



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

**El teorema de representación de Riesz para
funcionales multilineales antisimétricos**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Emerson Lech TAIPE HUAMANI

ASESOR

Dr. Edgar Diógenes VERA SARAVIA

Lima, Perú

2021



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Taipe, E. (2021). *El teorema de representación de Riesz para funcionales multilineales antisimétricos*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Matemáticas, Escuela Profesional de Matemática]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

Metadatos complementarios

Datos de autor	
Nombres y apellidos	EMERSON LECH TAIPE HUAMANI
DNI	42221339
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0003-1932-7284
Datos de asesor	
Nombres y apellidos	EDGAR DIÓGENES VERA SARAVIA
DNI	07915698
URL de ORCID	https://orcid.org/0000-0002-3634-8549
Datos de investigación	
Línea de investigación	A.3.1.2. Topología y Geometría
Grupo de investigación	No aplica
Agencia de financiamiento	Sin financiamiento
Ubicación geográfica de la investigación	Pais: Perú Departamento: Lima Provincia: Lima Distrito: Lima Latitud: -12.06494 Longitud: -77.06928
Año o rango de años en que se realizó la investigación	2020-2021
URL de disciplinas OCDE	Matemáticas puras https://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS EN LA MODALIDAD VIRTUAL PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

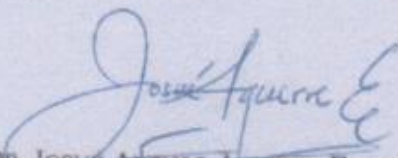
En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 10:00 horas del jueves 08 de julio del 2021, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso (PRESIDENTE), Mg. Víctor Hilario Tarazona Miranda (MIEMBRO) y el Dr. Edgar Diógenes Vera Saravia (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada "EL TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ PARA FUNCIONALES MULTILINEALES ANTISIMÉTRICOS", presentado por el señor Bachiller Emerson Lech Taipe Huamaní, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

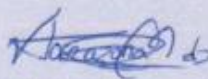
Luego de la exposición de la tesis, el Presidente invitó al expositor a dar respuesta a las preguntas formuladas.

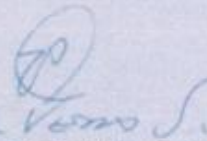
Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del Jurado Evaluador, el expositor mereció la aprobación *Sobresaliente* con un calificativo promedio de (letras y números). *dieciocho (18)*.

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Josué Alonso Aguirre Enciso, manifestó que el señor Bachiller Emerson Lech Taipe Huamaní, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta, en archivo PDF.


DR. JOSUÉ ALONSO AGUIRRE ENCISO
PRESIDENTE


MG. VÍCTOR HILARIO TARAZONA MIRANDA
MIEMBRO


DR. EDGAR DIÓGENES VERA SARAVIA
MIEMBRO ASESOR

La Vicedecana (e) de la Facultad de Ciencias Matemáticas, Mg. Zoraida Judith Huamán Gutiérrez, certifica virtualmente la participación del Jurado Evaluador, el titulado, el acto de instalación y el inicio, desarrollo y término del acto académico de sustentación, dejando constancia en el acta respectiva.

*Dedicado a mis padres
Melquiades y Carmen.*

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar al profesor Edgar Diógenes Vera Saravia quién me orientó en la elaboración de este trabajo, por todo lo enseñado, por las recomendaciones siempre constructivas, por las muchas conversaciones siempre interesantes y por mostrarme con el ejemplo la labor del investigador.

Quiero agradecer a mi gran amor Daniela Lidia Nuñez Rodriguez, por la paciencia y el apoyo. Con ella todo el trabajo se volvió más ligero.

Quiero agradecer al profesor Tomás Nuñez Lay, por todo lo enseñado, por sus consejos y por la revisión de este trabajo. Es un privilegio poder siempre conversar con él.

Quiero agradecer a mis padres Melquiades Taipe Barrios y Carmen Huamani Larrauri, por todo el esfuerzo que hicieron para que pudiera obtener una educación, por el apoyo incondicional hoy y siempre.

Quiero agradecer a la Sra. Edith Rodriguez, Irene Nuñez y Susana Nuñez, quienes con su amistad, confianza, consejos y apoyo me impulsaron siempre a seguir adelante frente a los problemas.

Quiero agradecer a mis amigos Carlos Mejia, Alfonso Enrique, Julio Lanazca, Vladimir Dionisio, Eduardo Caqui y Jonathan Otrera por todas las conversaciones nada constructivas ni instructivas que hacen la vida y el trabajo más alegre.

Finalmente quiero agradecer a mis profesores de la Facultad de Matemáticas quienes me formaron y las secretarias de la F.M. y la E.P. de matemáticas quienes me ayudaron con facilitar la información burocrática hasta la entrega de este trabajo.

Índice general

1. Preliminares	2
1.1. Álgebra geométrica euclidiana bidimensional AG(2)	6
1.2. Álgebra geométrica euclidiana tridimensional AG(3)	9
2. El espacio de los k-vectores de AG(3)	20
2.1. Determinantes	24
2.2. Producto exterior	26
3. Aplicaciones Multivectoriales	29
4. 2-Teorema de Representación de Riesz	31
4.1. Ejemplo-Aplicación	33
Bibliografía	35

Resumen

El álgebra geométrica es un álgebra asociativa que unifica las álgebras de los números reales, los complejos, los cuaterniones de Hamilton además de incluir el álgebra exterior. Esta estructura, adecuada para describir, unificar y generalizar conceptos usados en la matemática moderna, nos permitirá introducir las formas diferenciales sin recurrir al álgebra tensorial, sustituir las formas diferenciales por los campos multivectoriales y obtener una nueva versión del teorema de representación de Riesz.

Introducción

En este trabajo presentamos las formas diferenciales, en el caso especial de dimensión 3, utilizando el álgebra geométrica creada por Clifford en 1878.

Sucede que el álgebra geométrica es un álgebra asociativa que unifica las álgebras de los números reales, los complejos, los cuaterniones de Hamilton y los octoniones de Graves, además de incluir el álgebra exterior, como puede ser visto en [9], [8] y [7].

Esta estructura, adecuada para describir, unificar y generalizar conceptos usados en la matemática moderna, nos permitirá introducir las formas diferenciales sin recurrir al álgebra tensorial, sustituir las formas diferenciales por los *campos multivectoriales* y obtener una nueva versión del teorema de representación de Riesz.

Debido a que hasta los inicios del siglo XX los requerimientos matemáticos de la Física fueron tridimensionales, Gibbs, Helmholtz y Heaveside separaron las partes real y vectorial de los cuaterniones e introdujeron la conocida álgebra vectorial.

La publicación en 1905 del trabajo de Einstein sobre la relatividad, así como la necesidad de nuevas expresiones y representaciones para los fenómenos de la naturaleza, motivaron a David Hestenes y Garret Sobczik, entre otros, a insistir en el rescate del **Álgebra Geométrica** (ver [7]).

Capítulo 1

Preliminares

En lo que sigue usaremos las siguientes notaciones:

Definición 1.1. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq m \leq n$

- $\mathcal{I}(m)$: La familia de m -multi-índices de $I_n = \{1, \dots, n\}$
 - $\mathcal{I}(m) = \{I(i_1 < \dots < i_m) \subset I_n\}$
 - $I(i_1 < \dots < i_m) = \{i_1, \dots, i_m\} \equiv i_1, \dots, i_m$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$.
 - $I(i) = \{i\} \equiv i$ si $i \in I_n$
- $\mathcal{I}(0) = \{0\} \equiv 0$

Definición 1.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, denotemos como $T\Omega := \Omega \times \mathbb{R}^n$. Un **campo vectorial** sobre Ω es una aplicación $\varphi : \Omega \rightarrow T\Omega$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi : \Omega & \longrightarrow & T\Omega \\
 & \searrow \text{dashed} & \downarrow \pi \\
 & 1_\Omega & \Omega
 \end{array}$$

donde $\pi : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$ es la proyección al primer factor que llamaremos **el fibrado trivial asociado a Ω** y 1_Ω es el mapa identidad sobre Ω .

Ejemplo 1.1. Considere el mapa $(x, y, z) \mapsto (x - y, x^2, xz)$.

