Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Ecuación del calor: existencia y unicidad

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Edgard Junior BERROCAL TORRES

ASESOR

Mg. Félix Gregorio PARIONA VILCA

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

Berrocal, E. (2021). *Ecuación del calor: existencia y unicidad*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Edgard Junior Berrocal Torres
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	46865301
URL de ORCID	No Aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	LIC. FELIX GREGORIO PARIONA VILCA
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	07366081
URL de ORCID	https://orcid.org/ **0000-0003-3541-3086**
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	MG. GAVINO AYMITUMA PUMA
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	08025924
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	MG. ANDRÉS GUARDIA CAYO
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09406969
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.2. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES Y ANÁLISIS FUNCIONAL

Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Villa el Salvador 12°13'07.3"S 76°57'10.9"W
Año o rango de años en que se realizó la investigación	Agosto - octubre 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemática Pura http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 09:00 horas del domingo 24 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Mg. Gavino Aymituma Puma (PRESIDENTE), Mg. Andrés Guardia Cayo (MIEMBRO) y el Mg. Félix Gregorio Pariona Vilca (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**ECUACIÓN DEL CALOR: EXISTENCIA Y UNICIDAD**", presentado por el señor **Bachiller Edgar Junior Berrocal Torres**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de diecisiete **(17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Edgar Junior Berrocal Torres** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 09:30 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Gavino Aymituma Puma
PRESIDENTE

Mg. Andrés Guardia Cayo
MIEMBRO

Mg. Félix Gregorio Pariona Vilca
MIEMBRO ASESOR

Ecuación Del Calor: Existencia y Unicidad

Por

Edgard Junior BERROCAL TORRES

Tesisna sometida al Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos - UNMSM, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Licenciada en Matemática.

Aprobado por:

....

Mg.

Presidente del Jurado Evaluador de Tesisna

....

Mg.

Miembro del Jurado Evaluador de Tesisna

....

Mg. Félix GREGORIO PARIONA

Miembro Asesor de Tesis

LIMA - PERÚ

2021

DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a mis padres hermanos que siempre me apoyaron e incentivaron a seguir adelante a cumplir con mis metas , con mis objetivos a pesar de las dificultades .

AGRADECIMIENTOS

- Al profesor Omar Guzmán por ayudarme,por el gran apoyo académico y la paciencia en cada reunión.

- Agradecer a la Facultad de Ciencias Matemáticas y sus docentes por todos los conocimientos brindados en mi etapa de estudiante de pregrado.

- A mis Padres por siempre apoyarme a seguir adelante y a pesar de las adversidades seguir adelante.

RESUMEN

ECUACIÓN DEL CALOR: EXISTENCIA Y UNICIDAD

Berrocal Torres, Edgard J.

Setiembre - 2021

Asesor	: Mg. Félix GREGORIO PARIONA.
Título obtenido	: Licenciado en Matemática.

En este trabajo de tesina, consiste en hallar mediante Semigrupos la solución de una Ecuación del Calor con no linealidad u^p es ecuación diferencial parcial del tipo parabólico que describe la propagación de calor en una barra .

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} u_t - \Delta u = u^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \\ u(0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Donde $T > 0$ y $p > 1$.

El objetivo de este trabajo, es demostrar la existencia de soluciones utilizando la teoría de Semigrupos

Palabras claves:

- Ecuación Parábolica
- Ecuación del calor
- Efecto Regularizante
- Ecuación Seminilineal
- Teorema de punto fijo de Banach

ABSTRACT

HEAT EQUATION : EXISTENCE AND UNIQUENESS
Berrocal Torres, Edgard J.

September - 2021

Adviser : Mg. Félix GREGORIO PARIONA.
Obtained : Graduate in Mathematics.

In this thesis work, it consists of finding by means of Semigroups the solution of a Heat Equation with non-linearity $u^p$is a partial differential equation of the parabolic type that describes the propagation of heat in a bar.

$$(P) \qquad \left| \begin{array}{l} u_t - \Delta u = u^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \\ u(0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array} \right.$$

Where $T > 0$ and $p > 1$.

The objective of this work is to demonstrate the existence of solutions using the theory of Semigroups with Banach's Fixed Point Theorem.

Keywords:

- Parabolic Equation
- Heat equation
- Regularizing effect
- Semilinear equation
- Banach's fixed point theorem

INDICE GENERAL

Introducción

El estudio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) es muy importante en el modelamiento matemático y en la explicación de fenómenos físicos en la mecánica de los medios continuos, Química, Biología, dinámica poblacional entre otras, en este trabajo daremos énfasis a las ecuaciones del tipo parabólico lineal y no lineal. La ecuación nos permite describir fenómenos altamente irreversiblesen tiempo en los que la información se propaga a velocidad infinita.

En nuestro caso, demostramos la unicidad y existencia de solución utilizando el Teorema de Punto Fijo de Banach,usando la teoría de Semigrupos en la Ecuación del Calor con no linealidad u^p (problema principal).
Weissler, Breziz, Casenave y Quittner-Souplet, establecen resultados de la existencia y unicidad para este tipo de ecuaciones utilizando semigrupos y el teorema punto fijo de Banach, además de algunas teorías que aparecen en el análisis funcional. En este trabajo estamos interesados en aplicar la teoría de semigrupos y el punto fijo de banach para poder mostrar la existencia de soluciones un tipo de ecuación diferencial parcial no homogénea.
A su vez presentamos este trabajo con las siguientes divisiones. El trabajo consta de 6 capitulos: En el capitulo 1 detallamos el lugar donde se llevó acabo este trabajo de investigación ,en el capítulo 2 (Marco Teórico) está conformado por los prilimniares, los teoremas y lemas necesarios para entender el problema haciendo un recuento de las propiedades básicas del análisis funcional y tópicos inherentes al problema objeto de estudio para facilitar el trabajo mas adelante, haciendo énfasis en el Teorema de Punto Fijo de Banach ya que resolveremos nuestro problema aplicando dicho teorema,

capítulo 3 y 4 hablamos de las hipotesis del problema las variables y finalmente en los capítulos 5 y 6 mostramos nuestras conclusiones y recomendaciones respectivamente.

1 Información De La Actividad

El presente trabajo presenta las siguientes especificaciones e información necesaria para el conocimiento del desarrollo del trabajo con los siguientes puntos:

1. Este trabajo se realizó en mi domicilio debido a la coyuntura en la cual se encuentra atravesando actualmente nuestro País, mi es domicilio: Sector6 Grupo 12 mzk lote 3. Villa El Salvador.

2. El período de duración del trabajo fue de 3 meses.

3. El correo berrocal46865301@gmail.com

2 Marco Teórico

En este capítulo pues introduciremos algunas definiciones, propiedades básicas y teoremas, que nos ayudará para lograr nuestro objetivo, se sugiere que para más detalles ver los libros que se encuentran en la Bibliografía [4],[7],[14],etc.

2.1. Espacios Métricos

En la geometría del espacio tridimensional donde convivimos, definimos la distancia, longitud, ángulo, perpendicularidad pues utilizados frecuente. En matemáticas es cotidiano agrupar ciertos elementos en espacios abstractos y establecer relaciones semejantes entre ellos, similares a las de los puntos del espacio ordinario. Entre los espacios abstractos y el euclideano se establece el paralelismo que nos permite observar y lograr un análisis profundo de estos elementos. Para el estudio de esta aplicaciones, la manera más sencilla que se puede abordar es utilizar las propiedades del espacio métrico.

Para definir un espacio métrico no es necesario contar con una estructura algebraica definida en él. Es muy frecuente el uso de espacios métricos que son a su vez espacios vectoriales, con una métrica que proviene de una norma, estos son llamados espacios normados.

El concepto de métrica es importante en el contexto de los espacios de Banach, pues la propiedad de completitud, que veremos mas adelante, depende de la noción de métrica. Sin embargo, una métrica se define en un conjunto arbitrario no vacío y, no requiere ser definida en un conjunto con estructura algebraica, como por ejemplo en un espacio vectorial; pero si además dicho conjunto posee una estructura de espacio vectorial, ciertas métricas darán lugar a la noción de norma.

2.1.1. Noción de distancia y métrica

Sea X un subconjunto no vacío y sea d una función o aplicación de $X \times X$ en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Definición 1. *La función d es una métrica en X si, y solo si las siguientes propiedades se cumplen para cada x, y, z de X.*

M1) $d(x, y) \geq 0$; *(d es real no negativa)*

M2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$; *(d es una identidad)*

M3) $d(x, y) = d(y, x)$; *(d es simétrica)*

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$; *(propiedad de desigualdad triangular)*

La función d se denonomina distancia y $d(x, y)$ se lee *distancia de x a y*. Las métricas se denotan por diferentes letras o por una combinación de diversos símbolos. Si fuese necesario distinguir entre varias funciones distancia lo denotaremos por

$$d^X \quad \text{ó} \quad d_X$$

y para casos específicos, usaremos

$$d_p, \quad d_\infty, \quad d_f, \quad \overline{d}, \quad \widetilde{d}, ..., \quad etc$$

cuando sea necesario usaremos la notación completa (X, d).
Si $Y \subseteq X$ definimos:

$$d\,|_{Y \times Y} = \widetilde{d}$$

El par $(Y, \widetilde{d})$ se llama **subespacio métrico** de X, donde $\widetilde{d}$ es llamada **Métrica Inducida** en Y por d.

