Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

Existencia y unicidad de la solución de un problema elíptico de tipo Kirchhoff con dato de signo variable

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional

AUTOR

Rocío Julieta DE LA CRUZ MARCACUZCO

ASESOR

Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

De la Cruz, R. (2021). *Existencia y unicidad de la solución de un problema elíptico de tipo Kirchhoff con dato de signo variable*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Rocío Julieta De La Cruz Marcacuzco
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09493986
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-1496-6255
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Eugenio Cabanillas Lapa
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	06445518
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-8941-4394
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Leonardo Henry Alejandro Aguilar
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43069051
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Emilio Marcelo Castillo Jiménez
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	09688990
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Eduardo Valdemar Trujillo Flores
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	08660272
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.1. Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias, Parciales) y Análisis Funcional
Agencia de financiamiento	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Vicerrectorado de Investigación y Posgrado. Programa de promoción de Tesis de Posgrado. B19140045-PTPG
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Chorrillos Calle: Av. Julio Calero No 534 Latitud: -12.17322 Longitud: -77.02560
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2019-2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.02

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
VICEDECANATO DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN VIRTUAL DE TESIS PARA OPTAR EL GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER EN MATEMÁTICA APLICADA CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Siendo las, 14:00 horas del día viernes veinte de agosto de dos mil veintiunos, en la sala virtual meet.google.com/gby-itpw-mzq, el Jurado de Tesis conformado por los siguientes docentes:

PRESIDENTE	:	Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
MIEMBRO	: .	Mg. Emilio Marcelo Castillo Jiménez
MIEMBRO EXTERNO	:	Mg. Eduardo Valdemar Trujillo Flores
MIEMBRO ASESOR	:	Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA ELÍPTICO DE TIPO KIRCHHOFF CON DATO DE SIGNO VARIABLE» presentada por la Señorita Bachiller Rocío Julieta De La Cruz Marcacuzco, para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional.

Concluida la exposición, los miembros del Jurado de Tesis procedieron a formular sus preguntas que fueron absueltas por la graduanda; acto seguido se procedió a la evaluación correspondiente, según tabla adjunta, habiendo obtenido la Señorita Bachiller Rocío Julieta De La Cruz Marcacuzco, el calificativo de **dieciocho (18)**.

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Aplicada con Mención en Matemática Computacional** a la **Bachiller Rocío Julieta De La Cruz Marcacuzco.**

Siendo las 15:30 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta:

Dr. Leonardo Henry Alejandro Aguilar
PRESIDENTE

Mg. Emilio Marcelo Castillo Jiménez
MIEMBRO

Mg. Eduardo Valdemar Trujillo Flores
MIEMBRO EXTERNO

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
MIEMBRO ASESOR

RESUMEN

Existencia y Unicidad de la Solución de un Problema Elíptico de tipo Kirchhoff con dato de signo variable

Rocío Julieta De La Cruz Marcacuzco

Noviembre, 2020

Asesor : Dr. Eugenio Cabanillas Lapa.

Grado : Magister en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

En el presente trabajo , estudiamos el siguiente

Problema:

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{l} -M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)\Delta u(x) = |u|^{p-1} + \lambda f(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N, (N > 2)$ es un dominio acotado con frontera suave $\partial\Omega, f \in C^1(\overline{\Omega})$ de signo variable, M es una función positiva continua en $\mathbb{R}^+$ y λ un parámetro positivo. Usamos el método de Galerkin para obtener las soluciones débiles del problema (P). También, imponiendo condiciones adecuadas sobre M probamos la unicidad de la solución débil; concluimos haciendo un análisis numérico vía elementos finitos.

Palabras claves: Espacios de Sobolev, Método de Galerkin, Unicidad de la Solución Débil.

ABSTRACT

Existence and Uniqueness of a Solution for an Elliptic Problem of the Kirchhoff type with variable data

De La Cruz Marcacuzco, Rocío Julieta

November, 2020

Adviser : Dr. Eugenio Cabanillas Lapa.

Obtained : Master in Applied Mathematics with mention in Computational Mathematics.

In this work, we study the folliwing

Problem:

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{l} -M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)\Delta u(x) = |u|^{p-1} + \lambda f(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

where $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N, (N > 2)$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega, f \in C^1(\overline{\Omega})$, M is continuous positive function in $\mathbb{R}^+$ y λ is a positive parameter.

We use the Galerkin Method to get the weak solutions of problem (P). Also, by imposing suitable conditions on M, we prove the uniqueness of weak solution. We conclude by making a numerical analysis via finite elements.

Keywords: Sobolev Spaces, Galerkin Method, Uniqueness of weak solution.

CONTENIDO

1 Introducción

Las EDPs elípticas de tipo no local modelan una diversidad de fenómenos físicos. Definir e implementar metodologías que permitan resolver los problemas no locales, descritos por estas ecuaciones representan una buena dificultad, por la naturaleza integral expresada en sus términos, para la aplicación directa de las metodologías variacionales a menos que se impongan restricciones adecuadas que lo permitan. En efecto, el operador no local $M(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx)$ aparece en la importante ecuación de Kirchhoff, que surge en los modelos de vibraciones no lineales, específicamente el sistema

$$(*) \qquad \left| \begin{array}{ll} u_{tt} - M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)\Delta u = f(x,u), & \text{en} \quad \Omega\times]0;T[\\ u(x) = 0, & \text{en} \quad \Omega\times]0;T[\end{array} \right.$$

Esta ecuación fue propuesta por Kirchhoff [22], en 1883 para $M(s) = as + b; a, b > 0$ y $\Omega =]0; L[\subset \mathbb{R}$ como una extensión de la ecuación clásica de onda debido a D' Alembert. El modelo tiene en cuenta los cambios de longitud de la cuerda producidos por las vibraciones transversales. Estos problemas a menudo se denominan no locales ya que la ecuación no es una identidad puntual debido a la presencia del término $M(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx)$. Este tipo de problemas recibió mucha atención después del trabajo de Lions [23,24], donde se propuso un estudio en un marco del Análisis Funcional.

En este trabajo estudiaremos la versión estacionaria asociada a $(*)$, presentada en el artículo de Azzouz y Bensedik [11]:

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{l} -M\Big(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx\Big)\Delta u(x) = |u|^{p-1} + \lambda f(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N, (N > 2)$ con frontera suave $\partial\Omega$, $f \in C^1(\overline{\Omega})$ de signo variable, M es una función positiva continua en $\mathbb{R}^+$ y λ es un parámetro positivo; específicamente:

1. Mostraremos la existencia de soluciones para el problema mediante el método de

Galerkin.

2. Probaremos la Unicidad de la solución, imponiendo adecuadas condiciones en los datos.

3. Realizaremos un análisis numérico básico del modelo.

Varios investigadores han estudiado el problema (P) desde diversas perspectivas, a continuación mencionaremos algunos de ellos que consideramos mas vinculados a nuestro trabajo.

Mediante el uso de métodos variacionales, Alves et al. [2] dio condiciones sobre M y g para las cuales, el problema estacionario correspondiente a (P') posee soluciones positivas en el caso subcrítico. Correa y Menezes [4] mejoran el resultado de la existencia a través del método de Galerkin cuando $g(x,u) = g(x)$. También notaron que el problema admite una solución positiva cuando la función M es acotada y

$$g(x,u) = (u^+)^\alpha + \lambda\varphi(x) \quad \text{con} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{y} \quad \varphi > 0.$$

El análisis presentado en esta Tesis está motivado por el artículo [11], los papers [1,2, 4] y el trabajo de Dai y Gu [5] para $M \equiv 1$, y nos permitirán probar los resultados mencionados para el problema (P) , dependiendo del comportamiento de la función positiva M, el exponente p , el parámetro λ y de la función f con signo variable.

Es importante mencionar que la versión estacionaria asociada a $(*)$ modela una diversidad de situaciones en el mundo objetivo como el comportamiento de un fluido o gas en un medio no homogéneo y anisotrópico, o sistemas biológicos que describen el crecimiento y movimiento de una especie (por ejemplo, bacterias que dependen de un promedio del proceso mismo). Ver: Chipot$-$Lovat [6], Chipot$-$Rodrigues [7], Correa$-$ Ferreira$-$ Menezes[10] y Correa [9].

En el Capitulo I daremos algunas definiciones y resultados preliminares que serán usados a lo largo de este trabajo, la deducción del modelo físico y la motivación para la definición de la solución débil, así como la notación a ser usada.

El capitulo II, es el corazón del trabajo y mostramos en detalle, a través del método de Galerkin que el problema (P) admite solución débil en un espacio de Sobolev adecuado. También, imponiendo condiciones adecuadas sobre la función M y el dato f, probamos un resultado de unicidad, que no aparece en el paper referencial [11].

En el capitulo III , concluimos nuestro trabajo con la construcción básica de un algoritmo de aproximación numérica en dimensión uno.

2 Preliminares

En este capítulo introducimos definiciones, notaciones y resultados que son indispensables en el desarrollo de este trabajo.

2.1. Espacios de Banach

Definición 1. *Una norma en un espacio vectorial V es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $u, v \in V$ satisface:*

(i) (No negatividad) $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0$ si, y solo si, $u = 0_V$.

(ii) (Cambio de escalar) $\|\alpha\, u\| = |\alpha|\, \|u\|$ para cualquier escalar α.

(iii) (Desigualdad triangular) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ para todo $u, v \in V$.

Al par (V, $\|.\|$) se le conoce con el nombre de ***Espacio vectorial normado.***

Definición 2. *La distancia asociada a una norma $\|\cdot\|$ es $d(x, y) = \|x - y\|$. Se verifica fácilmente que efectivamente d es una métrica. La topología asociada a una norma es la topología de espacio métrico inducida por la distancia.*

Los límites de sucesiones en espacio normados y de funciones entre espacio normados, se suponen respecto a la topología asociada. Por ejemplo, la continuidad de una función f entre dos espacio normados X, Y en un punto $a \in X$ se expresa como: Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

Si el espacio métrico es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge

$$\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x \in X,$$

decimos que el espacio vectorial normado X es un ***Espacio de Banach.***

Sean X, Y espacios vectoriales sobre el mismo campo, la función $T : X \to Y$ que satisface $T(\alpha x + \beta z) = \alpha T(x) + \beta T(z)$, para escalares α, β y $x, z \in X$, es llamado **operador lineal.**

Si X, Y son espacio normados podemos definir la noción de un operador lineal acotado, y como veremos la acotabilidad de un operador es equivalente a su continuidad.

Definición 3. *Sean X, Y dos espacios normados. Un operador $T : X \to Y$ es acotado si existe una constante $M \geq 0$ tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Si no existe una constante que satisfaga esta desigualdad diremos que T es no acotado. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, definimos la norma del operador T mediante

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}; \qquad \|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|; \qquad \|T\| := \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\|.$$

Teorema 1. *Un operador lineal es acotado si, y solo si, es continuo.*

Demostración:[9], pág. 33.

El conjunto $L(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores lineales que aplican de X en Y, y $B(X, Y)$ el conjunto de todos los operadores en $L(X, Y)$ que son acotados. Éste último es un espacio de Banach cuyo Y es un espacio de Banach, con respecto a la norma de operador.

Definición 4 (Inmersión). *Un espacio normado X se dice que está inmerso en un espacio normado Y, y se denota $X \hookrightarrow Y$, siempre que*

(i) X sea un subespacio vectorial de Y.

(ii) El operador identidad I definido sobre X, sea continuo.

Definición 5. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un* ***producto escalar*** *o* ***producto interno*** *en X es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ que verifica:*

(i) (Aditiva) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in X$.

(ii) (Homogénea) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$ *para todo* $u, v \in X$ *y todo* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(iii) (Hermítica) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ *para todo* $u, v \in X$.

(iv) (Definida positiva) $\langle u, u\rangle \geq 0$ *y* $\langle u, u\rangle = 0$ *si y solo si* $u = 0$.

El espacio X equipado con el producto interno es llamado espacio $\text{Pre} - \text{Hilbert}$. Note que todo espacio Pre-Hilbert es normado, si se define la norma por $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$, y por tanto es también métrico, con la distancia

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Para cualquier u, v:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|.$$

Demostración:[9], pág.12.

Definición 6. *Un **espacio de Hilbert** es un espacio pre-Hilbert completo con respecto a la métrica asociada. Por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach en el que se ha definido un producto interior.*

Definición 7. *Una sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es un espacio lineal normado es llamado convergente a un elemento* f *del espacio si, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$ *tenemos* $\|f - f_n\| < \varepsilon$. *Si* f_n *converge a* f *escribimos* $f = \lim f_n$ *o* $f_n \to f$.

Teorema 2 (Teorema de representación de Riesz). *Sea* X *un espacio de Hilbert. Un funcional lineal* x^* *definido sobre* X *pertenece a* X^* *si y solo si existe un único* $y \in X$ *tal que* $x^*(x) = \langle x, y\rangle$, *para todo* $x \in X$ *y en este caso* $\|x^*\|_{X^*} = \|y\|_X$.

Demostración:[8], pág. 38.