Definición 1.3. Una aplicación $f : (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada **funcional k-lineal** o simplemente **multilineal** si es lineal en cada una de sus entradas, es decir

$$f(v_1, \dots, v_i + \alpha w, \dots, v_k) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \alpha f(v_1, \dots, w, \dots, v_k)$$

para todo $v_i, w \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ con $i = 1, \dots, k$. Denotamos el conjunto de las aplicaciones k-lineales como $\mathcal{T}^{(0,k)} \equiv \mathcal{T}^{(0,k)}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.4. Una aplicación $f \in \mathcal{T}^{(0,k)}$ es llamada de **alter-nante** o **antisimétrica** si

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para todo $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ($i \neq j$). Denotamos el conjunto de las aplicaciones antisimétricas o **funcionales k-lineales antisimétricos** como $A^k \equiv A^k(\mathbb{R}^n)$.

Observación 1.1.

- $A^k \subset \mathcal{T}^{(0,k)}$
- $(\mathbb{R}^n)^* = A^1 = \mathcal{T}^{(0,1)}$
- $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ es la base dual de la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$.¹

Definición 1.5. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una **1-forma diferencial** \mathcal{C}^∞ sobre Ω es una aplicación $f : \Omega \rightarrow T^*\Omega := \mathcal{T}^{(0,1)}(\Omega)$ tal que

$$\begin{array}{ccc} f : \Omega & \longrightarrow & T^*\Omega \\ & \searrow 1_\Omega & \downarrow \rho \\ & & \Omega \end{array}$$

donde $\rho : T^*\Omega \rightarrow \Omega$ es la proyección natural o **fibrado vectorial** del espacio cotangente $T^*\Omega$ que cumple la condición $\rho \circ f = 1_\Omega$.

Representaremos por $\mathcal{A}^1 \equiv \mathcal{A}^1(\Omega)$ el conjunto de las 1-formas diferenciales \mathcal{C}^∞ sobre Ω .

¹base de las 1-formas lineales

Por la observación (1.1)

$$f(p) = f_1(p)dx^1 + \cdots + f_n(p)dx^n$$

donde las funciones componentes f_1, \dots, f_n de f son C^∞ en Ω .

Proposición 1.1 (Teorema de representación de Riesz (1-TRR)).
Sea E un espacio euclidiano de dimensión finita n , $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal ($f \in E^$). Entonces existe un único vector $u \in E$ tal que*

$$f(x) = \langle u, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Demostración. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de E . Para cada e_i , elemento de la base, definimos

$$u_i := f(e_i), \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Dado $v \in E$ entonces $v = a_1e_1 + \cdots + a_n e_n$, donde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Como E es un espacio euclidiano, con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$, cada componente de v puede ser escrita como $a_i = \langle e_i, v \rangle$.

Por la linealidad de f y la bilinealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(v) &= a_1 f(e_1) + \cdots + a_n f(e_n) \\ &= \langle e_1, v \rangle u_1 + \cdots + \langle e_n, v \rangle u_n \\ &= \langle u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n, v \rangle. \end{aligned}$$

Entonces queda demostrada la existencia de $u := u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n \in E$.

Para probar la unicidad, suponga que existe un otro $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = \langle w, x \rangle$ para todo $x \in E$. Entonces

$$\langle u, x \rangle = \langle w, x \rangle, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Así, $w = u$. □

El 1-TRR nos permite establecer una correspondencia entre los campos vectoriales y las 1-formas diferenciales.

Corolario 1.1.1. *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los campos vectoriales y las 1-formas diferenciales.*

Demostración. Sea F un campo vectorial sobre $U \subset \mathbb{R}^n$. Para cada $x \in U$ podemos definir el funcional lineal

$$w(x) := \langle F(x), - \rangle.$$

Así hemos definido $w \in \mathcal{A}^1(U)$. Por el 1-TRR, $w(x)$ está determinado de forma única por $F(x) \in \mathbb{R}^n$ para cada $x \in U$; por lo tanto la correspondencia entre campos vectoriales y 1-formas diferenciales es biyectiva. Hemos definido

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{Campos vectoriales} \} & \rightarrow & \{ \text{1-formas diferenciales} \} \\ F & \mapsto & w \end{array}$$

dónde $w(x) := \langle F(x), - \rangle$ para cada $x \in U$. Por el 1-TRR esta mapa es biyectivo. \square

Definición 1.6. *Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una k -forma diferencial \mathcal{C}^∞ sobre Ω es una aplicación $f : \Omega \rightarrow A^k(\Omega) \subset \mathcal{T}^{(0,k)}(\Omega)$ tal que*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & A^k(\Omega) \\ & \searrow 1_\Omega & \downarrow \rho \\ & & \Omega \end{array}$$

donde $\rho : \mathcal{T}^{(0,k)}(\Omega) \rightarrow \Omega$ es la proyección natural o **fibrado vectorial** que cumple la condición $\rho \circ f = 1_\Omega$.

Generalizando la definición (1.5) representaremos por $\mathcal{A}^k \equiv A^k(\Omega)$ el conjunto de las k -formas diferenciales \mathcal{C}^∞ sobre Ω .

Sean $f \in \mathcal{A}^k$, $p \in M$

$$f(p) = \sum_{I \in \mathcal{I}(k)} f_I(p) dx^I$$

donde $dx^I = dx^{i_1} \dots dx^{i_k}$ y las funciones componentes f_I de f son \mathcal{C}^∞ diferenciales en Ω , con $i_1, \dots, i_k \in I \equiv I(i_1 < \dots < i_k)$ como en la definición (1.1) .

1.1. Álgebra geométrica euclidiana bidimensional $AG(2)$

Considere el anillo de polinomios $\mathbb{R}[x, y]$ en las variables x, y . Identificaremos las variables x, y con las variables e_1, e_2 respectivamente, por motivos que quedarán evidentes a lo largo de este trabajo.

Definición 1.7. *El álgebra geométrica bidimensional, denotada $AG(2)$, será un subconjunto del anillo de polinomios $\mathbb{R}[e_1, e_2]$ junto con una operación cerrada que es el producto de polinomios modificado por la regla*

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij} \text{ para } i, j = 1, 2. \quad (1.1)$$

Esta regla puede ser representada por la siguiente tabla

	e_1	e_2
e_1	1	$e_1 e_2$
e_2	$-e_1 e_2$	1

Tabla 1.1: Definición del producto

El producto definido arriba en $\mathbb{R}[e_1, e_2]$ es llamado **producto geométrico**. Estudiando un poco este producto geométrico podemos reconocer algunas funciones y propiedades ya conocidas:

Observación 1.2.

1. *El producto geométrico es cerrado.*
2. *De la tabla 1.1, la identidad $e_1 e_2 = -e_2 e_1$ nos dice que $AG(2)$ es no conmutativo.*
3. *Tenemos que la identidad $e_1 e_1 = e_2 e_2 = 1$ nos dice que e_1 y e_2 son raíces cuadradas de 1.*

4. De la tabla 1.1 podemos verificar que $(e_1e_2)(e_1e_2) = -1$; es decir que e_1e_2 es raíz cuadrada de -1 .
5. Los elementos de $AG(2)$ son polinomios de grado a lo máximo 2. Entonces si $a = a_1 + a_2e_1e_2$ y $b = b_1 + b_2e_1e_2$ son dos elementos de $AG(2)$, tenemos que

$$ab = ba = (a_1b_1 - a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)e_1e_2.$$

De estas observaciones podemos concluir que

Proposición 1.2. \mathbb{C} es un sub álgebra conmutativa de $AG(2)$, vía el isomorfismo de \mathbb{R} -álgebras (con su imagen) que mapea $i \mapsto e_1e_2$, $1 \mapsto 1$. Además, $AG(2)$ contiene un subconjunto que es isomorfo como \mathbb{R} -espacio vectorial a \mathbb{R}^2 .

Por lo cual no es difícil inferir que

Corolario 1.2.1. Existe un isomorfismo de \mathbb{R} -espacios vectoriales $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R}^2 \cong AG(2)$.

De ahora en adelante, consideramos \mathbb{R} , \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 subconjuntos de $AG(2)$ y llamaremos **0-vector**, **1-vector**, **2-vector (bi-vector)** a un número real, un vector y un complejo imaginario puro, respectivamente. En ese sentido, podemos trabajar con el álgebra geométrica todos los conceptos conocidos del álgebra lineal y mejor aún simplificarlos en muchos casos.

