Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Sistemas dinámicos y tres formas de definir caos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Fiorela AZAHUANCHE FALCÓN

ASESOR

Dr. Jorge Luis CRISÓSTOMO PAREJAS

Lima, Perú

2022

Referencia bibliográfica

Azahuanche, F. (2022). *Sistemas dinámicos y tres formas de definir caos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Fiorela Azahuanche Falcón
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	70503415
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-0611-7413
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Jorge Luis Crisóstomo Parejas
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43688114
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-9049-4125
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41075852
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Josué Alonso Aguirre Enciso
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	41341744
Datos de investigación	
Línea de investigación	Ecuaciones Diferenciales ordinarias, Sistemas dinámicos reales.

Grupo de investigación	Dynamical Systems, Differential equations, and their applications
Agencia de financiamiento	-
Ubicación geográfica de la investigación	Lima, Perú
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2021
URL de disciplinas OCDE	https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria – Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono: 619-7000, Anexo 1610
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima – Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 5:00 horas del jueves 28 de abril del 2022, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (PRESIDENTE), Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso (MIEMBRO) y el Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: **"SISTEMAS DINÁMICOS Y TRES FORMAS DE DEFINIR CAOS",** presentado por la Bachiller **FIORELA AZAHUANCHE FALCÓN**, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación sobresaliente con un calificativo promedio de 18 dieciocho.

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya, manifestó que la Bachiller FIORELA AZAHUANCHE FALCÓN, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 6:08 pm horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya
PRESIDENTE

Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso
MIEMBRO

Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas
MIEMBRO ASESOR

La Vicedecana (e) de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Mg. Zoraida Judith Huamán Gutiérrez, certifica virtualmente la participación del Jurado Evaluador, el titulando, el acto de instalación y el inicio, desarrollo y término del acto académico de sustentación, dejando constancia en el acta respectiva.

Dedicado a mi familia, en especial a la memoria de Alfredo Azahuanche Manrique, mi siempre querido, admirado y recordado padre.

Agradecimientos

Agradezco en primer lugar a Dios por bendecir a mi familia y a mí en estos tiempos tan difíciles.

Gracias a mi padre Alfredo, por impulsarme a través de su ejemplo y consejos a cumplir con mis objetivos y siempre tomar los estudios como prioridad. Gracias a mi madre Dina, por mostrarme a enfrentar la adversidad con valentía. Gracias, Piero, mi gran y único hermano, por estar ahí en todo momento.

Agradecer por acompañarme siempre en mi desarrollo académico a mi asesor, el Dr. Jorge Crisóstomo Parejas. Todos sus comentarios, su claridad, organización y amistad se han vuelto para mí, una guía para avanzar en el mundo de los sistemas dinámicos y de las matemáticas. Mi respeto y admiración para usted.

Le doy las gracias también a los profesores de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos pues "esta perturbación de mi trayectoria vital no hubiera sido posible sin la modificación en las condiciones iniciales que ellos practicaron en mí, encaminando mis caóticos pasos hacia ese atractor extraño que es la matemática y su historia".

A todas las personas que confiaron en mí y me apoyaron en todo momento, entre ellos, amigos, compañeros y mi enamorado Jorge, que contribuyó directa o indirectamente en la conclusión de este trabajo, al cual admiro por su fortaleza y dedicación.

Resumen

En este trabajo, estudiamos tres formas de definir caos para un sistema dinámico discreto: “Caos según Devaney”, “Caos según Li-Yorke” y “Caos” en términos de entropía positiva. Además, estudiamos la relación existente entre estás definiciones para sistemas dinámicos discretos definidas sobre intervalos.

Palabras Claves : caos de Devaney, caos de Li-Yorke, entropía topológica, sistemas dinámicos.

Abstract

In this work, we study three ways of defining chaos for a discrete dynamical system: “Chaos in the sense of Devaney”, “Chaos in the sense of Li-Yorke”, and “Chaos” in terms of positive entropy. In addition, we study the relationship between these definitions for discrete dynamical systems defined on intervals.

Keywords : Devaney chaos, Li-Yorke chaos, topological entropy, dynamical systems.

Índice general

Introducción

En el uso común, “caos” significa “un estado de desorden”. Sin embargo, en la teoría del caos, el término se define con mayor precisión. A lo largo de la historia, ha habido muchas definiciones y a pesar del abundante trabajo pasado y actual, todavía el caos no se puede resumir en una fórmula.

Acerca de la aparición del término matemático *caos*, fue introducido por Li y Yorke(1975), donde los autores establecieron un simple criterio sobre la existencia de caos en los sistemas dinámicos unidimensionales, conocido como “periodo tres implica caos”. Desde entonces, el estudio de la teoría del caos ha jugado un papel importante en los sistemas dinámicos.

Aunque fue Lorenz el primero en reconocer lo que se denomina comportamiento caótico en el modelado matemático de los sistemas meteorológicos, debido a que pequeñas variaciones en estos sistemas dinámicos podrían desencadenar enormes y, a menudo, insospechados resultados. Como idea intuitiva, Lorenz incluyó en una conferencia que pronunció el 29 de diciembre de 1972 en una sesión de la reunión anual de la AAAS (American Association for the Advancement of Science) la célebre frase “efecto mariposa”, que nos dice que “el aleteo de una mariposa en Brasil puede provocar un tornado en Texas”. Por supuesto, esto puede sonar exagerado pero es una forma de decir que, una perturbación en las condiciones iniciales por pequeñas que sean pueden provocar grandes cambios en los resultados a largo plazo.

Devaney(1989) introduce una nueva definición de “caos”: un sistema dinámico es caótico si tiene una órbita densa, un conjunto denso de puntos periódicos y dependencia sensible a las condiciones iniciales (esta última condición es la formulación del mencionado “efecto mariposa”, idea también incluida, pero no tan obvia, en la definición de LiYorke.).

Por otro lado, el caos puede ser caracterizado en términos de la entropía topológica que está relacionado con el caos de Li-Yorke y los subsistemas caóticos de Devaney. Fue el matématico Kolmogorov(1958) quién introdujo el concepto de entropía para cualquier sistema dinámico medible y Adler, Konheim y McAndrew(1965) introdujeron la definición de entropìa topológica que mide el grado de desorden de las órbitas del sistema dinámico, es por ello que entropía topológica positiva para un sistema dinámico "equivale" a caoticidad de dicho sistema.

Cabe resaltar que surgieron otras definiciones famosas de caos dadas por Wiggins, Lyapunov y Auslander-Yorke . Es importante mencionar que este trabajo se enfocará en los sistemas dinámicos dados por la iteración de aplicaciones continuas por intervalo, esto es, la aplicación continua $f : I \to I$ sobre el intervalo compacto no degenerado I.

El objetivo de este trabajo no es solo estudiar las tres definiciones existentes de caos como el caos de LiYorke, el caos de Devaney y la entropía positiva. Pero también para estudiar en cierta medida la "relación" que existe entre las tres formas de definir el caos.

Se considera importante el estudio del caos pues nos ayuda a comprender y estudiar los sistemas dinámicos que muchas veces son grandes y complejos. Asimismo, conocer y estudiar resultados desarrollados por Li-Yorke, Devaney y entropía son fundamentales para los temas físicamente relevantes de los límites de las cuencas fractales, los transitorios caóticos y la dispersión caótica, que ocurren, por ejemplo, en la dinámica de fuidos, la mecánica celeste, la química y la física atómica. Además, este trabajo está dirigido tanto a estudiantes de pregrado como a investigadores pues hemos tratado de mantener un nivel elemental donde los prerequisitos son principalemente los cursos de análisis real, topología, y algo de álgebra lineal.

El trabajo está estructurado en 5 capítulos. En el primer Capítulo definimos algunas nociones elementales e introducimos la notación que emplearemos durante todo el trabajo. También proporcionamos algunos resultados básicos sobre conjuntos ω-límite y herramientas para encontrar puntos periódicos. En el Capítulo 2, estudiamos la definición dada por Devaney, profundizamos un poco sobre transitividad topológica, que en el caso de sistemas dinámicos unidimensionales obtendremos resultados interesantes. En el Capítulo 3, estudiamos la definición dada por Li-Yorke, en la que probamos principalmente que periodo tres implica caos. En el Capítulo 4, presentamos las definiciones de entropía topológica para luego mencionar al caos en términos de ella. Debemos mencionar que al final de los Capítulos 2, 3 y 4 mostramos algunos ejemplos de sistemas dinámicos caóticos. Por último, en el Capítulo 5, estudiamos las relaciones entre las tres definiciones de caos, sin embargo no profundizamos en la relación Li-Yorke y entropía topológica debido a que escapa de los prerequisitos mencionados. Al finalizar mostramos un diagrama que resume la relación entre las tres formas de definir caos para sistemas dinámicos unidimensionales.

Capítulo 1

Preliminares

Sistemas dinámicos, órbitas y puntos fijos

Presentamos algunas definiciones introductorias que utilizaremos en los próximos capítulos. Aunque, nuestro propósito es estudiar sistemas dinámicos unidimensionales, daremos la notación en un contexto más amplio porque la mayoría de las definiciones tienen significado para cualquier sistema dinámico. Estas definiciones pueden ser encontradas en (Devaney, 1989) o cualquier libro de "Sistemas Dinámicos".

Definición 1.0.1. *Un sistema dinámico es el par (X, f) que esta dado por la aplicación continua $f : X \to X$, donde X es un espacio métrico no vacío. La evolución del sistema esta dado por las iteraciones sucesivas de la aplicación. Si $n \in \mathbb{N}$, el n-ésimo iterado de f es denotado por f^n, es decir,*

$$f^n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}}.$$

Por convención, f^0 es la aplicación identidad sobre X. Podemos pensar a n como el tiempo: partiendo de una posición inicial x en el tiempo 0, el punto $f^n(x)$ representa la nueva posición en el tiempo n.

Definición 1.0.2. *Sean (X, f) y $x_0 \in X$.*

1. *La órbita positiva de x_0 bajo f, denotada por $\mathcal{O}_f^+(x_0)$, se define como*

$$\mathcal{O}_f^+(x_0) = \{f^n(x_0)\,; n \in \mathbb{N}\} = \left\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\right\}$$

2. *En caso que f sea inversible, se define la órbita de x_0 bajo f, denotada por $\mathcal{O}_f(x_0)$,*

como

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \{f^n(x_0); n \in \mathbb{Z}\} = \left\{\dots, f^{-2}(x_0), f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\right\}$$

Definición 1.0.3. *Sean (X, f) y $x \in X$ es un punto fijo de f si y sólo si se cumple que $f(x) = x$. Se denota por Fix(f) al conjunto de todos los puntos fijos de f.*

Observación 1.0.1.

1. *Si $x \in Fix(f)$ entonces $\mathcal{O}_f(x) = \{x\}$.*

2. *Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to I$ una aplicación continua. Geométricamente, los puntos fijos de f son obtenidos al interceptar su gráfico Graf$(f) \subseteq I \times I$ con la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in I\}$.*

Ejemplo 1.0.1. *Para el sistema dinámico $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^3$. Tenemos, $x \in Fix(f)$ si y solo si $f(x) = x$, si y solo si $x^3 = x$ si y solo si $x(x-1)(x+1) = 0$. Por lo tanto, $Fix(f) = \{1, 0, -1\}$.*

Puntos periódicos y ciclos

Definición 1.0.4. *Sean (X, f) y $x_0 \in X$.*

1. *Decimos que x_0 es un punto periódico de f si* y *solo si existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^m(x_0) = x_0$. Se denota por $\mathrm{Per}(f)$ al conjunto de todos los puntos periódicos de f.*

2. *Sea $x_0 \in \mathrm{Per}(f)$, decimos que x_0 es punto periódico de periodo $k \in \mathbb{Z}^+$ si y solo si $f^j(x_0) \neq x_0$, $\forall\ 1 \leq j \leq k-1$ y $f^k(x_0) = x_0$. Se denota por $\mathrm{Per}_k(f)$ al conjunto de todos los puntos periódicos de f de periodo k.*

3. *Sea $x_0 \in \mathrm{Per}_k(f)$, su semiórbita positiva $\mathcal{O}_f^+(x_0) = \left\{x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\right\}$ es llamada k-ciclo.*

4. *x_0 se llama punto eventualmente k-periódico si y solo si existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^m(x_0) \in \mathrm{Per}_k(f)$.*

Observación 1.0.2.

1. *Si* $x_0 \in \mathrm{Per}_k(f)$ *entonces* $x_0 \in \mathrm{Fix}\left(f^k\right)$.

2. *Si* $x_0 \in Per_k(f)$ *entonces* $\mathcal{O}_f^+(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0)\}$.

3. $Fix(f) = Per_1(f)$

4. $Per(f) = \bigcup\limits_{k \in Z^+} \mathrm{Per}_k(f)$

Conjugación Topológica

Definición 1.0.5. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos. Decimos que f y g son topológicamente conjugados, si y solo si existe $h \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ tal que $h \circ f = g \circ h$. El homeomorfismo h se llama "conjugación topológica".*

Observación 1.0.3. *Si h es una conjugación topológica entre f y g entonces el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

La importancia del concepto consiste en que dos funciones topológicamente conjugadas tienen el mismo comportamiento dinámico.

Proposición 1.0.1. *Sean (X, f) y (Y, g) dos sistemas dinámicos y $h \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ una conjugación topológica entre f y g. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $h \circ f^n = g^n \circ h, \forall n \in \mathbb{N}$

2. $h\left[\mathcal{O}_f^+(x)\right] = \mathcal{O}_g^+(h(x)), \forall x \in X$

3. $h[\mathrm{Per}(f)] = \mathrm{Per}(g)$

4. $h\left[\mathrm{Per}_n(f)\right] = \mathrm{Per}_n(g), \forall n \in \mathbb{N}$

5. $h[\mathrm{Fix}(f)] = \mathrm{Fix}(g)$

Demostración.

1. Por inducción sobre n. Para $n = 1$, es la definición de conjugación topológica. suponemos que $h \circ f^{n-1} = g^{n-1} \circ h$ (Hip. Ind.), Demostremos para n :

$$\begin{aligned} h \circ f^n &= h \circ \left(f^{n-1} \circ f\right) = \left(h \circ f^{n-1}\right) \circ f = \left(g^{n-1} \circ h\right) \circ f = g^{n-1} \circ (h \circ f) \\ &= g^{n-1} \circ (g \circ h) = \left(g^{n-1} \circ g\right) \circ h = g^n \circ h \end{aligned}$$

2. $q \in h\left[\mathcal{O}_f^+(x)\right]$ si y solo si existe $p \in \mathcal{O}_f^+(x)$ tal que $q = h(p)$. Por otro lado

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{O}_f^+(x) &\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } p = f^n(x) \\ &\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } h(p) = h\left(f^n(x)\right) = g^n(h(x)) \\ &\Longleftrightarrow h(p) \in \mathcal{O}_g^+(h(x)) \end{aligned}$$

Luego

$$q \in h\left[\mathcal{O}_f^+(x)\right] \Longleftrightarrow q = h(p) \in \mathcal{O}_g^+(h(x))$$

Por tanto $h\left[\mathcal{O}_f^+(x)\right] = \mathcal{O}_g^+(h(x)), \forall x \in X$.

3. $q \in h[\operatorname{Per}(f)]$ si y solo si existe $p \in \operatorname{Per}(f)$ tal que $q = h(p)$. Por otro lado

$$\begin{aligned} p \in \operatorname{Per}(f) &\Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}^+ \text{tal que } p = f^m(p) \\ &\Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}^+ \text{tal que } h(p) = h\left(f^m(p)\right) = g^m(h(p)) \\ &\Longleftrightarrow q = h(p) \in \operatorname{Per}(g) \end{aligned}$$

Luego $h[\operatorname{Per}(f)] = \operatorname{Per}(g)$.

4. Sea $q \in h\left[\operatorname{Per}_n(f)\right]$ entonces existe $p \in \operatorname{Per}_n(f)$ tal que $h(p) = q$. Como $p \in \operatorname{Per}_n(f)$ entonces $f^n(p) = p$ y $f^j(p) \neq p, \forall 0 < j < n$. Luego

$$g^n(q) = g^n(h(p)) = h\left(f^n(p)\right) = h(p) = q$$

Además si $0 < j < n$ entonces $f^j(p) \neq p$, luego $q = h(p) \neq h\left(f^j(p)\right) = g^j(h(p)) = g^j(q)$, se sigue que $q \in \operatorname{Per}_n(g)$. Por tanto $h\left[\operatorname{Per}_n(f)\right] \subseteq \operatorname{Per}_n(g)$. El otro contenido es similar, trabajando con h^{-1} en vez de h.

5. Se sigue inmediatamente del item anterior.

De esta manera queda probada los 5 items de la proposición. $\square$

Conjunto Omega-límite

Definición 1.0.6. *Sea* (X, f) *. El conjunto* ω*-límite de un punto* $x \in X$*, denotamos por* $\omega(x, f)$*, es el conjunto de todos los puntos de la trayectoria de* x*, esto es,*

$$\omega(x, f) := \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{f^k(x) \ / \ k \geq n\}}.$$

El conjunto ω*-límite de la aplicación* f *es*

$$\omega(f) := \bigcup_{x \in X} \omega(x, f).$$

Definición 1.0.7. *Sea* (X, f) *. Un "conjunto invariante" (o* f*-invariante) es un conjunto cerrado no vacío* $Y \subset X$ *tal que* $f(Y) \subseteq Y$*; se dice fuertemente invariante si además se cumple que* $f(Y) = Y$*.*

Lema 1.0.1. *Sean* (X, f) *,* $x \in X$ *y* $n \geq 1$*. Entonces,*

1. $\omega(x, f)$ *es un conjunto cerrado fuertemente invariante de* X*.*
2. $\omega\left(f^n(x), f\right) = \omega(x, f)$
3. $\forall i \geq 0, \omega\left(f^i(x), f^n\right) = f^i\left(\omega\left(x, f^n\right)\right)$,
4. $\omega(x, f) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \omega\left(f^i(x), f^n\right)$
5. *si* $\omega(x, f)$ *es infinito, entonces* $\omega\left(f^i(x), f^n\right)$ *es infinito para todo* $i \geq 0$*.*
6. $f(\omega(f)) = \omega(f)$*.*

Demostración.

(1), (2), (3), (4) Se deducen fácilmente de la definición de conjunto ω-límite.

(5), (6) Se siguen de los items (1), (3) y (4).

$\square$

Capítulo 2

Caos según Devaney

En este capítulo estudiaremos caos según Devaney siguiendo su libro "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems" (Devaney, 1989).

2.1. Transitividad Topológica

Según Devaney (1989), existe una noción dinámica que está intimamente relacionada con la propiedad de tener una órbita densa. Este es el concepto de topológicamente transitivo.

Definición 2.1.1. *Sea* (X, f) *es topológicamente transitivo si y solo si existe* $x \in X$ *tal que* $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$.

Daremos una forma equivalente de definir topológicamente transitivo y en la proposición 2.1.1 verificaremos la equivalencia de estas definiciones bajo algunas consideraciones del espacio X.

Definición 2.1.2. *Sea* (X, f)*, se dice que* f *es "topológicamente transitivo" si y solo si* $\forall$ $U, V \subset X$ *abiertos, disjuntos, no vacíos, existe* $k > 0$ *tal que* $f^k[U] \cap V \neq \emptyset$.

La definición anterior nos dice que la dinámica de f no puede ser descompuesta en dos abiertos disjuntos, invariantes bajo f, puesto que si se toma dos de tales abiertos entonces existe en uno de ellos un punto cuyo iterado k-ésimo (para algún $k \in \mathbb{Z}$) pertenece al otro abierto.

Observación 2.1.1. *La definición 2.1.2 nos dice que existirán* $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$f^{k_1}[U] \cap V \neq \emptyset \quad o \quad U \cap f^{k_2}[V] \neq \emptyset$$

Proposición 2.1.1. *Consideremos X espacio métrico "completo", "separable" y "sin puntos aislados" y (X, f). Bajo estas consideraciones las definiciones 2.1.1 y 2.1.2 son equivalentes.*

Demostración.

i) Consideramos el sistema dinámico (X, f). Probaremos que si f posee una órbita densa (definición 2.1.1) entonces es topológicamente transitivo (definición 2.1.2).

   En efecto, existe $x^* \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f^+(x^*)} = X$.
   Sean $U, V \subseteq X$ abiertos, disjuntos, no vacíos y sean $x \in U$, y $\in V$, por la densidad, existe un $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^n(x^*) \in U$ y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x^*) \in V$.
   Como $U \cap V = \emptyset$ entonces $n \neq m$.
   Sin pérdida de generalidad consideramos $m > n$ tenemos:

$$f^m(x^*) = f^{m-n}(f^n(x^*)) \in f^{m-n}(U) \cap V$$

   Basta tomar $k = m - n$ >0 y tenemos $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

ii) Probaremos que f es topológicamente transitivo (definición 2.1.2) entonces posee una órbita densa (definición 2.1.1).

   En efecto, f es topológicamente transitivo entonces sean $U, V \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(V) \cap U \neq \emptyset$. Así, existe $x \in V$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(V) \cap U \neq \emptyset$ entonces $f^{n_0}(x) \in U \Rightarrow x \in f^{-n_0}(U)$
   $\Rightarrow f^{-n_0}(U) \cap V \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ (todo abierto de X interseca a la unión).
   Por lo que, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U)$ es densa en X.
   Como X es espacio métrico compacto entonces para cada natural n el espacio X admite un recubrimiento finito de bolas de radio $1/n$. La colección de tales bolas, para todo n, puede ser enumerado como la secuencia $\{U_k\}_{k \geq 1}$.
   Para todo $k \geq 1$, el conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U_k)$ es un conjunto abierto y denso en X.
   Por TEOREMA DE CATEGORÍA DE BAIRE, consideramos $G = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(U_k)$ donde G es denso en X, entonces existe $x \in X$ tal que $x \in G$ ($f^n(x)$ entra en cualquier conjunto U_k para algún n).

Es decir, $\mathcal{O}_f^+(x) \cap U_k \neq \emptyset$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, existe $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = X$.

De esta manera queda probado la proposición. $\square$

Observación 2.1.2. *Las condiciones impuestas sobre X en la proposición 2.1.1 son necesarias, pues caso contrario la equivalencia podría no darse como se muestra en los siguientes ejemplos.*

Tenemos por un lado, la existencia de órbitas densas no significa que sea topológicamente transitiva.

Ejemplo 2.1.1. *Sea $X = \{a, b\}$ con la topología discreta y $f : X \to X$ la aplicación constante $f(a) = f(b) = a$. Se tiene que $\overline{\mathcal{O}_f^+(b)} = \{a, b\}$ la cual es densa en X. Por otro lado, se considera los abiertos $U = \{a\}$ y $V = \{b\}$ entonces, no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Por otro lado, la condición de topológicamente transitivo no implica la existencia de órbitas densas.

Ejemplo 2.1.2. *Sea $X = \{\theta \in S^1 : \theta = \frac{2k\pi}{2^n-1}, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n - 1\} \subset S^1$ y sea $f : X \to X$ definido como $f(\theta) = 2\theta$. Esto es, $X = Per(g)$, donde (S^1, g) definido por $g(\theta) = 2\theta$, y f es la restricción de g en X.*

Dados $U, V \subset X$, "subconjuntos abiertos", "no vacíos" en X, ellos son de la forma $U = U' \cap X$, $V = V' \cap X$ con U', V' abierto en S^1.

Ahora, existe $k > 0$ con $g^k(U') = S^1$.

Así, $U' \cap g^{-k}(V') \neq \emptyset$ y abiertos en S^1 (g es continua). Desde que $\overline{Per(g)} = S^1$, existe un punto periódico $x \in U'$ con $g^k(x) \in V'$.

Como X es el conjunto de puntos periódicos de g, x pertenece a U y $f^k(x) = g^k(x) \in V$, así f es topológicamente transitivo. Pero no hay una órbita densa porque todas las órbitas son periódicas y ellas no son densas en X.

Observación 2.1.3. *Algunos ejemplos de espacios métricos que satisfacen las hipótesis de la proposición 2.1.1 son $X = I$ (intervalo), $X = \mathbb{R}^n$, $X = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$, etc.*

2.2. Definición de caos

Devaney (1989) estudió principalmente sistemas dinámicos en intervalos o en la recta real donde observó algún comportamiento caótico, es por ello que él postula que el caos debe tener 3 ingredientes:

- Indescomponibilidad: el sistema es uno solo, no se puede descomponer en los elementos predecibles de los impredecibles.
- Impredecibilidad: no se sabe lo que va a ocurrir o que no puede ser predecido.
- Un elemento de regularidad: se refiere a los elementos deterministas del sistema.

Vimos en la sección anterior la definición de topológicamente transitivo, la cual está relacionada con indescomponibilidad. Veamos una definición precisa de cada uno de los dos restantes.

