UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Caracterización de los módulos planos por ideales finitamente generados

MONOGRAFÍA

Para optar el Título de Licenciado en Matemática

AUTOR

Francisco Quiróz García

LIMA – PERÚ
2007

CARACTERIZACIÓN DE LOS MÓDULOS PLANOS POR IDEALES FINITAMENTE GENERADOS

FRANCISCO QUIRÓZ GARCÍA

Monografía presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como requisito parcial para obtar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Aprobado por:

Mg. José de Carmen Pérez Arteaga

Mg. Lord Livin Barrera Bocanegra

LIMA – PERÚ

Febrero 2007

DEDICATORIA

A mis padres:

Sergio y Marlene.

Y a Rogger, Margarita y Betzabeth.

Agradecimientos

Al Mg. José del Carmen Pérez Arteaga por la asesoría brindada y lo aprendido en clase.
Al Mg. Napoleón Caro Tuesta por la orientación académica y consejos durante el desarrollo del presente trabajo.
A mis profesores de la E.A.P. de Matemática que ayudaron a mi formación académica.

Lima, Febrero del 2007

FRANCISCO QUIRÓZ GARCÍA

CARACTERIZACIÓN DE LOS MÓDULOS PLANOS POR IDEALES FINITAMENTE GENERADOS

FRANCISCO QUIRÓZ GARCÍA

Asesor : Mg. José del Carmen Pérez Arteaga

Título Obtenido : Licenciado en Matemática

Resumen

En este trabajo caracterizaremos los módulos planos por ideales finitamente generados y por ecuaciones lineales. Para ello hemos dividido el trabajo en 4 capítulos :

En el capítulo 1 utilizaremos el lenguaje de categorías y funtores para presentar los módulos proyectivos y planos como aquellos módulos M que hacen exactos a los funtores $Hom_R(M,-)$ y $M \otimes_R -$ respectivamente.

En el capítulo 2 estudiaremos las propiedades básicas de los módulos planos, así como algunos ejemplos.

Los funtores de torsión serán presentados en el capítulo 3.

En el capítulo 4, como aplicación de los funtores de torsión, probaremos los dos teoremas principales de nuestra monografía. El primer teorema mostrará que M es plano si y solamente si el funtor de torsión 1 – dimensional $\mathrm{Tor}_1^R(M, R/I) = 0$ para todo ideal finitamente generado I . Y el segundo teorema caracterizará los módulos planos usando ecuaciones lineales. Finalmente probaremos que si R es un anillo local y M es un R- módulo finitamente generado, entonces M es plano si y solamente si M es proyectivo si y solamente si M es libre.

PALABRAS CLAVES: Funtores de Torsión
Ideal finitamente generado
Módulo Plano
Módulo Proyectivo
Resolución Proyectiva.

Índice

Introducción

Sea R un anillo conmutativo con unidad y M un R – módulo. El funtor $Hom_R(M,-)$ es exacto a izquierda, pero en general no es exacto ; aquellos módulos para los cuales este funtor es exacto son los denominados módulos **PROYECTIVOS.** El funtor $M \otimes_R -$ es exacto a derecha, pero en general no es exacto . Los módulos M para los cuales este funtor es exacto son los llamados módulos **PLANOS.** Todo módulo proyectivo es plano, pero el recíproco no siempre es cierto.

La noción de módulo plano fue introducida por Jean Pierre Serre en su libro GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE (Ann. Inst. Fourier. Vol 6. 1955/56) y son de importancia fundamental en la geometría algebraica moderna.

El objetivo principal de la presente monografía es caracterizar los módulos planos vía los ideales finitamente generados del anillo, más concretamente mostraremos que dado un R-módulo M, él será plano si y solamente si el funtor de torsión 1- dimensional $Tor_1^R(M, R/I) = 0$ para todo ideal finitamente generado I. También caracterizaremos los módulos planos por ecuaciones lineales. Finalmente, probaremos que si el anillo es local y el módulo es finitamente generado, ser plano es equivalente a ser proyectivo.

Capítulo 1

Preliminares

En el desarrollo de la presente monografía, R denotará un anillo conmutativo con unidad $1 \neq 0$, arbitrariamente dado.

1.1 Categorías y funtores

Definición 1.1.1. *Una categoría $\mathscr{C}$ consiste de*

(i) Una clase Obj $\mathscr{C}$ cuyos elementos A, B, C,……son llamados objetos de $\mathscr{C}$

(ii) Para cada par de objetos (A, B) de la categoría $\mathscr{C}$, un conjunto denotado por $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, cuyos elementos f son llamados **morfismos** *de A en B y denotados con $f : A \rightarrow B$.*

(iii) Para cada terna de objetos A, B, C de la categoría $\mathscr{C}$ una aplicación

$$(f, g) \mapsto g \circ f \text{ de } Hom_{\mathscr{C}}(A,B) \times Hom_{\mathscr{C}}(B, C) \rightarrow Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$$

(llamada composición) que satisface los siguientes axiomas:

a) Para cada cuádruple de objetos A, B, C y D de la categoría $\mathscr{C}$ de morfismos y toda terna $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ y $h : C \rightarrow D$, se cumple que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

b) Para todo objeto A de la categoría $\mathscr{C}$, existe un morfismo $1_A \in Hom_{\mathscr{C}}(A, A)$, llamado **morfismo identidad***, tal que para todo objeto B de $\mathscr{C}$ y para todo $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$, $f \circ 1_A = f$ y para todo $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, A)$, $1_A \circ g = g$.*

Observación. No podemos decir que $\mathscr{C}$ consta de todos los objetos A, B, C,..., etc., pues este "conjunto" sería una total ilegitimidad en la teoría usual de los conjuntos. Sin embargo, si adoptamos los axiomas de Gödel - Bernays - Von Neumann para la teoría de conjuntos, tendremos totalidades más grandes que los conjuntos, llamadas **clases**, y entonces sí podemos hablar de la **clase** de todos los objetos A, B, C, etc.

Ejemplos.

1) La categoría **Conj**: Los objetos son los conjuntos, los morfismos son las aplicaciones de un conjunto en otro y la composición de morfismos es la composición de aplicaciones.
2) La categoría **Top**: Los objetos son los espacios topológicos, los morfismos son las aplicaciones continuas y la composición de morfismos es la composición de aplicaciones continuas.
3) La categoría **Gr**: Los objetos son los grupos, los morfismos son los homomorfismos de grupos y la composición de morfismos es la composición de homomorfismos.
4) Sea S un semigrupo con unidad (o sea un monoide). Definimos $\mathscr{C}$ como sigue.

   Obj $\mathscr{C}$ = {A} (o sea un solo objeto)

   Hom$_{\mathscr{C}}$(A,A) = S (es decir, los morfismos son los elementos de S), y la composición es la multiplicación en S.

   Note que Hom$_{\mathscr{C}}$(A,A) no es conjunto de funciones.
5) Sea R un anillo conmutativo con unidad. La Categoría **Mod$_{\mathbf{R}}$**: Los objetos son los R-módulos a izquierda, los morfismos son los R-homomorfismos de módulos y la composición de morfismos es la composición de R-homorfismos.
6) Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. La categoría producto $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$ es definida como sigue:

   Un objeto de $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$ es un par (A, B) donde A es un objeto de $\mathscr{C}$ y B es un objeto de $\mathscr{D}$.

   Un morfismo de (A_1, B_1) en (A_2, B_2) es un par $(f_1, f_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A_1, A_2) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(B_1, B_2)$.

   La composición $(g_1, g_2) \circ (f_1, f_2)$ es $(g_1 \circ f_1, g_2 \circ f_2)$.

Definición 1.1.2. *Sean* $\mathscr{C}$ *y* $\mathscr{D}$ *dos categorías. Un* ***funtor covariante*** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *es una aplicación que a cada objeto A de* $\mathscr{C}$ *le asigna un objeto F(A) de* $\mathscr{D}$ *y a cada morfismo* $f : A \to B \in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *un morfismo* $F(f) : F(A) \to F(B)$ *de* $Hom_{\mathscr{D}}(F(A), F(B))$ *de modo que:*

a) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$

b) $F(1_A) = 1_{F(A)}$

Definición 1.1.3. *Sean* $\mathscr{C}$ *y* $\mathscr{D}$ *dos categorías. Un* ***funtor contravariante*** $G : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *es una aplicación que a cada objeto A de* $\mathscr{C}$ *le asigna un objeto G(A) de* $\mathscr{D}$ *y a cada morfismo* $f : A \to B$ *de* $Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$ *un morfismo* $G(f) : G(B) \to G(A)$ *de* $Hom_{\mathscr{D}}(G(B), G(A))$ *de modo que*

a) $G(f \circ g) = G(g) \circ G(f)$

b) $G(1_A) = 1_{G(A)}$

Ejemplos.

