



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

**Facultad de Ciencias Matemáticas**

**Escuela Profesional de Matemática**

**Solución fundamental de la ecuación del calor y una  
estimación inferior**

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

**AUTOR**

Ruby Jenny LETONA LIMA

**ASESOR**

Dr. Omar Stevenson GUZMÁN REA

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Letona, R. (2021). *Solución fundamental de la ecuación del calor y una estimación inferior*. [Tesis pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---

## Metadatos complementarios

<b>Datos de autor</b>	
Nombres y apellidos	Ruby Jenny Letona Lima
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	47555205
URL de ORCID	<a href="https://orcid.org/0000-0003-3790-1198">https://orcid.org/0000-0003-3790-1198</a>
<b>Datos de asesor</b>	
Nombres y apellidos	Omar Stevenson Guzmán Rea
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	44528250
URL de ORCID	<a href="https://orcid.org/0000-0003-2951-2643">https://orcid.org/0000-0003-2951-2643</a>
<b>Datos del jurado</b>	
<b>Presidente del jurado</b>	
Nombres y apellidos	Gavino Aymituma Puma
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08025924
<b>Miembro del jurado 1</b>	
Nombres y apellidos	Félix Gregorio Pariona Vilca
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	07366081
<b>Miembro del jurado 2</b>	
Nombres y apellidos	Omar Stevenson Guzmán Rea
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	44528250
<b>Datos de investigación</b>	

Línea de investigación	No aplica.
Grupo de investigación	No aplica.
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento.
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.060287 Longitud: -77.082086
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Julio 2021 - octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras <a href="https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01">https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01</a>



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú. Decana de América  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA  
OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN  
MATEMÁTICA  
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)**

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:45 horas del domingo 24 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Mg. Gavino Aymituma Puma (PRESIDENTE), Mg. Félix Gregorio Pariona Vilca (MIEMBRO) y el Dr. Omar Stevenson Guzmán Rea (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: **“SOLUCIÓN FUNDAMENTAL DE LA ECUACIÓN DEL CALOR Y UNA ESTIMACIÓN INFERIOR”**, presentado por la señorita **Bachiller Ruby Jenny Letona Lima**, para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, la expositora mereció la aprobación **sobresaliente**, con un calificativo promedio de dieciocho (18).

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que la participante **Bachiller Ruby Jenny Letona Lima** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Siendo las 11:15 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Gavino Aymituma Puma  
PRESIDENTE

Mg. Félix Gregorio Pariona Vilca  
MIEMBRO

Dr. Omar Stevenson Guzmán Rea  
MIEMBRO ASESOR

# **SOLUCIÓN FUNDAMENTAL DE LA ECUACIÓN DEL CALOR Y UNA ESTIMACIÓN INFERIOR**

Por

Ruby Jenny Letona Lima

Tesis sometida al Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos - UNMSM, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Licenciada en Matemática.

Aprobado por:

.....  
Mg. Gavino Aymituma Puma

Presidente del Jurado Evaluador de Tesis

.....  
Lic. Feliz Gregorio Pariona Vilca

Miembro del Jurado Evaluador de Tesis

.....  
Dr. Omar Stevenson Guzmán Rea

Miembro Asesor de Tesis

LIMA, PERÚ

2021

## FICHA CATALOGRÁFICA

Ruby Jenny Letona Lima

Solución Fundamental de la Ecuación del Calor y Una Estimación Inferior, (Lima) 2021

VIII.,53p.,29.7cm (UNMSM, Título, Matemática 2021) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas

1. Matemáticas, UNMSM/FCM II. Título (Series).

## DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a mis padres y esposo que me apoyaron a seguir adelante y luchar por mis objetivos en los momentos más difíciles de mi vida.

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco a Dios por estar presente en mi vida y ser el apoyo en los momentos más difíciles.

A mi padre Digno Letona que, aunque ya no se encuentra en vida siempre fue mi mayor inspiración.

A mi madre que siempre está presente.

A mi esposo e hija que son mi mayor soporte a seguir adelante y crecer profesionalmente.

A mi asesor Dr. Omar Guzmán por la paciencia y todo el tiempo dedicado a la orientación para el desarrollo de este trabajo.

A mis maestros de pregrado por sus enseñanzas y conocimientos compartidos.

A mis amigos que siempre me apoyan.

# RESUMEN

Solución Fundamental de la Ecuación del Calor y Una Estimación Inferior.

Ruby Jenny, Letona Lima

Setiembre – 2021

**Asesor** : Dr. Omar Stevenson Guzmán Rea

**Título obtenido** : Licenciada en Matemáticas

---

En el presente trabajo de tesis, estudiaremos la siguiente ecuación parabólica homogénea.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0,$$

Específicamente encontraremos la solución fundamental y también estudiaremos el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \mathbb{R}^n \times (t = 0) \end{cases}$$

Además, se encontrará una estimación inferior de la solución fundamental en convolución con la función característica definida en una vecindad del cero.

**Palabras claves:** Ecuación del calor, Problema de Valor inicial, Solución Fundamental

# ABSTRACT

## Fundamental Solution of the Heat Equation and a Lower Estimate.

Letona, Ruby

Setiembre – 2021

**Adviser** : Dr. Omar Guzmán Rea

**Obtained title** : Graduate In Mathematics

---

In this thesis work, we will study the following homogeneous parabolic equation.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0,$$

Specifically we will find the fundamental solution and we will also study the following initial value problem:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \mathbb{R}^n \times (t = 0) \end{cases}$$

Furthermore, a lower estimate of the fundamental solution will be found in convolution with the characteristic function defined in a neighborhood of zero. with the characteristic function defined in a neighborhood of zero.

**Keywords:** Heat equation, Initial Value Problem, Fundamental Solution.

# INDICE GENERAL

<b>1. Introducción.....</b>	<b>9</b>
1.1. Introducción .....	9
1.2. Planteamiento del problema .....	10
1.3. Objetivos de la investigación.....	11
1.4. Justificación .....	12
1.5. Importancia .....	12
<b>2. Marco teórico .....</b>	<b>13</b>
2.1. Antecedentes del estudio .....	13
2.2. Preliminares .....	14
2.2.1. Volumen de Bola .....	17
2.2.2. Soporte .....	17
2.2.3. Espacios $L^p$ .....	18
<b>3. Variables e Hipótesis .....</b>	<b>21</b>
3.1 Variables de la investigación .....	21
3.2 Operacionalización de variables.....	21
3.3 Hipótesis general.....	21
3.4 Hipótesis específicas .....	22
<b>4. Metodología .....</b>	<b>23</b>
4.1 Tipo de Investigación.....	23
4.2 Tipo de Investigación.....	23
4.3 Población de muestra.....	23
4.4 Técnicas e instrumentos de recolección. ....	23
4.5 Plan de análisis estadístico de datos.....	23
<b>5. Resultados .....</b>	<b>24</b>
5.1. La ecuación del calor .....	24
5.1.1. Solución fundamental .....	24

5.2	Problema de Valor inicial .....	35
5.3	Una estimación inferior.....	40
<b>6.</b>	<b>Discusión de resultados .....</b>	<b>49</b>
6.1	Contrastación de hipótesis con los resultados.....	49
<b>7.</b>	<b>Conclusiones .....</b>	<b>50</b>
<b>8.</b>	<b>Sugerencias.....</b>	<b>51</b>
<b>9.</b>	<b>Bibliografía. ....</b>	<b>52</b>

# 1. Introducción

## 1.1. Introducción

Las ecuaciones parabólicas, representadas por la ecuación del calor, es un modelo clásico de las Ecuaciones Diferenciales Parciales de evolución. La ecuación del calor permite describir fenómenos altamente irreversibles en tiempo en los que la información se propaga a velocidad infinita.

