Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Una versión fuerte del teorema fundamental del cálculo

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Anderson Bryan ESTEBAN SEDANO

ASESOR

Mg. Carole HUAMAN ORIUNDO

Lima, Perú

2021

Referencia bibliográfica

Esteban, A. (2021). *Una versión fuerte del teorema fundamental del cálculo*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	Anderson Bryan Esteban Sedano.
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	43134371
URL de ORCID	No aplica
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	Carole Human Oriundo.
Tipo de documento de identidad	DNI
Número de documento de identidad	10601400
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-0516-9708
Datos del jurado	
Presidente del jurado	
Nombres y apellidos	Carlos Alberto Peña Miranda
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10699143
Miembro del jurado 1	
Nombres y apellidos	Andres Guardia Cayo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	09406969
Miembro del jurado 2	
Nombres y apellidos	Carole Huaman Oriundo
Tipo de documento	DNI
Número de documento de identidad	10601400
Datos de investigación	

Línea de investigación	A.3.1.1 Ecuaciones Diferenciales(Parciales, Ordinarias) y Análisis Funcional.
Grupo de investigación	Ecuaciones en Derivadas Parciales y Aplicaciones
Agencia de financiamiento	Perú. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Vicerrectorado de Investigación y Posgrado. Programa de Promoción de Tesis de Pregrado. E18030044-PTPGRADO.
Ubicación geográfica de la investigación	País: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: San Juan de Miraflores Sector Virgen del Buen Paso Mz l5 lt 8 Latitud: -12.140685 Longitud: -76,961766
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2020- 2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01 Matemáticas aplicadas https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.00

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO(A) EN MATEMÁTICA
(PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I)

En la UNMSM – Ciudad Universitaria – Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 20:55 horas del sábado 23 de octubre del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador (PROGRAMA DE TITULACIÓN PROFESIONAL 2021-I): Dr. Carlos Alberto Peña Miranda (PRESIDENTE), Mg. Andrés Guardia Cayo (MIEMBRO) y la Mg. Carole Huaman Oriundo (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la Tesis titulada: "**UNA VERSIÓN FUERTE DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO**", presentado por el señor **Bachiller Anderson Bryan Esteban Sedano**, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

Realizada la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación **sobresaliente,** con un calificativo promedio de **diecisiete (17).**

A continuación, los Miembros del Jurado Evaluador dan manifiesto que el participante **Bachiller Anderson Bryan Esteban Sedano** en vista de haber aprobado la sustentación de su Tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 21:25 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta.

Dr. Carlos Alberto Peña Miranda
PRESIDENTE

Mg. Andrés Guardia Cayo
MIEMBRO

Mg. Carole Huaman Oriundo
MIEMBRO ASESOR

FICHA CATALOGRÁFICA

Andersón Bryan, Esteban Sedano

Una Versión Fuerte del Teorema Fundamental del Cálculo, (Lima) 2021
VIII.,35p.,29.7cm (UNMSM, Titulo, Matemática, 2021) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Matemática, UNMSM/FCM II. Título (Series).

DEDICATORIA

El presente trabajo lo dedico a mis padres Irma Sedano y Mauro Vasquez que siempre fueron una motivación, respaldo emocional e incentivaron a cumplir objetivos ante las adverisdades.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por todo lo que he recibido en el pasado,por lo que me da día a día y por todo lo que esta por llegar.
A mis padres Irma Sedano y Mauro Vaquez motivos de mi existencia en este mundo.
A mi seres queridos que ante su ausencia ,quedaron sus recuerdos,consejos y enseñansas .
Al Mg. Willy David Barahona Martínez por haber dedicado tiempo orientándome con sus conocimientos sobre el tema en la elaboración de mi tesis.
A mis maestros, por sus enseñanzas y haberme brindado todos sus conocimientos.Especialmente aquellos que partieron a otra vida ante esta pandemia mundial
A mis amigos y personas que siempre me apoyaron.
El agradecimiento al Vicerectorado de Investigación y Posgrado (VRIP) de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos por el apoyo financiero que hizo posible culminar este trabajo.

RESUMEN

Una Versión Fuerte del Teorema Fundamental del Cálculo

Anderson Bryan , Esteban Sedano

setiembre - 2021

Asesor : Mg. Willy David, Barahona Martínez.
Título obtenido: Licenciado en Matemática.

En este trabajo de tesis, consideramos partir del **Teorema Fundamental del Cálculo,** el cual en la gran mayoría de textos biene dado por

Sea f Riemann Integrable sobre $[a, b]$ y sea g una función talque $g'(x) = f(x)$ sobre $[a, b]$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

El objetivo de este trabajo, es debilitar la hipótesis del **Teorema Fundamental del Cálculo.**

Además se presentara y se demostrara otra versión del teorema que hemos comenzado la investigación .