1) Sea $\mathscr{C}$ una categoría. El funtor **identidad** de $\mathscr{C}$ es definido por $1_{\mathscr{C}}(A) = A$ (respectivamente $1_{\mathscr{C}}(f) = f$) para todo objeto A (respectivamente para todo morfismo *f*) de $\mathscr{C}$.
2) Definimos el funtor F: Gr → Conj que a cada grupo G le asigna el conjunto G y a cada homomorfismo de grupos *f*: G→H le asocia la aplicación *f*: G→H.
3) Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea A un objeto de $\mathscr{C}$.

   Definimos $Hom_{\mathscr{C}}(A, -)$: $\mathscr{C} \to$ Conj que a cada objeto B de $\mathscr{C}$ le asigna el conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(A, -)_{(B)} = Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ y a cada morfismo $f : B \to C$ de $\mathscr{C}$ le asigna el morfismo $Hom_{\mathscr{C}}(A, -)_{(f)} : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \to Hom_{\mathscr{C}}(A, C)$

   $$g \mapsto f \circ g$$

   Entonces $Hom_{\mathscr{C}}(A, -)$ es un funtor (covariante) de la categoría $\mathscr{C}$ en la categoría de conjuntos **Conj.**

4) Sea $\mathscr{C}$ una categoría y sea A un objeto de $\mathscr{C}$

Definimos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, A) : \mathscr{C} \to \mathrm{Conj}$ la aplicación que a cada objeto B de $\mathscr{C}$ le asigna el conjunto

$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, A)_{(B)} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$ y a cada morfismo $f : B \to C$ de $\mathscr{C}$ le asocia

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, A)_{(f)} : & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(C, A) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A) \\ & g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

Entonces $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, A)$ es un funtor contravariante.

5) Consideremos la aplicación $F : \mathrm{Conj} \to \mathrm{Mod}_R$ que asigna a cada conjunto (objeto) X el R-módulo libre generado por X, F(X), y a cada aplicación de conjuntos f: X→Y el único R-homomorfismo $F(f) : F(X) \to Y$ que extiende f a F(X). Entonces F es un funtor (covariante)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & F(X) \arrow[dl, "F(f)"] \\ Y & \end{tikzcd} \qquad F(f) \circ i = f$$

Definición 1.1.4. *Una sucesión exacta es una sucesión finita o infinita*

$$\ldots\ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots\ldots$$

de homomorfismos de R-módulos tal que la imagen del homomorfismo entrante coincide con el núcleo del homomorfismo saliente de todo módulo distinto de los extremos (si existen) de la sucesión. Por ejemplo, en el módulo Y, deberá ser

$$Im\,(f) = Ker\,(g).$$

Una sucesión semiexacta es una sucesión finita o infinita

$$\ldots\ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots\ldots$$

de homomorfismos de R-módulos tal que la imagen del homomorfismo entrante esta incluida en el núcleo del homomorfismo saliente de todo módulo distinto de los extremos (si existen) de la sucesión. Por ejemplo, en el módulo Y, deberá ser

$$Im\,(f) \subset Ker\,(g).$$

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

se llamará sucesión exacta corta.

Definición 1.1.5. *Sea Mod_R la categoría de R-módulos.*

1) Un funtor covariante F: $Mod_R \to Mod_R$ es llamado **exacto a derecha** *si la exactitud de la sucesión*

$$N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

implica la exactitud de la sucesión

$$F(N) \xrightarrow{F(f)} F(P) \xrightarrow{F(g)} F(Q) \longrightarrow 0$$

2) Un funtor covariante G: $Mod_R \to Mod_R$ es llamado **exacto a izquierda** *si la exactitud de la sucesión*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q$$

implica la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow G(N) \xrightarrow{G(f)} G(P) \xrightarrow{G(g)} G(Q)$$

1.2 El funtor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ en la categoría $\mathbf{Mod_R}$.

1.2.1 El Funtor $\mathrm{Hom}_R(M,-)$

Sean M y N dos R-módulos. El conjunto $\mathrm{Hom}_R(M, N) = \{ f : M \to N \ / \ f$ es un R-homomorfismo$\}$ con las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \text{ y}$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

adquiere de modo natural una estructura de R-módulo.

Si f: N→P es un R-homomorfismo, la aplicación

$$f_* : \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(M, P)$$
$$\varphi \mapsto f_*(\varphi) = f \circ \varphi$$

es un R-homomorfismo.

Usaremos la notación $\mathrm{Hom}_R(M, f)$ para referirnos a f_*

Proposición 1.2.1.1. *Sea M un R-módulo. La aplicación $Hom_R(M,-): Mod_R \to Mod_R$ que asigna a cada R-módulo N, el R-módulo $Hom_R(M, N)$ y a cada R-homomorfismo $f : N \to P$ el R-homomorfismo $Hom(M, f)$ es un funtor (covariante) de la categoría Mod_R en la categoría Mod_R.*

Prueba.

i) Sean $f : N \to P$ y $g : P \to Q$ dos R-homomorfismos y $\varphi \in Hom_R(M, N)$, entonces

$Hom_R(M, g\circ f)(\varphi) = (g\circ f)\circ\varphi = g\circ(f\circ\varphi) = Hom_R(M, g)(f\circ\varphi) =$

$Hom_R(M, g) \circ (Hom_R(M, f)(\varphi)) = [Hom_R(M, g) \circ Hom_R(M, f)](\varphi)$

Luego $Hom_R(M, g\circ f) = Hom_R(M, g) \circ Hom_R(M, f)$

ii) Sea 1_N: N→N el R-homomorfismo identidad y $\varphi \in Hom_R(M, N)$, entonces:

$Hom_R(M, 1_N)(\varphi) = 1_N \circ \varphi = \varphi = (1_{Hom_R(M,N)})(\varphi)$

Por tanto $Hom_R(M, 1_N) = 1_{Hom_R(M,N)}$ ■

Proposición 1.2.1.2. *Sea M un R-módulo . El funtor $Hom_R(M,-)$ es exacto a izquierda.*

Prueba.

Sea

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q$$

una sucesión exacta, probemos que

$$0 \longrightarrow Hom_R(M,N) \xrightarrow{Hom_R(M,f)} Hom_R(M,P) \xrightarrow{Hom_R(M,g)} Hom_R(M,Q)$$

es una sucesión exacta.

En efecto:

i) Sea $\varphi \in Hom_R(M, N)$ y supongamos que $Hom_R(M, f)(\varphi) = 0$, es decir, $f\circ\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Como f es un monomorfismo, $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Luego $\varphi = 0$ y; por tanto, $Hom_R(M, f)$ es monomorfismo.

ii) Supongamos que $\psi \in \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(M,f))$, entonces $\psi = f\circ\varphi$ para algún $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Luego $\mathrm{Hom}_R(M, g)(\psi) = g\circ\psi = g\circ(f\circ\varphi) = (g\circ f)\circ\varphi = 0$, pues, $g\circ f = 0$; por tanto, $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Hom}_R(M,f)) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(M,g))$.

Recíprocamente, sea $\psi \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(M, g))$, es decir, $g\circ\psi = 0$

Si $x \in M$, entonces $\psi(x) \in \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Im} f$, luego existe un único $y \in N$ tal que $\psi(x) = f(y)$, pues, f es un monomorfismo.

Definimos $\varphi: M \to N$ mediante $\varphi(x) = y = f^{-1}(\psi(x))$, entonces $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ y más aún

$$\mathrm{Hom}_R(M,f)\,(\varphi) = f\circ\varphi = \psi .$$

Por tanto $\psi \in \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_R(M,f))$. ■

Observación. En general el funtor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ no es exacto a derecha.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

Consideremos la sucesión exacta de $\mathbb{Z}$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\ i\ } \mathbb{Q} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

donde:

$\mathbb{Q}$: Cuerpo de los racionales.

Sea $M = \mathbb{Z}_2$ como $\mathbb{Z}$-módulo

Entonces:

$\mathrm{Hom}_Z(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_Z(Z_2,\pi)} \mathrm{Hom}_Z(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ no puede ser sobreyectiva, pues $\mathrm{Hom}_Z(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}) = 0$ mientras que $\mathrm{Hom}_Z(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$

En efecto, si $\varphi \in \mathrm{Hom}_Z(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q})$ entonces:

$0 = \varphi(0) = \varphi(\bar{1}+\bar{1}) = \varphi(\bar{1}) + \varphi(\bar{1}) = 2\,\varphi(\bar{1})$, luego $\varphi(\bar{1}) = 0$ pero

$\varphi(\mathrm{n}) = \mathrm{n}\varphi(\bar{1}) = 0$ de donde se concluye que $\varphi \equiv 0$. Sin embargo $\mathrm{Hom}_Z(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$, basta tomar el homomorfismo $\gamma : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ definido por: $\gamma(\bar{0}) = 0$, $\gamma(\bar{1}) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

Ejemplo 2

Sea R = $K[x]$ donde K es cualquier cuerpo y consideremos R/xR como R-módulo.