El operador laplaciano se distingue por sus ámbitos de aplicación, es habitual en la dinámica de fluidos (a través de una versión más sofisticada, el operador de Stokes) o en fenómenos de difusión (del calor, de contaminantes, por mencionar algunos).

En el camino de realizar un estudio cualitativo de la ecuación del calor, una de las grandes ventajas es el mostrar la existencia de una solución fundamental, ya que esto nos abre paso a nuevos enfoques y más generales. Además, que permite representar, por medio de la solución fundamental, la solución de la ecuación de calor para cualquier no linealidad, por medio de la variación de parámetros y utilizando herramientas básicas del análisis matemático, se llegan a resultados de existencia de soluciones, con condiciones iniciales en espacios apropiados.

Además, presentaremos una estimación inferior de la solución fundamental del calor en convolución con la función característica definida en una vecindad del cero. Esta estimación es importante dentro del estudio de las ecuaciones parabólicas, ya que permite mostrar resultados de no existencia de soluciones (entendemos por solución a la formulación integral de la ecuación del calor vía variación de parámetros), como utilizaron en [8] y en [4].

En este trabajo enunciaremos resultados esenciales para nuestros objetivos, encontraremos la solución fundamental para la ecuación homogénea del calor y aplicaremos este concepto para encontrar solución para un problema de valor inicial, también mostraremos las propiedades de la solución del problema de valor inicial, y finalmente, mostraremos la estimación inferior, usando herramientas básicas del cálculo.

## **1.2. Planteamiento del problema**

### **1.2.1 Determinación del problema.**

En las últimas décadas el estudio de ecuaciones diferenciales (ordinarias y parciales) se ha desarrollado de manera significativa y se ha logrado avanzar en áreas que están ligadas como la física, química o biología, por mencionar algunos. Una de estas ecuaciones es la ecuación del calor, que está relacionada con la propagación sea de calor o de alguna población con una tasa de variación que depende del tiempo. En el camino de la búsqueda de resultados que garanticen la existencia y unicidad de soluciones para esta ecuación, se han desarrollado diversos métodos. Uno de los enfoques es la teoría de semigrupos, que tiene su punto de partida en encontrar la solución fundamental de la ecuación del calor homogénea, para poder expresar la solución, del caso, no homogéneo en términos de la solución fundamental. En tal sentido, en este trabajo estamos interesados en encontrar la solución para la ecuación del calor en términos de la solución fundamental y una estimación inferior de la solución fundamental en convolución con la función característica definida en una vecindad del cero para el caso homogéneo.

### **1.2.2 Formulación del problema.**

Los problemas de la investigación esta formulados de la siguiente manera

### **1.2.2.1 Problema general**

PG: ¿Será posible encontrar solución fundamental de la ecuación del calor homogénea y a su vez que esta solución fundamental en convolución con la función característica definida en la bola centrada en cero pueda estimarse inferiormente?

### **1.2.2.1 Problemas específicos**

PE1: ¿Será posible encontrar una solución de la ecuación del calor con condición inicial?

PE2: ¿Será posible encontrar una estimación inferior de la solución fundamental en convolución con la función característica definida en una vecindad del cero, usando herramientas básicas del cálculo?

## **1.3. Objetivos de la investigación**

### **1.3.1 Objetivo general.**

OG: Encontrar la solución fundamental de la ecuación del calor y una estimación inferior de la solución fundamental en convolución con la función característica en una vecindad del cero.

### **1.3.2 Objetivos específicos.**

OE1: Transformar la ecuación diferencial parcial (ecuación del calor) a una ecuación diferencial ordinaria.

OE2: Escribir la solución de la ecuación del calor en términos de la solución encontrada en la ecuación diferencial ordinaria.

## **1.4. Justificación**

Uno de los modelos que más destacan dentro de las ecuaciones es la ecuación de calor, en años recientes se han conseguido avances importantes en lo que se refiere a esta ecuación y las conexiones que tiene con otras áreas de las matemáticas, como el caso de la conexión con la geometría diferencial.

En el camino de realizar un estudio cualitativo de la ecuación del calor, uno de los puntos importantes es el mostrar la existencia de una solución fundamental, ya que esto nos abre paso a nuevos enfoques y más generales. Además, que permite representar, por medio de la solución fundamental, la solución de la ecuación de calor para cualquier no linealidad, por medio de la variación de parámetros y utilizando herramientas básicas del análisis matemático, se llegan a resultados de existencia de soluciones, con condiciones iniciales en espacios apropiados. Para el caso de no existencia de soluciones, necesitamos un ingrediente fundamental que es una estimación inferior, para poder llegar a la conclusión de tal resultado.

## **1.5. Importancia**

Esta tesis tiene una importancia teórica, pues haciendo uso de herramientas básicas de matemática desarrollamos los objetivos propuestos en relación a la ecuación del calor.

## 2. Marco teórico

### 2.1. Antecedentes del estudio

Una de las grandes incógnitas de muchos científicos ha sido resolver problemas de la vida cotidiana. Por ello a través de la historia muchos son los personajes que han impactado en el desarrollo de la ciencia siendo los temas más interesantes los que evolucionan continuamente con el tiempo, naciendo así una gran variedad de modelos matemáticos por medio de las ecuaciones diferenciales. Los primeros resultados referentes a la ecuación del calor, empezando por su deducción, fueron presentados por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) inspirado en los primeros trabajos realizados por Daniel Bernoulli (1700-1782) para dar solución a la ecuación de onda (o ecuación de la cuerda vibrante). El trabajo desarrollado por Fourier no quedaría limitado solo a la solución de la ecuación de calor, sino que además motivaría el nacimiento de toda una rama de las matemáticas como lo es el análisis de Fourier.

En 1998, [1] en el capítulo 2 hace referencia a cuatro ecuaciones diferenciales parciales lineales importantes entre ellas La ecuación del calor donde aborda la solución fundamental usando el método de scaling, encontrando la solución para caso homogéneos y condición inicial.

En 2007, [3] mostraron una estimación inferior de la solución fundamental aplicada a la función característica. En el 2016, [4] presentan y demuestran una estimación inferior, utilizando técnicas básicas propias del análisis.

Mientras que, en 2017, [8] en su trabajo curricular busca soluciones clásicas en  $\mathbb{R}^n$  a la ecuación del calor usando transformadas de Fourier.

## 2.2. Preliminares

Comenzaremos introduciendo notaciones y nociones básicas del análisis matemático, que son necesarios para el desarrollo de este trabajo.

**Definición 2.1:** Sea  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $\mathbb{R}^n$  es definido como la colección de todas las  $n$ -uplas  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de números reales, es decir:

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}$$

**Definición 2.2:** Sea  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . El producto interno de  $x$  e  $y$ , denotado por  $\langle x, y \rangle$  es un número real

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

**Teorema 2.1:** Se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\langle x, y \rangle \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$
2.  $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ , donde  $\theta = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n\text{-uplas}}$
3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
4.  $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ ,  $\forall x, x', y \in \mathbb{R}^n$
5.  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  y  $\forall x, x', y \in \mathbb{R}^n$

Prueba: Ver [6, p.5]

**Definición 2.3:** Sea  $x \in \mathbb{R}^n$ , la norma de  $x$ , denotada por  $\|x\|$ , es definida como:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**Teorema 2.2:** (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

1.  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
2.  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$  si y solo si  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $x = \alpha y$

Prueba: Ver [6, p.8-9].