Observación 1. *Los elementos del conjunto X se llaman puntos.*

A continuación daremos unos ejemplos de espacios métricos.

Ejemplo 1. *Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, donde d es una función determinada por*

$$\begin{aligned} d \ : \ & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \longmapsto d(x, y) = |x - y|. \end{aligned}$$

*Entonces d, es una métrica en $\mathbb{R}$, **llamada métrica usual o fundamental** de $\mathbb{R}$ y se representará por $d = d_u$.*

Ejemplo 2. *Si X es un conjunto cualquiera y la función d se define mediante*

$$\begin{aligned} d \;:\; & X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto d(x,y) = \begin{cases} 0, & si \quad x = y \\ 1, & si \quad x \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

entonces, d es una métrica en X, llamada también **métrica discreta o trivial**.

Ejemplo 3. *Si f, g son elementos de $C[a,b]$ y si d es una función definida por*

$$\begin{aligned} d \;:\; & C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (f,g) \qquad \longmapsto d(x,y) = \max_{a \leq x \leq b} \big|f(x) - g(x)\big|. \end{aligned}$$

Entonces, d es una métrica en $C[a,b]$.

Ejemplo 4. *Sea $B(A) = \Big\{f/f : A \longrightarrow \mathbb{R}\ f \text{ es acotada}\Big\}$ y sea d la función definida por:*

$$\begin{aligned} d \;:\; & B(A) \times B(A) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (f,g) \qquad \longmapsto d(f,g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)| \end{aligned}$$

Entonces d es una métrica en $B(A)$.

Proposición 1. ***(Desigualdad de Cauchy – Schwarz).*** *Si $a_i, b_i \in \mathbb{R}$; $i = 1, 2, ..., n$, entonces:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración. En efecto para todo a_i, b_i, λ de $\mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i - \lambda b_i\big)^2 \geq 0$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} \big(a_i^2 - 2\lambda a_i b_i + \lambda^2 b_i^2\big) \geq 0$$

luego

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geq 0$$

lo que entraña

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq 0$$

ordenando el polinomio en λ, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\lambda^2 - \left(2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \geq 0. \tag{2.1}$$

Luego, para que la ecuación (2.1), tenga solución para cualquier valor real λ, el discriminante debe ser menor o igual que cero, es decir:

$$\left[2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]^2 - 4\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right] \leq 0$$

entonces

$$4\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]^2 \leq 4\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right].$$

Por lo tanto

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{\frac{1}{2}}. \blacksquare$$

Ejemplo 5. *Sea* $\mathbb{R}^n = \left\{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ tal que } x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, ..., n\right\}$ *y sea* e_n *una aplicación determinada por:*

$$\begin{aligned} e_n \quad : \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \quad \longmapsto e_n(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

La función e_n *es una métrica en* $\mathbb{R}^n$*,* ***llamada métrica Euclideana****.*

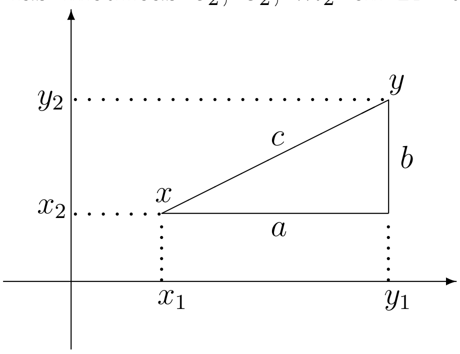
Ejemplo 6. *Dado* $\mathbb{R}^n = \left\{x/x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ tal que } x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, ..., n\right\}$ *y sean* s_n*,* m_n *aplicaciones definidas por:*

$$\begin{aligned} s_n \quad : \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \quad \longmapsto s_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_n \quad : \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \quad \longmapsto m_n(x, y) = \text{máx}\{|x_i - y_i|/i = 1, 2, ..., n\}. \end{aligned}$$

Entonces, tanto s_n como m_n son métricas en $\mathbb{R}^n$, llamadas métrica de la suma y del máximo respectivamente.

Para $n = 2$ las métricas e_2, s_2, m_2 en $\mathbb{R}^2$ tienen la interpretación geométrica:



$Figura\,01$

En el triángulo rectángulo: el valor de la hipotenusa es la distancia euclideana de x a y; el valor de la suma de los catetos es la distancia suma entre x e y; el mayor valor de los catetos es la distancia del máximo de x a y; es decir,

$$e_2(x,y) = c \quad ; \quad s_2(x,y) = a + b \quad ; \quad m_2(x,y) = a.$$

Ejemplo 7. *Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y sea d una aplicación caracterizada por*

$$\begin{aligned} d \ : \ & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto d(x,y) = (x-y)^2. \end{aligned}$$

Entonces, d no es una métrica en $\mathbb{R}$, puesto que la función d no cumple la desigualdad triangular.

Ejemplo 8. *Sea $\mathbb{C}$ el conjunto de los números complejos y sea $\boldsymbol{c}$ una función definida por*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c} \ : \ & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto \boldsymbol{c}(x,y) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}, \end{aligned}$$

donde $x = a + bi$, $y = c + di$, $i = \sqrt{-1}$. Entonces $\boldsymbol{c}$ es una métrica en $\mathbb{C}$.

Ejemplo 9. *Dado (X,d) un espacio métrico, k un número real positivo y la función kd caracterizada por:*

$$\begin{aligned} kd \ : \ & X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x,y) \longmapsto kd(x,y) = k[d(x,y)]. \end{aligned}$$

Entonces (X, kd) es un espacio métrico.

Ejemplo 10. *Dado (X, d) un espacio métrico y sea m una Aplicación definida mediante*

$$\begin{aligned} m \ : \ & X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, y) \longmapsto m(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}. \end{aligned}$$

Entonces (X, m) es un espacio métrico.

Ahora enunciaremos las desigualdades clásicas de Hölder y Minkowski.

Lema 1. ***(Desigualdad de Hölder).*** *Dados $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_n$ números reales arbitrarios, $p, q > 1$ conjugados, entonces se satisface*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i\, y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q} \tag{2.2}$$

Demostración. Ver [13,pag. 10].

Lema 1. ***(Desigualdad de Minkowski).*** *Si x_i, y_i son números reales, para cada $i \in \mathbb{N}$ y $p \geq 1$, entonces se satisface la siguiente desigualdad*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i + y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i|^p \right)^{1/p} \tag{2.3}$$

Demostración. Ver [13,pag. 12].

Proposición 2. *Sean X un conjunto no vacío, el par (E, d_2) un espacio métrico y $f : X \longrightarrow (E, d_2)$ una función inyectica, tal que para todo x, y de X se cumple*

$$d_1(x, y) = d_2\big(f(x), f(y)\big).$$

Entonces, d_1 es una métrica en X.

Demostración. Ver [9,pag. 05.]

La aplicación d_1 se llama también métrica inducida en el conjunto X por la función f.

Definición 2. *Si* (X, d) *es un espacio métrico y* A *es un subconjunto de* X*, el subconjunto* A *dotado de la misma distancia* (A, d) *se denomina subespacio métrico de* (X, d)*.*

Ejemplo 11. *Sea* $(\mathbb{R}, d)$ *espacio métrico, donde d es la métrica usual, es decir,* $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = |x - y|$*; y sea* $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$*. Entonces:*

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^2 : d(p, q) = |p - q|,$$

luego $(\mathbb{Z}, d)$ *es un espacio métrico.*

Sea $p \geq 1$ un número real, definimos el conjugado de p como $p^* = q$ tal que cumple la siguiente igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

y notamos que también $1 < q < \infty$, así podemos observar que entre p y q es simétrica: $q^* = p$.

Lema 2. ***(Desigualdad de Young).*** *Sea* $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *entonces*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q};\ \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

Más generalmente, para cada $\varepsilon > 0$ *se verifica*

$$ab \leq \frac{a^p}{p\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^q}{q} \tag{2.4}$$

Demostración. Ver [7,pag.622.]