Observación 1.3.

1. El producto geométrico de dos vectores es un número complejo.

Dados $v = v_1e_1 + v_2e_2$, $w = w_1e_1 + w_2e_2 \in \mathbb{R}^2 \subset AG(2)$

$$\begin{aligned} vw &= (v_1w_1 + v_2w_2) + (v_1w_2 - v_2w_1)i, \\ wv &= (v_1w_1 + v_2w_2) - (v_1w_2 - v_2w_1)i. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Recordando que estamos identificando $i \equiv e_1e_2$.

2. El producto de un número complejo y un vector es un vector.

Dados $v = v_1e_1 + v_2e_2 \in \mathbb{R}^2$ y $a = a_1 + a_2i \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$av = (a_1v_1 + a_2v_2)e_1 + (a_1v_2 - a_2v_1)e_2 \quad (1.3)$$

Así, con este único producto en $AG(2)$, el producto geométrico, podemos definir los distintos operadores e identidades conocidas en matemáticas. Por ejemplo:

1. La **norma** de un vector cómo: $\|v\| := \sqrt{v^2}$.

Luego podemos definir la **circunferencia unitaria** o el **conjunto de los vectores unitarios** como

$$S^1 = \{v \in \mathbb{R}^2 / v^2 = 1\}. \quad (1.4)$$

2. Al ser, el producto geométrico, no conmutativo; podemos descomponer el producto en su parte simétrica y anti-simétrica:

$$vw = \underbrace{\frac{vw + wv}{2}}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{vw - wv}{2}}_{\text{antisimétrica}}. \quad (1.5)$$

De 1.2 también notamos que la parte simétrica es un 0-vector y es justamente el producto escalar de dos vectores, además la parte antisimétrica es un bivector cuyo coeficiente es el área del paralelogramo determinado por los dos vectores.

Así, definiremos el **producto interno** de vectores por

$$v \cdot w := \frac{vw + wv}{2}, \quad (1.6)$$

y el **producto exterior** de vectores por

$$v \uparrow w := \frac{vw - wv}{2}. \quad (1.7)$$

Note que de la definición del producto exterior de dos vectores podemos inferir que este es anticonmutativo, es decir $v \uparrow w = -w \uparrow v$, e como dijimos líneas arriba el coeficiente que acompaña al bivector e_1e_2 representa el área del paralelogramo determinado por estos dos vectores. Así, el producto exterior $v \uparrow w$ determinará el **área orientada** o **paralelogramo orientado** de v para w .

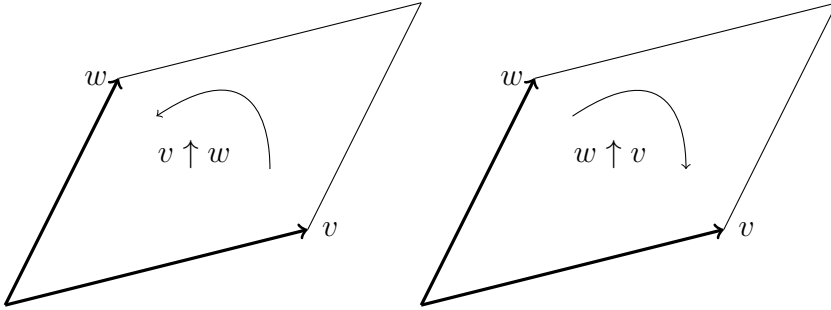


Figura 1.1: El producto exterior de dos vectores v, w determina el área (a menos de un signo) del paralelogramo construido a partir de estos dos vectores.

1.2. Álgebra geométrica euclidiana tridimensional AG(3)

“There is still something in the system which gravels me. I have not yet any clear views as to the extent to which we are at liberty arbitrarily to create imaginaries, and to endow them with supernatural properties.”

“If with your alchemy you can make three pounds of gold, why should you stop there?”^a

^aHamilton y Jhon Graves (ver [5])

Considere el anillo de polinomios $\mathbb{R}[x, y, z]$. Identificaremos las variables x, y, z con las variables e_1, e_2, e_3 respectivamente, por motivos que quedarán evidentes a lo largo de este trabajo.

Definición 1.8. *El álgebra geométrica euclidiana tridimensional, denotada $AG(3)$, es un subconjunto del anillo de polinomios $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3]$ junto con una operación cerrada que es el producto de polinomios modificado por la regla*

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij} \text{ para } i, j = 1, 2, 3. \quad (1.8)$$

Esta regla puede ser representada por la siguiente tabla

	e_1	e_2	e_3
e_1	1	$e_1 e_2$	$e_1 e_3$
e_2	$-e_1 e_2$	1	$e_2 e_3$
e_3	$-e_1 e_3$	$-e_2 e_3$	1

Tabla 1.2: Definición del producto

El producto definido arriba en $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3]$ es llamado **producto geométrico** en $AG(3)$.

Podemos observar que los elementos de $AG(3)$ son polinomios de grado a lo máximo 3. Descompondremos $AG(3)$ en subconjuntos $\langle AG(3) \rangle_0$, $\langle AG(3) \rangle_1$, $\langle AG(3) \rangle_2$ y $\langle AG(3) \rangle_3$ cuyos elementos son polinomios homogéneos de grado 0, 1, 2, 3 de $AG(3)$, respectivamente, y que de ahora en adelante se les denominarán **escalares**, **vectores**, **bivectores** y **trivectores**, respectivamente. A un elemento cualquiera de $AG(3)$ se le llamará de **multivector**.

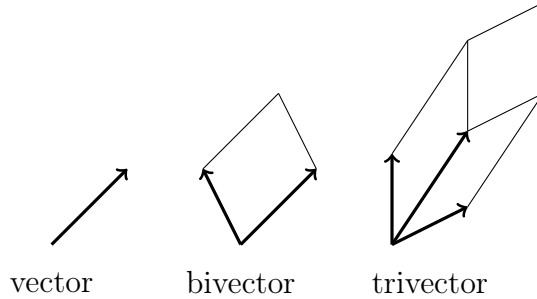


Figura 1.2: Representación geométrica de un vector, bivector y trivector.

Dado un elemento cualquiera \mathbf{A} de $AG(3)$, escribiremos este elemento como

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^3 \mathbf{A}_k,$$

donde $\mathbf{A}_k \in \langle AG(3) \rangle_3$ es la **parte homogénea de grado k** de \mathbf{A} (visto como un elemento de $\mathbb{R}[e_1, e_2, e_3]$) o su **parte k -vectorial**, para $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Así, no es difícil verificar la siguiente

Proposición 1.3.

$\langle AG(3) \rangle_k$ es \mathbb{R} -subespacio vectorial de $AG(3)$ de dimensión $\binom{3}{k}$, para todo $k = 0, \dots, 3$ y

$$AG(3) = \bigoplus_{k=0}^3 \langle AG(3) \rangle_k,$$

como \mathbb{R} -espacio vectorial.

Corolario 1.3.1. *El $AG(3)$ es más que un espacio vectorial, es un \mathbb{R} -álgebra no conmutativa (es un anillo, no conmutativo con unidad, con el producto geométrico que a su vez es un \mathbb{R} -módulo).*

Observación 1.4. *El producto de dos vectores es un cuaternión. Dados dos vectores \mathbb{R}^3*

$$\begin{aligned}
v &= v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3, \\
w &= w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3,
\end{aligned}$$

considerados como elementos de $AG(3)$, podemos calcular el producto geométrico de ellos:

$$\begin{aligned}
vw &= (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) \\
&\quad + (v_1w_2 - v_2w_1)e_1e_2 \\
&\quad + (v_1w_3 - v_3w_1)e_1e_3 \\
&\quad + (v_2w_3 - v_3w_2)e_2e_3.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Dado que el producto geométrico es no conmutativo, observe que

$$\begin{aligned}
wv &= (w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3) \\
&\quad + (w_1v_2 - w_2v_1)e_1e_2 \\
&\quad + (w_1v_3 - w_3v_1)e_1e_3 \\
&\quad + (w_2v_3 - w_3v_2)e_2e_3.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Por lo que podemos decir que el producto de v con w es el “conjugado” del producto de w con v ($vw = \overline{wv}$). Recordando que de la tabla (1.2) tenemos las “tres nuevas unidades imaginarias” e_1e_2 , e_1e_3 , e_3e_2 que satisfacen

$$(e_1e_2)^2 = (e_1e_3)^2 = (e_3e_2)^2 = (e_1e_2)(e_1e_3)(e_3e_2) = -1$$

Como el producto geométrico de v con w es no-conmutativo podemos descomponerlo en la suma de su parte simétrica y antisimétrica

$$vw = \underbrace{\frac{vw + wv}{2}}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{vw - wv}{2}}_{\text{antisimétrica}},$$

Observe también que la parte simétrica es un 0-vector, que es justamente el producto interior de dos vectores, y la parte antisimétrica es un bivector.