Luego se tiene la sucesión exacta de R-módulos:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{x} R \xrightarrow{\pi} R/xR \longrightarrow 0$$

Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_R(R/xR\,,\ -\,)$ a esta sucesión, se tiene:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/xR\,, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/xR\,, R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R/xR\,, R/xR) \longrightarrow 0$$

Esta sucesión no es exacta a derecha pues, $\mathrm{Hom}_R(R/xR\,, R) = 0$ pero $\mathrm{Hom}_R(R/xR\,, R/xR) \neq 0$.

En efecto, ver que si p$\in$R, entonces $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ $\quad (\bar{p} = a_0 + xR)$

Ahora, si $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(R/xR\,, R)$ entonces:

$0 = \varphi(0) = \varphi((a_0 + xR)(x + xR)) = \varphi(x(a_0 + xR)) = x\,\varphi(a_0 + xR)$, luego $\varphi(a_0 + xR) = 0$, pues $x \neq 0$.

Sin embargo $\mathrm{Hom}_R(R/xR\,, R/xR) \neq 0$, basta tomar el homomorfismo identidad.

Observación. Aquellos módulos para los cuales el funtor $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ es exacto a derecha serán los llamados módulos proyectivos.(ver proposición 1.2.1.4)

Definición 1.2.1.3. *Un R- módulo M es* **llamado proyectivo** *si para todo R-homomorfismo* $\psi : M \to Q$ *y para todo R-epimorfismo* $g: P \to Q$ *de R-módulos, existe un R-homomorfismo* $\varphi : M \to P$ *tal que* $\psi = g \circ \varphi$

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "\exists \varphi"'] \arrow[d, "\psi"] & \\
P \arrow[r, "g"] & Q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Proposición 1.2.1.4. *Sea M un R-módulo. Entonces M es proyectivo si y solamente si el funtor* $Hom_R\,(M, -)$ *es exacto a derecha.*

Prueba.

Es clara a partir de la definición.

Proposición 1.2.1.5. *Todo módulo libre es proyectivo.*

Prueba.

(ver $[H]$, página 84)

Lema 1.2.1.6. *Sea M un R-módulo proyectivo y g: P$\to$M un epimorfismo. Entonces P = Kerg$\oplus$ M_1 donde M_1 es isomorfo a M.*

Prueba.

Como M es proyectivo existe φ: M$\to$P tal que $g\circ\varphi$ = 1_M , bastará tomar M_1 = Imφ

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "1_M"] & \\
P \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$ ∎

Proposición 1.2.1.7. *Un R-módulo M es proyectivo si y sólo si es un sumando directo de un módulo libre.*

Prueba.

Supongamos que M es proyectivo, como todo módulo es cociente de un módulo libre, entonces existe un módulo libre F y un epimorfismo π : F$\to$M

Entonces por el Lema anterior F = Kerπ $\oplus$ M_1 , donde M_1 $\approx$ M.

Recíprocamente: Supongamos que existe un R-módulo libre F y un R-módulo N tal que F = M$\oplus$N

Sea ψ : M$\to$ Q y g: P$\to$Q un epimorfismo.

Sean i: M$\to$F y π : F$\to$M las aplicaciones inclusión y proyección, entonces $\pi\circ i$ =1_M.

Como F es libre, entonces es proyectivo.

Luego existe φ: F$\rightarrow$P; tal que $g \circ \varphi = \psi \circ \pi$

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, shift right, "\pi"'] \arrow[d, dashed, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi \circ \pi"] & M \arrow[l, shift right, "i"'] \arrow[d, "\psi"] & \\
P \arrow[r, "g"] & Q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Consecuentemente existe $\sigma = \varphi \circ i$: M$\rightarrow$P tal que $g \circ \sigma = \psi$.

Por tanto M es proyectivo.

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, dashed, "\sigma = \varphi \circ i"'] \arrow[d, "\Psi"] & \\
P \arrow[r, "g"] & Q \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

$\blacksquare$

Observación. Existen módulos proyectivos que no son libres.

Por ejemplo: Si R = $\mathbb{Z}_6$

Entonces $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ (Suma directa externa). Ahora $\mathbb{Z}_6$ es un $\mathbb{Z}_6$ – módulo libre, luego por el teorema anterior $\mathbb{Z}_2$ es $\mathbb{Z}_6$ - módulo proyectivo, pero no es libre, pues todo $\mathbb{Z}_6$-módulo libre debe tener por lo menos 6 elementos.

1.3 El Funtor $M \otimes_R -$ en la categoría $\mathbf{Mod_R}$

Definición 1.3.1. *Sean M y N dos R-módulos. Un* **producto tensorial** *de M y N es un R-módulo T, junto con una aplicación bilineal $f\colon M \times N \to T$ tal que, para toda aplicación bilineal $g\colon M \times N \to P$ en un R-módulo P, existe un único R-homomorfismo $h\colon T \to P$ tal que $h \circ f = g$.*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & T \arrow[dl, dashed, "\exists! h"] \\ P & \end{tikzcd} \qquad h \circ f = g.$$

Proposición 1.3.2. *Dados dos R-módulos M y N, existe un producto tensorial de M y N; más aún si (T, f) y (T', f') son productos tensoriales de M y N, entonces existe un único isomorfismo $h\colon T \to T'$ tal que $h \circ f = f'$*

Prueba.

(ver $[R]$, página 22)

Observaciones.

1) La proposición anterior garantiza que todo par de R-módulos M y N determina un producto tensorial (T, f) esencialmente único. Denotaremos a T con el símbolo $M \otimes_R N$, el cual será llamado **producto tensorial** de M y N.

2) Para cada par $(m, n) \in M \times N$, el elemento $f(m, n) \in M \otimes_R N$ será denotado por $m \otimes n$.

3) $M \otimes_R N$ es generado por el conjunto de los $m \otimes n$.

4) Sean $f : M \to N$ y $g : P \to Q$ homomorfismos de R-módulos y $f \times g : M \times P \to N \times Q$ la aplicación $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$.

Sean $\varphi : M\times P \to M\otimes_R P$ y $\psi : N\times Q \to N\otimes_R Q$

las funciones bilineales respectivas.

Consideremos la función bilineal :

$$\psi \circ (f\times g) : M\times P \longrightarrow N\otimes Q$$

Como $M\otimes_R P$ es el producto tensorial, existe un único R-homomorfismo

$h : M\otimes_R P \to N\otimes_R Q$ que denotaremos con $f\otimes g$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M\times P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f\times g"'] & M\otimes_R P \arrow[d, dashed, "f\otimes g"] \\ N\times Q \arrow[r, "\psi"] & N\otimes_R Q \end{tikzcd}$$

Luego $(f\otimes g)(x\otimes y) = f(x)\otimes g(y)$, $x\in M$, $y\in P$.

En el caso que $N = M$ y $f = 1_M$, el R-homomorfismo:

$1_M\otimes g : M\otimes_R P \to M\otimes_R Q$ será denotado con $M\otimes g$.

Proposición 1.3.3. *Sea M un R-módulo. La aplicación $M\otimes_R$ -: $Mod_R \to Mod_R$ que asigna a cada R-módulo N el R-módulo $M\otimes_R N$ y a cada R-homomorfismo $f : N \to P$ el R-homomorfismo $M\otimes f$: $M\otimes_R N\to M\otimes_R P$ es un funtor covariante de la categoría Mod_R .*

Prueba.

i) Sean $f : N \to P$ y $g : P \to Q$ dos R-módulos.

Entonces:

$M\otimes (g\circ f)(m\otimes n) = m\otimes (g\circ f)(n) = m\otimes g(f(n)) = M\otimes g(m\otimes f(n)) = (M\otimes g)\circ(M\otimes f)\,(m\otimes n)$; $m\in M$ y $n\in M$.

Luego $M\otimes (g\circ f) = (M\otimes g)\circ(M\otimes f)$.

ii) Sea $1_N: N\to N$, entonces para $(m, n) \in M\times N$

$M\otimes 1_N(m\otimes n) = m\otimes 1_N(n) = m\otimes n = 1_{M\otimes N}(m\otimes n)$

Luego $M\otimes 1_N = 1_{M\otimes N}$

■

Proposición 1.3.4. *Sea M un R-módulo. El funtor* $M\otimes_R -$ *es exacto a derecha.*

Prueba.

Sea:

$$N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta.

Probemos que

$$M\otimes_R N \xrightarrow{M\otimes f} M\otimes_R P \xrightarrow{M\otimes g} M\otimes_R Q \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta.

En efecto:

i) Sea $\omega \in M\otimes Q$, entonces $\omega = \sum_{i=1}^{n} r_i(m_i \otimes q_i)$ para algunos $m_i \in M$ y $q_i \in Q$.

Como g es epimorfismo, $q_i = g(p_i)$ para algunos $p_i \in P$.