Palabras claves: Teorema fundamental del cálculo, Versión fuerte, Integral de Riemann, función derivable, función monótona .

ABSTRACT

A Strong Version of the Fundamental Theorem of Calculus
Esteban, Andersón

September - 2021

Adviser	: Mg. Willy David, Barahona Martínez.
Obtained	: Graduate in Mathematics.

In this thesis work, we consider starting from **Fundamental theorem of calculus**, which in the vast majority of texts is given by

Let f Riemann Integrable over $[a, b]$ and either g such a function $g'(x) = f(x)$ upon $[a, b]$ then

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

The objective of this work is to weaken the hypothesis of the Fundamental Theorem of Calculus.

In addition, another version of the theorem that we have begun the investigation will be presented and demonstrated.

Keywords: Fundamental theorem of the calculus, strong version, Riemann integral, differentiable function, monotone function.

INDICE GENERAL

1. Preliminares **10**
1.1. Funciones Monótonas 10
1.2. Supremo e Ínfimo 10
1.3. Punto de Acumulación 12
1.4. Limites 12
1.5. Continuidad 14
1.6. Derivadas 14
1.7. Integral de Riemann 15

2. Propiedades Clásicas **18**
2.1. Funciones Derivables 18
2.2. Cálculo Integral 18

3. Problema Principal **21**
3.1. Objetivo Específico 21
3.2. Una Versión Fuerte del TFC 25
3.3. Aplicaciones 26

4. Conclusiones y/o Sugerencias **28**

Introducción

El presente trabajo se desarrolla en el campo de los numeros reales, dandole su mayor amplitud de estudio al clásico Teorema Fundamental del Cálculo (TFC). Por tal motivo nos hemos propuesto mostrar una mejor versión, tratando de debilitar básicamente la hipótesis del mencionado teorema.

Explicitamente el Teorema Fundamental del Cálculo nos establece la relación inversa entre la diferenciación e integración, el cual ha sido el resultado de tantas ideas, desde los tiempos de Euxodo y Arquímedes hasta la época de Galileo y Fermat.

A mediados del siglo XVII se remonta el origen del Teorema Fundamental del Cálculo, teniendo como primeras contribuciones de Evangelista Torricely, Isaac Barrow y James Gregory que tuvierón como punto de partida la relación inversa entre los problemas de tangente y los problemas de cuadratura como referencia ala diferenciación e integracíon respectivamente.Luego podemos reconocer como los descubridores del TFC a Isaac Newton y Gottfried Leibniz dandole un enfocque al cálculo sistematizado. Finalmente se presentan los aportes de Augustin-Louis Cauchy y Friedrich Riemann,los cuales contribuyeron ala transición del cálculo al Análisis Real presentando teorias formales de integración que deducen las propiedades que deben tener las funciones definidas en un intervalo cerrado para satisfacer el Teorema Fundamental del Cálculo, es asi que en la actualidad podemos encontrarlos en diferentes texos de cálculo.

En el primer capítulo conoceremos los concepto básicos como, limites, continuidad, derivadas ,integral de Riemann y los clásicos teoremas de derivabilidad e integración asi como el Teorema Fundamental del Cálculo como tantos textos lo muestran .

Para el segundo capítulo desarrollaremos nuestro problema principal que es una nueva versíon del Teorema Fundamental del Cálculo ayudandonos de algunos teoremas pocos conocidos el cual serán probados y estos nos trae unos colorarios como por ejemplo ”funciones con derivadas a la derecha cero son constante”. Finalmente pondremos en uso nuestro problema principal con algunos ejemplos claros y sencillos.

Hemos visto brevemente los aportes atraves del tiempo para tener una mejor versión del TFC. Este trabajo de Investigación quiere sumarse a esa lista de aportes con el fin de reducir condiciones y resaltar la importancia del Teorema Fundamental del Cálculo .

1 Preliminares

Comencemos introduciendo algunas nociones básicas del análisis matemático, que son indispensables en el desarrollo del presente trabajo.

1.1. Funciones Monótonas

Definiremos la monotonía de una función de la manera mas sencilla de entenderla.

Definición 1. *Diremos que una función* $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es:*

- *Creciente cuando* $\forall x, y \in X$,

$$x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

- *Decreciente cuando :* $\forall x, y \in X$,

$$x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

es decir, cuando $-f$ *es creciente.*

- *Estrictamente creciente cuando :* $\forall x, y \in X$,

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

- *Estrictamente decreciente cuando :* $\forall x, y \in X$,

$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

es decir, cuando $-f$ *es estrictamente creciente.*

Sin pérdida de generalidad diremos que una función es monótona cuando esta es creciente o decreciente.