Definición 8. *Sea* X *un espacio vectorial sobre un campo* $\mathbb{K}$*; llamamos **dual algebráico** de* X*, que denotamos por,* X^**, al* $\mathbb{K}$ *espacio vectorial*

$$X^* = \{x^* : X \to \mathbb{K} / \, x^* \quad \textit{es lineal lineal y continuo}\}.$$

En este espacio disponemos de una norma que se puede expresar de varias formas, como son

$$\begin{aligned}\|x^*\| &= \text{mín}\{K > 0 : \, |x^*| \leq K \, \|x\| \quad \textit{para todo} \quad x \in X\} \\ &= \sup\{|f(x)| : \, x \in X, \; \|x\| \leq 1\}\end{aligned}$$

para todo $x^* \in X^*$.

La completitud de del campo $\mathbb{K}$ *nos asegura que* X^* *es un espacio completo. El espacio de Banach* X^* *recibe el nombre de* ***dual topológico*** *del espacio normado X, para diferenciarlo del dual algebráico.*

Topologías débil y débil-*

Introducimos ahora las topologías débil y débil-*, para lo cual necesitamos discutir primero algunas nociones generales de la topología.

Definición 9. *Sea* X *un conjunto,* Y *un espacio topológico y* $\mathcal{F}$ *una familia de funciones de* X *en* Y. *Consideremos la colección de subconjuntos* $\mathcal{S}$ *de la forma*

$$\{x \in X : x \in f^{-1}(U)\}$$

indexados por $f \in \mathcal{F}$ *y* U *abierto en* Y. *Definimos la* ***topología débil en*** X ***determinada por*** $\boldsymbol{\mathcal{F}}$, *como los subconjuntos que son uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de* $\mathcal{S}$.

Definición 10. *Sea* X *un espacio de Banach, definimos la* ***topología débil*** *en* X, *como la topología débil en* X, *definida por* X^*, *es decir, la topología (menos fina) con menos abiertos sobre* X, *que hace continua a cada miembro de* X^**; y es denotada por* $\sigma(X, X')$.

Proposición 1. *La topología débil* $\sigma(X, X^*)$ *es separada.*

Demostración:Ver [3],pág. 35.

Para definir la **topología débil-*** decimos que una red $(x^*_\alpha)_\alpha$ en X^* converge en la topología débil-* sobre X^* si $(x^*_\alpha(x))_\alpha$ converge a $x^*(x)$ para cada $x \in X$.

Definición 11. *La **topología débil-*** designada también por $\sigma(X^*, X)$ es la topología menos fina sobre X^*, que hace continuas a todas las aplicaciones sobre X^*.*

Teorema 3 (Teorema de Hanh Banach, 1927). *Sea Y un subespacio de un espacio normado X. Si $y^* \in Y^*$ entonces existe $x^* \in X^*$ tal que :*
$\|x^*\|_{X^*} = \|y^*\|_{Y^*}$ y $x^*(y) = y^*(y)$ para todo $y \in Y$.

Demostración:[8], pág. 43.
Esto significa que, todo funcional continuo en un subespacio admite una extensión Hanh-Banach a todo X.

Observación. Dada una sucesión (x_n) en X, se denota por $x_n \rightharpoonup x$ la convergencia de x_n a x en la topología débil $\sigma(X, X')$. A veces se precisa $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en $\sigma(X, X')$; por otro lado $x_n \to x$ fuertemente, cuando $\|x_n - x\| \to 0$.

Proposición 2. *Sea (x_n) una sucesión en X. Se verifica:*

1. *$[x_n \rightharpoonup x \, en \, \sigma(X, X')] \Leftrightarrow [\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle] \, \forall f \in X^*$.*

2. *Si $x_n \to x$ fuertemente, entonces $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(X, X')$.*

3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(X, X')$, entonces $|x_n|$ está acotada y $|x| \leq lim\,inf|x_n|$.*

4. *Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(X, X')$ y si $f_n \to f$ fuertemente en X^*.*

Demostración:Ver [3],pág.35.

Espacios Reflexivos

Si X es un espacio normado, el bidual, también llamado segundo dual de X, es el espacio de Banach $X^{**} := (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{K})$, con norma

$$\begin{aligned}\|x^{**}\| &:= \sup\{|x^{**}(x^*)| : x^* \in B_{X^*}\} \\ &= \min\{K > 0 : |x^{**}(x^*)| \leq K \|x^*\| \quad \text{para todo} \quad x^* \in X^*\}.\end{aligned}$$

De la desigualdad, $|x^*(x)| \leq \|x^*\| \|x\|_X$, válida para cualquier $x \in X$ y $x^* \in X^*$, deducimos que los elementos de X son funcionales lineales continuos en X^*.

Definición 12. *Sea X un espacio normado y consideremos el operador lineal*

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto J(x) \end{aligned}$$

definido por

$$J(x)(x^*) := x^*(x), \quad \textit{para todo} \quad x^* \in X^*.$$

*A J se le llama **inyección canónica** del espacio X en su bidual y hemos visto que J identifica totalmente a X con un subespacio de X^{**}, simbólicamente $J(X) \equiv X$.*

Definición 13. *Se dice que un espacio de Banach es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.*

En este caso J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, escribimos $X \equiv X^{**}$ y tenemos total simetría entre X y X^{**}.

Cuando X es reflexivo se identifica implícitamente X con X^{**} (gracias al isomorfismo J).

Proposición 3. *Sea X un espacio de Banach, entonces X es reflexivo si y solo si*

$$B_X = \{x \in X;\ |x| \leq 1\}$$

es compacto en la topología de $\sigma(X, X^*)$

Demostración:Ver [3],pág.44.

La Integral de Lebesgue

En la teoría de los espacios funcionales surgen problemas con la integral de Riemann, problemas que no permiten llegar a ciertos teoremas indispensables. Las dificultades aparecen cuando tratamos de hacer interactuar la integral de Riemann con otras operaciones, especiales como operaciones de límites (por ejemplo, el límite de una sucesión de funciones integrables puede no ser integrable). Es cuando surge la necesidad de renovar la integral. Los problemas de la integral de Riemann pueden solucionarse mediante la generalización conocida como la integral de Lebesgue.

Definición 14. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ *y* $s : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función simple no negativa,* $s = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \, \chi_{A_i}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$ *y* $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$.
Se define la integral de s *en* Ω *por*

$$\int_\Omega s := \sum_{i=1}^{k} a_i \, m(A_i)$$

con el convenio de que $0 \cdot \infty = 0$.

Aún cuando en este capítulo no nos detenemos a hacer un estudio detallado de la integral de Lebesgue vale la pena hacer las siguientes aclaraciones:

1) La integral será no negativa, pero puede ser infinito, es decir,

$$0 \leq \int_\Omega s \leq \infty.$$

2) Geométricamente, la integral de s es la suma de los volúmenes de los prismas de base A_i y altura a_i.

Proposición 4. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ *y* $s_1, s_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ *funciones simples no negativas. Entonces*

1) $\displaystyle\int_\Omega (s_1 + s_2) = \int_\Omega s_1 + \int_\Omega s_2$.

2) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_\Omega \alpha s_1 = \alpha \int_\Omega s_1$.

3) Si existe $E \subseteq \Omega$ *con* $m(E) = 0$, *tal que* $s_1(x) \leq s_2(x)$ *para todo* $x \in \Omega - E$, *entonces*

$$\int_\Omega s_1 \leq \int_\Omega s_2.$$

Demostración:[25], pág. 62.

Finalizamos esta sección definiendo la integral de Lebesgue para funciones no negativas.

Definición 15. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ *y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función medible, con* $f(x) \geq 0$ *para todo* $x \in \Omega$. *Se define la integral de* f *en* Ω *por*

$$\int_\Omega f := \sup \left\{ \int_\Omega s : s \quad \text{función simple,} \quad 0 \leq s \leq f \right\}$$

Definición 16. *Definimos la parte positiva f^+ y la parte negativa f^- de una función f por*

$$f^+(x) := \text{máx}\{0, f(x)\}, \quad f^-(x) := \text{máx}\{0, -f(x)\}.$$

Así, $f = f^+ - f^-$, donde f^+ y f^- son funciones no negativas.

Podemos ahora definir la integral de Lebesgue para una función f arbitraria.

Definición 17. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible. Se define la integral de f en Ω por*

$$\int_\Omega f := \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^-.$$

Observación. Si las integrales de f^+ y f^- son ambas ∞ no tiene sentido la expresión $\infty - \infty$. Decimos en este caso que la función f no es integrable.

Definición 18 (Integral en un subconjunto). *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, se define la integral de f en H por*

$$\int_H f(x)\, dx := \int_\Omega f\, \chi_H.$$

Teorema 4 (Propiedades básicas de la integral). *Sean $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Entonces*

(a) (Linealidad) Sea $c \in \mathbb{R}$,

$$\int_\Omega c\,(f+g)\,(x)\, dx = c \int_\Omega f(x)\, dx + c \int_\Omega g(x)\, dx.$$

(b) (Monotonía) Sea $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in \Omega$,

$$\int_\Omega f(x)\, dx \le \int_\Omega g(x)\, dx.$$

(c) (Monotonía) Si E,F son conjuntos medibles y $E \subseteq F$, entonces

$$\int_E f(x)\, dx \le \int_F f(x)\, dx.$$

(d) $|f|$ es integrable y

$$\left| \int_\Omega f(x)\, dx \right| \le \int_\Omega |f|(x)\, dx.$$

(e) Si $\displaystyle\int_\Omega |f|(x)\, dx = 0$, entonces $f \equiv 0$ en casi todas partes.

Demostración:[25], pág. 63.

Observe la diferencia fundamental de enfoque que existen entre la integral de Riemann y la de Lebesgue. La de Lebesgue utiliza una aproximación por funciones constantes en conjuntos medibles susceptibles de causar dificultades; a diferencia a la de Riemann que utiliza integrales superiores e inferiores sobre intervalos.

Teorema 5. *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones medibles no negativas (ampliadas), con lo que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ es medibles y*

$$\int_E f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx \tag{2.1}$$

para cualquier conjunto medible $E \subseteq \Omega$.

Demostración:[25], pág. 68.

El teorema de convergencia monótona suele aparecer bajo la forma de lema de Fatou.

Teorema 6 (Convergencia Monótona-Lema de Fatou). *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones integrables no negativas, entonces*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\,dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,dx.$$

Demostración:[25], pág. 70.

Teorema 7 (Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones integrables. Supongamos que:*

i) $f_n(x) \to f(x)$ *c.t.p. en* Ω.

ii) Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en Ω entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx.$$

i,e) $f \in L^1(\Omega)$

Demostración:[25], pág. 71.

Teorema 8. *Sea $f : \mathbb{R}^{m+k} \to [0, +\infty]$ medible. Entonces:*

(i) La función de la variable $y \in \mathbb{R}^k$, $f(x,\cdot) : y \longmapsto f(x,y)$, es medible para casi todo $x \in \mathbb{R}^m$.

(ii) La función g, definida para casi todo x por $g(x) = \displaystyle\int f(x,y)\,dy$ es medible.

(iii) $\displaystyle\int g\,dx = \int f$, es decir la integral de f coincide con sus integrales iteradas.

Demostración:[25], pág. 160.

Teorema 9 (Teorema de Fubini). *Sea $f : \mathbb{R}^{m+k} \to [0,+\infty]$ integrable. Entonces:*

(i) La función de la variable $y \in \mathbb{R}^k$, $f(x,\cdot) : y \longmapsto f(x,y)$, es integrable para casi todo $x \in \mathbb{R}^m$.

(ii) La función g, definida para casi todo x por $g(x) = \displaystyle\int f(x,y)\,dy$ es integrable.

(iii) $\displaystyle\int g\,dx = \int f$.

Demostración:[25], pág. 162.

2.2. Espacios $L^p(\Omega)$

Definición 19 (Espacio $L^p(\Omega)$). *Sea $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p < +\infty$; se define*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ medible y } \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

y se denota

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

Más adelante comprobaremos que $\|f\|_p = \|f\|_{L^p}$ es una norma.

Los elementos de $L^p(\Omega)$ son clases de equivalencia de funciones medibles. Dos funciones son equivalentes si ellas son iguales en casi todas partes de Ω.

A partir de la desigualdad de Young obtenemos la desigualdad de Hölder.

Dado un número real $p \geq 1$ definimos su conjugado p^* mediante la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

y observamos que también $1 \leq p^* < \infty$, así la relación entre p y p^* es simétrica: $(p^*)^* = p$. Pues bien, para cualquier $a, b \in \mathbb{R}^+$ es conocida la **desigualdad de Young**

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}.$$

La demostración puede verse en [3],pág.55, la cual es consecuencia de la convexidad de la función exponencial. De esta desigualdad se deduce la desigualdad de Hölder para integrales.