Luego $\sum_{i=1}^{n} r_i(m_i \otimes p_i) \in M\otimes P$ y más aún

$$M\otimes g\left(\sum_{i=1}^{n} r_i(m_i \otimes p_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i\big(m_i \otimes g(p_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} r_i\big(m_i \otimes q_i\big) = \omega$$

Por tanto $M\otimes g$ es un epimorfismo.

ii) Sea $v \in \operatorname{Im}(M\otimes f)$, entonces $v = M\otimes f(\mu)$, para algún $\mu \in M\otimes N$.

Luego $\mu = \sum_{i=1}^{n} r_i\big(m_i \otimes n_i\big)$ para algunos $r_i \in R$, $m_i \in M$, $n_i \in N$

Por tanto $$v = \sum_{i=1}^{n} r_i\big(m_i \otimes f(n_i)\big) = 0$$

Entonces $$M\otimes g(v) = \sum_{i=1}^{n} r_i\big(m_i \otimes g\circ f(n_i)\big) = 0 \qquad \text{pues } g\circ f = 0.$$

Esto prueba que $\operatorname{Im}(M\otimes f) \subset \operatorname{Ker}(M\otimes g)$. Lo cual induce un homomorfismo $(M\otimes P)\big/\operatorname{Im}(M\otimes f) \xrightarrow{\alpha} M\otimes Q$ tal que $\alpha\circ\pi = M\otimes g$.

$$\begin{tikzcd} M\otimes P \arrow[r, "M\otimes g"] \arrow[d, "\pi"'] & M\otimes Q \\ {}^{M\otimes P}\!\big/_{\mathrm{Im}(M\otimes f)} \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

Por otro lado, como g es sobreyectiva, para cada $q \in Q$ existe $p \in P$ tal que $q = g(p)$.

Ahora bien, si $q = g(p_1)$ para otro $p_1 \in P$, entonces $p - p_1 \in \mathrm{Ker}g = \mathrm{Im}f$.

Luego, si $m \in M$ entonces tenemos que $m \otimes (p\text{-}p_1) \in \mathrm{Im}(M \otimes f)$

Por tanto, $m \otimes p + \mathrm{Im}(M \otimes \mathrm{f}) = m \otimes p_1 + \mathrm{Im}(M \otimes P)$

Luego, la aplicación:

$$\gamma : M \times Q \ \to \ {}^{M\otimes P}\!\big/_{\mathrm{Im}(M\otimes f)}$$

$$(q, m) \ \mapsto \ p \otimes m + \mathrm{Im}(M \otimes f)$$

donde $q = g(p)$ está bien definida y es bilineal.

Por la propiedad universal del producto tensorial, existe un R-homomorfismo

$$\beta : \ M \otimes Q \longrightarrow {}^{M\otimes P}\!\big/_{\mathrm{Im}(M\otimes f)}$$

$$\begin{tikzcd} M\times Q \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & M\otimes Q \arrow[dl, "\beta"] \\ {}^{M\otimes P}\!\big/_{\mathrm{Im}(M\otimes f)} & \end{tikzcd}$$

Ahora, es fácil ver que $\beta = \alpha^{-1}$

Por tanto α es un isomorfismo y como $\alpha \circ \pi = M \otimes g$, se tiene que

$\mathrm{Im}(M \otimes f) = \mathrm{Ker}\,\pi = \mathrm{Ker}(\alpha \circ \pi) = \mathrm{Ker}(M \otimes g)$

$\blacksquare$

Observación.

1) En general el funtor $M \otimes_R -$ no es exacto a izquierda.

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

La sucesión de $\mathbb{Z}$ - módulos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0 \qquad \text{es exacta,}$$

donde $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ homomorfismo definido por $f(m) = 2m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$ y π es la proyección canónica.

Tensorando con el $\mathbb{Z}$ -módulo $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se tiene la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Z} \xrightarrow{Z/2Z \otimes f} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Esta sucesión no es exacta a izquierda, pues $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_Z f$ no es inyectiva.

En efecto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Z} \arrow[r, "Z/2Z \otimes f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Z} \arrow[d, "\beta"] & \\
(n+2\mathbb{Z}) \otimes_Z m \arrow[d, dashed] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[r, "0"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (n+2\mathbb{Z}) \otimes_Z f(m) = (n+2\mathbb{Z}) \otimes_Z 2m \arrow[d, dashed] \\
mn+2\mathbb{Z} \arrow[rrr, dashed] & & & 2mn+2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Donde α y β son los isomorfismos canónicos, luego se tiene que:

$$0 \circ \alpha = \beta \circ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_Z f)$$

$$0 = \beta \circ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_Z f)$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_Z f = 0$$

Finalmente, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \otimes_Z f$ no es inyectiva.

Ejemplo 2

Consideremos el anillo conmutativo $K[x]$ donde K es cualquier cuerpo y la sucesión exacta de R-módulos:

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{x} R \longrightarrow R/xR \longrightarrow 0$$

donde “x” es la multiplicación por x.

Tensorando con el R-módulo R/xR ,se tiene la sucesión:

$$0 \longrightarrow R/xR \otimes_R R \xrightarrow{R/xR \otimes_R x} R/xR \otimes_R R \longrightarrow R/xR \otimes_R R/xR \longrightarrow 0$$

Esta sucesión no es exacta a izquierda.
En efecto, consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R/xR \otimes_R R \arrow[r, "R/xR \otimes_R x"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R/xR \otimes_R R \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & R/xR \otimes_R R/xR \arrow[r] & 0 \\
& R/xR \arrow[r] & R/xR & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(p(x)+xR) \otimes q(x) \arrow[d, dashed] & (p(x)+xR) \otimes x\, q(x) \arrow[d, dashed] \\
q(x)p(x) + xR \arrow[r, dashed, "0"] & x\, q(x)p(x) + xR = xR
\end{tikzcd}$$

Donde α y β son los isomorfismos canónicos, luego se tiene que $R/xR \otimes_R R$ no es inyectiva.

2) Los R-módulos M para los cuales el funtor $M \otimes_R -$ es exacto a izquierda serán los denominados módulos planos, que serán estudiados en los siguientes capítulos.

1.4 Límites Inductivos en la categoría $\mathbf{Mod_R}$

Definición 1.4.1. *Sea* $(I, \leq)$ *un conjunto dirigido, es decir I es un conjunto preordenado por* $\leq$ *tal que dados* $\alpha, \beta \in I$ *existe* $\gamma \in I$ *con* $\alpha \leq \gamma$ *y* $\beta \leq \gamma$.

Un ***sistema inductivo de*** $\mathbf{Mod_R}$ ***indexado por I*** *consiste de :*

i) *Para todo* $\alpha \in I$*, se tiene un R-módulo* M_α.

ii) *Para todo par* $(\alpha, \beta) \in I^2$ *tal que* $\alpha \leq \beta$*, se tiene un* $R-$ *homomorfismo* $f_{\beta\alpha}$ *de* M_α *en* M_β *tal que* $f_{\alpha\alpha} = 1_{M_\alpha}$ *para todo* $\alpha \in I$ *y si* $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in I)$. $f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha}$ *osea el diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} M_\alpha \arrow[rr, "f_{\beta\alpha}"] \arrow[dr, "f_{\gamma\alpha}"'] & & M_\beta \arrow[dl, "f_{\gamma\beta}"] \\ & M_\gamma & \end{tikzcd} \qquad f_{\gamma\alpha} = f_{\gamma\beta} \circ f_{\beta\alpha}$$

Tal sistema es denotado por $(M_\alpha\ ,\ f_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta\in I}$.

Definición 1.4.2. *Sea* $(M_\alpha\ ,\ f_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta\in I}$ *un sistema inductivo de* Mod_R *indexado por I.*

Un ***límite inductivo*** *de* $(M_\alpha\ ,\ f_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta\in I}$ *consiste de un* $R-$ *módulo M y de una familia de* $R-$ *homomorfismos* f_α *de* M_α *en M tal que si* $\alpha \leq \beta$, $f_\alpha = f_\beta \circ f_{\beta\alpha}$ *y para todo R-módulo N y toda familia* $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ *de* $R-$ *homomorfismos* $g_\alpha : M_\alpha \longrightarrow N$ *tal que si* $\alpha \leq \beta$, $g_\alpha = g_\beta \circ f_{\beta\alpha}$ *, existe un único* $R-$ *homomorfismo g de M en N tal que para todo* $\alpha \in I$, $g_\alpha = g \circ f_\alpha$.