Definición 2.2.1. *Sean* (X, f) *y* $\varepsilon > 0$. *Decimos que el sistema tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales si y solo si existe un* $\varepsilon > 0$ *tal que* $\forall\ x \in X$ *y* $\forall\ U$ *abierto de* x, $\exists\ y \in U$ *y* $n \geq 0$ *tal que* $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$.

Observación 2.2.1. *En el caso* X *sea un intervalo se considera que* d *es la métrica usual.*

Intuitivamente, el significado de que un sistema dinámico tenga dependencia sensible a las condiciones iniciales es que dado cualquier punto de su dominio, siempre existe un punto muy cercano a él que se va alejando por iteraciones sucesivas de ambos. Esto es malo desde el punto de vista del análisis numérico puesto que pequeños errores (que aparecen inevitablemente en las aplicaciones y modelos matemáticos) pueden ser magnificados bajo iteraciones.

Definición 2.2.2. *Sea* (X, f), *se dice que es "caótico según Devaney", si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. f *es topólogicamente transitivo.*
2. $\overline{Per(f)}=X$
3. f *tiene dependencia "sensible a las condiciones iniciales".*

Observación 2.2.2. *Intuitivamente, la condición (2) da a f un elemento de regularidad y la condición (3) dice que f es impredecible.*

Algunos años después, se demostró que la tercera condición es consecuencia de las dos primeras condiciones, lo cual veremos en el siguiente teorema (J. Banks y Stacey, 1992).

Teorema 2.2.1. *Sea (X, f) , si f es "topológicamente transitivo" y tiene un "conjunto denso de puntos periódicos", entonces f tiene "dependencia sensible a las condiciones iniciales".*

Demostración.

i) Sea $x \in X$ demostraremos que existe un punto en cualquier vecindad de x tal que la distancia de sus iteraciones es mayor que cierto número fijo. (sensibilidad a las condiciones iniciales)

ii) Es posible hallar un punto periódico q ($q \in Per_l(f)$) tal que la distancia de x a la $\mathcal{O}_f^+(q)$ es de al menos 4δ, para cierto $\delta > 0$:

$$i.e. \quad d(x, f^l(q)) \geq 4\delta, \quad l \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

En efecto, sean dos puntos periódicos q_1, q_2 con órbitas disjuntas hacemos

$$8\delta = min\{d(x, y) : x \in \mathcal{O}_f^+(q_1), y \in \mathcal{O}_f^+(q_2)\}$$

Notamos que $8\delta > 0$ pues las órbitas son disjuntas, además el mínimo existe ya que ambas órbitas posee una cantidad finita de elementos.

Luego, hacemos $q = q_1$ o $q = q_2$ dependiendo de la posición de x.

iii) Por hipótesis, $\overline{Per(f)} = X$, entonces es posible escoger "un punto periódico p de periodo $n \in \mathbb{N}$" tal que pertenezca al conjunto abierto $B_\gamma(x)$ con $0 < \gamma \leq \delta$.

$$i.e. \quad p \in B_\gamma(x) \Rightarrow d(x, p) < \gamma \leq \delta \Rightarrow d(x, p) < \delta \tag{2.2}$$

Definimos $V = \bigcap\limits_{0 \leq i \leq n} f^{-i}(B_\delta(f^i(q)))$

Notamos que para todo i, $f^{-i}(B_\delta(f^i(q)))$ es abierto pues al ser f continua, la inversa de un conjunto abierto es abierto. Por lo que, la intersección de todos estos conjuntos no es vacía ya que q pertenece a todos.

Entonces, V es abierto y distinto al vacío.

iv) Por hipótesis, también tenemos que f es topológicamente transitivo entonces existe $y \in B_\gamma(x)$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(y) \in V$.

Sea j igual a la parte entera de $k/n + 1$, es decir $j \leq k/n + 1 < j + 1$

$\Rightarrow j - 1 \leq \frac{k}{n} < j \Rightarrow nj - n \leq k < nj \Rightarrow 1 \leq nj - k \leq n.$

Entonces de la misma construcción de V tenemos que

$$f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in B_\delta(f^{nj-k}(q)) \tag{2.3}$$

v) Como p es periódico de periodo n tenemos $f^{nj}(p) = p$ entonces por desigualdad triangular:

$$d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) = d(p, f^{nj}(y)) \geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(f^{nj-k}(y), f^{nj-k}(q)) - d(x, p)$$

Por (2.1): $d(x, f^{nj-k}(q)) \geq 4\delta$

Por (2.3): $-d(f^{nj-k}(y), f^{nj-k}(q)) \geq -\delta$

Por (2.2): $-d(x, p) \geq -\delta$

Entonces, $d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > 2\delta$.

vi) Veremos que p o y es el punto que satisface lo mencionado en el paso (i).

En efecto, se presenta dos casos:

Si $d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) > \delta$ tenemos que p es el punto que cumple la condición.

Si $d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) \leq \delta$ tenemos:

$$d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) \geq d(f^{nj}(y), f^{nj}(p)) - d(f^{nj}(p), f^{nj}(x))$$

Por lo que se tiene que $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$.

vi) Finalmente, para cualquier bola de radio γ (ahora consideramos γ arbitrario) con centro en x (con x arbitrario) tenemos que existe un elemento que pertenece a esta bola tal que una de sus iteraciones de f se alejo una distancia mayor a δ de la iteración de x.

Por lo que generalizar para una vecindad arbitraria es inmediato.

Por lo tanto, f tiene "sensibilidad a las condiciones iniciales". $\square$

Proposición 2.2.1. *Sea (I, f) donde I es un intervalo, si es "topológicamente transitivo", entonces tiene un "conjunto de puntos periódicos" denso en I.*

Demostración.

i) Suponemos que existe $a, b \in I$, con $a < b$, tal que (a,b) no contiene "puntos periódicos". Como f es topológicamente transitiva, entonces $\overline{\mathcal{O}_f^+(x)} = I$, es decir, existe un punto $x \in (a, b)$ con una órbita densa (proposición 2.1.1, parte (ii)).

ii) Afirmación. Sea J un subintervalo de I que no contiene "puntos periódicos" y suponiendo que $x, y, f^m(x)$, $f^n(y)$ pertenecen a J. Se cumple que:

$$\text{si } x < f^m(x) \text{ entonces } y < f^n(y) \tag{2.4}$$

donde $x, y \in I$ y $n, m \in \mathbb{N}$.

En efecto, hacemos $g := f^m$. Probaremos por inducción sobre k que $g^k(x) > x$ para todo $k \geq 1$. Por hipótesis, el enunciado es válido para $k = 1$. Supongamos que $g^i(x) > x$ para todo $i \in \{k \in \mathbb{Z}/n \leq k \leq m\}$ y que $g^k(x) \leq x$. Escribimos

$$\{g^i(x)|i = 0, 1, 2, \ldots, k-1\} = \{x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{k-1}\}.$$

Tenemos $x_0 = x$ y $x_1 \neq x$ ya que x no es periódico. Se sigue que

$$g^k(x) \leq x = x_0 < x_1 \leq \ldots \leq x_{k-1}.$$

Sea $j = 1, 2, \ldots, k-1$ tal que $x_1 = g^j(x)$. Por el "teorema del valor intermedio",

$$g^{k-j}([x_0, x_1]) \supset [g^k, g^{k-j}(x)] \supset [x_0, x_1].$$

Por lo tanto, por el lema 3.2.1, g tiene un punto periódico en $[x_0, x_1]$. Pero $[x_0, x_1] \subset J$ pues $x_1 = \text{mín}\{g^i(x)|i = 0, 1, 2, \ldots, k-1\} \leq g(x)$. Esto lleva a una contradicción desde que J no contiene ningún punto periódico para $g = f^m$. Deducimos que $g^k(x) > x$ para todo $k \geq 1$ y con ello la inducción ha terminado.

Supongamos que $f^n(y) < y$. El mismo argumento que el anterior (en orden inverso) muestra que $f^{kn}(y) < y$ para todo $k \geq 1$. Como

$$y > f^{mn}(y) \quad \text{y} \quad x < f^{mn}(x).$$

La aplicación $t \mapsto f^{mn}(t) - t$ es continua sobre el intervalo $\langle x, y\rangle$ ($\langle x, y\rangle = [x, y]$ o $[y, x]$ dependiendo del orden de x, y). Así, por el "teorema del valor intermedio", existe un punto $z \in \langle x, y\rangle$ tal que $f^{mn}(z) = z$. Esto lleva a una contradicción porque $\langle x, y\rangle \subset J$. Por tanto, llegamos a la conclusión de que $y < f^n(y)$ (la igualdad no es posible porque y no es periódico).

iii) Así, existen los enteros $m > 0$ y $0 < p < q$ tal que
$x < f^m(x) < b$ y $a < f^q(x) < f^p(x) < x$.
Hacemos $y := f^p(x)$. Entonces se tiene

$$a < f^{q-p}(y) < y < x < f^m(x) < b$$

Pero esto es imposible por (2.4) aplicado para $J = (a, b)$, esto por suponer que (a, b) no contiene puntos periódicos. Por lo tanto, el "conjunto de puntos periódicos" es denso en I.

De esta manera queda probado la proposición. □

Observación 2.2.3. *Gracias al Teorema 2.2.1 tenemos que para sistemas dinámicos en intervalos, ser topológicamente transitivo es suficiente para implicar las otras dos condiciones, la cual queda enunciado en la siguiente proposición.*

Proposición 2.2.2. *Un "sistema dinámico" en intervalo es "caótico según Devaney" si y solo si es topológicamente transitivo.*

Demostración. Se sigue directamente de las proposiciones 2.1.1 y 2.2.1. □

2.3. Ejemplos de sistemas dinámicos caóticos

Círculo unitario

Para las aplicaciones del círculo unitario el círculo unitario S^1 se define como

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |(x, y)| = 1\}$$

Con la métrica inducida de $\mathbb{R}^2$, S^1 se torna un espacio métrico. Lo interesante es que al ser S^1 un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, sus elementos pueden ser parametrizados por los reales. En efecto, consideramos la función $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\lambda(\theta) = (cos\theta, sen\theta)$. Se sigue que $\lambda[\mathbb{R}] = S^1$, pero λ no es inyectiva, sin embargo se cumple que

$$\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2) \iff \theta_1 - \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

De esta manera θ_1 y θ_2 representan un mismo punto de S^1 si y solo si existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$. (Ver la Figura 2.1)

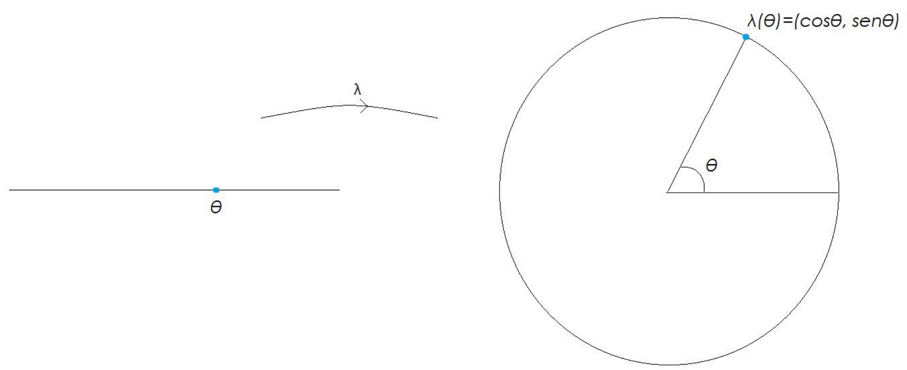


Figura 2.1

Dado p $\in S^1$, existe un único $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que $\lambda(\theta) = p$, θ es llamado la representación(el argumento) principal de p. Por abuso de lenguaje, identificamos p con su argumento principal θ.

Estudiamos la dinámica de $g : S^1 \to S^1$ definido por $g(\theta) = 2\theta$. En primer lugar, analizamos sus puntos fijos:

$$\theta \in \text{Fix}(g) \iff g(\theta) = \theta \iff 2\theta = \theta \iff \theta = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \theta = 2k\pi$$

Se sigue que

$$\mathrm{Fix}(g) = \{0\}$$

Para determinar los puntos periódicos de g, observamos que

$$g^n(\theta) = 2^n\theta, \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$\begin{aligned} \theta \in \mathrm{Fix}\,(g^n) &\iff g^n(\theta) = \theta \iff 2^n\theta = \theta \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \left(2^n - 1\right)\theta = 2k\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1} \end{aligned}$$

Ahora bien

$$0 \leq \theta < 2\pi \iff 0 \leq \frac{2k\pi}{2^n - 1} < 2\pi \iff 0 \leq k < 2^n - 1$$

Por tanto

$$\mathrm{Fix}\,(g^n) = \left\{\frac{2k\pi}{2^n - 1}; 0 \leq k < 2^n - 1\right\}$$

Por ejemplo

$$Fix\left(g^2\right) = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\} \Longrightarrow Per_2(g) = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

$$Fix\left(g^3\right) = \left\{0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}\right\} \Longrightarrow Per_3(g) = \left\{\frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}\right\}$$

Continuando por inducción, concluimos que

$$\mathrm{card}\,(\mathrm{Fix}\,(g^n)) = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Por otro lado, afirmamos que los números racionales de la forma $\frac{k}{2^n-1}$, con $0 \leq k < 2^n - 1$ y $n \in \mathbb{N}$, es denso en el intervalo $[0, 1]$.

En efecto, sean $a, b \in [0, 1]$ tal que $a < b$.

Sea $n \in \mathbb{N}$: $2^n - 1 > \frac{k}{b-a}$, es decir, $\frac{k}{2^n-1} < b - a$

$\Rightarrow$ k $=$ $\text{máx}\{p \in \mathbb{N} : 0 \leq \frac{p}{2^n-1} < b\} \Rightarrow \frac{k}{2^n-1} < b$ y $\frac{k}{2^n-1} + \frac{1}{2^n-1} \geq b$

$\Rightarrow a < b - \frac{1}{2^n-1} \leq \frac{k}{2^n-1} \leq b$

Así, $a < \frac{k}{2^n-1} \leq b$.

Por lo tanto, el "conjunto de los números racionales" de la forma $\frac{k}{2^n-1}$ es denso en [0,1].

Luego, $\overline{\mathrm{Per}(g)} = S^1$.

Hemos probado una de las condiciones (el elemento de regularidad) que necesita el sistema dinámico para ser caótico.

Afirmación 1: Si $U \subseteq S^1$ es abierto entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n[U] = S^1$.

En efecto, en primer lugar observamos que podemos identificar $U \subseteq S^1$ con un abierto de $[0, 2\pi[$, más aún, suponemos $U =]\alpha, \rho\,[$, luego $\text{diam}(U) = \beta - \alpha$.

Ahora bien $g^n[U] =]\,2^n\alpha, 2^n\beta[, \forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\text{diam}\,(g^n[U]) = 2^n(\beta - \alpha)$ y de esta manera, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n_0} > \frac{2\pi}{\beta-\alpha}$, luego $\text{diam}\,(g^{n_0}[U]) > 2\pi$ y por tanto $g^{n_0}[U] = S^1$, lo que prueba la Afirmación 1.

De aquí es fácil probar que g es topológicamente transitivo puesto que si $U, V \subseteq S^1$ son abiertos, no vacíos, disjuntos, por la Afirmación 1, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n[U] = S^1$, luego $g^n[U] \cap V = V \neq \emptyset$.

Afirmación 2: g tiene "dependencia sensible a las condiciones iniciales".

En efecto, sea $\theta_0 \in S^1$ y $N \subseteq S^1$ vecindad abierta de θ_0. Si $\theta \in N$, se cumple:

$$|g^n(\theta) - g^n(\theta_0)| = 2^n\,|\theta - \theta_0|\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n_0} > \frac{1}{|\theta-\theta_0|}$ y por tanto

$$|g^{n_0}(\theta) - g^{n_0}(\theta_0)| > 1$$

Basta tomar $\varepsilon = 1$, para que la Afirmación 2 esté probada.

Por lo tanto, el sistema dinámico (S^1, g) es "caótico según Devaney".

Ecuación logística

Sea el sistema dinámico F: [0,1] $\rightarrow$ [0,1] definido por F(x) = 4x(1-x).

Vamos aprovechar que el sistema dinámico (S^1, g) es caótico para probar que el sistema dinámico $([0,1], F)$ es "caótico según Devaney".

Definimos $h_1 : S^1 \rightarrow [-1, 1]$ como $h_1(\theta) = cos\theta$.

Notamos que h_1 es la proyección de S^1 sobre el intervalo [-1, 1], además h_1 es continua pero no es inyectiva. Consideramos también la función $q : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ definida por $q(x) = 2x^2 - 1$.

Afirmación 1: $h_1 \circ g = q \circ h_1$

En efecto,

$$(h_1 \circ g)(\theta) = h_1(2\theta) = \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = q(\cos\theta) = q(h_1(\theta)) = (q \circ h_1)(\theta)$$

Lo cual prueba la Afirmación 1.

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_1"'] & S^1 \arrow[d, "h_1"] \\ {[-1,1]} \arrow[r, "q"] & {[-1,1]} \end{tikzcd}$$

Sea $h_2 : [-1,1] \to [0,1]$ definido por $h_2(x) = \frac{1}{2}(1-x)$

Afirmación 2: $h_2 \circ q = F \circ h_2$.

En efecto

$$(h_2 \circ q)(x) = h_2\left(2x^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left[1 - \left(2x^2 - 1\right)\right] = 1 - x^2$$

Por otro lado

$$(F \circ h_2)(x) = F\left(\frac{1}{2}(1-x)\right) = 4 \cdot \frac{1}{2}(1-x)\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right) = 2(1-x)\left(\frac{1+x}{2}\right) = 1 - x^2$$

De las dos igualdades anteriores se prueba la Afirmación 2.

$$\begin{tikzcd} {[-1,1]} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "h_2"'] & {[-1,1]} \arrow[d, "h_2"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "F"] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

Si denotamos $h = h_1 \circ h_2$ entonces $h : S^1 \to [0,1]$ es continua y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & S^1 \arrow[d, "h"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "F"] & {[0,1]} \end{tikzcd}$$

Afirmación 3 : F tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales.

En efecto, sean $x \in [0,1]$ y N vecindad abierta de x. Como $h^{-1}[N] \subseteq S^1$ es abierto de S^1, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n\left[h^{-1}[N]\right] = S^1$, luego $h\left[g^n\left[h^{-1}[N]\right]\right] = [0,1]$. Pero, $h\left[g^n\left[h^{-1}[N]\right]\right] = F^n\left[h\left[h^{-1}[N]\right]\right] \subseteq F^n[N]$. Luego, $F^n[N] = [0,1]$. Como $x \in N$ entonces

$F^n(x) \in [0,1]$.

Si $F^n(x) > \frac{1}{2}$ (resp. $F^n(x) < \frac{1}{2}$) entonces existe un z tal que $0 < z < F^n(x) - \frac{1}{2}$ (resp. $F^n(x) + \frac{1}{2} < z < 1$). Como $z \in F^n[N]$ entonces existe un $y \in N$ tal que $F^n(y) = z$, luego $F^n(y) - F^n(x) < -\frac{1}{2}$ (resp. $F^n(y) - F^n(x) > \frac{1}{2}$) .

Luego $|F^n(y) - F^n(x)| > \frac{1}{2}$.

Basta tomar $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ y la Afirmación 3 está probada.

Afirmación 4: F es topológicamente transitivo en $[0,1]$.

En efecto, sean $U, V \subseteq I$.ªbiertos", "no vacíos", disjuntos, entonces $h^{-1}[U], h^{-1}[V] \subseteq S^1$ son abiertos, no vacíos, disjuntos, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n\left[h^{-1}[U]\right] \cap h^{-1}[V] \neq \emptyset$.

Luego,

$$\emptyset \neq h\left[g^n\left[h^{-1}[U]\right] \cap h^{-1}[V]\right] \subseteq h\left[g^n\left[h^{-1}[U]\right]\right] \cap h\left[h^{-1}[V]\right]$$

Tenemos que

$$h\left[g^n\left[h^{-1}[U]\right]\right] \cap h\left[h^{-1}[V]\right] = F^n\left[h\left[h^{-1}[U]\right]\right] \cap h\left[h^{-1}[V]\right] \subseteq F^n[U] \cap V$$

Por lo tanto, $F^n[U] \cap V \neq \emptyset$, lo cual demuestra la Afirmación 4 .

Afirmación 5 : $\overline{\operatorname{Per}(F)} = [0,1]$

En efecto, sabemos que $\overline{\operatorname{Per}(g)} = S^1$, luego

$$[0,1] = h\left[S^1\right] = h[\overline{\operatorname{Per}(g)}] \subseteq \overline{h[\operatorname{Per}(g)]} \subseteq \overline{\operatorname{Per}(F)}$$

De las tres últimas afirmaciones, $([0,1], F)$ es un sistema "caótico según Devaney".

Shift de Bernoulli

El conjunto formado por todas las secuencias de ceros y unos es llamado espacio de secuencias binarias y será denotado por Σ, es decir

$$s = (s_k) \in \Sigma \Leftrightarrow s_k \in \{0,1\}, \forall k \in \mathbb{N}$$

A continuación, dotaremos a Σ de una métrica.

Sean $s = (s_k), t = (t_k) \in \Sigma$, definimos

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k}$$

Por ejemplo, si $s = (1,0,1,0,\ldots), t = (0,1,0,1,\ldots)$ entonces

$$d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

Observamos que como $|s_k - t_k| \leq 1$, entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$. Se sigue que $d(s,t) \in \mathbb{R}\ \forall s,t \in \Sigma$

Afirmación 1. (Σ, d) es un espacio métrico.

En efecto, es evidente que $d(s,t) \geq 0, \forall s,t \in \Sigma, d(s,t) = 0$ si y solo si $s = t$ y $d(s,t) = d(t,s)$, $\forall s,t \in \Sigma$

Solo probaremos la desigualdad triangular. Sean $s = (s_k), t = (t_k), r = (r_k) \in \Sigma_2$, se cumple $|s_k - t_k| \leq |s_k - r_k| + |r_k - t_k|, \forall k \in \mathbb{N}$, luego

$$\frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \frac{|s_k - r_k|}{2^k} + \frac{|r_k - t_k|}{2^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

y de aquí se sigue que $d(s,t) \leq d(s,r) + d(r,t)$.

Quedando probada la afirmación 1.

Proposición 2.3.1. *Sean $s = (s_k), t = (t_k) \in \Sigma$, se cumple:*

1. *Si $s_k = t_k$, $\forall\ 0 \leq k \leq n$ entonces $d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$.*

2. *Si $d(s,t) < \frac{1}{2^n}$ entonces $s_k = t_k$, $\forall\ 0 \leq k \leq n$.*

Demostración.

$$1.\quad d(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots\right] = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

2. Supongamos que existe $k_0 \in \{0,1,\ldots,n\}$ tal que $s_{k_0} \neq t_{k_0}$, entonces

$$\frac{1}{2^n} > d(s,t) \geq \frac{|s_{k_0} - t_{k_0}|}{2^{k_0}} = \frac{1}{2^{k_0}}$$

Se sigue que $2^{k_0} > 2^n$, es decir $k_0 > n$, lo cual es una contradicción. $\square$

Observación 2.3.1. *En virtud de la proposición anterior, una condición necesaria y suficiente para que dos secuencias binarias estén cercanas es que sus primeros términos coincidan y mientras mayor sea el número de primeros términos coincidentes, más cercanas estarán las secuencias.*

Por lo que, llamaremos Shift de Bernoulli a la aplicación $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ definido por

$$\sigma\left(s_0, s_1, s_2, \ldots\right) = \left(s_1, s_2, \ldots\right)$$

Afirmación 2. $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ es una aplicación continua.

En efecto, sea $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots) \in \Sigma$ (fijo, arbitrario), dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$, tomo $\delta = \frac{1}{2^n}$ y $t = (t_0, t_1, t_2, \ldots) \in \Sigma$ tal que $d(t, s) < \frac{1}{2^n} = \delta$. Por la Proposición 2.3.1, $s_k = t_k, \forall 0 \leq k \leq n+1$. En particular $t_1 = s_1, t_2 = s_2, \ldots, t_{n+1} = s_{n+1}$, luego los primeros $n+1$ términos de $\sigma(t)$ coincide con los primeros n términos de $\sigma(s)$, nuevamente por la Proposición 2.3.1, $d(\sigma(t), \sigma(s)) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. De esta manera σ es continua en s y como $s \in \Sigma$ fue arbitrario, concluímos que σ es continua en Σ.