1.2. Supremo e Ínfimo

Antes de presentar el supremo e infimo de un conjunto (axioma de los números reales), mostramos algunas definiciones y propiedades que nos serán de mucha utilidad para obtener cotas superiores e inferiores, de conjuntos.

Definición 2. *Sea* $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$*, es acotado superiormente si* $\exists M \in \mathbb{R}$ *talque*

$$x \leq M \ ; \forall x \in X.$$

Al número M, se le llama cota superior de X.

Observación 1. *Todo número real mayor que* M *es cota superior de* X.

Definición 3. *Sea* $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$*, es acotado inferiormente si* $\exists m \in \mathbb{R}$ *talque*

$$m \leq x \ ; \forall x \in X.$$

Al número m, se le llama cota inferior de X.

Observación 2. *Todo número real menor que* m *es cota inferior de* X.

Definición 4. *Sea* $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ *un conjunto acotado superiormente ,diremos que* s *es el supremo del conjunto* X *si y solo si verifica las siguiente condiciones:*

i) $x \leq s \ ; \forall x \in X.$

ii) Si $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \leq b \ ; \forall x \in X$ *entonces* $s \leq b$.

Notación: $SupX = s$

Observación 3. *Otra forma de escribir la condición ii) es la siguiente:*

II) $\forall \ \epsilon > 0 \ ; \exists x \in X$ *talque* $s - \epsilon < x < s$.

Definición 5. *Sea* $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$*,un conjunto acotado inferiormente ,diremos que* a *es el ínfimo del conjunto* X *si y solo si verifica las siguiente condiciones:*

i) $x \geq a \ ; \forall x \in X.$

ii) Si $b \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \geq b \ ; \forall x \in X$ *entonces* $a \geq b$.

Notación: $Inf \ X = a$

Observación 4. *Otra forma de escribir la condición ii) es la siguiente:*

II) $\forall \ \epsilon > 0 \ ; \exists \, x \in X$ *talque* $a < x < \epsilon + a$.

1.3. Punto de Acumulación

Antes de revisar Limites y Derivadas, como una noción de la Topología en $\mathbb{R}$ veremos las siguientes defininciones .

Definición 6. *Se dice que x_0 es un punto de acumulación del conjunto $X \subset \mathbb{R}$ si,*

$$\textit{Dado } \epsilon > 0 \textit{ se tiene } (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap (X - \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

El conjunto de los puntos de acumulación de X, es denotado como X'.

Definición 7. *Se dice que x_0 es un punto de acumulación por la derecha del conjunto $X \subset \mathbb{R}$ si*

$$\textit{Dado } \epsilon > 0 \textit{ se tiene } (x_0, x_0 + \epsilon) \cap X \neq \emptyset.$$

Denotaremos como X'_+ al conjunto de los puntos de acumulación por la derecha .

Analogamente, se dice que x_0 es un punto de acumulación por la izquierda del conjunto $X \subset \mathbb{R}$, cuando

$$\textit{Dado } \epsilon > 0 \textit{ se tiene } (x_0 - \epsilon, x_0) \cap X \neq \emptyset.$$

Denotaremos como X'_- al conjunto de los puntos de acumulación por la izquierda .

1.4. Limites

Intuitivamente, la idea de aproximarse a un punto o a un valor tan cerca como querramos nos parece atractiva, pero estamos acostumbrados a utilizar el concepto de limite en nuestra conversación y razonamientos ajenos al análisis matemático.

Definición 8. *Sea la función $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con dominio X y $x_0 \in X'$ punto de acumulación de X. El limite de la función f cuando x tiende o se aproxima al punto x_0 es el valor real L, si:*
dado $\epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ talque $\forall\, x \in X, 0 <\mid x - x_0 \mid< \delta \Longrightarrow \mid f(x) - L \mid< \epsilon$

Notación: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

Observamos que, en la definición de limite, no se hizo ninguna restricción alguna sobre la manera como se aproxima x a x_0 tanto por la derecha e izquierda y esto nos lleva a las siguientes definiciones:

Definición 9. *Sea la función $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in X'_+$. El número real L_1 es el limite por la derecha de f cuando x tiende a x_0 lo que denotaremos por :*

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$ *si y solo si dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ talque $| f(x) - L_1 | < \epsilon$, siempre que $x \in X$ y $0 < x - x_0 < \delta$.*

Definición 10. *Sea la función $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in X'_-$. El número real L_2 es el limite por la izquierda de f cuando x tiende a x_0 lo que denotaremos por :*

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$ *si y solo si dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ talque $| f(x) - L_2 | < \epsilon$, siempre que $x \in X$ y $0 < x_0 - x < \delta$.*

Teorema 1. *Si existen $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ y son iguales a L entonces existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, siendo la recíproca también válida.*

Demostración:
Ver [14] pag. 274.