**Teorema 2.3:** Se cumplen las siguientes propiedades:

1.  $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
2.  $\|x\| = 0$  si y solo si  $x = \theta$ .
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
4.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Prueba: Ver [6, p.9-10]

**Definición 2.4:** Sea  $y \in \mathbb{R}^n$  y  $r > 0$ :

1. La bola abierta radio  $r$  y centro  $y$  es el conjunto definido por:

$$B(y, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$$

2. La bola cerrada radio  $r$  y centro  $y$  es el conjunto definido por:

$$\overline{B(y, r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}$$

**Definición 2.5:** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , decimos que los subconjuntos  $A, B \subseteq X$  forman una escisión de  $X$  si y solo si satisfacen las siguientes condiciones:

1.  $X = A \cup B$
2.  $\overline{A} \cap B = \emptyset$
3.  $A \cap \overline{B} = \emptyset$

**Definición 2.6:** Decimos que  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  es un conjunto conexo si y solo si sólo admite escisiones triviales.

**Definición 2.7:** Diremos que  $\Omega$  es un dominio en  $\mathbb{R}^n$  si  $\Omega$  es un subconjunto abierto y conexo de  $\mathbb{R}^n$ , con  $\text{int}(\Omega) \neq \emptyset$ .

**Definición 2.8:** Sea  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, x \in \Omega$

i)  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ : La primera derivada de  $u$  respecto a la  $i$ -ésima coordenada

ii)  $\nabla u = Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ : Gradiente de  $u$ .

iii)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j}$ : la derivada con respecto a la  $i$ -ésima coordenada de la primera derivada de  $u$  respecto a la  $j$ -ésima coordenada.

iv)  $D^k u = \{D^\alpha u : |\alpha| = k\}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$

v)  $|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$

vi)  $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{tr}(D^2 u)$ : El Laplaciano de  $u$

**Definición 2.9:** Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Se define el conjunto de las funciones de clase  $C^k$  en  $\Omega$ , al conjunto:

$$C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k\}$$

**Definición 2.10:** Se define el conjunto de clase  $C^\infty$  en  $\Omega$ , al conjunto:

$$C^\infty(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \in C(\Omega), \forall |\alpha| \leq k, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

**Definición 2.11:** Sea  $k \in \mathbb{N}$ . Se define el conjunto de las funciones uniformemente de clase  $C^k$  en  $\Omega$ , al conjunto:

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega) : D^\alpha u \text{ es uniformemente continua } \forall |\alpha| \leq k\}$$

**Definición 2.12:** Se define el conjunto de las funciones uniformemente de clase  $C^\infty$  en  $\Omega$ , al conjunto:

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u \text{ es uniformemente continua, } \forall |\alpha| \leq k, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

### 2.2.1. Volumen de Bola

Denotamos  $B_r^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$

Donde  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ ,  $r = \text{radio}$

Al considerar  $n = 1$  la bola unidad es un intervalo, para  $n = 2$  se tiene un círculo y para  $n = 3$  una esfera.

Consideremos la integral sobre la bola unidad, dicha integral representa el volumen de la  $n$ -esfera:

$$V_n = \int_{B_r^n} dV = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \cdot r^n$$

Donde  $\Gamma$  es función gamma.

El desarrollo de la demostración de  $V_n$  lo encontraremos en [7].

### 2.2.2. Soporte

Sea  $U$  un conjunto abierto en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua

**Definición 2.12:** El soporte de  $f$  es

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}$$

**Definición 2.13:** Sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua la función  $f$  es soporte compacto si  $\text{supp } f$  es compacto.

**Notación 2.1:**  $C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(U) : \text{supp } f \text{ es compacto en } U\}$

### 2.2.3 Espacios $L^p$

Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto no vacío.

**Definición 2.14:** Denotamos  $L^1(\Omega)$  o solo  $L^1$  al espacio de funciones integrables de  $\Omega$  en  $\mathbb{R}$  y

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_1 = \int_{\Omega} |f| d\mu = \int |f|$$

**Definición 2.15:** sea  $p \in \mathbb{R}$  con  $1 \leq p < \infty$ ; tenemos el conjunto:

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Con

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu \right]^{1/p}$$

Donde  $\|f\|_p$  es una norma.

**Definición 2.16:** Sea el siguiente conjunto:

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \begin{array}{l} f \text{ es medible y hay una constante } C \\ \text{tal que } |f(x)| \leq C \text{ casi todo punto en } \Omega \end{array} \right\}$$

Con

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ casi todo punto en } \Omega\}$$

Donde  $\|f\|_\infty$  es una norma.

**Observación 2.1:** Si  $f \in L^\infty$  tenemos que:

$$|f| \leq \|f\|_\infty \quad \text{casi todo punto en } \Omega$$

**Notación 2.2:** Sea  $1 \leq p \leq \infty$ , denotamos por  $p'$  el exponente conjugado:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

**Teorema 2.4:** (Desigualdad de Hölder). Asumimos que  $f \in L^p$  y  $g \in L^{p'}$  con  $1 \leq p \leq \infty$  entonces  $fg \in L^1$  y

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

Prueba: Ver [5, p.92]

**Teorema 2.5** (Teorema de la convergencia dominada, Lebesgue). Sea  $(f_n)$  una sucesión de funciones en  $L^1$  que satisface:

(a)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para casi todo punto en  $\Omega$

(b) Hay una función  $g \in L^1$  tal que para todo  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  para casi todo punto en  $\Omega$ .

Entonces  $f \in L^1$  y  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$

Prueba: Ver [5, p.105]

**Definición 2.17:** Sea  $1 \leq p \leq \infty$  y  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible. Decimos que  $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ , si  $f \chi_K \in L^p(\Omega)$  para todo compacto  $K \subset \Omega$ .

**Definición 2.18:** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y sea  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p \leq \infty$  entonces para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  la función  $y \mapsto f(x-y)g(y)$  es integrable en  $\mathbb{R}^n$  y definimos la convolución:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

**Proposición 2.1:** Sea  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  y sea  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p \leq \infty$  entonces

$$Supp(f * g) \subset \overline{Supp f + Supp g}$$

Prueba: Ver [5, p.106]

**Proposición 2.2:** Sea  $k \geq 1$  y sea  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$  y  $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  entonces

$f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$  y

$$D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g, \quad \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq k.$$

Prueba: Ver [5, p.107]

### 3. Variables e Hipótesis

#### 3.1 Variables de la investigación

Las variables de investigación son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{y} \quad \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \mathbb{R}^n \times (t = 0) \end{cases}$$

#### 3.2 Operacionalización de variables

Para la hallar la solución fundamental se recurrió a herramientas básicas de matemáticas de llevar una ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial ordinaria.

Ahora con resultado de la solución fundamental y y condiciones iniciales se demuestra el **Teorema 5.1. (Solución del problema del valor inicial)** donde para cada ítem se prueba en base a resultados y conocimientos matemáticas previos.

Para el caso de estimación inferior la prueba del **Lema 5.2.** se demuestra con el apoyo de [4] y siguiendo los principios anteriores tenemos que el problema (P) tiene una estimación inferior con respecto a una vecindad del cero.

#### 3.3 Hipótesis general

HG: Es posible demostrar de manera detalla la existencia de la solución fundamental para la ecuación del calor del caso homogéneo.

### **3.4 Hipótesis específicas**

HE1: Es posible demostrar de manera detallada para el caso homogéneo con condición inicial tengamos una solución.

HE2: Es posible realizar una estimación inferior en una vecindad del cero con ciertas condiciones al problema de la ecuación del calor para el caso homogéneo y con condición inicial

## **4. Metodología**

### **4.1 Tipo de Investigación.**

El tipo de investigación es básica teórica, con finalidad en incrementar los conocimientos.

