Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Educación

Unidad de Posgrado

La enseñanza del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable, utilizando la estrategia analítica; a los estudiantes de Educación, especialidad de Matemática e Informática; de la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Educación con mención en Docencia en el Nivel Superior

AUTOR

Modesto Isidoro GILES NONALAYA

ASESOR

Fidel Antonio CHAUCA VIDAL

Lima, Perú

2019

Referencia bibliográfica

Giles, M. (2019). *La enseñanza del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable, utilizando la estrategia analítica; a los estudiantes de Educación, especialidad de Matemática e Informática; de la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle*. Tesis para optar el grado de Magíster en Educación con mención en Docencia en el Nivel Superior. Unidad de Posgrado, Facultad de Educación, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Hoja de metadatos complementarios

- **Código ORCID del autor:** --
- **Código ORCID del asesor:** 0000000.262358097
- **DNI del autor: 07672577**
- **Grupo de investigación:** --
- **Institución que financia la investigación:** --
- **Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación:**

  Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle, distrito Lurigancho, Chosica.

  Coordenadas geográficas:

  Altitud 850 m.s.n.m.

  Latidud 11.94.

  Longitud: 76.7.
- **Año o rango de años que la investigación abarcó:** 2017 - 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIDAD DE POSGRADO

ACTA DE SUSTENTACIÓN N° 49-UPG-FE-2019

En la ciudad de Lima, a los 19 días del mes de diciembre de 2019, siendo la 10:00 am. en acto público se instaló el Jurado Examinador para la Sustentación de la Tesis titulado: **LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES BÁSICAS DE UNA VARIABLE, UTILIZANDO LA ESTRATEGIA ANALÍTICA; A LOS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA; DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN ENRIQUE GÚZMAN Y VALLE**, para optar el Grado Académico de Magíster en Educación con mención en Docencia en el Nivel Superior.

Luego de la exposición y absueltas las preguntas del Jurado Examinador se procedió a la calificación individual y secreta, habiendo sido Muy Bueno, con la calificación de Dieciocho

El Jurado recomienda que la Facultad acuerde el otorgamiento del Grado de Magíster en Educación con mención en Docencia en el Nivel Superior, a don **MODESTO ISIDORO GILES NONALAYA.**

En señal de conformidad, siendo las 11:00 horas se suscribe la presente acta en cuatro ejemplares, dándose por concluido el acto.

Dr. MIGUEL INGA ARIAS
Presidente

Mg. FIDEL CHAUCA VIDAL
Asesor

Dr. DANTE MACAZANA FERNÁNDEZ
Jurado Informante

Dra. OFELIA SANTOS JIMÉNEZ
Jurado Informante

Dr. YOLVI OCAÑA FERNÁNDEZ
Miembro del Jurado

DEDICATORIA

A mis doce hermanos,
A Modesto y Alejandrina;
por su heroísmo de criarnos.

AGRADECIMIENTOS

A MIS MAESTROS:

- EDUCACIÓN INICIAL

  Teodosio Salazar Reynoso,

  por enseñarme las primeras letras y a tajar el lápiz.
- EDUCACIÓN PRIMARIA

  Javier Salazar Sandoval,

  por enseñarme a bailar y cantar músina nuestra.
- EDUCACIÓN SECUNDARIA

  Walker Rabanal Meza,

  por hacer fácil el aprendizaje de la matemática.
- EDUCACIÓN SUPERIOR

  Carlos Cabrera Gen,

  por hacer fácil la enseñanza de la matemática.

  Michel Helfgott Lerner,

  por sus clases de Cálculo Diferencial.

ÍNDICE

Lista de Tablas

Página

Lista de figuras

Página

RESUMEN

Los estudiantes de la asignatura de Análisis Matemático I (UNE) o Cálculo Diferencial tienen dificultades en asimilar los conceptos básicos de las unidades como: números reales, funciones reales, límite y derivada. La dificultad está en justificar, utilizando las definiciones, axiomas y teoremas de la teoría; cada paso del proceso de razonamiento, cuando resuelven ejercicios, problemas y demuestran teoremas. En los textos utilizados en la asignatura, su contenido está agrupado en definiciones, axiomas y teoremas (lemas, corolarios); y por otro lado, cuando presentan sus ejemplos de resolución de ejercicios, problemas y, demostración de teoremas; la justificación de los pasos del proceso es incompleto, lo que dificulta el aprendizaje de los estudiantes. La matemática organiza sus conocimientos mediante el método axiomático, y este tiene como elementos a: los conceptos no definidos (primitivos), conceptos definidos (definiciones), axiomas (postulados) y teoremas (lema, corolario). Cuando un estudiante resuelve ejercicios, problemas y demuestra teoremas, debe justificar cada paso del proceso de razonamiento utilizando las definiciones, axiomas o teoremas de la teoría; a este proceso le he llamado Estrategia Analítica y se experimenta su uso en el presente estudio. El presente estudio se hizo con los estudiantes de Educación, de la especialidad de Matemática e Informática de la Facultad de Ciencias de la UNE Enrique Guzmán y Valle, Promoción 2016, Ciclo III, secciones C5 (grupo experimental) y C1 (grupo de control), durante el Semestre 2017-I.