Definición 3. *(**Sucesión de Cauchy**). Una succuencia* $(X_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *sobre el espacio métrico* (X, d)*; es llamada sucesión de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, d(x_\nu, x_m) < \varepsilon;\ \forall \nu, m > N.$$

Definición 4. *(**Espacio Completo**). Un espacio métrico* (X, d) *es completo, si toda sucesión de Cauchy contenida en* X *converge a un elemento de* X*,es decir, existe un elemento del espacio que es el límite de la sucesión.*

2.2. Espacios de Banach

El análisis clásico se entiende como el estudio de variables como magnitudes y números, mientras que, el análisis funcional consiste en que las variables sean tratadas como funciones para estudiarlas como conjunto. Esta rama de las matemáticas, comienza a aparecer en el siglo XVIII, al considerar el conjunto de soluciones de algunas ecuaciones diferenciales. Sin embargo, cobra más importancia en el siglo XIX donde Volterra lo declara en 1900 como el "siglo de la teoría de las funciones". Banach fue la figura más importante en el desarrollo del análisis funcional, con la aparición del libro "Théorie des opérations linéaires" en el año 1932, donde recopiló sus propios trabajos, además de todos los resultados e investigaciones sobre espacios normados de la época, algunos de los cuales, siguen siendo de gran relevancia en la actualidad dentro de esta área, además Banach plantea diversas preguntas que fueron más adelante fuentes de investigación para muchos trabajos dentro del análisis funcional. En 1960 la investigación matemática sobre espacios normados y espacios de Banach mostró un considerable crecimiento, lo que dio paso a que la teoría de los espacios de Banach ganara mayor profundidad y alcance. La mayoría de los problemas clásicos fueron resueltos y se logró una mayor conexión entre la teoría de los espacios de Banach y otras áreas de la matemática. Dentro del marco de la investigación del análisis funcional, la siguiente investigación estará centrada en introducir al lector en los espacios de Banach, para esto daremos a conocer algunos conceptos previos necesarios para la investigación.

Definición 5. *Sea $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial sobre K, una norma en $\mathbb{V}$ es una función $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ verificando:*

(i) (Positividad) $\|u\| \geq 0$ *y* $\|u\| = 0$ *si, y sólo si,* $u = 0_{\mathbb{V}}$.

(ii) (Producto por un escalar) $\|\alpha\, u\| = |\alpha|\, \|u\|$ *para cualquier escalar* α.

(iii) (Desigualdad triangular) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para todo* $u, v \in \mathbb{V}$.

Al par $(\mathbb{V}, \|.\|)$ *se le denomina* ***Espacio vectorial normado.***

Observación 2. *Si por otro lado ,si (i) no se cumple en la segunda parte, la función $\|.\|$ se llama **seminorma.***

La medida asociada a una norma $\|\cdot\|$ es

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Se verifica que efectivamente d satisface muy bien con que sea una métrica.

Definición 6. ***(Espacio de Banach).****Si X es un espacio métrico completo, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente en X.*

$$\forall (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subseteq X : \qquad \lim_{\nu,m\to\infty} d(x_\nu, x_m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in X : \quad \lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x.$$

Lema 3. *Sea d una métrica en X inducida por una norma $\|\cdot\|$ en X, entonces:*

1. *i)* $d(x + a, y + a) = d(x, y), \quad \forall x, y, a \in X$
2. *ii)* $d(\beta x, \beta y) = |\beta| d(x, y), \quad \forall x, y \in X,\ \forall \beta \in \mathbb{K}$.

2.2.1. Teorema de punto fijo de Banach

Definición 5. ***(Punto fijo).*** *Un punto fijo de la aplicación $T : X \to X$ es un punto $x \in X$, tal que $T(x) = x$.*

Definición 8. ***(Contracción).*** *Sean X e Y dos espacios con la métrica d. Una aplicación $T : X \to X$ es llamada contracción,cuando existe un número real $0 < k < 1$ tal que para todo $x, y \in X$ se tiene: $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$*

Teorema 1. ***(Teorema del Punto Fijo de Banach).****Sean (X, d) un espacio métrico completo, M no vacío y cerrado $M \subset X$ y $T : M \to M$ una contracción, entonces T posee un único punto fijo $x \in M$ tal que $T(x) = x$.*

Demostración. Como $M \subset X$ es cerrado y X es completo entonces podemos decir que M es **completo con la misma métrica**. Por otro lado , sea $x_0 \in X$ cualquier

elemento fijo. Definimos la sucesión $x_n = T^n(x_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Ahora con ayuda de la contracción de T probaremos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea una Sucesión de Cauchy.

En efecto Sea $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$,entonces :
$\Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n)$
$\Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_n)$
Y así sucesivamente obtenemos:

$\Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_{m+3}) + \cdots\cdots + d(x_{n-1}, x_n)$ .....(1)

Y utilizando la propiedad de contracción de T, obtenemos:

$\Longrightarrow d(x_a, x_{a+1}) = d(T(x_{a-1}), T(x_a)) \leq qd(x_{a-1}, x_a) = qd(T(x_{a-2}), T(x_{a-1})) \leq q^2 d(x_{a-2}, x_{a-1}) =$
$q^2 d(T(x_{a-3}), T(x_{a-2})) \leq q^3 d(x_{a-3}, x_{a-2}) \leq \cdots\cdots\cdots\cdots \leq q^{a-1} d(x_1, x_2) \leq q^a d(x_0, x_1)$ ....(2)

$\Longrightarrow d(x_a, x_{a+1}) = d(T(x_{a-1}), T(x_a)) \leq qd(x_{a-1}, x_a) = qd(T(x_{a-2}), T(x_{a-1})) \leq q^2 d(x_{a-2}, x_{a-1}) =$
$q^2 d(T(x_{a-3}), T(x_{a-2})) \leq q^3 d(x_{a-3}, x_{a-2}) \leq \cdots\cdots\cdots\cdots \leq q^{a-1} d(x_1, x_2) \leq q^a d(x_0, x_1)$ ....(2)

Reemplazando (2) en (1), se obtiene:
$\Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + d(x_{m+2}, x_{m+3}) + \cdots\cdots + d(x_{n-1}, x_n)$
$\Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq q^m d(x_0, x_1) + q^{m+1} d(x_0, x_1) + q^{m+2} d(x_0, x_1) + \cdots\cdots + q^{n-1} d(x_0, x_1)$
$\Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq (q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \cdots\cdots + q^{n-1}) d(x_0, x_1)$
Por lo tanto
$\Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq q^m (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots\cdots + q^{n-1-m}) d(x_0, x_1)$
$\Longrightarrow d(x_m, x_n) \leq q^m (\sum_{i=1}^{\infty} q^i) d(x_0, x_1) = \frac{q^m}{1-q} d(x_0, x_1)$......(3)

Haciendo ahora $m \to \infty$, entonces$n \to \infty$ pues $m < n$,entonces de la desigualdad obtenemos

$$d(x_m, x_n) \to 0$$

Esto quiere decir que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una Sucesión de Cauchy en M.Y como M es completo , entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un único punto a de M.A hora veamos que $T(x) = x$,o lo que es lo mismo $d(x, T(x)) = 0$.

En efecto,usando la desigualdad triangular

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_m)$$

Sin perder generalidad suponemos $n > m$ y usando la desigualdad (3),obtenemos :

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_m) + \frac{q^m}{1-q} d(x_0, x_1)$$

Haciendo ahora $m \to \infty$, tenemos $d(x, x_m) \to 0$ entonces:

$$d(x, x_n) \leq \frac{q^m}{1-q} d(x_0, x_1)$$

y finalmente , utilizando la desigualdad triangular y utilizando la contracción de T obtenemos :
$d(x, T(x)) = d(x, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, T(x)) \leq d(x, x_{m+1}) + d(T(x_m), T(x)) \leq d(x, x_{m+1}) + qd(x_m, x)$
Haciendo ahora $m \to \infty$, tenemos :

$$0 \leq d(x, T(x)) \leq 0$$

Así que $d(x, T(x)) = 0$, es decir $T(x) = 0$, ahora veamos la unicidad del punto fijo x.Supongamos que existe otro punto fijo $\widetilde{x}$ en M diferente de x,es decir $d(x, \widetilde{x}) > 0$,entonces tenemos :

$$d(x, \widetilde{x}) = d(T(x), T(\widetilde{x})) \leq qd(x, \widetilde{x})$$

Y como $d(x, \widetilde{x}) > 0$,obtenemos

$$1 \leq q < 1$$

Lo cual es absurdo. ■

2.3. Los espacios $L^p(\Omega)$

Definición 6. ***(Función escalonada).*** *Sea Ω un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, decimos que la función*

$$s : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

es escalonada en Ω, si existe una partición $\mathfrak{P}$ de Ω tal que

$$s(x) = c_k, \ x \in \Omega_k$$

Si s es escalonada en Ω, decimos que $s \in S(\Omega)$

Definición 7. ***(Función medible).*** *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, se dice que f es medible en Ω, si existe una sucesión de funciones escalonadas en Ω, si $(s_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ tal que*

$$s_\nu(x) \to f(x), \ c.t.p. \ x \in \Omega$$

Si f es medible en Ω, decimos que $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$

C.t.p: Casi todo Punto.