Teorema 2. *Sea $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in X'$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X - \{x_0\}$ *tal que* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Demostración:
Ver [13]pag. 75.

1.5. Continuidad

Usaremos de manera básica el concepto de funcion continua.

Definición 11. *Una función continua $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice continua en el punto $x_0 \in X$ cuando,Dado $\epsilon > 0, \exists \delta > 0$;tal que $x \in X$ y $|x - x_0| < \delta$ impliquen que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.*

Se dice que $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una funcIón continua cuando f es continua en todos los puntos $x_0 \in X$.

Teorema 3. *Sean $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $x_0 \in X$ con $f(x_0) < g(x_0)$.Entonces existe δ talque $f(x_0) < g(x_0)$ para todo $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Demostración:
Ver [13]pag. 89.

Teorema 4. *Sea $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in X$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. f es continua en x_0.

2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X - \{x_0\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = x_0$.

Demostración:
Ver [17]pag. 90.

1.6. Derivadas

Las interpretaciones de la derivada se pueden ver en diferentes contextos como por ejemplo, la pendiente de la recta tangente al gráfico de una función en cierto punto, la velocidad instantanea en cierto punto o de manera general el cociente incremental.

Definición 12. *La derivada de la función $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el punto $x_0 \in X \cap X'$ es el limite:*

$$f'(x_0)=\lim_{x\to\ x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to\ 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Este limite puede existir o no. Cuando existe decimos que f es derivable en x_0.

Cuando la derivada $f'(x)$ existe en todos los puntos $x \in X \cap X'$ decimos que la función $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en el conjunto X.

Definición 13. *Si $x_0 \in X \cap X'_+$, definimos derivada por la derecha de f en el punto x_0 como:*

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to\ x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to\ 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Definición 14. *Si $x_0 \in X \cap X'_-$, definimos derivada por la izquierda de f en el punto x_0 como:*

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to\ x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to\ 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Teorema 5. *Si $x_0 \in X$ es punto de acumulacion tanto por la derecha e izquierda entonces, $f'(x_0)$ existe si y solo si existen y son iguales $f'_+(x_0)$ y $f'_-(x_0)$.*

Demostración:
Ver [14]pag. 415.

Teorema 6. *Toda función es continua en cada uno de los puntos donde es derivable.*

Demostracion:
Ver [13]pag. 109.

1.7. Integral de Riemann

Finalmente otro de los conceptos que debemos conocer para desarrollar este trabajo de investigación, es la integral de Riemann del cual está muy relacionada ala derivada . La Integral de Riemann se puede interpretar como la noción geométrica de área y a la idea física del trabajo y aplicaciones o teorema como es el caso del Teorema Fundamental del Cálculo.

Definición 15. *Una función $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada si ,*

$$\exists k > 0 \ talque \mid f(x) \mid \leq k \ , \forall x \in X.$$

Definición 16. *Dada una función acotada $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definimos y denotamos :*

$$Sup \ f \ = Sup\{f(x) : x \in X\} = M.$$

$$Inf \ f \ = Inf \ \{f(x) : x \in X\} = m.$$

En particular si $X = [a, b]$ tenemos

$$m \leq f(x) \leq M \ , \forall x \in [a, b]$$

Definición 17. *Una partición del intervalo $[a, b]$ es un subconjunto finito de puntos $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n\} \subset [a, b]$ talque $a \in P$ y $b \in P$.Siempre usaremos esta notacion de forma que $a = t_0 < t_1 < .... < t_n = b$.*

Al intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de longitud $t_i - t_{i-1}$, llamamos i-ésimo intervalo de la partición P. Es claro que $\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = b - a$.

Por la definición 1.12 tenemos:

$$\text{Sup}\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i$$

$$\text{Inf}\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = m_i$$

Definición 18. *Dada una función $f : [a.b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada asociada a una partición P, entonces definimos:*

La suma inferior de f relativa a la partición P es el número.

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}).$$

La suma superior de f relativa a la partición P es el número.

$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(t_i-t_{i-1}).$$

Si m es el infimo y M el supremo de f en $[a,b]$, se cumple:

$$m(b-a)\leq s(f,P)\leq S(f,P)\leq M(b-a).$$

Definición 19. *Llamaremos la integral inferior y la integral superior de una función acotada $f:[a.b]\longrightarrow\mathbb{R}$ se definen, respectivamente como:*

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underset{P}{Sup}L(f,P)$$

;

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\underset{P}{Inf}S(f,P)$$

Donde el supremo e infimo se toman en el conjunto de todas las particiones P del intervalo $[a,b]$.

