X_0 = k_0) \cdots P(X_{n+1} = k_{n+1} | X_n = k_n) \quad (2.2)$$

De manera más general una cadena de Markov puede iniciar su evolución en un estado i arbitrario. Un conjunto de números reales $p_0, p_1, p_2, \dots > 0$ cuya suma converge a uno se considera una distribución inicial si p_i corresponde a la probabilidad de que la cadena empiece en el estado i , es decir $P(X_0 = i)$

Observación: En las cadenas de Markov en tiempo discreto, utilizamos como índice un tiempo discreto $n = 0, 1, 2, \dots$ y se deducían numerosas propiedades. Las nociones de cadenas de Markov se puede extender a un tiempo continuo $t \geq 0$.

Sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico a tiempo continuo que inicia en un estado arbitrario i_1 . Supongamos que el suceso del experimento en cuestión permanece en el mismo estado un tiempo T_{i_1} , pero luego cambia para tomar el valor de un nuevo estado i_2 distinto del anterior y permanece en ese nuevo estado un tiempo T_{i_2} hasta cambiar nuevamente de estado y así sucesivamente. Esta secuencia se muestra gráficamente en la figura 2.2. Los tiempos de estancia, denotados T_{i_j} , son aquellos periodos en los que el proceso se mantiene constante antes de cambiar de estados. Para determinar el momento en el tiempo exacto transcurrido hasta que ocurra el estado i_3 es denotado por W_n y $W_n = T_{i_1} + \dots + T_{i_n}$ $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto el proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ puede ser descrito como:

$$X_t = \begin{cases} i_1, & \text{Si } 0 \leq t < W_1 \\ i_2, & \text{Si } 0 \leq t < W_2 \\ i_3, & \text{Si } 0 \leq t < W_3 \\ \vdots & \end{cases}$$

Definición 2.1.3. Sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso estocástico sobre el conjunto de estados S , es una cadena de Markov de tiempo continuo si S es numerable y para cualquier $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ se tiene

$$P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_1} = i_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}}) = P(X_{t_n} = i_n \mid X_{t_{n-1}} = i_{t_{n-1}})$$

Note el desconocimiento previo a la época t_n de toda la historia del proceso, solo es necesario de la situación en determinado conjunto finito de tiempos $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}$.

Si las transiciones son estacionarias en el tiempo (es decir que para cada $s \leq 0$ y $t \leq 0$, la probabilidad $P(X_{t+s} = j \mid X_s = i)$ es la misma que $P(X_t = j \mid X_0 = i)$), esta probabilidad se denota mediante la expresión $P_{ij}(t)$, para i y j enteros no negativos.

Observación: En particular para $t = 0$, tanto para el caso continuo como discreto, se define la probabilidad de transición $P_{ij}(0)$ como la función delta de Kronecker, es decir,

$$P_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si } i = j \\ 0, & \text{Si } i \neq j \end{cases}$$

Esto nos da a entender que, cuando el tiempo aún no transcurre (se encuentra en la etapa inicial), la probabilidad de que ocurra un cambio es nula, mientras que la probabilidad de que permanezca en el mismo estado (que no cambie) es absoluta, es decir 1.

La matriz que se obtiene cuando los índices i y j varían, por ejemplo, sobre el conjunto de estados $t = \{1, 2, \dots, n\}$ es llamada como matriz de probabilidades de transición de paso t , $t \geq 0$.

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & \cdots & p_{0n}(t) \\ p_{10}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n0}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.1.3. En Perú existen tres servicios de telefonía: Movistar, Claro y Entel (estados). Supongamos que la población solo utiliza una de las tres entidades. En el registro del mercado actual se tiene liderando a Movistar con 0,4, Claro cuenta con 0,25 y Entel con 0,35 (estado inicial). Un usuario de Movistar tiene una probabilidad de permanecer en su servicio de 0,60, una probabilidad de cambiar a Claro de 0,2 y la probabilidad de migrar a Entel de 0,2.

Por otro lado, si el usuario es cliente de Claro tiene la posibilidad de mantenerse en Claro un 50%, 0,3 de que cambie a Movistar y que se pase a Entel de 0,2.

Y si el usuario es cliente de Entel la probabilidad que permanezca es de 0,4, de que se cambie a Movistar de 0,3 y a Claro de 0,3.

Nuestro proceso estocástico estaría dado por $\{X_t\}_{t \geq 0}$ donde para dado tiempo $t \geq 0$, $X_t(\text{Movistar}) = 0$, $X_t(\text{Claro}) = 1$, $X_t(\text{Entel}) = 2$, teniendo estos datos previos

tenemos que la matriz de transición es.

$$P(1) = \begin{pmatrix} P_{00}(1) & P_{01}(1) & P_{02}(1) \\ P_{10}(1) & P_{11}(1) & P_{12}(1) \\ P_{20}(1) & P_{21}(1) & P_{22}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}$$

La suma de las probabilidades de cada estado (en este caso el operador telefónico) deben ser iguales a 1. Nuestro estado inicial en este caso sería

$$P(X_0 = 0) = 0,4, P(X_0 = 1) = 0,25, P(X_0 = 2) = 0,35$$

Para descubrir el valor de la probabilidad de una persona usando Movistar en la época 0 y luego empiece a usar Claro en la época 1.

$$P(X_1 = 1, X_0 = 0) = P(X_0 = 0)P_{01}(1) = 0,40 \cdot 0,20 = 0,08$$

Para descubrir el valor de la probabilidad de que una persona use Entel en la época 0 y luego empiece a usar Movistar en la época 1 está dado por

$$P(X_1 = 0, X_0 = 2) = P(X_0 = 2)P_{20}(1) = 0,35 \cdot 0,3 = 0,105$$

y si suponemos que nuestro proceso estocástico cumple la condición de Markov (2.1) de pérdida de memoria, (no nos importa qué operador usó mucho antes, solo nos interesa el operador usado previamente antes de la transición) entonces para calcular, por ejemplo la probabilidad de que una persona use Movistar en la época 0, luego use Claro en la época 1 y finalmente Entel en la época 2 usamos la condición equivalente (2.2).

$$P(X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 0) = P(X_0 = 0)P_{01}(1)P_{12}(1) = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,016$$

De esta forma encontramos que la probabilidad de que una persona elija Movistar y luego se cambie de operador a Movistar y finalmente acabe usando Entel es 0,016.

2.2. Proceso de Poisson

En la mayoría de casos donde se analiza situaciones que implican el azar se necesitan obtener resultados tales como el contar la cantidad de ocurrencias en determinado espacio de tiempo. En esta sección describiremos a uno de los procesos estocásticos más importantes para el modelamiento que queremos realizar: El proceso de Poisson.

Para tener una visión más interesante, este proceso será definido de formas equivalentes, donde cada una mantiene una gran riqueza matemática de por medio. Además se estudiarán sus propiedades, generalizaciones y algunas de sus aplicaciones.

2.2.1. Definición constructiva

Supongamos un experimento donde un mismo evento (la recepción de una llamada telefónica, un cliente que llega a solicitar algún servicio o cuando alguna máquina se malogra, entre otros.) se repite constantemente a lo largo del tiempo.

Definición 2.2.1. (Primera definición) Sea T_1, T_2, \dots, T_n una sucesión de variables aleatorias independientes cada una con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t\}_{t \geq 0}$ definido como

$$X_t = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} : T_1 + T_2 + \dots + T_n \leq t\} \quad (2.3)$$

es llamado proceso de Poisson de parámetro λ homogéneo. Además el tiempo inicial debe ser cero ($t = 0$) y para ello se define $\text{máx} \phi = 0$, donde ϕ es el conjunto vacío. De forma intuitiva, X_t descrito en 2.3 equivale a contar el número de eventos ocurridos durante el tiempo t . Es decir.

$$X_t = \text{'Número de ocurrencias al tiempo } t \text{'}$$

A los tiempos que transcurren entre un salto del proceso y el siguiente salto. T_1, T_2, \dots son llamados tiempos de estancia.

Proposición 2.2.1. Dado $t \geq 0$, la variable aleatoria X_t tiene distribución Poisson con parámetro λt .

Corolario 2.2.1. Sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Poisson, entonces para cada $t \geq 0$,

$$E(X_t) = \lambda t,$$

en particular,

$$E(X_1) = \lambda$$

Esto nos muestra que la variable λ se interpreta como la cantidad media o esperanza de que en un intervalo exista algún cambio .

Una de las características de la distribución exponencial en un conjunto de distribuciones absolutamente continuas es la de tener la propiedad de pérdida de memoria, para un valor fijo de $s \geq 0$, esto quiere decir que a partir de un tiempo $s > 0$ el tiempo en que se encuentre el suceso no es relevante, si no, lo que importa es el tiempo que transcurre desde el evento anterior hasta el presente. Descrito formalmente tenemos que si T tiene distribución exponencial de parámetro λ , entonces para cualesquiera tiempos $s, t \geq s$ se cumple la igualdad

$$P(T > t + s | T > s) = P(T > t).$$

En otras palabras, condicionada al evento $(T > s)$, la variable $(T - s)$ sigue teniendo distribución exponencial con parámetro λ .

Proposición 2.2.2. *El proceso de Poisson $\{X_t\}_{t \geq 0}$ cumple que*

- a) *Es un proceso de Markov.*
- b) *Tiene incrementos independientes y estacionarios.*
- c) *Si $s, t \geq 0$ y $0 \leq i \leq j \in \mathbb{Z}$, las probabilidades de transición son*

$$P(X_{t+s} = j | X_s = i) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

- d) *Para $0 \leq s \leq t$, y para $n = 0, 1, \dots$*

$$P(X_t - X_s = n) = P(X_{t-s})$$

Uno de los beneficios de tener definiciones alternas es que en el caso de alguna situación que se requiera modelar se puede usar cualquiera de estas para probar que un proceso en particular es de Poisson.

2.2.2. Definición infinitesimal

Sea $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ un conjunto de estados.

Se denota $P_n(t)$ como la probabilidad de que en el tiempo t sucedan n ocurrencias nuevas.

Observación: Haremos uso del término "época" para denotar puntos en el eje de tiempo y la palabra "tiempo" se referirá a duraciones (o longitudes de los intervalos entre las épocas).

Para deducir esto, primero se divide un intervalo de tiempo de longitud unitaria en N subintervalos de longitud $h = N^{-1}$. La probabilidad de que en algún

subintervalo de longitud de tiempo h no tenga lugar alguna ocurrencia es denotada por $P_0(h)$. Esto puede ser el caso de que en un tiempo t el proceso se encuentre en un estado n y al cabo de h de tiempo, el proceso siga en ese estado, sin producirse ningún cambio. Esto implica que la probabilidad de que ocurra al menos un cambio en el intervalo $[t, t + h)$ es de $1 - P_0(h)$, y de esta manera el número esperado de subintervalos en las que suceda al menos una ocurrencia será $N \cdot (1 - P_0(h)) = h^{-1}(1 - P_0(h))$.