Al inicio del semestre se aplicó un pretest de 20 ítems, distribuidos en tres grupos y con puntaje total de 60 puntos y medía la variable dependiente (aprendizaje). Al final del semestre se aplicó el pos test. Los datos de los test tienen una Distribución Normal.Para

la prueba de hipótesis general y específicas se utilizó el estadístico T de Student y los resultados son: El H_0 de la hipótesis general fue rechazado, porque el **t** obtenido (4,863) es mayor que el **t** crítico (1,684). En los casos de las hipótesis específicas, en los tres casos el H_0 es rechazado. Por lo expuesto, se puede concluir que la aplicación de la Estrategia Analítica en la enseñanza de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes del C5 y C1.

SUMMARY

The students of the Mathematical Analysis I (UNE) or the Differential Calculus classes have difficulties in assimilating the unit basic concepts, such as: real numbers, real functions, limit and derivative. The difficulties reside in justifying, using the definitions, axioms and theorems of theory, each step of the reasoning process, wheneverthey sol ve exercises, p roble ms and demónstrate theorems.

In texts utilized in class, the contents are grouped in definitions, axioms and theorems (mottos, corollaries); on the other hand, when they present their samples of resolution on exercises, problems and theorems demonstrations, the justification of the steps given is incomplete, which makes difficult the student's learning.

Mathematics organizes its knowledge though the axiomatic methods, which has elements such as: the non-defined concepts (original) defined concepts (definitions) axioms (postúlales) and theorems (rnottos, corollaries). Whenever a student solves exercises problems or demonstrates theorems should justify each step of the reasoning procedure using those definitions, axioms or theorems of the theory. I have caiied this process *Analytical Strategy,* and we are experimenting its use in the present study.

The present study was done with the Education students of Mathematics and Informatics Major of the Faculty of Sciences in UNE Enrique Guzmán y Valle, year class 2016, Cycle III, sections C5 (experimental group) and C1 (control group) duringthe 2017 Semester-Í.

At the beginning of semester a 20 questions PRE TEST was applied, distributed in three groups with a total score of 60 points. This measured the dependent variable **(learning).**

At the end of the semester the POST TEST was applied. The test data have a Normal Distribution.

For the proof of the general and specific hypothesis, a statistics of T for Students was applied. The results are: The general hypothesis H_0 was rejected because the t obtained (4, 863) is larger than the critical t (1,864). In the specific hypothesis cases, in the three of them, the H° is rejected.

For what had been explained can be concluded that the application of the Analytical Strategy for teaching of the basic concepts of Differential Calculus generates different effects in the C5 and C1 students learning.

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

Revisando trabajos de investigación sobre la enseñanza del cálculo diferencial, la mayoría utilizan Módulo (texto breve con problemas y ejercicios) para enseñar la asignatura; al final de la investigación lo que validan es la utilidad del módulo mas no una nueva estrategia o procedimiento para enseñar el cálculo diferencial.

Por experiencia de trabajo, al desarrollar la asignatura de Análisis Matemático I (cálculo diferencial), he observado dificultades por parte de los estudiantes para asimilar los conceptos básicos del cálculo cuando se utiliza una función real cualquiera. En la presente investigación, que es cuasiexperimental, propongo iniciar el estudio de los conceptos básicos (función, límite y derivada) con las funciones básicas (que son 26) y utilizando un procedimiento, llamado estrategia analítica, que utiliza la estructura del método axiomático para justificar cada paso del proceso de resolución de ejercicios, problema o la demostración de un teorema.

La presente investigación es sobre la enseñanza de los conceptos básicos del cálculo diferencial (análisis matemático). Estos conceptos básicos son: números reales, funciones reales de variable real, límite y derivada.

El sistema de los números reales (R) es el soporte teórico del cálculo diferencial. Su teoría se organiza mediante el método axiomático, cuyos elementos básicos son: conceptos no definidos (en R consideramos tres), concepto definidos (son numerosos), sistema de axiomas (en R consideramos dieciocho) y los teoremas (son numerosos). Las funciones reales de variable real cualquiera son construidas utilizando las funciones básicas (consideramos en un número de 26) y las operaciones básicas (que son cinco).

El límite de una función cualquiera se estudia en base al límite de una función básica y de las operaciones básicas; lo mismo se hace al estudiar la derivada.