Por otro lado, estudiemos la dinámica del shift de Bernoulli $\sigma : \Sigma \to \Sigma$. Empezamos determinando los puntos fijos de σ.

$$\begin{aligned} s = (s_0, s_1, s_2, \ldots) \in \operatorname{Fix}(\sigma) &\Longleftrightarrow \sigma(s) = s \Longleftrightarrow s_1 = s_0, s_2 = s_1, s_3 = s_2, \ldots \\ &\Longleftrightarrow s = (s_0, s_0, s_0, \ldots) \end{aligned}$$

De esta manera, los únicos puntos fijos de σ son las secuencias constantes $s = (0, 0, 0, \ldots)$ y $s = (1, 1, 1, \ldots)$. Ahora determinamos los puntos fijos de σ^2 :

$$\begin{aligned} s = (s_0, s_1, s_2, \ldots) \in \operatorname{Fix}\left(\sigma^2\right) &\Longleftrightarrow \sigma^2(s) = s \Longleftrightarrow s_2 = s_0, s_3 = s_1, s_4 = s_2 = s_0, s_5 = s_3 = s_1 \ldots \\ &\Longleftrightarrow s = (s_0, s_1, s_0, s_1, s_0, \ldots) \end{aligned}$$

De esta manera σ^2 tiene 4 puntos fijos: $(0, 0, 0, 0, \ldots), (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots), (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ y $(1, 1, 1, 1, \ldots)$. Se sigue que

$$\operatorname{Per}_2(\sigma) = \{(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots), (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots), \}$$

En general tenemos el siguiente resultado:

Afirmación 3. Fix $(\sigma^n) = \{s = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \dots)\}$ y por tanto $card(Fix\ (\sigma^n)) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\begin{aligned} s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \in \mathrm{Fix}\,(\sigma^n) &\Longleftrightarrow \sigma^n(s) = s \\ &\Longleftrightarrow s_n = s_0, s_{n+1} = s_1, \dots, s_{2n-1} = s_{n-1}, s_{2n} = s_n, \dots \\ &\Leftrightarrow s = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \dots) \end{aligned}$$

Por tanto, $card(Fix\ (\sigma^n)) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Con todo lo anterior podemos empezar a probar que el sistema dinámico es "caótico según Devaney".

Afirmación 4. $\overline{\mathrm{Per}(\sigma)} = \Sigma$

En efecto, sean $s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \in \Sigma$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Definimos $t = (s_0, s_1, \dots, s_{n+1}, s_0, s_1, \dots, s_{n+1}, \dots) \in \mathrm{Fix}\,(\sigma^{n+2}) \subseteq \mathrm{Per}(\sigma)$ el cual satisface $d(t, s) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$.

Afirmación 5. Existe $s^* \in \Sigma$ tal que $\overline{\mathcal{O}_\sigma^+(s^*)} = \Sigma$

En efecto, definimos

$$s^* = (\underbrace{0,1}_{2}, \underbrace{0,0,0,1,1,0,1,1}_{8=2\times 2^2}, \underbrace{0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,1,0,1,1,1}_{24=3\times 2^3}, \dots) \in \Sigma$$

Dados $s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \in \Sigma$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Por la Proposición 2.3.1, para que un $t = (t_1, \dots, t_n, \dots) \in \Sigma$ satisfaga $d(t, s) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$, se debe cumplir que $t_k = s_k\ \forall\ 1 \leq k \leq n$. Si $N = 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + n \times 2^n$ entonces

$$\sigma^N(s^*) = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n+1}, \underbrace{0,0,\dots,1}_{n+1}, \underbrace{0,0,\dots,1,0}_{n+1}, \dots)$$

basta iterar $j(n+1)$ veces más $(0 \leq j \leq 2^{n+1} - 1)$ para hallar el "paquete" de $n+1$ configuraciones de ceros y unos que coincida con $s_0, s_1, \dots, s_n$ y obtener

$$\sigma^{N+j(n+1)}(s^*) = (s_0, s_1, \dots, s_n, \dots)$$

Se sigue que $d\left(\sigma^{N+j(n+1)}(s^*), s\right) < \varepsilon$ y por tanto $\overline{\mathcal{O}_\sigma^+(s^*)} = \Sigma$.

Afirmación 6. El sistema σ tiene sensibilidad a las condiciones iniciales.

En efecto, tomamos $\varepsilon = 1/2$ y $x = (s_0, s_1, \ldots)$ arbitraria. Sea $\delta > 0$, por la propiedad arquimediana $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \delta$ y tomamos $y = (t_0, t_1, \ldots)$ tal que $y_k = x_k\ \forall$ $k = 0, 1, 2, \ldots, n_0 - 1, n_0 + 1, \ldots$ con $y_{n_0} \neq x_{n_0}$. Por lo que tendríamos,

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{2^k} = \frac{1}{2^{n_0}} < \delta$$

y $d(\sigma^{n_0-1}(x), \sigma^{n_0-1}(y)) = \frac{1}{2} \geq \varepsilon$.

Por las afirmaciones 4, 5 y 6 el shift de Bernoulli es caótica según Devaney.

Capítulo 3

Caos según Li-Yorke

En este capítulo estudiaremos caos según Li-Yorke siguiendo el artículo “Period Three Implies Chaos” (Li y Yorke, 1975).

3.1. Definición de caos

En esta sección tenemos como objetivo explicar el significado de conjunto scrambled y la definición de caos según Li y Yorke (1975).

Definición 3.1.1. *Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ y el sistema dinámico (X, f). Entonces, un subconjunto S de X (que no tiene puntos periódicos) se llama conjunto scrambled si para cualquier $x, y \in S$ con $x \neq y$ y cualquier punto periódico $p \in X$ de f, satisface las siguientes condiciones:*

1. $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$
2. $\displaystyle\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$
3. $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) > 0$

Definición 3.1.2. *El “sistema dinámico” f se dice “caótico según Li-Yorke” si existe un conjunto $S \subset X$ “scrambled” no numerable.*

Observación 3.1.1. *La condición (3) es solo “una consecuencia de las dos primeras condiciones”, que no están incluidas en la definición actual.*

Proposición 3.1.1. *Sea (X, f) que satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición 3.1.1. Entonces la condición (3) también se mantiene.*

Demostración.

i) Suponemos que la condición (3) no se cumple.

Es decir, para cualquier punto periódico $p \in X$, $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) \leq 0$

Como $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) \leq \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) \leq 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0.$

ii) Entonces, cada $x \neq y$ existen "puntos periódicos" p y q que verifican

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} d(f^n(y), f^n(q)) = 0$$

iii) Ahora, se presenta dos casos:

Si $p = q$, $d(f^n(x), f^n(y)) \leq d(f^n(x), f^n(p)) + d(f^n(y), f^n(p))$

Tomamos límite,

$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(p)) + \lim_{n\to\infty} d(f^n(y), f^n(p)) = 0$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$

Así, $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$. Luego la condición (1) no se verifica.

Si p≠q, tenemos que $0 \leq d(f^n(x), f^n(y))$

Así, $0 < \liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y))$, luego la condición (2) no se verifica.

De esta manera queda probada la proposición. □

3.2. Periodo tres implica caos

En el "artículo original de Li y Yorke" (1975), introdujeron un resultado que establece que cualquier función cuyo punto periódico sea el período tres es automáticamente caótica. Este resultado tiene un gran impacto, siendo uno de los factores que desencadenó la explosión de los sistemas dinámicos discretos en la década de 1970.

Definición 3.2.1. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \to I$ y J,K $\subseteq$ I, se dice que f(J) cubre K, lo que se denota $J \mapsto K$ si y solo si $K \subseteq f(J)$.*

Lema 3.2.1. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo e (I, f) . Si $J \subseteq I$ es un "intervalo compacto" tal que $J \mapsto J$ entonces f tiene un "punto fijo" en J.*

Demostración.

i) Como J es un intervalo compacto y f es continua entonces $f(J)$ es un intervalo compacto, denotamos $f(J)$=$[y_1, y_2]$, luego $\exists\ x_1, x_2 \in$ J tal que $f(x_1)$=y_1 y $f(x_2)$=y_2. Por hipótesis $J \subseteq f(J) = [y_1, y_2]$.

ii) Definimos $g : I \to I$ como $g(x) = f(x) - x$. Tenemos que $g : I \to I$ una función continua, además

$$g(x_1) = f(x_1) - x_1 = y_1 - x_1 \leq 0$$

$$g(x_2) = f(x_2) - x_2 = y_2 - x_2 \geq 0$$

iii) Por el "Teorema de Valor Medio" $\exists\ x_0$ entre x_1 y x_2 (y por tanto en J) tal que $g(x_0)$=0. Por tanto existe $x_0 \in I$ tal que $f(x_0) = x_0$.

De esa manera queda probado el lema. □

Lema 3.2.2. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y (I, f) . Si J,K $\subseteq$ I son intervalos compactos tales que $J \mapsto K$ entonces existe $J_0 \subseteq J$ intervalo compacto tal que $f(J_0)$=K.*

Demostración.

i) Por hipótesis, $K \subseteq f(J)$, entonces sea $K = [f(x_1),f(x_2)]$ con x_1,$x_2 \in J$.

ii) Sin pérdida de generalidad suponemos $x_1 < x_2$, sean:

$$r := \text{máx}\ \{x \in [x_1, x_2] : f(x) = f(x_1)\}$$

$$s := \text{mín}\ \{x \in [x_1, x_2] : f(x) = f(x_2)\}$$

iii) Tomando J_0=[r,s] $\subset$ J, entonces por el Teorema de Valor Medio es claro que $f(J_0) = K$.

De esa manera queda probada el lema. □

Proposición 3.2.1. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo e (I, f). Si existen intervalos compactos $I_0, I_1, \ldots, I_{n-1} \subseteq I$ tales que:*

$$I_0 \mapsto I_1 \mapsto I_2 \mapsto \cdots \mapsto I_{n-1} \mapsto I_0$$

entonces existe $x^* \in \text{Fix}\,(f^n)$ tal que $f^m\,(x^*) \in I_m$, $\forall$ $0 \leq m \leq n - 1$.

Demostración.

i) Establecemos la siguiente afirmación:

Afirmación. Existen intervalos cerrados $J_0, J_1, \ldots, J_{n-1}$ tales que

1. $I_0 \supseteq J_0 \supseteq J_1 \supseteq \cdots \supseteq J_{n-1}$

2. $f(J_0) = I_1, f^2(J_1) = I_2, \ldots, f^n(J_{n-1}) = I_n = I_0$

En efecto, probamos por inducción. Para $m = 1$, como $I_0 \mapsto I_1$, por el Lema 3.2.2, existe $J_0 \subseteq I_0$ intervalo compacto tal que $f(J_0) = I_1$

Suponemos que la afirmación es cierta para $m < n$ (Hip. Ind.), luego existen intervalos cerrados $J_0, J_1, \ldots, J_{m-1}$ tales que

1. $I_0 \supseteq J_0 \supseteq J_1 \supseteq \cdots \supseteq J_{m-1}$

2. $f(J_0) = I_1, f^2(J_1) = I_2, \ldots, f^m(J_{m-1}) = I_m$

Hacemos la demostración para $m + 1$:

Como $f^{m+1}(J_{m-1}) = f(I_m) \supseteq I_{m+1}$, tenemos que $J_{m-1} \mapsto I_{m+1}$ (vía $f^{m+1} : I \to I$ una función continua). Por el Lema 3.2.2, existe $J_m \subseteq J_{m-1}$ intervalo cerrado tal que $f^{m+1}(J_m) = I_{m+1}$.

De esta manera, la afirmación está probada.

ii) Tenemos que, $f^n(J_{n-1}) = I_n = I_0 \supseteq J_{n-1}$.

Por el Lema 3.2.1, existe $x^* \in J_{n-1}$ tal que $x^* \in \operatorname{Fix}(f^n)$.

Además, como $x^* \in J_{n-1}$, para $1 \leq m \leq n-1$ se tiene

$$f^m(x^*) \in f^m(J_{n-1}) \subseteq f^m(J_{m-1}) = I_m$$

Por lo tanto, existe $x^* \in \operatorname{Fix}(T^n)$ tal que $f^m(x^*) \in I_m$, $\forall\ 0 \leq m \leq n-1$.

De esa manera queda probada la proposición. $\square$

Notación 3.2.1. *$I_0 \mapsto I_1 \mapsto \cdots \mapsto I_{n-1} \mapsto I_0$ es llamado ciclo de longitud n.*

Ejemplo 3.2.1. *Sea la función logística $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F_\mu = \mu x(1-x)$ donde $\mu > 1$ es un parámetro.*

Aplicamos la Proposición 3.2.1 para demostrar que $F_\mu(\mu > 4)$ tiene puntos periódicos de periodo 2 en el intervalo $\left[\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}\right]$.

En efecto, como F_μ es creciente en $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, se tiene

$$F_\mu\left(\left[\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[F_\mu\left(\frac{1}{\mu}\right), F_\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \left[\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{\mu}{4}\right] \supseteq \left[\frac{\mu-1}{\mu}, 1\right]$$

Análogamente, como F_μ es decreciente en $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ se tiene

$$F_\mu\left(\left[\frac{\mu-1}{\mu}, 1\right]\right) = \left[F_\mu(1), F_\mu\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)\right] = \left[0, \frac{\mu-1}{\mu}\right] \supseteq \left[\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}\right]$$

De esta manera se tiene el ciclo de longitud 2:

$$\left[\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}\right] \mapsto \left[\frac{\mu-1}{\mu}, 1\right] \mapsto \left[\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}\right]$$

Por la proposición anterior, existe $p^* \in Fix(F_\mu^2)$ tal que $p^* \in \left[\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}\right]$, $F_\mu(p^*) \in \left[\frac{\mu-1}{\mu}, 1\right]$ y $F_\mu^2(p^*) \in \left[\frac{1}{\mu}, \frac{1}{2}\right]$.

Se tiene que $Fix(F_\mu)$=$\{0, \frac{\mu-1}{\mu}\}$, claramente $p^* \neq 0$ y $p^* \neq \frac{\mu-1}{\mu}$, luego $p^* \notin Fix(F_\mu)$ y por tanto $p^* \in Per_2(F_\mu)$.

Teorema 3.2.1. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo e (I, f) . Si $Per_3(f) \neq \emptyset$ entonces $Per_n(f) \neq \emptyset$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

i) Por hipótesis, existe $x \in \mathrm{Per}_3(f)$, luego $\mathcal{O}_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x)\}$.

   Ordenamos sus elementos de manera creciente y denotamos $a < b < c$. Observamos que $f(b) = c$ *o* $f(b) = a$. *Se considera la primera posibilidad, la segunda es semejante.*

ii) Como $f(b) = c$, entonces, $f(c) = f^2(b) = a$ y $f(a) = f^3(b) = b$.

   Como $f(a) = b$ y $f(b) = c$, entonces $b, c \in f([a, b])$,

   luego $[b, c] \subseteq f([a, b])$, por tanto

$$[a, b] \mapsto [b, c]$$

iii) También, $f(b) = c, f(c) = a$, entonces $a, c \in f([b, c])$,

   luego $[a, c] \subseteq f([b, c])$, por tanto $[a, b] \subseteq [a, c] \subseteq f([b, c])$ y $[b, c] \subseteq [a, c] \subseteq f([b, c])$, *de esta manera*

$$[b,c] \mapsto [a,b] \quad \text{y} \quad [b,c] \mapsto [b,c]$$

Como $[b,c] \mapsto [b,c]$, *por el Lema 3.2.1,* f *tiene un punto fijo en* $[b,c]$, *es decir* $Fix(f) \neq \emptyset$.

iv) Probaremos que $f \in Per_2(f)$ *y consideramos el ciclo de longitud 2*

$$\underbrace{[a,b]}_{I_0} \mapsto \underbrace{[b,c]}_{I_1} \mapsto \underbrace{[a,b]}_{I_0}$$

Por la Proposición 3.2.1, existe $x^* \in \mathrm{Fix}(f^2)$ *tal que* $x^* \in [a,b]$ *y* $f(x^*) \in [b,c]$. *Suponemos que* $f(x^*) = x^*$ *(Hip. Aux.), luego* $x^* \in [a,b] \cap [b,c]$, *es decir* $x^* = b$, *pero* $c = f(b) = b$, *lo cual es una contradicción. De esta manera* $x^* \notin Fix(f)$ *y por tanto* $x^* \in \mathrm{Per}_2(f)$.

v) Entonces demostremos que f *tiene un "punto periódico de periodo n", para todo* $n > 3$. *Consideramos el "ciclo" de longitud* n

$$\underbrace{[a,b]}_{I_0} \mapsto \underbrace{[b,c]}_{I_1} \mapsto \underbrace{[b,c]}_{I_2} \mapsto \cdots \mapsto \underbrace{[b,c]}_{I_{n-1}} \mapsto \underbrace{[a,b]}_{I_0}$$

Por la Proposición 3.2.1, existe $x^* \in \mathrm{Fix}(f^n)$ *tal que* $f^m(x^*) \in I_m$,
$\forall\ 0 \leq m \leq n-1$.
Suponemos que existe $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *tal que* $f^k(x^*) = x^*$ *(Hip. Aux.) entonces* $x^* \in I_0 \cap I_k = [a,b] \cap [b,c]$, *se sigue que* $x^* = b$, *luego* $x^* = b \in [a,b]$ *y* $c = f(x^*) \in I_1 = [b,c]$, *luego* $a = f^2(x^*) \in I_2 = [b,c]$, *lo cual es una contradicción. Por tanto* $x^* \in \mathrm{Per}_n(f)$

De esta manera queda probado el teorema. □

Observación 3.2.1. *Mientras que la "existencia de un punto periódico de periodo 3" implica la "existencia de uno de periodo 5", lo contrario es falso, como se verá en el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 3.2.2. ***Periodo 5 no implica periodo 3***

Sea $f : [1,5] \to [1,5]$, *definida por f(1)=3, f(2)=5, f(3)=4, f(4)=2, f(5)=1 y sobre cada* *uno de los intervalos* $[n, n+1]$*, 1≤n≤4, f es lineal.*

De esta manera obtenemos una función continua en [1,5] y su gráfica es la siguiente:

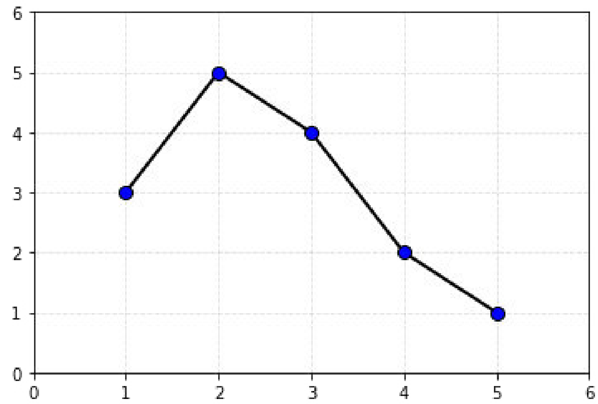


Figura 3.1: Gráfica de f

Veamos que $Per_5(f) \neq \emptyset$*, tenemos que*

$$f(1) = 3$$

$$f^2(1) = f(3) = 4$$

$$f^3(1) = f(4) = 2$$

$$f^4(1) = f(2) = 5$$

$$f^5(1) = f(5) = 1$$

Entonces 1 $\in Per_5(f)$*.*

Ahora, hallamos los puntos fijos de f^3*.*

De la Figura 3.1 tenemos

$$f([1,2]) = [3,5]$$

$$f^2([1,2]) = F([3,5]) = [1,4]$$

$$f^3([1,2]) = F([1,4]) = [2,5]$$

Así, f^3 *no tiene puntos fijos en [1,2]. Análogamente, se demuestra que* $f^3([2,3]) = [3,5]$ *y* $f^3([4,5]) = [1,4]$*, así ninguno de esos intervalos contiene un punto fijo de* f^3*.*

Por otra parte,

$$f([3,4]) = [2,4]$$

$$f^2([3,4]) = f([2,4]) = [2,5]$$

$$f^3([3,4]) = f([2,5]) = [1,5] \supseteq [3,4].$$

Por Lema 3.2.1, f^3 tiene un punto fijo en [3,4].

Ahora, demostraremos que $Fix(f^3)$ es único y es también punto fijo de f.

Como $f\colon [3,4] \to [1,5]$ es decreciente, $f\colon [2,4] \to [2,5]$ es decreciente y $f : [2,5] \to [1,5]$ es decreciente, se sigue que $f^3 : [3,4] \to [1,5]$ es decreciente pues composición de funciones decrecientes es decreciente, por lo tanto tiene un único punto fijo. Este punto fijo de f^3 debe ser el punto fijo de f y por tanto $Per_3(f) = \emptyset$.

Es decir, no existe ningún punto de periodo 3.

Definición 3.2.2. *Sea $\{s_n\}$ una secuencia de números reales. Sea $D = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ donde $x \in D$ tal que $s_{n_k} \to x$ para alguna subsecuencia $\{s_{n_k}\}$. Consideremos $s^* = \sup D$, $s_* = \inf D$. Se tendrá que, $\limsup_{n\to\infty} s_n = s^*$, $\liminf_{n\to\infty} s_n = s_*$.*

Se presentará un resultado básico útil para determinar cuándo un sistema exhibe un comportamiento caótico. La cual se demostró en el artículo de (Li y Yorke, 1975) y para la demostración, se siguió la referencia de (Dewaele, 2011).

Teorema 3.2.2. *Sea (I, f), si existe $x^* \in I$ y $Per_3(f) \neq \emptyset$, entonces f es caótica según Li-Yorke.*

Demostración.

i) Denotamos A=[r,s] y B=[t,u]. Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de secuencias $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ de "intervalos compactos" que satisfacen las siguientes condiciones:

$$D_n = A \text{ o } D_n \subseteq A \tag{3.1}$$

$$D_{n+1} \subseteq f(D_n) \tag{3.2}$$

$$\text{Si } D_n = A \text{ entonces } \text{n= k}^2,\ \text{k} \in \mathbb{N} \text{ y } D_{n+1}, D_{n+2} \subset \text{B} \tag{3.3}$$

Notando que las condiciones D_{n+1},$D_{n+2} \subseteq$ B son redundantes porque si n= k^2 con k $\in \mathbb{N}$ entonces, n+1 y n+2 no lo serán.

Anteriormente, en el Teorema 3.2.1, se probó que

$[t,u] \subset f([r,s])$, es decir, $B \subset f(A)$,

$[r,u] \subset f([t,u]) \Rightarrow [r,s] \subset [r,u] \subset f([t,u])$, es decir, $A \subset f(B)$,

$[r,u] \subset f([t,u]) \Rightarrow [s,u] \subset [r,t] \subset f([t,u])$, es decir, $B \subset f(B)$,

ii) Para D $\in \mathcal{D}$, se denota como $P(D,n)$ el número de índices $i = \{1,...,n\}$ para las cuales D_i = A. Para cada $l \in$ (3/4,1), se escoge $D^l = \{D^l_n\}_{n=1}^{\infty}$ una secuencia en $\mathcal{D}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(D^r, n^2)}{n} = l \tag{3.4}$$

Para que se vea mejor como elegir D^l, damos algunos ejemplos. Distinguiendo dos casos:

Caso 1. $l \in \mathbb{Q}$: Tomando por ejemplo $l = 4/5$.

Se define $D_n^{4/5}$ para dos casos:

- A , si $n = k^2$ con $k \in \mathbb{N}$, excepto los cuadrados múltiplos de 5,
- B , en otro caso

Así que $D^{4/5}$ es de la forma:

$$\begin{gathered} D^{4/5} = \{A, B, B, \\ A, B, B, B, B, \\ A, B, B, B, B, B, B, \\ A, B, B, B, B, B, B, B, B, \\ B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, \\ A, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, \\ A, B, B, \ldots\} \end{gathered}$$

Observamos que el término veinticinco de la lista es igual a B porque es el cuadrado de 5. Lo que hacemos es, de cada bloque de cinco cuadrados perfectos, elegimos cuatro que son iguales a A y el otro igual a B. En general, cualquier secuencia D^l con $l = p/q$ racional puede determinarse mediante el siguiente procedimiento: de cada bloque de q cuadrados, elija p igual a A y resto igual a B.

Notamos que el número de índices $i \in \{1, \ldots, n^2\}$ para los cuales $i = n^2$. Por tanto,

$$P(D^l, n^2) \leq n, \forall n \Rightarrow \frac{P(D^r, n^2)}{n} \leq 1, \forall n.$$

Así, escogemos l <1. Luego, se verá por qué se toma $l > 3/4$.

Tengamos en cuenta que $\lim_{n\to\infty} P(D^r, n^2)$ debe ser infinito porque sino el límite en (3.4) sería cero.