Si, por ejemplo, se divide el intervalo unitario en $N = 10$ subintervalos de longitud $h = 0,1$ cada uno, representado en la figura (2.3). Los puntos sobre la recta representan los diversos sucesos S_i , $i = 1, 2, \dots, 10$ que se puedan presentar en ese intervalo unitario de tiempo.

Como se puede observar, hay subintervalos que albergan más de un suceso.

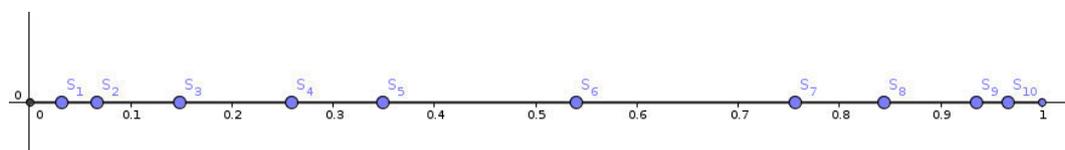


Figura 2.3: Intervalo unitario dividido en 10 subintervalos.

Si se divide el intervalo en $N = 20$ subintervalos de longitud $h = 0,05$, se aprecia que cada uno contiene un suceso o no contiene ninguno (Ver figura 2.4)

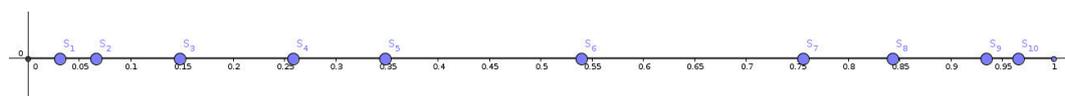


Figura 2.4: Intervalo unitario dividido en 20 subintervalos.

La probabilidad de que no suceda un cambio en todo el intervalo unitario gracias a la probabilidad clásica definida será $P_0(1) = \frac{10}{20} = 0,5$ entonces $\frac{1 - P_0(h)}{h} = \frac{1 - 0,5}{0,05} = 10$ que justo coincide con el total de sucesos.

Intuitivamente, cuando los subintervalos se vuelven suficientemente pequeños ($h \rightarrow 0$) de tal forma que cada uno contenga a lo mucho un suceso, este número converge al número esperado de saltos dentro del intervalo unitario que es número finito λ , la cual se interpreta como la media, esperanza o número medio de ocurrencias en el intervalo de tiempo unitario. Esto es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P_0(h)}{h} = \lambda$$

La cual también puede ser escrita como $o(h) + 1 - P_0(h) = \lambda h$, donde $o(h)$ denota una cantidad que cumple que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$. Como consecuencia se tiene

$$P_0(h) = 1 - \lambda h + o(h) \quad (2.4)$$

Cuando el intervalo de tiempo es extremadamente pequeño la probabilidad de que suceda más de una ocurrencia, es nula, pues cada subintervalo contiene a lo mucho un suceso. Esto es,

$$P_n(h) = o(h), \quad n \geq 2 \quad (2.5)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - P_0(h) - P_1(h)}{h} = 0$$

o lo que es lo mismo $1 - P_0(h) - P_1(h) + o(h) = 0$, de donde, se obtiene que

$$P_1(h) = \lambda h + o(h) \quad (2.6)$$

Definición 2.2.2. (*Definición infinitesimal*)

El proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ descrito con las características (2.4), (2.5), (2.6), con incrementos independientes y estacionarios, y $X_0 = 0$ es llamado un proceso de Poisson.

Esta forma de ver un proceso de Poisson hace uso de las probabilidades infinitesimales y esto da mayor amplitud de interpretación de lo que sucede en $[t, t+h)$ en un periodo tan pequeño (infinitesimal).

Proposición 2.2.3. El proceso de Poisson $\{X_t\}_{t \geq 0}$ descrito con la definición infinitesimal tiene distribución de Poisson con parámetro λt . Esto es,

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, analicemos la probabilidad para un tiempo $t+h$, donde el sistema se encuentre en estado n ($X_{t+h} = n$). Esto puede ocurrir solo de tres maneras independientes.

- SITUACIÓN A: En el tiempo t el sistema estaba en el estado n y no ocurre ningún cambio. $A = (X_t = n, X_{t+h} = n)$, entonces la probabilidad que suceda esta situación estará dada por

$$P(A) = P(X_t = n, X_{t+h} = n) = P(X_t = n)P(X_{t+h} = n | X_t = n) = P_n(t)P_0(h)$$

Por la condición (2.4) tenemos que:

$$P(A) = P_n(t)(1 - \lambda h) + o(h)$$

- SITUACIÓN B: En la época t el sistema se encontraba en el estado $n - 1$ y ocurre tan solo un cambio. Se tiene que $B = (X_{t+h} = n, X_t = n - 1)$, entonces la probabilidad que suceda eso estará dada por

$$P(B) = P(X_{t+h} = n, X_t = n-1) = P(X_t = n-1)P(X_{t+h} = n|X_t = n-1)P_{n-1}(t)P_1(h)$$

Por la condición (2.6) tenemos que:

$$P(B) = P_n(t)(\lambda h) + o(h)$$

- SITUACIÓN C: En la época t el sistema estaba en el estado $n - 1$ y ocurrió más de un cambio.

$$P(C) = P(X_{t+h} = n, X_t = n - k) = P_n(t)P_k(h), \quad k \geq 2$$

Por la condición (2.5) tenemos que

$$P(C) = o(h)$$

Por la definición de las situaciones A , B y C forman una partición de $(X_{t+h} = n)$ pues su intersección es nula y la unión de ellos nos da el espacio muestral completo $(X_{t+h} = n)$. Como consecuencia

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ &= (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h) \\ \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} &= -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \end{aligned}$$

Finalmente, cuando $h \rightarrow 0$

$$\begin{cases} P'_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t), & n \geq 1 \\ P_n(0) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Cabe resaltar que cuando $t = 0$ nunca ocurre algún cambio pues no ha transcurrido ningún tiempo aún. Por ello $P_0(0) = 1$ y $P_n(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Ahora, para el caso particular de $n = 0$.

$$P_0(t+h) = P_0(t)P_0(h) = P_0(t)(1 - \lambda h) + o(h)$$

entonces

$$\begin{cases} P'_0(t) = -\lambda P_0(t) \\ P_0(0) = 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Resolviendo la ecuación diferencial 2.8 se tiene $P_0(t) = e^{-\lambda t}$.

Como P_n está definida recursivamente para $n \in \mathbb{N}$ usando inducción, para $n = 1$ tenemos

$$\begin{cases} P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t} \\ P_1(0) = 0 \end{cases}$$

Usando el método de factor integrante se tiene que $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$

Nuestra hipótesis inductiva es $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ Entonces

$$\begin{cases} P_{n+1}'(t) = -\lambda P_{n+1}(t) + \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\ P_{n+1}(0) = 0 \end{cases}$$

Usando nuevamente el método de factor integrante se tiene que

$$P_{n+1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda t}$$

Lo cual prueba el resultado. □

Con esta notación, las probabilidades encontradas se las conocen como postulados de Poisson.

Estas condiciones son débiles puesto que da entender que para cada suceso, la media o esperanza λ del número de ocurrencia se mantiene constante durante todo el proceso sin importar en qué estado se encontraba previamente.

Esto es, para dado $n \in \mathbb{N}$, $P_{i-1,i}(h) = P_{j-i,j}(h) = \lambda h + o(h)$ para cualquier $j, i = 0, 1, 2, \dots$ lo cual no siempre sucede en la vida real.

He ahí la importancia de introducir una noción más generalizada.

2.3. Proceso puro de nacimiento

El caso más simple del Proceso de Poisson se obtiene al permitir que las probabilidades de transición dependan del estado actual del sistema. Para cada estado n existirá una media λ_n que cumpla con el proceso de Poisson descrito anteriormente.

Definición 2.3.1. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso puro de nacimiento si cumple los siguientes postulados.*

1. *Las transiciones directas de un estado j solo son posibles a su estado siguiente $j + 1$.*
2. *Si en la época t el sistema se encuentra en el estado n , la probabilidad de alguna ocurrencia en un intervalo corto entre t y $t + h$ es dado por $\lambda_n h + o(h)$.*
3. *La probabilidad de que ocurra más de un suceso dentro de este intervalo es $o(h)$.*

Este proceso solo permite una transición al siguiente estado, más no a un estado anterior es lo que da origen al "nacimiento" de una ocurrencia nueva. Nuevamente, $P_n(t)$ será la probabilidad de que en el tiempo t ocurran n ocurrencias nuevas. Los postulados y las ecuaciones diferenciales son deducidos de la misma forma que en el proceso de Poisson, pero esta vez reemplazando el valor fijo λ por λ_n

$$P'_0(t) = -\lambda_0 P_0(t) \quad (2.9)$$

$$P'_n(t) = -\lambda_n P_n(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t), \quad n \geq 1 \quad (2.10)$$

En el proceso de Poisson era común suponer siempre que $X_0 = 0$. Es decir, se suponía que en la época 0 el sistema siempre se encontraba en el estado 0. Ahora supongamos que el sistema inicia en un estado arbitrario i . Esto implica que

$$P_i(0) = 1, \quad P_n(0) = 0, \quad \text{para } n \neq i \quad (2.11)$$

Gracias a estas condiciones iniciales, nuestro sistema tiene solución única para cada $n \in \mathbb{N}$ y en particular $P_0(t) = P_1(t) = \dots = P_{i-1}(t) = 0$

Ejemplo 2.3.1. *Se considera una población cuyos miembros pueden dar origen (mediante desdoblamientos u otros procesos) a nuevos miembros, pero que no pueden morir. Supóngase que durante cualquier intervalo de tiempo de longitud h , cada miembro tiene probabilidad $\lambda h + o(h)$ de procrear un nuevo miembro. Siguiendo nuestra notación, esto sería $P_1(h) = \lambda h + o(h)$. La constante λ determina la tasa de crecimiento de la población. Si no hay interacción entre los miembros y si se sabe que en la época*

t el número de la población actual es n , entonces la probabilidad de que haya existido un aumento en el intervalo $[t, t + h)$ es

$$P_{nn+1}(h) = P(X_{t+h} = n + 1 | X_t = n)$$

Si cada poblador de los n que hay actualmente, tiene la misma probabilidad $P_1(h)$ de dar origen a un nuevo ser en el tiempo h , entonces

$$P_{nn+1}(h) = \sum_{i=1}^n P_i(h) = n\lambda h + o(h)$$

La probabilidad $P_n(t)$ de que la población ascienda exactamente hasta n elementos satisface, por lo tanto, (2.10) con $\lambda_n = n\lambda$, es decir

$$P'_n(t) = -n\lambda P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t), \quad n \geq 1, P'_0(0) = 0$$

Denótese i el tamaño inicial de la población. Las condiciones iniciales (2.11) se aplican, y al resolver el sistema recursivo de ecuaciones diferenciales se verifica para $n \geq i > 0$ que

$$P_n(t) = \binom{n-1}{n-i} e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{n-i}$$

y, desde luego, $P_n(t) = 0$ para $n < i$ y toda t .