Definición 20. *: Una función acotada $f:[a.b]\longrightarrow\mathbb{R}$ se dice integrable cuando su integral inferior e integral superior son iguales. Este valor real se llama integral de Riemann de f, el cual se denota $\int_a^b f(x)dx$.*

2 Propiedades Clásicas

2.1. Funciones Derivables

Teorema 7. ***(Teorema del Valor Medio)*** *(TVM). Dada una función* $f : [a.b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$ *y* f *derivable en* (a, b) *entonces existe* $c \in (a, b)$ *talque*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Demostración: Ver [14]pag. 515.

Teorema 8. *Sea* $f : [a.b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua,* f *derivable en* (a, b) *se tiene que* f *es monótona creciente (decreciente) si y solo si* $f' \geq 0$ *ó* $f' \leq 0$.

Demostración: Ver [15]pag. 114.

El teorema anterior fue publicado por primera vez en el año 1968 por Bonnet.

2.2. Cálculo Integral

Teorema 9. *Toda función continua* $f : [a.b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es integrable.*

Demostración: Ver [15]pag. 154.

El siguiente enunciado es la base de estudio para nuestro trabajo de investigación. En la gran mayoría de textos es presentado de la siguiente manera:

Teorema 10. ***(Teorema Fundamental del Cálculo).*** *Sea f Riemann Integrable sobre* $[a, b]$ *y sea* g *una función talque* $g'(x) = f(x)$ *sobre* $[a, b]$ *entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Sea $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n\}$ una partición de $[a, b]$ donde

$a = t_0 < t_1 < .... < t_n = b$. Entonces podemos formar

$$g(b) - g(a) = g(t_n) - g(t_0) = \sum_{i=1}^{n} (g(t_i) - g(t_{i-1})).$$

Como g es diferenciable en $[a, b]$ tambien lo será en $[t_{i-1}, t_i], \forall i = 1, 2...., n$.

Por el teorema del valor medio Lagrange, existe $c_i \in (a, b)$ talque

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

Pero como $g'(x) = f(x)$ sobre $[a, b]$ entonces

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = f(c_i)(t_i - t_{i-1})$$

Ahora mediante sumatoria tendriamos

$$g(b) - g(a) = \sum_{i=1}^{n} (g(t_i) - g(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Note que apartir de la **definición 16** se tiene que:

m_i= $\text{Inf}\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} \leq f(c_i) \leq \text{Sup}\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\} = M_i$

$\forall i = 1, 2, ..., n$; Ademas

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$$

Por tanto

$$L(f, P) \leq g(b) - g(a) \leq U(f, P)...........(1)$$

Para toda partición P de $[a, b]$ .Por la **Definición 19**

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underset{P}{Sup} L(f, P)$$

;

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underset{P}{Inf} S(f, P)$$

De (1) se tiene que

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq g(b) - g(a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

Pero por nuestra hipótesis f es Riemann Integrable en $[a, b]$,osea

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Por consiguiente

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a) \blacksquare$$

El propósito de este trabajo es representar versiones mas sólidas de este teorema.

3 Problema Principal

En este capítulo desarrollaremos lo que nos hemos propuesto,fortalecer en menor complejidad el teorema fundamental del cálculo.

3.1. Objetivo Específico

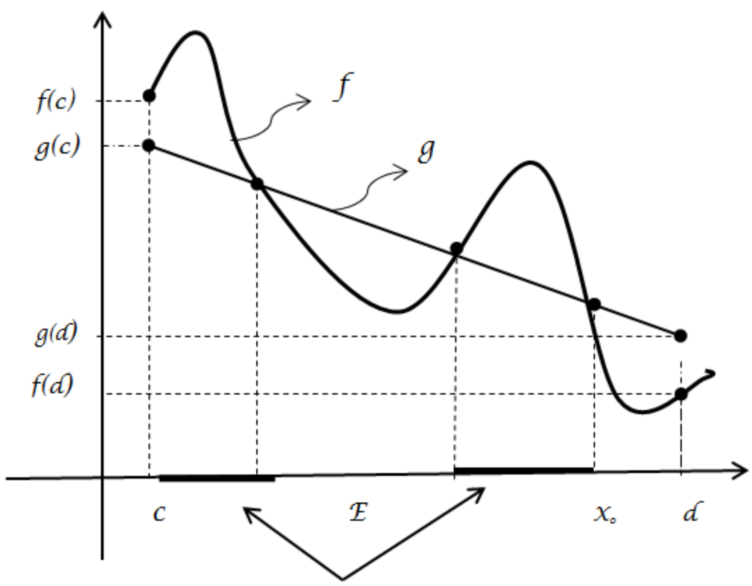
El siguiente teorema es uno de nuestro objetivo secundario, que da origen algunos corolarios que nos servira como herramienta para probar nuestro objetivo de trábajo.