Otra desigualdad que también es de gran utilidad cuando trabajamos con los espacio $L^p(\Omega)$ es

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \tag{2.2}$$

que se cumple para $1 \leq p < \infty$ y $a, b \geq 0$.Demostración:Ver. [1] pág. 23.
Presentamos las clásicas desigualdades de Hölder y Minkowski.
Si $x_1, x_2, ..., x_n,\ y_1, y_2, ..., y_n$ son números reales arbitrarios y p, p^* son números reales mayores o iguales a 1, conjugados, la siguiente desigualdad es conocida como la **desigualdad de Hölder para sumatorias**

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i\, y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^{p^*} \right)^{1/p^*} \tag{2.3}$$

Demostración:[9] pág. 14.

Teorema 10 (**Desigualdad de Hölder para integrales**). *Sea $1 < p < \infty$ y p^* el exponente conjugado de p. Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p^*}(\Omega)$ entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |u(x)\, v(x)|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |v(x)|^{p^*}\, dx \right)^{1/p^*}. \tag{2.4}$$

Equivalentemente se tiene:

(I) $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

(II) $\displaystyle\int_\Omega |f \cdot g| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\, \|g\|_{L^q(\Omega)}$.

Demostración:[3],pág.56,

Haciendo uso del teorema 4 puede verificarse que, si $u \in L^p(\Omega)$ entonces $cu \in L^p(\Omega)$ para cualquier número real c. Así, definimos las operaciones suma y producto por un escalar en $L^p(\Omega)$ por

$$(cf)(x) := cf(x), \quad \text{y} \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

es conveniente verificar que $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial.

Para verificar que la suma de dos funciones en $L^p(\Omega)$, hacemos uso de la desigualdad (2.2) con la cual tendremos que si $u, v \in L^p(\Omega)$

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |v(x)|^p). \tag{2.5}$$

Así de esta última desigualdad, conjuntamente con el teorema 4 se concluye que

$$u + v \in L^p(\Omega).$$

De hecho $L^p(\Omega)$ es un espacio normado, como veremos a continuación

Lema 1. *El funcional* $\|\cdot\|_p$ *definido por:*

$$\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

es una norma en $L^p(\Omega)$.

En efecto, note que $|u(x)| \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, así como consecuencia del teorema 4 se sigue que

$$\begin{aligned} \|u\|_p = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad |u(x)|^p = 0, \quad \text{para casi todo} \quad x \in \Omega \\ &\Longleftrightarrow \quad |u(x)| = 0, \quad \text{para casi todo} \quad x \in \Omega \\ &\Longleftrightarrow \quad u(x) = 0, \quad \text{para casi todo} \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Además para cualquier c se tiene

$$\|cu\|_p = \left(\int_\Omega |cu(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = |c| \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p},$$

es decir, $\|cu\|_p = |c|\|u\|_p$.

Finalmente, en el siguiente teorema se garantiza el cumplimiento de la desigualdad triangular, con lo que se completa la verificación de que el funcional definido es una norma sobre $L^p(\Omega)$.

Teorema 11 (Desigualdad de Minkowski para integrales). *Si* $1 \leq p < \infty$ *entonces*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Demostración: Sean $u, v \in L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$

La desigualdad es cierta para $p = 1$

$$\begin{aligned}
\|u + v\|_1 &= \left(\int_\Omega |u(x) + v(x)|^1 \, dx \right)^{1/1} \\
&= \int_\Omega |u(x) + v(x)| \, dx \\
&\leq \int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|) \; dx \\
&= \int_\Omega |u(x)| \, dx + \int_\Omega |v(x)| \, dx \\
&= \|u\|_1 + \|v\|_1
\end{aligned}$$

Sea $1 < p < \infty$, $1 < p' < \infty$ con $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Consideremos la función $w \in L^p(\Omega)$ tal que $w \geq 0$ y $\|w\|_{p'} \leq 1$. Por la desigualdad de Hölder tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x) + v(x)| \, w(x) \, dx &\leq \int_\Omega (|u(x)| + |v(x)|) \; w(x) \, dx \\
&= \int_\Omega |u(x)| \, w(x) \, dx + \int_\Omega |v(x)| \, w(x) \, dx \\
&\leq \|u\|_p \, \|w\|_{p'} + \|v\|_p \, \|w\|_{p'} \\
&= \|u\|_p + \|v\|_p
\end{aligned}$$

$$\sup \left\{ \int_\Omega |u(x) + v(x)| \, w(x) \, dx : w(x) \geq 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \; \|w\|_{p'} \leq 1 \right\} \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Por lo tanto

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p. \blacksquare$$

Definición 20 (Espacios $L^\infty(\Omega)$). *Una función u medible en Ω es llamada esencialmente acotada en Ω si existe una constante $K > 0$ tal que $|u(x)| \leq K$ c.t.p en Ω. La* *mayor de las cotas inferiores K es llamada* ***supremo esencial*** *de $|u|$ en Ω y se denota por* $ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$.

Denotamos por $L^\infty(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones u que son esencialmente acotadas en Ω.

El funcional $\|u\|_\infty = ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$ define una norma en $L^\infty(\Omega)$.

Teorema 12 (**Desigualdad de interpolación**). *Sean $1 \leq p < q < r < \infty$ tales que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{r}$ para algún θ, $0 < \theta < 1$. Si $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ entonces $u \in L^q(\Omega)$ y*

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta \, \|u\|_r^{1-\theta}.$$

Demostración:

Sea p, q, r y θ con la hipótesis. Luego $1 = \dfrac{\theta q}{p} + \dfrac{(1-\theta)q}{r} = \dfrac{1}{\frac{p}{\theta q}} + \dfrac{1}{\frac{r}{q(1-\theta)}}$.

Hagamos $s = \dfrac{p}{\theta q}$. Note que $s > 1$, pues en caso contrario si $s \leq 1$, significa que $\dfrac{\theta q}{p} \geq 1$ por lo que $\dfrac{\theta q}{p} + \dfrac{(1-\theta)q}{r} \geq 1 + \dfrac{(1-\theta)q}{r} > 1$; lo cual es una contradicción ya que por hipótesis $\dfrac{\theta q}{p} + \dfrac{(1-\theta)q}{r} = 1$. Por lo tanto $s > 1$.

De manera análoga se define $s^* = \dfrac{r}{q(1-\theta)}$, en cuyo caso podemos verificar que $1 < s < \infty$ y $1 < s^* < \infty$.

Luego, la desigualdad de Hölder nos garantiza que

$$\begin{aligned}
\|u\|_q^q &= \int_\Omega |u(x)|^q \, dx \\
&= \int_\Omega |u(x)|^{\theta q} \, |u(x)|^{(1-\theta)q} \, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |u(x)|^{\theta q s} \, dx \right)^{1/s} \left(\int_\Omega |u(x)|^{(1-\theta)q s^*} \, dx \right)^{1/s^*} \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Observe que $\theta q s = \theta q \dfrac{p}{\theta q} = p$ y $(1-\theta)qs^* = (1-\theta)q\dfrac{r}{(1-\theta)q} = r$. Luego al sustituir en (2.6) se tiene

$$\begin{aligned}
\|u\|_q^q &\leq \left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{\theta q}{p}} \left(\int_\Omega |u(x)|^r\,dx\right)^{\frac{q}{(1-\theta)r}} \\
&\leq \left[\left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^{\theta q} \left[\left(\int_\Omega |u(x)|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\right]^{(1-\theta)q} \\
&\leq \|u\|_p^{\theta q}\,\|u\|_r^{(1-\theta)q} \\
&\leq \|u\|_p^{\theta}\,\|u\|_r^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

■

En lo que sigue si Θ es un conjunto medible, convenimos en escribir

$$Vol(\Theta) := \int_\Omega 1\,dx$$

cuando $\int_\Omega 1\,dx < \infty$.

Teorema 13 (**Teorema de Inmersión para los espacio** L^p)**.** *Sean* $1 \leq p \leq q < \infty$ *y* $u \in L^q(\Omega)$*, entonces* $u \in L^p(\Omega)$ *y*

$$\|u\|_p \leq Vol(\Omega)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}\,\|u\|_q. \tag{2.7}$$

Esto es,

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega). \tag{2.8}$$

Demostración:[1], pág. 28.

Corolario. $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)\,\overline{v}(x)\,dx.$$

Demostración:[9] pág. 107

Teorema 14. $C_0^\infty(\Omega)$ *es denso en* $L^p(\Omega)$*,* $1 \leq p < \infty$*.*

Demostración:[8], pág. 332.

2.3. Distribuciones

En el resto del trabajo nos reservamos el símbolo Ω para denotar un conjunto abierto en el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ para designar el conjunto vacío. Un punto de $\mathbb{R}^n$ se denotará por $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, donde $x_i \in \mathbb{R}$ para cada $1 \leq i \leq n$.

Definición 21. *A la n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ la llamaremos* ***multi-índice*** *si α es una n-upla de enteros no negativos. Además, denotaremos por X^α el monomio, de grado $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, $x_1^{\alpha_1}, ..., x_n^{\alpha_n}$.*

La suma de dos multi-índices, α, β es $\alpha+\beta = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, ..., \alpha_n+\beta_n)$. Decimos que $\beta \leq \alpha$ si $\beta_j \leq \alpha_j$ para todo $j = 1, 2, ..., n$. Para denotar la derivada parcial haremos

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

conviniendo que $D^{(0,0,...,0)}\phi = \phi$.

Por otra parte, el gradiente de una función de valores reales ϕ es denotado por

$$D\phi(x) := (D_1\phi(x), D_2\phi(x), ..., D_n\phi(x)).$$

La clausura de un conjunto G es denotado por $\overline{G}$, y con esta notación presente podemos introducir la siguiente definición:

Definición 22 (Continuamente compacto). *Si $G \subset \mathbb{R}^n$ es no vacío, diremos que $G \Subset \Omega$ si y solo si $\overline{G} \subset \Omega$ y $\overline{G}$ es compacto.*

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$, una sucesión $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones en $C_0^\infty(\Omega)$ es llamada convergente en el sentido del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ a la función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si satisface las siguientes propiedades:

(I) Existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada j.

(II) $\lim_{j\to\infty} D^\alpha \phi_j(x) = D^\alpha \phi(x)$ uniformemente en K para cada multi-índice α.

Las propiedades de la convergencia de $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ definen una topología τ localmente convexa en el espacio vectorial $C_0^\infty(\Omega)$. Por lo tanto $C_0^\infty(\Omega)$ dotado de esta topología se convierte en el espacio vectorial topológico llamado $\mathcal{D}(\Omega)$, así $\mathcal{D}(\Omega) = (C_0^\infty(\Omega), \tau)$.

El espacio dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ es llamado el **espacio de (Schwartz) distribuciones** en Ω. Los elementos de este espacio son llamadas **distribuciones y/o funciones de prueba**. El espacio es dotado con la topología débil estrella, así que una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si $T_n(\phi) \to T(\phi)$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En este caso, se dice que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a T **en el sentido distribucional.**

Para $S, T,, \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $c \in \mathbb{C}$, entonces se define las operaciones

- $(S+T)(\phi) = S(\phi) + T(\phi)$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
- $(cT)(\phi) = cT(\phi)$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
- $T_j \to T$ si y solo si $T_j(\phi) \to T(\phi)$ en $\mathbb{C}$ para todo $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Una función u definida en casi todas partes (c.t.p.) en Ω es llamada localmente integrable en Ω siempre que $u \in L^1(U)$ para cada abierto $U \Subset \Omega$, en este caso denotaremos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Ejemplo. Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. El funcional

$$T_u(\phi) := \int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{2.9}$$

es una distribución.
La linealidad es obvia, veamos la continuidad.
Si $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $\mathcal{D}(\Omega)$, existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada j y $D^\alpha\phi_j \to D^\alpha\phi$ uniformemente en K para cada multi-índice α.

Dado que $K \Subset \Omega$ se tiene que $\overline{K}$ es compacto. Si F es la colección de subconjuntos abiertos de Ω tal que $\overline{K} \subseteq \bigcup_{A\in F} A$, luego existen $A_1, A_2, ..., A_n \in F$ de manera que $\overline{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, además $K \subseteq \overline{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Luego, para cada $j > 0$ se deduce que

$$\begin{aligned}
|T_u(\phi_j) - T_u(\phi)| &= \left| \int_\Omega u(x)\phi_j(x)\,dx - \int_\Omega u(x)\phi(x)\,dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \left(u(x)\phi_j(x) - u(x)\phi(x)\right)\,dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega u(x)\left(\phi_j(x) - \phi(x)\right)\,dx \right| \\
&= \left| \int_K u(x)\left(\phi_j(x) - \phi(x)\right)\,dx \right|
\end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned}
|T_u(\phi_j) - T_u(\phi)| &\leq \int_K |u(x)|\,|\left(\phi_j(x) - \phi(x)\right)|\,dx \\
&\leq \int_K |u(x)| \sup_{x\in K} |\phi_j(x) - \phi(x)|\,dx \\
&= \sup_{x\in K} |\phi_j(x) - \phi(x)| \int_K |u(x)|\,dx \\
&\leq \sup_{x\in K} |\phi_j(x) - \phi(x)| \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |u(x)|\,dx \right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $|T_u(\phi_j) - T_u(\phi)| \leq \sup_{x\in K} |\phi_j(x) - \phi(x)| \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |u(x)|\,dx \right)$, y este último término del lado derecho tiende a cero, puesto que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $\mathcal{D}(\Omega)$. Así T_u es continua.