Esto nos permitirá la siguiente

Definición 1.9. *Dados dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^3$, definimos*

▪ **Producto escalar:**

$$v \cdot u = \frac{vw + wv}{2} \in \langle AG(n) \rangle_0.$$

▪ **Producto exterior:**

$$v \uparrow u = \frac{vw - wv}{2} \in \langle AG(n) \rangle_2.$$

Proposición 1.4. *El producto escalar y el producto exterior de vectores son bilineales.*

Observación 1.5. *Como en el caso del $AG(2)$, podemos verificar que \mathbb{R} y \mathbb{R}^3 son subconjuntos de $AG(3)$ y más aún*

$$\begin{aligned} \langle AG(3) \rangle_0 &= \mathbb{R} & , & & \langle AG(3) \rangle_1 &\cong \mathbb{R}^3, \\ \langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_3 &\cong \mathbb{C} & , & & \langle AG(3) \rangle_0 \oplus \langle AG(3) \rangle_2 &\cong \mathbb{H}, \end{aligned}$$

Observación 1.6. *Dado que el producto geométrico es bilinear, podemos analizar lo que sucede con los productos de las partes k -vectoriales de cada factor y ver la contribución de cada una de ellas al producto total, i.e. dados \mathbf{A}_j y \mathbf{B}_k las partes j, k -vectoriales de \mathbf{A}, \mathbf{B} , respectivamente; tenemos la siguiente propiedad para el producto de ellos*

$$\mathbf{A}_j \mathbf{B}_k = \langle \mathbf{A}_j \mathbf{B}_k \rangle_{|j-k|} + \cdots + \langle \mathbf{A}_j \mathbf{B}_k \rangle_{j+k},$$

donde $\langle \mathbf{A}_j \mathbf{B}_k \rangle_{j+k} = 0$ si $j + k > 3$.

Podemos aún generalizar estas nuevas operaciones.

Definición 1.10. *Sean \mathbf{A}_j y \mathbf{B}_k las partes j, k -vectoriales de los multivectores \mathbf{A} y \mathbf{B} , respectivamente, donde $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Definimos*

1. **Producto interior:**

$$\mathbf{A}_j \downarrow \mathbf{B}_k = \langle \mathbf{A}_j \mathbf{B}_k \rangle_{|j-k|} \quad \text{si } j, k \neq 0$$

y cero de otro modo.

2. **Producto exterior**

$$\mathbf{A}_j \uparrow \mathbf{B}_k = \langle \mathbf{A}_j \mathbf{B}_k \rangle_{j+k} \quad \text{si } j + k \leq n,$$

y cero de otro modo.

3. **Producto escalar**

$$\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{B}_j = \langle \mathbf{A}_j \mathbf{B}_j \rangle_0.$$

4. **j-magnitud euclidea**

$$\|\mathbf{A}_j\| = \sqrt{|\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_j|}.$$

5. **Magnitud de un multivector**

$$\|\mathbf{A}\|^2 = \sum_{j=0}^3 \|\mathbf{A}_j\|^2$$

Veamos con un ejemplo estas nuevas definiciones.

Ejemplo 1.2. Sean

$$\mathbf{A} = 4 - \frac{1}{2}e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_1e_2 - 3e_1e_3 + 5e_2e_3 + e_1e_2e_3,$$

$$\mathbf{B} = e_2 - e_3 + \frac{\pi}{2}e_1e_2 + 4e_1e_2e_3$$

dos multivectores. Podemos identificar sus partes multivectoriales

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A}_0 = 4 & \mathbf{A}_1 = -\frac{1}{2}e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ \mathbf{A}_2 = 4e_1e_2 - 3e_1e_3 + 5e_2e_3 & \mathbf{A}_3 = e_1e_2e_3 \\ \mathbf{B}_0 = 0 & \mathbf{B}_1 = e_2 - e_3 \\ \mathbf{B}_2 = \frac{\pi}{2}e_1e_2 & \mathbf{B}_3 = 4e_1e_2e_3 \end{array}$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 \downarrow \mathbf{B}_2 &= -\frac{\pi}{4}e_2 - \pi e_1 & \mathbf{A}_1 \uparrow \mathbf{B}_2 &= \frac{3\pi}{2}e_3e_1e_2 \\
\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{B}_2 &= -2\pi & \|\mathbf{A}_0\|^2 &= 16 \\
\|\mathbf{A}_1\|^2 &= \frac{52}{4} & \|\mathbf{A}_2\|^2 &= 50 \\
\|\mathbf{A}_3\|^2 &= 16 & \|\mathbf{A}\|^2 &= 95
\end{aligned}$$

Observación 1.7. Sean e_1, e_2, e_3 los elementos de la base de la base canónica de \mathbb{R}^3 . De la definición (referencia)

1. $e_i \uparrow e_j = e_i e_j$, para cualesquiera $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$
2. $e_i \uparrow e_i = 0$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$
3. $e_i \cdot e_i = e_i e_i = e_i^2 = 1$, para todo $i \in \{1, 2, 3\}$
4. $e_i \cdot e_j = 0$, para cualesquiera $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$

Proposición 1.5. Dados k vectores $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^3$, tenemos que

$$v_1 \uparrow (v_2 \uparrow \dots \uparrow v_k) = \dots = \langle v_1 \cdots v_k \rangle_k \in \langle AG(3) \rangle_k$$

si $k \leq 3$ y los vectores son linealmente independientes; en caso contrario este producto es cero. Por tal motivo, podemos prescindir del uso de paréntesis para representar el producto de $k = 3$ vectores l.i., es decir

$$v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3 = v_1 \uparrow (v_2 \uparrow v_3) = (v_1 \uparrow v_2) \uparrow v_3$$

Estos multivectores, serán llamados ***k*-vectores simples** o ***k*-blades**.

Demostración. Cuando $k = 1$ no hay nada que probar y cuando $k = 2$ se deduce fácilmente de la definición (1.10), (1.9). Para $k = 3$ observemos que por la definición (1.10)

$$v_1 \uparrow (v_2 \uparrow v_3) = v_1 \uparrow \langle v_2 v_3 \rangle_2 = \langle v_1 v_2 v_3 \rangle_3,$$

usando la propiedad asociativa del producto geométrico

$$\langle v_1 v_2 v_3 \rangle_3 = \langle v_1 v_2 \rangle_2 \uparrow v_3 = (v_1 \uparrow v_2) \uparrow v_3.$$

Cuando $k > 3$, entonces los vectores v_1, v_2, \dots, v_k son linealmente dependientes, i.e. existe un vector v_r , para algún $r \in \{1, \dots, k\}$, tal que

$$v_r = \sum_{i \neq j} \lambda_i v_i.$$

Por otro lado, se deduce de la definición del producto exterior que (1.10), cualquiera sea el orden en que tomemos los paréntesis el resultado será el mismo, es decir

$$v_1 \uparrow (v_2 \uparrow \dots \uparrow v_k) = (v_1 \uparrow v_2) \uparrow (v_3 \uparrow \dots \uparrow v_k) = \dots = \langle v_1 \dots v_k \rangle_k.$$

Así, gracias a la asociatividad del producto geométrico, podemos elegir convenientemente el siguiente orden en los paréntesis

$$\langle v_1 \dots v_r \dots v_k \rangle_k = v_1 \uparrow \dots \uparrow (v_{r-1} \uparrow v_r) \dots \uparrow v_k. \quad (1.11)$$

Como el producto exterior de vectores es anticonmutativo (1.9) y ya observamos líneas arriba que podemos tomar cualquier orden agrupación con los paréntesis, i.e. el producto exterior es asociativo; podemos reordenar el producto exterior respetando los signos

$$v_1 \uparrow \dots \uparrow (v_{r-1} \uparrow v_r) \dots \uparrow v_k = (-1)^r v_r \uparrow (v_1 \dots \uparrow v_{r-1} \uparrow \dots \uparrow v_k). \quad (1.12)$$