La enseñanza del cálculo diferencial (“que es un lenguaje de la ciencia”) está orientada por un procedimiento llamado Estrategia Analítica; que ayuda al estudiante a que no solo aprenda “el producto del pensamiento matemático”, sino, también, el proceso (“operaciones mentales implícitas en el funcionamiento cognitivo”).

La estrategia analítica consiste en mostrar que el objeto en estudio está construido por conceptos básicos y que debe justificarse cada paso del proceso de resolución de un ejercicio, problema y demostración de un teorema. La justificación del proceso es utilizando la estructura del Método Axiomático, y este puede ser con un concepto definido, axiomas o un teorema que corresponde a la unidad didáctica respectiva.

En la presente investigación, como es de tipo cuasiexperimental, para validar la propuesta se ha trabajado con dos grupos de estudiantes; uno de control (C1) y el otro experimental (C5), donde la variable estrategia analítica se estudia en tres dimensiones: resolución de ejercicios, resolución de problemas y la demostración de teoremas.

1. 1. Situación problemática

La crisis de la Educación Peruana es permanente, lo cual se confirma en las opiniones de especialistas e instituciones expertos en temas educativos; así tenemos: Patricia Salas O´Brien (2006), expresidenta del Consejo Nacional de Educación y exministra de Educación (2012), quien declaró que la educación en el Perú "está con anemia".

Trahtemberg,L. (2007) comentó de la "…agónica educación peruana".

Tovar, T. (2015), especialista en temas de educación, dijo que "…la educación pública ha devenido en un enfermo crónico".

Finalmente, Dargent, E.(2016), sociólogo, preocupado por la educación del país, manifestó que "La educación en este país (Perú) es una vergüenza".

Las expresiones vertidas por los especialistas lleva a concluir que el Sistema Educativo Peruano está en crisis permanente.

Sobre la labor de los maestros y estudiantes de la Educación Básica, en especial en matemática; tenemos algunas informaciones alarmantes sobre la profundidad de la crisis educativa del Perú. Aquí algunas referencias:

El Ministerio de Educación (1998), en las orientaciones del Plan Nacional de Capacitación Docente (PLANCAD), refiriéndose a la labor del maestro, decía que "…lo más grave, son los desniveles en la preparación de los profesores".

Vexler,I. (2005), exviceministro de Gestión Pedagógica, comentando los resultados de la Evaluación Nacional 2004, donde se aplicó una prueba a docentes de Primaria y Secundaria; fue anónima y voluntaria, manifestó que "Esta evaluación muestra que existe una insuficiente preparación de los profesores".

Piscoya Hermoza,L. (2006), en su libro **Cuánto saben nuestros maestros**, escribe lo siguiente: "En breve se puede afirmar que los pobres rendimientos mostrados por los escolares peruanos en las pruebas de UNESCO y PISA constituyen un fiel reflejo de la deficiente formación académica de sus profesores”

Salas O´Brien, H. (2007), refiriéndose, específicamente a la enseñanza de la matemática; dijo que “En el Perú no hemos aprendido a enseñar matemáticas. La enseñanza optima de las matemáticas,… es un desafío mayor”

Por otro lado, si nos centramos en el aprendizaje en general y en particular de la matemática en Educación Básica en el país, revisando las evaluaciones nacionales e internacionales, se tiene algunas referencias:

La UNESCO (1998) encargó al Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de Educación (Llece) realizar un estudio comparativo entre doce países de Latinoamérica. En este informe, los estudiantes peruanos del tercer y cuarto grado de Educación Primaria se ubican en el último lugar en matemática.

En las evaluaciones de matemática del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes, PISA por sus siglas en inglés, participan estudiantes peruanos de 15 años, de instituciones públicas y privadas. Esta evaluación se realiza cada tres años y es voluntaria. Aquí tenemos algunos resultados: el 2009 el Perú ocupó el 63 lugar y el 2012 el 65 lugar; en ambos casos de entre 65 países.

El 2015, donde participan 69 países, el Perú ocupó el 61 lugar. Estos resultados muestran que en matemáticas no estamos bien.

Revisando las Evaluaciones Nacionales (ahora censales), donde participa el segundo grado de Educación Primaria; a partir del 2007 se observa una leve mejoría. Comparando resultados en matemática del 2007 al 2015 tenemos lo siguiente en el nivel satisfactorio: 2007 (7,2%), 2009 (13,5%), 2010 (14%), 2011 (13%), 2013 (17%), 2014 (26%) y 2015 (27%).

Los resultados mostrados son preocupantes; se complica la labor de los profesores de matemática de Educación Básica y esto supone preocuparse por su formación que se da en las Facultades de Educación de las Universidades y de los Institutos Pedagógicos.

El presente proyecto propone una estrategia de enseñanza para mejorar la formación de los futuros profesores de matemática y contribuir en mejorar el aprendizaje de los niños de Educación Básica en el área de matemática.