Observación. No todas las distribuciones $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tienen la forma T_u definida en (2.9) para algún $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

En efecto, sea $\delta : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ dada por $\delta(\phi) = \phi(0)$, para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Si $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\delta(\phi_1 + \beta\phi_2) = (\phi_1 + \beta\phi_2)(0) = \phi_1(0) + \beta\phi_2(0) = \delta(\phi_1) + \beta\delta(\phi_2).$$

por lo tanto δ es lineal.

Además, si $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $\mathcal{D}(\Omega)$, existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada j y $\lim\limits_{j\to\infty} D^\alpha\phi_j(x) = D^\alpha\phi(x)$ uniformemente en K para cada multi-índice α. Por lo tanto

$$|\delta(\phi_j) - \delta(\phi)| = |\phi_j(0) - \phi(0)| \to 0, \quad \text{cuando} \quad j \to \infty$$

En consecuencia, $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Veamos que $\delta_{(0)}$ es una distribución que no satisface (2.9). En efecto, supongamos que $\delta_{(0)}$ satisface (2.9), entonces existe una función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ de manera que:

$$\phi(0) = \int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,dx, \quad \text{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.10}$$

Consideremos la función de prueba definida por:

$$\phi_a(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{a^2}{\|x\|^2 - a^2}}, & \text{si} \quad \|x\| < a \\ 0, & \text{si} \quad \|x\| > a \end{cases}$$

con $a > 0$, notemos que

$$\phi_a(0) = \mathrm{e}^{-1} > 0 \tag{2.11}$$

$$|\phi_a(x)| \leq \mathrm{e}^{-1} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,\phi_a(x)\,dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\,|\phi_a(x)|\,dx \\ &= \int_{\|x\|<a} |u(x)|\,|\phi_a(x)|\,dx \\ &\leq \int_{\|x\|<a} |u(x)|\ \mathrm{e}^{-1}\ dx \\ &= \mathrm{e}^{-1} \int_{\|x\|<a} |u(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Si u es localmente integrable entonces $\lim\limits_{a\to 0} \int_{\|x\|<a} |u(x)|\,dx = 0$ entonces

$$\lim_{a\to 0} \int_\Omega |u(x)|\,\phi_a(x)\,dx = 0,$$

lo cual contradice nuestra suposición inicial (2.12)

Derivada de una Distribución

Definición 23. *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *una distribución. Dado un multi-índice* α *definimos la* $\alpha-$*ésima derivada de* T *como*

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \quad \textit{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposición 5. $D^\alpha T$ *es una distribución, para toda* $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Demostración:

Sea $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} D^\alpha T(\phi_1 + \beta\phi_2) &= (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha(\phi_1 + \beta\phi_2)) \\ &= (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi_1 + \beta D^\alpha \phi_2) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \Big[T(D^\alpha \phi_1) + \beta T(D^\alpha \phi_2) \Big] \\ &= (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi_1) + \beta (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi_2) \\ &= D^\alpha T(\phi_1) + \beta D^\alpha T(\phi_2). \end{aligned}$$

Una vez verificada la linealidad, procedemos a comprobar la continuidad, para ello consideremos $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $\mathcal{D}(\Omega)$. Entonces $(\phi_j - \phi) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $D^\alpha(\phi_j - \phi) \in \mathcal{D}(\Omega)$ y existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para todo j.

Ejemplo.

1) Si $0 \in \Omega$ y $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es la distribución de Dirac entonces, $D^\alpha \delta$ viene dada por:

$$D^\alpha \delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(0).$$

2) Si $\Omega = \mathbb{R}$ y $H \in L^1_{loc}(\Omega)$ es una función escalonada definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte compacto en $[-a, a]$ entonces

$$
\begin{aligned}
(TH)'\phi &= (-1)^{|1|} TH(\phi') \\
&= -TH(\phi') \\
&= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-a}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-a}^{0} H(x)\,\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{a} \phi'(x)\,dx \\
&= -\phi(x)\Big|_{0}^{a} \\
&= -(\phi(a) - \phi(0)) \\
&= \phi(0) = \delta(\phi).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(TH)'$ es la distribución de Dirac por lo que $(TH)'$ es una distribución.

Definición 24. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α un multi-índice. Si existe una función $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ de tal manera que*

$$T_{v_\alpha}(\phi) = D^\alpha T_u(\phi) \quad \textit{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

entonces v_α es llamada la $\alpha-$ésima derivada distribucional o débil de T_u.

2.4. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev tienen una fuerte influencia sobre el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales, el análisis, física matemática, geometría diferencial y otros campos de las matemáticas.

A continuación introducimos los espacios de Sobolev de orden entero y establecemos algunas de sus más importantes propiedades.

Definición 25. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto y* $1 \leq p \leq \infty$. *Si* m *es un entero no negativo,* $u \in L^p(\Omega)$ *y existe la derivada distribucional* $D^\alpha u$ *para cualquier* α *con* $0 \leq |\alpha| \leq m$, *tal que*

$$D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \textit{para todo} \quad |\alpha| \leq m.$$

Entonces se dice que $u \in W^{m,p}(\Omega)$.

$W^{m,p}(\Omega)$ es llamado **Espacio de Sobolev sobre Ω.**

Nosotros nos limitaremos a introducir los espacios de orden entero con $1 \leq p < \infty$, en este caso, esta clase de funciones está dotada de la norma

$$\|\cdot\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{si} \quad 1 \leq p < \infty. \tag{2.13}$$

Teorema 15. $W^{m,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración:[3] pág.121

Observación. Sea $u \in \overline{W^{m,p}(\Omega)}$, entonces existe una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $W^{m,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$, así $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y la completitud de $W^{m,p}(\Omega)$ nos garantiza que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir, $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Es decir, $W^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega)$.

Teorema 16. *Sean* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un conjunto abierto no vacío,* $k \geq 1$ *un entero y* $p \in [1, \infty)$. *Se tiene*

(a) $W^{k,p}(\Omega)$ *es un espacio reflexivo si* $p \in (1, \infty)$.

(b) $W^{k,p}(\Omega)$ *es un espacio separable si* $p \in [1, \infty)$.

Demostración:[3], pág.121,122.

Observación. Los espacios $W^{k,1}(\Omega)$ y $W^{k,\infty}(\Omega)$ no son reflexivos. Además $W^{k,\infty}(\Omega)$ no es separable.

Definición 26. *Sea $k \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$. Definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, es decir,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \equiv \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{m,p}}.$$

En el caso particular en que p=2, es usual usar la notación $H_0^k(\Omega) \equiv W_0^{k,2}(\Omega)$.

Observación.

1) Observe que decir $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ es equivalente a decir que existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$, es decir, tal que $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq k$, con lo que es interesante encontrar una caracterización manejable del espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$.

2) Aunque $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $W_0^{k,p}(\Omega)$ no se puede deducir que las funciones de $W_0^{k,p}(\Omega)$ tengan soporte compacto en Ω.

3) Utilizando la convolución con una sucesión regularizante, es inmediato comprobar que $C_0^k(\Omega) \subseteq W_0^{k,p}(\Omega)$, para todo $k \geq 1$, $p \in [1, \infty)$.

Teorema 17. *Sea $k \geq 1$, $p \in [1, \infty)$ y $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$. Definimos $\widetilde{u}$ como la extensión por 0 de u a $\mathbb{R}^n - \Omega$, esto es*

$$\widetilde{u} := \begin{cases} u(x) & si \quad x \in \Omega \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R}^n - \Omega. \end{cases}$$

Entonces

1) $\widetilde{u} \in W_0^{k,p}(\mathbb{R}^n)$,

2) $D^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$, *para todo* α *con* $|\alpha| \leq k$ *y*

3) $\|\widetilde{u}\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \|\widetilde{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Demostración:[28], pág. 49.

Teorema 18. *Sean $m \geq 1$ y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces:*

(i) *Si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$.

(ii) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, *para* $q \in [p, \infty)$.

(iii) Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$, $W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

Demostración:[26] . pág.79.

Teorema 19. *(Teorema de Inmersión continua de Sobolev) Sea Ω un dominio regular en $\mathbb{R}^n$, $m > 0$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces, para cualquier $j \geq 0$ las inmersiones de abajo son continuas:*

(i) Si $m < \frac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq p \leq \frac{np}{n-mp} = p^*$.

(ii) Si $m = \frac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \infty$.

(iii) Si $m > \frac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_\beta(\Omega)$.

(iv) Si $m - 1 < \frac{n}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega)$, $0 \leq \alpha \leq m - \frac{n}{p}$.

donde denotamos por $C^j_\beta(\Omega)$ al espacio de Banach de funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^j tales que u y todas sus derivadas de orden j son acotadas con la norma:

$$\|u\|_{C^j_\beta(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|.$$

Así mismo, $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \lambda \leq 1$, es el espacio de Banach de las funciones $u \in C^k_\beta(\mathbb{R}^n)$ tales que u y todas sus derivadas de orden k son Hölder continuas (Holderiana) con exponente λ ($\lambda-$Hölder continuas), esto es:

$$\max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda} < \infty.$$

La norma de $C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ es dada por

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \max_{|\alpha| \leq j} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| + \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

Demostración:[27] . pág. 102.

Teorema 20. *(Teorema de Inmersión Compacta de Rellich-Kondrachov) Sea Ω un dominio acotado con frontera regular en $\mathbb{R}^n$, $j \geq 0$, $m \geq 0$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces para cualquier $j \geq 0$, las inmersiones de abajo son compactas:*

(i) *Si* $m < \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq p \leq \dfrac{np}{n-mp} = p^*$.

(ii) *Si* $m = \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, $p \leq q \leq \infty$.

(iii) *Si* $m > \dfrac{n}{p}$;

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega),\ 1 \leq q \leq \infty;\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\alpha}(\Omega);\ W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j}(\overline{\Omega}).$$

(iv) *Si* $m - 1 < \dfrac{n}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\mu}(\Omega)$, $0 < \mu < m - \dfrac{n}{p}$.

Demostración:[27] . pág. 103.

3 Resultados referidos al problema (P)

Nuestro problema aparece en muchos modelos del mundo real, en Ecología matemática, Biomatemática y Físico Matemática, en los cuáles solamente tiene sentido buscar soluciones no negativas. Por otro lado el estudio de este tipo de problemas tiene su propio interés matemático, porque permite ilustrar e implementar los métodos del Análisis Funcional no lineal en las E.D.P.

Una de las motivaciones de esta tesis proviene de la investigación de las soluciones estacionarias a ecuaciones parabólicas (o hiperbólicas), de modelos concretos en Biomatemáticas, como veremos a continuación.

Al describir la densidad de una población (por ejemplo bacterias) sujeta a propagación en determinado medio se tiene el sistema

$$\begin{aligned} u_t - M(\ell(u))\Delta u &= F(x,t,u) \qquad \text{en} \quad \Omega\times]0,+\infty[\ , \\ u &= 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma\times]0,+\infty[\ , \\ u(x,0) &= u^0(x) \geqslant 0 \qquad \text{en} \quad \Omega\ , \end{aligned}$$

descrito en [6] y sus referencias. Si $u = 0$ significa que la especie muere (o desaparece), si $u > 0$ la especie se propaga. Ver también [2] . Para nuestro caso es

$$\ell(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \qquad , \qquad F(x,t,u) = |u|^{p-1}u + \lambda f(x)\ .$$

Para $M(s) = 1$, presentamos dos modelos. El primer modelo es relacionado con la genética de poblaciones [17] dado por el sistema con condición tipo Neumann.

$$\begin{aligned} u_t &= d\Delta u + F(x,t,u) \qquad \text{en} \quad \Omega\times]0,+\infty[\ , \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \qquad \text{en} \quad \Gamma\times]0,+\infty[\ , \\ 0 < u(x,0) &= u^0(x) < 1 \qquad \text{en} \quad \Omega\ , \end{aligned}$$

donde d es una constante positiva (la razón de migración), $F(x,t,u) = q(x)u^2(1-u)$ y u representa el alelo A, (versión de un gen) en el momento t y en el lugar x en el hábitat (medio) Ω, por lo que se debe asumir $0 \leqslant u \leqslant 1$. Para investigar las soluciones del estado estacionario tenemos que lidiar con **soluciones positivas** del sistema elíptico.

$$\left| \begin{array}{l} d\Delta u + q(x)u^2(1-u) = 0, \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \\ 0 < u < 1 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

El otro modelo proviene de la dinámica poblacional de una sola especie (por ejemplo salmón) en una región habitada áspera (esto es unidimensional): el intervalo $]0,1[$, que está rodeada por territorios donde la densidad de población es $\overline{M}$.

$$\begin{array}{rcll} u_t - \Delta u & = & \lambda u + q(x)u^p & \text{en} \quad]0,1[\times]0,+\infty[\ , \\ \\ u(0,t) & = & \overline{M} = u(1,t) & \text{en} \quad]0,+\infty[\ , \\ \\ u(x,0) & = & u^0(x) > 0 & \text{en} \quad]0,1[\ , \end{array}$$

donde $\lambda < 0$ es un parámetro real que unido al grado de habitabilidad del medio ambiente (cuanto más grande $|\lambda|$ más poluido está el ambiente) y $q(x)$ es una función simétrica, constante por pedazos definida por la ley de Malthus y u^0 es la densidad inicial de población. Ver [21], cuyo estado estacionario es del tipo

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta w + \lambda_0 w = \widehat{q}(x)w^p + \lambda_1 f(x), \quad \text{en} \quad \Omega\times]0,+\infty[, \\ \\ w > 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \\ w = 0, \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

para $\Omega =]0,1[\quad , \quad \lambda_0 > 0, \lambda_1 \geqslant 0$ con $\widehat{q}$ y f funciones que cambian de signo.