Por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos considerar que $r = 1$; es decir, el vector v_1 es combinación lineal de los otros vectores. Entonces por la propiedad asociativa del producto exterior

$$\langle v_1 v_2 \dots v_k \rangle_k = (v_1 \uparrow v_2) \uparrow (v_3 \uparrow \dots \uparrow v_k) \quad (1.13)$$

Por la proposición (1.4) el producto exterior de vectores es bilineal, así $v_1 \uparrow v_2 =$

$$(\lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_k v_k) \uparrow v_2 = \lambda_2 \cancel{v_2 \uparrow v_2} + \overset{0}{\lambda_3 v_3 \uparrow v_2} + \dots + \lambda_k v_k \uparrow v_2$$

por lo que podemos representar $v_1 \uparrow v_2 = (-1)v_2 \uparrow v_1^2$, donde

$$v_1^2 = \sum_{i \in \{3, \dots, k\}} \lambda_i v_i.$$

Luego, sustituyendo en (1.13), utilizando la asociatividad y multilinealidad del producto exterior

$$\langle v_1 v_2 \cdots v_k \rangle_k = (-1)v_2 \uparrow (v_1^2 \uparrow v_3) \uparrow (v_4 \uparrow \cdots \uparrow v_k). \quad (1.14)$$

Aplicando la multilinealidad tenemos que $v_1^2 \uparrow v_3 =$

$$(\lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \cdots + \lambda_k v_k) \uparrow v_3 = \lambda_3 v_3 \uparrow v_3 + \lambda_4 v_4 \uparrow v_3 + \cdots + \lambda_k v_k \uparrow v_3$$

por lo que podemos representar $v_1^2 \uparrow v_3 = (-1)v_3 \uparrow v_1^3$, donde

$$v_1^3 = \sum_{i \in \{4, \dots, k\}} \lambda_i v_i.$$

Repetiendo el proceso anterior $k - 2$ veces más tendremos que

$$v_1 \uparrow v_2 \uparrow \cdots \uparrow v_k = \langle v_1 v_2 \cdots v_k \rangle_k = 0$$

para todo $k > 3$. □

Proposición 1.6. *El producto geométrico entre un vector y un k -blade se puede escribir como la suma de producto interior y producto exterior*

$$a \mathbf{B}_k = a \downarrow \mathbf{B}_k + \mathbf{B}_k \uparrow a$$

Demostración. Note que cuando $k > 3$ la proposición se satisface trivialmente pues en este caso el producto es cero (ver proposición (1.5)). Resta probar cuando $1 \leq k \leq 3$.

Cuando $k = 1$ el resultado se deduce de la observación (1.4).

Cuando $k = 2$ tenemos que B_2 es combinación lineal de los bivectores básicos $e_i e_j$ dónde $i, j \in \{1, 2, 3\}$ son elementos distintos.

Dado que a es un vector entonces el producto aB_2 es combinación lineal de elementos de la forma

$$e_s(e_i e_j),$$

por lo que pueden ocurrir sólo dos posibilidades:

- $e_s \in \{e_i, e_j\}$, en cuyo caso $e_s(e_i e_j) \in \langle AG(3) \rangle_1$;
- $e_s \notin \{e_i, e_j\}$, en cuyo caso $e_s(e_i e_j) \in \langle AG(3) \rangle_2$.

Por lo tanto

$$aB_2 = \langle aB_2 \rangle_1 + \langle aB_2 \rangle_3 = a \downarrow B_2 + a \uparrow B_2.$$

Para $k = 3$, con un raciocino análogo al anterior se deduce que la proposición se satisface, además el término de grado mayor debe ser nulo ($a \uparrow B_3 = 0$). \square

Proposición 1.7. *Sea a un vector y \mathbf{B}_k un k -blade, tenemos que:*

$$a \downarrow \mathbf{B}_k = \frac{1}{2}(a\mathbf{B}_k - (-1)^k \mathbf{B}_k a) = (-1)^{k+1} \mathbf{B}_k \downarrow a$$

$$a \uparrow \mathbf{B}_k = \frac{1}{2}(a\mathbf{B}_k + (-1)^k \mathbf{B}_k a) = (-1)^k \mathbf{B}_k \uparrow a$$

Demostración. Como en la proposición anterior, el resultado es válido de forma trivial cuando $k > 3$. Resta probar cuando $1 \leq k \leq 3$.

Cuando $k = 1$ la proposición se verifica por la observación (1.4).

Cuando $k = 2$, por la proposición anterior tenemos que

$$\begin{aligned} aB_2 &= a \downarrow B_2 + a \uparrow B_2 \\ B_2 a &= B_2 \downarrow a + B_2 \uparrow a \end{aligned} \tag{1.15}$$

Sabemos que el término $B_2 \downarrow a = \langle B_2 a \rangle_1$ es combinación lineal de elementos de la forma $(e_i e_j) e_s$ donde $e_s \in \{e_i, e_j\}$. Entonces $(e_i e_j) e_s = (-1) e_s (e_i e_j)$. Por lo que

$$B_2 \downarrow a = (-1) a \downarrow B_2.$$

El término $B_2 \uparrow a = \langle B_2 a \rangle_3$ es combinación lineal de elementos de la forma $(e_i e_j) e_s$ donde $e_s \notin \{e_i, e_j\}$. Entonces $(e_i e_j) e_s = (-1)^2 e_s (e_i e_j)$. Por lo que

$$B_2 \uparrow a = (-1)^2 a \uparrow B_2.$$

Luego tenemos que

$$B_2 a = (-1) a \downarrow B_2 + (-1)^2 a \uparrow B_2 \quad (1.16)$$

Por lo que de (1.16) y (1.15) se sigue el resultado

$$\begin{aligned} a \downarrow B_2 &= \frac{1}{2}(a B_2 + (-1)^3 B_2 a) \\ a \uparrow B_2 &= \frac{1}{2}(a B_2 + (-1)^2 B_2 a). \end{aligned}$$

Para $k = 3$, la proposición también se verifica recordando que el producto exterior $a \uparrow B_3 = B_3 \uparrow a = 0$. \square

Capítulo 2

El espacio de los k -vectores de $AG(3)$

En la sección anterior $AG(3)$ fue descompuesto en subespacios sobre \mathbb{R}

$$\langle AG(3) \rangle_k = \{f \in AG(3) / f \text{ es homogéneo de grado } k\}$$

para $k = 0, 1, 2, 3$, llamados espacios de los k -vectores. Recordando que de la observación 1.5

$$\mathbb{R} = \langle AG(3) \rangle_0 \quad \text{y} \quad \mathbb{R}^3 = \langle AG(3) \rangle_1.$$

El espacio $\langle AG(3) \rangle_2$ consiste de elementos de la forma

$$a_1 e_1 e_2 + a_2 e_1 e_3 + a_3 e_2 e_3,$$

y recordando la observación 1.7, esto también puede ser escrito de la siguiente forma

$$a_1 e_1 \uparrow e_2 + a_2 e_1 \uparrow e_3 + a_3 e_2 \uparrow e_3.$$

Así, tenemos que

Proposición 2.1. $\{e_i \uparrow e_j; 1 \leq i < j \leq 3\}$ es una base de $\langle AG(3) \rangle_2$ como \mathbb{R} -espacio vectorial y

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle AG(3) \rangle_2 = 3 = \binom{3}{2}.$$