Este tipo de investigación hace la demostración detallada para encontrar la solución fundamental de la ecuación del calor homogénea y una estimación inferior en una vecindad del cero para el caso homogéneo de la ecuación del calor con conocimientos básicos de matemática.

### **4.2 Tipo de Investigación.**

El diseño de investigación de este trabajo es no experimental.

### **4.3 Población de muestra.**

Este trabajo de tesis no le corresponde una población de muestra.

### **4.4 Técnicas e instrumentos de recolección.**

La técnica de recolección principal estuvo dada por la observación, pues por la revisión de la literatura de varios autores entre libros y artículos en relación al tema hizo posible la construcción de dicho trabajo.

### **4.5 Plan de análisis estadístico de datos.**

Este trabajo no requiere un plan de análisis estadístico de datos.

## 5. Resultados

### 5.1. La ecuación del calor

En este capítulo presentamos uno de los resultados principales del trabajo, que es la solución fundamental de la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (5.1)$$

Donde  $u : \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(x, t)$

El Laplaciano  $x = (x_1, \dots, x_n)$ :  $\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ .

Buscamos la solución fundamental de la ecuación (5.1)

#### 5.1.1. Solución fundamental

Comenzaremos escalando la variable  $x$  por  $\lambda \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $t$  por  $\lambda^2 \in [0, \infty]$

$\Rightarrow u = u(\lambda x, \lambda^2 t)$  resuelva la ecuación (5.1)

Veamos que:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^2 \frac{\partial u(\lambda x, \lambda^2 t)}{\partial t}$$

$$\Delta(u(\lambda x, \lambda^2 t)) = \Delta_x(u(\lambda x, \lambda^2 t)) = \lambda^2 \Delta u(\lambda x, \lambda^2 t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$$

Con este escalamiento tomamos el radio  $\frac{r}{\sqrt{t}}$  donde  $r = |x|$ , así  $t$  no se encuentra a la vista pues se mantiene constante igual a 1.

Ahora para  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$ :

Tenemos 
$$u(x,t) = \frac{1}{t^\gamma} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad (5.2)$$

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \gamma \in \mathbb{R}, v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Hallaremos  $\gamma$  y  $v$ , para ello usamos (5.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (5.3)$$

Hallaremos de manera ordenada:

- Para  $\alpha$ :

Usando derivada del producto

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t^\gamma} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t^\gamma} \right) \cdot v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{t^\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left( v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right)$$

Sea  $\frac{x}{\sqrt{t}} = g(x)$  y por regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t^\gamma} v(g) \right) &= -\frac{\gamma}{t^{\gamma+1}} \cdot v(g) + \frac{1}{t^\gamma} \cdot \frac{\partial(v(g))}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} \\ &= -\frac{\gamma}{t^{\gamma+1}} \cdot v(g) + \frac{1}{t^\gamma} \cdot \frac{\partial(v(g))}{\partial g} \cdot \left( -\frac{x}{2t\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{\gamma}{t^{\gamma+1}} \cdot v(g) - \frac{1}{2t^{\gamma+1}} \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{\partial(v(g))}{\partial g}$$

Retornando el cambio

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t^\gamma} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right) = -\frac{\gamma}{t^{\gamma+1}} \cdot v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2t^{\gamma+1}} \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot Dv$$

- Para  $\beta$  (Regla de la cadena):

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{1}{t^\gamma} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right) &= \frac{1}{t^\gamma} \Delta_x \left(v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{t^\gamma} \sum_{i=1}^n \left(v\left(\frac{x_i}{\sqrt{t}}\right)\right)_i \cdot \left(v\left(\frac{x_i}{\sqrt{t}}\right)\right)_i \\ &= \frac{1}{t^\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{t}} v\left(\frac{x_i}{\sqrt{t}}\right)_i \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} v\left(\frac{x_i}{\sqrt{t}}\right)_i \\ &= \frac{1}{t^{\gamma+1}} \sum_{i=1}^n v\left(\frac{x_i}{\sqrt{t}}\right)_i \cdot v\left(\frac{x_i}{\sqrt{t}}\right)_i \\ &= \frac{1}{t^{\gamma+1}} \Delta v \end{aligned}$$

Entonces de  $\alpha$  y  $\beta$  reemplazando en (5.3):

$$-\frac{\gamma}{t^{\gamma+1}} \cdot v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{2t^{\gamma+1}} \frac{x}{\sqrt{t}} \cdot Dv - \frac{1}{t^{\gamma+1}} \Delta v = 0$$

Ahora para  $y = \frac{x}{\sqrt{t}} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow -\frac{\gamma}{t^{\gamma+1}} \cdot v(y) - \frac{1}{2t^{\gamma+1}} y \cdot Dv(y) - \frac{1}{t^{\gamma+1}} \Delta v(y) = 0$$

Tomamos  $t > 0$

$$\gamma \cdot v(y) - \frac{1}{2} y \cdot Dv(y) + \Delta v(y) = 0 \tag{5.4}$$

Buscaremos soluciones radiales, hacemos  $v(y) = w(|y|) = w(r)$ , para algún  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Veamos en (5.4) para cada sumando y haciendo un cambio en la variable temporal de

$$h(y) = |y|, |y| \neq 0 \rightarrow w(h(y)) :$$

$$\text{i) } \quad \gamma.v(y) = \gamma.w(h) = \gamma.w(r)$$

$$\text{ii) } \quad y.Dv(y) = y \frac{\partial}{\partial y_i} (w(h)) = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial w}{\partial y_i}$$

Recordar (Regla de la cadena):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (w(h)) &= \frac{\partial(w(h))}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_i} (w(h)) = \frac{\partial(w(h))}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial y_i} \\ &= w' \cdot \frac{\partial(|y|)}{\partial y_i} \\ &= \frac{y_i}{|y|} \cdot w' \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_i \cdot \frac{\partial}{\partial y_i} (w(h)) &= y_i \cdot \frac{y_i}{|y|} \cdot w' \\ &= \frac{y_i^2}{|y|} \cdot w' \end{aligned}$$

$$\text{en (i) } \quad \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial w}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{|y|} \cdot w'$$

$$\begin{aligned} &= \frac{|y|^2}{|y|} \cdot w' \\ &= |y| \cdot w' \\ &= r \cdot w' \end{aligned}$$

$$\text{iii) } \quad \Delta v(y) = \Delta(w(h))$$

Sabemos por (5.5) que:

$$\frac{\partial w}{\partial y_i} = \frac{y_i}{|y|} \cdot w'$$

Volviendo a derivar y usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial w}{\partial y_i} \right) &= \frac{y_i}{|y|} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{\partial w}{\partial h} \right)}_{\Downarrow} + \frac{\partial w}{\partial h} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial y_i} \left( \frac{y_i}{|y|} \right)}_{\Downarrow} \\ &= \frac{y_i}{|y|} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial^2 h} \cdot \frac{\partial h}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial w}{\partial h} \left( \frac{|y| - \frac{y_i}{|y|} \cdot y_i}{|y|^2} \right) \\ &= \frac{y_i}{|y|} (w'' \cdot \frac{y_i}{|y|}) + w' \left( \frac{1}{|y|} - \frac{y_i^2}{|y|^3} \right) \\ &= \frac{y_i^2}{|y|^2} \cdot w'' + w' \left( \frac{1}{|y|} - \frac{y_i^2}{|y|^3} \right) \end{aligned}$$