Teorema 11. *Sea $f : [a.b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si para cada $x \in (a,b)$, una de las derivadas laterales $f'_+(x)$ ó $f'_-(x)$ existe y es no negativa entonces f es monótona creciente.*

Demostración: Haremos la prueba por reducción al absurdo.

Sea $c, d \in [a,b]$ con $c < d$ pero $f(c) > f(d)$.

Construiremos una la función lineal : $g(x) = m(x - c) + k$, donde k es una constante.



$k = \frac{1}{2}(f(c) + f(d))$ y $m > 0$

De $f(c) > f(d)$ se tiene que $f(d) < k = \frac{1}{2}(f(c) + f(d)) < f(c)$

y podemos observa que:

i) La pendiente de la función g denotada por m_g es negativa pues

$$m_g = \frac{g(c) - g(d)}{c - d} < 0$$

ii) $g(d) = m(d - c) + k = m(d - c) + \frac{1}{2}(f(c) + f(d)\ ) > f(d)$

entonces $g(d) > f(d)$

iii) $g(c) = k = \frac{1}{2}(f(c) + f(d)) < f(c)$ entonces $g(c) < f(c)$.

Seguidamente sea $E = \{x \in [c, d]/g(x) \leq f(x)\}$, $E \neq \emptyset$

por (ii) $E \subseteq [a, b]$ acotado entonces existe

$$x_0 = \text{Sup } E$$

Afirmo que $g(x_0) = f(x_0)$:

Si fuese $g(x_0) > f(x_0)$ y dada la continuidad de f y g entonces

por el teorema 3 existe $\delta > 0$ talque

$\forall x \in (x_0$ -δ, x_0 +$\delta) \cap [c, d]$: $g(x) > f(x)$

osea $x \notin E$, $\forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) \cap [c, d]$ pero esto

seria una contradicción con la definición de $x_0 = \text{Sup } E$

pues $\forall\ \epsilon = \delta\ \exists\ x_\delta \in E$ talque $x_0 - \delta < x_\delta < x_0$.

Si fuese $g(x_0) < f(x_0)$ y dada la continuidad de f y g entonces

por el teorema 3 existe $\delta > 0$ talque

$\forall x \in (x_0 \text{-}\delta,\, x_0 + \delta) \cap [c,d] : g(x) < f(x)$. Así $\exists\, \widehat{x} \in (x_0, x_0 + \delta)$

talque $g(\widehat{x}) < f(\widehat{x})$ en consecuencia $\widehat{x} \in E$, lo que es una

contradicción con la definición de $x_0 = \text{Sup } E$ ya que $x_0 < \widehat{x}$.

Así $g(x_0) = f(x_0)$ además como $g(c) < f(c)$ y $g(d) > f(d)$

entonces $x_0 \neq c$,$x_0 \neq d$ por lo que $x_0 \in (c,d)$.

Retomando la prueba del teorema

I) Dado que $x_0 = \text{Sup } E$, $\forall\, x \in (x_0, d)$ entonces $x \not\in E$

por lo que $g(x) > f(x)$ luego:

$$f(x) - f(x_0) < g(x) - f(x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{g(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = m_g$$

nos da la pendiente de la función g. Pero como la pendiente

de la función g es negativa entonces se tiene que

$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to\, x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$

Por el cual $f'_+(x_0) < 0$.

II) Dado que $x_0 = \text{Sup } E$, $\forall\, \epsilon = \frac{1}{n} > 0\ \exists\, x_n \in E$ talque

$x_0 - \frac{1}{n} < x_n$ asi hemos conseguido una sucesión $(x_n) \subseteq$ E talque

x_n converge en x_0, como $x_n \in E$:

$$g(x_n) \leq f(x_n) \Longrightarrow \text{-}\ g(x_n) \geq -f(x_n)$$

luego $g(x_0) - g(x_n) \geq g(x_0) - f(x_n)$ y como $x_n < x_0$ entonces

$$\frac{f(x_0) - f(x_n)}{x_0 - x_n} = \frac{g(x_0) - f(x_n)}{x_0 - x_n} \leq \frac{g(x_0) - g(x_n)}{x_0 - x_n}$$

nos da la pendiente de la función g,el cual es negativa entonces

$$\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}<0 \Longrightarrow \lim_{x_n\to\, x_0^-}\frac{f(x_0)-f(x_n)}{x_0-x_n}<0$$

Por el cual $f'_-(x_0)<0$.