O sea el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
N & & M \arrow[ll, dashed, "\exists !\, g"'] \\
& M_{\alpha} \arrow[ul, "g_{\alpha}"] \arrow[ur, "f_{\alpha}"'] \arrow[d, "f_{\beta\alpha}"] & \\
& M_{\beta} \arrow[uul, "g_{\beta}"] \arrow[uur, "f_{\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

Proposición 1.4.3. *Dado* $(M_{\alpha}\ ,\ f_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta\in I}$ *un sistema inductivo de* Mod_R *indexado por I, existe un límite inductivo* $(M, f_{\alpha})_{\alpha\in I}$ *de* $(M_{\alpha}\ ,\ f_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta\in I}$ *. Más aún, si* $(M', f'_{\alpha})_{\alpha\in I}$ *es otro límite inductivo de* $(M_{\alpha}\ ,\ f_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta\in I}$ *, existe un único* R*– isomorfismo* $h : M \longrightarrow M'$ *tal que* $f'_{\alpha} = h \circ f_{\alpha}$.

Prueba.
(ver $[L]$, página 28)

Observaciones.

1. Dado $(M_{\alpha}\ ,\ f_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta\in I}$ un sistema inductivo de Mod_R. El límite inductivo de este sistema es denotado por $\varinjlim M_{\alpha}$.
2. Si I está dotado del orden trivial, el límite inductivo de un sistema inductivo $(M_{\alpha})_{\alpha\in I}$ es llamado **suma** de la familia $(M_{\alpha})_{\alpha\in I}$ y es denotada por $\bigoplus_{\alpha\in I} M_{\alpha}$.

Proposición 1.4.4. *Sea M un R- módulo . Entonces M es límite directo de una familia de módulos finitamente generados.*

Prueba.

(ver $[L]$, página 124)

Capítulo 2

Módulos planos y fielmente planos.

2.1 Definiciones

Definición 2.1.1. *Sea M un R-módulo. Diremos que* ***M es plano*** *si el funtor* $M\otimes_R -$ *de la categoría Mod(R) en la categoría Mod(R) es exacto, es decir, si la condición*

(i) La sucesión $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$

de Mod(R) es exacta implica la condición.

(ii) La sucesión $0 \longrightarrow M\otimes_R N \xrightarrow{M\otimes f} M\otimes_R P \xrightarrow{M\otimes g} M\otimes_R Q \longrightarrow 0$

es exacta.

El R-módulo M es **fielmente plano** si la condición (i) es equivalente a la condición (ii). En virtud a la exactitud a derecha del producto tensorial, M será plano si para todo R-homomorfismo inyectivo $f\colon N\to P$, la aplicación $M\otimes_R f : M\otimes_R N \to M\otimes_R P$ es inyectiva.

Proposición 2.1.2. *Todo R-módulo libre es plano.*

Prueba.

Sea F un R-módulo libre. Entonces F es isomorfo a un R-módulo $R^{(I)} = \sum_{i \in I} R$

Consideremos un R-homomorfismo inyectivo $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P$

El diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & R^{(I)} \otimes_R N & \xrightarrow{R^{(I)} \otimes f} & R^{(I)} \otimes_R P \\ & & \downarrow \varphi_N & & \downarrow \varphi_P \\ 0 & \longrightarrow & N^{(I)} & \xrightarrow{f^{(I)}} & P^{(I)} \end{array}$$

donde $\varphi_N : (r_i)_{i \in I} \otimes n \mapsto (r_i n)_{i \in I}$ y

$\varphi_P : (s_i)_{i \in I} \otimes p \mapsto (s_i p)_{i \in I}$ son los isomorfismos canónicos y

$f^{(I)} : (n_i)_{i \in I} \mapsto (f(n_i))_{i \in I}$

Como f es inyectivo se sigue que $f^{(I)}$ es inyectivo y de la conmutatividad del diagrama concluimos que $R^{(I)} \otimes_R f$ es inyectiva. ■

Corolario 2.1.3. *Todo R-módulo proyectivo es plano.*

Prueba.

Sea M un R-módulo proyectivo, entonces por la proposición 1.2.1.7 existe un R-módulo libre F y un R-módulo M_1 tal que

$F = M \oplus M_1$

Consideremos ahora un R-homomorfismo inyectivo $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P$

Por la planitud de F tenemos que la sucesión $0 \longrightarrow F \otimes_R N \xrightarrow{F \otimes f} F \otimes_R P$

es exacta.

Pero $F \otimes_R f = M \otimes_R f \oplus M_1 \otimes_R f$, luego $M \otimes_R f$ es inyectiva. ■

Proposición 2.1.4. *Sea **S** un subconjunto multiplicativo del anillo R. El anillo de fracciones de R con respecto a **S**, R_S es un R-módulo plano.*

Prueba.

Sea $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P$ una sucesión exacta

El diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R_S\otimes_R N \arrow[r, "R_S\otimes_R f"] \arrow[d, "\varphi_N"] & R_S\otimes_R P \arrow[d, "\varphi_P"] \\ 0 \arrow[r] & N_S \arrow[r, "f_S"] & P_S \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_N : \frac{r}{s} \otimes n \in R_s \otimes N \mapsto \frac{rn}{s} \in N_S$ y

$\varphi_P : \frac{r}{s} \otimes p \in R_s \otimes P \mapsto \frac{rp}{s} \in P_S$ son los isomorfismos canónicos y

$f_S : \frac{n}{s} \in N_s \mapsto \frac{f(n)}{s} \in P_S$

Como f es inyectivo entonces f_S es inyectivo, luego de la conmutatividad del diagrama concluimos que $R_S \otimes_R f$ es inyectivo. ■

Ejemplos:

1) Sea P un ideal primo de R. El conjunto S=R\P es multiplicativo.

Escribiremos R_P para R_S en este caso. R_P es por tanto un R-módulo plano llamado localización de R en P.

En el caso especial de R = ℤ y P = (p) (p: número primo), la localización de ℤ en (p) es

$\mathbb{Z}_{(p)} = \{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} / (n, p) = 1\}$

2) Si R es un dominio de integridad, entonces P = (0) es un ideal primo. En este caso la localización $R_{(0)}$ es un cuerpo llamado cuerpo de fracciones de R

En el caso de R = ℤ tenemos que $R_{(0)} = \mathbb{Q}$

Observaciones.

1) Del ejemplo 2, $\mathbb{Q}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo plano; sin embargo, $\mathbb{Q}$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo.

2) Sea G un grupo abeliano de torsión **no** trivial, es decir, para cada $g \in$ G existe n $\in \mathbb{Z}^+$ tal que ng = 0.

Por ejemplo, todo grupo abeliano no finito. También, el grupo multiplicativo de las raíces de la unidad, etc.

Entonces G es un $\mathbb{Z}$-módulo que no es plano, pues $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong G$, pero $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ pues si $g \in$ G, existe n $\in \mathbb{Z}^+$ tal que ng = 0, luego si q $\in \mathbb{Q}$ Tenemos:

$$g \otimes_{\mathbb{Z}} q = g \otimes_{\mathbb{Z}} n\left(\frac{q}{n}\right) = (ng) \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\frac{q}{n}\right) = 0 \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\frac{q}{n}\right) = 0$$

Consecuentemente $\qquad \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \qquad$ es inyectiva

pero $\qquad G \cong G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{G \otimes i} G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$ no es inyectiva.

2.2 Propiedades básicas

Proposición 2.2.1. Sea *M un R-módulo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) M es fielmente plano.

(ii) Si M es plano y $M \otimes_R N = 0$, entonces $N = 0$

(iii) M es plano y si g es un R-homomorfismo $g: N \to P$, tal que $M \otimes_R g = 0$, entonces $g = 0$

(iv) M es plano y para todo ideal máximal $\mathfrak{m}$ de R, $\mathfrak{m}M \neq M$

Prueba.

(i) $\rightarrow$(ii)

Sea N un R-módulo tal que $M \otimes_R N = 0$.

Entonces la sucesión $0 \longrightarrow M \otimes_R N$ es exacta

Como M es fielmente plano, la sucesión $0 \longrightarrow N$ es inyectiva, por tanto N = 0

(ii)$\rightarrow$(iii)

La tensorización por el módulo plano M de las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(g) \longrightarrow N \longrightarrow N/\mathrm{Im}(g) \longrightarrow 0 \qquad \text{y}$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \longrightarrow P \longrightarrow \mathrm{Im}(g) \longrightarrow 0$$

donde $g = v \circ \mu$ muestra que $M \otimes_R \mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(M \otimes_R g)$ y

$M \otimes_R \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(M \otimes_R g)$

Como $M \otimes_R g = 0$ entonces $M \otimes_R \mathrm{Im}(g)$, por tanto, $\mathrm{Im}(g) = 0$ luego g = 0

(iii)$\rightarrow$(i)

Sea $N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q$ una sucesión de Mod(R) tal que la sucesión

$$M \otimes_R N \xrightarrow{M \otimes_R f} M \otimes_R P \xrightarrow{M \otimes_R g} M \otimes_R Q \longrightarrow 0 \quad \text{sea exacta}$$

Como $M \otimes_R (g \circ f) = (M \otimes_R g) \circ (M \otimes_R f) = 0$ entonces $g \circ f = 0$

Luego $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}g$. La sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{h} Ker(g)/\mathrm{Im}(f) \longrightarrow 0$$

induce la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \otimes_R \mathrm{Im}(f) \longrightarrow M \otimes_R \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{M \otimes_R h} M \otimes_R \left(Ker(g)/\mathrm{Im}(f) \right) \longrightarrow 0$$

pues M es plano.