La suposición de que cada especie tiene la misma probabilidad de dar lugar a una nueva especie hace caso omiso de las diferencias en los tamaños de las especies. Puesto que también se desechó la posibilidad de extinción, solo puede esperarse una aproximación burda.

2.4. Proceso de nacimiento y muerte

El proceso puro de nacimiento no sirve como modelo realista de los cambios en poblaciones (como la de las bacterias) cuyos miembros pueden morir o desaparecer. Para este caso se requiere un proceso estocástico más personalizado que permite modelar situaciones que permitan transiciones desde un estado n al estado siguiente $n + 1$ y también al anterior $n - 1$. En estos caso se utiliza el proceso de nacimiento y muerte.

Definición 2.4.1. *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de nacimiento y muerte si cumple los siguientes postulados.*

1. *Las transiciones directas de un estado j son posibles a su estado siguiente $j + 1$ y a su anterior $j - 1$.*
2. *Si en la época t el sistema se encuentra en el estado n , la probabilidad de que ocurra la transacción de n a $n + 1$ en un intervalo corto de tiempo $[t, t + h)$ es dado por $\lambda_n h + o(h)$.*
3. *Si en la época t el sistema se encuentra en el estado n , la probabilidad de que ocurra la transacción de n a $n - 1$ en un intervalo corto de tiempo $[t, t + h)$ es dado por $\mu_n h + o(h)$.*
4. *La probabilidad de que ocurra más de un suceso dentro de este intervalo es $o(h)$.*

Nuevamente, $P_n(t)$ será la probabilidad de que en el tiempo t ocurran n ocurrencias nuevas y $P_{i,j}(t)$ la probabilidad de cambio del estado i al estado j en un tiempo t . Usando esta notación se tiene que

$$P_{n,n+1}(h) = \lambda_n h + o(h) \quad (2.12)$$

$$P_{n,n-1}(h) = \mu_n h + o(h) \quad (2.13)$$

Esto implica que

$$P_1(h) = \lambda_n h + \mu_n h + o(h),$$

entonces

$$P_0(h) = 1 - (\lambda_n + \mu_n) h + o(h) \quad (2.14)$$

$$P_n(h) = o(h), \quad n \geq 2 \quad (2.15)$$

Dado $n \in \mathbb{N}$, analicemos la probabilidad para un tiempo $t + h$, donde el sistema se encuentre en estado n , esto es $(X_{t+h} = n)$. Esto puede ocurrir solo de tres maneras independientes.

- SITUACIÓN A: En el tiempo t el sistema estaba en el estado n y no ocurre ningún cambio. $A = (X_t = n, X_{t+h} = n)$, entonces la probabilidad que suceda esta situación estará dada por

$$P(A) = P(X_t = n, X_{t+h} = n) = P(X_t = n)P(X_{t+h} = n | X_t = n) = P_n(t)P_0(h)$$

Por la condición (2.14) tenemos que:

$$P(A) = P_n(t)(1 - \lambda_n - \mu_n h) + o(h)$$

- SITUACIÓN B: En la época t el sistema está en el estado $n - 1$ y sucede una ocurrencia. Esto es $B = (X_{t+h} = n, X_t = n - 1)$, la probabilidad de que suceda eso estará dada por

$$P(B) = P(X_{t+h} = n, X_t = n - 1) = P_{n-1}(t)P_{n-1,n}(h).$$

Por la condición (2.12) tenemos que:

$$P(B) = \lambda_{n-1}hP_{n-1}(t) + o(h)$$

- SITUACIÓN C: En la época t el sistema está en el estado $n + 1$ y se cancela una ocurrencia. Esto es $C = (X_{t+h} = n, X_t = n + 1)$, la probabilidad de que suceda eso estará dada por

$$P(C) = P(X_{t+h} = n, X_t = n + 1) = P_{n+1}(t)P_{n+1,n}(h).$$

Por la condición (2.13) tenemos que:

$$P(C) = \mu_{n+1}hP_{n+1}(t) + o(h)$$

- SITUACIÓN D: En la época t el sistema estaba en el estado $n - k$ o $n + k$ y ocurrió k cambios. Por la condición (2.13)

$$P(D) = P_n(t)P_k(h) = o(h), \quad k \geq 2$$

Por la definición de las situaciones A , B , C y D , estas forman una partición de $(X_{t+h} = n)$ y por ello,

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1 - \lambda_n - \mu_n h) + \lambda_{n-1}hP_{n-1}(t) + \mu_{n+1}hP_{n+1}(t) + o(h)$$

Luego,

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

Cuando $h \rightarrow 0$.

$$P'_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n)P_n(t) + \lambda_{n-1}P_{n-1}(t) + \mu_{n+1}P_{n+1}(t) \quad (2.16)$$

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \quad (2.17)$$

Para modelar la dinámica de una población no siempre se conoce el estado en el cual se encontrará el proceso en su tiempo inicial, sin embargo se puede llegar a conocer las probabilidades de que al tiempo 0 hayan ocurrido n sucesos recolectando datos de la situación que se quiera modelar. Esto vendría ser la distribución inicial $\{p_n\}$ tal que $p_n \in [0, 1]$ y $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

$$P_n(0) = p_n \quad (2.18)$$

Gracias a estos valores iniciales tenemos soluciones únicas de 2.16 y 2.17, y este sistema será el que represente nuestro problema.

Ejemplo 2.4.1. *Veamos el caso de un proceso de división celular en un ser vivo donde solo se tiene dos posibles posibilidades: Que la célula haga mitosis (se divida en dos células) o que ocurra una muerte celular. Durante cualquier intervalo corto de tiempo de longitud h , la probabilidad de que el elemento viviente se divide en dos es $\lambda h + o(h)$, mientras que la probabilidad correspondiente de morir es $\mu h + o(h)$. Aquí λ y μ son dos constantes características de la población(en este caso las células del ser vivo en cuestión). Si no hay interacción entre los elementos, estaremos en el caso de un proceso de nacimiento y muerte con $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = \mu$ Las ecuaciones diferenciales básicas toman la forma:*

$$P_0'(t) = \mu P_1(t)$$

$$P_n'(t) = -(\lambda + \mu)nP_n(t) + \lambda(n-1)P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1}(t)$$

En el proceso puro de nacimiento, el sistema de ecuaciones diferenciales era infinito pero tenía la forma de relaciones de recurrencia; $P_n(t)$ podía calcularse a partir de $P_{n-1}(t)$. Nuestro nuevo sistema no tiene esta forma y por lo tanto no se puede obtener una resolución usando inducción matemática y por ello las $P_n(t)$ deben calcularse todas simultáneamente. Para ello será necesario describir un método para encontrar la solución de este problema y uno de ellos es resolviendo un problema de valor inicial de una ecuación diferencial parcial semilineal de primer orden.

2.5. Teorema de Daniell-Kolmogorov

El teorema de extensión de Daniell-Kolmogorov es uno de los primeros teoremas profundos de la teoría de procesos estocásticos. Proporciona resultados de existencia para buenas medidas de probabilidad en espacios de función. Revisamos la construcción general de un proceso estocástico. Para fines de modelización nos gustaría considerar las familias de variable aleatoria $\{X_t\}_{t \in I}$ indexada por un conjunto general I . Cuando I es discreto y finito, la familia vendría a ser un vector aleatorio con valores en el espacio producto medible (E, \mathcal{E}^I) donde (E, \mathcal{E}) es el espacio de medida donde se define cada variable aleatoria X_t , es decir, $X_t : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ para todo $t \in I$. Tomando $\pi_t : (E^I, \mathcal{E}^I) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ como la función proyección en el factor t , se puede definir simplemente $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E^I, \mathcal{E}^I)$ con $\pi_t X = X_t$. De esta forma hemos reemplazado la familia de variables aleatorias que cada uno toma valores en E con una sola variable aleatoria que X toma valores en (E^I, \mathcal{E}^I) donde \mathcal{E}^I es el σ -álgebra producto. \mathcal{E}^I es el sigma álgebra generado por conjuntos de la forma $\prod_{i \in I} A_i \subset E^I$, donde $A_i \in \mathcal{E}, \forall i \in I$.

Si I no es finito o incluso no es contable este procedimiento tiene que ser declarado. Buscamos una definición para \mathcal{E}^I que sostenga que para todo $t \in I$, la función proyección $\pi_t : (E^I, \mathcal{E}^I) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ permanezca medible.

La colección de conjuntos de la forma

$$\pi_J^{-1}(A), \quad J \subseteq I, J \text{ finito}, A \in \mathcal{E}^J,$$

donde $\pi_J : E^I \rightarrow E^J$ es la proyección en las coordenadas en J , constituye un álgebra y son llamados conjuntos cilindros.

La familia de conjuntos cilindros de la forma

$$\pi_J^{-1}\left(\prod_{t \in J} A_t\right), \quad J \subseteq I, J \text{ finito}, A_t \in \mathcal{E}, \text{ para todo } t \in J,$$

forman un π -sistema dentro del álgebra de los conjuntos cilindros. Consideramos \mathcal{E}^I como el σ -álgebra generado por la familia de conjuntos cilindros. Esta definición está concebido para lograr la siguiente equivalencia.

Lema 2.5.1. *Una función $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E^I, \mathcal{E}^I)$ es medible si y solo si $\pi_t X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ para todo $t \in I$*

Dado un proceso $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E^I, \mathcal{E}^I)$ llamamos a la medida μX en (E^I, \mathcal{E}^I) dada por $\mu X(A) = P(X \in A)$ para todo $A \in \mathcal{E}^I$. Además, como ya se vio, en el espacio (E^I, \mathcal{E}^I) siempre podemos realizar el proceso estocástico $(X_t : \Omega \rightarrow E) t \in I$ tomando $X_t(\omega) = \omega_t$ para que $X(\omega) = \omega$. Esto se llama el proceso canónico.