1.2. Formulación del problema

¿Qué efectos genera la enseñanza del Calculo Diferencial de funciones básicas de una variable utilizando la estrategia analítica; en el aprendizaje de los estudiantes de Educación, especialidad de Matemática e Informática, de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Nacional de Educación Enrique Guzmán y Valle , 2017?

1.2.1.- ¿Qué efecto genera el uso de la estrategia analítica en la **demostración de teoremas** del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE EG y V?

1.2.2.- ¿Qué efectos generan el uso de la estrategia analítica en la **resolución de ejercicios** del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE EG y V?

1.2.3.- ¿Qué efecto genera, el uso de la estrategia analítica en la **resolución de problemas** del cálculo diferencias de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE EG y V?

1.3.- Justificación del proyecto.

Si se revisa los textos del Cálculo Diferencial o Análisis Matemático en $\mathbb{R}^2$, utilizados en la formación Básica, se observa que; tanto en la demostración de teoremas, como en la resolución de ejercicios y problemas no está ordenado adecuadamente y menos se justifica explícitamente las etapas del proceso. Es decir, no se hace referencia a los elementos del método axiomático (conceptos no definidos, definidos, axiomas y teoremas) utilizados en la construcción de sus enunciados.

En la construcción teórica de un área de la matemática o un teorema, ejercicio o problema, se utiliza los elementos del método axiomático. Cuando se demuestra un teorema o resuelve un ejercicio o problema debe mostrarse cuál de estos elementos se ha utilizado y esto justifica el proceso de razonamiento de la demostración o resolución.

Los conceptos fundamentales del Cálculo Diferencial se sustentan sobre la teoría de los números reales (su sistema de axiomas y teoremas). El dominio de esta teoría debe ser condición básica para la comprensión de los conceptos de función, límite y derivada.

Se da algunos ejemplos del desarrollo de la demostración de un teorema de la teoría de los números reales, que está en la base del Cálculo Diferencial en $\mathbb{R}^2$.

En un texto de precálculo (9), encontramos lo siguiente:

"Teorema 1. Propiedad transitiva. Si a, b y c son números reales tales que $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Demostración del teorema. Por la definición de orden, $a < b$ implica que $b - a = p$ es positivo, y $b < c$ implica $c - b = q$ es positivo porque los números positivos son cerrados para la adición.

Después de simplificar, se obtiene c – a = p + q de manera que c – a es positivo, de lo cual se deduce por la definición de orden que a < c".

Algunas observaciones: El enunciado del teorema debería representarse simbólicamente para mostrar su estructura lógica y así identificar las proposiciones de la hipótesis y tesis.

El proceso de demostración debe organizarse por pasos y justificar si es por definición, axioma o un teorema previo (elementos del método axiomático) a la que llamo la estrategia analítica, propuesta del presente proyecto.

En otro texto (16), encontramos lo siguiente:

"Teorema. – (- a) = a

Demostración

Por (A4) se tiene (- a) + (a) = 0. Por lo tanto, según el teorema 2.1.3 a) se deduce que a = - (- a)"

El proceso de demostración es conciso y dificulta su comprensión por parte de los estudiantes.

Se debe organizar siguiendo la estrategia analítica, que es la propuesta del presente proyecto.

1.4. Objetivos.

1.4.1. Objetivos generales.

Determinar los efectos que genera, el uso de la Estrategia Analítica en la enseñanza del Calculo Diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de Educación de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE EG y V.

1.4.2. Objetivos específicos.

- Determinar los efectos que genera el uso de la Estrategia Analítica en la **demostración de Teoremas** del Cálculo Diferencial de funciones básicas de una variable en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE EG y V.
- Determinar los efectos que genera el uso de la Estrategia Analítica en la **resolución de ejercicios** del Cálculo Diferencial de funciones básicas de una variable en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE EG y V.
- Determinar los efectos que genera el uso de la Estrategia Analítica en la **resolución de problemas** del Cálculo Diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE EG y V.

1.5. Formulación de la hipótesis

Un objeto matemático, sea un teorema, un ejercicio o un problema, es síntesis de conceptos no definidos, definidos, axiomas y teoremas (elementos del método axiomático). La estrategia analítica ayuda a identificar estos conceptos, en el enunciado de un teorema, un ejercicio o problema; o en el proceso de demostración de un teorema o resolución de un ejercicio o problema.

La propuesta de utilizar la estrategia analítica en la enseñanza de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial de funciones básicas facilitará el aprendizaje de los estudiantes de la asignatura de Análisis Matemático I.

Para obtener efectos de la estrategia analítica en el aprendizaje de los estudiantes, básicamente se debe hacer lo siguiente: si se estudia un teorema, se debe iniciar con la formulación del enunciado como proposición condicional o bicondicional; esto se hace para identificar la hipótesis y la tesis; luego se identifica los conceptos definidos en su enunciado. En el proceso de demostración se identifica los axiomas, definiciones y teoremas previos, utilizados en su construcción.