Ahora $M \otimes_R \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(M \otimes_R f)$ y $M \otimes_R \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(M \otimes_R g)$

Por tanto $M \otimes_R h = 0$, luego h = 0, consecuentemente $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$

(ii)$\rightarrow$(iv) Es suficiente observar que $M/\mathfrak{m}M \cong M \otimes_R R/\mathfrak{m}$ y que $R/\mathfrak{m} \neq 0$

(iv)→(ii)

La condición (iv) implica la condición $M\otimes_R R/I \neq 0$ para todo ideal I distinto de A.

En efecto, sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal que contienen a I.

De la sucesión exacta

$$R/I \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

tenemos la sucesión exacta

$$M\otimes_R R/I \longrightarrow M\otimes_R R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

de donde, $M\otimes_R A/I$ es no nulo como en el caso $M\otimes_R R/\mathfrak{m}$

Ahora sea N un R-módulo no nulo. Entonces existe una sucesión exacta $0\longrightarrow R/I \longrightarrow N$ donde I es un ideal propio de R.

Luego la sucesión $0 \longrightarrow M\otimes_R R/I \longrightarrow M\otimes_R N$ es exacto.

Lo que prueba que $M\otimes_R N$ es no nulo como $M\otimes_R R/I$ ■

Proposición 2.2.2. *Sea M un R-módulo plano, N un R-módulo, N_1 y N_2 dos submódulos de N.*

Identificando $M\otimes_R N_i$ (i=1,2) como submódulos de $M\otimes_R N$ usando las inyecciones canónicas, tenemos la igualdad

$$M\otimes_R (N_1 \cap N_2) = (M\otimes_R N_1) \cap (M\otimes_R N_2)$$

Prueba.

Es suficiente tensorar por M la sucesión exacta

$$0\longrightarrow (N_1 \cap N_2) \longrightarrow N \longrightarrow (N/N_1)\times(N/N_2)$$

■

Proposición 2.2.3. *Siendo M_1 y M_2 dos R-módulos. Si M_1 y M_2 son planos (respectivamente fielmente planos) entonces ocurre lo mismo con $M_1 \otimes_R M_2$.*

Prueba.

Utilicemos el isomorfismo funtorial de $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R N$ sobre $M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R N)$.

Sea $N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q$ una sucesión exacta. Si M_1 y M_2 son planos, obtenemos un diagrama conmutativo donde la primera línea es exacta.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R N) \arrow[r, "M_1 \otimes (M_2 \otimes f)"] & M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R P) \arrow[r, "M_1 \otimes (M_2 \otimes g)"] & M_1 \otimes_R (M_2 \otimes_R Q) \arrow[d, "\approx"] \\
(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R N \arrow[u, "\approx"] \arrow[r, "(M_1 \otimes M_2) \otimes f"] & (M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R P \arrow[u, "\approx"] \arrow[r, "(M_1 \otimes M_2) \otimes g"] & (M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R Q
\end{tikzcd}$$

Donde las flechas verticales son los isomorfismos canónicos

De donde la segunda línea es exacta.

Luego $M_1 \otimes_R M_2$ es plano.

Si además M_1 y M_2 son fielmente planos, $(M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R N = 0$ implica que $M_2 \otimes_R N = 0$ (Pues M_1 es fielmente plano) y $N = 0$ (pues M_2 es fielmente plano) ■

Proposición 2.2.4. *Sea $(M_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta \in I}$ un sistema inductivo indexado por un conjunto dirigido I. Supongamos que para todo $\alpha \in I$, M_α es un R- módulo plano, entonces el límite inductivo $\varinjlim M_\alpha$ es plano.*

Prueba.

(ver $[L]$, página 206)

Observación.

Si R es un dominio, entonces su cuerpo de fracciones $\mathbb{Q}$ es límite inductivo de módulos cíclicos, cada uno isomorfo a **R** . Como **R** es plano (por ser **R** libre) tenemos como consecuencia de la proposición anterior que $\mathbb{Q}$ es plano.

Capítulo 3

El funtor Tor

3.1 Resoluciones Proyectivas

Sea N un R-módulo. Una **resolución proyectiva** de N es una sucesión exacta descendente.

$$P: \qquad \ldots\ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_{n-1}} P_{n-1} \longrightarrow \ldots\ldots$$

de R-módulos tal que

i) $P_{-1} = N$

ii) $P_n = 0$ para todo $n < -1$

ii) P_n es un R-módulo proyectivo para todo $n \geq 0$

En particular, si P_n es un R-módulo libre para todo $n \geq 0$, entonces la sucesión descendente **P** se llama **resolución libre** del módulo N.

Es claro que toda resolución libre es proyectiva.

Proposición 3.1.1. *Todo R-módulo N posee una resolución libre.*

Prueba.

N es isomorfo a un cociente F_0/N_0, donde F_0 es un R-módulo libre

Por tanto existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N_0 \xrightarrow{\alpha_0} F_0 \xrightarrow{\beta_0} N \longrightarrow 0$$

N_0 es isomorfo a un cociente F_1/N_1, donde F_1 es un R-módulo libre.

Luego, existe una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_1 \xrightarrow{\beta_1} N_0 \longrightarrow 0$$

Por inducción, obtenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N_n \xrightarrow{\alpha_n} F_n \xrightarrow{\beta_n} N_{n-1} \longrightarrow 0$$

para todo n > 0, donde F_n es un R-módulo libre.

Definimos una sucesión

$$\mathbf{P}: \quad \ldots\ldots\ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \ldots\ldots\ldots$$

tomando

$$P_n = \begin{cases} N & \text{Si } n = -1 \\ F_n & \text{Si } n \geq 0 \\ 0 & \text{Si } n < -1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \partial_n = \begin{cases} \beta_0 & \text{Si } n = 0 \\ \alpha_{n-1} \circ \beta_n & \text{Si } n > 0 \\ 0 & \text{Si } n < 0 \end{cases}$$

Afirmamos que **P** es una resolución libre de N.

En efecto: basta mostrar que $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) = \mathrm{Ker}(\partial_n) \quad \forall\, n \geq 0$

Como α_n es monomorfismo y β_n es epimorfismo; para todo $n \geq 0$, tenemos $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) = \mathrm{Im}(\alpha_n) = \mathrm{Ker}(\beta_n) = \mathrm{Ker}(\partial_n) \quad \forall\, n \geq 0$ ∎

3.2 Funtor Tor_n

Sean M y N dos R-módulos y sea **P** resolución proyectiva de N

$$\mathbf{P}:\quad \ldots\ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots\ldots\ldots$$

Consideremos su "producto tensorial" $M\otimes_R P$, que es la sucesión

$$M\otimes_R P:\quad \ldots. \longrightarrow M\otimes_R P_{n+1} \xrightarrow{M\otimes_R \partial_{n+1}} M\otimes_R P_n \xrightarrow{M\otimes_R \partial_n} M\otimes_R P_{n-1} \xrightarrow{M\otimes_R \partial_{n-1}} \ldots..$$

Como $(M\otimes_R \partial_n)\circ(M\otimes_R \partial_{n+1}) = M\otimes_R (\partial_n \circ \partial_{n+1}) = M\otimes_R 0 = 0$

Por tanto $M\otimes_R P$ es una sucesión descendente semiexacta.

Para todo entero n, consideremos el módulo de homología n-dimensional

$$H_n(M\otimes_R P) = \mathrm{Ker}(M\otimes_R \partial_n) \big/ \mathrm{Im}(M\otimes_R \partial_{n+1})$$

Proposición 3.2.1. *Para cualquier otra resolución proyectiva.*

$$Q:\quad \ldots \longrightarrow Q_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} Q_n \xrightarrow{\partial'_n} Q_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \ldots$$

del módulo N, se cumple

$$H_n(M\otimes_R P) \approx H_n(M\otimes_R Q) \text{ para todo entero } n.$$

Además:

$$H_n(M\otimes_R P) = 0 \text{ para todo } n \le 0$$

Prueba.

(ver $[H]$, página 144)

Definición 3.2.2. *Sean M y N dos R-módulos y sea*

$$\boldsymbol{P}:\quad \ldots\ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots\ldots$$

una resolución proyectiva de N.

Para todo entero positivo n, el R-módulo $H_n(M\otimes_R P)$ recibe el nombre de ***producto torsión n-dimensional*** *sobre R de M y N y será denotado por* $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$

Observación.

La definición anterior se justifica gracias a la proposición antecedente.

Proposición 3.2.3. *Sea M un R-módulo y*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de R-módulos.