El siguiente teorema, debido a Kolmogorov (e independientemente a Daniell) establece la existencia de una probabilidad en (E^I, \mathcal{E}^I) gracias a la existencia de una familia de probabilidades que cumplen ciertas condiciones.

Definición 2.5.1. Decimos que una familia de probabilidades $\{\mu_J\}_{J \subset I}$, donde J es finito, es consistente si para cualquier $J' \subset J$ y con $\pi_{J,J'} : E^J \rightarrow E^{J'}$ la proyección canónica de E^J a $E^{J'}$, tenemos que

$$\mu_J \circ \pi_{J,J'}^{-1} = \mu_{J'}$$

Definición 2.5.2. Sea (X, \mathcal{F}) un espacio topológico y \mathcal{F} un σ -álgebra sobre X y μ la medida sobre el espacio medible (X, \mathcal{F}) . Un subconjunto medible A de X se dice que es normal interior si

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq A, F \text{ compacto y medible}\}$$

Una medida se llama regular de interior si cada conjunto medible es regular interior.

Teorema 2.5.1. Asumamos que $\{\mu_J\}_{J \subset I}$, donde J es finito es una familia de probabilidades que son regular de interior. Entonces existe una única medida μ en (E^I, \mathcal{E}^I) tal que $\mu \circ \pi_J^{-1} = \mu_J$, para todo $J \subset I$

Capítulo 3

Cocientes demográficos

Si solo tenemos el dato de que nacieron 1000 varones pero no tenemos la población total donde y cuando se registró la información, perdería su utilidad. Además, podemos llegar a pensar que a mayor cantidad de datos se obtiene una mayor precisión en nuestros informes, pero la realidad es muy ajeno a eso. Las cadenas de datos muy largas son de poca utilidad porque son prácticamente imposibles de entender o interpretar. Es importante entonces tener datos de calidad y saber interpretarlos. Por ello es necesario establecer ciertas métricas que nos permitan comprender los datos y que resuma la información para que sea de mayor entendimiento para todos.

3.1. Flujo y stock

Definición 3.1.1. *Una población es un conjunto renovable de individuos que cumplen determinada condición, sean humanos, animales o cosas y no son un conjunto estático, sino que están sometidas a un proceso continuo de cambio, por salidas y entradas de individuos en dicha población.*

En el análisis demográfico, los indicadores que se utilizan no son complejos ya que en su gran mayoría se trata de una relación entre dos magnitudes y se conoce como cociente. Este tipo de indicador es muy abundante en su uso y va a depender de la naturaleza de los datos que utilizamos. .

Para entender lo siguiente, es importante entender primero qué significa la diferencia entre flujo y stock.

Definición 3.1.2. *Stock es la magnitud de los datos o sucesos en un momento determinado en el tiempo.*

Se refieren a las existencias en un momento determinado y no en un intervalo de tiempo.

Los datos de stocks poblacionales pueden tener como fuente los censos, padrones, estimaciones de población o encuestas.

Un ejemplo de stock sería el número de personas vivas el 25 de Diciembre del 2019.

Definición 3.1.3. *Los flujos, por el contrario, son los números de los eventos o ocurrencias (como nacimientos o muertes) en un espacio-tiempo continuo.*

Los datos de transmisión se toman del registro"de eventos como las estadísticas vitales de nacimiento, muerte y matrimonio durante un periodo de tiempo.

Un ejemplo de flujo sería el número de nacidos vivos durante el año 2019.

3.2. Tipos de cocientes más relevantes

En demografía existen 4 cocientes principales que se distinguen entre ellos gracias a la información que componen el numerador y el denominador.

- Si tanto el numerador y denominador son del mismo tipo:

1. Proporción

Definición 3.2.1. *Se le conoce como proporción al valor que da como resultado dividir la cantidad de datos de un subconjunto sobre la magnitud del total. Ambos pueden ser flujos o stocks.*

Ejemplo 3.2.1. *Si la cantidad de mujeres de una población es 400 y el total de la población es de 1000 habitantes, la proporción sería $\frac{2}{5}$*

2. Razón

Definición 3.2.2. *La razón es el cociente de dos magnitudes que miden conjuntos o subconjuntos que no cuentan con elementos comunes.*

Ejemplo 3.2.2. *Con respecto a la población mostrada en 3.2.1, la cantidad de varones es 600, la llamada razón de masculinidad no es más que el cociente de la cantidad de varones sobre la de mujeres, es decir $\frac{3}{2}$*

- Si el denominador es un stock y el numerador es un flujo:

1. Tasa

Definición 3.2.3. *Cociente entre la cantidad de sucesos(flujos) durante un período de tiempo entre la población promedio que existe durante ese intervalo temporal.*

Ejemplo 3.2.3. *Si la cantidad de habitantes de una pequeña población durante el 2020 fue en promedio 500 personas y durante ese año fallecieron 25 La tasa de mortalidad es el número de personas que fallecieron (25 habitantes) entre la población promedio en el mismo período (500 habitantes). Es decir $\frac{1}{20} = 0,05$*

2. Probabilidad (desde el punto de vista demográfico)

Definición 3.2.4. *Es el valor que resulta al dividir la cantidad de sucesos de un evento experimentado por determinada cantidad de habitantes durante un intervalo temporal y la población inicial vulnerable a tal evento durante ese periodo.*

Ejemplo 3.2.4. *La probabilidad de morir antes de ser mayor de edad en Perú en la década los 70 se obtiene como el cociente de la cantidad de las defunciones de los menores de edad en esa época y la cantidad de personas vivas que acababan de obtener la mayoría de edad ese año.*

El análisis demográfico permiten mejorar la toma de decisiones y hacer pronósticos sobre determinadas cuestiones, por ejemplo, en torno a la salud, a determinadas acciones a tomar frente un catástrofe o a las políticas económicas.

Capítulo 4

Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales semilineales

Para poder explicar el movimiento de alguna partícula, la trayectoria de un cometa o la rotación y traslación del planeta Tierra, necesitamos obtener su posición a través del tiempo.

Conforme el tiempo transcurre, las coordenadas de posición irá cambiando también. Gracias a ello notamos la importancia de resolver el problemas donde las incógnitas sean funciones que expresan la dependencia de una variable con respecto a otra.

La investigación de muchos problemas científicos y físicos pueden reducirse a soluciones de ciertas ecuaciones que surgen después del análisis y modelado. He ahí la vital importancia de tener métodos que nos permitan obtener tales soluciones.

4.1. Soluciones generales y condiciones auxiliares

Definición 4.1.1. Una ecuación diferencial en derivadas parciales, puede describirse como una relación donde aparece una función incógnita μ junto con al menos una derivada parcial. Dado que en una ecuación diferencial parcial deben aparecer derivadas parciales, se sobreentiende que μ depende de al menos dos variables independientes. En general, es una relación de la forma :

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, u_{x_1}^{m_1}, \dots, u_{x_n}^{m_k}) = 0$$

Donde $n, m, k \in \mathbb{N}$ y $m_1 + \dots + m_k < +\infty$ y $u_{x_i}^m = \frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}$ la derivada parcial de orden m de u respecto a x_i .

Definición 4.1.2. Dada una ecuación diferencial parcial, se denomina solución clásica de una ecuación diferencial parcial a una función que satisface la ecuación y que posee todas las derivadas parciales (involucradas en la ecuación) continuas.

Observación: Se suele denotar u_x en lugar de $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ para simplificar la notación.

Dada una ecuación diferencial parcial $F(x, u, D_u^\alpha) = 0$ diremos que u es solución general de la ecuación diferencial parcial si contiene como casos particulares a cualquier otra solución de la ecuación diferencial parcial.

Ejemplo 4.1.1. Consideremos la ecuación diferencial parcial en dos variables.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$$

Entonces la solución general es $u(x, y) = f(y)$ para alguna función $f \in C^1(\mathbb{R})$. Si adicionamos condiciones adicionales a la ecuación tendremos una solución más precisa. Estas condiciones adicionales pueden provenir de las propiedades físicas, químicas, etc. del modelo que da origen la ecuación o a la naturaleza del dominio sobre el que queremos estudiar el problema.

Las ecuaciones diferenciales parciales que dependen de una variable temporal son llamadas ECUACIONES DE EVOLUCIÓN. Por ejemplo, la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

y las ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f$$

son ejemplos de ecuaciones de evolución.

Cuando imponemos una condición sobre la solución de una ecuación diferencial parcial para un valor de la variable temporal, esta condición se denomina CONDICIÓN INICIAL de la ecuación diferencial parcial.

4.2. Soluciones generales y condiciones auxiliares

Dada una ecuación diferencial parcial $F(x, u, D_u^\alpha) = 0$ diremos que u es solución general de la ecuación diferencial parcial si contiene como casos particulares a cualquier otra solución de la ecuación diferencial parcial.

Ejemplo 4.2.1. Consideremos la ecuación diferencial parcial en dos variables.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0$$

Entonces la solución general es $u(x, y) = f(y)$ para alguna función $f \in C^1(\mathbb{R})$

Si adicionamos condiciones adicionales a la ecuación tendremos una solución más precisa. Estas condiciones adicionales pueden provenir de las propiedades físicas, químicas, etc. del modelo que da origen a la ecuación o a la naturaleza del dominio sobre el que queremos estudiar el problema.

Cuando imponemos una condición sobre la solución de una ecuación diferencial parcial para un valor de la variable temporal, esta condición se denomina CONDICIÓN INICIAL de la ecuación diferencial parcial. Si la condición auxiliar para la ecuación diferencial parcial se impone sobre el borde del dominio (acotado), esta condición de frontera. Por ejemplo:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f, & (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\ u(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Significa que la temperatura es cero en el borde del dominio. Si una ecuación diferencial parcial posee condiciones iniciales y de frontera, diremos que posee condiciones mixtas. Por ejemplo:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f, & (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\ u(t, x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ u(0, x) = \psi(x) \end{cases}$$

es un problema mixto.

4.3. Curvas integrales de campos vectoriales

Definición 4.3.1. Se denominará dominio a un subconjunto Ω de \mathbb{R}^n que sea abierto y conexo. Denotaremos por $\partial\Omega$ a la frontera de Ω .