De igual forma, al resolver un ejercicio o problema, se debe identificar los conceptos teóricos utilizados en su construcción.

Esperamos que la propuesta de utilizar la estrategia analítica en la enseñanza de los conceptos básicos del Cálculo tenga un resultado favorable en el aprendizaje, siempre y cuando el estudiante tenga un sólido conocimiento de la teoría de los números reales.

1.5.1. Formulación de la hipótesis:

Hipótesis general.

La estrategia analítica utilizada en la enseñanza de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

Hipótesis específicas:

- La estrategia analítica utilizada en la **demostración de teoremas** del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

- La estrategia analítica utilizada en la **resolución de ejercicios** del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.
- La estrategia analítica utilizada en la **resolución de problemas d**el Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

1.6.- Identificación de las variables

Las variables que están contenidas en el problema y, por su puesto, en la hipótesis se consideran teniendo en cuenta la función que cumplen.

V. I. ***Variable independiente (x):*** La estrategia analítica utilizada en la enseñanza del Cálculo Diferencial de funciones básicas.

V. D. ***Variable dependiente (y):*** Niveles de aprendizaje de conceptos básicos del Cálculo Diferencial de funciones básicas.

V. In. Variable interviniente (z): Conocimientos previos al estudio de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial.

Esta variable interviniente se considera, teniendo en cuenta la procedencia de los estudiantes. Ellas proceden de instituciones públicas, en la que la adquisición de conocimientos no es la que se espera para continuar estudios superiores.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1. Marco filosófico o epistemológico de la investigación

Los conocimientos científicos orientan la vida de los seres humanos y les ayuda a explicar y resolver nuevos problemas. Si nos centramos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las diversas áreas del conocimiento, debe haber conocimientos científicos que orientan el proceso. El proceso enseñanza-aprendizaje es dinámico y constantemente se presentan problemas que se tiene que resolver. La investigación científica, siguiendo determinado método, puede resolver problemas y obtener nuevos conocimientos que orientarían el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En el presente estudio, se trata de resolver la dificultad que tienen los estudiantes de educación de la especialidad de Matemática de la UNE EG y V cuando tratan de aprender los conocimientos básicos del Cálculo Diferencial (números reales, funciones reales, límite y derivada de las funciones). Para resolver la dificultad se propone experimentar la aplicación de una estrategia al enseñar los conceptos básicos del cálculo diferencial. El problema fue detectado durante la experiencia de enseñar la asignatura de Análisis Matemático I (UNE EG y V) y revisando los textos que se utiliza en la asignatura. Los estudiantes tienen dificultades para justificar cada paso del proceso de resolución de los ejercicios, problemas y demostración de teoremas y, por otro lado, los textos no brindan la justificación completa de los procesos antes mencionados.

La Matemática organiza sus conocimientos mediante el Método Axiomático, que tiene como elementos a: 1.-conceptos no definidos (primitivos), 2.- conceptos definidos (definiciones), 3.- axiomas (postulados) y 4.- teoremas (lemas y corolarios); y si revisamos los textos de cálculo diferencial, cada unidad siempre presenta la estructura del método axiomático, muchas definiciones y teoremas, con los cuales se construyen los ejercicios, problemas y teoremas. A partir de estos indicios se deduce lo que en realidad tienen que aprender los estudiantes, las definiciones y los teoremas y estos se pueden aprender resolviendo ejercicios, problemas y demostrando teoremas y queda explicitado su aprendizaje cuando se justifica cada paso del proceso. A esta forma de afrontar la enseñanza la hemos denominado La Estrategia Analítica.

La presente investigación es de tipo cuasiexperimental (grupo experimental y grupo de control), está orientada por el método hipotético deductivo, y la validación de hipótesis se realiza mediante el uso del estadístico el T de Student.

El tema de investigación corresponde a la Didáctica de la Matemática y está orientado por la Teoría de la Transposición Didáctica, porque la Estrategia Analítica facilita transformar conocimientos de un nivel de organización a otro nivel más accesible.

La Estrategia Analítica está orientada por la Psicología Cognitiva, además posee algo de metacognición.

2.2. Antecedentes de la investigación

La mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza del cálculo diferencial, son propuestas basadas en la modularización (Módulo: texto con muchos ejercicios y problemas) y no hay propuestas de nuevos procedimientos para la enseñanza del cálculo. Consideramos algunos:

1.- Se puede rescatar la Tesis Doctoral de Irazoqui Becerra (2015), cuyo título es **El aprendizaje del cálculo diferencial: una propuesta basada en la Modularizació,** los tres enfoques en la enseñanza del cálculo son:

1.1.- Proyecto del cálculo en contexto (1987).