Ahora comprobamos que se cumple (3.4).

$$\text{Si } 1 \leq n < 5 \Rightarrow \frac{P(D^{4/5}, n^2)}{n} = n/n$$

$$\text{Si } 5 \leq n < 10 \Rightarrow \frac{P(D^{4/5}, n^2)}{n} = \frac{n-1}{n}$$

$$\text{Si } 10 \leq n < 15 \Rightarrow \frac{P(D^{4/5}, n^2)}{n} = \frac{n-2}{n}$$

$$\text{Si } 15 \leq n < 20 \Rightarrow \frac{P(D^{4/5}, n^2)}{n} = \frac{n-3}{n}$$

En general, 5k $\leq$ n $<$ 5(k+1) $\Rightarrow \frac{P(D^{4/5},n^2)}{n} = \frac{n-k}{n}$

Por lo tanto, cuando $n \to \infty$ tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(D^{4/5}, n^2)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n - n/5}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n-n}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{5n} = 4/5$$

Caso 2. $l \in \mathbb{I}$. Tomamos $l = 2\pi/7 =$ 0,89759790...

Tomamos D^l de forma que:

De los 10 primeros cuadrados se elige 8 iguales a A y el resto iguales a B.

i.e., si n=10, $\frac{P(D^{2\pi/7},n^2)}{n} = \frac{8}{10} = 0,8$.

De los primeros 10 cuadrados, se seleccionan iguales 8 a A y los demás iguales a B.

i.e., si $n = 10^2$, $\frac{P\left(d^{2\pi/7},n^2\right)}{n} = \frac{89}{100} = 0,89$.

De los primeros 1000 cuadrados, se elige iguales 897 a A y los demás iguales a B.

i.e., si $n = 10^3$, $\frac{P\left(D^{2\pi/7},n^2\right)}{n} = \frac{897}{1000} = 0,897$.

Siguiendo de manera general, de los primero $n = 10^k$ cuadrados, se escoge un número que sea igual a los primeros k cifras decimales de $2\pi/7$ igual a A y el resto igual a B.

Así

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P\left(D^{2\pi/7}, n^2\right)}{n} = \lim_{k\to\infty} \frac{\overbrace{89759790\ldots}^{\text{k cifras decimales}}}{n} = 2\pi/7$$

iii) Ahora, se verá que existe un subconjunto S de I que sea no numerable.

Sea $\mathcal{D}_0 = \left\{D^l : l \in (3/4, 1)\right\} \subseteq \mathcal{D}$.

suponemos $l_1, l_2 \in (3/4, 1)$ tales que $l_1 \neq l_2 \Rightarrow D^{l_1} \neq D^{l_2}$ (por construcción). Es decir, hay algunos factibles D^l como valores de l y como $(3/4, 1)$ es un "conjunto no numerable", entonces $\mathcal{D}_0$ es "no numerable".

Para cada $D^l \in \mathcal{D}_0$, por la Proposición 3.2.1, existe x_l con $f^n(x_l) \in D^l_n, \forall n$.

Sea $S = \{x_l : l \in (3/4, 1)\}$. Para cada $x_l \in S$ sea $P(x_l, n)$ el número de $i' \in \{1, \ldots, n\}$ para los cuales $f^i(x_l) \in A$.

Suponemos que $f^k(x_l) = s$ para algún k. Entonces $f^{k+2}(x_l) = f^2(s) = l \in A$ y $f^{k+2}(x_l) \in D^l_{2+k}$. Se obtiene que $D^l_{2+k} = a$.

Aplicamos $f^{3m+2+k}(x_l) = f^{3m}(r) = r \in A$ y $f^{3m+2+k}(x_l) \in D_{3m+2+k}$. De aquí, $D_{3m+2+k} = A, \forall$ m .

Llegamos a una contradicción, ya que no se da $D^l_i = A$ para un "conjunto periódico" de índices, se tiene que el conjunto de "cuadrados perfectos no es periódico", esto por suponer que $f^k(x_l) = s$.

Así, $f^k(x_l) \neq s$ para cualquier $x_l \in$ S y $\forall$ k $\in \mathbb{N}$.

Además, sea $f^k(x_l) \neq s$, si $l_1 \neq l_2 \Rightarrow x_{l_1} \neq x_{l_2}$

Como $l_1 \neq l_2 \Rightarrow D^{l_1} \neq D^{l_2}$. Por (3.4) tiene que existir al menos un índice $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$D^{l_1}_{j_0^2} = A, D^{l_2}_{j_0^2} \subset B \tag{3.5}$$

$$D^{l_1}_{j_0^2} \subset B, D^{l_2}_{j_0^2} = A \tag{3.6}$$

Por ejemplo, se toma $l_1 = 4/5, l_2 = 5/6$, se tiene que $D^{4/5}_{25} = B$, $D^{5/6}_{25} = A$

Entonces en el caso (3.5) se tiene:

$f^{j_0^2}(x_{l_1}) \in D^{l_1}_{j_0^2} = A = [r, s]$ y $f^{j_0^2}(x_{l_2}) \in D^{l_2}_{j_0^2} \subseteq L = [s, t]$.

suponemos que $x_{l_1} = x_{l_2}$, entonces se tendría $f^{j_0^2}(x_{l_1}) = f^{j_0^2}(x_{l_2}) \in A \cap B$, lo cual es una contradicción pues $f^{j_0^2}(x_{l_1}) \neq s$ y $f^{j_0^2}(x_{l_2}) \neq s$, esto por suponer que $x_{l_1} = x_{l_2}$.

Así $x_{l_1} \neq x_{l_2}$.

Para el caso (3.6) se prueba de forma similar.

Por lo tanto, S es "no numerable" y $P(x_l, n) = P\left(D^l, n\right)$, $\forall$ n .

iv) Veamos la primera condición del conjunto scramble.
Definimos $\rho(x_l) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P(x_l, n^2)}{n} = l, \quad \forall\, l$
Por construcción (ver (3.1)) sabemos que $D_n^l = A$ o $D_n^l \subseteq B, \forall$ n.
Veamos que para $p, q \in S, p \neq q$, existen infinitos n tales que $f^n(p) \in K$ y $f^n(q) \in B$ o viceversa.
Sin pérdida de generalidad, supongamos $\rho(p) > \rho(q)$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(p, n^2)}{n} > \lim_{n\to\infty} \frac{P(q, n^2)}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{P(p, n^2) - P(q, n^2)}{n} > 0$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(P\left(p, n^2\right) - P\left(q, n^2\right)\right) = \infty$

Como P solo aumenta uno o cero por cada unidad que incremente n y la única vez en la que $P(p, n^2)$ aumenta mientras $P(q, n^2)$ permanece igual es cuando $f^{n^2}(p) \in A, f^{n^2}(q) \in B$, debe haber infinitas n tales que $f^{n^2}(p) \in A$, $f^{n^2}(q) \in B$ para que se cumpla $\lim\limits_{n\to\infty} \left(P\left(p, n^2\right) - P\left(q, n^2\right)\right) = \infty$

Para entender mejor este proceso, veamos un ejemplo.

Sea $D^{5/6}$ dada por:

- A, si $n = k^2$ con $k \in \mathbb{N}$, excepto para los cuadrados múltiplos de 6,
- B en otros casos

Así, $D^{5/6}$ es de la forma:

$$\begin{gathered} D^{5/6} = \{A, B, B \\ A, B, B, B, B, \\ A, B, B, B, B, B, B, \\ A, B, B, B, B, B, B, B, B, \\ A, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, \\ A, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, B, \\ A, B, B, \ldots\} \end{gathered}$$

Tenemos que $5/6 > 4/5$ y $P(x_l, n) = P\left(D^l, n\right)$

Si $n^2 = 1$:

$$P\left(D^{4/5}, n^2\right) = 1 \text{ y } P\left(D^{5/6}, n^2\right) = 1$$

Si $n^2 = 4$:

$$P\left(D^{4/5}, n^2\right) = 2 \text{ y } P\left(D^{5/6}, n^2\right) = 2$$

Si $n^2 = 9$:

$$P\left(D^{4/5}, n^2\right) = 3 \text{ y } P\left(D^{5/6}, n^2\right) = 3$$

Si $n^2 = 16$:

$$P\left(D^{4/5}, n^2\right) = 4 \text{ y } P\left(D^{5/6}, n^2\right) = 4$$

Si $n^2 = 25$:

$$P\left(D^{4/5}, n^2\right) = 4 \text{ y } P\left(D^{5/6}, n^2\right) = 5$$

Si $n^2 = 36$:

$$P\left(D^{4/5}, n^2\right) = 5 \text{ y } P\left(D^{5/6}, n^2\right) = 5$$

Si $n^2 = 49$:

$$P\left(D^{4/5}, n^2\right) = 6 \text{ y } P\left(D^{5/6}, n^2\right) = 6.$$

Continuando hasta $n^2 = 30^2$ que es a la vez "múltiplo de 5 y de 6", por lo tanto volveriamos a realizar el proceso que acabamos de desarrollar. Se tiene $P\left(D^{4/5}, n^2\right) = 24$ y $P\left(D^{5/6}, n^2\right) = 25$, es decir, comenzando con una diferencia de una unidad. Al repetir sucesivas veces la diferencia va aumentando y $n \to \infty$ entonces $P\left(D^{5/6}, n^2\right) - P\left(D^{4/5}, n^2\right) \to \infty$

Como $f^2(r) = t, f^2(s) = r$ y f^2 es continua

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ |x - s| < \delta \Rightarrow \left|f^2(x) - f^2(s)\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ / \ f^2(x) - f^2(s) < \frac{s - r}{2} \quad \forall x \in [s - \delta, s]$$

$$\Rightarrow f^2(x) < \frac{s - r}{2} + f^2(s) \Rightarrow f^2(x) < \frac{s - r}{2} + \frac{2r}{2} = \frac{s + r}{2} \quad \forall x \in [s - \delta, s]$$

Si $p \in S$ y $f^{n^2}(p) \in A \Rightarrow$ por (2) $f^{n^2+2}(p) \in B$

Supongamos $f^{n^2}(p) \in [s - \delta, s] \Rightarrow f^2\left(f^{n^2}(p)\right) < \frac{s+r}{2}$ lo que nos lleva a una contradicción pues $r < s \Rightarrow \frac{s+r}{2} < s$.

Así, $f^{n^2}(p) \notin [s-\delta, s]$.

Como $f^{n^2}(q) \in B \Rightarrow f^{n^2}(p) < s-\delta < s < f^{n^2}(q)$.

Por lo tanto,

$$\left|f^{n^2}(p) - f^{n^2}(q)\right| = f^{n^2}(q) - f^{n^2}(p) > s - (s-\delta) = \delta.$$

Así, $\left|f^{n^2}(p) - f^{n^2}(q)\right| > \delta$ para los infinitas casos en las que $f^{n^2}(p) \in A$ y $f^{n^2}(q) \in B$
Entonces el conjunto

$$\left\{\left|f^k(p) - f^k(q)\right| : \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } f^k(p) \in K, f^k(q) \in B\right\}$$

es "infinito" y posee al menos una subsecuencia donde todos los valores son mayores que δ.

Por la Definición 3.2.2, se tiene $\limsup\limits_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$
Esto prueba la primera condición del conjunto scrambled S.

v) Ahora, probaremos la tercera condición, la cual para probarlo es de la misma forma. Suponiendo $p \in S$ y sea $q \in I$ un "unto periódico de periodo m".
Como se ha visto en la prueba anterior, cuando $f^{n^2}(p) \in A$
$\Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que $f^{n^2}(p) < b - \delta$.
Ahora, por lo probado en el Teorema 3.2.1, como q es un punto de periodo m se cumple que $f^{n^2}(q) \in B$ si $n^2 \neq m, 2m, 3m, \ldots$.
Pero como el conjunto de "cuadrados perfectos" es "no periódico", entonces el conjunto de $n's$ donde $f^{n^2}(p) \in A$ y $f^{m^2}(q) \in B$ es infinito. Por lo tanto, análogamente a lo realizado en la prueba anterior, el conjunto

$$\left\{\left|f^k(p) - f^k(q)\right| : \forall k \in \mathbb{N} \text{ y } f^k(p) \in A\ ,\ f^k(q) \in B\right\}$$

es infinito y todos las valores en el conjunto son mayores que δ.

Por la Definición 3.2.2

$$\limsup_{n\to\infty} |f^n(p) - f^n(q)| > 0$$

vi) Por último, probaremos la segunda condición.

En primer lugar modificaremos la definición de M_n^r.

Tenemos $f(s) = t, f(t) = r < s$.

Escogemos el conjunto de intervalos $[s_n, t_n]$, n=$0, 1, 2 \ldots$, de forma que $s = s_0$ y $t = t_0$. Definimos $s_1 = \max\{x \in [s_0, t_0] : f(x) = t_0\}$.

Como $f[s_1, t_0] \supseteq [r, t_0] \ni s_0$ entonces por el "Teorema del Valor Medio" para funciones continuas $\exists \bar{t}_1 \in [s_1, t_0]$ tal que $f(\bar{t}_1) = s_0$.

Definimos ahora $t_1 = \min\{x \in [s_1, t_0] : f(x) = s_0\}$.

De forma inductiva, se puede escoger s_n, t_n tal que

$$s_{\text{n+1}} = \max\{x \in [s_n, t_n] : f(x) = t_n\}$$
$$t_{n+1} = \min\{x \in [s_{n+1}, t_n] : f(x) = s_n\}$$

Entonces, $[s, t] = [s_0, t_0] \supseteq [s_1, t_1] \supseteq \ldots \supseteq [s_n, t_n] \supseteq \ldots, f(x) \in [s_n, t_n]\ \forall x \in (s_{n+1}, t_{n+1})$ y $f(s_{n+1}) = t_n, f(t_{n+1}) = s_{n-}$.

Como $s_n < t_n, \forall n$ y s_n es creciente entonces existen los límites

$s^* = \lim s_n$, $t^* = \lim t_{n-}$

Suponemos que si $D_k = A$ para $k = n^2$ y $k = (n+1)^2$ entonces

$$D_k = \left[s_{2n-(2j-1)}, s^*\right] \text{ para } k = n^2 + (2j-1)$$

$$D_k = [t^*, t_{2n-1j}] \text{ para } k = n^2 + 2j$$

con $j = 1, \ldots, n$.

Para el resto de los valores de k se tomará $D_k = B$. Esto quiere decir que si $D_k = A$ para $k = n^2$ y $k = (n+1)^2$, lo que implica que para cada valor de k entre n^2 y $(n+1)^2, D_k$ se tiene una correspondencia con los intervalos que se definieron anteriormente.

Veremos que se cumple (3.1) y (3.2).

Como s_n , s^* , t_n , $t^* \in B \Rightarrow [s_n, s^*] \subseteq B$ y $[t^*, t_n] \subseteq B, \forall n \in \mathbb{N}$

Sea $D_k = A$ para $k = n^2$ y $k = (n+1)^2$.

Entonces $D_{n^2+1} = [s_{2n-1}, s^*]$ y $D_{n^2+2} = [t^*, t_{2n-2}]$.

Como n^2 y $(n+1)^2$ son ambos "cuadrados de enteros", (3.2) se cumple.

Ahora, se sabe que $D_{n^2+2} = [t^*, t_0]$.

Para que se cumpla (3.1) tiene que ser $f(D_k) \supseteq D_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Veamos que esto se verifica.

Tenemos:

Si $k = n^2$

$$f\left(D_{n^2}\right) = f(A) \supseteq B \supseteq [s_{2n-1}, s^*] = D_{n^2+1}$$

Si $k = n^2 + (2j-1)$

$$f\left(D_{n^2+2j-1}\right) = f\left[s_{2n-(2j-1)}, s^*\right] \supseteq \left[f\left(s^*\right), f\left(s_{2n-2j+1}\right)\right] = [t^*, t_{2n-2j}] = D_{n^2+2j}$$

Si $k = n^2 + 2j$

$$f\left(D_{n^2+2j}\right) = f\left[t^*, t_{2n-2j}\right] \supseteq \left[f\left(t_{2n-2j}\right), f\left(t^*\right)\right] = [s_{2n-2j-1}, s^*] = D_{n^2+2j+1}$$

Si $k = (n+1)^2 - 1$

$$f\left(D_{(n+1)^2-1}\right) = f\left(D_{n^2+2n}\right) = f\left[t^*, t_0\right] \supseteq \left[f\left(q_0\right), f\left(t^*\right)\right] = [r, s^*] \supseteq A = D_{(n+1)^2}$$

Por lo tanto, las condiciones recientes están acorde con (3.1). Además no afectan al número de $i \in \{1, \ldots, n\}$ para el cual $D_i = A$, asi que cumplen (3.1),(3.2) y (3.3).

Sean $l, l^* \in (3/4, 1)$ con $l \neq l^*$. Escogemos $D^l, D^{l^*} \in \mathcal{D}$ tales que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P\left(D^l, n^2\right)/n = l \\ \lim_{n\to\infty} P\left(D^{l^*}, n^2\right)/n = l^* \end{aligned}$$

A partir de ahora consideramos solamente los índices que son un número entero que es el cuadrado de algún otro. Sea el conjunto $L = \{L_n\}$ definido de forma que $L_k = 1 \Leftrightarrow D^l_{k^2} = A, L_k = 0$ para otros casos. Asimismo, sea $L^* = \{L^*_n\}$ definido tal que $L^*_k = 1$ si y solo si $D^{l^*}_{k^2} = A, L^*_k = 0$ en otro caso.

Por (3.3) y por como está definido D^l se tiene

$$l = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{m=1}^{n} L_m\right)/n\right)$$

$$l^* = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{m=1}^{n} L^*_m\right)/n\right)$$

Entonces

$$\exists N \text{ tal que } \forall n \geq N, \sum_{m-1}^{n} L_m > ln \text{ y } \sum_{m-1}^{n} L_m^* > l^* n$$

Ahora definimos $\{J_n\}$ tal que $J_k = a$ si y solo si $L_k = L_k^* = 0, J_k = s$ si y solo si $L_k = 0$ and $L_k^* = 1, J_k = t$ si y solo si $L_k = 1$ y $L_k^* = 0$, y $J_k = u$ si y solo si $L_k = L_k^* = 1$. Notamos que $J_k = J_{k+1} = u$ si y solo si $L_k = L_{k+1} = L_k^* = L_{k+1}^* = 1$. Como $l > 3/4$ entonces $J_k \in \{c, d\}$ más de tres cuartas partes del tiempo. Esto implica que $J_k = s$ menos de una cuarta parte del tiempo. Supongamos que $J_k = u$ menos de la mitad del tiempo o igual.

Esto implica que $J_k = t$ más de una cuarta parte de las veces una contradicción. Por lo tanto $J_k = u$ más de la mitad del tiempo.

Ahora supongamos que si $J_k = u$ entonces $J_k \neq u$. Esto implica que para cada tiempo $J_k = u$ entonces hay al menos un momento en el que $J_k \neq u$. Entonces $J_k = u$ por menos o igual a la mitad del tiempo una contradicción. Esto implica que $J_k = J_{k+1} = u$ sucede infinitas veces, la cual implica $L_k = L_{k+1} = L_k^* = L_{k+1}^* = 1$ sucede infinitas veces.

Por lo tanto, existen infinitos n tal que $D_k^l = D_k^{l^*} = A$ para ambos $k = n^2$ y $k = (n+1)^2$. Sea $x_l \in S$ y $x_{l^*} \in S$. Desde que $\lim (s_n) = s^*$ y $\lim (t_n) = t^*$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe N con $|s_n - s^*| < \varepsilon, |t_n - t^*| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Entonces, para cualquier n con $n > N$ y $D_k^l = D_k^{l^*} = A$ para ambos $k = n^2$ y $(n+1)^2$, tenemos

$$f^{n^2+1}(x_l) \in D_k^l = [s_{2n-1}, s^*]$$

con $k = n^2 + 1$ y $f^{n^2+1}(x_l)$ y $f^{n^2+1}(x_{l^*})$ ambos pertenecen $[s_{2n-1}, s^*]$. Por lo tanto, $\left| f^{n^2+1}(x_l) - f^{n^2+1}(x_{l^*}) \right| < \varepsilon$. Así por la definición,

$$\liminf_{n \to \infty} |f^n(p) - f^n(q)| = 0.$$

De esa manera queda probado que $S \subset I$ es un conjunto scramble “no numerable”, teniendo por lo tanto que f es “caótica según Li-Yorke”. □

Observación 3.2.2. *Caos de Li-Yorke tiene dos importantes desventajas en contraste con las otras definiciones. La primera es que solo puede ser usado sobre intervalos en* *la recta real y no en espacios dimensionales mayores a 1. Por ejemplo, la rotación en $\mathbb{R}^2$ de 120° tiene un punto periódico con periodo tres pero no tiene conjunto scramble no numerable. La segunda desventaja es que no se puede aplicar a aplicaciones incluso con una discontinuidad, ya que la continuidad es fundamental para el caos de Li-Yorke.*

3.3. Ejemplos de sistemas dinámicos caóticos

Mapeo Carpa

Veamos que el mapeo carpa es un sistema dinámico caótico según Li-Yorke, aplicando el Teorema 3.2.2.

Sea el mapeo carpa $T : [0,1] \to [0,1]$ definido por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2-2x & si \quad 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Notamos que $Per_1(T) = Fix(T) = \{0, 2/3\}$.

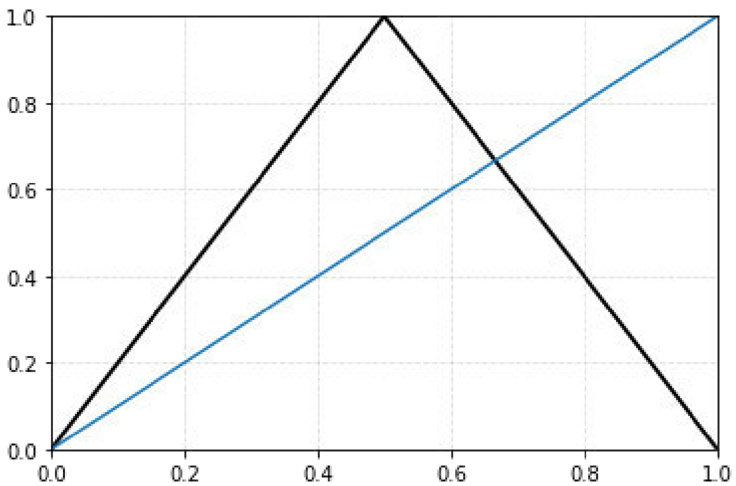


Figura 3.2: Gráfica de T

Hallemos $Per_2(T)$, un fácil cálculo muestra que $T^2 : [0,1] \to [0,1]$ tiene regla de correspondencia

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x & si \quad 0 \leq x \leq 1/4 \\ 2-4x & si \quad 1/4 < x \leq 1/2 \\ 4x-2 & si \quad 1/2 < x < 3/4 \\ 4-4x & si \quad 3/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

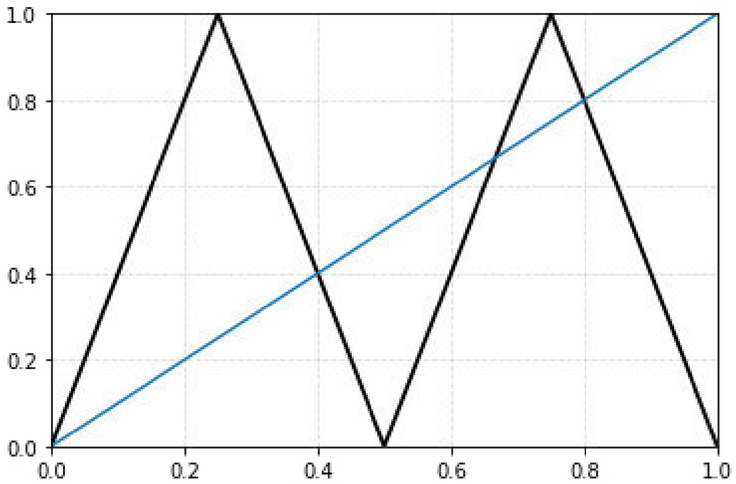


Figura 3.3: Gráfica de T^2

Se cumple:

$$0 \leq x \leq 1/4 : T^2 = x \Longleftrightarrow 4x = x \Longleftrightarrow x = 0$$

$$1/4 \leq x \leq 1/2 : T^2 = x \Longleftrightarrow 2 - 4x = x \Longleftrightarrow x = 2/5$$

$$1/2 \leq x \leq 3/4 : T^2 = x \Longleftrightarrow 4x - 2 = x \Longleftrightarrow x = 2/3$$

$$3/4 \leq x \leq 1 : T^2 = x \Longleftrightarrow 4 - 4x = x \Longleftrightarrow x = 4/5$$

Luego $Fix(T^2)$=$\{0, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}\}$ y por tanto

$$Per_2(T) = Fix(T^2) - Fix(T) = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\}$$

El único 2-ciclo de T es

$$\mathcal{O}_T^+\left(\frac{2}{5}\right) = \{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\} = \mathcal{O}_T^+\left(\frac{4}{5}\right)$$

Hallamos $Per_3(T)$, tenemos que $T^3 : [0,1] \to [0,1]$ que tiene regla de correspondencia

$$T^3(x) = \begin{cases} 8x & si \quad 0 \leq x < 1/8 \\ 2-8x & si \quad 1/8 \leq x < 1/4 \\ 8x-2 & si \quad 1/4 \leq x < 3/8 \\ 4-8x & si \quad 3/8 \leq x < 1/2 \\ 8x-4 & si \quad 1/2 \leq x < 5/8 \\ 6-8x & si \quad 5/8 \leq x < 3/4 \\ 8x-6 & si \quad 3/4 \leq x < 7/8 \\ 8-8x & si \quad 7/8 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

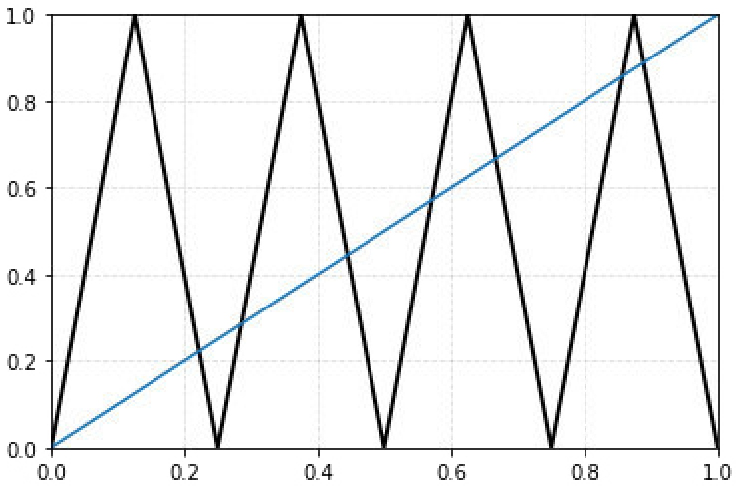


Figura 3.4: Gráfica de T^3

Se cumple:

$$0 \leq x \leq 1/8 : T^2 = x \Longleftrightarrow 8x = x \Longleftrightarrow x = 0$$

$$1/8 < x \leq 1/4 : T^3 = x \Longleftrightarrow 2 - 8x = x \Longleftrightarrow x = 2/9$$

$$1/4 < x < 3/8 : T^3 = x \Longleftrightarrow 8x - 2 = x \Longleftrightarrow x = 2/7$$

$$3/8 < x < 1/2 : T^3 = x \Longleftrightarrow 4 - 8x = x \Longleftrightarrow x = 4/9$$

$$1/2 < x < 5/8 : T^3 = x \Longleftrightarrow 8x - 4 = x \Longleftrightarrow x = 4/7$$

$$5/8 < x < 3/4 : T^3 = x \Longleftrightarrow 6 - 8x = x \Longleftrightarrow x = 6/9 = 2/3$$

$$3/4 < x < 7/8 : T^3 = x \Longleftrightarrow 8x - 6 = x \Longleftrightarrow x = 6/7$$

$$7/8 \leq x \leq 1 : T^3 = x \Longleftrightarrow 8 - 8x = x \Longleftrightarrow x = 8/9$$

Luego $Fix(T^3)$=$\{0, \frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}\}$ y por tanto

$$Per_3(T) = Fix(T^3) - Fix(T^2) = \{\frac{2}{9}, \frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}\}$$

Quedan dos 3-ciclos:

$$\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\} \text{ y } \{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\}$$

Así, $Per_3(T) \neq \emptyset$ y por Teorema 3.2.2, T es caótica según Li-Yorke.