Reemplazando en iii)

$$\begin{aligned} \Delta(w(h)) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i^2}{|y|^2} \cdot w'' + w' \left( \frac{1}{|y|} - \frac{y_i^2}{|y|^3} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{|y|^2} \cdot w'' + \sum_{i=1}^n w' \left( \frac{1}{|y|} - \frac{y_i^2}{|y|^3} \right) \\ &= w'' \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{|y|^2} + w' \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{|y|} - \frac{y_i^2}{|y|^3} \right) \\ |y| = r & \\ &= w'' \cdot \frac{|y|^2}{|y|^2} + w' \left( \frac{n}{|y|} - \frac{|y|^2}{|y|^3} \right) \\ &= w'' + w' \left( \frac{n}{|y|} - \frac{1}{|y|} \right) \\ &= w'' + \left( \frac{n-1}{r} \right) w' \end{aligned}$$

Reemplazando i), ii) y iii) en (5.4) tenemos:

$$\gamma \cdot w + \frac{1}{2} r \cdot w' + w'' + \left( \frac{n-1}{r} \right) w' = 0$$

Multiplicando todo por  $r^{n-1}$ :

$$\gamma.r^{n-1}w + \frac{1}{2}r^n.w' + r^{n-1}w'' + r^{n-2}(n-1)w' = 0 \quad (5.6)$$

Sabemos lo siguiente por derivadas:

$$\begin{aligned} \bullet (r^{n-1}w')' &= r^{n-1}w'' + r^{n-2}(n-1)w' \\ \bullet \frac{1}{2}(r^n w)' &= \frac{1}{2}(n.r^{n-1}w + r^n.w') \\ &= \left(\frac{n}{2}.r^{n-1}w + \frac{1}{2}r^n.w'\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Escogiendo  $\gamma = \frac{n}{2}$  en (5.6)

$$\frac{n}{2}.r^{n-1}w + \frac{1}{2}r^n.w' + r^{n-1}w'' + r^{n-2}(n-1)w' = 0$$

Así por las derivadas anteriores (5.7) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(r^n w)' + (r^{n-1}w')' &= 0 \\ (r^{n-1}w')' &= -\frac{1}{2}(r^n w)' \end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int ((r^{n-1}w')' &= -\frac{1}{2}(r^n w)') \\ r^{n-1}w' &= -\frac{1}{2}r^n w + A \quad , \text{ A constante de integración} \\ & \quad r > 0 \end{aligned}$$

Asumiendo que  $w$  y  $w'$  son acotadas alrededor de  $r = 0$

$$\begin{aligned} r^{n-1}w' + \frac{1}{2}r^n w &= A \\ \lim_{r \rightarrow 0} (r^{n-1}w' + \frac{1}{2}r^n w) &= A \\ \Rightarrow 0 &= A \end{aligned}$$

Así quedaría de la siguiente manera:

$$r^{n-1}w' = -\frac{1}{2}r^n w$$

Resolviendo:

$$w' = -\frac{1}{2}r.w$$

$$w(r) = C.e^{-\frac{r^2}{4}}, \quad C \text{ es constante y } r > 0$$

Ahora regresando los cambios de variables:

$$|y| = r$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x}{\sqrt{t}} \\ v(y) = w(|y|) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v(y) = v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \\ v(y) = C.e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \end{array}$$

Ahora en (5.2):

$$u(x,t) = \frac{C}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Es una solución que satisface la ecuación (5.1).

**Definición 5.1.** La función

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & , (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ 0 & , (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \end{cases}$$

Es llamada ***solución fundamental*** de la ecuación del calor o también conocida como el núcleo de Gauss.

Donde  $\Phi$  es singular en  $(0,0)$  A veces escribiremos  $\Phi(x,t) = \Phi(|x|,t)$  para enfatizar

que es radial en la variable  $x$ . La elección de la constante de normalización  $\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}$

está dada por lo siguiente:

**Lema 5.1:** (Integral de la solución fundamental).

Para cada  $t > 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) dx = 1$$

Prueba:

Calcularemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx$$

Usaremos cambio de variable  $z = \frac{x}{2\sqrt{t}} \Rightarrow 2\sqrt{t} \cdot z = x$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{t} \cdot (z_1, \dots, z_n) &= (x_1, \dots, x_n) \\ (2\sqrt{t}z_1, \dots, 2\sqrt{t}z_n) &= (x_1, \dots, x_n) \\ \Rightarrow F(z) &= (2\sqrt{t}z_1, \dots, 2\sqrt{t}z_n) \end{aligned}$$

$$JF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial F_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial F_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial F_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial F_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & 2\sqrt{t} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 2\sqrt{t} \end{pmatrix}$$

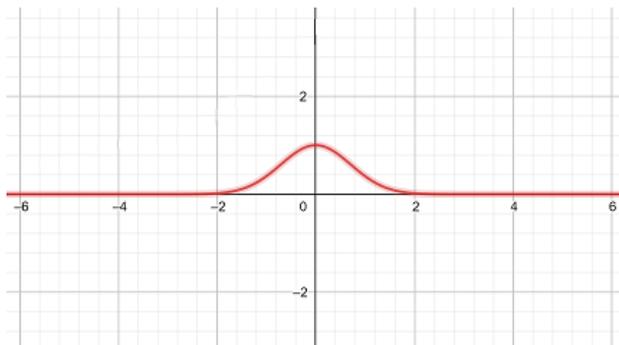
$$|JF| = (2\sqrt{t})^n$$

Así reemplazando en la integral con el cambio de variable:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|2\sqrt{t}\cdot z|^2}{4t}} |JF| dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|z|^2} 2^n \cdot t^{n/2} dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|z|^2} dz \\
 &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz \\
 &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z|^2} dz \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

Ahora veamos la siguiente integral:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|^2} dx$ .

Si consideramos en  $\mathbb{R}^2$  las integrales siguientes:

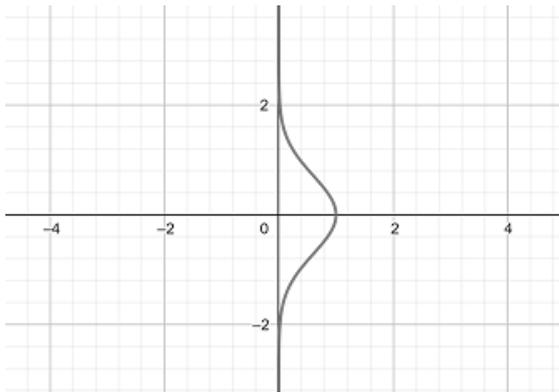


$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|^2} dx = I$$

Donde Graf.1 representa la función dentro de la integral.

$I$  = área bajo la curva

Gráfica1



$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|^2} dy = J$$

Donde Graf.2 representa la función dentro de la integral.

J=área bajo la curva

Gráfica 2

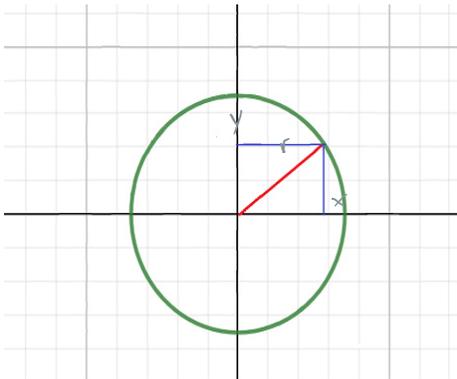
Así viendo gráficamente  $I=J$  entonces operamos de la siguiente manera:

$$I \cdot J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy$$

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Por coordenadas polares:



$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Así con el cambio de variable y jacobiano en coordenadas polares igual a  $r$ , tenemos:

Gráfica 3

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r dr d\theta \quad (5.9)$$

Hallando una de las integrales:

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = -\frac{1}{2}(e^{-\infty} - e^0), \quad \text{donde } e^{-\infty} = \lim_{s \rightarrow \infty} e^{-s}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2}$$

Reemplazando en (5.9)

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} dr I^2 = \frac{1}{2} r \Big|_0^{2\pi}$$

$$I^2 = \frac{1}{2}(2\pi - 0) = \pi$$

$$I = \sqrt{\pi}, \quad r \in [0, 2\pi]$$

Reemplazando en (5.8)

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z|^2} dz$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{i=1}^n \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi^{n/2}} \sqrt{\pi^n}$$

$$= 1$$

$$\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1 \quad \square$$

## 5.2 Problema de Valor inicial

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (5.10)$$

Notamos que la solución fundamental  $\Phi$  resuelve la ecuación del calor lejos del  $(0,0)$  así para una traslación  $\Phi(x-y, t)$ ,  $|y| \neq 0$  y evitando la singularidad sabemos que  $\Phi(x-y, t)$  también satisface la ecuación del calor lejos de  $x$  y por convolución tenemos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (\Phi * g)(x) \quad \text{y por definición 1.4.5} \\ u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y, t) g(y) dy \quad (5.11) \\ u(x, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad , (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \end{aligned}$$

Donde (5.11) es solución de (5.10).