Tanto (I) y (II) contradicen la hipótesis de nuestro teorema ■

Corolario 1. *Si* $f'_+(x)=0\ \forall x\in[a,b)$ *entonces* f *es constante en* $[a,b]$.

Demostración: *Si* $f'_+(x)=0,\forall x\in[a,b)$ *entonces*

i) $f'_+(x)\le 0$ *e ii)* $f'_+(x)\ge$ *0*

Para (i) $f'_+(x)\le 0$ *. Sea* $x<y$ *con* $x,y\in(a,b)$ *y por el*

teorema 11 anterior $f(x)\le f(y)$*.........(1)*

Para (ii) $f'_+(x)\ge$ *0 que equivale a* $(-f)'_+(x)\ge$ *0*

.Sea $x<y$ *con* $x,y\in(a,b)$ *y por el teorema 11 anterior*

$(-f)(x)\le(-f)(y)$*.........(2)*

De (1) , (2) $f(x)=f(y)$*; lo que implica que* f*=cte en* $[a,b]$■

A partir del Teorema del Valor Medio para derivadas,tenemos

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

nos conduce ala siguiente estimación

$$Inf\{f'(x)/x\in(a,b)\}\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le Sup\{f'(x)/x\in(a,b)\}.$$

Según el teorema 11 nos conduce la siguiente generalización de la anterior estimativa mediante el siguiente corolario.

Corolario 2. *Suponga que* f *es continua en* $[a,b]$*. Para* $x\in(a,b)$ *asuma que una de las derivadas laterales* f'_+ *o* f'_-*existe y denotala por* f'_* *entonces*

$$Inf\{f'_*(x)/x \in (a,b)\} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq Sup\{f'_*(x)/x \in (a,b)\}$$

Observación *: Asi existen $c, d \in [a,b]$ tales que:*

$$f'_*(c) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_*(d)$$

Demostración*:Sin perdida de generalidad probaremos la desigualdad de la izquierda pues la desigualdad de la derecha sera de la misma forma.*

$$Sea\ m\ = Inf\{f'_*(x)/x \in (a,b)\}$$

Si $m = -\infty$ la desigualdad es trivial.Asumamos entonces que m es finito entonces definimos

$$F(x) = f(x) - m(x-a)\ ,\ \forall x \in [a,b].$$

Pero por la definición de m

$$F'_*(x) = f'_*(x) - m \geq 0$$

Entonces por el teorema 3.1 resulta que F ES MONÓTONA CRECIENTE $F(a) \leq F(b)$ entonces

$$f(a) \leq f(b) - m(b-a) \Longrightarrow m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ \blacksquare$$

3.2. Una Versión Fuerte del TFC

Apartir del teorema 10 (TFC) , hemos logrado trabajar de una manera mas solida el TFC, buscando reducir alo mínimo las hipótesis de dicho teorema para el uso cotidiano en el Cálculo.

A continuación probaremos lo que nos hemos propuesto en este trabajo de investigación.

Teorema 12. *Sea f Riemann Integrable sobre $[a,b]$ y sea g una función continua talque $g'_+(x) = f(x)$ sobre $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Demostración: *sea $P = \{a = x_0\ ,\ x_1\ ,\ x_2,\ ....\ ,\ x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$ entonces :*

$$g(b) - g(a) = \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - g(x_{i-1})] ....(1)$$

Debido ala observación del corolario 2 .Para cada $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ *existen* c_i , $d_i \in (x_{i-1}, x_i)$ *talque*

$$g'_+(c_i) \leq \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \leq g'_+(d_i)$$

$$m_i \leq f(c_i) \leq \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \leq f(d_i) \leq M_i$$

Donde $m_i = Inf\{f(x)/x \in I_i\}$ *y* $M_i = Sup\{f(x)/x \in I_i\}$ *entonces*

$$m_i\ (x_i - x_{i-1}) \leq g(x_i) - g(x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1})$$

Luego de (1) se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ (x_i - x_{i-1}) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Por lo que tomando primero el ínfimo según todas las particiones P y luego el supremo según todas las particiones P , resulta:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq g(b) - g(a) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Donde las expresiones izquierda y derecha son las integrales de Riemann inferior y superior de f respectivamente. Finalmente, dado que f es integrable de Riemann, las integrales inferior y superior son iguales a la de Riemann integral

$$\int_a^b f(x)dx \leq g(b) - g(a) \leq \int_a^b f(x)dx$$

Por lo tanto

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) \blacksquare$$

3.3. Aplicaciones

Ejemplo 1. *Evaluemos la siguiente integral:*

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx \ , \ donde\ f(x) = \begin{cases} -2(1-x) & si \quad x \geq 1 \\ \\ \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} & si \quad x < 1 \end{cases}$$