Ecuación logística

Veamos que la ecuación logística es un sistema dinámico caótico según Li-Yorke, aplicando nuevamente el Teorema 3.2.2.

La ecuación logística viene dada mediante la función F: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por F(x)=$\mu x(1-x)$.

Sus primeras propiedades son las siguientes:

1. F(0)=F(1)=0.
2. $Fix(F) = \{0, \frac{\mu-1}{\mu}\}$. En efecto, $x \in Fix(F)$ si y solo si $\mu x(1-x) = x$ si y solo si $\mu x^2 + (1-\mu)x = 0$ si y solo si x=0 o $\frac{\mu-1}{\mu}$.

Notamos que F tiene dos “puntos fijos” $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Para $\mu = 1$ se tiene un único “punto fijo” que es $x_1 = 0 = x_2$.

Para $\mu = 3, Fix(F) = \{0, \frac{2}{3}\}$.

Resulta natural preguntarnos ¿qué sucede cuando $\mu > 3$? Veamos que aparece un 2-ciclo, es decir, las sucesivas iteraciones de la función se alternan entre dos “puntos fijos”. Entonces, estudiamos los 2-ciclos de F. Tenemos que

$$F^2(x) = -\mu^3 x^4 + 2\mu^3 x^3 - (\mu^3 + \mu^2)x^2 + \mu^2 x$$

Ahora, hallamos los puntos fijos de F^2

$$x \in Fix(F^2) \quad \Longleftrightarrow -\mu^3 x^4 + 2\mu^3 x^3 - (\mu^3 + \mu^2)x^2 + (\mu^2 - 1)x = 0$$

$$\Longleftrightarrow x(\mu x + (1-\mu))(\mu^2 x^2 - (\mu^2 + \mu)x + \mu + 1) = 0$$

Se sigue que

$$x \in Per_2(F) \Longrightarrow \mu^2x^2 - (\mu^2+\mu)x + \mu + 1$$

Un fácil cálculo muestra que $Per_2(F) = \{p_{1,\mu}, p_{2,\mu}\}$

$$p_{1,\mu} = \frac{1+\mu+\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu} \text{ y } p_{2,\mu} = \frac{1+\mu-\sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}$$

Observamos que

$$1 < \mu < 3 \Longrightarrow Per_2(F) = \emptyset$$

$$\mu = 3 \Longrightarrow p_{1,\mu} \text{ , } p_{2,\mu} = \frac{2}{3} \in Fix(F) \Longrightarrow Per_2(F) = \emptyset$$

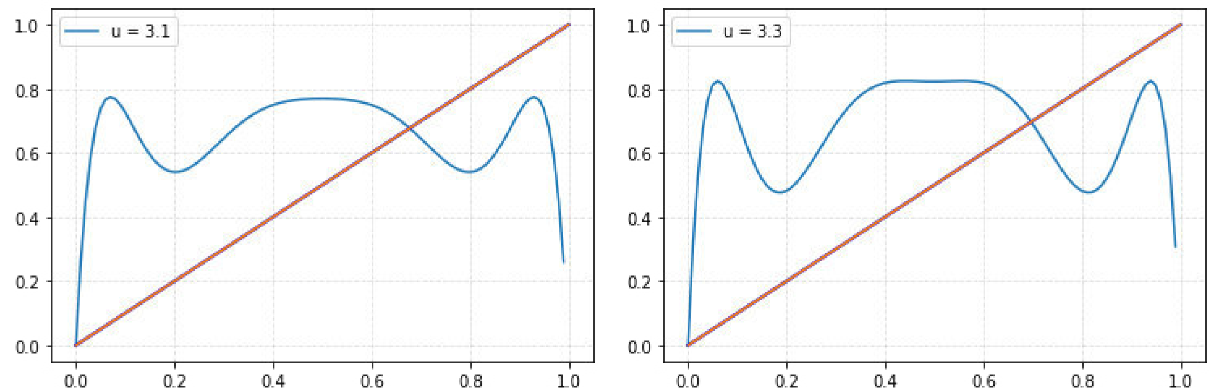
Por lo tanto, si $1 < \mu \leq 3$ entonces $Per_2(F) = \emptyset$.
Pero si $\mu > 3$ los puntos periódicos son reales y distintos.
Por último, veamos para qué valores de μ existen “puntos periódicos de periodo tres” de F. Se tiene:

$$F^3(x) = \mu^7x^8 + 4\mu^7x^7 - (6\mu^7+2\mu^6)x^6 + (4\mu^7+6\mu^6)x^5 - (\mu^7+6\mu^6+\mu^5)x^4 +$$

$$+(2\mu^6+2\mu^5+2\mu^4)x^3 - (\mu^5+\mu^4+\mu^3)x^2 + \mu^3x$$

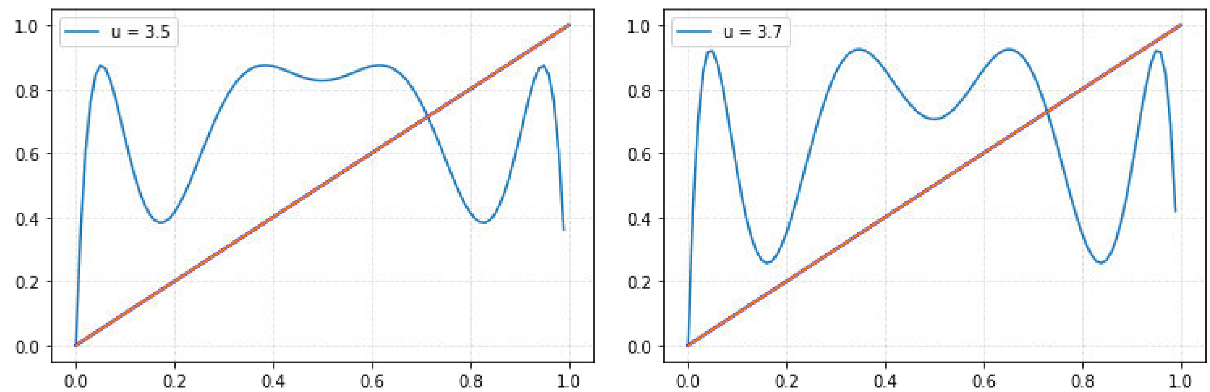
Representaremos mediante una gráfica a F^3 para distintos valores de μ junto con la identidad para ver cuántos “puntos fijos” tiene F^3 en cada caso.

Observando las Figuras 2-6 y 2-7, vemos que para $\mu = 3,8$ no hay puntos en el periodo tres porque $F^3(x)$ corta a la recta con solo dos intersecciones, es decir tiene solo dos “puntos fijos”, respectivamente con “puntos fijos” de F. Por otro lado, para $\mu = 3,87$, hay ocho “puntos fijos”, dos de los cuales son de F y los otros seis son de F^3. Entonces, para $\mu = 3,87$, tenemos puntos de período tres. Entonces ahora sabemos que la función logística comienza con el período tres para un valor μ en el intervalo (3,8, 3.87].

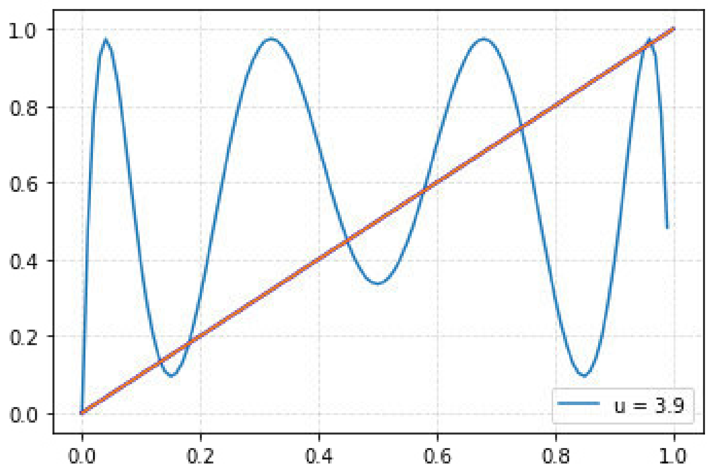


(a) **(b)**

Figura 3.5: Gráficas de F^3 para distintos valores de μ



(a) **(b)**



(c)

Figura 3.6: Gráficas de F^3 para distintos valores de μ

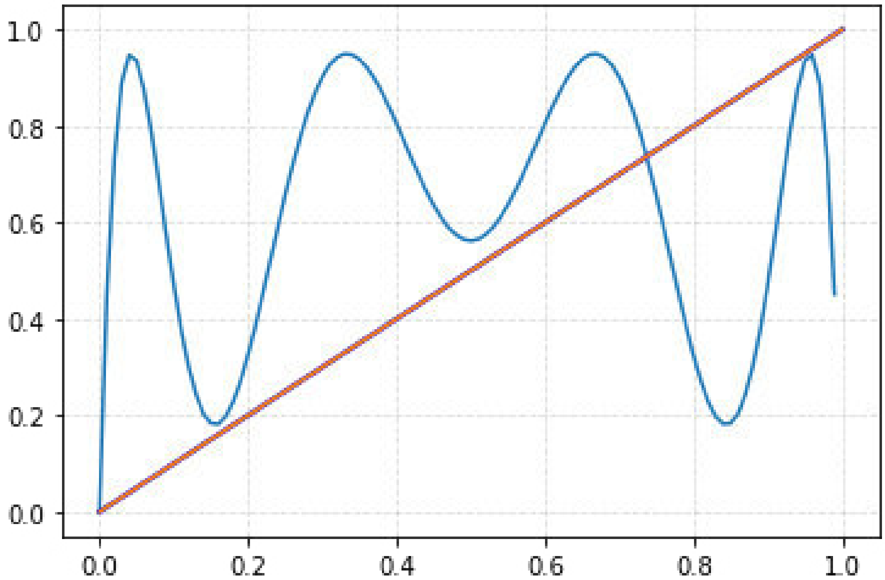


Figura 3.7: Gráfica de F^3 con $\mu = 3{,}8$

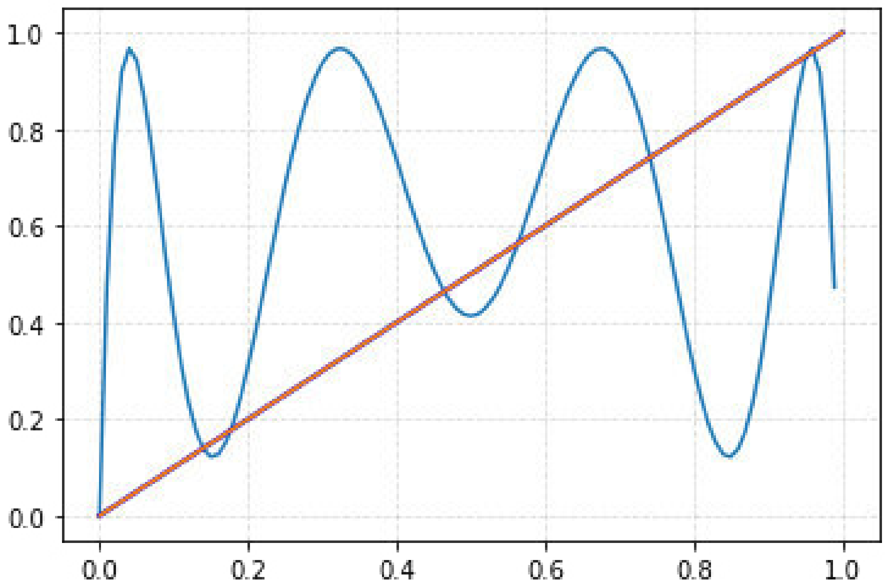


Figura 3.8: Gráfica de F^3 con $\mu = 3{,}87$

Los puntos de Per_3 son los que cumplen $x = F^3$, es decir, $x - F^3 = 0$. Será $g(x) = x - F^3$. Se quiere calcular las raíces de g(x). Primero, se sabe que los $Fix(F)$ son también $Fix(F^3)$, así que podemos factorizar de la siguiente forma:

$$h(x) = \frac{g(x)}{\mu x \left(x - \frac{\mu - 1}{\mu}\right)} =$$

$$= -\mu^6 x^6 + (3\mu^6 + \mu^5)x^5 - (3\mu^6 + 4\mu^5 + \mu^4)x^4 + (\mu^6 + 5\mu^5 + 3\mu^4 + \mu^3)x^3$$

$$-(2\mu^5 + 3\mu^4 + 3\mu^3 + \mu^2)x^2 + (\mu^4 + 2\mu^3 + 2\mu^2 + \mu)x - (\mu^2 + \mu + 1).$$

Los puntos de Per_3 son las raíces de $h(x)$. Es un polinomio de grado seis y no tenemos ninguna herramienta como un software que calcule sus raíces exactamente en μ. Por tanto, lo que vamos a hacer es probar qué valores de $\mu \in (3.8, 3.87]$, h tiene raíces reales.

Valor μ	1ra raíz	2da raíz	3ra raíz
3.8	0.96 + 0.005i	0.96 - 0.005i	0.52 + 0.04i
3.82	0.96 + 0.003i	0.96 - 0.003i	0.52 + 0.022i
3.828	0.96 + 0.001i	0.96 - 0.001i	0.51 + 0.005i
3.8284	0.96 + 0.0001i	0.96 - 0.0001i	0.51 + 0.001i
3.82842	0.96 + 0.0001i	0.96 - 0.0001i	0.51 + 0.001i
3.82843	0.9564	0.9563	0.5148

Cuadro 3.1

Valor μ	4ta raíz	5ta raíz	6ta raíz
3.8	0.52 - 0.041i	0.16 + 0.016i	0.16 - 0.016i
3.82	0.52 - 0.022i	0.16 + 0.008i	0.16 - 0.008i
3.828	0.51 - 0.005i	0.16 + 0.002i	0.16 - 0.002i
3.8284	0.51 - 0.001i	0.16 + 0.0005i	0.16 - 0.0005i
3.82842	0.51 - 0.001i	0.16 + 0.0002i	0.16 - 0.0002i
3.82843	0.5139	0.1601	0.1598

Cuadro 3.2

Después de calcular con algunos valores se obtiene:

Para $\mu = 3{,}82842$, h presenta “raíces complejas” y para $\mu = 3{,}82843$, h presenta “raíces reales”. Por lo tanto, tomamos $\mu = 3{,}82843$ como el valor donde empieza a existir puntos de periodo tres.

Así, por el Teorema 3.2.2, la ecuación logística es caótica según Li-Yorke con parámetro $\mu \geq 3{,}82843$.

Observación 3.3.1. *Cuando nos referimos a caos según Li-Yorke, muchos autores trabajan con espacios métricos. Pues el caos según Li-Yorke se conserva por conjugación topológica y para ello tenemos que estar en el medio de espacios métricos.*

Ejemplo 3.3.1. *La ecuación logística para* $\mu = 4$ *y el mapeo carpa son topológicamente conjugados mediante el homeomorfismo* $\phi : [0,1] \to [0,1]$ *dado por* $\phi(x) = \operatorname{sen}^2(\pi x/2)$.

Consideramos f *es la ecuación logística y* g *el mapeo carpa, es decir,* $f(x) = 4x(1-x)$ *y* $g(x) = 1 - |2x-1|$.

Afirmación. $\phi \circ g = f \circ \phi$

En efecto,

- $f \circ \phi(x) = 4\phi(x)(1-\phi(x)) = 4\operatorname{sen}^2(\pi x/2)(1-\operatorname{sen}^2(\pi x/2)) = 4\operatorname{sen}^2(\pi x/2)\cos^2(\pi x/2) = \sin^2(\pi x)$
- $\phi \circ g = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi(1-|2x-1|)}{2}\right) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$ *pues*
  Si $2x - 1 > 0 : \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi(1-2x+1)}{2}\right) = \operatorname{sen}^2(\pi - \pi x) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$.
  Si $2x - 1 < 0 : \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi(1+2x-1)}{2}\right) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$.

Luego, la afirmación queda probada y f *y* g *son topológicamente conjugados.*

Más aún, por la Proposición 1.0.1 vista en el capítulo de Preliminares, $Per_3(g)$ *es igual a* $\phi[Per_3(f)]$ *, es decir ,* $Per_3(f) \neq \emptyset$*. Por lo tanto, la ecuación logística para* $\mu = 4$ *es caótica según Li-Yorke.*

Capítulo 4

Entropía positiva como criterio esencial del caos

En general, un sistema dinámico con entropía positiva es usualmente considerado caótico por los matemáticos. Los sistemas dinámicos con entropía cero se denominan deterministas y la razón de ello es que en la "Teoría ergódica" la entropía se suele interpretar como una medida de indeterminación y la entropía cero como una prueba de determinismo. Es por ello que, el objetivo de este capítulo es introducir el concepto de entropía topológica para sistemas dinámicos discretos y explicitar ejemplos de sistemas dinámicos con entropía positiva, este capítulo está basado en el libro de "Fundamentos da teoria ergódica" (Oliveira y Viana, 2005).

4.1. Entropía Topológica

Sea (X, f) con X compacto. Una cobertura finita es una colección de conjuntos $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_p\}$ tal que $C_1 \cup \dots \cup C_p = X$. Es una cobertura abierta, si además, los conjuntos $C_1, \dots, C_p$ son abiertos. Por otro lado, una partición es una cobertura hecha por pares de conjuntos disjuntos. Por lo que, la entropía topológica generalmente se define solo para coberturas abiertas. No obstante, damos la definición de cualquier cobertura finita porque a veces trataremos la entropía de cubiertas compuestas por intervalos que no son abiertos.

Sean $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_p\}$ y $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_q\}$ dos coberturas. La cobertura $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$ es definida por

$$\mathcal{C} \vee \mathcal{D} := \{C_i \cap D_j \mid i, j \in \mathbb{Z} \ , \ 1 \leq i \leq p \ , \ 1 \leq j \leq q \ , \ C_i \cap D_j \neq \emptyset\}$$

Decimos que $\mathcal{D}$ es más fino que $\mathcal{C}$, y escribimos $\mathcal{C} \prec \mathcal{D}$, si todo elemento de $\mathcal{D}$ está incluido en un elemento de $\mathcal{C}$. Sea $N(\mathcal{C})$ que denota la cardinalidad mínima de una subcobertura de $\mathcal{C}$, es decir,

$$N(\mathcal{C}) := \text{mín}\left\{n \mid \exists i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{Z}, 1 \leq i_k \leq p \ , \ k = 1, 2, \ldots, n\right\}, X = C_{i_1} \cup \cdots \cup C_{i_n}$$

Entonces, para todo los enteros $n \geq 1$, se define

$$N_n(\mathcal{C}, f) := N\left(\mathcal{C} \vee f^{-1}(\mathcal{C}) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{C})\right)$$

Si no hay ambigüedad en el sistema dinámico, $\mathcal{C}^n$ denotará $\mathcal{C} \vee f^{-1}(\mathcal{C}) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{C})$.

Lema 4.1.1. *Si $\{a_n\}$ es una secuencia de números reales no negativos tal que $a_{n+p} \leq a_n + a_p$ para todo $n, p \in \mathbb{N}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$ existe y es igual a $\text{ínf}\left\{\frac{a_p}{p}; p \in \mathbb{N}\right\}$.*

Demostración.

i) Se fija $p > 0$. Cada $n > 0$ se puede escribir $n = kp + i$ para $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq i < p$.

   Entonces $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{kp+i}}{kp+i} \leq \frac{a_{kp}+a_i}{kp+i}$.

ii) Afirmación. $a_{kp} \leq ka_p$

   En efecto, se cumple $a_{n+p} \leq a_n + a_p$

   Si $n = p$: $a_{p+p} \leq a_p + a_p \Rightarrow a_{2p} \leq 2a_p$

   (HI) Si $n = kp$: $a_{kp+p} \leq (k+1)a_p$

   Se probará para $n = (k+1)p$

   $a_{(k+1)p+p} \leq a_{(k+1)p} + a_p = a_{kp+p} + a_p \leq (k+1)a_p + a_p = (k+2)a_p$

   Por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$, se tiene $a_{kp} \leq ka_p$

iii) Por la afirmación, $\frac{a_n}{a_n} \leq \frac{a_{kp}+a_i}{kp+i} \leq \frac{ka_p+a_i}{kp+i} \leq \frac{ka_p+a_i}{kp} = \frac{a_p}{p} + \frac{a_i}{kp}$

Ahora, cuando $n \to \infty$ entonces $k \to \infty$ y así

$$\limsup_n \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_p}{p}$$

Entonces, $\limsup \dfrac{a_n}{n} \leq \inf\{\dfrac{a_p}{p}; p \in \mathbb{N}\} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \dfrac{a_n}{n}$

Se tiene, $\limsup_n \dfrac{a_n}{n} \leq \liminf_n \inf \dfrac{a_n}{n}$ y $\liminf_n \frac{a_n}{n} \leq \limsup_n \frac{a_n}{n}$

$\Rightarrow \liminf_n \frac{a_n}{n} = \limsup_n \frac{a_n}{n}$

Luego, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n}$ existe y es igual a $\inf\left\{\frac{a_p}{p}; p \in \mathbb{N}\right\}$

Con eso queda probado el lema. $\square$

Definición 4.1.1. *Llamamos entropía de la cobertura $\mathcal{C}$ al número $H(\mathcal{C}) = \log N(\mathcal{C})$.*

Lema 4.1.2. *La secuencia $\{H(\mathcal{C}^n)\}_{n\geq 1}$ es una secuencia subaditiva, esto es,*

$$H(\mathcal{C}^{m+n}) \leqslant H(\mathcal{C}^m) + H(\mathcal{C}^n)$$

Demostración.

i) *Afirmación 1. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son coberturas de X entonces $H(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leqslant H(\mathcal{C}) + H(\mathcal{D})$.*

En efecto, sea $\{C_1, \ldots, C_p\}$ una subcobertura finita de $\mathcal{C}$ entonces $p = N(\mathcal{C})$ y $\{D_1, \ldots, D_q\}$ una subcobertura finita de $\mathcal{D}$ entonces $q = N(\mathcal{D})$.