Definición 8. ***(Función simple).****Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{M}$; se llama* ***función simple*** *en Ω a una función medible $s : \Omega \to \mathbb{R}$ que sólo toma un número finito de valores, es decir, tal que $s(\Omega) = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. En este caso se puede expresarse de la forma*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \chi_{A_i}(x)$$

donde $A_i = s^{-1}(\{a_i\}) = \{x \in \Omega : \ s(x) = a_i\}$ y χ_{A_i} es la función característica del conjunto A_i.

Teorema 2. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{A}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa. Existe una sucesión de funciones simples de Ω en $\mathbb{R}$ tales que*

1) $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ *para todo* $x \in \Omega$ *y todo* $n \in \mathbb{N}$.

2) $\lim_n s_n(x) = f(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

Demostración. Ver [6,pag.63.]

2.3.1. La Integral de Lebesgue

Definición 9. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{A}$ y $s : \Omega \to \mathbb{R}$ una función simple no negativa,* $s = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, *si* $i \neq j$ *y* $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$.
Se define la integral de s en Ω por

$$\int_\Omega s := \sum_{i=1}^{k} a_i \, m(A_i)$$

con el convenio de que $0 \cdot \infty = 0$.

Resulatdos importantes:

1) La integral es no negativa, y puede ser infinita:

$$0 \leq \int_\Omega s \leq \infty.$$

2) Una interpretación geométrica en $\mathbb{R}^3$, sería que la integral de s es la suma de los volúmenes de los prismas de base A_i y altura a_i.

Proposición 3. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{A}$ y $s_1, s_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones simples no negativas. Entonces*

1) $\int_\Omega (s_1 + s_2) = \int_\Omega s_1 + \int_\Omega s_2$.

2) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_\Omega \alpha s_1 = \alpha \int_\Omega s_1$.

3) Si existe $E \subseteq \Omega$ con $m(E) = 0$, tal que $s_1(x) \leq s_2(x)$ para todo $x \in \Omega - E$, entonces

$$\int_\Omega s_1 \leq \int_\Omega s_2.$$

Demostración. Ver [1,pag.16.]

Definición 10. *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{A}$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible, no negativa para todo $x \in \Omega$. Se define la integral de f en Ω por*

$$\int_\Omega f := \sup \left\{ \int_\Omega s : s \quad \textit{función simple}, \quad 0 \leq s \leq f \right\}$$

Teorema 3. ***(Convergencia Monótona).*** *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de funciones integrables no negativas, entonces*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dx.$$

Demostración. Ver [03,pag.55].

Teorema 4. ***(Teorema de Bochner).*** *Sea I un intervalo y X un Espacio de Banach. Sea $f : \mathbb{I} \to X$una función medible. Entonces f es integrable si y sólo si $\|f\|$ es integrable.Además tenemos:*

$$\left\| \int_I f \right\|_X \leq \int_I \|f\|_X$$

Diremos que dos funciones son equivalentes, si ellas son iguales casi todo punto de Ω.

Demostración. Ver [05,pag.7.]

Definición 11. ***(Espacio $\mathcal{L}^p(\mu)$).*** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible y $1 \leq p < \infty$ un número real positivo.Una función f es $\mathcal{A}-medible$ definida de Ω en $\mathbb{R}$, se dice que pertenece al espacio $\mathcal{L}^p(\mu)$ si:*

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty. \tag{2.5}$$

Es decir:

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \textit{ medible y } \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty \right\} \tag{2.6}$$

Definición 12. ***(Supremo Esencial).*** *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medible y f Una función, $\mathcal{A}-medible$.Para cada $M > 0$ definamos $E_M = \{x \in \Omega / |f(x)| > M\}$.Nótese que $E_M \in \mathcal{A}$ en virtud de que f es $\mathcal{A}-medible$.Sea*

$$A = \{M > 0/\mu(E_M) = 0\}$$

$$A = \{M > 0/\ |f(x)| \leq M \ c.t.p\}.$$

El supremo esencial de f denotado por $ess\sup f$ o $\|f\|_\infty$ es definido por:

$$\|f\|_\infty = ess\sup f = \begin{cases} \infty & si \quad A = \varnothing \\ \inf f & si \quad A \neq \varnothing \end{cases}$$

y por lo tanto el conjunto :

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \ medibles \ y \ \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Los elementos de $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ se llaman funciones esencialmente acotadas.

Ahora para corregir la debilidad del espacio $\mathcal{L}^p(\mu)$,tenemos dos funciones f y g en $\mathcal{L}^p$ de modo que que f esté relacionada con g si y sólo si $f = g$ en c.t.p :

$$f \, \mathfrak{R} \, g \Longleftrightarrow f = g \ \ c.t.p$$

Una ves que se haya verificado que $\mathfrak{R}$ es una relación de equivalencia ,denotamos la clase generada por f como:

$$[f] = \{g \in \mathfrak{L}^p(\mu) \ / \ g \ \mathfrak{R} \ f\} \ \ y \ \ \|[f]\|_p = \|g\|_p \ \ para \ \ g \in [f]$$

Ahora sea bien ,g_1 y g_2 en $[f]$,entonces

$$g_1 \ \mathfrak{R} \ f \Longleftrightarrow g_1 = f \ \ c.t.p$$

y

$$g_2 \ \mathfrak{R} \ f \Longleftrightarrow g_2 = f \ \ c.t.p$$

Por lo tanto $g_1 = g_2$ c.t.p, entonces:

$$\|g_1\|_p = \|g_2\|_p$$

Esto nos indica que $\|[f]\|_p = \|g\|_p$ está bien definida por ser independiente del representante de la clase $[f]$.
Ahora, definamos $L^p(\mu) = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \dfrac{\mathcal{L}^p(\mu)}{\mathfrak{R}} = \Big\{ [f]/ \ f \in \mathcal{L}^p(\mu)\Big\}$.

Definición 13. ***(Espacio** $L^p(\Omega)$**).*** *Sea Ω un subconjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ no vacío y $1 \leq p < \infty$. $L^p(\Omega)$ tiene elementos u definidas en Ω para la cual cumplen*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty. \tag{2.7}$$

El conjunto $L^p(\Omega)$ tiene como elementos clases de equivalencia de funciones medibles cumpliendo (2.7). Para $1 \leq p < \infty$ se define

$$L^p(\Omega) = \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\mathfrak{R}} = \Big\{[u]/u \in \mathcal{L}^p(\Omega)\Big\}.$$

En lo sucesivo, si no hay confusión usaremos u en lugar de $[u]$.
Se verifica que, si $u \in L^p(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $cu \in L^p(\Omega)$.
Es conveniente verificar que $L^p(\Omega)$ es un espacio vectorial.

Para verificar que la suma de dos funciones en $L^p(\Omega)$, hacemos uso de la desigualdad (2.13) con la cual tendremos que si $u, v \in L^p(\Omega)$

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |v(x)|^p). \tag{2.8}$$

Así de esta última desigualdad (2.8) y (2.12) se concluye que $u + v \in L^p(\Omega)$; de hecho $L^p(\Omega)$ es un espacio normado."
El funcional $\|\cdot\|_p$ definido por:

$$\|u\|_p := \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

es una norma bien definida en $L^p(\Omega)$.

Definición 14. ***(Espacio** $L^\infty(\Omega)$**).*** *Dada u una función medible en Ω es llamada esencialmente acotada si existe una constante $K > 0$ tal que $|u(x)| \leq K$ c.t.p en Ω. La mayor de las cotas inferiores K es llamada* ***supremo esencial*** *de $|u|$ en Ω y la notación será $\operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$.*

Denotamos por $L^\infty(\Omega)$ el espacio vectorial de todas las funciones u que son esencialmente acotadas en Ω.

La funcional $\|u\|_\infty = \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega}|u(x)|$ define una norma en $L^\infty(\Omega)$.

Teorema 5. ***(Desigualdad de Hölder).*** *Sean $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ con $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ y $p>1$, entonces:*

(I) $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.