"la idea principal es que el cálculo es un lenguaje (lenguaje de la ciencia), una red de conceptos y un conjunto de técnicas útiles."

Se debe partir de situaciones reales (problemas) y generar principios generales (axiomas o teoremas).

1.2.- Proyecto de debate científico (1992, Legrad)

"trabajan como si fueran matemáticos en el contexto de problemas científicos. Discuten y argumentan sus puntos de vista con los compañeros de clase."

1.3.- Modelo teórico de Ingeniería Didáctica (M. Artigue,1989)

Propone coordinar los enfoques algebraico, numérico y gráfico.

2.-El de Romero, T. (2013), cuyo título es **Uso de Recursos Educativos Abiertos(REA) para la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en el nivel medio de enseñanza;** Estudia el impacto del uso de recursos educativos abiertos("aquellos recursos tecnológicos de acceso libre al momento de ser consultados", como herramienta en el aprendizaje opcional de conceptos y procedimientos del Cálculo Diferencial(límite y continuidad).

3.- El de Abarca, N. (2015), cuyo título es **La enseñanza del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas;** un resultado importante de esta investigación es que "Los estudiantes (del curso de Cálculo I) prefieren sólo resolver ejercicios sin emplear axiomas, teoremas, definiciones, conceptos, etc.”; esta parte es lo que la estrategia analítica pretende resolver, tema de la presente investigación.

4.- El de Oliveira, C. (2015), cuyo título es **Una posible “razón de ser” del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional;** en este trabajo se trata de estudiar el cálculo diferencial mediante la construcción de modelos funcionales. En una parte del trabajo se habla de “estrategias alternativas para mejorar la enseñanza del cálculo”, pero es poco lo que se encuentra.

2.3. Bases teóricas

2.3.1. Glosario de Términos

1. Analizar. Es una operación lógica del pensamiento humano y, por lo tanto, del pensamiento lógico – matemático. Significa, también, separar en parte los objetos matemáticos, estableciendo relaciones.

2. Sintetizar. Integrar en un todo a partir de sus partes, determinar su esencia.

3. Matemática. Ciencia formal. Su objeto de estudio no existe en la realidad espacio – temporal. Su verdad es necesaria y formal, utiliza lenguajes formales.

4. Enseñanza. Es la acción intencional y sistemática para el logro del aprendizaje.

5. Aprendizaje. El aprendizaje humano es un proceso de aprehensión de la realidad, de experiencia de la realidad, en la que la persona se implica toda ella, su inteligencia, su sensibilidad, todas sus capacidades.

6. Estrategias de aprendizaje. Son las acciones y pensamientos de los estudiantes que ocurren durante el aprendizaje e influyen en la motivación y la codificación, incluidas la adquisición, la retención y la trasferencia.

7. Estrategia analítica. Esta estrategia consiste en identificar en un objeto matemático los elementos del método axiomático (concepto no definido, definidos, axiomas y teoremas) utilizados en su construcción.

8. Objeto matemático. Un objeto matemático atiende al aspecto representacional que le configura y al desarrollo de un significado personal sobre este desde las experiencias del individuo con el objeto.

9. Método axiomático. El método axiomático es lógica aplicada, es decir, es un sistema axiomático y tiene sus componentes: conceptos no definidos o términos primitivos, conceptos definidos, axiomas y teoremas. Además, posee exigencias lógicas en su estructura: compatibilidad, independencia y completitud.

10. Estrategia Didáctica. Es un procedimiento organizado, formalizado y orientado a la obtención de una meta establecida en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

11. Método. Es una orientación racional para resolver problemas o “es el camino lógico para hacer algo”.

12. Procedimiento. Es el conjunto de pasos finitos, concatenados o son tareas repetitivas que permiten ejecutar acciones.

13. Técnica. Es toda aplicación de conocimientos teóricos para la resolución de problemas repetitivos prácticos.

14. Resolución de problemas. “La resolución de problemas es un proceso cognitivo dirigido a alcanzar una meta, cuando la solución no parece clara.”

15. Ejercicio. Es un enunciado matemático que requiere una respuesta y para resolver tiene un camino conocido.

16. Problema. Es un enunciado matemático que requiere una respuesta y para resolver no tiene un camino conocido.

17. Teorema. Es una proposición matemática verdadera que requiere demostrar su veracidad, mediante el razonamiento deductivo.

18. Axioma. Es una proposición matemática verdadera que no requiere demostrar su veracidad.

19. Concepto no definido. Son enunciados matemáticos que sirven para evitar la regresión indefinida en el proceso de definición.

20. Definiciones o conceptos definidos. Son enunciados matemáticos que sirven para introducir los términos no definidos.

21. Razonamiento deductivo. Es un tipo de razonamiento que parte de una serie de proposiciones generalizadas para obtener nuevas generalizaciones.