Una relación es llamada ecuación diferencial cuasilineal si tiene la forma

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (4.1)$$

donde se asume que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, a, b, c funciones reales de clase $C^1(\Omega)$. Una ecuación semilineal será un caso particular de 4.1 si tomamos $a(x, y, u) = a(x, y)$ y $b(x, y, u) = b(x, y)$

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u) \quad (4.2)$$

Sea $V : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $V(x, y, z) = (a(x, y), b(x, y), c(x, y))$ Se asumirá que

1. a, b, c no se anulan simultáneamente en algún punto de Ω
2. $a, b, c \in C^1(\Omega)$

Definición 4.3.2. Una curva $\gamma \subset \Omega$ es una curva integral del campo V si tiene como vector tangente a $V = V(x, y, z)$ en cada uno de sus puntos. Si γ es parametrizado por algún $s \in I$ $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ que tiene como vector tangente $V = V(x(s), y(s), z(s))$ para cada $s \in I$.

Explícitamente se cumple la relación

$$x'(s) = a(x(s), y(s), z(s)), y'(s) = b(x(s), y(s), z(s)), z'(s) = c(x(s), y(s), z(s)) \quad (4.3)$$

Una solución $(x(t), y(t), z(t))$ del sistema anterior, definida para s en algún intervalo I , puede ser considerado como una curva en Ω . Llamaremos a esta curva una curva solución de la sistema 4.3. Cada curva de solución del sistema es un curva integral del campo vectorial V .

4.4. Resolución de las ecuaciones diferenciales parciales semilineales

Como nos enfocaremos en la resolución de las ecuaciones diferenciales parciales semilineales, bastará tomar el campo vectorial en \mathbb{R}^2 . El campo vectorial en \mathbb{R}^2 asociado a la ecuación diferencial parcial 4.2 es dada por

$$V(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$$

por ello $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y$ es la derivada direccional de u a lo largo de V .

Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $I \subset \mathbb{R}$ una curva integral del campo V . Si se denota $v(s) = u(\gamma(s)) = u(x(s), y(s))u_x + b(x(s), y(s))u_y = c(x(s), y(s), u(s))$. Usando la regla de la cadena

$$v'(s) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(s), y(s))x'(s) + \frac{\partial u}{\partial y}(x(s), y(s))y'(s)$$

y reemplazando las expresiones 4.3 y 4.2 se tiene

$$v'(s) = a(x(s), y(s))u_x + b(x(s), y(s))u_y = c(x(s), y(s), u(s))$$

Es decir que la función $v(s)$ satisface una ecuación diferencial ordinaria a lo largo de la curva integral $\gamma(s)$. Ahora, si se quiere resolver la ecuación diferencial parcial 4.2 en el dominio Ω es necesario parametrizarlo por medio de un parámetro adicional $r \in \mathbb{R}$, donde $\{\gamma_r\}_r$ efectivamente es una partición del dominio Ω .

Cada curva integral cumple lo anterior expuesto, por ello si $\gamma_r = (x_r(s), y_r(s))$ y $v_r(s) = u(\gamma_r(s))$

$$\begin{aligned} x'_r(s) &= a(x_r(s), y_r(s)), & y'_r(s) &= b(x_r(s), y_r(s)) \\ v'_r(s) &= c(x_r(s), y_r(s), v_r(s)) \end{aligned}$$

Ahora si a la ecuación diferencial parcial 4.2 se le añade la condición inicial sobre una curva inicial Γ , la cual parametrizamos por $\Gamma(r) = (\Gamma_1(r), \Gamma_2(r))$ dada por

$$u(\Gamma(r)) = \phi(r) \tag{4.4}$$

donde ϕ es una función dada. El objetivo es que para todo $r \in \mathbb{R}$, las curvas integrales γ_r sean de tal forma que pasen a través de $\Gamma(r)$ cuando $s = 0$.

$$\gamma(0) = \Gamma(r)$$

y por lo tanto,

$$v_r(0) = u(\gamma_r(0)) = \phi(r)$$

De esta forma tenemos dos grupos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

- Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para las curvas integrales.

$$\begin{cases} x'_r(s) = a(x_r(s), y_r(s)), & x_r(0) = \Gamma_1(r) \\ y'_r(s) = b(x_r(s), y_r(s)), & y_r(0) = \Gamma_2(r) \end{cases} \tag{4.5}$$

- Una ecuación diferencial ordinaria para v_r

$$v_r'(s) = c(x_r(s), y_r(s), v_r(s)), \quad v_r(0) = \phi(r) \quad (4.6)$$

Para resolver nuestra ecuación diferencial parcial 4.2 con condición inicial 4.4, primero resolvemos el sistema 4.5, y luego la ecuación diferencial ordinaria 4.4. Así obtendremos una función $V_r(s)$ que dependerá de las variables r y s . Finalmente, aplicando los argumentos de la sección anterior, haciendo uso del teorema de la función inversa se debe obtener funciones reales R y S tal que $r = R(x, y)$ y $s = S(x, y)$. Finalmente obtendríamos la solución u tal que

$$u(x, y) = V_{R(x,y)}(S(x, y))$$

Ejemplo 4.4.1. Resolver

$$au_x + bu_y = 0$$

, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $u(0, y) = e^y$

En este caso, la curva inicial será $\Gamma(r) = (0, r)$ (el eje y) y la condición inicial será $\phi(r) = e^r$. Nuestro sistema de ecuación diferencial ordinarias es

$$\begin{cases} x_r'(s) = a, & x_r(0) = \Gamma_1(r) \\ y_r'(s) = b, & y_r(0) = \Gamma_2(r) \end{cases}$$

cuya solución está dada por $x_r(s) = as$, $y_r(s) = r + bs$ y nuestra ecuación diferencial ordinaria para $V_r(s)$ es

$$v_r'(s) = 0, \quad v_r(0) = e^r$$

cuya solución está dada por $v_r(s) = e^r s$. Del teorema de la función inversa se obtiene que se obtiene $s = x/a$ y $r = y - b\frac{x}{a}$.

Por tanto nuestra solución sería $u(x, y) = e^y e^{-\frac{b}{a}x}$

Capítulo 5

Análisis y modelamiento matemático de la enfermedad esquistosomiasis.

La esquistosomiasis humana es una infección parasitaria que se estima que afecta a más de doscientos millones de personas en todo el mundo, uno de los mayores problemas de salud pública de los trópicos y subtrópicos. Es curioso notar que la dinámica de transmisión de esta infección se puede describir a través de las matemáticas, para ser más precisos, de dos procesos estocásticos interrelacionados, uno que dependerá de la cantidad de parásitos que hay en un humano contagiado y el otro de la cantidad de cercarias de caracol a humano.

Si queremos plantear el problema a resolver sería el siguiente:
Dado un entero no negativo n , asumiendo que las probabilidades iniciales (al tiempo 0) p_n son conocidas, encuentre la probabilidad de que exactamente n parásitos estén en un ser humano en el momento $t > 0$,



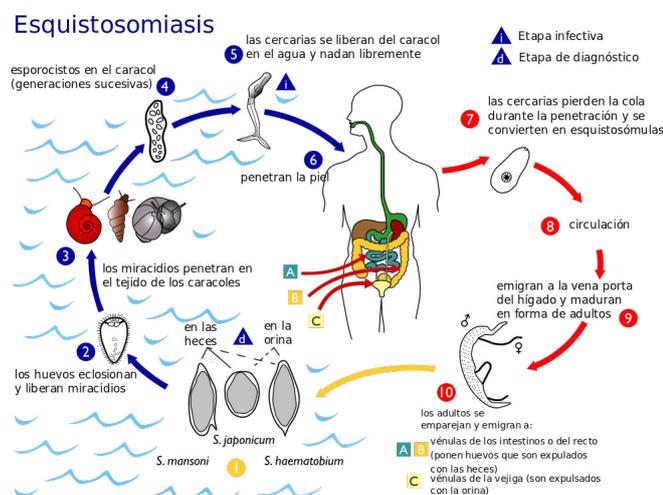


Figura 5.1: Ciclo vital de un esquistosoma que infecta a un ser humano.

5.1. Datos generales

Se considerará el caso idealizado de que infección ocurra en una comunidad aislada donde cada huésped definitivo (en este caso, un ser humano) tiene igual exposición de riesgo de infectarse y no está sujeto a procesos de nacimiento, muerte, inmigración o emigración.

Cada huésped intermedio (en este caso, caracoles pulmonados acuáticos pertenecientes al género *Lymnaea*) tampoco está sujeto a procesos de inmigración o emigración pero sí al de nacimiento o muerte, pero bajo una simplificada hipótesis de que en cada instante en el que un caracol muera, un caracol no infectado nazca.

Denotaremos como N_1 al número total de huéspedes definitivos (ser humano) en la población a analizar y N_2 al número total de huéspedes intermedios (caracoles) en la población a analizar.

Si a cada ser humano de la población los etiquetamos del 1 al N_1 , se analizará un experimento por cada huésped definitivo k , donde $k = 1, 2, \dots, N_1$, el cual será el mismo para cada poblador. Para cada $t \in [0, +\infty)$, introducimos las funciones,

$$M_k(t) = \text{Número de esquistosomas machos en el tiempo } t, \text{ en el huésped } k.$$

$$F_k(t) = \text{Número de esquistosomas hembras en el tiempo } t, \text{ en el huésped } k.$$

Nociones de epidemiología nos dice que para que un huésped definitivo sea infectado depende de una pareja heterosexual de larvas de los esquistosomas (llamadas miracidios), por lo cual nuestro objetivo será registrar el número de parejas esquistosomas en un determinado huésped, en un tiempo t .

Si asumimos que el encuentro entre cada miracidio hembra y macho es inevitable y cada larva es monógama, entonces de esto se puede deducir que el número de

parejas de miracidios será nada más que el mínimo entre el número de miracidios machos y hembras.

$$\gamma_k(t) = \min\{M_k(t), F_k(t)\}$$

También es plausible postular que $M_k(t)$ y $F_k(t)$ para cada t son variables aleatorias.

Aunque es posible que un huésped intermedio sea penetrado por más de un miracidio, se cree que las infecciones múltiples no son importantes.

En consecuencia, consideramos la unidad de infectividad en el huésped intermedio población como el huésped molusco individual, en lugar de la cantidad de parásitos que alberga y realizar un seguimiento de la infección en esta población mediante una función.

Por ello, es necesario considerar cuál es la cantidad de huéspedes intermedios infectados (un caracol es llamado infectado si alberga al menos un miracidio), para ello será necesario definir

$$S(t) = \text{Número de caracoles infectados en el tiempo } t.$$

Observación: Para cada $t \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, N_1$, es plausible postular que $M_k(t)$, $F_k(t)$, $S(t)$ son consideradas variables aleatorias y consecuentemente, las colecciones $\{M_k(t)\}_{t \geq 0}$, $\{F_k(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, procesos estocásticos.

Para determinar las distribuciones de probabilidad de las variables aleatorias de interés, es necesario hacer suposiciones adicionales. Para este análisis se utilizará la definición infinitesimal del proceso particular de Poisson de nacimiento y muerte.