(II) $\|fg\| \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$

(III) $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r} \Longrightarrow \|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$

Demostración

(I) *Como* $f \in L^p(\Omega) \Longrightarrow \displaystyle\int_\Omega |f|d\mu < \infty$

De la misma manera $g \in L^q(\Omega) \Longrightarrow \displaystyle\int_\Omega |g|d\mu < \infty$

(II) *(i)* *Si* $\|f\|_{L^p}=0$ *entonces* $f=0$ *c.t.p* $\Longrightarrow fg=0$ *c.t.p*

Entonces $\|fg\|_{L^1}=0 \geq 0 = \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}=0$

(ii) *Si* $\|f\|_{L^p} \neq 0$ *y* $\|g\|_{L^q} \neq 0$ *(Hölder Clásico)*

Por la Desigualdad de Young entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q};\ \forall a,b \in \mathbb{R}^+$$

Definimos:

$$\hat{f}_{(x)} = \frac{1}{\|f\|_{L^p}}.f(x) \quad \wedge \quad _{(x)} = \frac{1}{\|g\|_{L^p}}.g(x)$$

Hallamos la norma :

$$\|\hat{f}\|^p_{L^p} = \frac{1}{\|f\|^p_{L^p}}.\|f\|^p_{L^p} = 1 \Longrightarrow \|\hat{f}\|^p_{L^p}=1,$$ *de la misma manera se obtiene*

$$\|\hat{g}\|^q_{L^q}=1$$

$$\Longrightarrow |f\hat{(x)}g\hat{(x)}| \leq \frac{|f\hat{(x)}|^p}{p}+\frac{|g\hat{(x)}|^q}{q}$$

$$\Longrightarrow \int_X |f\hat{(x)}g\hat{(x)}|d\mu(x) \leq \int_X \frac{|f\hat{(x)}|^p}{p}d\mu(x)+\int_X \frac{|g\hat{(x)}|^q}{q}d\mu(x)$$

$$\Longrightarrow \int_X |f(\hat{x})g(\hat{x})|d\mu(x) \leq \frac{\|f\|_{L^p}^p}{p} + \frac{\|g\|_{L^q}^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Longrightarrow \int_X \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p}} . \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q}} d\mu(x) \leq 1 \ \Longrightarrow \int_X |f(x)g(x)|d\mu(x) \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$$

$$\Longrightarrow \|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \ \blacksquare$$

(III) Tenemos: $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}$

Si $f \in L^p \Longrightarrow f^p \in L^1 \Longrightarrow f^r \in L^{\frac{p}{r}}$ *,Si* $g \in L^q \Longrightarrow g^q \in L^1 \Longrightarrow g^r \in L^{\frac{q}{r}}$

$$\Longrightarrow \|fg\|_{l^r}^r = \|f^r g^r\|_{l^1}^r \leq \|f^r\|_{L^{\frac{p}{r}}} \|g^r\|_{L^{\frac{q}{r}}}$$

$$\Longrightarrow \|fg\|_{L^r}^r \leq \left(\int_X |f^r|^{\frac{p}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{p}} . \left(\int_X |g^r|^{\frac{q}{r}} d\mu\right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\Longrightarrow \|fg\|_{L^r}^r \leq \left(\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^r . \left(\left(\int_X |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right)^r$$

$$\Longrightarrow \|fg\|_{L^r}^r \leq \left(\|f\|_{L^p}\right)^r . \left(\|g\|_{L^q}\right)^r$$

$$\Longrightarrow \|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \ \blacksquare$$

Teorema 5. ***(”Desigualdad de Minkowski”).***

$$Si \ \ 1 \leq p < \infty, \ f, g \in L^p(\Omega) \Longrightarrow f + g \in L^p(\Omega), \ \|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \quad (2.7)$$

Demostración. *Sea* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ \Longrightarrow \ q = \frac{p}{p-1}$

Si $f \in L^p \Longrightarrow \ f^{p-1} \in L^q$

$$\Longrightarrow \|f^{p-1}\|_{L^q}^q = \int_X |f(x)^{p-1}|^q d\mu(x) = \int_X |f(x)|^{(p-1).\dfrac{p}{p-1}} d\mu(x)$$

$$\Longrightarrow \|f^{p-1}\|_{L^q}^q = \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$$

Sea $f, g \in L^p$,

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p}^p = \int_X |f(x)+g(x)|^p d\mu(x) = \int_X |f(x)+g(x)|.|f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu(x)$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p}^p \leq \int_X (|f(x)|+|g(x)|)|f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu(x)$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p}^p \leq \int_X (|f(x)|)|f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu(x) + \int_X (|g(x)|)|f(x)+g(x)|^{p-1} d\mu(x)$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p}^p \leq \||f|.|f+g|^{p-1}\|_{L^1} + \||g|.|f+g|^{p-1}\|_{L^1}$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^p}\||f+g|^{p-1}\|_{L^q} + \|g\|_p\||f+g|^{p-1}\|_{L^q}$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\,(\||f+g|^{p-1}\|_{L^q})$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left(\int_X \left(|f+g|^{p-1}\right)^q d\mu(x)\right)^{\dfrac{1}{q}}$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left(\int_X |f+g|^{(p-1)\cdot\frac{p}{p-1}} d\mu(x)\right)^{\dfrac{p-1}{p}}$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \left(\left(\int_X |f+g|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{p-1}$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p}^p \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})\left(\|f+g\|_{L^p}^{p-1}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{\|f+g\|_p^p}{\left(\|f+g\|_p^{p-1}\right)} \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \Longrightarrow (\|f+g\|_{L^p}^p)\,.\left(\|f+g\|_{L^p}^{1-p}\right) \leq (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p})$$

$$\Longrightarrow \left(\|f+g\|_{L^p}^{(p+1-p)}\right) \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

$$\Longrightarrow \|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \blacksquare$$

Proposición 4. *$C_C(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq q \leq \infty$*

Demostración. Ver [03,pag.90].

Definición 13. ***(Convolución en $L^1(\Omega)$).*** *Para todas $f, g \in L^1(\Omega)$ la función $f * g$ se define mediante la siguiente fórmula:*

$$(f * g)(x) := \int_{\Omega} f(x-y)g(y)d\mu(y) \quad \forall x \in \Omega$$

Donde μ es la medida de Ω.

Observación 2. *La convolución de dos funciones u y v sobre $\mathbb{R}^n$ es la función*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, v(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy, \; x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

2.3.2. Desigualdad de Young Para Convolución

Sean $r, q \geq 1$ / $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} > 1$. Definimos p de la siguiente manera $\frac{1}{p} := \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - 1$ .Sean $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ entonces:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_r \|g\|_q$$

Teorema 6. ***(Densidad).*** *El espacio $C_C(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$ (i.e);*

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall \epsilon \in > 0, \exists f_1 \in C_C(\mathbb{R}^n) / \|f - f_1\|_1 \leq \epsilon$$

Demostración. Ver [03,pag. 90.]

Definición 14. ***(Soporte).*** *El soporte de una función se define como la clausura del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.*

Denotaremos por $C_0(X)$ al espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ de todas las funciones

$f : X \to \mathbb{K}$ que tiene soporte compacto.

Proposición 5. *Sea $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ una secuencia creciente en $C_0(\Omega)$, que converge puntualmente a una función $f \in C_0(\Omega)$. Entonces $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f.*

Demostración. Ver [08,pag.14.]

2.4. Espacios de Bochner

En matemáticas los Espacios de Bochner son una generalización de los espacios L^p espacios a funciones cuyos valores se encuentran en un espacio de Banach que no es necesariamente el espacio $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 14. *Sea $\mu : (0,T) \rightarrow\ X$ es un mapeo de un intervalo $(0,T)$,$T > 0$ a un espacio de Banach X.Diremos que μ es **fuertemente medible** si la función real $t \rightarrow\ \|u(t)\|_x$ es **medible**. Para un $q \in [1; \infty >$ y la norma $\| \cdot \|_x$ nosotros denotamos por $L^q(0;T;X)$ el conjunto de todos los mapeos $f : [0;T] \rightarrow\ X$ que son fuertemente medible y tal que:*

$$\|f\|_{L^q(0;T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|f\|_x^q dt\right)^{1/q} < \infty & para \quad q < \infty \\ esssup_{t\in[0;T]}\|f(t)\|_x < \infty; & para \quad q = \infty \end{cases}$$

El espacio $L^q(0;T;X)$ con la norma $\| \cdot \|_{L^q(0;T;X)}$ es un espacio de Banach . Evidentemente , $L^q(0;T;L^q(\Omega)) = L^q(\Omega \times (0;T))$.

Para mas detalles de Espacios de Bochner se sugiere revisar [10,pag.54]

2.5. Resultados Claves

En lo que sigue consideraremos a X un espacio de Banach.

2.5.1. Ecuación del Calor Homogéneo

Consideremos el siguiente Problema de Valor Inicial (P.V.I):

Problema:

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} u_t - \Delta u, = 0, \quad (x,t) \in R^n \times \ (0,T) \\ \\ u(0) = u_0, \quad x \in \ R^n. \end{array} \right.$$

En en capítulo II del Libro [07] , se obtiene la solución fundamental y por medio de este se puede tener la representación de la solución de (1) la cual vendría hacer :

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} . \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy \tag{2.8}$$

Teorema 7. ***(Solución del Problema de Valor Inicial)*** *Asumimos que la función $u \in C(R^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, y definir u por (2.8) .Entonces:*

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \ (0,T))$

(ii) $u_t(x,t) - \Delta u(x,t), = 0 \ \ (x \ \in \ \mathbb{R}^n, \ t > 0)$,

(iii) $\lim\limits_{(x,t)\to(x_0,0)} u(x,t) = u(x_0)$ *Para cada punto* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demostración: Ver [07,pag.47.]