Entonces existe una sucesión exacta larga.

$$\ldots \longrightarrow Tor_n^R(M,N) \longrightarrow Tor_n^R(M,P) \longrightarrow Tor_n^R(M,Q) \longrightarrow Tor_{n-1}^R(M,N) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow Tor_1^R(M, Q) \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R P \longrightarrow M \otimes_R Q \longrightarrow 0$$

Prueba.

(ver $[H]$, página 152)

Proposición 3.2.4. *Si el R-módulo P es proyectivo, entonces:*

$$Tor_1^R(M,P) = 0$$

para todo R-módulo M.

Prueba.

(ver $[H - S]$, página 113)

Proposición 3.2.5. *Sea $(M_\alpha, f_{\beta\alpha})_{\alpha,\beta \in I}$ un sistema inductivo de R –módulos y M un R-módulo, entonces:*

$$\varinjlim Tor_1^R(M, M_\alpha) = Tor_1^R(M, \varinjlim M_\alpha)$$

Prueba.

(ver $[L]$, página 239)

Capítulo 4

Aplicaciones de los funtores Tor a los módulos planos

4.1 Caracterización de los módulos planos por los ideales finitamente generados.-

Teorema 4.1.1. *Sea M un R-módulo.Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) M es plano.

(ii) $Tor_1^R(M, N) = 0$ *para todo R-módulo N.*

(iii) $Tor_1^R(M, N) = 0$ *para todo R-módulo N finitamente generado.*

(iv) $Tor_1^R(M, R/I) = 0$ *para todo ideal I de R.*

(v) $Tor_1^R(M, R/I) = 0$ *para todo ideal I de R finitamente generado.*

(vi) La aplicación canónica $M \otimes_R I \longrightarrow M$ $\left(\sum x_i \otimes r_i \mapsto \sum r_i x_i\right)$ *es inyectiva para todo ideal (respectivamente todo ideal finitamente generado) I de R.*

Prueba.

(i)$\Rightarrow$(ii) Sea

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de R-módulos donde P es proyectivo.

Entonces existe una sucesión exacta larga

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, P) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, N) \longrightarrow M \otimes_R Q \xrightarrow{\mu} M \otimes_R P \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

Como P es proyectivo, $\mathrm{Tor}_1^R(M, P) = 0$, entonces $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = \mathrm{Ker}(\mu)$.

Pero μ es inyectivo, pues, M es plano, luego $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = 0$

(ii)$\Rightarrow$(i) Sea

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta.

Entonces existe una sucesión exacta larga.

$$\ldots \longrightarrow Tor_1^R(M, L) \longrightarrow M \otimes_R P \xrightarrow{\mu} M \otimes_R Q \longrightarrow M \otimes_R L \longrightarrow 0$$

Como $Tor_1^R(M, L) = 0$, entonces μ es inyectiva.

Pero $\mu = M \otimes_R f$, luego $M \otimes_R f$ es inyectiva ; por tanto, M es plano.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Es claro.

(iii)$\Rightarrow$(ii) Consideremos el R-módulo N como **límite inductivo** de sus submódulos finitamente generados, $N = \varinjlim N_\alpha$ (ver proposición 1.4.3)

Luego

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^R(M, N) &= \mathrm{Tor}_1^R(M, \varinjlim N_\alpha) \\ &= \varinjlim \mathrm{Tor}_1^R(M, N_\alpha) \\ &= 0,\end{aligned}$$

pues $\mathrm{Tor}_1^R(M, N_\alpha) = 0$.

(ii)$\Rightarrow$(iv) Es claro.

(iv)$\Rightarrow$(iii) Haremos la prueba por inducción sobre el cardinal n de un sistema finito de generadores del R-módulo N.

Si n = 1, entonces N = $\langle x \rangle$, luego considerando el epimorfismo:

$$\begin{aligned} f:\quad R &\longrightarrow N \\ r &\longrightarrow rx \end{aligned}$$

Se tiene por el teorema fundamental del isomorfismo que $R/Kerf \cong N$.

Por hipótesis $Tor_1^R(M, R/Kerf) = 0$, entonces $Tor_1^R(M,N) = 0$.

Supongamos que la afirmación vale para n-1(n$\geq$2), sea N = $Re_1+...+Re_n$.

Consideremos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow P = Re_1 \longrightarrow N \longrightarrow Q = R\overline{e_2} + \ldots + R\overline{e_n} \longrightarrow 0$$

Donde $\overline{e_i}$ es la clase de e_i módulo P (i = 2,..., n).

Luego existe una sucesión exacta larga:

$$\ldots\ldots \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, P) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, Q) \longrightarrow \ldots\ldots$$

donde los extremos son nulos (casos n = 1 y hipótesis de inducción),

luego $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) = 0$

(iv)$\Rightarrow$(v) Es claro.

(v)$\Rightarrow$(iv) Notemos que el R-módulo R/I es **límite inductivo** del sistema inductivo $\left(R/I_i, f_{ji}\right)$ donde I_i recorre el conjunto de los ideales finitamente generados contenidos en I e si $I_i \subset I_j$, f_{ji} es la suryección canónica de R/I_i sobre R/I_j. Es suficiente razonar como en la prueba de (iii)$\Rightarrow$(ii).

(iv)$\Leftrightarrow$(vi)

A partir de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\pi} R/I \longrightarrow 0$$

se tiene la sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Tor}_1^R(M, R) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(M, R/I) \longrightarrow M\otimes_R I \longrightarrow M\otimes_R R \cong M$$

la cual demuestra la equivalencia.

■

Corolario 4.1.2. *Sea R un dominio de ideales principales, M un R-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) M es plano.

(ii) Sea $r\in R$, $x\in M$. La igualdad $rx = 0$ implica $r = 0$ o $x = 0$

(Osea el R-módulo M es sin torsión).

Prueba.

La implicación (i)$\Rightarrow$(ii) es válida con solamente la hipótesis que R es un dominio de integridad. En efecto, sea r un elemento no nulo de R.

Designemos por δ_r la aplicación s $\mapsto$ sr de R en R.

A partir de la sucesión exacta $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\delta_r} R$, (Pues, δ_r es inyectiva)

y por la planitud de M, obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M\otimes_R R \xrightarrow{M\otimes_R \delta_r} M\otimes_R R$$

y gracias al isomorfismo canónico $M\otimes_R R \longrightarrow M$ una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\delta_r^M} M,$$

donde δ_r^M es la aplicación x $\mapsto$ rx de M en M.

Luego, si $rx = 0$

$\delta_r^M(x) = 0$

$x = 0$ (Pues, δ_r^M es inyectiva)

De donde, M es sin torsión.

(ii)$\Rightarrow$(i) Sea I un ideal de R, entonces I = $\langle a \rangle$ para algún a. Por probar, que la aplicación γ : $M\otimes_R I \mapsto M$ es inyectiva y por la parte (vi) del teorema 4.1.1. M será plano.

Del diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M\otimes_R I \arrow[rr, "M\otimes_R \delta_a"] \arrow[d, "\gamma"'] & & M\otimes_R R \arrow[dll, "\varphi"] \\ M & & \end{tikzcd}$$

$\gamma = \varphi \circ (M\otimes_R \delta a)$ donde φ es el isomorfismo canónico $M\otimes_R R \to M$.

Luego, si

$$\gamma_{(m\otimes r)} = 0 \qquad , m \neq 0 \in M, \quad r \in I.$$

$$(\varphi \circ (M\otimes_R \delta a))_{(m\otimes r)} = 0$$

$$\varphi_{(m\otimes ra)} = 0$$

$$(ra)\, m = 0$$

$$r\,(am) = 0$$

$$r = 0 \qquad \text{(M es sin torsión)}$$

entonces : $\quad m\otimes r = 0$

De donde, γ es inyectiva. ■

Observación.

En caso particular R = ℤ, entonces los ℤ-módulos son los grupos abelianos consecuentemente los grupos abelianos finitos con por lo menos 2 elementos no son ℤ-módulos planos .

4.2 Caracterización de los módulos planos por ecuaciones lineales.-

Teorema 4.2.1. *Sea M un R-módulo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) M es plano.

(ii) Sea: a_{ij} elementos de R ,x_i elementos de M (i = 1, ..., r; j = 1...n) tales que

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij} x_i = 0 \;\; (j = 1, \ldots, n)$$

Entonces existe un entero natural s, de elementos b_{ik} de R, de elementos y_k de M (k=1,...s) tales que

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij} b_{ik} = 0 \;\; (j = 1,\ldots, n) \quad y \qquad x_i = \sum_{k=1}^{s} b_{ik} y_k$$

(iii) La afirmación (ii) sigue para j = 1.

Prueba.

(i)$\Rightarrow$(ii) Sea g la aplicación lineal natural de R^r en R^n que asocia al elemento (b_1,...,b_r) de R^r el elemento de R^n donde la j-ésima componente es $\sum_{i=1}^{r} a_{ij} b_j$.

Sea N = Ker (g), f la inyección canónica de N en R^r.