Además, gracias a la definición (1.9) la bilinealidad del producto exterior está garantizada. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\begin{cases} (\alpha v + \beta u) \uparrow w &= \alpha(v \uparrow w) + \beta(u \uparrow w) \\ v \uparrow (\alpha u + \beta w) &= \alpha(v \uparrow u) + \beta(v \uparrow w) \end{cases} \quad (2.1)$$

además que

$$\begin{cases} u \uparrow v &= -v \uparrow u \\ u \uparrow u &= 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

y si u y v son linealmente dependientes; es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u = \alpha v$, entonces

$$u \uparrow v = 0. \quad (2.3)$$

Para el espacio de los trivectores $\langle AG(3) \rangle_3$, tenemos que sus elementos son de la forma

$$a_{123}(e_1 e_2 e_3), \quad \text{donde } a_{123} \in \mathbb{R}.$$

De la proposición (1.5) tenemos que el producto exterior de $k = 3$ vectores linealmente independientes es asociativo

$$e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 = \langle e_1 e_2 e_3 \rangle_3 = e_1 e_2 e_3,$$

por lo que $\{e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3\}$ es una base para $\langle AG(3) \rangle_3$ y

$$\dim_{\mathbb{R}} \langle AG(3) \rangle_3 = 1 = \binom{3}{3}. \quad (2.4)$$

Análogamente al caso de dos vectores, para el caso de tres vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tenemos que el producto exterior es **multilineal**; es

decir, cada uno de los factores es lineal (dejando fijo los otros dos)

$$\begin{aligned}
u \uparrow v \uparrow (w + \alpha x) &= u \uparrow v \uparrow w + \alpha u \uparrow v \uparrow x \\
u \uparrow (v + \alpha x) \uparrow w &= u \uparrow v \uparrow w + \alpha u \uparrow x \uparrow w \\
(u + \alpha x) \uparrow v \uparrow w &= u \uparrow v \uparrow w + \alpha x \uparrow v \uparrow w
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Además tenemos que

- Si u, v, w son linealmente dependientes

$$u \uparrow v \uparrow w = 0$$

- El producto exterior es **antisimétrico**

$$u \uparrow v \uparrow w = -v \uparrow u \uparrow w = -u \uparrow w \uparrow v.$$

Por otro lado, si $\mathbf{B} \in \langle AG(3) \rangle_2$ entonces es de la forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= a_{12}e_1 \uparrow e_2 + a_{13}e_1 \uparrow e_3 + a_{23}e_2 \uparrow e_3 \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij}e_i \uparrow e_j
\end{aligned}$$

También podemos expresarlo como la suma de todas las permutaciones posibles de cada uno de sus términos

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= a_{12}e_1 \uparrow e_2 + a_{13}e_1 \uparrow e_3 + a_{23}e_2 \uparrow e_3 \\
&\quad - a_{12}e_2 \uparrow e_1 - a_{13}e_3 \uparrow e_1 - a_{23}e_3 \uparrow e_2 \\
&= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}e_i \uparrow e_j
\end{aligned}$$

donde

$$b_{\sigma(i)\sigma(j)} := Sgn(\sigma)a_{ij} \quad \text{para } 1 \leq i < j \leq 3,$$

$\sigma \in \mathcal{P}(1, 2)$ y $\mathcal{P}(1, 2)$ es el conjunto de permutaciones de 2 elementos.

Análogamente, en el caso $\mathbf{B} \in \langle AG(3) \rangle_3$ este es de la forma:

$$\mathbf{B} = a_{123}e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3.$$

También podemos expresarlo como la suma de todas las permutaciones posibles de cada uno de sus términos

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= a_{123}e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 - a_{123}e_1 \uparrow e_3 \uparrow e_2 - a_{123}e_2 \uparrow e_1 \uparrow e_3 \\ &\quad + a_{123}e_2 \uparrow e_3 \uparrow e_1 + a_{123}e_3 \uparrow e_1 \uparrow e_2 - a_{123}e_3 \uparrow e_2 \uparrow e_1 \\ &= \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 b_{ijk}e_i \uparrow e_j \uparrow e_k \end{aligned}$$

donde

$$b_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)} := Sgn(\sigma)a_{ijk} \quad \text{para } 1 \leq i < j < k \leq 3,$$

$\sigma \in \mathcal{P}(1, 2, 3)$ y $\mathcal{P}(1, 2, 3)$ es el conjunto de permutaciones de 2 elementos.

Note además que $|\mathcal{P}| = 3!$.

También observe que $\langle AG(3) \rangle_k = \{0\}$, para cada $k > 3$. Así, si tenemos v_1, v_2, \dots, v_k vectores de \mathbb{R}^3 con $k > 3$, entonces

$$v_1 \uparrow v_2 \uparrow \dots \uparrow v_k = 0,$$

dado que al ser $k > 3$ los vectores v_1, v_2, \dots, v_k son linealmente dependientes.

Recordemos en esta parte que, en general, para definir una transformación lineal T sobre un espacio vectorial basta definirla sobre los elementos de la base. En nuestro caso, estamos sobre los multiespacios (k -espacios) $\langle AG(3) \rangle_k$, donde $1 \leq k \leq 3$. En vista de la multilinealidad del producto exterior de vectores, bastará

proporcionar una función g multilinear y alternante (ver definición 1.3 y definición 1.4) tal que

$$f(v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) = g(v_1, v_2, v_3)$$

definida en cada uno de los generadores de $\langle AG(3) \rangle_k$.

Esto nos permite enunciar la siguiente

Proposición 2.2. *Existe una biyección entre*

$$\begin{aligned} \{T : \langle AG(3) \rangle_k \rightarrow V ; T \text{ es lineal}\} \\ \updownarrow \\ \{g : (\mathbb{R}^3)^k \rightarrow V ; g \text{ es } k\text{-lineal y alternante}\} \end{aligned}$$

donde V es un espacio vectorial y $1 \leq k \leq 3$.

2.1. Determinantes

Sea A una transformación lineal en \mathbb{R}^3 sobre sí mismo. Definimos un mapa $g = g_A$ sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong (\mathbb{R}^3)^3$

$$\begin{aligned} g_A : (\mathbb{R}^3)^3 &\longrightarrow \langle AG(3) \rangle_3 \\ g_A(v_1, v_2, v_3) &= Av_1 \uparrow Av_2 \uparrow Av_3 \end{aligned}$$

Dado que g es multilinear y alternante, existe una transformación lineal $f = f_A$

$$f_A : \langle AG(3) \rangle_3 \longrightarrow \langle AG(3) \rangle_3$$

satisfaciendo

$$\begin{aligned} f_A(v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) &= g_A(v_1, v_2, v_3) \\ &= Av_1 \uparrow Av_2 \uparrow Av_3 \end{aligned}$$

Pero $\langle AG(3) \rangle_3$ es unidimensional (ver (2.4)), entonces la única transformación lineal sobre este espacio es la multiplicación por un escalar. Denotamos tal escalar como $|A|$ y tenemos

$$Av_1 \uparrow Av_2 \uparrow Av_3 = |A|(v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) \quad (2.6)$$

Esto sirve para definir $|A|$, como el **determinante** de A o también denotado como $|A| := \det(A)$. Resaltamos que esta definición es completamente independiente de la representación matricial de A .

Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} |AB|(v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) &= (ABv_1) \uparrow (ABv_2) \uparrow (ABv_3) \\ &= |A|(Bv_1 \uparrow Bv_2 \uparrow Bv_3) \\ &= |A||B|(v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) \end{aligned}$$

entonces

$$|AB| = |A||B| \tag{2.7}$$

Podemos relacionar esto con el determinante de una matriz de la siguiente manera. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de \mathbb{R}^3 y $[a_{ij}]$ una matriz 3×3 de la siguiente forma

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Definamos

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3, \\ v_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3, \\ v_3 &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3, \end{aligned} \tag{2.8}$$

dado que el producto exterior es asociativo (proposición 1.5) y de la observación 1.4 tenemos que

$$\begin{aligned} v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3 &= (v_1 \uparrow v_2) \uparrow v_3 \\ &= ((a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1e_2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})e_1e_3 + (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})e_2e_3) \uparrow v_3 \end{aligned}$$

luego, aplicando la definición del producto exterior de multivectores (definición 1.10), tenemos que $v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3 =$

$$(a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})) e_1e_2e_3,$$

de donde podemos observar que el coeficiente del trivector es el determinante de la matriz, es decir

$$v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3 = |[a_{ij}]| e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3. \quad (2.9)$$

En particular, si obtenemos la representación matricial de una transformación lineal A con respecto a la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ dada por

$$\begin{aligned} Ae_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{13}e_3 \\ Ae_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3 \\ Ae_3 &= a_{31}e_1 + a_{32}e_2 + a_{33}e_3 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} Ae_1 \uparrow Ae_2 \uparrow Ae_3 &= |[a_{ij}]| e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3 \\ |A| &= |[a_{ij}]| \end{aligned}$$

que está de acuerdo a la ecuación (2.6).