2.5.2. Semigrupo

La teoría de Semigrupo de Operadores Lineales Acotados tiene un papel importante en el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Parciales en un espacio de Banach. Uno de los ingredientes esenciales de esta teoría es la noción de Operador Lineal Acotado.

Definición 16. *Sea X un espacio de Banach. A una familia de parámetros $S(t)$, con $0 \leq t < \infty$, de Operadores lineales Acotados para X en X será llamado un Semigrupo de Operadores Lineales Acotados en X si:*

1) $S(0) = I$ *, Donde I es el operador Identidad en X.*

2) $S(t+s) = S(t)S(s), \forall\, t, s \geq 0.$

Un Semigrupo de Operadores Lineales Acotados $S(t)$; es ***uniformemente Continuo*** *si*

$$\lim_{t \to 0} \|S(t) - I\| = 0$$

El operador Lineal A está definido por:

$$D(A) = \left\{ x \in X / \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} \; existe \right\}$$

y

$$A_x = \lim_{t \to 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \frac{d^+ S(t)x}{dt}|_{t=0} \quad \forall x \in X$$

Es el generador Infinitesimal del Semigrupo *$S(t)$, y $D(A)$ es el Dominio de A.*

Definición 15. *Un "semigrupo S(t)", con $0 \leq t < \infty$, de Operadores lineales Acotados en X Es un Semigrupo fuertemente continuo de Operadores Lineales Acotados si:*

$$\lim_{t \to 0} S(t)x = x \quad para \;\; cada \; x \in X.$$

Un Semigrupo fuertemente continuo de Operadores Lineales Acotados en X será llamado un ***Semigrupo de Clase*** *C_0 ó* ***simplemente un*** *C_0* ***Semigrupo****.*

Lema 4. *Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 Semigrupo en X, donde X es un espacio de Banach.Entonces existen $M \geq 1$ y $\delta > 0$ tales que, para $0 \leq t \leq \delta$,*

$$\|S(t)\| \leq M$$

.

Demostración. Ver [11,pag. 04.]

Teorema 8. *Sea* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *Semigrupo en* X*, donde* X *es un espacio de Banach.Entonces existen* $M \geq 1$ *y* $\omega \geq 0$ *tales que.*

$$\|S(t)\| \leq M\ e^{\omega t}, \quad \textit{para todo } t \geq 0.$$

.

Demostración. Ver [11,pag. 04.]

Observación 2. *Lo que vimos en el problema Homogéneo de la Ecuación del Calor tiene solución y esa solución en términos de Convolución tenemos que:*

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}.(h * u_0)(x) \quad \textit{Donde } h(z) = e^{\frac{-|z|^2}{4t}}$$

En este sentido podemos representar de la siguiente forma :

$$u(x,t) = (S(t) * u_0)(x) \quad \textit{Donde} \quad S(t)(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}.e^{\frac{-|x|^2}{4t}} \ \textit{Semigrupo del Calor.}$$

Proposición 5. *Sea* $1 \leq q \leq p \leq \infty$ *entonces:*

$$\|S(t) * \varphi\|_{L^p} \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}.\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}.\|\varphi\|_{L^q} \quad \forall\ t > 0\ \ y\ \ \forall\ \varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$$

Demostración

Sea $\|S(t) * \varphi\|_p$ y por la desigualdad de Young para la Convolución.

$\Longrightarrow \|S(t) * \varphi\|_{L^p} \leq \|S(t)\|_{L^r}\|\varphi\|_{L^q}$............................(1)

Aproximamos ahora $\|S(t)\|_{L^r}$ y como $S(t)(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}.e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$

$$\Longrightarrow \|S(t)\|_{L^r} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left((4\pi t)^{-\frac{n}{2}}.e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\right)^r dx\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\Longrightarrow \|S(t)\|_{L^r} = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}.\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2 r}{4t}} dx\right]^{\frac{1}{r}} \text{............................(2)}$$

Realizamos el siguiente cambio de variable:

Sea, $z = \dfrac{xr^{\frac{1}{2}}}{2t^{\frac{1}{2}}} \implies |z| = \dfrac{|x|r^{\frac{1}{2}}}{2t^{\frac{1}{2}}} \implies |z|^2 = \dfrac{|x|^2 r}{4t}$

Como : $x = (x_1; x_2; \cdots\cdots\cdot; x_n)$ podemos decir $x = \dfrac{2zt^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}$

$$\implies Jacobiano = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial z_1}\cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial z_1} \\ \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial z_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial z_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial z_2}\cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial z_2} \\ \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \cdots & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial z_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2t^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} & 0 & 0\cdots & 0 \\ \\ 0 & \dfrac{2t^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} & 0\cdots & 0 \\ \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{2t^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix}$$

$$\implies Jacobiano = \left(\dfrac{2t^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\right)^n$$

Recordando también que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \pi^{\frac{n}{2}}$ y reemplazando en (2) se tiene lo siguiente:

$$\implies \|S(t)(x)\|_{L^r} = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}.\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2}.\left(\dfrac{2t^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\right)^n dz\right]^{\frac{1}{r}} = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}.\left(\dfrac{2t^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{n}{r}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz\right]^{\frac{1}{r}}$$

$$\implies \|S(t)(x)\|_{L^r} = (4)^{\frac{-n}{2}}.(\pi)^{\frac{-n}{2}}.(t)^{\frac{-n}{2}}.(r)^{\frac{-n}{2r}}.(2)^{\frac{n}{r}}.(t)^{\frac{n}{2r}}.(\pi)^{\frac{n}{2r}}$$

$$\implies \|S(t)(x)\|_{L^r} = (4)^{\frac{-n}{2}}.(4)^{\frac{n}{2r}}.(t)^{\frac{-n}{2}}.(t)^{\frac{n}{2r}}.(r)^{\frac{-n}{2r}}.(\pi)^{\frac{n}{2r}}.(\pi)^{\frac{-n}{2}}$$

$$\implies \|S(t)(x)\|_{L^r} = (4)^{\frac{-n}{2}+\frac{n}{2r}}.(t)^{\frac{-n}{2}+\frac{n}{2r}}.(r)^{\frac{-n}{2r}}.(\pi)^{\frac{-n}{2}+\frac{n}{2r}}$$

$$\implies \|S(t)(x)\|_{L^r} = (4\pi t)^{\frac{-n}{2}+\frac{n}{2r}}.(r)^{\frac{-n}{2r}}$$

Además sabemos que $r > 1$ entonces $0 < (r)^{\frac{-n}{2r}} < 1$

$\Longrightarrow \|S(t)(x)\|_{L^r} \leq (4\pi t)^{\frac{-n}{2}(1-\frac{1}{r})}$............................(3)

Reemplazando (3) en (1) :

Si $\|S(t) * \varphi\|_{L^p} \leq \|S(t)\|_{L^r} \|\varphi\|_{L^q}$ ahora decimos,

$\Longrightarrow \|S(t)\|_{L^r} \|\varphi\|_{L^q} \leq (4\pi t)^{\frac{-n}{2}(1-\frac{1}{r})} \|\varphi\|_{L^q}$

Y como sabemos $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q} - 1$ entonces $1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$

$\Longrightarrow \|S(t) * \varphi\|_{L^p} \leq (4\pi t)^{\frac{-n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|\varphi\|_{L^q}$ ■

2.6. Problema Principal

En este capítulo presentamos el resultado principal del trabajo de tesis, partimos considerando un problema parabólico abstracto.

Sea $T > 0$ y X un espacio de Banach. Dado $u_0 \in X$ y $f : [0,T] \to X$, nuestro obejtivo es resolver el problema:

$$(P) \quad \left| \begin{array}{l} u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X)\text{.........}(*) \\ \\ u\acute{}(t) = Au(t) + f(t),\ \forall t \in [0,T]\text{............}(**) \\ \\ u(0) = u_0\text{..}(***) \end{array} \right.$$

Como en el caso de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, nosotros tenemos el siguiente resultado **(La Fórmula de Variación de Parámetros, o Fórmula de Duhamel´s).**

Lema 5. *Sea $u_0 \in D(A)$ y sea $f \in C([0,T], X)$.Consideramos la siguiente solución $u \in C([0,T], D(A)) \cap C^1([0,T], X)$ del problema $(*)$ y $(***)$ entonces nosotros tenemos:*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Demostración. Ver [05.pag. 50.]

2.6.1. Ecuación del Calor no Homogéneo

Consideramos la Ecuación de Calor no Homogéneo (problema Parabólico no lineal): La Ecuación Del calor no Homegéneo,usando la Teoría de Semigrupos y El teorema del Punto Fijo De Banach demostraremos la existencia y unicidad en el problema (2).