A partir de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} R^r \xrightarrow{g} R^n$$

y por la planitud de M, se deduce la exactitud de la sucesión:

$$0 \longrightarrow M \otimes_R N \xrightarrow{M\otimes f} M \otimes_R R^r \xrightarrow{M\otimes g} M \otimes_R R^n$$

vía los isomorfismos canónicos, la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow M \otimes_R N \xrightarrow{\mu} M^r \xrightarrow{v} M^n \text{ donde:}$$

v(z_1,...,z_r) es un elemento de M^n donde la j-ésima componente es $\sum_{i=1}^{r} a_{ij} z_i$ y μ es la compuesta de $M \otimes f$ y el isomorfismo canónico de $M \otimes_R R^r$ sobre M^r.

Las condiciones $\sum_{i=1}^{r} a_{ij} x_i = 0$ traducen el hecho de que el elemento (x_1,...,x_r) de M^r pertenece al núcleo de v y por lo tanto a la imagen de μ.

Entonces existen elementos t_k de N e y_k de M (k=1,..., s) tal que:

$$(x_1,...,x_r) = \mu\left(\sum_{k=1}^{s} y_k \otimes t_k\right) \quad \text{, algún } s \in N$$

Si $t_k = (b_{1k},...,b_{rk})$; se tiene que:

$$x_i = \mu\left(\sum_{k=1}^{s} y_k \otimes_R b_{ik}\right)$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{s} b_{ik} y_k$$

Como $t_k \in N = Ker(g) \subset Ker(v)$

$$v\,(\,t_k) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij} b_{ik} = 0$$

(iii)$\Rightarrow$(i) Demostraremos que, para todo ideal finitamente generado I de R, la aplicación canónica

$M \otimes_R I \xrightarrow{\lambda} M$ es inyectiva.

Sean $a_1,...,a_r$ un sistema finito de generadores del ideal I.

Un elemento de $M \otimes_R I$ es de la forma $\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes a_i$. El pertenece al núcleo de λ si

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x_i = 0$$

Siguiendo las notaciones de (ii), tenemos

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \otimes a_i = \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{s} b_{ij} y_j\right) \otimes a_i = \sum_{j=1}^{s} y_j \otimes \left(\sum_{i=1}^{r} a_i b_{ij}\right) = 0$$

■

Observación 4.2.1.1. Sea M un R-módulo y (R , $\mathfrak{m}$) un anillo local.

Entonces $\mathfrak{m}M = \left\{ \sum_{i=1}^{l} r_i x_i \,/\, r_i \in \mathfrak{m}, x_i \in M \right\}$ es un submódulo de M.

Luego $M/\mathfrak{m}M$ tiene una estructura de $R/\mathfrak{m}$ - espacio vectorial dada por la aplicación

$$R/\mathfrak{m} \times M/\mathfrak{m}M \longrightarrow M/\mathfrak{m}M$$

$$(r + \mathfrak{m}, x + \mathfrak{m}M) \dashrightarrow rx + \mathfrak{m}M$$

Sea M finitamente generado y $\{x_1,..., x_n\}$ un sistema minimal de generadores de M.

<u>*Afirmación:*</u> $\{x_1 + \mathfrak{m}M, x_2 + \mathfrak{m}M, ..., x_n + \mathfrak{m}M\}$ es una base de $M/\mathfrak{m}M$.

En efecto:

(i) Sea $\bar{x} \in M/\mathfrak{m}M$; donde $\bar{x} = x + \mathfrak{m}M$ con $x \in M$

Como $x \in M$, $\exists r_1,............, r_n \in R$, tal que

$$x = r_1 x_1 + ... + r_n x_n$$

$$\bar{x} = \overline{r_1 x_1 + ... + r_n x_n}$$

$$\bar{x} = \overline{r_1 x_1} + ... + \overline{r_n x_n}$$

$$\bar{x} = (r_1 x_1 + \mathfrak{m}M) + ... + (r_n x_n + \mathfrak{m}M)$$

$$\bar{x} = (r_1 + \mathfrak{m})(x_1 + \mathfrak{m}M) + ... + (r_n + \mathfrak{m})(x_n + \mathfrak{m}M)$$

Entonces $\{\bar{x}_1,..., \bar{x}_n\}$ generan $M/\mathfrak{m}M$.

(ii) $\{\bar{x}_1,..., \bar{x}_n\}$ es linealmente independiente.

En efecto; sea:

$(r_1 + \mathfrak{m})(x_1 + \mathfrak{m}M) + ... + (r_n + \mathfrak{m})(x_n + \mathfrak{m}M) = 0$

$r_1 x_1 + ... + r_n x_n + \mathfrak{m}M = 0$

$r_1 x_1 + ... + r_n x_n \in \mathfrak{m}M$

Luego

$$r_1x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + r_nx_n = \sum_{i=1}^{l} s_iu_i \qquad \text{con } s_i \in \mathfrak{m}\ ,\ u_i \in \mathrm{M}.$$

Supongamos $l = 1$:

$r_1x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + r_nx_n = su$.

Como $u \in \mathrm{M}$, se tiene

$r_1x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + r_nx_n = ss_1x_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + ss_nx_n$

$(r_1 - ss_1)x_1 = (ss_2 - r_2)x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (ss_n - r_n)x_n$

Si $(r_1 - ss_1) \notin \mathfrak{m}$, entonces $\exists (r_1 - ss_1)^{-1}$ que cumple:

$x_1 = \gamma_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \gamma_n x_n$ donde $\gamma_j = (r_1 - ss_1)^{-1}(ss_j - r_j)$ para 1<j <n+1

Luego, $\{x_1,..., x_n\}$ no es minimal $(\rightarrow\leftarrow)$

Finalmente, $r_1 - ss_1 \in \mathfrak{m}$ y como $ss_1 \in \mathfrak{m}$, entonces $r_1 \in \mathfrak{m}$.

Es así, que los $r_i \in \mathfrak{m}$, luego $\{\overline{\mathrm{x}_1},..., \overline{\mathrm{x}_\mathrm{n}}\}$ es linealmente independiente.

Proposición 4.2.2. *Sea R un anillo local, M un R-módulo finitamente generado. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(i) M es plano.

(ii) M es proyectivo.

(iii) M es libre.

Prueba.

Como un módulo libre es proyectivo y un módulo proyectivo es plano, bastará probar que (i)$\Rightarrow$(iii).

En efecto, probaremos por inducción sobre n, que un sistema minimal $\{x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n\}$ de generadores de M es una base.

Por la observación 4.2.1.1, sus clases módulo $\mathfrak{m}$M son linealmente independiente sobre el cuerpo residual k $= R/\mathfrak{m}$ de R formando un sistema libre de M.

Caso n = 1

Sea $a \in \mathrm{Ann}(x_1)$.

Existen $y_1,..., y_r$ elementos de M y $b_1,..., b_r$ de R tales que $ab_i = 0$ (i = 1,..., r) y

$$x_1 = \sum_{i=1}^{r} b_i y_i$$

Como x_1 no pertenece a mM entonces existe b_i que no pertenece a m y por tanto es inversible, luego $a = 0$.

Para n >1, supongamos que la afirmación vale para n-1.

Sea $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ donde $a_i \in$ A. Entonces existen $y_1,..., y_r \in$ M y $b_{ij} \in$ R

(i=1,...,n; j=1,....r) tales que:

$$x_i = \sum_{j=1}^{r} b_{ij} y_j \text{ y}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{ij} = 0$$

Uno de los elementos b_{ij} no pertenece a m y es por tanto inversible.

Entonces, a_n puede ser escrito como:

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i a_i$$

Así:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i (x_i + c_i x_n)$$

Las clases módulo mM de los elementos $x_i + c_i x_n$ (i = 1,..., n-1) son linealmente independientes sobre k.

Por hipótesis de inducción, $a_i = 0$ (i=1,..., n-1). Luego por el caso n = 1, resulta que $a_n = 0$. ■

Bibliografía

$[H-S]$ **P. J. HILTON – U. STAMMBACH ,** *A course in homological Algebra*. Second Edition- Springer- Verlag. New York, 1997.

$[H]$ **S.T. HU,** *Introduction to Homological Algebra*. Holden-day, 1968.

$[J]$ **N. JACOBSON,** *Basic. Algebra II*. Freeman and Company, 1980.

$[L]$ **J.P. LAFON,** *Les formalismes fondamentaux de l´algébre conmutative*. Collection´ enseignement des sciences. Hermann. Paris, 1974.

$[M]$ **H. MATSUMURA,** *Conmutative ring theory*. Cambridge University Press. Cambridge, 1986.

$[N]$ **NORTHCOTT D.G.** *An introduction to homological Algebra. Cambridge University press, 1960*

$[R]$ **J.J. ROTMAN,** *Notes on Homological Algebras*. Van Nostrand Reinhold *Company. New York, 1970.*