No existe g talque $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in [-2, 2]$, *Sin embargo, si dejamos que g sea dada por*

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} (1-x)^2; & si \quad x \geq 1 \\ \\ \sqrt{1-x}; & si \quad x < 1 \end{cases}$$

donde no existe $g'(1)$,*pues*

$g'_+(1) = 0$

$g'_-(1)$ *no tiene valor real.*

Pero la función g es continua en $[-2, 2]$ *y es claro que*

$$g'_+(x) = f(x), \forall x \in [-2, 2]$$

Entonces por la Versión Fuerte del TFC se tiene que

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = g(2) - g(-2) = 1 - \sqrt{3} \blacksquare$$

Ejemplo 2. *Evaluemos*

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \text{ , donde } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & si \quad x \geq 0 \\ \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

No existe g talque $g'(x) = f(x)$ *sobre* $[-1, 1]$, *Sin embargo, si dejamos que g sea dada por*

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 3x; & si \quad x \geq 0 \\ \\ \frac{-x^2}{2}; & si \quad x < 0 \end{cases}$$

donde no existe $g'(0)$, *pero la función g es continua en* $[-1, 1]$ *y es claro que*

$$g'_+(x) = f(x) \text{ sobre } [-1, 1]$$

Entonces por la Versión Fuerte del TFC se tiene que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = g(1) - g(-1) = \tfrac{23}{6} \blacksquare$$

4 Conclusiones y/o Sugerencias

1. El problema principal planteado, fue adaptado sin ninguna dificultad a las hipótesis del Teorema Fundamental del Cálculo, logrando el objetivo.

2. Nuestra investigación inicia cuando nos encontramos con funciones complejas que tenían dificultad de aplicar el mencionado teorema clásico, ejemplo aquellas funciones que tiene saltos dentro de su dominio.

3. Con los resultados de la investigación, ahora aplicar el teorema Fundamental del Cálculo no necesitaremos la derivabilidad total de una de las funciones a lo más continua y con derivación restringida, tomando como derivada lateral por la derecha.

4. Se pueden estudiar diversos casos relacionados al Teorema Fundamental del Cálculo. Por ejemplo cuando una de las funciones del mencionado teorema solo necesitaria ser continuo y con derivada lateral por la izquierda o restringiendo la derivabilidad de aquella función.

Bibliografía

[1] Aull C. E. (1967). “The first symmetric derivative”, this Monthly,74 (708-711).

[2] Knight W. J. (1980). “Functions with zero right derivatives are constant”, this MONTHLY, 87 (657-658).

[3] Mukhopadhyay S.N. (1967). “On Schwarz differentiability-V ”, this MONTHLY, 74 (542-544).

[4] Swetits J. 1968).“A note on Schwarz differentiability ”, this Monthly, 75 (1968) 1093-1095.

[5] Walker P. L. (1977).“On Lebesgue Integrable derivatives”, this MONTHLY, 84 (287-288).

[6] Grupo Akal. (2020). “El Nacimiento del cálculo. Leibniz y Newton”. No cierres los ojos . http://www.nocierreslosojos.com/calculo-historialeibniz- newton/.

[7] Franco Y. A. (2000).“El Teorema Fundamental del Cálculo en la Teoría de Integración De Riemann”.Vision Antataura,4(1).http / /portal.amelica.org /ameli /jatsRepo /225 /2251279004 /index.html.

[8] E.Rubén, V.Marco, R.Guillermo (2008).“Fundamentos de cálculo ”. Garabatos.https://www.mat.uson.mx/sitio/documentos/fundamentosde-calculo.pdf.

[9] FRANCO.A.Y. (2015). “El Teorema Fundamental Del Cálculo en la Fundamentación del Análisis Real ”.[Tesis Maestría]. Universidad De Panamá]

[10] M.Angeline y S.Mariciela.“Historia do Calculo Diferencial e Integral”.https://publicacao.uniasselvi.com.br/index.php/MAD-EaD/article/download/556/233.

[11] EVES, Howard (2004). “Introdução à história da matemática”. Campinas: Unicamp.

[12] Villate, W. M. (enero de 2021). “Aspectos históricos del teorema fundamental del cálculo y posibles ”. Ciencia y Educacion, págs. Dialnet-AspectosHistoricosDelTeoremaFundamentalDelCalculoY-7839941.pdf.

[13] Lages E.L (1991).“Curso de Anĺisis Matemático ”,Volumen 1(J.M Casasayas trad) .Edunsa.(Obra original publicada en 1976).

[14] Lages E.L (2005).“Anĺisis Real ”,Volumen 1(Diaz L. trad) .Cesar Camacho.(Obra original publicada en 1997).