Miracidios en el huésped definitivo.

Para cada persona $k = 1, 2, \dots, N_1$, $j = 0, 1, \dots$ será necesario conocer sus respectivas distribuciones iniciales

$$q_j^{(k)} = P(M_k(0) = j)$$

$$p_j^{(k)} = P(F_k(0) = j)$$

para que el proceso pueda inicializar.

Además para simplificar notación y cálculos, los procesos M_k y F_k tendrán la misma probabilidad de transición, es decir que será indiferente el que cada parásito sea hembra o macho. Denotemos a la probabilidad de transición del estado i al estado j de un tiempo s a un tiempo t de $\{M_k(t)\}_{t \geq 0}$ y $\{F_k(t)\}_{t \geq 0}$ como $P_{i,j}(s, t)$, entonces,

$$P_{m,n}(s, t) = P(M_k(t) = n | M_k(s) = m) = P(F_k(t) = n | F_k(s) = m)$$

$$k = 1, 2, \dots, N_1, m, n \in \mathbb{Z}^+, 0 \leq s < t$$

Por ello, aunque en los siguientes postulados se trata el caso de las cercarias macho, también aplica para las cercarias hembra.

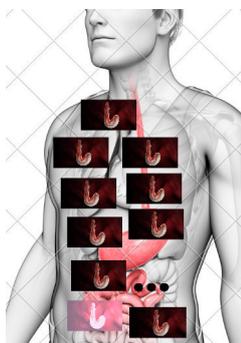


Figura 5.2: En un cuerpo se encuentran m miracidios y muere uno.

Al establecer las hipótesis sobre la iniciación (nacimiento) y la terminación (muerte) estableceremos el símbolo $o(h)$ para indicar cualquier cantidad que se desvanezca más rápidamente que el h cuando $h \rightarrow 0$ i.e. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$

A continuación pasamos a adaptar los postulados de un proceso de nacimiento y muerte para el análisis matemático de la cantidad de miracidios en un ser humano. Supongamos por un momento que las probabilidades $P_{m,n}(t)$ son conocidos para todo $n \in \mathbb{N}$ y tratemos de determinar $P_{m,n}(t+h)$ la probabilidad de que un ser humano albergue n parásitos al tiempo $t+h$. Habrá n parásitos en el tiempo $t+h$ si y solo si una de las siguientes condiciones son satisfechas:

1. **Al tiempo t , hay $n+1$ parásitos y muere uno nuevo en el intervalo $[t, t+h)$.** Si $\mu_1 > 0$ es la razón de muerte instantánea de un esquistosoma.

Para analizar la probabilidad de muerte de un estado arbitrario $m \in \mathbb{N}$ (que vendría a ser la cantidad de parásitos en un ser humano) al tiempo t , donde cada uno tiene la misma media de probabilidad μ_1 de morir y por lo tanto cada uno también tiene la misma probabilidad de muerte $P_{1,0}(t, t+h) = \mu_1 h + o(h)$, entonces,

$$P_{m,m-1}(t, t+h) = mP_{1,0}(t, t+h) = \mu_1 mh + o(h)$$

2. **Al tiempo t , hay $n-1$ parásitos y aparece uno nuevo en el intervalo $[t, t+h)$.** Sea v_{11} la tasa de liberación instantánea de cercarias por caracol infectado (factor biológico) y v_{12} la probabilidad de que una cercaria liberada infecte a un ser humano (factor ambiental).

Denotemos $v_1 = v_{11} \cdot v_{12}$, que vendría a ser la razón de parásitos que infectan a un ser humano y por ende, cada parásito tiene la misma probabilidad de infectar a un ser humano de $P_{0,1}(t, t+h) = v_1 h + o(h)$. Por lo tanto, para $m \in \mathbb{N}$, $h \rightarrow 0$, la probabilidad de que un nuevo parásito infecte a un ser humano (ya sea macho o hembra) estaría dado por $2P_{m,m+1}(t, t+h) = S(t)P_{0,1}(t, t+h) = v_1 S(t)h + o(h)$.

Si reemplazamos el valor de $S(t)$ por el de su esperanza $E[S(t)]$, se tiene,

$$P_{m,m+1}(t, t+h) = \frac{1}{2} v_1 E[S(t)]h + o(h)$$

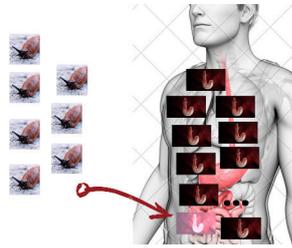


Figura 5.3: En un cuerpo se encuentran m miracidios y muere uno.

3. Dos o más cambios suceden en el intervalo

Aunque es posible para un huésped ser infectado por más de un miracidio al mismo tiempo o que al mismo tiempo mueran más de dos de estos parásitos, estos no generan cambios plausibles, por lo cual la probabilidad de más de un salto será $o(h)$. Es por eso que las transiciones de un estado j solo son posibles a los estados $j + 1$ o $j - 1$ en un intervalo corto de tiempo (casi instantáneo), es decir, en un intervalo $[t, t + h)$, donde $h \rightarrow 0$.

$$P_{m,m+n}(t, t + h) = o(h), n > 1$$

4. Al tiempo t , hay n parásitos y no ocurre ningún cambio en el intervalo $[t, t + h)$.

Al tiempo t , hay n parásitos y no ocurre ningún cambio en el intervalo $[t, t + h)$.

$$P_{m,n}(t, t + h) = 1 - \frac{1}{2} \nu_1 E[S(t)] h P_n(t) - \mu_1 P_n(t) h + o(h)$$

5.2. Sistema de Ecuación diferencial ordinaria de Kolmogorov

Por los postulados expuestos en la sección (5.1), para $t \geq 0$ $M_k(t)$, $F_k(t)$ y $S(t)$ son procesos de nacimiento y muerte, de los cuales consecuentemente, los sistemas de ecuaciones diferenciales asociados a su respectiva distribución $\{P_{m,n}(s, t)\}_{n=1}^{\infty}$ de acuerdo a la demostración expuesta en (2.10) referido al proceso de nacimiento y muerte son

$$\frac{P_{m,n}(s,t)}{\partial t} = - \left[\frac{1}{2} v_1 E[S(t)] + \mu_1 \right] P_{m,n}(s, t) + \frac{1}{2} v_1 E[S(t)] P_{m,n-1}(s, t) + \mu_1 (n + 1) P_{m,n+1}(s, t) \quad (5.1)$$

para $m, i \in \mathbb{N}$, $s \geq 0$.
Por lo tanto si $n \neq 0$,

$$P(M_k(s) = n | M_k(s) = m) = 0$$

mientras que si $n = m$,

$$P(M_k(s) = m | M_k(s) = m) = 1$$

Por ello es conveniente extender la definición de $P_{m,n}$ y estableciendo

$$P_{m,n}(s, s) = \delta_{m,n} \quad m, n = 0, 1 \dots, s \geq 1$$

donde

$$\delta_{h,k} = \begin{cases} 1, & h = k \\ 0, & h \neq k, \end{cases}$$

las cuales llegarían a ser las condiciones iniciales de nuestros sistemas de ecuaciones diferenciales. Esto quiere decir que si el sistema M_k o F_k se encuentra en el estado m en la época s y no transcurre ningún salto de tiempo (es decir permanece en el estado s) el sistema seguirá permaneciendo en el estado m , ya que si no transcurre tiempo, tampoco ocurrirá cambio alguno.

Por la independencia de las distribuciones de transición, a esta sistema de ecuaciones se le conoce como problema de valor inicial de Kolmogorov.

El teorema de Daniel-Kolmogorov expuesta en la sección (2,5) nos muestra que efectivamente existen cadenas de Markov M_k , F_k , y S que cumplen las propiedades de los postulados si y solo existe solución a las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

Observación: Claramente, las suposiciones realizadas solo representan una aproximación de lo que representan una infección real. Se ignora la infección específica por edad o sexo en la población humana. Las tasas de mortalidad son independientes de la edad y de la densidad de población. Hubiera sido más natural considerar a $P_{m,m+1}(t, t + h)$ proporcional a $S(t)$ y a $\sum_{k=1}^{N_1} \gamma_k(t)$ respectivamente, pero resulta

más conveniente reemplazar estas cantidades por sus esperanzas.

Además, estos postulados no tienen en cuenta los efectos de edad en la tasa de oviposición de un esquistosoma femenino emparejado. Tampoco hemos considerado el posible desarrollo de resistencia a la infección en los huéspedes o los períodos latentes durante los cuales las cercarias y las esquistosomas se desarrollan hasta sus formas maduras.

A pesar de estas simplificaciones y omisiones, confiamos en que nuestras hipótesis retratan principales características de las relaciones huésped-parásito con suficiente similitud para producir útiles conclusiones cualitativamente confiables.

5.3. Ecuaciones de Kolgomorov

En esta sección se muestra un método para encontrar la solución de este problema resolviendo una ecuación diferencial parcial de primer orden.

Dado $m \in \mathbb{N}$, $s \geq 0$, consideramos para cada $k = 1, 2, \dots, N_1$ la variable aleatoria $M_k(t), t \geq 0$ una distribución de probabilidad $\{p_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $p_n(t) = P_{m,n}(s, t)$. La función generadora de probabilidad G asociada a la distribución $\{p_k(t)\}$ está dada por

$$G(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P_{m,n}(s, t) \quad (5.2)$$

Derivando parcialmente respecto a z se tiene

$$\frac{\partial G(t, z)}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} p_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n p_n(t) \frac{\partial G(t, z)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial p_n(t)}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial G(t, z)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p'_n(t) = p'_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} z^n p'_n(t), \quad (5.4)$$

Si denotamos $Y(t) = E[S(t)]$ y sustituimos los valores de $p'_n(t)$ de (5.1) en 5.3 obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t, z)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left[- \left(\frac{1}{2} v_1 Y(t) + \mu_1 \right) p_n(t) + \frac{1}{2} v_1 Y(t) p_{n-1}(t) + \mu_1 (n+1) p_{n+1}(t) \right] \\ - \frac{1}{2} v_1 Y(t) p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(t, z)}{\partial t} &= -\frac{1}{2} v_1 Y(t) \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) z^n + \mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_n(t) z^n - \mu_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) z^n + \frac{1}{2} v_1 Y(t) \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) z^n \\ &= -\frac{1}{2} v_1 Y(t) \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) z^n + \mu_1 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) p_n(t) z^n - \mu_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) z^n + \frac{1}{2} v_1 Y(t) \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) z^n \\ &= -\frac{1}{2} v_1 Y(t) G + \mu_1 \frac{\partial G}{\partial z} - \mu_1 z \frac{\partial G}{\partial z} + \frac{1}{2} v_1 Y(t) z G \\ &= \frac{1}{2} v_1 Y(t) (z-1) G - \mu (z-1) \frac{\partial G}{\partial z} \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos la siguiente ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \mu (z-1) \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{2} v_1 Y(t) (z-1) G$$

Por otro lado, conociendo las probabilidades iniciales $p_n(s)$ nos permite conocer la condición inicial para G a lo largo de la línea $s = 0$ del plano (s, z) ,

$$G(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(s) = z^m$$

5.4. Resolución de nuestra ecuación diferencial parcial

Nuestro objetivo es resolver la siguiente ecuación diferencial parcial. Dado $s > 0$, (s es un valor fijo del cual provendría)

$$\begin{cases} G_t + \tilde{\mu}_1(z-1)G_z = \frac{1}{2}v_1 Y(t)(z-1)G \\ G(s, z) = z^m \end{cases}$$

En este caso nuestra curva inicial parametrizada por r está dada por $\gamma(r) = (s, r)$ con condición inicial $\phi(r) = r^m$.