A fin de clarificar más nuestro trabajo continuaremos ilustrandolo en situaciones simples. Veremos como una perturbación elemental f altera la naturaleza de las soluciones del problema original, aún más, no es de un solo signo (positivo) sino que cambia de signo.

Consideremos primero el sistema

$$(P)\quad\left|\begin{array}{l} -\Delta u=|u|^{p-1}u, \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \\ u=0, \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{array}\right.$$

donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, acotado bien regular, de frontera Γ, $n \geqslant 3$ y $p > 0$. Utilizar el método variacional para resolver (P) significa hallar directamente una solución considerando el problema equivalente de hallar los *"puntos críticos"* de un funcional de energía asociado a (P). Introduciendo el funcional $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$J(u)=\frac{1}{2}\Big|\nabla u\Big|_2^2-\frac{1}{p+1}\Big|\,u\,\Big|_{p+1}^{p+1}$$

se puede demostrar que J está bien definido y es de clase C^1. También cada punto crítico u de J (esto es $\langle\, J'(u), v\,\rangle = 0, \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$, F' la derivada de Fréchet de J) es solución débil de (P).

Aquí analizaremos el comportamiento de J según la variación de $p > 0$.

Caso 1. $p \in]0,1[$. La inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ es contínua. Se verifica que J es coerciva, débilmente semicontínua inferiormente, por lo que, por el teorema de Weierstrass generalizado J tiene un mínimo, luego ese mínimo es punto crítico, y así (P) admite solución.

Caso 2. $p \in]1, \dfrac{2N}{N-2}[$. En este caso J no es acotado inferiormente, como fácilmente se verifica.

Sea $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$, $t \geqslant 0$. Luego

$$J(tu)=\frac{t^2}{2}\Big|\nabla u\Big|_2^2-\frac{t^{p+1}}{p+1}\Big|\,u\,\Big|_{p+1}^{p+1} \longrightarrow -\infty \quad \text{si} \quad t \longrightarrow +\infty$$

Así no podemos aplicar el criterio del caso 1. Pero aún dispone de una herramienta potente, llamada el Teorema del paso de la montaña. Se puede probar, usando este teorema que J admite un punto crítico no trivial, esto es, (P) admite solución no trivial débil.

Caso 3. $p = \dfrac{N+2}{N-2}$. El funcional J aún preserva la *"geometría del paso de montaña"*. Aún más las sucesiones de Palais - Smale son acotados. En particular, existe

$(u_\nu) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que

$$J(u_\nu) \longrightarrow C \quad , \quad J'(u_\nu) \longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad u_\nu \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega)$$

solo que en relación al caso hay una gran diferencia la convergencia

$$u_\nu \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega) \quad \not\Rightarrow \quad u_\nu \longrightarrow u \quad \text{en} \quad L^{p+1}(\Omega)$$

ya no es posible, por que la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega) \quad (p+1 = \frac{2N}{N-2})$ no es compacta.

Pohozaev [19] demostró que si Ω es " estrellado" entonces (P) no admite solución. Veamos ahora qué sucede cuando $f \neq 0$. Fue Tarantello [20] quién usando aún, métodos directos consideró el funcional

$$J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$J(u) = \frac{1}{2}\Big|\nabla u\Big|_2^2 - \frac{1}{p+1}\Big|\, u\,\Big|_{p+1}^{p+1} - \int_\Omega f u dx$$

con $1 < p \leqslant \dfrac{N+2}{N-2}$ y probó que el problema

$$(P_\lambda) \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta u = |u|^{p-1}u + \lambda f(x), \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \\ u = 0, \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

(i) admite al menos una solución $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ para $f \neq 0$ y

$$\int_\Omega f u dx \leqslant C_N \Big|\nabla u\Big|_2^{\frac{N+2}{2}} \quad , \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

donde $C_N = \dfrac{4}{N-2}\Big(\dfrac{N-2}{N+2}\Big)^{\frac{N+2}{4}}$.

(ii) Admite al menos dos soluciones débiles $u_0, u_1 \in H_0^1(\Omega)$ provisto que $f \neq 0$ y

$$\int_\Omega f u dx < C_N \Big|\nabla u\Big|_2^{\frac{N+2}{2}} \quad , \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Más aún, $u_0 \geqslant 0$ y $u_1 \geqslant 0$, si $f(x) \geqslant 0 \quad , \quad x \in \Omega$.

Otros autores han analizado el caso $p \geqslant \dfrac{N+2}{N-2}$ [14],[5] cuando $f(x) \geqslant 0$.
En el trabajo de Dai y Gu [5], se investigó la situación en que $f(x)$ cambia de signo. Aquí ellos mostraron que la existencia de soluciones positivas de (P_λ) está ligada a la solubilidad del problema lineal

$$(*) \quad \left| \begin{array}{l} -\Delta\varphi = f(x) \quad , \quad x \in \Omega, \\ \\ \varphi \geqslant 0 \quad , \quad x \in \Omega, \\ \\ \varphi = 0, \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

Para $f \in C^1(\overline{\Omega})\backslash\{0\}$, tal que $(*)$ admite una solución (no negativa), $p \in]1, \dfrac{N+2}{N-2}]$, probaron que existen dos constantes, λ_* y λ^* tal que (P_λ) tiene al menos dos soluciones positivas para $\lambda \in]0, \lambda_*[$ y no hay soluciones positivas en $]\lambda^*, +\infty[$.

Es así que motivados por los anteriores resultados y con el fin de exponer didácticamente los resultados fundamentales, ligandolos a la aproximación numérica abordaremos el problema de Kirchhoff (P), para $0 < p < \dfrac{N+2}{N-2}, N > 2$ y $f \in C^1(\overline{\Omega})\backslash\{0\}$, mediante el método de Galerkin.

El siguiente resultado, garantiza la no negatividad de las soluciones bajo condición de no negatividad de f.

Teorema 21. *Sea M satisfaciendo (M_0) y $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Caratheodory con $f(x, 0) \geq 0$ para c.t.p. $x \in \Omega$ Entonces, toda solución $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema*

$$(**) \quad \left| \begin{array}{rcl} -M(|\nabla u|_2^2)\Delta u &=& f(x,u) \quad en \quad \Omega, \\ \\ u &=& 0, \quad en \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

es no-negativa, esto es $u(x) \geqslant 0$ c.t.p. $x \in \Omega$

Demostración:

Consideramos los siguientes casos:

(1) La condición $f(x, 0) \geqslant 0$, c.t.p. en Ω, nos permite redefinir f a

$$\widetilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(x,s) & ; \text{ si } \ s \geqslant 0, \\ f(x,0) & ; \text{ si } \ s < 0; \end{cases}$$

En lo que sigue está $\widetilde{f}$ aún será denotada con f.

(2) Una solución débil de (**) es una función $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u \in H_0^1(\Omega)$

$$M(|\nabla u|_2^2)\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)v dx \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.1}$$

En la demostración, tomamos $v = -u^- \in H_0^1(\Omega)$ (donde $u^- = \text{máx}\{-u, 0\}$) en (3.1) ver [14] y obtenemos

$$M(|\nabla u|_2^2)\int_\Omega \nabla u \nabla u^- dx = -\int_\Omega f(x,u)u^- dx$$

Como $u = u^+ - u^-$, $\nabla u^- = \begin{cases} -\nabla u & ; \text{ si } \; u < 0, \\ 0 & ; \text{ si } \; u \geqslant 0 \end{cases}$ y $\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & ; \text{ si } \; u > 0, \\ 0 & ; \text{ si } \; u \leqslant 0 \end{cases}$
entonces $\nabla u^+.\nabla u^- = 0$, y luego

$$M(|\nabla u|_2^2)\Big(-\int_\Omega \nabla u^+.\nabla u^- dx + \int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx\Big) = -\int_{\{x\in\Omega : u(x)\geqslant 0\}} f u^- dx - \int_{\{x\in\Omega : u(x)<0\}} f u^- dx$$

Y como $u^-(x) = 0$, si $u(x) \geqslant 0$, resulta

$$M(|\nabla u|_2^2)\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx = -\int_{\{x\in\Omega : u(x)<0\}} f(x,u)u^- dx = -\int_{\{x\in\Omega : u(x)<0\}} f(x,u)u^- dx \leqslant 0$$

Por lo tanto

$$0 \leqslant M(|\nabla u|_2^2)\int_\Omega |\nabla u^-|^2 dx \leqslant 0$$

y con, $M(s) \geqslant m_0 > 0$, resulta: $|u^-|_{H_0^1} = 0$ de dónde concluimos $u^- = 0$ luego,

$$u = u^+ - u^- = u^+ \geqslant 0.$$

4 Resultado Principal

En este capítulo, probamos que el problema

$$(P)\quad \left|\begin{array}{rcl} -M(\| u \|^2)\Delta u &=& |u|^{p-1}u + \lambda f(x), \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \\ u &=& 0, \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{array}\right.$$

donde Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, acotado, bien regular, de frontera Γ, $f \in C^1(\overline{\Omega})$ y cambia de signo, $\lambda > 0, \| u \| = |\nabla u|_2$ y M una función positiva continua en $\mathbb{R}^+$, admite solución débil.

Para esto usaremos el método de Galerkin, donde primero resolvemos un problema aproximado en dimensión finita, las soluciones obtenidas permitirán obtener la solución del problema, a través de un pasaje al límite. Adicionalmente mostraremos la unicidad.

Para motivar el concepto de solución débil de (P) multiplicamos por una función φ regular la ecuación en (P) e integramos en Ω:

$$M(\| u \|^2)\int_\Omega (-\Delta u)\varphi dx = \int_\Omega |u|^{p-1}u\varphi dx + \lambda \int_\Omega f\varphi dx$$

Aplicando el teorema de Green e imponiendo $\varphi\, |_\Gamma = 0$:

$$M(\| u \|^2)\int_\Omega \nabla u.\nabla\varphi dx - \int_\Omega \Big(|u|^{p-1}u\varphi + \lambda f(x)\varphi\Big)dx = 0 \qquad \cdots\cdots(\widehat{P})$$

Ya estamos en condiciones de definir el concepto de solución débil de (P).

Definición 27. *Decimos que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución débil de (P) sí:*

(i) $u \in H_0^1(\Omega)$

(ii) *u satisface la ecuación integral $(\widehat{P})$, $\forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$*

Las hipótesis específicas para nuestro resultado de existencia son:

(M_0) $\quad M : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que

$$M(s) \geqslant m_0 > 0 \quad , \quad \forall s \geqslant 0$$

donde m_0 es una constante dada.

(f_1) $f \in C^1(\overline{\Omega})$

Notación: Incidimos en que estamos denotando con $|\cdot|_q$ la norma en $L^q(\Omega)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$ y con $\|\cdot\|$ la norma en $H_0^1(\Omega)$, inducida por el producto interno

$$(u, v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx$$

Como Ω es acotado, por la desigualdad de Poincaré, tomaremos

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \quad , \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

La norma euclidiana de $\mathbb{R}^m$ es denotada con $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno respectivo. En adelante la letra C denotará una constante positiva genérica.

Teorema 22. *Asumamos que se satisfacen (M_0) y (f_1) . Entonces*

i) *Si $0 < p < 1$, el problema (P) admite una solución débil no trivial, para todo $\lambda > 0$.*

ii) *Si $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que el problema (P) admite una solución débil no trivial, para $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$*

Demostración: Consideremos primero el caso $f \neq 0$.
Como $H_0^1(\Omega)$ es separable, podemos construir una base Hilbertiana $\mathbb{B} = \{e_1, e_2, ...\}$, sea (e_k) un sistema ortonormal completo para $H_0^1(\Omega)$.
Para cada $m \in \mathbb{N}$, considere el espacio finito dimensional

$$\mathbb{V}_m = span\{e_1, e_2, ..., e_m\} \subseteq H_0^1(\Omega).$$

Para $u_m \in \mathbb{V}_m$ existe un único $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$u = \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k$$

como consecuencia

$$\|u_m\|^2 = \|\xi\|_m^2 = \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2,$$

y con la correspondencia

$$u = \sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k \leftrightarrow \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$$

se establece un isomorfismo isométrico entre $(\mathbb{V}_m, \|\cdot\|)$ y $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_m)$; así podemos hacer la identificación

$$\mathbb{V}_m \ni u = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Así mismo

$$\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} := \|u\|^2 = \|\xi\|^2_m := \sum_{k=1}^{m} \xi_k^2$$

Queremos determinar una función $u_m \in \mathbb{V}_m$ solución del sistema:

$$M\Big(\|u_m\|^2\Big)\int_\Omega \nabla u_m \nabla e_k dx - \int_\Omega \Big(|u_m|^{p-1}u_m + \lambda f(x)\Big)e_k dx = 0, \qquad \cdots\cdots (PA)$$

donde $k = 1, 2, ..., m$.