### Teorema 5.1. (Solución del problema del valor inicial)

Asumimos que  $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , y  $u$  definido por (5.11). Entonces:

- (i)  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,
- (ii)  $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$ ,
- (iii)  $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = g(x^0) \quad \text{para cada } x^0 \in \mathbb{R}^n$ .

Prueba:

(i) En efecto tenemos que  $u$  está dada por la convolución  $u = (\Phi * g)(x)$  y como la función  $e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$  es infinitamente diferenciable con derivadas acotadas uniformemente

para todos los órdenes, en  $\mathbb{R}^n \times (\delta, \infty)$  para cada  $\delta > 0$ , así tenemos que por

Proposición 2.2:

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \quad \square$$

(ii) Veamos lo siguiente (usando nuevamente Proposición 2.2)

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy$$

$$\bullet \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(x - y, t) g(y)) dy$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(x - y, t)) g(y) dy$$

$$\bullet \Delta u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta (\Phi(x - y, t) g(y)) dy$$

$$\Delta u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta (\Phi(x - y, t)) g(y) dy$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \Delta u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(x - y, t)) g(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta (\Phi(x - y, t)) g(y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial}{\partial t} (\Phi(x - y, t)) g(y) - \Delta (\Phi(x - y, t)) g(y) \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x - y, t) - \Delta \Phi(x - y, t) \right)}_{\mathcal{G}} g(y) dy$$

Como  $\Phi$  es solución fundamental cumple la ecuación (5.1)

$$\rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Delta \Phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

Reemplazando en  $\mathcal{G}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \Delta u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} 0 \cdot g(y) dy \\ \frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 \quad \square\end{aligned}$$

(iii) Como  $g$  es continua, para un  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  fijo tenemos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |y - x^0| < \delta \rightarrow |g(y) - g(x^0)| < \varepsilon, y \in \mathbb{R}^n \quad (5.12)$$

Entonces sí  $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$ , usando (5.11) tenemos:

$$|u(x,t) - g(x^0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)[g(y) - g(x^0)] dy \right|$$

Pues

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y) dy \\ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) dy &= 1 \rightarrow g(x^0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(x^0) dy\end{aligned}$$

$$|u(x,t) - g(x^0)| = \left| \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x-y,t)[g(y) - g(x^0)] dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y,t)[g(y) - g(x^0)] dy \right|$$

Por desigualdad triangular:

$$|u(x,t) - g(x^0)| \leq \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x-y,t) |g(y) - g(x^0)| dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y,t) |g(y) - g(x^0)| dy$$

Ahora sea:

$$I = \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x-y,t) |g(y) - g(x^0)| dy$$

$$J = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y,t) |g(y) - g(x^0)| dy$$

Entonces  $|u(x,t) - g(x^0)| \leq I + J \quad (5.13)$

Ahora de (5.12) para  $I$

$$\begin{aligned}
& |g(y) - g(x^0)| < \varepsilon \quad y \quad \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) dy = 1 \\
& \rightarrow \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) |g(y) - g(x^0)| dy < \varepsilon
\end{aligned}$$

Así:

$$I \leq \varepsilon \quad (5.14)$$

Para  $J$ :

Si  $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$  y  $|y - x^0| \geq \delta$  veamos la siguiente desigualdad:

$$|y - x^0| = |y - x + x - x^0| \leq |y - x| + |x - x^0| < |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0|$$

Operando los extremos:

$$\begin{aligned}
|y - x^0| & \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x^0| \\
\frac{1}{2}|y - x^0| & \leq |y - x|
\end{aligned} \quad (5.15)$$

En  $J$  por desigualdad:

$$\begin{aligned}
J & = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\
J & \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) |g(y)| dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) |g(x^0)| dy
\end{aligned}$$

En esta parte utilizaremos  $|g(y)| \leq \|g\|_{L^\infty}$  y  $|g(x^0)| \leq \|g\|_{L^\infty}$  estas desigualdades están

dadas por Observación 1.4.1 de la norma  $L^\infty$ , a si tenemos que:

$$J \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) \|g\|_{L^\infty} dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) \|g\|_{L^\infty} dy$$

$$J \leq \|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) dy + \|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) dy$$

$$J \leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} \Phi(x-y, t) dy$$

Reemplazando la función  $\Phi$  de (5.13)

$$J \leq 2\|g\|_{L^\infty} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

Como  $2\|g\|_{L^\infty} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} = K$ ,  $K$  es cte, entonces

$$J \leq \frac{K}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy$$

Y por la desigualdad (5.13) tenemos:

$$J \leq \frac{K}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} dy$$

Haciendo el cambio de variable:

$$y - x^0 = r \quad J \leq \frac{K}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{|r|^2}{16t}} r^{n-1} dr$$

Por el teorema de la convergencia dominada tenemos que:

$$J \leq \frac{K}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{|r|^2}{16t}} r^{n-1} dr \rightarrow 0, t \rightarrow 0^+ \quad (5.16)$$

$$J \leq \varepsilon$$

Así de (5.14) y (5.16) en (5.13):

$$|u(x, t) - g(x^0)| \leq I + J < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Por lo tanto, tenemos:

$$\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x,t) = g(x^0) \quad \text{para cada } x^0 \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

### 5.3 Una estimación inferior

Empezaremos este capítulo con lo siguiente:

**Observación 5.1:** La solución fundamental  $\Phi$  definida en el capítulo anterior tiende a 0 cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .

En efecto  $\Phi$  depende solo de la función  $e^{-|x|}$  por ello si  $|x| \rightarrow \infty$  tenemos que  $\Phi \rightarrow 0$ , para cada  $t > 0$  fijado.

Ahora sea un subconjunto  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que la solución fundamental no sea 0.

Consideremos el siguiente problema:

$$(P) \begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \\ u(x,0) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \quad (5.17)$$

Donde  $\Omega$  es el soporte de la solución fundamental de (5.11),  $T > 0$ .

Ahora presentaremos un resultado esencial para demostrar la estimación inferior.

**Proposición 5.1:** Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  una bola de centro 0 y radio  $r > 0$  o  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Si

$u_0 \in L^\infty(\Omega), u_0 \geq 0$  entonces:

$$u \geq 0 \text{ es radial y no decreciente en } \Omega \times (0,T)$$

Prueba: [3, p. 626-627].