Nuestro sistema de ecuaciones diferenciales para las curvas integrales $\{t_r : t_r(u)\}_{r \in \mathbb{R}}$, $\{z_r : z_r(u)\}_{r \in \mathbb{R}}$ y $\{v_r : v_r(u)\}_{r \in \mathbb{R}}$ toma la forma

$$\begin{cases} t_r' = 1, & t_r(0) = s \\ z_r' = \mu_1(z_r - 1), & z_r(0) = r \\ v_r'(u) = \frac{1}{2}v_1 Y(t_r)(z_r - 1)v_r, & v_r(0) = r^m, \end{cases} \quad (5.5)$$

Resolviendo este sistema para cada $r \in \mathbb{R}$ se obtiene que explícitamente las curvas integrales $\{t_r : t_r(u)\}_{r \in \mathbb{R}}$ y $\{z_r : z_r(u)\}_{r \in \mathbb{R}}$ están dadas por $t_r(u) = u + s$ y $z_r(u) = (r-1)e^{\mu_1 u} + 1$.

Reemplazamos estas curvas en la ecuación 5.5

$$v_r' - \frac{1}{2}v_1 Y(u+s)(r-1)e^{\mu_1 u}v_r = 0, \quad v_r(0) = r^m$$

Resolvamos esta ecuación diferencial ordinaria lineal por el método del factor integrante, el cual en este caso sería

$$\exp\left(-\int_0^u \frac{1}{2}v_1 Y(x+s)(r-1)e^{\mu_1 x} dx\right).$$

Si denotamos

$$U(u) = -\frac{1}{2}v_1(r-1) \int_0^u Y(x+s)e^{\mu_1 x} dx$$

haciendo el cambio de variable $x = x - s$

$$\begin{aligned} U(u) &= -\frac{1}{2}v_1(r-1) \int_s^{u+s} Y(x)e^{u(x-s)} dx = -\frac{1}{2}v_1(r-1) \left[\int_0^{u+s} Y(x)e^{\mu_1(x-s)} dx - \int_0^s Y(x)e^{\mu_1(x-s)} dx \right] \\ &= -\frac{1}{2}v_1(r-1)e^{-\mu_1 s} \left[\int_0^{u+s} Y(x)e^{\mu_1 x} dx - \int_0^s Y(x)e^{\mu_1 x} dx \right] \\ &= -\frac{1}{2}v_1(r-1)e^{-\mu_1 s}(e^{\mu_1 u} e^{-\mu_1 u}) \left[\int_0^{u+s} Y(x)e^{\mu_1 x} dx - \int_0^s Y(x)e^{\mu_1 x} dx \right] \\ &= -\frac{1}{2}v_1(r-1) \left[e^{\mu_1 u} \left(e^{-\mu_1(s+u)} \int_0^{u+s} Y(x)e^{\mu_1 x} dx \right) - \left(e^{-\mu_1 s} \int_0^s Y(x)e^{\mu_1 x} dx \right) \right]. \end{aligned}$$

62 Análisis y modelamiento matemático de la enfermedad esquistosomiasis.

Si denotamos

$$\beta(s) = e^{-\mu_1 s} \int_0^s Y(x) e^{\mu_1 x} dx$$

tenemos

$$U(u) = -\frac{1}{2} v_1(r-1)[e^{\tilde{\mu}_1 u} \beta(u+s) - \beta(s)]$$

Gracias al método del factor integrante la solución general de

$$v_r(u) = C e^{U(u)}$$

donde

$$v_r(0) = r^m$$

entonces

$$C \exp\left(\frac{1}{2} v_1(r-1)[e^{\tilde{\mu}_1 u} \beta(0+s) - \beta(s)]\right) = r^m$$

$$C = r^m$$

Por lo tanto,

$$v_r(u) = r^m \exp\left(\frac{1}{2} v_1(r-1)[e^{\tilde{\mu}_1 u} \beta(u+s) - \beta(s)]\right)$$

La función inversa de las curva t_r es $u = t - s$ y la de s_r es $r = (z - 1)e^{-\mu_1(t-s)} + 1$. Reemplazando estas funciones en la curva $v_r(u)$ se tiene

$$G(t, z) = [e^{-\mu_1(t-s)}(z-1) + 1]^m \exp\left(\frac{1}{2} v_1((z-1)e^{-\mu_1(t-s)})[e^{\mu_1(t-s)}\beta(t) - \beta(s)]\right)$$

$$G(t, z) = [e^{-\mu_1(t-s)}(z-1) + 1]^m \exp\left(\frac{1}{2} v_1(z-1)(\beta(t) - e^{-\mu_1(t-s)}\beta(s))\right) \quad (5.6)$$

Recordemos que esta función generadora G_t está relacionada a la variable aleatoria $M_k(t)$ y con la probabilidad de transición $P_{m,n}$, por ello por un momento usemos la notación que indica la variable aleatoria de la cual fue generada la función G_t , es decir, $G_{M_k(t)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n P_{m,n}(s, t)$.

Ahora, tomemos dos variables aleatorias X, Y con distribuciones binomial y de Poisson con parámetro $\lambda = \frac{1}{2} v_1(\beta(t) - \beta(s))e^{-\tilde{\mu}_1(t-t_0)}$, respectivamente. $X \sim Bin(m, e^{-\tilde{\mu}_1(t-s)})$, $Y \sim Pois(\frac{1}{2} v_1(\beta(t) - \beta(s))e^{-\tilde{\mu}_1(t-s)})$. Es decir

$$f_X(x) = \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x}$$

$$f_Y(y) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

Donde $p = e^{-\tilde{\mu}_1(t-s)}$

Para estas variables aleatorias tenemos que

$$G_{X(t)}(z) = [e^{-u(t-s)}(z-1) + 1]^m$$

$$G_{Y(t)}(z) = \exp\left[\frac{1}{2}v_1(z-1)(\beta(t) - e^{-u(t-s)}\beta(z))\right]$$

La proposición 1.5.2 nos dice que la función generadora de la suma de variables aleatorias es el producto de las funciones generadoras de cada uno y además por (5.6) se obtiene

$$G_{X(t)+Y(t)}(z) = G_{X(t)}G_{Y(t)}(z) = G_{M_k(t)}(z; s, m)$$

Entonces $X(t) + Y(t)$ y $M_k(t)$ tienen la misma distribución

$$P_{m,n}(s, t) = P(M_k(t) = n | M_k(s) = m) = P(X(t)+Y(t) = n | M_k(s) = m) = P(X(t)+Y(t) = n) f_{X(t)+Y(t)}(n)$$

El cual es una convolución de las variables aleatorias $X(t)$ e $Y(t)$. Entonces

$$P_n(t) = (f_{X(t)} * f_{Y(t)})(n) = \sum_{j=0}^n f_{X(t)}(j) f_{Y(t)}(n-j) = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-j}}{(n-j)!}$$

Explícitamente, se tiene que

$$P_n(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}v_1(\beta(t)-\beta(t_0))e^{-\tilde{\mu}_1(t-t_0)}\right) \sum_{j=0}^n \binom{m}{j} (e^{-\tilde{\mu}_1(t-t_0)})^j (1-e^{-\tilde{\mu}_1(t-t_0)})^{m-j} \frac{\left(\frac{1}{2}v_1(\beta(t)-\beta(t_0))e^{-\tilde{\mu}_1(t-t_0)}\right)^{n-j}}{(n-j)!}$$

Para continuar, previamente demostraremos dos lemas que nos ayudarán a pasar de la probabilidad a una esperanza, la cual es más práctica en sentido estadístico.

Lema 5.4.1.

$$E(X(t) | M_k(0) = j) = j e^{-\tilde{\mu}_1 t}$$

Demostración. Como en este caso se conoce el valor de la distribución inicial $M_k(0) = j$

$$f_{(X(t)|M_k(0))}(x|j) = \binom{j}{x} p_0^x (1-p_0)^{j-x} \quad x = 0, 1, \dots, j$$

Donde $p_0 = e^{-\tilde{\mu}_1 t}$

$$\begin{aligned} E(X(t) | M_k(0) = j) &= \sum_{x=0}^m x f_{(X(t)|M_k(0))}(x|j) = \sum_{x=1}^j x \binom{j}{x} p_0^x (1-p_0)^{j-x} = \sum_{x=1}^j \frac{j!}{(x-1)!(j-x)!} p_0^x (1-p_0)^{j-x} \\ &= j p_0 \sum_{x=1}^j \frac{(m-1)!}{(x-1)!(m-x)!} p_0^{x-1} (1-p_0)^{m-x} = m p_0 \sum_{x=1}^m \binom{j-1}{x-1} p_0^{x-1} (1-p_0)^{j-x} \\ &= j p \sum_{x=0}^{j-1} \binom{j-1}{x} p_0^x (1-p_0)^{(j-1)-x} = j p \end{aligned}$$

Como $p_0 = e^{-\tilde{\mu}_1 t}$ se tiene el resultado . □

Lema 5.4.2.

$$E(Y(t)|M_k(0) = j) = \frac{1}{2} v_1 \beta(t)$$

Demostración.