2.2. Producto exterior

En la parte introductoria a este capítulo definimos una operación producto exterior que trabaja entre nuestros espacios $\langle AG(3) \rangle_k$, con $1 \leq k \leq 3$ (definición 1.10) llamada multiplicación exterior y denotado por \uparrow . Con esta operación, si multiplicamos un p -vector v y un q -vector w obtendremos un $(p+q)$ -vector $v \uparrow w$ (el cual es 0, por definición, si $p+q > 3$):

$$\begin{aligned} \cdot \uparrow \cdot &: (\langle AG(n) \rangle_p) \times (\langle AG(n) \rangle_q) &\longrightarrow & (\langle AG(n) \rangle_{p+q}) \\ &(\mathbf{B}_p, \mathbf{B}_q) &\mapsto & \mathbf{B}_p \uparrow \mathbf{B}_q = \langle \mathbf{B}_p \mathbf{B}_q \rangle_{p+q} \end{aligned}$$

Además tenemos las propiedades básicas del producto exterior.

Proposición 2.3. Sean $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ p, q, r -vectores respectivamente

i) $\mathbf{B} \uparrow \mathbf{C}$ es bilineal.

ii) $\mathbf{B} \uparrow (\mathbf{C} \uparrow \mathbf{D}) = (\mathbf{B} \uparrow \mathbf{C}) \uparrow \mathbf{D}$, la ley asociativa.

iii) $\mathbf{B} \uparrow \mathbf{C} = (-1)^{pq} \mathbf{C} \uparrow \mathbf{B}$

Demostración. (i) y (ii) siguen de la definición. (iii) nos dice que dos multivectores de grado impar anticonmutan, de otra forma los vectores conmutan. Los siguientes casos ilustran por qué sucede esto:

$$\begin{aligned} (v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) \uparrow u &= -(v_1 \uparrow v_2 \uparrow u \uparrow v_3) \\ &= (-1)^2 (v_1 \uparrow u \uparrow v_2 \uparrow v_3) \\ &= (-1)^3 (u \uparrow v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) \uparrow (u_1 \uparrow u_2) &= (-1)^3 u_1 \uparrow (v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) \uparrow u_2 \\ &= (-1)^3 (-1)^3 (u_1 \uparrow u_2) \uparrow (v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) \\ &= (-1)^{3 \cdot 2} (u_1 \uparrow u_2) \uparrow (v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) \end{aligned}$$

y por la multilinealidad del producto exterior se puede deducir en general para (iii). ■

Como se vio en la sección anterior, podemos utilizar las propiedades del producto exterior para obtener la expansión de Laplace del determinante de una matriz por menores complementarios.

Como vimos en (2.9), el determinante de la matriz

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

es dado por el producto exterior de los vectores fila de la matriz (ver 2.8), es decir

$$v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3 = |[a_{ij}]| e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3.$$

Para obtener la expresión de este determinante, utilizamos la propiedad asociativa del producto exterior, con lo cual obtuvimos que $|[a_{ij}]| =$

$$a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Esta es la expresión para el determinante por menores complementares tomando como pivote la tercera línea.

El hecho que el determinante sea independiente de la elección de la línea pivote se deduce de la asociatividad del producto exterior, ya que

$$v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3 = (v_1 \uparrow v_2) \uparrow v_3 = v_1 \uparrow (v_2 \uparrow v_3) = -v_2 \uparrow (v_1 \uparrow v_3).$$

como fue probado en la proposición 1.5. Por lo tanto, podemos obtener una expresión algébrica, utilizando los productos interior y exterior definidos en $AG(3)$ (ver definición 1.10)

$$|[a_{ij}]| = (v_1 \uparrow v_2 \uparrow v_3) \cdot (e_1 \uparrow e_2 \uparrow e_3). \quad (2.10)$$

Capítulo 3

Aplicaciones Multivectoriales

Definición 3.1. (*Aplicación multivectorial*)

Dado un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. La función con valores multivectoriales

$$\begin{aligned} f : \Omega &\rightarrow AG(n) \\ x &\mapsto f(x) = \sum_{m=0}^n \sum_{I \in \mathcal{I}(m)} f_I(x) e_I \end{aligned} \quad (3.1)$$

dónde las f_I son funciones a valores reales, con $I \in \mathcal{I}(m)$ y $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, son llamadas **funciones componentes** de f . La función f será **continua** si sus funciones componentes son continuas y f será \mathcal{C}^∞ en Ω si todas sus funciones componentes son \mathcal{C}^∞ en Ω .

Ejemplo 3.1. En el caso que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definimos la función de valores multivectoriales para todo $x \in \Omega$ como

$$\begin{aligned} f(x) = & f_0(x) + f_1(x)e_1 + f_2(x)e_2 + f_3(x)e_3 \\ & + f_{12}(x)e_1e_2 + f_{13}(x)e_1e_3 + f_{23}(x)e_2e_3 \\ & + f_{123}(x)e_1e_2e_3, \end{aligned}$$

donde las funciones $f_0, f_1, f_2, f_3, f_{12}, f_{13}, f_{23}, f_{123} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Definición 3.2. (*Fibrado Trivial*)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto, definimos

$$\begin{aligned} \pi &: \Omega \times AG(n) &\longrightarrow & \Omega \\ &(p, \mathbf{A}) &\longmapsto & p \end{aligned}$$

la proyección al primer factor; π será llamado **fibrado geométrico trivial** asociado a Ω .

Definición 3.3. (*Campos Multivectoriales*)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Las aplicaciones continuas $S : \Omega \longrightarrow \Omega \times AG(n)$ que junto a π el fibrado geométrico trivial asociado a Ω , hacen conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{S} & \Omega \times AG(n) \\ & \searrow 1_\Omega & \downarrow \pi \\ & & \Omega \end{array}$$

es decir $\pi \circ S = 1_\Omega$, son llamadas **campos multivectoriales (CMV)** asociados a Ω . Se acostumbra escribir $S(p) = (p, \tilde{S}(p))$ donde $\tilde{S} : \Omega \longrightarrow AG(n)$ es una función continua multivectorial.

Con las adaptaciones del caso podemos definir

Definición 3.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un subconjunto abierto

- Definimos los **j-fibrados geométricos triviales**

$$\pi : \Omega \times \langle AG(n) \rangle_j \longrightarrow \Omega$$

como la proyección al primer factor o $\langle AG(n) \rangle_j$ -fibrado trivial asociado a Ω .

- Definimos el **j-campo vectorial** (j -CV)

$$S : \Omega \longrightarrow \Omega \times \langle AG(n) \rangle_j$$

como el $\langle AG(n) \rangle_j$ -campo vectorial asociado a Ω .

$\Gamma_j^\infty(\Omega)$ denotará la correspondiente familia de los j -CV \mathcal{C}^∞ .

Capítulo 4

2-Teorema de Representación de Riesz

Queremos mostrar que es posible generalizar el 1-TRR y establecer una relación biyectiva entre formas diferenciales y campos multivectoriales en general.

Proposición 4.1. Teorema de representación de Riesz para funcionales bilineales antisimétricos (2-TRR)

$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional 2-lineal (bilineal) antisimétrico (ver 1.3) si y sólo si existe $M \in \langle AG(3) \rangle_2$ tal que

$$\varphi(v_1, v_2) = M \cdot (v_1 \uparrow v_2).$$

Demostración.

Supongamos que φ es un funcional 2-lineal antisimétrico. Entonces por el teorema (2.2), existe un funcional lineal T tal que

$$\varphi(v_1, v_2) = T(v_1 \uparrow v_2)$$

Escribiendo $v_1 \uparrow v_2$ como combinación lineal de elementos de la base

$$v_1 \uparrow v_2 = a_{12}e_1e_2 + a_{13}e_1e_3 + a_{23}e_2e_3$$

por lo que

$$(v_1 \uparrow v_2) \cdot e_{ij} = a_{ij}$$

para cada $1 \leq i < j \leq 3$ (ver 1.1).Entonces tenemos

$$\begin{aligned} T(v_1 \uparrow v_2) &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_{ij} T(e_{ij}) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} ((v_1 \uparrow v_2) \cdot e_{ij}) T(e_{ij}) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (v_1 \uparrow v_2) \cdot (T(e_{ij}) e_{ij}) \\ &= (v_1 \uparrow v_2) \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (T(e_{ij}) e_{ij}) \end{aligned}$$

De donde obtenemos el resultado deseado

$$\varphi(v_1, v_2) = M \cdot (v_1 \uparrow v_2)$$

donde $M = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (\varphi(e_{ij}) e_{ij})$.