Entonces, $\mathcal{U} = \{C_i \cap D_j / 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$ una subcobertura de $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$ la cual tiene como máximo pq elementos.

Así, $N(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leqslant N(\mathcal{C})N(\mathcal{D})$ entonces $\log(N(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leqslant \log(N(\mathcal{C})) + \log(N(\mathcal{D}))$.

Por lo tanto, $H(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \leqslant H(\mathcal{C}) + H(\mathcal{D})$.

ii) *Afirmación 2. $H(f^{-1}(\mathcal{D})) \leqslant H(\mathcal{D})$*

En efecto, si $\mathcal{A}$ es una subcobertura de $\mathcal{D}$: $\#\mathcal{A} = N(\mathcal{D})$.

Entonces, $f^{-1}(\mathcal{A})$ es una subcobertura de $\mathcal{D}$

$\Rightarrow \#f^{-1}(\mathcal{A}) \leqslant \#\mathcal{A} \Rightarrow \#f^{-1}(\mathcal{A}) \leqslant N(\mathcal{D}) \Rightarrow N(f^{-1}(\mathcal{D})) \leqslant N(\mathcal{D})$

Por lo tanto, $H(f^{-1}(\mathcal{D})) \leqslant H(\mathcal{D})$.

iii) Por otro lado, se cumple que $H(\mathcal{C}^{m+n}) = H(\mathcal{C}^m \vee f^{-m}(C^n))$

Por las afirmaciones 1 y 2:

$H(\mathcal{C}^m \vee f^{-m}(C^n)) \leqslant H(\mathcal{C}^m) + H(f^{-m}(C^n)) \leqslant H(\mathcal{C}^m) + H(C^n)$

Así, $\{H(\mathcal{C}^n)\}_{n\geq 1}$ es una secuencia subaditiva. □

Tenemos que, para todas las coberturas finitas $\mathcal{C}$, la secuencia $\{\frac{1}{n}\log H(\mathcal{C}^n)\}_{n\geq 1}$ es subadditiva. Así, el Lema 4.1.1 se puede utilizar para definir la entropía topológica de la cobertura $\mathcal{C}$ por:

Definición 4.1.2. *La entropía de f con respecto a la cobertura $\mathcal{C}$, denotada por $h(\mathcal{C}, f)$, se define por*

$$h(\mathcal{C}, f) := \lim_{n\to+\infty} \frac{\log H(\mathcal{C}^n)}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{\log H(\mathcal{C}^n)}{n}$$

El siguiente lema se deriva directamente de las definiciones.

Lema 4.1.3. *Sea (X, f) . Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son dos coberturas finitas tal que $\mathcal{C} \prec \mathcal{D}$, entonces $h(\mathcal{C}, f) \leq h(\mathcal{D}, f)$.*

Demostración.

i) Probar $h(\mathcal{C}, f) \leq h(\mathcal{D}, f)$ es lo mismo que probar que $H(\mathcal{C}^n) \leq H(\mathcal{D}^n)$ y como se tiene que si $\mathcal{C}^n \prec \mathcal{D}^n$ implica $H(\mathcal{C}^n, \mathcal{D}^n)$. Bastaría probar que $\mathcal{C}^n \prec \mathcal{D}^n$.

ii) Probaremos que para todo D$\in \mathcal{D}^n$, existe C $\in \mathcal{C}^n$ tal que D$\subset$C.

En efecto,

$\mathcal{D}^n = \mathcal{D} \vee f^{-1}(\mathcal{D}) \vee \ldots \vee f^{n+1}(\mathcal{D})$

$\mathcal{C}^n = \mathcal{C} \vee f^{-1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(\mathcal{C})$

Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{D}^n \Rightarrow \mathcal{U} = D_1 \cap f^{-1}\left(D_1\right) \cap \cdots \cap f^{-n+1}\left(D_n\right)$. Por hipótesis, $\mathcal{C} \prec \mathcal{D} \Rightarrow \forall D \in \mathcal{D}, \exists C \in \mathcal{C}$ talque D $\subset$ C, es decir, $D_1 \subset C_1 \in \mathcal{C} \ldots D_j \subset \mathcal{C}_j \in \mathcal{C}$ para algún C_j

$\Rightarrow f^{-1}\left(D_j\right) \subset f^{-1}\left(C_j\right) \in f^{-1}(\mathcal{C})$

$\Rightarrow f^{-i}\left(D_j\right) \subset f^{-i}\left(C_j\right) \in f^{-i}(\mathcal{C}), \forall i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad f^{-i}\left(D_j\right) \subset F^{-i}\left(C_j\right) \in f^{-i}(e), \forall i \in \mathbb{N}$

Así, $D_1 \cap f^{-1}(D_2) \cap \ldots \cap f^{-n+1}(D_n) \subset C_1 \cap f^{-1}(C) \cap \ldots \cap f^{-n+1}(C_n) \in \mathcal{C}^n$

$\Rightarrow \mathcal{C}^n \prec \mathcal{D}^n$

Por lo tanto, $H(\mathcal{C}^n) \leqslant H(\mathcal{D}^n) : \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mathcal{C}^n)}_{h(\mathcal{C},f)} \leqslant \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(D^n)}_{h(\mathcal{D},f)}$

De esta manera queda probado el lema. □

Definición 4.1.3. *La entropía topológica del sistema dinámico (X, f), denotada por $h_{top}(f)$, se define por*

$$h_{top}(f) = \sup\{h(f, \mathcal{C}) : \mathcal{C} \text{ es cobertura finita de } X\}$$

4.2. Conjunto Generador y Conjunto Separador

Definición 4.2.1. *Sea (X, f) con X compacto. Dados $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Decimos que $E \subset X$ es un conjunto (n, ε)-generador de X. Si para cada $x \in X$, $\exists\ y \in E$ tal que $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon$, $\forall i = 0, \ldots, n-1$.*

Notación 4.2.1. $B(y; n, \varepsilon) = \{x \in X \ / \ d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon\}$ *es un conjunto abierto en X y se le llama bola dinámica de centro y, longitud n y radio ε.*

Observación 4.2.1.

1. *Si E es (n, ε)-generador de X entonces $X \subset \bigcup_{y\in E} B(y; n, \varepsilon)$.*

2. *Siempre existe conjuntos (n, ε)-generador, en efecto*

$$X \subseteq \bigcup_{x\in X} B(x; n, \varepsilon) \Rightarrow X \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j; n, \varepsilon) \text{ (pues } X \text{ es compacto).}$$

   Así, $E = \{x_1, \ldots, x_m\} \Rightarrow E$ es $(n, \varepsilon)-$generador.

3. *Denotamos por $g_n(f, \varepsilon, X) = \min\{\#E / E \text{ es } (n, \varepsilon)-\text{generador de } X\}$.*

   Definimos
$$g(f, \varepsilon, X) = \limsup_{n} \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, X).$$

Observamos que la función $\varepsilon \mapsto g(f, \varepsilon, X)$ es monótona no creciente.

En efecto, de la definición si $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ entonces todo conjunto (n, ε_1)-generador también es (n, ε_2) −generador. Sea E un conjunto $(n, \varepsilon_1) - $ *generador* tal que $\#E = g_n(f, \varepsilon_1, X)$, entonces:

$$g_n(f,\varepsilon_2,X) = \text{mín}\{\#F \ / \ F \text{ es } (n,\varepsilon_2) - \text{generador de X}\} \leqslant \#E$$

Por lo tanto,

$$g_n(f,\varepsilon_2,X) \leq g_n(f,\varepsilon_1,X) \tag{4.1}$$

para todo $n \geq 1$, y tomando el límite:

$$\limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f,\varepsilon_2,X) \leq \limsup_n \frac{1}{n} \log g_n(f,\varepsilon_1,X)$$

Así, se tiene que, $g(f,\varepsilon_2,X) \leq g(f,\varepsilon_1,X)$. Esto garantiza, en particular, que

$$g(f,X) = \lim_{\varepsilon\to 0} g(f,\varepsilon,X)$$

existe.

Por otro lado, introducimos también la siguiente noción dual.

Definición 4.2.2. *Dados $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, decimos que un conjunto $E \subset X$ es (n,ε)-separador de X si dados $x, y \in E$, existe $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \geq \varepsilon$. En otras palabras, si $x \in E$ entonces $B(x;n,\varepsilon)$ no contiene ningún otro punto de E.*

Observación 4.2.2. *Denotamos por $s_n(f,\varepsilon,X) = \text{máx}\{\#E/E$ es $(n,\varepsilon)-$separador de $X\}$*

Definimos

$$s(f,\varepsilon,X) = \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f,\varepsilon,X).$$

Observamos que la función $\varepsilon \mapsto s(f,\varepsilon,X)$ es monótona no creciente.

En efecto, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, entonces todo conjunto $(n,\varepsilon_2)-$separador también es $(n,\varepsilon_1)-$separador. Sea F un conjunto $(n,\varepsilon_2) - $ *separador* tal que $\#F = s_n(f,\varepsilon_2,X)$, entonces:

$$s_n(f,\varepsilon_1,X) = \text{máx}\{\#E \ / \ E \text{ es } (n,\varepsilon_1) - \text{separador de X}\} \geqslant \#F$$

Por lo tanto,

$$s_n(f,\varepsilon_1,X) \geq s_n(f,\varepsilon_2,X) \tag{4.2}$$

para todo $n \geq 1$ y, tomando el límite:

$$s\left(f, \varepsilon_1, X\right) = \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon_1, X) \geq \limsup_n \frac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon_2, X) = s\left(f, \varepsilon_2, X\right).$$

En particular,

$$s(f, X) = \lim_{\varepsilon \to 0} s(f, \varepsilon, X)$$

siempre existe.

Proposición 4.2.1. *Se tiene* $g(f, X) = s(f, X)$.

Demostración. Necesitamos del siguiente lema: □

Lema 4.2.1. $g_n(f, \varepsilon, X) \leq s_n(f, \varepsilon, X) \leq g_n(f, \varepsilon/2, X)$ *para todo* $n \geq 1$, *todo* $\varepsilon > 0$.

Demostración.

i) Sea $E \subset X$ un conjunto $(n, \varepsilon)-$separador tal que $\#E = s_n(f, \varepsilon, X)$ donde E es el conjunto $(n, \varepsilon)-$separador con mayor cardinal.

   Así, dado $y \in M \backslash E$, entonces $E \cup \{y\}$ no es $(n, \varepsilon)-$separador. Por tanto, existe $x \in E$ tal que $d\left(f^i(x), f^i(y)\right) < \varepsilon, \forall i = 0, \cdots, n-1$. Esto muestra que E es un conjunto $(n, \varepsilon)-$generador de X. Así, $g_n(f, \varepsilon, X) = \min\{\#F/F \text{ es } (n, \varepsilon)-\text{generador}\} \leqslant \#E$ entonces

$$g_n(f, \varepsilon, X) \leq s_n(f, \varepsilon, X)$$

ii) Ahora, probemos que

$$s_n(f, \varepsilon, X) \leqslant g_n\left(f, \varepsilon/2, X\right) \tag{4.3}$$

   Sea $E \subset M$ un conjunto $(n, \varepsilon)-$separador y $F \subset M$ un conjunto $(n, \varepsilon/2)-$generador de X. Por definición de $(n, \varepsilon/2)-$generador se tiene que para $x \in E$, $\exists\, y \in F$ tal que

$$d\left(f^i(x), f^i(y)\right) < \varepsilon/2 \quad \forall i = 0, \ldots, n-1$$

   Definimos la aplicación $\phi : E \to F$ dado por $\phi(x) = y$.

   Afirmación. ϕ es inyectiva. En efecto, suponemos que existen $x, z \in E$ tal que $\phi(x) = \phi(z) = y$ entonces

$$d\left(f^i(x), f^i(z)\right) \leqslant d\left(f^i(x), f^i(y)\right) + d\left(f^i(y), f^i(z)\right) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

$\forall i = 0, \ldots, n-1$. Entonces, $x = z$ pues E es un conjunto $(n, \varepsilon)-$separador. Así, $\#E \leqslant \#F$. Como E y F son arbitrarios, entonces:

$$s_n(f_1, \varepsilon, X) \leqslant g_n(f, \varepsilon/2, X) \tag{4.4}$$

De (4.3) y (4.4) se prueba la desigualdad.

Quedando así probado el lema. □

Demostración de la Proposición 4.2.1.

i) $s(f, X) = g(f, X) \Rightarrow \lim\limits_{\varepsilon \to 0} s(f, \varepsilon, X) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} g(f, \varepsilon, X)$

- $g(f, \varepsilon, X) = \limsup \dfrac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, X)$
- $s(f, \varepsilon, X) = \limsup \dfrac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, X)$

ii) Sabemos del lema anterior:

$g_n(f, \varepsilon, X) \leqslant s_n(f, \varepsilon, X) \leqslant g_n(f, \varepsilon/2, X)$

dado $\varepsilon > 0, g(f, \varepsilon, X) = \limsup\limits_n \dfrac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, X) \leqslant \limsup\limits_n \dfrac{1}{n} \log s_n(f, \varepsilon, X)$

$\leqslant \limsup\limits_n \dfrac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon/2X) = g(f, \varepsilon/2, X)$

$\Rightarrow g(f, E, X) \leqslant s(f, \varepsilon, X) \leqslant g(f, \varepsilon/2, X)$

tomando límite, $\underbrace{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} g(f, \varepsilon, X)}_{g(f,X)} \leqslant \underbrace{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} s(f, \varepsilon, X)}_{s(f,X)} \leqslant \underbrace{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} g(f, \varepsilon/2, X)}_{g(f,X)}$.

Proposición 4.2.2. *Sea (X, f) con X compacto. Sea $\{\mathcal{C}^k\}_{k \leq 1}$ una secuencia de coberturas abiertas en X tal que diam $\mathcal{C}^k \to 0$, $k \to \infty$.*
Entonces, $h_{top}(f) = \sup\limits_k h(\mathcal{C}^k, f) = \lim\limits_{k \to \infty} h(\mathcal{C}^k, f)$.

Demostración.

i) Dada $\mathcal{D}^k$ una cobertura abierta de X y $\varepsilon > 0$ un número de Lebesgue de $\mathcal{D}$ (i.e. $\forall\ B(p, \varepsilon)$, $\exists\ D \in \mathcal{D}$ talque $B(p, \varepsilon) \subset D$).

ii) Como *diam* $\mathcal{C}^k \to 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que *diam*$\mathcal{C}^k < \varepsilon$, $\forall\ k \geq n$.

iii) Desde que $\varepsilon > 0$ es un número de Lebesgue de $\mathcal{D}$, se sigue que todo elemento de $\mathcal{C}^k$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{D}$. Luego,

$$\begin{aligned} \text{diam } \mathcal{C} < \varepsilon &\Rightarrow diam(C) < \varepsilon, \forall C \in \mathcal{C}^k \Rightarrow C \subset B(p,\varepsilon) \\ &\Rightarrow \exists D \in \mathcal{D} \text{ tal que } C \subset B(p,\varepsilon) \subset D \end{aligned}$$

iv) Así, $\mathcal{D} < \mathcal{C}k \quad \forall k \geq n$

$\Rightarrow h(\mathcal{D}, f) \leq h\left(\mathcal{C}^k, f\right) \Rightarrow h(\mathcal{D}, f) \leqslant \liminf_k h\left(\mathcal{D}^k, f\right)$

$\Rightarrow \sup\{h(\mathcal{D}, f)/\mathcal{D} \text{ cobertura de } X\} \leqslant \liminf_k h\left(\mathcal{C}^k, f\right)$

Entonces,

$$h_{top}(f) \leq \liminf_k h\left(\mathcal{C}^k, f\right) \tag{4.5}$$

v) Por otro lado, $h_{top}(f) = \sup\{h(\mathcal{D}, f)/\mathcal{D} \text{ cobertura abierta de } X\}$, entonces

$$h_{top}(f) \geqslant \sup_k h\left(\mathcal{C}^k, f\right) \geqslant \limsup_k h(\mathcal{C}^k, f) \tag{4.6}$$

De (4.5) y (4.6) se concluye la proposición. □

Corolario 4.2.1. *Sea (X, f) con X compacto. Si $\mathcal{C}$ es cobertura abierta de X tal que diam $\mathcal{C}^k \to 0$, $k \to \infty$, $\mathcal{C}^k = \mathcal{C} \vee f^{-1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(\mathcal{C})$.*
Entonces $h_{top}(f) = h(\mathcal{C}, f)$.

Demostración.

i) Por la proposición 4.2.2 se tiene que $h_{top}(f) = \lim_{k\to\infty} h(\mathcal{C}^k, f)$.

ii) Afirmación. $((\mathcal{C}^k)^n) = \mathcal{C}^{n+k-1}$

En efecto,

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^k)^n &= \mathcal{C}^k \vee f^{-1}(\mathcal{C}^k) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(\mathcal{C}^k) \\ &= \mathcal{C} \vee \ldots \vee f^{-k+1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee f^{-n+1}(\mathcal{C} \vee \ldots \vee f^{-k+1}\mathcal{C}) \end{aligned}$$

Si $k = 2$ y $n = 2$. Veamos $(\mathcal{C}^2)^2 = \mathcal{C}^{2+2-1}$.

Sea $C \in (\mathcal{C}^2)^2 = \mathcal{C}^2 \vee f^{-1}(\mathcal{C}^2) \Rightarrow C = B_1 \cap f^{-1}(B_2), B_1, B_2 \in \mathcal{C}^2$ donde

$$B_1 = C_1 \cap f^{-1}(C_2),\ B_2 = C_1' \cap f^{-1}(C_2') \quad \text{y} \quad C_1, C_2, C_1', C_2' \in \mathcal{C}$$

$$\begin{aligned} C &= C_1 \cap f^{-1}(C_2) \cap f^{-1}\left(C_1' \cap f^{-1}(C_2')\right) \\ &= C_1 \cap f^{-1}(C_2) \cap f^{-1}(C_1') \cap f^{-1}(C_2') \\ &= \underbrace{\underbrace{C_2}_{\in\mathcal{C}} \cap f^{-1}(C_2 \cap C_2') \cap f^{-2}\underbrace{(C_2')}_{\in\mathcal{C}}}_{\in\mathcal{C}^3} \end{aligned}$$

Entonces, $C \in \mathcal{C}^3$. Luego, $(\mathcal{C}^2)^2 = \mathcal{C}^3$.

Ahora, $C \in \mathcal{C}^3$, entonces

$$\begin{aligned} C &= B_1 \cap f^{-1}(B_2) \cap f^{-2}(B_3), \quad B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{C} \\ &= B_1 \cap f^{-1}(B_2) \cap f^{-1}(B_2) \cap f^{-2}(B_2) \\ &= C_1 \cap f^{-1}(\underbrace{B_2 \cap f^{-1}(B_2)}_{C_2}), \quad C_1 \in \mathcal{C}^2, C_2 \in \mathcal{C}^2 \\ &= \underbrace{C_1 \cap f^{-1}(C_2)}_{\in(\mathcal{C}^2)^2} \end{aligned}$$

Entonces, $C \in (\mathcal{C}^2)^2$. Luego, $\mathcal{C}^3 = (\mathcal{C}^2)^2$.

Por inducción, $(\mathcal{C}^k)^n = \mathcal{C}^{n+k-1}$, $\forall\ k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

iii) Afirmación. $h\left(\mathcal{C}^k, f\right) = h(\mathcal{C}, f)$, $\forall\ \mathcal{C}$ cobertura de X y $k \geq 1$.

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} h(\mathcal{C}, f) &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \log N(\mathcal{C}^m) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+k-1} \log N\left(\left(\mathcal{C}^k\right)^n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+k-1} \cdot \frac{1}{n} \log N\left(\left(\mathcal{C}^k\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\left(\left(\mathcal{C}^k\right)^n\right) \\ &= h\left(\mathcal{C}^k, f\right) \end{aligned}$$

iv) Por lo que de (i) y la afirmación anterior, $h_{top}(f) = \lim\limits_{k\to\infty} h(\mathcal{C}, f) = h(\mathcal{C}, f)$.

Quedando así el corolario probado. □

Proposición 4.2.3. *Sea* (X, f) .

- *Para todos los enteros* $n \geq 1$, $h_{top}(f^n) = n h_{top}(f)$.

- *Si (Y, g) es que es conjugado a (X, f) entonces $h_{top}(f) = h_{top}(g)$.*

Demostración.

- Consideremos $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ observemos que si E es un conjunto (kn, ε)-generador de X para f, entonces E es un conjunto (k, ε)-generador de X para f^n.

  Así, $g_k(f^n, \varepsilon, X) = \text{mín}\{\#E/E \text{ es } (k, \varepsilon)\text{-generador de } X \text{ para } f^n\} \leqslant$

  $g_{kn}(f, \varepsilon, X) = \text{mín}\{\#E/E \text{ es } (kn, \varepsilon)\text{-generador de } X \text{ para } f\}$

  Entonces, $g_k(f^n, \varepsilon, X) \leqslant g_{kn}(f, \varepsilon, X)$
  $\Rightarrow \limsup_k \frac{1}{k} \log g_k(f^n, \varepsilon, X) \leqslant \limsup_k \frac{1}{k} \log g_{kn}(f, \varepsilon, X) = n \limsup_k \frac{1}{kn} \log g_{kn}(f, \varepsilon, X)$
  $\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_k \frac{1}{k} \log g_k(f^n, \varepsilon, X) \leqslant n \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_k \frac{1}{kn} \log g_{kn}(f, \varepsilon, X)$

$$\Rightarrow h_{\text{top}}(f^n) \leqslant n h_{\text{top}}(f) \tag{4.7}$$

  Por otro lado, como f es continua y X es compacto, entonces f es uniformemente continua. Así, para $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d\left(f^j(x), f^j(y)\right) < \varepsilon \quad \forall j = 1, \ldots, n-1 \tag{4.8}$$

  Si $E \subset X$ es un conjunto (k, δ)-generador de X para f^n, entonces usando (4.8), E es un conjunto (kn, ε)-generador de X para f.

  Asi, $g_{kn}(f, \varepsilon, X) \leqslant g_k(f^n, \delta, X) = \text{mín}\{\#E/E \text{ es } (k, \delta)\text{-generador de } X \text{ para } f^n\}$
  $\Rightarrow \text{mín}\{\#E/E \text{ es } (kn, \varepsilon)\text{-generador de } X \text{ para } f\}$
  $\Rightarrow \limsup_k \frac{1}{kn} \log g_{kn}(f, \varepsilon, X) \leqslant \limsup_k \frac{1}{k} \log g_k(f^n, \delta, X)$
  tomando $\varepsilon \to 0, \delta \to 0$

$$\Rightarrow n h_{\text{top}}(f) \leqslant h_{\text{top}}(f^n) \tag{4.9}$$

  De (4.7) y (4.9) : $h_{\text{top}}(f^n) = n h_{\text{top}}(f)$.

- Sea $h \circ f = g \circ h$. Entonces por inducción obtenemos $h \circ f^k = g^k \circ h$, $\forall k > 0$. Por lo que, se considera una cobertura abierta $\mathcal{C}$ de Y entonces $h^{-1}\mathcal{C}$ es una cobertura de

X. La entropía topológica de g está relacionada a la cobertura $\mathcal{C}$ que será

$$\begin{aligned}
h_{top}(g,\mathcal{C}) &= \lim_{n\to\infty} H\left(\mathcal{C}\vee g^{-1}\mathcal{C}\vee\ldots\vee g^{-n+1}\mathcal{C}\right)/n \\
&= \lim_{n\to\infty} H\left(h^{-1}\left(\mathcal{C}\vee g^{-1}\mathcal{C}\vee\ldots\vee g^{-n+1}\mathcal{C}\right)/n \\
&= \lim_{n\to\infty} H\left(h^{-1}\mathcal{C}\vee h^{-1}g^{-1}\mathcal{C}\vee\ldots\vee h^{-1}g^{-n+1}\mathcal{C}\right)/n \\
&= \lim_{n\to\infty} H\left(h^{-1}\mathcal{C}\vee f^{-1}h^{-1}\mathcal{C}\vee\ldots\vee f^{-n+1}h^{-1}\mathcal{C}\right)/n \\
&= h_{top}\left(f,h^{-1}\mathcal{C}\right) \Rightarrow \text{ se tiene que } h_{top}(g)\leq h_{top}(f)
\end{aligned}$$

Por otro lado, como h es un homeomorfismo se tiene que $h^{-1}\circ g = f\circ h^{-1}$ y así $h_{top}(f)\leq h_{top}(g)$. Por lo tanto, $h_{top}(f)=h_{top}(g)$.