Definamos la función $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $F(u_m) = (F_1(u_m), ..., F_m(u_m))$ con

$$F_k(u_m) = M\Big(\|u_m\|^2\Big)\int_\Omega \nabla u_m \nabla e_k dx - \int_\Omega \Big(|u_m|^{p-1}u_m + \lambda f(x)\Big)e_k dx = 0, \qquad (4.1)$$

Usando la identificación anterior, con $u_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k$ escribimos

$$\begin{aligned} F_k(u_m) = &\quad M\big(\|u_m\|^2\big)\Big[\int_\Omega \nabla(\sum_{k=1}^{m} \xi_k e_k)\nabla e_k dx\Big] - \int_\Omega \Big(|u_m|^{p-1}u_m + \lambda f(x)\Big)e_k dx \\ = &\quad M\big(\|u_m\|^2\big)\Big[\sum_{j=1}^{m} \xi_j \int_\Omega \nabla e_j \nabla e_k dx\Big] - \int_\Omega \Big(|u_m|^{p-1}u_m + \lambda f(x)\Big)e_k dx \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$F_k(u_m) = M\big(\|u_m\|^2\big)\xi_k - \int_\Omega \Big(|u_m|^{p-1}u_m + \lambda f(x)\Big)e_k dx = 0, \qquad (4.2)$$

por otro lado

$$\langle F(u_m), u_m\rangle = \sum_{k=1}^{m} F_k(u_m)\xi_k$$

entonces

$$\begin{aligned} \langle F(u_m), u_m\rangle &= \sum_{k=1}^{m}\left(M\big(\|u_m\|^2\big)\xi_k - \int_\Omega \big(|u_m|^{p-1}u_m + \lambda f(x)\big)e_k dx\right)\xi_k \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(M\big(\|u_m\|^2\big)\xi_k^2 - \int_\Omega |u_m|^{p-1}u_m \xi_k e_k dx - \lambda \int_\Omega f(x)\xi_k e_k dx\right) \\ &= M\big(\|u_m\|^2\big)\sum_{k=1}^{m}\xi_k^2 - \int_\Omega |u_m|^{p-1}u_m\Big(\sum_{k=1}^{m}\xi_k e_k\Big)dx - \lambda\int_\Omega f(x)\Big(\sum_{k=1}^{N}\xi_k e_k\Big)dx \end{aligned}$$

por la relación de isometría, tenemos:

$$\langle F(u_m), u_m \rangle = M\big(\|u_m\|^2\big)\|u_m\|^2 - \int_\Omega |u_m|^{p-1}u_m u_m dx - \lambda \int_\Omega f(x)u_m dx$$

entonces

$$\langle F(u_m), u_m \rangle = M\big(\|u_m\|^2\big)\|u_m\|^2 - \int_\Omega |u_m|^{p+1} dx - \lambda \int_\Omega f(x)u_m dx. \tag{4.3}$$

Usando (M_0) , (f_1) y la inmersión de Sobolev, obtenemos

$$\begin{aligned} M\big(\|u_m\|^2\big)\|u_m\|^2 &\geq m_0\|u_m\|^2 \\ \int_\Omega |u_m|^{p+1}dx &\leq C\|u_m\|^{p+1} \\ \lambda\int_\Omega f(x)u_m dx &\leq \lambda C|f|_2\|u_m\| \end{aligned}$$

luego

$$\langle\ F(u_m), u_m\ \rangle \geqslant m_0\|u_m\|^2 - C\|u_m\|^{p+1} - \lambda C|f|_2\|u_m\| \tag{4.4}$$

Para acotar (4.4) consideramos dos casos:

Caso 1. $0 < p < 1$.

$$\langle\ F(u_m), u_m\ \rangle \geqslant \|u\|^2\Big(m_0 - \underbrace{\frac{C}{\|u_m\|^{1-p}} - \frac{\lambda C|f|_2}{\|u_m\|}}_{h(\|u_m\|)}\Big) \tag{4.5}$$

Si $\|u_m\| \longrightarrow +\infty,\ \ h(\|u_m\|) \longrightarrow 0$, por lo que existe $R_0 > 0$ tal que si $\|u_m\| \geqslant R_0$ entonces $m_0 - h(\|u_m\|) > 0$, luego en (4.5)

$$\langle\ F(u_m), u_m\ \rangle > 0 \quad , \quad \forall \quad \|u_m\| = R_0 + 1$$

Caso 2. $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$.

$$\langle\ F(u_m), u_m\ \rangle \geqslant \|u_m\|\Big(m_0\|u_m\| - C\|u_m\|^p - \lambda C|f|_2\Big) \tag{4.6}$$

Hagamos $\rho = \|u_m\| \rightsquigarrow g(\rho) = m_0\rho - C\rho^p$

Pero

$$\begin{aligned} g(\rho) > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \rho(m_0 - C\rho^{p-1}) > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 < \rho < \sqrt[p-1]{\frac{m_0}{C}} \end{aligned}$$

Luego $g(\rho) - \lambda C|f|_2 > 0$ si y solo si

$$0 < \lambda < \frac{g(\rho)}{C|f|_2} \quad , \quad |f|_2 \neq 0$$

En consecuencia existe $\lambda_0 = \dfrac{g(\rho)}{C|f|_2}$, y $R_1 > 0$ tal que, si $0 < \lambda < \lambda_0$ entonces

$$\langle \ F(u_m), u_m \ \rangle > 0 \quad , \quad \forall \|u_m\| = R_1$$

En consecuencia, en ambos casos, existe $R = \text{mín}\{R_0, R_1\}$ tal que

$$\langle \ F(u_m), u_m \ \rangle > 0 \quad , \quad \forall \|u_m\| = R$$

Afirmación: $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es continua.

En efecto, bastará probar que

$$F_k(u_m) = M(\|u_m\|^2)\xi_k - \int_\Omega |u_m|^{p-1} u_m e_k dx - \lambda \int_\Omega f(x) e_k dx$$

es continua.

Sea $\xi \longrightarrow \xi_0$ en $\mathbb{R}^m$. Por simplicidad denotamos $u \equiv u_m$, $u_0 \equiv u_{0m}$.

Así

$$u = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k \quad , \quad u_0 = \sum_{k=1}^m \xi_{0k} e_k$$

De la isometría $\xi \longrightarrow \xi_0 \Longleftrightarrow \|u\|^2 \longrightarrow \|u_0\|^2$ y de la continuidad de M:

$$M(\|u\|^2) \longrightarrow M(\|u_0\|^2)$$

Además $\xi_k \longrightarrow \xi_{0k}$, luego del producto de límites

$$M(\|u\|^2)\xi_k \longrightarrow M(\|u_0\|^2)\xi_{0k}$$

No hay nada que hacer con el término $\lambda \int_\Omega f(x) e_k dx$, ya que no depende ξ.

Veamos la convergencia del término no lineal

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega |u|^{p-1} u e_k dx - \int_\Omega |u_0|^{p-1} u_0 e_k dx \Big| &\leqslant \int_\Omega \Big| |u|^{p-1}u - |u_0|^{p-1}u_0 \Big| |e_k| dx \\ &\leqslant C_p \int_\Omega \Big| u - u_0 \Big| \Big(|u| + |u_0| \Big)^{p-1} |e_k| dx \\ &\leqslant C_p(|u_0|, k) \Big| u - u_0 \Big|_2 \\ &\leqslant C_p\Big(|u_0|, |\Omega|, k \Big) \|u - u_0\| \longrightarrow 0 \\ &\quad \text{si} \quad \xi_k \longrightarrow \xi_{0k} \end{aligned}$$

En esta última expresión hemos aplicado la desigualdad

$$\Big||a|^p a - |b|^p b\Big| \leqslant C_p|a-b|\Big(|a|^p + |b|^p\Big) \quad , \quad \forall p \geqslant 0 \ , \ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad ,$$

la desigualdad de Holder y finalmente la inmersión $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Esto concluye la afirmación.

Habiendo verificado las condiciones de Lema del ángulo agudo (o de su corolario), se sigue que (P.A.) tiene una solución. Además existe $C > 0$ (independiente de m)

$$\|u_m\| \leqslant C \quad , \quad \forall m$$

Como $H_0^1(\Omega)$ es reflexivo, se sigue del teorema de Kakutani que existe una subsucesión de $(u_m)_{m\geqslant 1}$ que aún denotaremos con $(u_m)_{m\geqslant 1}$ que converge débilmente en $H_0^1(\Omega)$:

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega) \tag{4.7}$$

De la inmersión compacta $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{p+1}(\Omega)$ implicamos (la existencia de otra subsucesión que continuaremos denotando $(u_m)_{m\geqslant 1}$)

$$\begin{array}{rcl} u_m & \longrightarrow & u \quad \text{en} \quad L^{p+1}(\Omega) \\ u_m(x) & \longrightarrow & u(x) \quad \text{c.t.p} \quad x \in \Omega \\ |u_m(x)| & \leqslant & h(x) \quad \text{c.t.p} \quad x \in \Omega \\ & & \text{para algún} \quad h \in L^{p+1}(\Omega) \end{array} \tag{4.8}$$

Por otro lado es evidente que $(P.A.)$ es equivalente a

$$M(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m \nabla\varphi dx - \int_\Omega |u_m|^{p-1}u_m\varphi dx - \lambda\int_\Omega f(x)\varphi dx = 0 \quad \forall\varphi \in V_m \quad \cdots (PA)'$$

Además como $(\|u_m\|)_{m\geqslant 1}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, se implica, del Teorema de Bolzano-Weierstrass, la existencia de una subsucesión de $(\|u_m\|)_{m\geqslant 1}$, que aún denotaremos $(\|u_m\|)_{m\geqslant 1}$ que converge en $\mathbb{R}$, esto es

$$\|u_m\|^2 \longrightarrow \gamma \tag{4.9}$$

para algún $\gamma \geqslant 0$.

4.1. Pasaje al Límite

Sea $m_0 \in \mathbb{N}$ y $m \geqslant m_0$ en $(PA)'$:

$$\underbrace{M(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m \nabla\varphi dx}_{I_1} - \underbrace{\int_\Omega |u_m|^{p-1}u_m\varphi dx}_{I_2} - \underbrace{\lambda\int_\Omega f(x)\varphi dx}_{I_3} = 0 \quad \forall\varphi \in V_{m_0} \quad \cdots (PA)''$$

Para I_1:

De la continuidad de M y (4.9):

$$M(\|u_m\|^2) \longrightarrow M(\gamma) \tag{4.10}$$

De (4.7) y viendo que

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad , \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

define un producto escalar en $H_0^1(\Omega)$, resulta

$$a(u_n, v) \longrightarrow a(u,v) \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En particular para $v = \varphi \in V_{m_0} \subseteq H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx \quad , \quad \forall\varphi \in V_{m_0} \quad , \quad \text{si } m \longrightarrow +\infty \tag{4.11}$$

De (4.10) y (4.11) y de la convergencia del producto de sucesiones reales

$$I_1 \longrightarrow M(\gamma)\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx, \quad \forall\varphi \in V_{m_0} \quad , \quad \text{si } m \longrightarrow +\infty \tag{4.12}$$

Para I_2:

De la segunda ecuación de (4.8):

$$|u_m(x)|^{p-1}u_m(x)\varphi(x) \longrightarrow |u(x)|^{p-1}u(x)\varphi(x) \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega$$

También de la tercera ecuación de (4.8):

$$\Big||u_m|^{p-1}u\varphi\Big| \leqslant |u_m|^p|\varphi| \leqslant h^p\varphi \in L^1(\Omega)$$

Así, del teorema de convergencia dominada

$$\int_\Omega |u_m|^{p-1}u_m\varphi dx \longrightarrow \int_\Omega |u|^{p-1}u\varphi dx \qquad \forall\varphi \in V_{m_0} \tag{4.13}$$

Para I_3**:** Trivialmente

$$I_3 \longrightarrow \lambda \int_\Omega f\varphi dx, \quad \forall\varphi \in V_{m_0} \tag{4.14}$$

(ya que el integrando no depende de la " variable" m)

En consecuencia de $(PA)''$, (4.12)-(4.14)

$$0 = I_1 - I_2 - I_3 \longrightarrow M(\gamma)\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx - \int_\Omega |u|^{p-1}u\varphi dx - \lambda\int_\Omega f\varphi dx \quad , \quad \forall\varphi \in V_{m_0}$$

Esto es:

$$M(\gamma)\int_\Omega \nabla u \nabla\varphi dx = \int_\Omega |u|^{p-1}u\varphi dx + \lambda\int_\Omega f\varphi dx \quad , \quad \forall\varphi \in V_{m_0} \tag{4.15}$$

Ahora como m_0 es arbitrario, la anterior igualdad vale para toda $\varphi \in \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$, y como

$$\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} V_m} = H_0^1(\Omega) \ ,$$

implicaremos de (4.15) por densidad y continuidad que(4.15) es válido $\forall\varphi \in H_0^1(\Omega)$, que llamaremos " nueva ecuación" .