Problema:

$$(2)\qquad \left|\begin{array}{l} u_t - \Delta u = u^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \\ u(0) = u_0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array}\right.$$

Definición 16. *Sea $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^n)$ y $p > 1$.Decimos que u es solución de (2), si $u \in L^\infty(0, T, L^r(\mathbb{R}^n)$, para algún $T > 0$ y satisface la siguiente condición.*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)u^p(\sigma)d\sigma \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.9}$$

La expresión (2.9) es conocida como **(La Fórmula de Variación de Parámetros, o Fórmula de Duhamel´s).**

Teorema 9. *Si $1 \leq p < 1 + \dfrac{2r}{n}$ entonces, el problema (2) posee solución, para todo $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^n)$*

Demostración

Para demostrar la existencia de solución del problema de la Ecuación del Calor no lineal (2) utilizaremos el Teorema Punto fijo de Banach:
Para ello definimos ϕ un Operador definido en X $(\phi : X \to X)$ donde

$$X = \{\psi \in L^\infty(0; T; L^r(\mathbb{R}^n))/ \ \|\psi(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq M + 1, \ \forall\, t \in (0,T)\}$$

Con

$$\phi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)u^p(\sigma)d\sigma \quad \forall t \in [0,T] \,.\ y\ \|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq M \tag{2.10}$$

Ahora vamos a mostrar lo siguiente:

(i) X: **Espacio de Banach**.

Como hemos Considerado un X:

$$X = \{\psi \in L^{\infty}(0;T;L^{r}(\mathbb{R}^{n}))/\ \|\psi(t)\|_{L^{r}(\mathbb{R}^{n})} \leq M+1,\ \ \forall\, t \in (0,T)\}$$

con la norma $\|\psi\|_{X} = Sup_{t\in[0,T]}\|\psi(t)\|_{L^{r}(\mathbb{R}^{n})}$ es completo con esta norma.

Ahora mostraremos que es completo X : En efecto:

Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy veamos que esta sucesión converge en X.

$\Longrightarrow \|u_n - u_m\|_X = Sup_{t\in[0,T]}\|u_n(t) - u_m(t)\|_{L^{r}(\mathbb{R}^{n})}$

Como L^r es completo entonces existe un $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ tal que

$\|u_n(t) - u\|_{L^{r}(\mathbb{R}^{n})} \leq \dfrac{\epsilon}{2T}$

Ahora mostraremos que $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge a u , en efecto:

$\Longrightarrow \|u_n - u\|_X = \|u_n - u_m + u_m - u\|_X \leq \|u_n - u_m\|_X + \|u_m - u\|_X$

Como $\|u_n - u_m\|_X \leq \dfrac{\epsilon}{2}$ **pues es de Cauchy en X**

Y además $\|u_m - u\|_X = Sup_{t\in[0,T]}\|u_m(t) - u(t)\|_{L^{r}(\mathbb{R}^{n})} \leq T\, \underbrace{\|u_m(t) - u(t)\|_{L^{r}(\mathbb{R}^{n})}}_{\dfrac{\epsilon}{2T}}$

$\Longrightarrow \|u_m - u\|_X \leq T.\dfrac{\epsilon}{2T} \Longrightarrow \|u_m - u\|_X \leq \dfrac{\epsilon}{2}$

$\Longrightarrow \|u_n - u\|_X \leq \|u_n - u_m\|_X + \|u_m - u\|_X \leq \dfrac{\epsilon}{2} + \dfrac{\epsilon}{2}$

$\Longrightarrow \|u_n - u\|_X \leq \epsilon$ y con ello demostramos que X es un espacio de Banach.

(ii) Ahora como sabemos que ϕ está definido de la siguiente manera

$\phi : x \to L^{\infty}(0;T;L^{r}(\mathbb{R}^{n}))$. Veamos que $\phi(X) \subset X$

Ahora en adelante para no sobrecargar el trabajo y las desigualdades consideraremos $L^r(\mathbb{R}^n) = L^r$

sabemos que $\|\phi(u(t))\|_{L^r} = \|(S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)u^p(\sigma)d\sigma\|_{L^r}$

Que luego por la Desigualdad de Minkowski.

$$\Longrightarrow \|\phi(u(t))\|_{L^r} \leq \|(S(t)u_0\|_{L^r} + \underbrace{\|\int_0^t S(t-\sigma)u^p(\sigma)d\sigma\|_{L^r}}_{I_2}$$

Aplicando en I_2 la integral de Bochner se tiene:

$$\Longrightarrow \|\phi(u(t))\|_{L^r} \leq \underbrace{\|(S(t)u_0\|_{L^r}}_{I_1} + \int_0^t \underbrace{\|S(t-\sigma)u^p(\sigma)\|_{L^r}}_{I_2} d\sigma$$

En la integral I_2 estimamos $\|S(t-\sigma)u^p(\sigma)\|_{L^r}$

Supongamos que $u^p(\sigma) \in L^\alpha$ por la proporsición (6) decimos:

$$\|S(t-\sigma)u^p(\sigma)\|_{L^r} \leq (4\pi(t-\sigma))^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{r}\right)} \|u^p(\sigma)\|_{L^\alpha} \text{............}(*)$$

$$\|u^p(\sigma)\|_{L^\alpha} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u^p(x,\sigma)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\sigma)|^{p\alpha} dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Entonces convenientemente decimos $r = p\alpha$

$$\alpha = \frac{r}{p} \Longleftrightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{p}{r}$$

Así decimos:

$$\|u^p(\sigma)\|_{L^\alpha} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u^p(x,\sigma)|^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\sigma)|^r dx\right)^{\frac{p}{r}} = \left(\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\sigma)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}}_{\|u(\sigma)\|_{L^r}}\right)^p$$

$$\|u^p(\sigma)\|_{L^\alpha} = \|u(\sigma)\|^p_{L^r} \text{............(**)}$$

Reemplazando (**) en (*) tenemos :

$$\|S(t-\sigma)u^p(\sigma)\|_{L^r} \leq (4\pi(t-\sigma))^{-\frac{n}{2}\left(\frac{p-1}{r}\right)} \|u(\sigma)\|^p_{L^r} \text{............}(***)$$

Aplicando en I_1 efecto regularizante y en y I_2 el resultado de (***) se tiene:

$$\|\phi(u(t))\|_{L^r} \leq \underbrace{(4\pi t)^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\right)}\|u_0\|_{L^r}}_{\alpha} + (4\pi)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)} \underbrace{\int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)}\|u(\sigma)\|_{L^r}^p d\sigma}_{\beta}$$

Ahora veremos si α y β son cantidades finitas:

Una de las primeras cosas que se debería hacer es que $u_0 \in L^r$
entonces $\|u_0\|_{L^r} \leq M$, con $M > 0$

(1) Para (α) ,veamos que sea finita $(4\pi t)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\right)}.\|u_0\|_{L^r}$ y como $(4\pi t)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\right)} = 1$

$\rightarrow (4\pi t)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}.\|u_0\|_{L^r} = \|u_0\|_{L^r} \leq M$

(2) Para (β) ,veamos que sea finita , $\displaystyle\int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)}\|u(\sigma)\|_{L^r}^p d\sigma$

Para que pueda ser integrable decimos $\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right) < 1 \Longleftrightarrow 1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right) > 0$

Entonces $\displaystyle\int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)}\|u(\sigma)\|_{L^r}^p d\sigma \leq (M+1)^p \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)} d\sigma$

Entonces $\displaystyle\int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)}\|u(\sigma)\|_{L^r}^p d\sigma \leq \frac{(M+1)^p.t^{1-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)}}{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)}$
y como $0 < t < T$

y se sabe que se cumple $1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right) > 0$

Entonces $\displaystyle\int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)}\|u(\sigma)\|_{L^r}^p d\sigma \leq \frac{(M+1)^p.T^{1-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)}}{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)}$

Ahora tomando un $T > 0$ suficientemente pequeño podemos asegurar que

$$\frac{(M+1)^p.T^{1-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)}}{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)} < 1$$

Así tenemos que :

$$\|\phi(u(t))\|_{L^r} \leq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} . \|u_0\|_{L^r} + (4\pi t)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)} . \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)} \|u(\sigma)\|_{L^r}^p d\sigma$$

$$\Longrightarrow \|\phi(u(t))\|_{L^r} \leq M+1, \quad \forall t \in (0,T)$$

Por tanto $\phi(X) \subset X$ y ahora Definimos el operado $\phi : X \to X$.

(III) ϕ sea una Contracción.

Ahora veamos que $\psi : X \to X$ sea una **Contracción**.