22. Cálculo diferencial. Área de la matemática que tiene como conceptos básicos: números reales, funciones reales, límite y derivada de funciones.

2.3.2. La Matemática

Se describe algunos rasgos del pensamiento matemático, su importancia para las otras ciencias y su utilidad en la vida humana.

1.- El lenguaje, la matemática y la filosofía siguen siendo las materias esenciales en la educación del ser humano.

2.- La matemática es parte de la cultura humana, porque participa en las actividades universales del ser humano, estas son: contar, medir, diseñar, localizar, jugar y explicar.

3.- El conocimiento científico planifica, explica, predice y aplica para producir conocimientos tecnológicos; la matemática es fundamental en este proceso.

4.- La matemática es una ciencia formal. El pensamiento formal significa: capacidad de razonamiento lógico, simbolización, abstracción, rigor y precisión. La matemática es de naturaleza abstracta (abstracción de la experiencia práctica), su lenguaje es simbólico.

5.- La matemática es una ciencia fundamental para las otras ciencias, porque les ayuda a construir su estructura formal. La matemática es el lenguaje de las ciencias y por eso es un poderoso instrumento de comunicación. La matemática busca métodos generales de resolución de problemas mediante el razonamiento deductivo.

6.- Las dos grandes herramientas del conocimiento humano siempre fueron: el lenguaje y la matemática; se puede decir que el conocimiento humano alcanza su madurez cuando llega a la teorización, esto es posible gracias a la matemática.

7.- La educación matemática ayuda a desarrollar importantes cualidades intelectuales como: la intuición, la capacidad de abstracción, de análisis, de síntesis, forja un pensamiento racional, ordenado y crítico. "Las matemáticas, más que ninguna otra actividad humana, depende del raciocinio (deductivo) para producir conocimientos" (Kline, 2000, p.15).

8.- La verdad científica son de cuatro tipos: la verdad lógica, la verdad por definición, la verdad empírica y la verdad matemática. La matemática demuestra sus verdades mediante la deducción; mientras que las ciencias naturales utilizan hechos experimentales (observación y experimentación) como base para obtener sus conclusiones. Podemos afirmar que "un enunciado es matemáticamente verdadero sí y sólo sí ese enunciado es deducible de axiomas intuitivos" (Garrido, 2003, p.21).

El razonamiento deductivo consiste en que a partir de principios, axiomas, leyes, postulados y teoremas se obtienen nuevas verdades. Finalmente: "La matemática es una ciencia esencialmente deductiva" (Sanguineti, 2007, p.216); y sobre la deducción se dice: “Los lógicos simplemente llaman deducción a un razonamiento correcto” (Klimovsky, 1997, p.86).

2.3.3. Aproximación epistemológica

Mario Bunge (1977) lo llama objetos conceptuales a los objetos de estudio de la matemática (conjunto, relaciones, funciones, teoremas, etc.) reconociendo que para explicar la naturaleza de estos objetos conceptuales se debe tener claro las principales tesis filosóficas.

A las principales tesis filosóficas tradicionales, tales como el platonismo, nominalismo y empirismo, Bunge le agregará su materialismo conceptual. Desde este punto de vista dice “…los objetos conceptuales no existen como objetos materiales ni como objetos mentales”.

Hay una interrogante que se debe contestar cuando se trata de explicar la naturaleza de los objetos matemático; esta es: ¿Qué tipo de relación hay entre la lógica y la matemática de una parte y la realidad que nos circunda la otra? La respuesta se puede dar desde el punto de vista de la concepción descriptiva y la no descriptivista o constructivista. La primera comparte la tesis de que la lógica y matemática son descripciones de la realidad. La segunda sostiene que “los enunciados lógico-matemáticos no describen ningún tipo de realidad (ni ideal, ni natural) preexistente a la propia actividad constructiva del matemático” (Alemán, 2001, p. 17).

Dentro de esta segunda opción está el convencionalismo que sostiene que “…son las propias reglas del sistema (tanto las reglas de inferencia como los axiomas, si los hay) los que determinan o constituyen sin residuo el significado de los signos lógicos y matemáticos" (Alemán, 2001, p. 25); y esta opción es la que tiene amplia aceptación en los últimos tiempos de desarrollo matemático.

2.3.4. La matemática: ciencia formal

La matemática por su naturaleza intrínseca es una ciencia axiomática – deductiva, predomina en ella el tipo de razonamiento donde las conjeturas se derivan de los axiomas, de las definiciones y de teoremas ya demostrados.

La matemática es una ciencia formal porque inventa entes formales y establece relaciones entre ellos, sus problemas son puramente cognoscitivos.