En particular tomando $\varphi = u$ en la nueva ecuación

$$M(\gamma)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_\Omega |u|^{p+1}dx + \lambda\int_\Omega f u dx \tag{4.16}$$

Ahora en la ecuación $(PA)'$, hacemos $\varphi = u_m$

$$M(\|u_m\|^2)\int_\Omega |\nabla u_m|^2 dx = \int_\Omega |u_m|^{p+1}dx + \lambda\int_\Omega f u_m dx \tag{4.17}$$

Procediendo como en la prueba de los anteriores convergencias, Fácilmente verificamos en el límite cuando $m \longrightarrow \infty$ En la anterior ecuación

$$M(\gamma)\gamma = \int_\Omega |u|^{p+1}dx + \lambda\int_\Omega f u dx \tag{4.18}$$

De (4.16) y (4.18), y viendo que $M(\gamma) \neq 0$ resulta

$$\gamma = \|u\|^2$$

Afirmación: $\gamma > 0$.

En efecto, si fuera $\gamma = 0$ entonces $\|u_m\| \longrightarrow 0$ y si $|u_m|_{p+1} \longrightarrow 0$ (pues $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$). Luego de $(PA)''$

$$0 = \lambda\int_\Omega f(x)\varphi dx \quad , \quad \forall\varphi \in V_{m_0}$$

y por tanto

$$0 = \lambda \int_\Omega f(x)\varphi dx \quad , \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

Como $\lambda > 0$, resulta $f = 0$, lo que contradice la hipótesis.

Luego de (4.15)) (en la “nueva ecuación”)

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega |u|^{p-1}u\varphi dx + \lambda \int_\Omega f\varphi dx \quad , \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.19}$$

lo que muestra que u es solución débil no trivial del problema (P).

Observación:

Los mismos resultados, con el mismo método son válidos para $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Consideremos el caso $f = 0$

Teorema 23. (Unicidad de la solución):
Asumamos que $0 < p < 1$ *ó* $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$, *si* $N \geqslant 3$ *y* $1 < p < +\infty$ *si* $N = 1, 2$. *Entonces el problema*

$$\left| \begin{array}{rcl} -M(\| u \|^2)\Delta u &=& |u|^{1-p}u \quad en \quad \Omega, \\ \\ u &=& 0, \quad en \quad \Gamma. \end{array} \right. \tag{4.20}$$

tiene al menos una solución positiva como tiene la ecuación

$$M(t)t^{\frac{1-p}{2}} = \| w \|^{p-1}, \tag{4.21}$$

(Con respecto a $t > 0$*) donde* w *es una solución positiva de*

$$\left| \begin{array}{rcl} -\Delta w &=& |w|^{p-1}w \quad en \quad \Omega, \\ \\ w &=& 0, \quad en \quad \Gamma, \end{array} \right. \tag{4.22}$$

Demostración:

Sea t una solución de (4.21) , con $w \in H_0^1(\Omega)$ una solución positiva de (4.22).

Hagamos $\gamma = t^{1/2}\| w \|^{p-1}$, entonces

$$M(\| \gamma u \|^2) = M(t) = \gamma^{p-1}$$

Luego, tomando $u = \gamma w$, en esta ecuación

$$\begin{aligned} -M(\| \gamma u \|^2)\Delta u &= -M(\| \gamma u \|^2)\gamma \Delta w \\ &= -\gamma^{p-1}\gamma\Delta w \\ &= (\gamma w)^p = |u|^{p-1}u \end{aligned}$$

Por lo tanto u es solución de (4.20).

Corolario 1. *Asumamos que se satisface* (M_0) *y las hipótesis del teorema 23. Entonces, si:*

(i) $0 < p < 1 \quad y \quad \lim_{t\to+\infty} M(t)t^{\frac{1-p}{2}} = +\infty$

(ii) $1 < p \quad y \quad \lim_{t\to+\infty} M(t)t^{\frac{1-p}{2}} = 0$

El problema (4.20) tiene al menos una solución positiva.

Demostración:

Bastará ver que (4.21) tiene una solución.

Sea $0 < p < 1$. Se tiene

$$\lim_{t\to 0^+} M(t)t^{\frac{1-p}{2}} = 0$$

y por hipótesis $\lim_{t\to+\infty} M(t)t^{\frac{1-p}{2}} = +\infty$.

Luego el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe $t > 0$ tal que (4.21) se cumple.

En el caso (ii):

$$\lim_{t\to 0^+} M(t)t^{\frac{1-p}{2}} = +\infty$$

y por hipótesis $\lim_{t\to+\infty} M(t)t^{\frac{1-p}{2}} = 0$.

Similar a (i), (4.21) se verifica. Ahora consideremos el problema

$$(P') \quad \left| \begin{array}{rcll} -M(\|u\|^2)\Delta u &=& u + \lambda f(x), & \text{en} \quad \Omega, \\ u &=& 0, & \text{en} \quad \Gamma. \end{array} \right.$$

Teorema 24. *Asumamos que se satisfacen* (M_0), (f_1) *y* $m_0 > \lambda_1^{-1}$ *donde* λ_1 *es el autovalor principal de* $-\Delta$ *en* $H_0^1(\Omega)$. *Adicionalmente, supongamos que* M *es Lipschitziana en* $[0, R_1^2]$, *donde*

$$R_1 = \frac{\lambda |f|_2}{(m_0 - \lambda_1^{-1})\lambda_1^{1/2}}.$$

Entonces, si la constante de Lipschitz L_M *de* M, *es "suficientemente pequeña" el problema* (P') *admite una única solución.*

Observación *Para obtener* R_1 *en (4.19) hacemos* $\varphi = u \in H_1^1(\Omega)$; *usando* (M_0) *obtenemos*

$$m_0\|u\|^2 \leqslant \lambda_1^{-1}\|u\|^2 + \frac{\lambda}{\lambda_1^{1/2}}|f|_2\|u\|$$

y obtenemos

$$\| u \| \leqslant \frac{\lambda|f|_2}{(m_0 - \lambda_1^{-1})\lambda_1^{1/2}} \equiv R_1$$

Demostración:

La existencia se prueba similarmente al teorema (1). Resta probar la unicidad.

Sean u, v dos soluciones de (P'). Hagamos $w = u - v$.

Luego:

$$-M(\|u\|^2)\Delta w - [M(\|u\|^2) - M(\|v\|^2)\Delta v = u - v$$

Ahora , multiplicando la anterior ecuación por un integrando en Ω aplicando el teorema de Green, resulta

$$M(\|u\|^2)\,\|w\|^2 = -\left[M(\|u\|)^2 - M(\|v\|)^2\right]\int_\Omega \nabla v.\nabla w dx + \int_\Omega |u-v|^2 dx \tag{4.23}$$

Pero:

$$\begin{aligned}
\left|-\left[M(\|u\|^2) - M(\|v\|^2)\right]\int_\Omega \nabla v.\nabla w dx\right| &\leq L_M \left|\|u\|^2 - \|v\|^2\right| \|v\|\|w\| \\
&\leq L_M\|u-v\|(\|u\| + \|v\|)\|v\|\|w\| \\
&\leq 2R_1^2 L_M \|w\|^2
\end{aligned}$$

También

$$\int_\Omega |u-v|^2\, dx = |w|_2^2 \leq \lambda_1^{-1}\|w\|^2$$

De estas dos últimas desigualdades y (4.23) se obtiene:

$$\left[\left(m_0 - \lambda_1^{-1}\right) - 2R_1^2 L_M\right]\|w\|^2 \leq 0$$

Por lo que seleccionando L_M “suficientemente pequeño” (esto es $0 < L_M \leq \frac{m_0 - \lambda_1^{-1}}{2R_1^2}$) se obtiene

$$\|w\| = 0$$

esto es

$$u = v.$$

5 Método Numérico

5.1. Análisis Numérico de un Modelo de Kirchhoff

Antes de abordar la solución numérica de nuestro problema, vía el método de elementos finitos (MEF) haremos unos comentarios preliminares. Como es sabido , el MEF es un método numérico para resolver problemas en ciencia e ingenieria. Usualmente estos problemas son descritos por ecuaciones diferenciales, (ordinarias , parciales o integrodiferenciales), por lo que el MEF nos permite resolver aproximadamente estas ecuaciones.

En el capitulo anterior implementamos el método de Galerkin para resolver (P). Así nos aproximamos a la solución mediante la definición de problemas similares (al original) discretos sobre subespacios de dimensión finita V_h (para adoptar la notación usual de los textos de elementos finitos) del espacio V, y luego realizar adecuadamente el pasaje al limite para probar la existencia de la solución.

El MEF en su forma más simple es el método de Galerkin, caracterizado por tres aspectos básicos.

(1) Se establece una triangulación τ_h (la aplicación) de $\overline{\Omega}$, es decir $\overline{\Omega}$ es expresado como la unión finita de " elementos finitos" k de τ_h.

(2) Se define funciones v_h de V_h, que son polinomios por trozos, en el sentido de que para cada $k \in \tau_h$ los espacios $P_k = \{v_h \,|_k\colon v_h \in V_h\}$ consisten de polinomios.

(3) Es posible construir una base en el subespacio V_h cuyas funciones tienen " Soportes pequeños".

Este procedimiento da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas, en general no lineal, con un número elevado de incógnitas, que debe resolverse con técnicas numéricas computacionales.

Ahora, implementaremos el MEF para el problema

$$\begin{aligned} -M(\int_{\Omega} \mid \nabla u \mid^2 dx)\Delta u &= u \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{aligned}$$

donde Ω es un abierto, acotado , bien regular de $\mathbb{R}^2$, con frontera Γ y

$$M(s) = a + bs \geq 0, s \geq 0, a, b > 0$$

Definimos

$$\rho(u) = -M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx)a(u, v) + \langle u, v \rangle, \forall v \in V_0$$

donde $V_0 = \{u \in H^1(\Omega) : u \mid_{\Gamma} = 0\}$, la forma bilineal

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v dx, \forall u, v \in V_0$$

que es acotada y V_0-coersiva y el producto

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \quad , \quad u, v \in L^2(\Omega)$$

Ahora subdividimos a Ω en un número finito de elementos, que denotamos K^h y sea

$$Z_h = \{x_j, j = 1, 2, ..., m\}$$

el conjunto de todos los nodos interiores. El subespacio de elemento finito , será denotado $V_h \subseteq V_0$, y $\{\phi_j(x); , j = 1, 2, .., m\}$ será la base de V_h. Asi cualquier $u_h \in V_h$ se expresa como

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \phi_j(x)$$

con $\xi_j = u_h(x_j)$ y satisface la ecuación

$$J(u, v) = -M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2)dx \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx \quad , \quad \forall v \in V_h \tag{5.1}$$

En particular para $v = \phi_i, i = 1, 2, ..., m$ resulta

$$-M(\int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 \, dx) \sum_{j=1}^{m} a(\phi_i, \phi_j)\xi_j - \sum_{j=1}^{m} \xi_j(\phi_i, \phi_j) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, ..., m \tag{5.2}$$

que es un sistema de "m" ecuaciones no lineales, con "m" incognitas , que puede ser resuelto por el método iterativo de Gauss -Newton. Asumamos que tenemos una solución inicial $u^{(m)}$. Si $u^{(m)}$ está suficientemente cercana a la solución exacta una mejor aproximación $u^{(m+1)}$ es obtenida resolviendo el problema linealizado.

En la ecuación (5.2) , usamos el método de Gauss-Newton [18], para linealizar el problema , como sigue

$$\frac{\partial}{\partial u}\rho(u^{(n)})\left(u^{(n+1)} - u^{(n)}\right) = \alpha\rho(u^{(n)}) \tag{5.3}$$

siendo $\alpha > 0$, suficientemente pequeño.

Para este α , se obtiene la acotación

$$\left|\rho\left(u^{(n+1)}\right)\right|_2 < \left|\rho\left(u^{(n)}\right)\right|_2$$

y $p_n = \left(\frac{\partial}{\partial u}\rho(u^{(n)})\right)^{-1}\rho(u^{(n)})$ es llamado una dirección descendiente para $|\rho\,(u)|_2$

La iteración es

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \alpha p_n$$

desde $\alpha \leq 1$ se elige de modo tal que el paso hecho tiene una dirección descendente razonable.

Queremos resolver (5.1) en el método iterativo de Newton-Raphson, comenzando con algún $u^{(0)}$ en cada paso de iteración.