La recíproca es evidente por la multilinealidad del producto exterior (ver 2.5). ■

Corolario 4.1.1. *Existe una biyección entre $\Gamma_2^\infty(\Omega)$ y $\mathcal{A}^2(\Omega)$.*

Demostración. Sea $w \in \mathcal{A}^2(\Omega)$. Para cada $x \in \Omega$ tenemos $w(x) \in A^2(\Omega)$.

Por el 2-TRR: existe $M_{w(x)} \in \langle AG(3) \rangle_2$ tal que

$$w(x)(v_1, v_2) = M_{w(x)} \cdot (v_1 \uparrow v_2)$$

por lo que podemos definir

$$\begin{aligned} F_w &: \Omega \subset \mathbb{R}^3 &\rightarrow & \Omega \times \langle AG(3) \rangle_2 \\ & &x \mapsto & (x, M_{w(x)}) \end{aligned}$$

donde $F_w \in \Gamma_2^\infty(\Omega)$.

Recíprocamente, sea $F \in \Gamma_2^\infty(\Omega)$. Para cada $x \in \Omega$ tenemos $F(x) = (x, M_x) \in \Omega \times \langle AG(3) \rangle_2$.

Así, el 2-campo vectorial F induce un mapa

$$\tilde{F} : \Omega \rightarrow \langle AG(3) \rangle_2$$

donde para cada $x \in \Omega$ tenemos $\tilde{F}(x) := M_x \in \langle AG(3) \rangle_2$.

Por el 2-TRR tenemos que $w_F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow A^2(\Omega)$ definido

$$w_F(x)(v_1, v_2) = \tilde{F}(x) \cdot (v_1 \uparrow v_2)$$

es un funcional 2-lineal antisimétrico. ■

Con ambos resultados, el teorema (4.1) y el corolario (4.1.1) podemos establecer la siguiente relación básica entre k-formas vectoriales y k-campos multivectoriales:

$$\begin{array}{ccc} dx^i & \leftrightarrow & e_i \\ dx^{i_1} dx^{i_2} & \leftrightarrow & e_{i_1} \uparrow e_{i_2} \\ \vdots & \leftrightarrow & \vdots \\ dx^{i_1} \dots dx^{i_2} & \leftrightarrow & e_{i_1} \uparrow \dots \uparrow e_{i_2} \end{array} \quad (4.1)$$

4.1. Ejemplo-Aplicación

Podemos utilizar el álgebra geométrica para “redefinir” las *integrales de superficie* $\iint_S F dS$, donde dS es un escalar, de campos vectoriales sobre superficies; así como para redefinir las *integrales de flujo* $\iint_S F dS$, donde dS será un bivector.

Sea F un campo vectorial sobre $S \subset \mathbb{R}^n$, parametrizada por $\varphi : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$.

$\partial_1 \varphi(u, v_0)$ y $\partial_2 \varphi(u_0, v)$ son los vectores velocidad de las u -curva y v -curva (respectivamente) sobre S que son imágenes, vía φ , de los segmentos rectilíneo $v = v_0$ y $u = u_0$, respectivamente.

En la recta $v = v_0$, cuando u se incrementa una cantidad Δu el punto $\varphi(u_0, v_0)$ se desplaza a lo largo de la u -curva en S , una

distancia aproximadamente igual a $|\partial_1\varphi(u, v_0)|\Delta u$; análogamente manteniendo u fija el punto $\varphi(u_0, v_0)$ se desplaza a lo largo de la v -curva en S una distancia aproximada de $|\partial_2\varphi(u_0, v)|\Delta v$, cuando v se incrementa en Δv . el rectángulo en A generado, que tiene área $\Delta u\Delta v = \Delta A$, se convierte en una región de S que aproximaremos por el paralelogramo generado por los vectores $\partial_1\varphi\Delta u$ y $\partial_2\varphi\Delta v$, dicho paralelogramo tiene por área (ver figura (4.1))

$$|\partial_1\varphi\Delta u \uparrow \partial_2\varphi\Delta v| = |\partial_1\varphi \uparrow \partial_2\varphi|\Delta u\Delta v$$

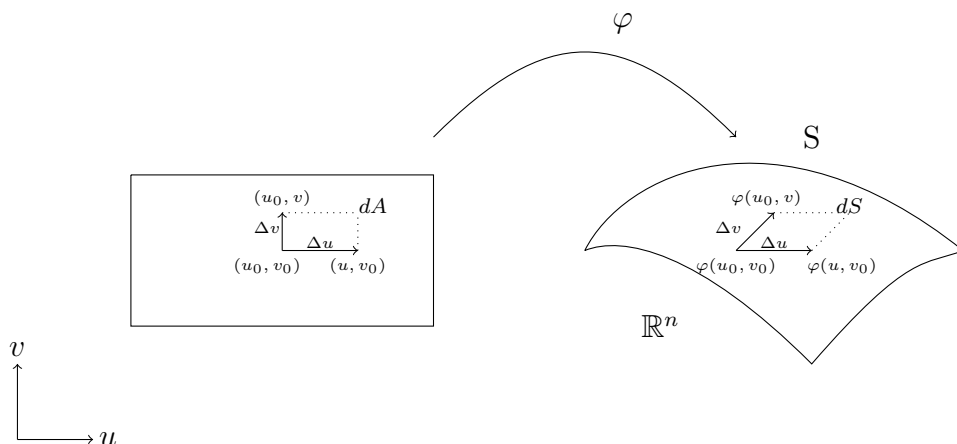


Figura 4.1:

Por la parametrización $\varphi(A) = S$ tenemos que $F(x, y) = F(\varphi(u, v))$, y sumando el producto de estos nuevos elementos tenemos

$$\sum F(\varphi(u, v))|\partial_1\varphi(u, v) \uparrow \partial_2\varphi(u, v)|\Delta A$$

Por lo que podemos definir

$$\iint_S F dS := \lim_{|\Delta A| \rightarrow 0} \sum F(\varphi(u, v))|\partial_1\varphi(u, v) \uparrow \partial_2\varphi(u, v)|\Delta A \quad (4.2)$$

note que el miembro derecho es la suma de Riemann, entonces:

$$\iint_S F dS = \iint_A F(\varphi(u, v)) |\partial_1 \varphi(u, v) \uparrow \partial_2 \varphi(u, v)| dA$$

■

Sea F un campo vectorial sobre $S \subset \mathbb{R}^n$ una superficie orientada, parametrizada por $\varphi : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$.

Podemos definir el *bivector infinitesimal* $d\mathbf{S}$ como

$$d\mathbf{S} = \mathbf{B}dS$$

donde \mathbf{B} es un bivector unitario en el plano tangente a S orientado con la superficie S . Entonces

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= \mathbf{B}dS = \frac{\partial_1 \varphi \uparrow \partial_2 \varphi}{|\partial_1 \varphi \uparrow \partial_2 \varphi|} |\partial_1 \varphi \uparrow \partial_2 \varphi| dA \\ &= (\partial_1 \varphi \uparrow \partial_2 \varphi) dA \end{aligned}$$

con lo que definimos la integral de flujo de F sobre la superficie orientada S

$$\iint_S F d\mathbf{S} = \iint_A F(\varphi) (\partial_1 \varphi \uparrow \partial_2 \varphi) dA$$

■

Bibliografía

- [1] Edgar Vera Saravia *Formas Diferenciales en \mathbb{R}^n* ; Notas de Aula, 2014.
- [2] Edgar Vera Saravia *Algebra Geométrica Bidimensional, una introducción heurística*; Notas de Aula, 2014.
- [3] Chris Doran-Anthony Lasenby *Geometric Algebra, for physicists*; Cambridge University Press, 2003.
- [4] Harley Flanders *Differential forms with applications to the physical sciences*; Dover Publications, 1989.
- [5] John C. Baez and John Huerta *The strangest numbers in string theory*; Scientific American, vol 304, May-2011.
- [6] Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics*; Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [7] Hestenes, David; Sobczyk, Garret. *Clifford algebra to geometric calculus: a unified language for mathematics and physics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] Hestenes, David. *New foundations for classical mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [9] Snygg, John. *A new approach to differential geometry using Clifford's geometric algebra*. Springer Science & Business Media, 2011.