Sea $u, v \in X$ entonces:

$$\phi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)u^p(\sigma)d\sigma$$

$$\phi(v)(t) = S(t)v_0 + \int_0^t S(t-\sigma)v^p(\sigma)d\sigma$$

$$\Longrightarrow \|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\|_{L^r} = \| \int_0^t S(t-\sigma)(u^p(\sigma) - v^p(\sigma))d\sigma \|_{L^r}$$

$$\Longrightarrow \|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\|_{L^r} \leq \int_0^t \|S(t-\sigma)(u^p(\sigma) - v^p(\sigma))\|_{L^r} d\sigma$$

y sabemos que $\|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\|_{L^r} \leq \|u-v\|_{L^r}(\|u\|_{L^r}^{p-1} + \|v\|_{L^r}^{p-1})$

$$\Longrightarrow \|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\|_{L^r} \leq \underbrace{(4\pi t)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)}}_{C} . \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)} \|u^p(\sigma) - v^p(\sigma))\|_{L^r}^p d\sigma$$

$$\Longrightarrow \|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\|_{L^r} \leq C \int_0^t (t-\sigma)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)} (\|u(\sigma) - v(\sigma)\|_{L^r}) \left(\underbrace{\|u(\sigma)\|_{L^r}^{p-1}}_{\leq (M+1)^{p-1}} + \underbrace{\|v(\sigma)\|_{L^r}^{p-1}}_{\leq (M+1)^{p-1}} \right) d\sigma$$

$$\Longrightarrow \|\phi(u)(t) - \phi(v)(t)\|_{L^r} \leq C \left(Sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{L^r} \right) \left(2(M+1)^{p-1} \right) \int_0^t (t - \sigma)^{-\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{p-1}{r}\right)} d\sigma$$

Luego como se sabe que $1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)>0$

$$\Longrightarrow \|\phi(u)(t)-\phi(v)(t)\|_{L^r}\leq C\underbrace{\left(Sup_{t\in[0,T]}\|u(t)-v(t)\|_{L^r}\right)}_{\|u-v\|_X}\left(2(M+1)^{p-1}\right).\frac{t^{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)}}{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)}$$

como $0<t<T$ y tomando supremo a $\|\phi(u)(t)-\phi(v)(t)\|_{L^r}$ se cumple :

$$\Longrightarrow \underbrace{Sup_{t\in[0,T]}\|\phi(u)(t)-\phi(v)(t)\|_{L^r}}_{\|\phi(u)-\phi(v)\|_X}\leq C\left(\|u-v\|_X\right)\left(2(M+1)^{p-1}\right).\frac{T^{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)}}{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)}$$

$$\Longrightarrow \|\phi(u)-\phi(v)\|_X\leq C\left(2(M+1)^{p-1}\right).\frac{T^{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)}}{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)}\left(\|u-v\|_X\right)$$

Ahora tomando un T suficientemente pequeño podemos asegurar que

$$C\left(2(M+1)^{p-1}\right).\frac{T^{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)}}{1-\frac{n}{2}.\left(\frac{p-1}{r}\right)}<\frac{1}{2}$$

Entonces asi tenemos que :

$$\|\phi(u)-\phi(v)\|_X\leq\frac{1}{2}\|u-v\|_X$$

Y así demostramos que ϕ es una contracción.■

Ahora como $\phi : X\to X$ es una contracción y X un espacio de Banach , entonces por el Teorema Del Punto Fijo de Banach, se concluye que ϕ posee un único punto fijo u de tal manera que cumple :

$$\phi(u)=u$$

Entonces por la Definición de ϕ, en (2.10) tenemos :

$$u(t)=S(t)u_0+\int_0^t S(t-\sigma)u^p(\sigma)d\sigma$$

Lo cual indica que el problema (2) tiene solución y es única ,$\forall\, t\in[0,T]$.

3 Hipótesis y Variabales

3.1. Hipótesis

3.1.1. Hipótesis General

Es posible encontrar la existencia de soluciones para el problema (2), asociando a este problema una formulación integral y aprovechando para beneficio de ello el Teorema de Punto Fijo de Banach.

3.1.2. Hipótesis Específicas

a) La propiedad que posee el operador Laplaciano de generar un semigrupo en espacios apropiados.

b) Las propiedades de las integrales y de los semigrupos son importantes para mostrar el resultado de la existencia de soluciones vía Teorema de Punto Fijo de Banach.

3.2. Variables

La variable de esta investigación es la función u, que es solución del problema (2).

3.3. Operacionalización de las Variables

Para demostrar el resultado de existencia de (Teorema Punto Fijo De Banach), se utilizó la técnica presentada por Brezis y Cazenave (1996). En aquel trabajo, asocian al problema (2) una formulación integral $u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)u^p(\sigma)d\sigma$. En este sentido definimos el siguiente operador $\phi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\sigma)u^p(\sigma)d\sigma$, donde $\phi : X \to Y(X \subset Y)$, en primer lugar se muestra que $\phi(X) \subset X$ para luego después desmostar que ϕ es una contracción. Luego, aplicando el Teorema de Punto fijo de Banach, se determina que ϕ posee un único punto fijo.

4 Variables y Métodos

4.1. Área de Estudio

Coordenadas :

12°13’07.3”S 76°57’10.9”W

4.2. Diseño de la investigación

El presente trabajo es del tipo de no experimental el cual desarrollaremos siguiendo el siguiente esquema:

a) Espacios Métricos.

b) Espacios de Banach.

c) Teorema Punto Fijo de Banach..

d) Espacios L^p.

e) Espacios $L^P(0, T, X)$ Espacios de BOCHNER.

f) Lema de BOCHNER.

g) Semigrupos de Operadores Acotados.

h) Ecuación del Calor Homogéneo.

i) Ecuación del Calor no Homogéneo.

5 Conclusiones

a) El entendimiento de estas ecuaciones diferenciales Parciales, nos ayudan a tener un mejor panorama de algunos fenómenos, a partir de encontrar soluciones para este tipo de ecuaciones, por medio de algunos métodos.

b) Se expuso de manera detallada la demostración de existencia y unicidad de Solución en el problema (2) para la Ecuación del Calor con no linealidad u^p.

c) El operador Laplaciano genera un semigrupo en espacios apropiados .

d) Utilizando la teoría de Semigrupos hemos demostrado un resultado de Existencia y Unicidad de Solución para la Ecuación del Calor con no linealidad u^p.

e) Es esencial dentro de la demostración en este trabajo las propiedades de Semigrupo, como el Efecto Regularizante, y la propiedad de Bochner. Además , de los conceptos preliminares como espacio de Banach, para facilitar nuestro trabajo.

6 Recomendaciones

a) Se puede presentar un resultado de no existencia de soluciones cuando $p \geq 1 + \dfrac{2r}{n}$, para ser complementado

b) Estudiar el problema (2) con otros operadores más generales y que generen Semigrupos.

c) El principal Objetivo de este trabajo fue exponer un resultado de existencia de soluciones para la Ecuación del Calor con término no lineal u^p y esto fue resultado en el trabajo [4].

d) Se espera que el presente trabajo pueda ser complementado y perfeccionado con otros trabajos en la línea de Análisis Funcional.

e) Se recomienda acompañar la lectura de este trabajo junto con [3],[5],[7].

Bibliografía

[1] Adams, R., Fournier, J.,“Sobolev Space”. Elsevier.Second edition.(2003)

[2] Botelho,G., Pellegrino,D.,and Texeira, E.,“Fundamentos de Análisis Funcional”. Textos Universitarios. SBM. 2° edicao (2015)

[3] Brezis, H.,“Functional Analyisis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. ”. Springer, New York. (2010)

[4] Brezis and Cazenave, “A Nonlinear Equation With Singular Initial Data”J,Anal. Math (1996),277-304

[5] Cazenave,T “Semilinear Evolution Equations.”, Oxford University Press, New York.(1998).

[6] De Guzman,M ,“Integración: Teoría y Técnicas”. Editorial Alhambra. S.A., Madrid(1979)

[7] Evans. L.C.,“Partial differential equations”. American Mathematical Society.(2010)

[8] Gatica, M., “Espacios de funciones: una introducción a los espacios de Sobolev”. Tesis(2011)

[9] Guiccione,J., “Espacios Métricos ”. Universidad de Buenos Aires., Texto.(2018)

[10] Lukaszewicz,G , Trudinger, N.,“Micropolar Fluids: Theory and Applications. ”. Birkhäuser, Boston.(1999)

[11] Pazy.A,“Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. ”. Springer.(1992)

[12] Restrepo,G., “Introducción al Análisis Funcional ”. Universidad del Valle . Cali., Texto.(2010)

[13] Rosas Cruz, J.C., “Una aplicación del análisis funcional a las ecuaciones diferenciales ”. Tesis(2005)

[14] Weissler Fred B. ,“Local Existence and Nonexistence for Semilinear Parabolic equations in L^p. ”. Indiana University Mathematics Journal Vol. 29, No. 1 (1980)