Así la solución  $u$  del problema (P) es no negativa, radial y no decreciente en  $\Omega \times (0, T)$

**Lema 5.2:** Sea  $r, \delta > 0$  tal que  $B_{r+2\delta} \subset \Omega$ . Entonces existe una constante absoluta

$C_n > 0$ , que depende solo de  $n$ , tal que:

$$\int_{\Omega} \Phi(x-y, t) \chi_r(y) dy \geq C_n \left( \frac{r}{r+\sqrt{t}} \right)^n, \quad t > 0, x \in B_{r+\sqrt{t}}(y) \quad (5.18)$$

*Prueba:*

Como  $B_r \subset B_{r+2\delta} \subset \Omega$  y tomando  $u_0(x)$  de (5.17) de la siguiente manera:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_r(0) \\ 0, & x \notin B_r(0) \end{cases} \quad (5.19)$$

Así  $u_0(x) = \chi_r(x)$ .

Entonces la solución fundamental de (5.17) con condición inicial (5.19) es de la forma:

$$u(x, t) = \int_{\Omega} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy = \int_{\Omega} \Phi(x-y, t) \chi_r(y) dy \quad (5.20)$$

Podemos escribir el siguiente conjunto:

$$\Omega = [\Omega \setminus B_r(0)] \cup B_r(0)$$

Así en (5.4) tenemos:

$$\int_{\Omega} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy = \int_{\Omega \setminus B_r(0)} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy + \int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy$$

De (5.19)

$$\int_{\Omega} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy = \int_{\Omega \setminus B_r(0)} \Phi(x-y, t) \cdot 0 \cdot dy + \int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) \cdot 1 \cdot dy$$

$$\int_{\Omega} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy = \int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) dy$$

De (5.11):

$$\int_{\Omega} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy = \int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_r(0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \quad (5.21)$$

Como  $u_0$  es radial, simétrica y pertenece a  $L^\infty(\Omega)$ . Entonces por la Proposición 5.3 tenemos que  $u(x, t)$  de (5.11) es radialmente, simétrica y decreciente, en particular lo es para problema (5.17).

Ahora tomemos  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|x| \leq r + \sqrt{t}$  y sea un vector unitario  $\mu$  talque  $|\mu| = 1$

Definimos 
$$p = (r + \sqrt{t})\mu$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} |x| &\leq |r + \sqrt{t}| \\ |x| &\leq |r + \sqrt{t}| |\mu| \\ |x| &\leq |r + \sqrt{t}| \mu \\ |x| &\leq |p| \end{aligned} \quad (5.22)$$

Luego, usando (5.22) y el hecho que la integral (5.21) radial, simétrica y decreciente, tenemos

$$\int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_r(0)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \geq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_r(0)} e^{-\frac{|p-y|^2}{4t}} dy \quad (5.23)$$

Realizando un cambio de variable:

$$\begin{aligned} z &= p - y \\ \rightarrow y &= p - z \end{aligned} \quad (5.24)$$

Como  $y \in B_r(0) \rightarrow |y| < r$

$$\begin{aligned}
|y| &= |p - z| < r \\
\rightarrow z &\in B_r(p)
\end{aligned}
\tag{5.25}$$

En (5.8):

$$\begin{aligned}
z &= p - y \\
dz &= |J(z)| dy \\
J(z) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
|J(z)| &= 1 \\
dz &= 1 dy
\end{aligned}
\tag{5.26}$$

Haciendo el cambio de variable en (5.23) y reemplazando (5.25) y (5.26):

$$\int_{B_r(0)} \Phi(x - y, t) dy \geq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_r(0)} e^{-\frac{|p-y|^2}{4t}} dy = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_r(p)} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz
\tag{5.27}$$

Realizando un nuevo cambio de variable:

$$\begin{aligned}
w &= \frac{z}{2\sqrt{t}} \\
\rightarrow dw &= |J(w)| dz \\
J(z) &= \begin{pmatrix} 1/2\sqrt{t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \dots & 1/2\sqrt{t} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/2\sqrt{t} \end{pmatrix} \\
|J(w)| &= \left( \frac{1}{2\sqrt{t}} \right)^n \\
dw &= \left( \frac{1}{2\sqrt{t}} \right)^n dz \\
(2\sqrt{t})^n dw &= dz
\end{aligned}
\tag{5.28}$$

Ahora como:

$$\begin{aligned}
z \in B_r(p) &\rightarrow |p - z| < r \\
\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) > 0 &\rightarrow \left|\frac{p}{2\sqrt{t}} - \frac{z}{2\sqrt{t}}\right| < \frac{r}{2\sqrt{t}} \\
&\rightarrow \left|\frac{p}{2\sqrt{t}} - w\right| < \frac{r}{2\sqrt{t}} \\
&\rightarrow w \in B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right)
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Haciendo el cambio de variable en (5.17) y reemplazando (5.28) y (5.29):

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)} \Phi(x - y, t) dy &\geq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_r(p)} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right)} e^{-|w|^2} (2\sqrt{t})^n dw \\
\int_{B_r(0)} \Phi(x - y, t) dy &\geq \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right)} e^{-|w|^2} (2\sqrt{t})^n dw \\
\int_{B_r(0)} \Phi(x - y, t) dy &\geq \frac{(2\sqrt{t})^n}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right)} e^{-|w|^2} dw \\
\int_{B_r(0)} \Phi(x - y, t) dy &\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right)} e^{-|w|^2} dw
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Afirmamos lo siguiente:

$$B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right) \subseteq B_{\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)\mu\right), \quad \lambda \geq r \tag{5.31}$$

Veamos que la afirmación se cumple:

$$m \in B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right) \rightarrow \text{por demostrar que } m \in B_{\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)\mu\right)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \left| m - \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} \right) \mu \right| &= \left| m - \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{2\sqrt{t}} \right) \mu + \left( \frac{r-\lambda}{2\sqrt{t}} \right) \mu \right| \\ &\leq \left| m - \underbrace{\left( \frac{1}{2} + \frac{r}{2\sqrt{t}} \right) \mu}_{\frac{p}{2\sqrt{t}}} \right| + \left| \left( \frac{r-\lambda}{2\sqrt{t}} \right) \mu \right| \end{aligned}$$

como  $m \in B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}} \left( \frac{p}{2\sqrt{t}} \right)$

$$\leq \frac{r}{2\sqrt{t}} + \left| \left( \frac{r-\lambda}{2\sqrt{t}} \right) \mu \right|$$

como  $\lambda \geq r$

$$\leq \frac{r}{2\sqrt{t}} + \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} - \frac{r}{2\sqrt{t}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{t}}$$

$$\left| m - \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} \right) \mu \right| \leq \frac{\lambda}{2\sqrt{t}}$$

$$\rightarrow m \in B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}} \left( \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} \right) \mu \right)$$

- Ahora sí

$$\frac{r}{\sqrt{t}} \geq 1 \rightarrow r \geq \sqrt{t}$$

y tomando la inclusión anterior, siendo  $\lambda = r$  y  $r = \sqrt{t}$

(2.31) (2.31)

Entonces reemplazando en (5.31):

$$B_{\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}} \left( \left( \frac{\sqrt{t} + \sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \right) \mu \right) \subseteq B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}} \left( \left( \frac{1}{2} + \frac{r}{2\sqrt{t}} \right) \mu \right), \quad r \geq \sqrt{t}$$

$$B_{\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}} (1 \cdot \mu) \subseteq B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}} \left( \frac{p}{2\sqrt{t}} \right)$$

$$B_{\frac{1}{2}} (\mu) \subseteq B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}} \left( \frac{p}{2\sqrt{t}} \right) \tag{5.32}$$

Así en (5.30) de (5.32) tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) dy &\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}} \left( \frac{p}{2\sqrt{t}} \right)} e^{-|w|} dw \\ &\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{B_{\frac{1}{2}}(\mu)} e^{-|w|} dw \end{aligned} \tag{5.33}$$