$$f_{(Y(t)|M_k(0))}(y|j) = e^{-\gamma_0} \frac{\gamma_0^y}{y!}$$

Donde

$$\gamma_0 = \frac{1}{2} v_1 \beta(t)$$

$$\begin{aligned} E(Y(t)|M_k(0) = j) &= \sum_{y=1}^{\infty} y f_{(Y(t)|M_k(0))}(y|j) = \sum_{y=1}^{\infty} y e^{-\gamma_0} \frac{\gamma_0^y}{y!} \\ &= \gamma_0 e^{-\gamma_0} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{\gamma_0^{y-1}}{(y-1)!} = \gamma_0 e^{-\gamma_0} e^{\gamma_0} = \gamma_0 = \frac{1}{2} v_1 \beta(t) \end{aligned}$$

□

$$E(M_k(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) P_n(0) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{j,n}(t) P_j(0) \quad (5.7)$$

Entonces

$$\begin{aligned} E(M_k(t)) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{j=1}^{\infty} P_{j,n}(0, t) P_k(0) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j(0) \sum_{n=1}^{\infty} n P_{j,n}(0, t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{(k)} E(M_k(t)|M_k(0) = j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{(k)} E(X(t) + Y(t)|M_k(0) = j) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{(k)} [E(X(t)|M_k(0) = j) + E(Y(t)|M_k(0) = j)] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{(k)} \left(j e^{-\tilde{\mu}_1 t} + \frac{1}{2} \beta(t) \right) \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que

$$E(F_k(t)) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j^{(k)} \left(j e^{-\tilde{\mu}_1 t} + \frac{1}{2} v_1 \beta(t) \right)$$

Entonces

$$E(W_k(t)) = E(M_k(t)) + E(F_k(t)) = \sum_{j=1}^{\infty} (p_j^{(k)} + q_j^{(k)}) \left(j e^{-\tilde{\mu}_1 t} + \frac{1}{2} v_1 \beta(t) \right)$$

Un interés particular es el caso cuando $M_k(0)$ y $F_k(0)$ tiene una distribución de Poisson con el mismo parámetro $\frac{1}{2} \omega_k$, de 5.7

$$P(M_k(t) = n) = P(F_k(t) = n) = \sum_{m=0}^{\infty} P_{m,n}(t) \frac{\left(\frac{1}{2} \omega_k\right)^m e^{-\frac{1}{2} \omega_k}}{m!}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}v_1(\beta(t))\right) \sum_{j=0}^n \binom{m}{j} (e^{-\tilde{\mu}_1 t})^j (1 - e^{-\tilde{\mu}_1 t})^{m-j} \frac{(\frac{1}{2}v_1\beta(t))^{n-j}}{(n-j)!} \frac{(\frac{1}{2}\omega_k)^m e^{-\frac{1}{2}v_1\beta(t)} e^{-j\omega_k}}{m!} \\
&= e^{\frac{-1}{2}(v_1\beta(t)+\omega_k)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (e^{-\tilde{\mu}_1 t})^j (1 - e^{-\tilde{\mu}_1 t})^{m-j} \frac{1}{m!(n-j)!} \left(\frac{1}{2}\omega_k\right)^m \left(\frac{1}{2}v_1\beta(t)\right)^{n-j} \\
&= \frac{1}{n!} e^{1/2(\beta(t)+\omega_k)} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}\omega_k e^{-\tilde{\mu}_1 t}\right)^j \left(\frac{1}{2}\beta(t)\right)^{n-j} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{[\frac{1}{2}\omega_k e^{-\tilde{\mu}_1 t}]^v}{v!} \\
&\quad \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{2}(\beta(t) + \omega_k e^{-\tilde{\mu}_1 t})\right]^n \exp(-(\beta(t) + \omega_k e^{-\tilde{\mu}_1 t}))
\end{aligned}$$

Por convolución

$$P(W_k(t) = n) = P(M_k(t) + F_k(t))$$

Esto quiere decir que

$$W_k(t) = n \sim \text{Poisson}(\beta + \omega e^{\tilde{\mu}_1 t}) \quad (5.8)$$

Hasta aquí ya obtenemos que la probabilidad de infección de la esquistomiasis tiene una distribución de Poisson que cumple la relación (5.8) para el caso más peligroso: Cuando una infección se da y esta se puede esparcir rápidamente pues se calcula las probabilidad de parásitos emparejados. Ahora se estudiará las siguientes distribuciones de probabilidad para el caso de parásitos sin pareja, que si bien es un caso de no vital importancia, puede ser de utilidad a la hora de detectar y querer evitar propagaciones y contagio. Se define:

$$\hat{M}_k(t) = M_k(t) - \gamma_k(t)$$

$$\hat{F}_k(t) = F_k(t) - \gamma_k(t)$$

$M_k(t)$, $F_k(t)$ pueden ser interpretados como el número de parásitos machos y hembras, respectivamente, sin pareja en el huésped k. Además

$$\gamma_k(t) = \frac{1}{2}(W_k(t) - \hat{M}_k(t) - \hat{F}_k(t))$$

Lema 5.4.3. Dado $n \in \mathbb{N}$,

$$\{\hat{M}_k(t)\} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \{F_k(t) = j\} \cap \{M_k(t) = j + n\}$$

Demostración. Dado $\omega \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \{F_k(t) = j\} \cap \{M_k(t) = j + n\}$, $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que

$$\omega \in \{F_k(t) = j\} \quad y \quad \omega \in \{M_k(t) = j + n\}$$

Entonces

$$\gamma_k(t)(\omega) = F_k(t)(\omega) = j < M_k(t)(\omega) = j + n$$

$$M_k(t)(\omega) = \gamma_k(t)(\omega) + n$$

$$\hat{M}_k(t)(\omega) = n$$

Esto es $\omega \in \{\hat{M}_k(t) = n\}$

Dado $\omega \in \{\hat{M}_k(t) = n\} = \{M_k(t) - \gamma_k(t) = n\}$

$$M_k(t)(\omega) - \gamma_k(t)(\omega) = n$$

como $n \geq 1$, $\gamma_k(t)$ entonces

$$\hat{F}_k(t) = 0 \quad y \quad \gamma_k(t) = F_k(t)$$

i $F_k(t)(\omega) = j \in \mathbb{N}$

$$M_k(t)(\omega) = \hat{M}_k(t)(\omega) + \gamma_k(t)(\omega) = n + j$$

Entonces $\omega \in \{F_k(t) = j\} \cap \{M_k(t) = n + j\}$ □

Lema 5.4.4. Dado $n \in \mathbb{N}$, entonces para cada k , $1 \leq k \leq N_1$

$$P(\hat{M}_k(t) = n) = e^{-\beta(t)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p_i^{(k)} q_m^{(k)} \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \binom{l}{i} \binom{m}{j} (e^{-\tilde{\mu}_1 t})^{i+j} (1 - e^{-\tilde{\mu}_1 t})^{l+m-i-j} I_{n+i-j}(\beta(t)) \quad (5.9)$$

$$P(\hat{F}_k(t) = n) = e^{-\beta(t)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} p_i^{(k)} q_m^{(k)} \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \binom{l}{i} \binom{m}{j} (e^{-\tilde{\mu}_1 t})^{i+j} (1 - e^{-\tilde{\mu}_1 t})^{l+m-i-j} I_{n+j-i}(\beta(t)) \quad (5.10)$$

Donde I_n denota la función de Bessel modificada de primera especie de orden n .

Demostración. Usando el Lema 5.4 y la independencia de $F_k(t)$ y $M_k(t)$ se sigue que:

$$P(\hat{M}_k(t) = n) = \sum_{j=0}^{\infty} P(F_k(t) = j) P(M_k(t) = j + n)$$

$$l = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} p_i^{(k)} P_{i,j}(0, t) \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} q_m^{(k)} P_{m,j+n}(0, t) \right)$$

Donde:

$$P_{i,j}(0, t) = \exp \left(-\frac{1}{2} v_1(\beta(t)) \sum_{i=0}^n \binom{l}{i} (e^{-\tilde{\mu}_1 t})^i (1 - e^{-\tilde{\mu}_1 t})^{l-i} \frac{\left(\frac{1}{2} v_1(\beta(t))\right)^{l-i}}{(l-i)!} \right)$$

$$P_{m,j+n}(0, t) = \exp \left(-\frac{1}{2} v_1(\beta(t)) \sum_{i=0}^n \binom{m}{i} (e^{-\tilde{\mu}_1 t})^i (1 - e^{-\tilde{\mu}_1 t})^{m-i} \frac{\left(\frac{1}{2} v_1(\beta(t))\right)^{j+n-i}}{(j+n-i)!} \right)$$

La fórmula del lema sigue reemplazando estos valores en 5.9 y si se intercambian los roles de $p_j^{(k)}$ y $q_j^{(k)}$. Se obtiene 5.10 intercambiando los roles de p_j^k y q_m^k □

Este último lema muestra como resultado la probabilidad de que una persona sea infectada pero esta infección no sea de gravedad puesto que se evalúa simplemente a los parásitos sin pareja (y por lo tanto sin poder reproducirse) tanto macho y hembra.

Si bien estos resultados nos muestran diversas ecuaciones para determinar las probabilidades de infección en diversas situaciones, los resultados van a depender en gran parte de los datos iniciales al tiempo inicial de la infección y de las variables sanitarias y ambientales de la época donde se recoge la muestra. Note que además que se hicieron muchas suposiciones y se utilizó la esperanza de la variable aleatoria en vez de ella para evitar complejidad en los cálculos, lo cual es bastante común en este tipo de desarrollo y no afecta en gran forma el resultado. Espero que la lectura haya sido de su agrado y pueda ser de utilidad para futuras investigaciones.

Bibliografía

- [1] Jordan y Webbe (1993) U. K., CAB International. *Human schistosomiasis*.
<http://dx.doi.org/10.1590/S0036-46651994000300016>
- [2] Nasell, I., Hirsch, W. (1973) *Communications on Pure and Applied Mathematics Volume 26 issue 4* [doi 10.1002/2Fcpa.3160260402] *The transmission dynamics of schistosomiasis*
- [3] Feller, W. (1968) *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1, 3rd Edition*
- [4] Rincón, L. (2014) *Introducción a la probabilidad*
- [5] Rincón, L. (2010) *Curso intermedio de probabilidad*
- [6] Rincón, L. (2010) *Introducción a los procesos estocásticos*
- [7] Allen, L. (2010) *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology, Second Edition-Chapman and Hall-CRC*
- [8] García N. (2007), *Teoría de la medida y la probabilidad*
- [9] Anderson, W. (2011) *Métodos cuantitativos para los negocios, 11a Edition*
- [10] Metzger, R. (2008) *Curso Básico de Teoría de la Medida*
- [11] Zachmanoglou, E. (1976) *Introduction to differential partial equations with applications*
- [12] Vasy, A. (2015) *Partial differential equations: an accessible route through theory and applications*
- [13] García, M. (2003) *Introducción a la teoría de la probabilidad*