Computamos la diferencia

$$u^{(n)} - u^{(n+1)} \equiv u^n - u^{n+1} \in H_0^1(\Omega)$$

que satisface

$$DJ\left(u^n, v, u^n - u^{n+1}\right) = J(u^n, v) \quad , \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{5.4}$$

$$DJ(u, v; w) = -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)\int_\Omega \nabla v \nabla w dx + \int_\Omega vwdx = 0 \tag{5.5}$$

Ahora, usando (5.1) y (5.4) en (5.3) resulta

$$-M(\int_\Omega |\nabla u^n|^2\, dx)\int_\Omega \nabla v \nabla(u^n - u^{n+1})dx + \int_\Omega v(u^n - u^{n+1})dx =$$

$$-M(\int_\Omega |\nabla u^n|^2\, dx)\int_\Omega \nabla u^m.\nabla v dx + \int_\Omega u^n v dx$$

Al resolver la anterior ecuación tenemos

$$-M(\int_\Omega |\nabla u^n|^2\, dx)\int_\Omega \nabla v.\nabla u^{n+1}dx - \int_\Omega v u^{n+1}dx = 0$$

Esto es

$$-M(\int_\Omega \left\{ (\frac{\partial u^n}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial u^n}{\partial x_2})^2 \right\} dx_1 dx_2) \int_\Omega \nabla v.\nabla u^{n+1} dx - \int_\Omega v u^{n+1} dx = 0$$

El factor multiplicativo $M(\cdot)$ es resuelto usando la ecuación:

$$-M(\int_\Omega \left\{ \left(\frac{u^n_{i+1,J} - u^n_{i,J}}{\Delta x_1} \right)^2 + \left(\frac{u^n_{i,J+1} - u^n_{i,J}}{\Delta x_2} \right)^2 \right\} dx_1, dx_2 \times \int_\Omega \nabla v \nabla u^{n+1} dx - \int_\Omega v u^{n+1} dx = 0 \tag{5.6}$$

De la ecuación anterior resolvemos el factor multiplicativo $M(.)$ por medio de la fórmula de diferencia directa, y usamos el algoritmo iterativo de escala [15] para resolver el término cuasilineal específico para $M(s) = a + bs$.

El algoritmo de elementos finitos descrito ha sido tomado de [16].

6 Conclusiones:

Hemos investigado la existencia de soluciones débiles del problema

$$\left|\begin{array}{rcl} -M(\| u \|^2)\Delta u & = & |u|^{p-1}u + \lambda f(x), \quad \text{en} \quad \Omega, \\ \\ u & = & 0, \quad \text{en} \quad \Gamma. \end{array}\right.$$

Bajo condiciones adecuadas, sobre M, p, λ y sobre f, que es de signo cambiante.

Concluimos de nuestro trabajo que el método de Galerkin permite estudiar la existencia de dichas soluciones, para $0 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$, $N > 2$, pero no caracteriza la naturaleza positiva o negativa de ellas. Para el caso $p = 1$, imponiendo adicionalmente una condición de Lipschitzianidad local, aportamos una prueba de unicidad de la solución. También hemos conseguido probar que imponiendo la condición de no negatividad de f, nuestro problema, admite soluciones no negativas; sin embargo, esto no es suficiente.

Resultados complementarios [11], obtenidos con el método de super-subsoluciones, ayudan a mejorar la situación imponiendo condiciones de monotonía sobre M y $H(t) = tM(t^2)$, para λ " suficientemente pequeño" y así obtener al menos una solución positiva, cuando f cambia de signo. Este estudio no ha sido realizado aqui, por no ser el objetivo del presente trabajo.

Finalmente, el método de Galerkin nos ha facilitado el desarrollo de un algoritmo de aproximación numérica básico e ilustrativo, que consideramos sentará las bases para mayores investigaciones.

Bibliografía

[1] Robert A. Adams, John J. F. Fournier.,“Sobolev Spaces”. Elsevier., Vancouver, August 2002.

[2] Alves, C. O. and Corrêa, F. J. S. A.,“On existence of solutions for a class of problem involving a nonlinear operator”. Comm. Appl. Nonlinear Anal., 8 (2001),43−56.

[3] Brézis, Haim.,“Análisis Funcional Teoría y aplicaciones”. Versión española de Juan Ramón Esteban. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[4] Corrêa, F. J. S. A. and Menezes, S. D. B., “Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via Galerkin method”. Electron. J. Diferential Equations, 2004, N°19,10pp.

[5] Dai, Q. and Gu, Y.,“Positive solutions for non-homogeneous semilinear elliptic equations with data that changes sign”. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A., 133 (2003),297−306.

[6] M. Chipot, and B. Lovat, “Some Remarks on Nonlocal Elliptic and Parabolic Problems,.”Nonlinear Anal.,T.M.A.vol.30.,4619−4627.

[7] M. Chipot,and J.F. Rodrigues, “On a Class of Nonlocal Nonlinear Problems”. RAIRO Modelisation Math. Anal. Num. Vol 26.,447−467,(1997).

[8] Gatica, Gabriel.,“Introducción al Análisis Funcional: teoría y Aplicaciones”. Editorial Reverté., España(2014)

[9] Botelho,G., Pellegrino,D.,and Texeira, E.,“Fundamentos de Análise Funcional”. Textos Universitarios. SBM. 2° edicao (2015)

[10] Corrêa F.J.S.A, Ferreira J., Menezes S.D.B, “On a class of problems involving a nonlocal operator”. App. Math comp 147 (2004). 475−489.

[11] Azzouz, and Bensedik. “Existence Results for an Elliptict Equation of Kirchhoff Type with Changing Sign Data”. Funkcialaj Ekvacioj., 55(2012),55−66.

[12] Dai Q., Yang J.,"Positive solutions of inhomogeneous elliptic equations with indefnite data". Nonlin. Anal. 58 (2004) 571−589.

[13] Yu Q. Y., Ma T., "Positive solutions and bifurcation of nonlinear elliptic equations involving supercritical Sobolev exponents". Chinese J. Math. 22 (1994) 99−109.

[14] Cazenave., "An introduction to semilinear elliptic equations". Sorbonne Universite CNRS,Laboratoire Jacques-Louis Lions ,Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2018.

[15] Chen G, Zhou J. "Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations". Int J Bifurcat Chaos, 2000;10(7):1565−612.

[16] Kumar M., Kumar P. "Computational method for finding various solutions for a Quasilinear Elliptic Equation of Kirchhoff type". Advances in Engineering Software 40 (2009) 1104−1111.

[17] Nakashima, Ni W, Su L. "An indefinite nonlinear diffusion problem in population genetics, I: Existence and limiting profiles, discrete and continuous dynamical systems".Vol. 27, N° 2, (2010) 617−641.

[18] Mittelmann Hans Detlef."On the efficient solution of nonlinear finite element equations I". Numer Math 1980,35: 277−291.

[19] Pohozaev S.J., "On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$". (Russian) Dokl.Akad. Nauk SSSR 165 (1965), 36−39.

[20] Tarantello, G., "On homogenens elliptic equations involving critical Sobolev exponent ". Annales de l I. H. P., section C, tome 9, N° 3 (1992), 281−304.

[21] López - Gomez J., Molina M,. "Intricate dynamics caused by facilitation in competitive environments within polluted habitat patches". European J. App. Math. Vol 25, N° 2 ,(2014) , 213−229.

[22] Kirchhoff, G., "Mechanik, Teubner". Leipzig, 1883.

[23] Lions, J. L., "On some questions in boundary value problems of mathematical physics, North-Holland Math". Stud., 30, Amsterdam, 1978, pp.284−346.

[24] Lions, J. L., "Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non lineéaires". Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[25] Asplund E., Bungard L,. "A First course in Integration "., Holt,Rinehart and Winston, Inc.,United States of America. 1966.

[26] Kesavan,I.,"Topics in Functional Analysis and applications". John Wiley & Sons (1989)

[27] De Figueiredo, D.G, "Equações Elípticas não lineares", 11° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Poços de Caldas (1977).

[28] Gatica, Massiel., "Espacios de funciones: una introducción a los espacios de Sobolev". Tesis(2011).

Apéndice A

Resultados utilizados

En este apéndice enunciaremos los principales resultados utilizados durante las demostraciones en este trabajo.

Teorema (A.1)(Lax-Milgram) Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal verificando:

(i) $a(\cdot,\cdot)$ es continua, esto es, existe $M > 0$ tal que

$$|a(u,v)| \leq M \|u\| \|v\|, \quad \forall \; u, v \in H;$$

(ii) $a(\cdot,\cdot)$ es coercivo, osea, existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \forall \; u \in H;$$

Sea $T : H \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo, existe un único $u \in H$ satisfaciendo:

$$a(u,v) = T(v), \quad \forall \; v \in H.$$

Teorema (A.2)(Principio del Máximo Fuerte) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u \leq 0$ $(\Delta u \geq 0)$ en Ω y suponga que existe un punto $y \in \Omega$ tal que $u(y) = \sup\limits_{\partial\Omega} u \left(\inf\limits_{\partial\Omega} u\right)$. Entonces, u es constante.

Teorema (A.3)(Principio del Máximo Débil) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u \leq 0$ $(\Delta u \geq 0)$ en Ω. Entonces

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u \left(\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u\right).$$

Definición (A.1) Sea H un espacio de Hilbert y $K \subset H$ un conjunto cerrado convexo. Sea $x \in H$. Entonces existe un único $y \in K$ tal que

$$\|x - y\| = \min_{z \in K} \|x - z\|.$$

Así mismo, y puede ser caracterizado por

$$y \in K; \quad \langle x-y, z-y\rangle \leq 0\,, \quad \forall\ z \in K.$$

Teorema (A.4) Sea H un espacio de Hilbert y $K \subset H$ un conjunto cerrado convexo. Sea $P_k : H \to K$ una aplicación $x \longmapsto y$ de acuerdo con la definición (A.1). Entonces para x_1, $x_2 \in H$, tenemos

$$\|P_k x_1 - P_k x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Teorema (A.5)(Desigualdad de Poincaré) Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe una constante $C = C(\Omega, p) > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Teorema (A.6) Sea E un espacio de Banach reflexivo y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en E. Entonces existe una subsucesión $\left(x_{n_j}\right)_{n_j\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con

$$x_{n_j} \rightharpoonup x \quad \text{en} \quad E.$$

Teorema (A.7) Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(\Omega)$ y $f \in L^p(\Omega)$ tal que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_{n_k\in\mathbb{N}} \subseteq (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:

(i) $f_{n_k} \to f(x)$ c.t.p en Ω.

(ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ c.t.p en Ω, para todo k, con $h \in L^p(\Omega)$.

Teorema (A.8) Sea L un operador Elíptico estricto en Ω con $a^{ij} \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$, $b^i, c^i \in L^\infty(\Omega)$. Si $\partial\Omega \in C^{k+2}$ y existe $\varphi \in W^{k+2,2}(\Omega)$ con $u - \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Entonces $u \in W^{k+2,2}(\Omega)$ y:

$$\|u\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} \leq C\Big(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{W^{k+2,2}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W^{k+2,2}(\Omega)}\Big).$$

Teorema (A.9) Sea H un espacio de Banach $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$. Entonces valen:

(i) $u_n \rightharpoonup u$ en H si, y solamente si, $F(u_n) \to F(u)\,, \quad \forall\ F \in H'$.

(ii) Si $u_n \rightharpoonup u$ en H, entonces $\|u\| \leq \liminf \|u_n\|$.

Teorema (A.10) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo. Para toda sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$, con

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad X$$
$$\limsup \|u_n\| \leq \|u\|.$$

Se sigue que

$$u_n \to u \quad \text{en} \quad X.$$

Teorema (A.11)(Teorema de la Divergencia) Sea Ω un dominio acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una Hiperficie de clase C^1 y ν es el vector unitario normal a $\partial\Omega$. Para cualquier función $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $F \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ tenemos que:

$$\int_\Omega div\, F\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle\, dS.$$

Teorema (A.12)(Teorema de Kakutani) Sea X un espacio de Banach. Entonces X es reflexivo si y sólo si $\overline{B}_X(0,1)$ es compacta respecto a la topología $\sigma(X, X')$.

Teorema (A.13)(Teorema del Paso a la montaña, Ambrosettti y Rabinowitz) Sea X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1 si Φ satisface (PS), es decir:

- Para toda sucesión (u_n) en X tal que, si $\Big(\Phi(u_n)\Big)$ es acotada y $\Phi'(u_n) \to 0$, ésta admite una subsucesión convergente.

  Y si además Φ tiene geometría de montaña, es decir

- Existen $r > 0$ y $\rho > 0$ tal que

  $$\rho = \inf_{u\in S_r(0)} \Phi(u)$$

  $\Phi(u_0) < \rho$ y $\Phi(0) < \rho$ para algún $u_0 \in X$ con $\|u_0\| > r$.

entonces, Φ tiene un valor crítico $c \geq \rho$ con

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\gamma} \Phi(u)$$

donde Γ denota el conjunto de todos los caminos γ que unen a 0 con u_0.

Teorema (A.14)(Teorema del ángulo agudo) Sea $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una aplicación continua, si existe $R > 0$ tal que

$$\langle F(\xi), \xi \rangle \geq 0, \ \forall |\xi| = R,$$

entonces, existe $\xi_0 \in \overline{B(0, R)}$ tal que $F(\xi_0) = 0$.