Ahora como

$$\begin{aligned}
 w \in B_{\frac{1}{2}}(\mu) &\rightarrow |\mu - w| < \frac{1}{2} \\
 |w| - |\mu| &< \frac{1}{2} \\
 |w| &< \frac{1}{2} + |\mu| \\
 |w| &< \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \\
 |w|^2 &< \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
 -|w|^2 &> -\frac{9}{4} \\
 e^{-|w|} &> e^{-\frac{9}{4}}
 \end{aligned}$$

Reemplazando lo anterior en (5.33):

$$\begin{aligned}
 \int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) dy &\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{B_{\frac{1}{2}}(\mu)} e^{-|w|} dw \\
 &\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{B_{\frac{1}{2}}(\mu)} e^{-\frac{9}{4}} dw \\
 &\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\frac{9}{4}} \int_{B_{\frac{1}{2}}(\mu)} dw
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Donde  $\int_{B_{\frac{1}{2}}(\mu)} dw = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$ , *volumen de la bola*

Así en (5.34):

$$\begin{aligned}
 w \in B_{\frac{1}{2}}(\mu) &\rightarrow |\mu - w| < \frac{1}{2} \\
 |w| - |\mu| &< \frac{1}{2} \\
 |w| &< \frac{1}{2} + |\mu|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|w| &< \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \\
|w|^2 &< \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\
-|w|^2 &> -\frac{9}{4} \\
e^{-|w|^2} &> e^{-\frac{9}{4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) dy &\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\frac{9}{4}} \int_{B_{\frac{1}{2}}(\mu)} dw = \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\frac{9}{4}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{e^{-\frac{9}{4}}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} =: C'_n
\end{aligned} \tag{5.35}$$

- Ahora sí

$$\frac{r}{\sqrt{t}} \leq 1 \rightarrow \frac{r}{2\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2}$$

En (5.14) tenemos que

$$\begin{aligned}
w \in B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right) &\rightarrow \left| \frac{p}{2\sqrt{t}} - w \right| < \frac{r}{2\sqrt{t}} \\
|w| - \left| \frac{p}{2\sqrt{t}} \right| &< \frac{r}{2\sqrt{t}} \\
|w| &< \frac{1}{2} + \left| \frac{p}{2\sqrt{t}} \right| \\
|w| &< \frac{1}{2} + \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2\sqrt{t}}\right)\mu \right| \\
|w| &< 1 + \left| \frac{r}{2\sqrt{t}} \right| < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
-|w|^2 &> -\frac{9}{4} \\
e^{-|w|^2} &> e^{-\frac{9}{4}}
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Así la desigualdad de (5.36) en (5.30) tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) dy &\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right)} e^{-|w|} dw \\
&\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right)} e^{-\frac{9}{4}} dw \\
&\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\frac{9}{4}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{t}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right)} dw
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Donde  $\int_{B_{\frac{r}{2\sqrt{t}}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right)} dw = \left(\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)^n \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}$ , volumen de la bola .

En (5.37)

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) dy &\geq \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\frac{9}{4}} \int_{\frac{r}{2\sqrt{t}}\left(\frac{p}{2\sqrt{t}}\right)} dw = \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-\frac{9}{4}} \left(\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)^n \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \\
&= \left(\frac{r}{2\sqrt{t}}\right)^n \frac{e^{-\frac{9}{4}}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} =: C'_n \left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^n
\end{aligned} \tag{5.38}$$

De (5.35) y (5.38) tomamos:

$$C_n = \min\{C'_n, C''_n\}$$

y sabemos que:

$$\max\{C'_n, C''_n\} \leq C'_n + C''_n$$

Por tanto, tenemos que:

$$\int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) dy \geq C_n \left(\frac{r}{\max(r, \sqrt{t})}\right)^n \geq C_n \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^n$$

Y de (5.21):

$$\int_{\Omega} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy = \int_{B_r(0)} \Phi(x-y, t) dy \geq C_n \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^n$$

Y finalmente de (5.20)

$$u(x, t) = \int_{\Omega} \Phi(x-y, t) u_0(y) dy = \int_{\Omega} \Phi(x-y, t) \chi_r(y) dy \geq C_n \left(\frac{r}{r+\sqrt{t}}\right)^n \quad \square$$

## **6. Discusión de resultados**

### **6.1 Contrastación de hipótesis con los resultados.**

#### **En relación a la hipótesis general**

En efecto, se logró la demostración de la solución fundamental de la ecuación del calor para el caso homogéneo, haciendo uso de la revisión bibliográfica adecuado tanto libros como investigaciones.

#### **En relación a la hipótesis específica 1**

En efecto, se logró la demostración detallada para el caso de condición inicial dando de resultado el teorema 5.1, haciendo uso de herramientas de las ecuaciones diferenciales parciales y análisis matemático.

#### **En relación a la hipótesis específica 2**

En efecto, se logró la estimación inferior en una vecindad del cero en el desarrollo del lema 5.2 siguiendo las recomendaciones de [3], [4] y haciendo uso conocimientos de análisis matemático y ecuaciones diferenciales.

## 7. Conclusiones

1. La solución fundamental nos permite estudiar un problema de valor inicial desde el punto de vista de la formulación integral y esto es debido a la fórmula de variación de parámetros o fórmula Duhamel.
2. El estudio de la ecuación homogénea en todo espacio  $\mathbb{R}^n$ , nos permite ver cómo es su solución. En cambio, en el caso que el dominio fuese un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , necesitaríamos revisar a detalle la teoría de semigrupos.
3. La estimativa inferior nos permite establecer resultados de no existencia de soluciones para el problema del calor con no linealidades, tanto en caso que  $\Omega$  sea un dominio acotado o  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

## 8. Sugerencias

1. Desde esta perspectiva podemos estudiar la ecuación del calor no lineal y también estudiar problemas de evolución donde podamos encontrar su solución fundamental.
2. Estudiar la solución de la ecuación del calor para el problema (P) con modificaciones adecuadas en apoyo a la teoría de semigrupos.
3. Se espera que este trabajo pueda ser de apoyo por otros trabajos de investigación por el detalle que hay en el desarrollo y continuar con la gran importancia de la ecuación del calor en diversas áreas.

## 9. Bibliografía.

- [1] Evans, L.C. (1998). *Partial Differential Equations* (Volume 19). American Mathematical Society.
- [2] Aparcana A., Castillo R., Guzman-Rea O., Loayza M. *On The Local Existence for Weakly Parabolic System in Lebesgue Spaces*. *Journal of Differential Equations* 268(2020). 3129-3151.
- [3] Quittner P., Souplet P. (2007). *Superlinear Parabolic Problems*. (Second edition). Birkhäuser.
- [4] Laister R., Robinson J.C., Sierżęga M., Vidal-López A. (2016). A complete characterisation of local existence for semilinear heat equations in Lebesgue spaces. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 33(6), 1519-1538. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0294144915000645>.
- [5] Brezis H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. (1<sup>st</sup> ed.). Springer.
- [6] Benazic R. (3-7 de Julio del 2000). *Topología en Espacios Euclidianos*. Sociedad Matemática Peruana, (2<sup>da</sup> ed.). 18° Coloquio.
- [7] Recarte M. (2016). Una Demostración del Volumen y la Medida Superficial de la Bola Unidad. *Revista de la escuela de Física*, IV (1). 25 - 28. <https://www.researchgate.net/publication/336343098> [Una demostracion del volumen y la medida superficial de la bola unidad](https://www.researchgate.net/publication/336343098)
- [8] Paloma Cruz D.A (2017). *Soluciones clásicas a la ecuación de calor lineal*. (Trabajo fin de grado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.