□

Teorema 4.2.1. *(Fórmula de Bowen). Sea (X,f) entonces*

$$h_{top}(f)=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log s_n\left(f,\varepsilon,X\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log g_n\left(f,\varepsilon,X\right)$$

Demostración.

i) Notamos que los límites

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log s_n\left(f,\varepsilon,X\right)\quad y\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to+\infty}\sup_n\frac{1}{n}\log g_n(f,\varepsilon,X)$$

existen por (4.1) y (4.2).

Además son iguales por el Lema 4.2.1.

ii) Denotamos h como el valor de esos límites. Probaremos que $h_{\text{top}}\left(f\right)=h$.

iii) Sea $\varepsilon>0$ y $n\in\mathbb{N}$. Sea F un conjunto $(n,\varepsilon)-$separador de cardinalidad $s_n\left(f,\varepsilon,X\right)$. Sea $\mathcal{C}$ una cobertura abierta finita tal que el diámetro de todos los elementos de $\mathcal{C}$ es menor que ε (tal que una cobertura existe porque X es compacto).

Dos puntos distintos de F están en elementos distintos de $\mathcal{C}^n$ así, $s_n(f,\varepsilon,X)\leqslant N_n(\mathcal{C})$. Esto implica que

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log s_n(f,\varepsilon,X)\leqslant h_{\text{top}}\left(f,\mathcal{C}\right)$$

por lo tanto, $h \leqslant h_{\text{top}}(f)$. Sea $\mathcal{D}$ una cobertura abierta finita y sea $\delta > 0$ un número de Lebesgue para $\mathcal{D}$, es decir, para todo $x \in X$, existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $B(x, \delta) \subset D$.

Sea $\varepsilon \in (0, \delta)$ y sea E un conjunto $(n, \varepsilon)-$generador de cardinalidad $g_n(f, \varepsilon, X)$.

Para todo $y \in E$ y $\forall k \in \mathbb{Z}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, existe $D_{y,k} \in \mathcal{D}$ tal que $B\left(f^k(y), \delta\right) \subset V_{y,k}$.

Sea $x \in X$. Por definición de E, existe $y \in E$ tal que $x \in B_n(y, \varepsilon)$, desde que $f^k(x) \in \bar{B}\left(f^k(y), \varepsilon\right) \subset B\left(f^k(y), \delta\right)$, $\forall k \in \mathbb{Z}, k = 0, \ldots, n-1$. Así,

$$x \in \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\left(D_{y,k}\right)$$

. Esto implica que $D' := \left\{ \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\left(V_{y,k}\right) \mid y \in E \right\}$ es una subcobertura de $\mathcal{D}^n$, por lo tanto

$$N_n(\mathcal{D}) \leqslant N\left(\mathcal{D}'\right) \leqslant \# E = g_n\left(f, \varepsilon, X\right).$$

Por lo tanto,

$$h_{top}(\mathcal{D}, f) \leqslant \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log g_n(f, \varepsilon, X)$$

y así $h_{\text{top}}(f) \leqslant h$. Finalmente, tenemos que $h_{top}(f) = h$.

$\square$

Proposición 4.2.4. *Sea (I, f) donde I es un intervalo y $\lambda \geqslant 1$. Si f es lipschitziana cuya constante es λ (denotada $\lambda-$lipschitz), entonces $h_{top}(f) \leqslant \log \lambda$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y $n \geqslant 1$. Sea $E = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_s\}$ un conjunto $(n, \varepsilon)-$separador de cardinalidad $s := s_n(f, \varepsilon)$. Para todo $i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, s-1$, existe $k \in \mathbb{Z}, k = 0, \ldots, n-1$ tal que $\left|f^k\left(x_{i+1}\right) - f^k\left(x_i\right)\right| > \varepsilon$. Como f es "λ-Lipschitz" con $\lambda \geqslant 1$,

$$\left|f^k\left(x_{i+1}\right) - f^k\left(x_i\right)\right| \leqslant \lambda^k \left|x_{i+1} - x_i\right| \leqslant \lambda^n \left|x_{i+1} - x_i\right|.$$

Asi, $x_{i+1} - x_i \geqslant \lambda^{-n}\varepsilon$ y $x_s - x_1 \geqslant (s-1)\lambda^{-n}\varepsilon$. Como $x_s - x_1 \leqslant |I|$, esto implica que

$$s \leqslant \frac{|I|}{\varepsilon}\lambda^n + 1$$

Por la Fórmula de Bowen: $h_{\text{top}}(f) \leqslant \log \lambda$. $\square$

4.3. Ejemplos de sistemas con entropía positiva

Shift de Bernoulli

Sea $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ el shift de Bernoulli. Calcularemos $h_{top}(\sigma)$.

i) Sabemos que Σ es un espacio métrico compacto.

ii) Tenemos que $d((x_i)_i, (y_i)_i) = \theta^N$, donde $\theta \in (0,1)$ y

$N = \text{máx}\{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : x_i = y_i \quad \forall i < k\}$.

iii) Consideramos para Σ una cobertura abierta, $\mathcal{C} = \{[0 : a] : a = 0,1\}$ y además $\mathcal{C}^n = \mathcal{C} \vee \sigma^{-1}(\mathcal{C}) \vee \ldots \vee \sigma^{-n+1}(\mathcal{C}) = \{[0 : a_0, \ldots, a_{n-1}] : a_0, \ldots, a_{n-1} \in \{0,1\}\}$.

Donde observamos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{[0:0],[0,1]\} && \Rightarrow \#\mathcal{C} = 2 \\ \mathcal{C}^2 = \mathcal{C} \vee \sigma^{-1}(\mathcal{C}) &= \{[0 : a_0, a_1] : a_0, a_1 \in \{0,1\}\} \\ &= \{[0:0,1],[0:1,1],[0:1,0],[0:0,0]\} && \Rightarrow \#\mathcal{C}^2 = 2^2 \end{aligned}$$

Inductivamente,

$$\mathcal{C}^n = \{[0 : a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}] : a_0, a_1, \ldots \in \{0,1\}\} \quad \Rightarrow \#\mathcal{C}^n = 2^n$$

iv) Así, $N(\mathcal{C}) = \#\mathcal{C}^n$ pues los elementos de $\mathcal{C}^n$ son disjuntos dos a dos.

Luego, $h(\mathcal{C},\sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(\mathcal{C}^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#\mathcal{C}^n = \lim \frac{1}{n} \log 2^n$.

Entonces $h(\mathcal{C},\sigma) = \log 2$.

v) Afirmación. *diam* $\mathcal{C}^n \to 0$, $n \to \infty$.

En efecto, *diam* $\mathcal{C}^n = \sup\{diam(C) : C \in \mathcal{C}^n\}$.

Como $\mathcal{C}^n = \{[0 : a_0, \ldots, a_{n-1}] : a_0, \ldots, a_{n-1} \in \{0,1\}\}$

entonces $diam(C) = \sup\{d(x,y) : x, y \in C\}$ donde $x = (x_i)_i \in C$ y $y = (y_i)_i \in C$.

$d(x,y) = \theta^{n-1} \to 0 \quad n \to \infty$

Entonces, *diam* $\mathcal{C}^n = 0$

v) Por lo tanto, del coroloario 4.1.1, $h_{top}(\sigma) = h(\mathcal{C},\sigma) = \log 2$

Ecuación lógistica $\mu = 4$

Sea $f : [0,1] \to [0,1]$, dada por $f(x) = 4x(1-x)$. Calculamos $h_{top}(f)$.

i) Sea $g : [0,1] \to [0,1]$, dada por $g(x) = 1-|2x-1|$. Tenemos que g es topológicamente conjugada con f vía el homeomorfismo $\phi(x) = sen^2\pi x/2$.

ii) Afirmación. $h_{top}(g) = \log 2$.

En efecto, tenemos $g(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 2-2x, & 1/2 < x \leqslant 1 \end{cases}$

Consideramos α cobertura de $[0,1]$ donde $\alpha = \{[0,3/4),(1/2,1]\}$.

1. $\alpha^2 = \alpha \vee g^{-1}(\alpha)$.

   $g^{-1}(\alpha) = \{[0,3/8) \cup (5/8,1]; (1/4,3/4)\}$

   $[0,3/4) \cap g^{-1}(\alpha) = \{[0,3/8) \cup (5/8,6/8); (2/8,6/8)\}$

   $(1/2,1] \cap g^{-1}(\alpha) = \{(5/8,1]; (4/8,6/8)\}$

   Así, $\alpha^2 = \{[0,3/8) \cup (5/8,6/8); (2/8,6/8); (4/8,6/8); (5/8,1])\}$

2. $\alpha^3 = \alpha \vee g^{-1}(\alpha) \vee g^{-2}(\alpha)$

   $g^{-2}(\alpha) = \{g^{-2}([0,3/4)); f^{-2}((1/2,1])\}$

   $g^{-2}([0,3/4)) = g^{-1}([0,3/8) \cup (5/8,1]) = [0,3/16) \cup (5/16,11/16) \cup (13/16,1]$

   $g^{-2}((1/2,1]) = g^{-1}((1/4,3/4)) = \{(1/8,3/8) \cup (5/8,7/8)\}$

   $[0,3/4) \cap \{[0,3/8) \cup (5/8,1]\} \cap g^{-2}(\alpha) = \{[0,3/16) \cup (5/16,6/16) \cup (10/16,11/16)$

   $; (2/16,6/16) \cup (10/16,12/16)\}$

   $[0,3/4) \cap (1/4,3/4) \cap f^{-2}(\alpha) = \{(5/16,11/16); (4/16,6/16) \cup (10/16,12/16)\}$

   $(1/2,1] \cap \{[0,3/8) \cup (5/8,1] \cap g^{-2}(\alpha) = \{(10/16,11/16) \cup (13/16,1]; (10/16,14/16)\}$

   $(1/2,1] \cap (1/4,3/4) \cap g^{-2}(\alpha) = \{(8/16,11/16); (10/16,12/16)\}$

   Así, $\alpha^3 = \{[0,3/16) \cup (5/16,6/16) \cup (10/16,11/16); (2/16,6/16) \cup (10/16,12/16);$

   $(10/16,11/16) \cup (13/16,1]; (10/16,14/16); (8/16,11/16); (10/16,12/16)\}$

Tenemos que $N(\alpha) = \text{mín}\{\#\beta : \beta \text{ es una subcobertura finita de } \alpha\} \Rightarrow N(\alpha) = 2 = 2^{1-1} + 1$

Ahora, $\beta = \{(2/8,6/8),(5/8,1],[0,3/8) \cup (5/8,6/8)\}$ es la mínima subcobertura finita de α^2.

$\Rightarrow N(\alpha^2) = 3 = 2^{2-1} + 1$

Ahora, si $\rho = \{(5/16, 11/16), (10/16, 14/16), (10/16, 11/16) \cup (13/16, 1], (2/16, 6/16) \cup (10/16, 12/16), [0, 3/16)\}$ es la mínima subcobertura finita de α^3

$\Rightarrow N(\alpha^3) = 5 = 2^{3-1} + 1$

Por inducción, $N(\alpha^n) = 2^{n-1} + 1$

La entropía de la cobertura α^n será:

$H(\alpha^n) = \log N(\alpha^n) = \log(2^{n-1} + 1) = \log 2^{n-1} + \log(2^{1-n} + 1)$

$\Rightarrow h(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} \log 2 = \log 2$

Además, *diam* $\alpha^k \leqslant \frac{1}{2^k} \Rightarrow$ diam $\left(\alpha^k\right) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

$\Rightarrow h_{\text{top}}(g) = h(g, \alpha)$

Por lo tanto, $h_{\text{top}}(g) = \log 2$.

iii) Como $h_{top}(g) = \log 2$ y, f y g son topológicamente conjugados, entonces $h_{top}(g) = h_{top}(f) = \log 2$.

Función por partes

Considerando el sistema dinámico $f : [-1, 1] \to [-1, 1]$ definido por

$$f(x) := \begin{cases} 2x + 2, & -1 \leq x \leq -1/2 \\ -2x, & -1/2 \leq x \leq 0 \\ -x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Se cumple:

- $f(x) = 2x + 2 \Rightarrow f^2(x) = f(2x + 2)$ donde $0 \leq 2x + 2 \leq 1$, entonces aplicando la definición de f:

$$f^2(x) = -2x - 2 \quad , \quad -1 \leq x \leq -1/2$$

- $f(x) = -2x \Rightarrow f^2(x) = f(-2x)$ donde $0 \leq -2x \leq 1$, entonces aplicando la definición de f:

$$f^2(x) = 2x \quad , \quad -1/2 \leq x \leq 0$$

- $f(x) = -x \Rightarrow f^2(x) = f(-x)$ donde $-1 \leq -x \leq 0$, luego:

para $-1 \leq -x \leq -1/2 : f^2(x) = 2(-x) + 2 = -2x + 2 \quad , \quad 1/2 \leq x \leq 1$

para $-1/2 \leq -x \leq 0 : f^2(x) = -2(-x) = 2x \quad , \quad 0 \leq x \leq 1/2$

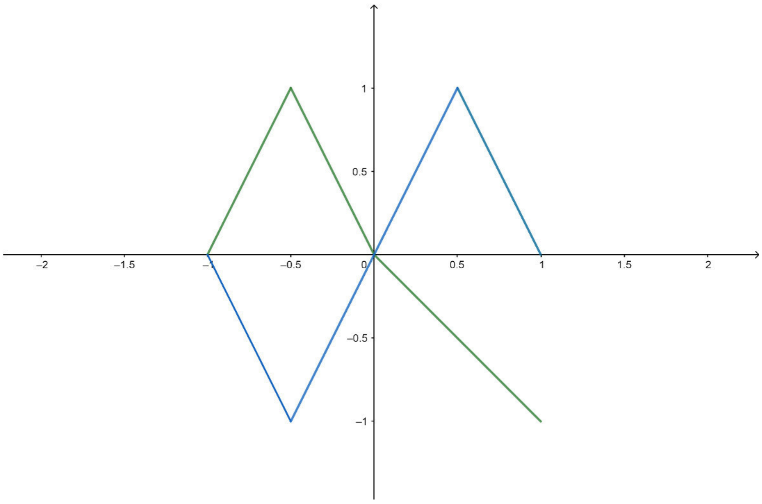


Figura 4.1: Gráfica de f y f^2

Veremos que $h_{top}(f) = \log(\sqrt{2})$.

i) Geométricamente, de la Figura 4.1, se observa que f^2 es $2-$lipschitz.

Analíticamente, tendríamos que:

Sean $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ con $x_2 < x_1$, la otra desigualdad es análoga:

- Para $x_1, x_2 \in [-1, -1/2]$:

  $f^2(x_1) - f^2(x_2) = -2x_1 - 2 - (-2x_2 - 2) = -2(x_1 - x_2)$

  $\Rightarrow \frac{f^2(x_1)-f^2(x_2)}{x_1-x_2} = -2 \Rightarrow \left|\frac{f^2(x_1)-f^2(x_2)}{x_1-x_2}\right| \leq 2$

- Para $x_1, x_2 \in [-1/2, 0]$:

  $f^2(x_1) - f^2(x_2) = -2x_1 - (-2x_2) = -2(x_1 - x_2)$

  $\Rightarrow \frac{f^2(x_1)-f^2(x_2)}{x_1-x_2} = -2 \Rightarrow \left|\frac{f^2(x_1)-f^2(x_2)}{x_1-x_2}\right| \leq 2$

- Para $x_1, x_2 \in [0, 1/2]$:

  $f^2(x_1) - f^2(x_2) = 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2)$

  $\Rightarrow \frac{f^2(x_1)-f^2(x_2)}{x_1-x_2} = 2 \Rightarrow \left|\frac{f^2(x_1)-f^2(x_2)}{x_1-x_2}\right| \leq 2$

- Para $x_1, x_2 \in [1/2, 1]$:

  $f^2(x_1) - f^2(x_2) = -2x_1 + 2 - (-2x_2 + 2) = -2(x_1 - x_2)$

  $\Rightarrow \frac{f^2(x_1)-f^2(x_2)}{x_1-x_2} = -2 \Rightarrow \left|\frac{f^2(x_1)-f^2(x_2)}{x_1-x_2}\right| \leq 2$

ii) Por la Proposición 4.2.4, se tiene: $h_{top}(f^2) \leq \log 2$.

iii) Además, por la Proposición 4.2.3, tenemos que $h_{top}(f^2) = 2h_{top}(f)$. Entonces,

$$2h_{top}(f) \leq \log 2 \quad \Rightarrow \quad h_{top}(f) \leq \frac{1}{2}\log 2 \quad \Rightarrow \quad h_{top}(f) \leq \log \sqrt{2}$$

iv) Por otro lado, probaremos también que este sistema es "caótico según Devaney".

Veamos que f es topológicamente transitiva. En efecto, sea $U \subset [-1,1]$ abierto, U contiene algún intervalo de la forma $\left[-\frac{i+1}{2^k}, -\frac{i}{2^k}\right] = I$ para algún $k \in \mathbb{N}$,

$i = 0, 1, \ldots, 2^k$.

Además, $f^k(I) = [-1,1]$ con $I \subseteq U$. Entonces $f^k(I) = f^k(U) = [-1,1]$.

Así, para todo V abierto en $[-1,1]$, tenemos que: $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Por la Definición 2.1.2, f es "topológicamente transitivo" y por la Proposición 2.2.2 es caótica según Devaney.

Al ser caótica según Devaney entonces $h_{top}(f) \geq \log(\sqrt{2})$. Resultado que obviaremos por escapar de los requisitos.

v) De los items anteriores, tenemos $h_{top}(f) \geq \log(\sqrt{2})$ y $h_{top}(f) \leq \log(\sqrt{2})$, por lo tanto, $h_{top}(f) = \log(\sqrt{2})$.

4.4. Entropía positiva y caos

En los ejemplos anteriores vimos sistemas dinámicos con entropía positiva y también vimos en los capítulos anteriores que estos mismos ejemplos son caóticos según Devaney y Li-Yorke, respectivamente. En la sección anterior verificamos que shift de Bernoulli tiene entropía topológica positiva y en la sección 2.3, vimos que este sistema dinámico es "caótico según Devaney". La ecuación logística se verificó que es caótica según Li-Yorke y según Devaney (ver seccion 3.3 y seccion 2.3) y que la entropía topológica de este sistema dinámico es positiva. Es natural preguntarse si entropía topológica positiva implica caos según Devaney (resp. caos según Li-Yorke) y viceversa. Por el trabajo de Ruette (2015) se tiene los siguientes resultados:

Teorema 4.4.1. *Sea I un intervalo y (I, f) "caótico según Devaney" entonces $h_{top}(f) \geq \log(\sqrt{2}) > 0$.*

Teorema 4.4.2. *Sea I un intervalo y (I, f) tal que $h_{top}(f) > 0$, entonces existe $J \subset I$ intervalo cerrado invariante por f tal que $f|_J : J \to J$ es "caótico según Devaney".*

En el trabajo de Nagashima y Baba (1992) se prueba el siguiente resultado.

Teorema 4.4.3. *Sea I un intervalo y (I, f) tal que $h_{top}(f) > 0$, entonces f es caótico según Li-Yorke.*

Los resultados anteriores no serán abordados en nuestro trabajo, pues escapa de los prerequisitos establecidos en el presente trabajo. Lo que sí estudiaremos a detalle es la relación entre "caos según Devaney" y "caos según Li-Yorke".

Capítulo 5

Caos de Devaney implica caos de Li-Yorke

El propósito aquí es mostrar que para sistemas dinámicos definidos en intervalos, si un sistema es "caótico según Devaney", entonces también será "caótica según Li-Yorke". Sin embargo, veremos un ejemplo donde el recíproco no es cierto.

Definición 5.0.1. *Se dice que (X, f) es totalmente transitivo si $\forall\ U, V \subset X$ abiertos, disjuntos, no vacíos, se cumple que $f^k[U] \cap V \neq \emptyset$ para todo $k > 0$.*

Lo primero que se probará para que el "caos según Devaney" implica el "caos según Li-Yorke" es mostrar que sea un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, si (I, f) es topológicamente transitivo, entonces se presenta dos casos: f es totalmente transitivo o el intervalo puede ser dividido en dos subintervalos de manera que en cada uno de ellos f^2 sea totalmente transitivo.

Lema 5.0.1. *Sea (I, f) topológicamente transitivo pero no totalmente transitivo. Entonces, $\exists\ J \subsetneq I$ intervalo compacto y $l \geq 1$ tal que $f^l(J) = J$.*

Demostración.

i) Si f no es totalmente transitivo, entonces $\exists\ k \geq 1$ tal que $g = f^k$ no es topológicamente transitivo. Entonces, $\exists\ U, V$ intervalos abiertos tal que $g^m(U) \cap V = \emptyset$, $\forall$ $m \geq 0$.

ii) Como f es topológicamente transitivo, $\exists\ x_0$ donde $\overline{\mathcal{O}_f^+(x_0)} = I$ (por Proposición 2.2.1) por lo que en particular se intersecta con U.

Se tiene que $\overline{\mathcal{O}_f(x_0)} = I$, debido a que no tiene puntos aislados por lo que sigue siendo denso a pesar de no tener un conjunto finito de puntos.

Entonces

$\mathcal{O}_f^+(x_0)\backslash\{x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\} = \{f^n(x_0), f^{n+1}(x_0), \ldots\}$

es densa en I. Luego, para todo $n \geq 1$, cada $f^n(x_0)$ tiene órbita densa en I, no es restrictivo suponer que $x_0 \in U$.

iii) Otra vez por la Proposición 2.2.1, si f es topológicamente transitivo entonces $\overline{Per(f)} = I$.

iv) Luego, $Per(f)$ y $Per(g)$ son los mismos, entonces $\exists\ p \in U$ tal que $g^r(p) = p$, para algún $r \geq 1$

v) Sea $h := g^r = f^{kr}$, se tiene que, p es punto fijo de h y del paso (i) se tiene que $g^{rn}(U) \cap V = \emptyset$. Como $h^n := g^{rn}$ entonces para todo n:

$$h^n(U) \cap V = g^{rn}(U) \cap V = \emptyset.$$

Ahora, $\forall\ n \geq 0$ se cumple que $p \in h^n(U)$. Entonces:

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} h^n(U) = L \cap V = \emptyset.$$

Se nota que:

$$h(L) = h(\bigcup_{n=0}^{\infty} h^n(U)) = \bigcup_{n=0}^{\infty} h^{n+1}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} h^n(U) \subset L.$$

Así, $h(L) \subset L$.

vi) Afirmamos que $\exists\ J \subseteq L$ intervalo compacto tal que $h(J) = J$.

En efecto, como $J \cap V = \emptyset$ (pues L no lo hace), entonces $J \subsetneq I$, lo que terminaría la demostración tomando $l = rk$.

Entonces, para construir J, tenemos que $h(L) \subset L$ implica $h^{n+1}(L) \subset h^n(L)$ para todo n, es decir, $\{h^n(L)\}_{n=0}^{\infty}$ es una familia "‘decreciente” de intervalos compactos.

Por lo tanto, $J := \bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(L)$ es un "intervalo compacto" (probablemente un conjunto unitario o degenerado).

Probemos por el absurdo y supongamos que $J = \{q\}$, entonces $\forall\ x \in L$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} h^n(x) = q$, y en particular $f^{nl}(x_0) = h^n(x_0) \to q$ cuando $n \to \infty$.

Por la continuidad, $\forall\ 0 \leq i < l$ tal que $f^{nl+i}(x_0) \to f^i(q)$, así para la secuencia $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ el conjunto de puntos de acumulación es $\{q, f(q), \ldots, f^{l-1}(q)\}$, luego $\mathcal{O}_f(x_0)$ no es densa, lo cual es una contradicción por suponer que $J = \{q\}$.

Luego, J no es un intervalo degenerado.

Bastaría probar que $h(J) = J$.

$$h(J) = h(\bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(L)) \subset h(h^n(L)) = h^{n+1}(L)$$

para todo $n \geq 0$, así que

$$h(J) \subset \bigcap h^{n+1}(L) = \bigcap_{n=1}^{\infty} h^n(L) = \bigcap_{n=0}^{\infty} h^n(L) = J$$

es decir, $h(J) \subset J$.

Veamos la otra inclusión. Dado $z \in J$, por la definición de J existirá puntos $x_n \in L$, $n \geq 1$ tales que $h^n(x_n) = z$.

Denotamos $y_n = h^{n-1}(x_n)$.

Entonces $y_n \in h^{n-1}(L)$ y $h(y_n) = z$. La secuencia $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ que está en un conjunto compacto, debe tener algún "punto de acumulación" $y \in I$ que por continuidad se cumple $h(y) = z$. Pero al ser la secuencia $\{h^n(L)\}_{n=0}^{\infty}$ decreciente, elegido abitrariamente $n_0 \geq 0$ se tendrá que $y_n \in h^{n_0}(J)$ para cada $n > n_0$ y por tanto también $y \in h^{n_0}(J)$ (pues $h^{n_0}(J)$ es compacto).

Así, $y \in J$, con lo que se prueba que $J \subset h(J)$.

Por lo tanto, $h(J) = J$.

De esta manera queda probado el lema. $\square$

El siguiente lema ha sido extraído del artículo de (Blaya y López, 2008). Se considera que un intervalo $J \in Per_r(f)$ si $f^r(J) = J$ y los intervalos $\{f^n(J)\}_{n=0}^{r-1}$ son disjuntos dos a dos.

Lema 5.0.2. *Sean (I, f) (I es un intervalo) y $K \subseteq I$ compacto, si $f^l(K) = K$ para algún $l \in \mathbb{N}$ (minimal). Entonces hay dos posibles casos:*

- *$K \in Per_l(f)$*
- *l es par y $P \cup f^{l/2}(P)$ es un intervalo que pertenece $Per_{l/2}(f)$.*

Demostración.

i) Veremos que si $1 \leq r < l$ satisface $f^r(K) \cap J \neq \emptyset$ entonces $r = l/2$.

Supongamos lo contrario. Sea $r < l/2$, por ser l minimal implica (reescribir $g = f^r$) que los intervalos $K, g(K)$ y $g^2(K)$ son distintos dos a dos.

Entonces, se cumple lo siguiente: $g(K) \nsubseteq K$ y $K \nsubseteq g(k)$.

Esto debido a que

$$\text{si } g(K) \subsetneq K, \text{ entonces } g^2(K) \subset g(K) \subsetneq K, g^3(K) \subset g^2(K) \subset g(K) \subsetneq K$$

y así sucesivamente, se obtiene que $g^l(K) \subsetneq K$, la cual es absurdo debido a que $g^l(K) = K$ (se llega a la misma contradicción si $K \subsetneq g(K)$).

Afirmación. $g^2(K)$ está entonces a la derecha de $g(K)$.

En efecto, si $g^2(K)$ estuviera a la izquierda de $g(K)$, entonces o bien $g^2(K)$ está a la derecha de K y se tiene que $g^l(K \cup g(K)) \subsetneq K \cup g(K)$, o bien $g^2(K)$ está a la izquierda de K y se tiene que $K \cup g(K) \subsetneq g^l(K \cup g(K))$ en ambos casos se llega a una contradicción, ya que

$$g^l(K \cup g(K)) = g^l(K) \cup g^l(g(K)) = K \cup g(K).$$

Repitiendo la misma idea se obtiene, $g^{m+1}(K)$ que está a la derecha de $g^m(K)$ para cada j, lo cual no es posible ya que $g^l(K) = K$.

Por lo tanto, si:

$$1 \leq r < l \text{ donde } f^r(K) \cap K \neq \emptyset \Rightarrow r = l/2$$

y es fácil entonces deducir el enunciado.

Como $f^i(K) \cap f^j(K) \neq \emptyset$ con $0 \leq i < j \leq l-1$, tomando imágenes,

$f^{i+1}(K) \cap f^{j+1}(K) \neq \emptyset$, luego $K \cap f^{j-i}(K) \neq \emptyset$ además, $j - i = \frac{l}{2}$.

Es decir, los intervalos que se intersecan son los que se diferencian en $\frac{l}{2}$.

ii) Supongamos que K no es periódico, entonces

$$f^i(K) \cap f^K(K) \neq \emptyset \text{ con } 0 \leq i < j \leq l-1,$$

luego $K \cap f^{\frac{l}{2}}(K) \neq \emptyset$.

Entonces $J := K \cup f^{\frac{l}{2}}(K)$ es un intervalo, $f(K) = f(\bar{K}) \cup f^{\frac{l}{2}+1}(K)$ también lo es, y de la misma forma obtenemos $f^{\frac{x}{2}}(J) = f^{\frac{x}{2}}(K) \cup f^l(K) = K$. Además, suponiendo que $f^l(K) \cap f^m(K) \neq \emptyset$ con $0 \leq l < m < \frac{l}{2}$, entonces $\left(f^l(K) \cup f^{l+\frac{x}{2}}(K)\right) \cap \left(f^m(K) \cup f^{m+\frac{l}{2}}(K)\right) \neq \emptyset$, luego se tiene que cumplir una de estas condiciones:

- $f^l(K) \cap f^m(K) \neq \emptyset$, luego $m - l = \frac{l}{2}$,
- $f^{l+\frac{l}{2}}(K) \cap f^m(K) \neq \emptyset$, luego $l + \frac{l}{2} - m = \frac{l}{2}$, es decir $l - m = 0$,
- $f^l(K) \cap f^{m+\frac{x}{2}}(K) \neq \emptyset$, luego $m + \frac{l}{2} - l = \frac{l}{2}$, es decir, $m - l = 0$,
- $f^{l+\frac{x}{2}}(K) \cap f^{m+\frac{x}{2}}(K) \neq \emptyset$, luego $m + \frac{l}{2} - \left(l + \frac{l}{2}\right) = \frac{l}{2}$, es decir, $m - l = \frac{l}{2}$,

pero como ninguna de las cuatro es posible, obtenemos que $J \in Per_{l/2}(f)$.

Análogamente si K no es periódico, entonces K es periódico de periodo l. □

Teorema 5.0.1. *Sea el sistema dinámico* $([u,v], f)$ *topológicamente transitivo. Entonces* f *es totalmente transitivo o existe* $u < t < v$ *(el único punto* $t \in Fix(f)$*) tal que* $f([u,t]) = [t,v], f([t,u]) = [u,t]$ *y* $f^2|_{[u,t]}$ *es "totalmente transitivo".*

Demostración.

i) Supongamos que f es topológicamente transitivo pero no totalmente transitivo. Entonces, por el Lema 5.0.1, $\exists\ J \subsetneq I$ intervalo compacto y $l \geq 1$ (que se puede considerar minimal) tal que $f^l(J) = J$.

ii) Aplicamos el Lema 5.0.2 y consideramos lo siguiente:

Si $J \in Per_l(f)$ entonces $\exists\ V \subset I$ abierto disjunto de todos los intervalos $\{f^n(J)\}_{n=0}^{l-1}$ (ya que son disjuntos dos a dos y ninguno de ellos es todo I). Si U es el interior de J entonces, $\forall\ n$ con $f^n(U) \cap V = \emptyset$ lo que es una contradicción de que f es topológicamente transitiva.

iii) Por lo tanto, l es par y $J \cup f^{l/2}(J) \in Per_{l/2}(f)$, y la única posibilidad es que $l = 2$ y $J \cup f(J) = I$.

iv) Ahora, sea $K = J \cap f(J)$, como $f(K) \subset K$, debido a que f es topológicamente transitivo entonces $K = \{t\}$ sería un intervalo degenerado (pues si no lo fuera entonces es invariante). Si $u \in J$, entonces $J = [u, t], f(J) = [t, v]$; si $v \in J$, entonces $J = [t, v], f(J) = [u, t]$. Sea cual sea los casos:

- $f([u, t]) = [t, v]$
- $f([t, v]) = [u, t]$,

con $t \in Fix(f)$ el único punto fijo.

v) Por último, $g = f^2|_{[u,t]}$ es totalmente transitivo, pues se daría el otro caso donde se encontraría z (el único punto $z \in Fix(g)$) tal que

$$g([u, z]) = [t, z], g([t, z]) = [u, t].$$

Esto no se puede dar pues t es también punto fijo de g.

De esa manera queda probado el teorema. $\square$

Lo siguiente es mostrar si f o f^2 es totalmente transitivo, entonces f^n tiene una herradura, es decir, si J_1, J_2 intervalos cerrados no degenerados disjuntos dos a dos tal que $J_1 \cup J_2 \subset f(J_i)$ $\forall i = 1, 2$ entonces (J_1, J_2) es una herradura.

Proposición 5.0.1. *Sea* $([u, v], f)$ *totalmente transitivo. Entonces* $\forall\ \varepsilon > 0$ *y* $\forall\ J \subset [u, v]$ *intervalo no degenerado* $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^n(J) \supset [u + \varepsilon, v - \varepsilon]$, $\forall n \geq N$.

Demostración. Sea $J \subset [u, v]$ intervalo "no degenerado" y $\varepsilon > 0$. Tenemos que los "puntos periódicos" son densos en $[u, v]$ (por la Proposición 2.2.1), por tanto, $\exists\ x, x_1, x_2$ puntos periódicos con $x \in J, x_1 \in (u, u + \varepsilon)$ y $x_2 \in (v - \varepsilon, v)$. Luego, x_1 y x_2 se pueden elegir de modo que sus órbitas estén incluidos en (u,v) porque como máximo una órbita periódica contiene a u (y v respectivamente).

Denotamos, para $i \in \{1,2\}$:

$$y_i := \text{mín}\{f^n(x_i) : n \geq 0\} \quad \text{y} \quad z_i := \text{máx}\{f^n(x_i) : n \geq 0\}$$

Entonces $y_1 \subset (u, x_1] \subset (u, u+\varepsilon), z_2 \in [x_2, v) \subset (v-\varepsilon, v)$ y $z_1, y_2 \in (u,v)$.

Sea k un “múltiplo común” de los periodos de x, y_1 e y_2. Hacemos $g = f^k$ y

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(J)$$

Se fija $x \in J$ bajo la acción de g, esto debido a que $f^k(x) = x$ pues k es “múltiplo” del período de x y por lo tanto, $x \in g^n(J)$ para todo $n \geq 0$. Entonces K es un intervalo.

Asimismo, como g es topológicamente transitivo, $\overline{K} = [u,v]$, luego $(u,v) \subset K$. De aquí se sigue que $y_1, y_2, z_1, z_2 \in K$.

Para $i = 1,2$, sean p_i y $q_i \in \mathbb{N}$ tal que $y_i \in g^{p_i}(J)$ y $z_i \in g^{q_i}(J)$.

Denotamos $N := \text{máx}\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$. Como $y_1, y_2, z_1, z_2 \in Fix(g)$ pertenecen a $g^N(J)$ luego, $[y_i, z_i] \subset g^N(J) = f^{kN}(J)$ para $i = 1,2$. De acuerdo con la definición de y_i, z_i, se tiene que $\mathcal{O}_f(x_i) \subset [y_i, z_i]$. Por inducción se prueba que $[y_i, z_i] \subset f^n([y_i, z_i]) \ \forall\ n \geq 0$. Por lo tanto, se tiene que

$$[y_1, z_1] \cup [y_2, z_2] \subset f^n(J) \quad \text{para todo } n \geq kN$$

Como $y_1 < u + \varepsilon$ y $z_2 > v - \varepsilon$, el hecho de que $f^n(J)$ no tenga una partición del mismo en dos conjuntos no vacíos y disjuntos implica que $\forall\ n \geq kN$, $[u-\varepsilon, v+\varepsilon] \subset f^n(J)$ con lo que concluimos la prueba. $\square$

Proposición 5.0.2. *Sea $([u,v], f)$ un sistema totalmente transitivo. Entonces $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que f^n tiene una herradura.*

Demostración. Sean $t, z \in [u,v], t < z$. Consideramos $J = [u+\varepsilon, t], K = [z, v-\varepsilon]$. Se tiene $J \cap K = \emptyset$ y, aplicando la Proposición 5.0.1 tenemos que

$$J \cup K = [u+\varepsilon, t] \cup [z, v-\varepsilon] \subset [u+\varepsilon, v-\varepsilon] \subset f^n(J) \cap f^n(K)$$

para algún n, verificándose así que f^n tiene una herradura. $\square$

Lema 5.0.3. *Supongamos que $f^n = g$ tiene una herradura $\{J, K\}$. Entonces para todo $\alpha \in \{0,1\}^k$ (donde $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_k$ son secuencias de longitud k formadas por ceros y unos) y para todo $k = 1, 2, \ldots$ existe J_α compacto tal que:*

1. $J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k} \subset J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}}$
2. *Para todo k, los intervalos $J_\alpha, \alpha \in \{0,1\}^k$ son disjuntos dos a dos.*
3. $g\left(J_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right) = J_{\alpha_2\ldots\alpha_k}$

Demostración. Se encuentra en (Ruette, 2015). $\square$

Ya tenemos los elementos para probar que si hay "caos según Devaney", también habrá "caos según LiYorke".

Teorema 5.0.2. *Sea (I, f) "caótico según Devaney" donde $I = [u, v]$. Entonces f es caótica según Li-Yorke.*

Demostración. Si f es caótica según Devaney, en particular, f es "topológicamente transitivo". Por lo tanto, aplicamos el Teorema 5.0.1 y tenemos lo siguiente:

- f es totalmente transitivo o
- I puede ser dividido en dos subintervalos de manera que en cada uno de ellos f^2 sea totalmente transitivo.

Se considere cualquiera de los posibles casos, aplicamos la Proposición 5.0.2, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ y $J \subset [u, v]$ compacto de manera que f^n tiene una herradura luego, aplicando el Lema 5.0.3, $\exists\ J_\alpha$ compacto $\forall\ \alpha \in \{0,1\}^k$ con $k = 1, 2, \ldots$.

Para cada $\rho \in \{0,1\}^\infty$, el intervalo siguiente

$$J_\rho = \bigcap_{k=1}^{\infty} J_{\rho_1\rho_2\ldots\rho_k} \neq \emptyset.$$

Debido a que se trata de una secuencia de intervalos compactos encajados (por el Lema 5.0.3 (1)). Notamos que, aplicando el Lema 5.0.3 (2), si $\rho \neq \rho^*$, entonces $J_\rho \cap J_{\rho^*} = \emptyset$. Por otro lado, si $\rho = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_k \ldots$ y $\rho^* = \rho_2 \ldots \rho_k \ldots$ entonces, por el lema 5.0.3 (3), $g\left(J_\rho\right) \subset J_{\rho^*}$.

Definimos la “relación de equivalencia” siguiente en $\{0,1\}^{\infty}$:

$$\sim: \quad \rho \sim \rho^{*} \Leftrightarrow \exists l \text{ tal que } \rho_k = \rho_k^{*} \quad \forall k \geq l.$$

Cada “clase de equivalencia” $[\rho]$ esta relación es “numerable”, esto debido a que es la unión numerable de conjuntos finitos.

Establecemos $\Gamma \in \{0,1\}^{\infty}$ para que contenga exactamente una representación de cada “clase de equivalencia”. Como $\{0,1\}^{\infty}$ es no numerable, entonces Γ también es no numerable. Entonces si $x_\rho \in J_\rho$, $x_\rho^{*} \in J_{\rho^{*}}$ con $\rho \neq \rho^{*}, \rho, \rho^{*} \in \Gamma$, se cumple que: $\limsup\limits_{n \longrightarrow \infty} \left| g^k\left(x_\rho\right) - g^k\left(x_{\rho^{*}}\right) \right| \geq d$, siendo $d > 0$ la distancia entre J_ρ y $J_{\rho^{*}}$, positiva por ser disjuntos dos a dos.

Nos quedaría mostrar que límite inferior sea 0. En efecto, se tiene un “conjunto numerable” de intervalos J_ρ no degenerados, luego el conjunto $\rho \in \{0,1\}^{\infty}$ tal que J_ρ es “degenerado”, es “no numerable”.

Sea $\gamma \in \{0,1\}^{\infty}$ tal que $J_\gamma = \{q\}$. Esto es similiar que $|J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_k}| \longrightarrow 0$ cuando $k \longrightarrow \infty$.

Denotamos:

$$\Lambda := \{\gamma_1\rho_1\gamma_1\gamma_2\rho_2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\rho_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\rho_4\ldots\gamma_1\gamma_2\gamma_3\ldots\gamma_k\rho_k\ldots : \rho \in \Gamma\} \subset \{0,1\}^{\infty} \tag{5.1}$$

Como Γ es no numerable, Λ también es “no numerable”. Dado $\sigma \in \Gamma$, elegimos $x_\sigma \in J_\sigma$. Ponemos:

$$S := \{x_\sigma : \sigma \in \Gamma\}$$

Entonces S es “scrambled”, ya que:

- Solamente para la secuencia ρ se garantiza la primera condición de la definición de caos de LiYorke, por lo que dado $\sigma \neq \sigma'$, siempre se conserva:

$$\limsup_{n \to \infty} \left| g^k\left(x_\sigma\right) - g^k\left(x_{\sigma'}\right) \right| \geq d.$$

- Ahora, con la secuencia Λ definida como en (5.1), también se verifica:

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} \left| g^k\left(x_\sigma\right) - g^k\left(x_{\sigma'}\right) \right| = 0$$

ya que, existirá una secuencia (k_n) de manera que

$$g^{k_n}(x_\sigma) \in J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\rho_n^{x_\sigma}\ldots} \subset J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}, \quad g^{k_n}(x_{\sigma'}) \in J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n\beta_n^{x_\sigma}\ldots} \subset J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}$$

luego $\left|g^{k_n}(x_\sigma) - g^{k_n}(x_{\sigma^*})\right| \leq |J_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}| \longrightarrow 0$

Por lo tanto, $g = f^2$ es caótica según Li-Yorke, en particular f es caótica según Li-Yorke. □

En cambio, podemos ver con un ejemplo que lo contrario no es cierto.

Ejemplo 5.0.1. *Sea* $([0,1], f)$ *con* f *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 2x - 1/2, & 1/2 < x \leqslant 3/4 \\ 7/4 - x, & 3/4 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

i. f actúa como el mapeo carpa en el intervalo (1/2,1], aunque en el intervalo [0,1/2] está definida como $y = x$.

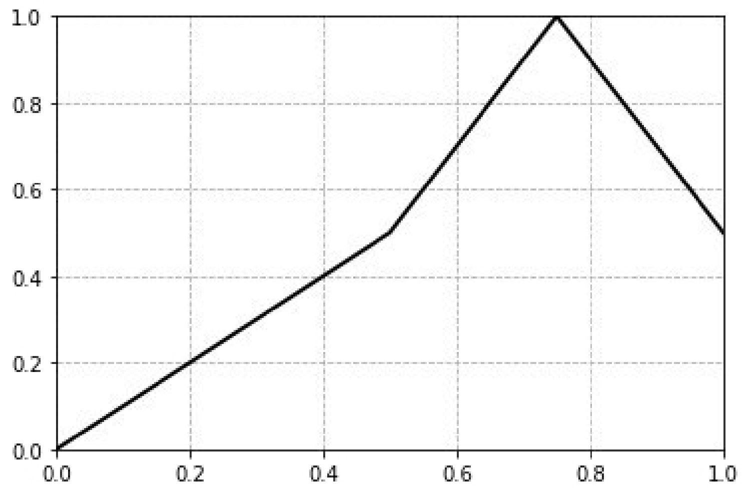


Figura 5.1: Gráfica de f

ii. Hemos visto en los Capítulo 3 que el mapeo carpa es caótico según Li-Yorke.

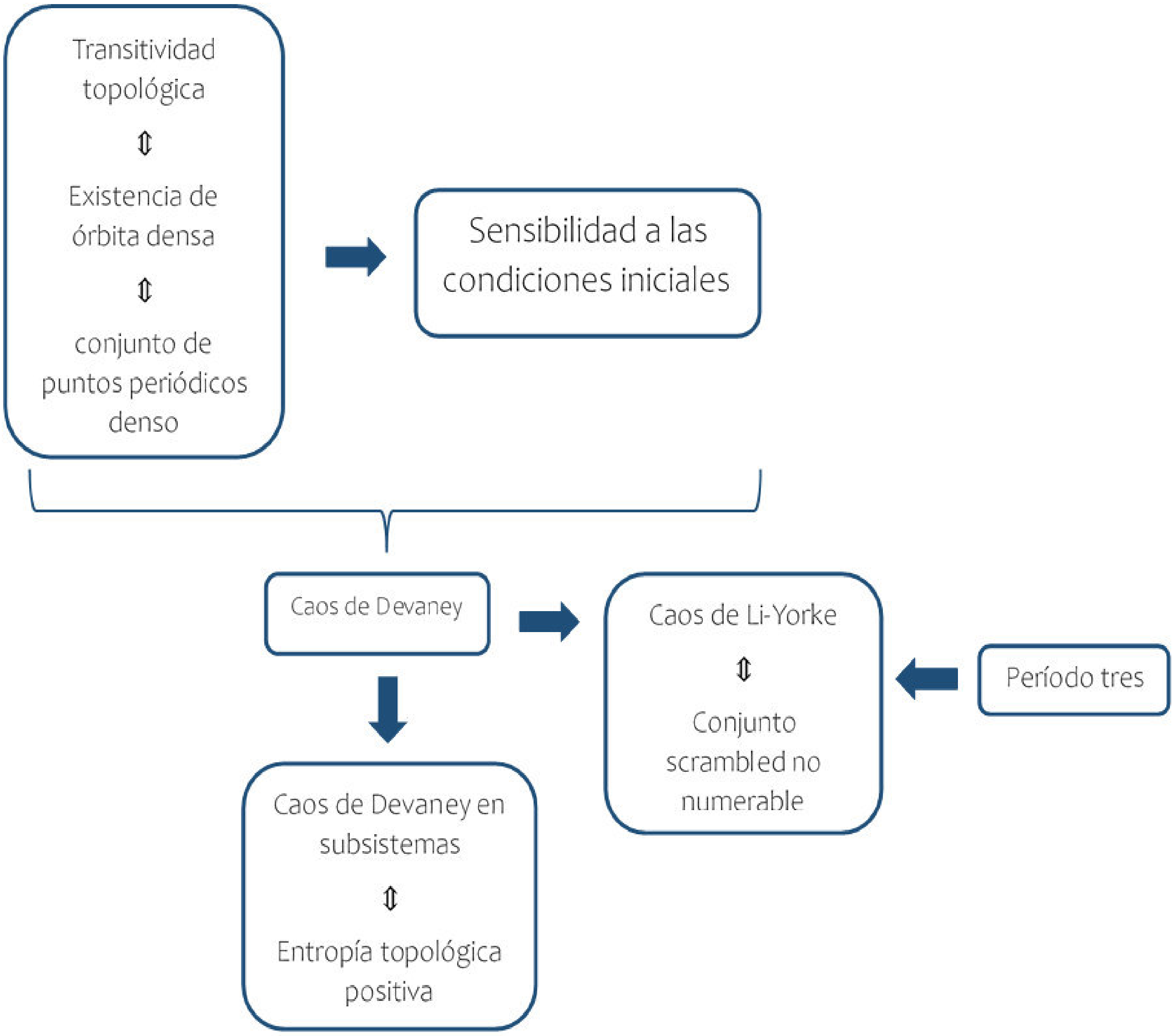
iii. f es "caótica según Li-Yorke", ya que en el intervalo (1/2,1] su comportamiento es la misma que la del mapero carpa. Así, $Per_3(f) \neq \emptyset$ entonces f es "caótica según Li-Yorke".

iv. *Afirmación. f no es "caótica según Devaney".*

En efecto, en el intervalo (1/2,1], no importa cuántas iteraciones se hagan, permanecerán en el mismo intervalo (ya que la aplicación actuará como el mapeo carpa). Por otro lado, los puntos en el intervalo [0,1/2] son todos fijos(esto se deduce fácilmente trazando la diagonal). Por lo tanto, no habrá ningún punto cuya órbita se mueva por todo el intervalo. Es decir, no existe ningún punto con órbita densa, por lo que no podrá ser topológicamente transitivo y por tanto no será caótica según Devaney.

Conclusión

El siguiente diagrama resume el presente trabajo para sistemas dinámicos definidos en intervalos compactos.



Referencias

Blaya, A. B., y López, V. J. (2008). An almost everywhere version of smital's order-chaos dichotomy for interval maps. *Australian Mathematical Society*, *85*, 29-50.

Devaney, R. L. (1989). *An introduction to chaotic dynamical systems*. United States: Addison-Wesley Publishing Company.

Dewaele, N. (2011). *An explanation of period three implies chaos.* https://www.siue.edu/ aweyhau/teaching/seniorprojects/dewaele$_{f}inal.pdf$.

J. Banks, G. C. G. D., J. Brooks, y Stacey, P. (1992). On devaney's definition of chaos. *The American Mathematical Monthly*, *99*(4), 332-334.

Li, T. Y., y Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *The American Mathematical Monthly*, *82*(10), 985-992.

Nagashima, H., y Baba, Y. (1992). Introduction to chaos, tokyo: Baifukan co. *Ltd. Japan.*

Oliveira, K., y Viana, M. (2005). *Fundamentos da teoria ergódica.* Rio de Janeiro, Brasil.

Ruette, S. (2015). Chaos on the interval-a survey of relationship between the various kinds of chaos for continuous interval maps. *arXiv preprint arXiv:1504.03001*.