2.3.5. El método axiomático

El método axiomático es un logro de los antiguos griegos, utilizado por Euclides en sus **Elementos**, para exponer la geometría en forma sistemática. En la actualidad, es un método fundamental para organizar los conocimientos de la matemática. El método tiene componentes:

1. Términos primitivos o no definidos. Sirven para evitar la regresión hasta el infinito de las definiciones.

2. Términos o conceptos definidos: Sirven para introducir los términos primitivos, significa univocidad de las proposiciones. Una definición debe ser reversible, es decir, la proposición y su reciproco debe ser verdaderos ambas.

3. Axiomas o postulados: Sirven para evitar la regresión hasta el infinito en el proceso de implicación en la demostración de teoremas. Los axiomas son puntos de partida de un sistema axiomático.

4.Teoremas: Son proposiciones que se demuestran. La verdad de un teorema depende del conjunto de axiomas propuestos.

2.3.6. Métodos de demostración en matemáticas

La matemática por su naturaleza intrínseca es una ciencia deductiva. Predomina el tipo de razonamiento donde las conjeturas se derivan de los axiomas, de las definiciones y de resultados ya obtenidos. También se dice que la matemática es una ciencia axiomática – deductiva, es decir, una ciencia formal. Surge la pregunta: ¿Cómo se justifica la verdad de los enunciados de las ciencias formales? La única forma de justificación o demostración de una proposición consiste en establecer relaciones entre las proposiciones, de tal manera que unos sean el fundamento o razón de la verdad de otros. Estas relaciones se obtienen mediante razonamientos deductivos válidos.

La matemática prioriza la deducción para demostrar la veracidad de sus proposiciones (teoremas), porque de todos los modos de razonamiento, solo el deductivo garantiza conclusiones seguras y exactas.

Las proposiciones matemáticas que se demuestran por deducción se llaman teoremas; estas son proposiciones condicionales o bicondicionales, es decir, son de naturaleza hipotética – deductiva.

La demostración de los teoremas puede ser:

a. Demostración directa.

b. Demostración indirecta.

c. Demostración por el contrapositivo.

d. Demostración por Reducción al Absurdo o Contradicción.

2.3.7.- Estrategias Didácticas

En el concepto general de estrategia intervienen términos como: “de un orden concreto”, “acciones ordenadas”, “lograr resultados”, “hacer con eficacia”, “ahorrar tiempo y esfuerzo”, “secuencia concreta”, “todos tenemos estrategia”, “sintaxis concreta”, “acción necesaria”, “camino”, “método”, “procedimiento”, “táctica”, “actividades”, “todos tenemos”, etc.

Algunos rasgos de las estrategias son: es que son prácticas, sirven para actuar, son actividades secuenciadas, es decir que hay orden y siempre tienen objetivos determinados que cumplir.

Algunos conceptos en forma general de estrategia: así tenemos “que una estrategia no es más que un orden concreto de representaciones (visuales, auditivas, cenestésicas, olfativas, gustativas, etc.) que produce un resultado concreto” (Robbins, 2005, p.163). El mismo autor amplía el concepto cuando dice “que una estrategia es la secuencia de representaciones internas, mediante las cuales una persona puede realizar una tarea determinada” (2005, p. 165).

Por la naturaleza del presente trabajo, interesa centrarse en las estrategias didácticas; como el objeto de estudio de la didáctica es el proceso de enseñanza-aprendizaje, es necesario esclarecer lo que es la estrategia de enseñanza y estrategia de aprendizaje.

Las estrategias didácticas se manifiestan, cuando en el proceso de enseñanza-aprendizaje se toma decisiones sobre:

1.- El tipo de tareas que se proponen al alumno.

2.- La gestión del tiempo y el espacio.

3.- La secuenciación y organización de los contenidos.

4.- La presentación y el uso de los materiales.

5.- La modalidad de seguimiento y ayuda pedagógica que se proporciona a los educandos y educandas.

6.- Las intenciones educativas que se pretende y las concepciones sobre el aprendizaje que se sustenta. (Giñe, 2003, p.83)

Se asume que “las estrategias de enseñanza-aprendizaje son instrumentos de los que se vale el docente para contribuir a la implementación y el desarrollo de las competencias de los estudiantes” (Pimienta, 2012, p.3).

Se puede concebir la estrategia de enseñanza como una “secuencia de actividades que el profesor decide como pauta de intervención en el aula” y la estrategia de aprendizaje se puede asumir como que “la estrategia es un conjunto de actividades mentales empleadas por el sujeto en una situación particular de aprendizaje, para facilitar la adquisición de conocimientos” (Gallego, 2016, p.23).

Las estrategias de enseñanza y de aprendizaje son consideradas como un conjunto de procedimientos de carácter cognitivo; llevan a decir algo sobre las estrategias cognitivas y metacognitivas.La estrategia analítica es parte de estas.

Una estrategia cognitiva es un conjunto de procesos que facilitan la realización de tareas intelectuales, y las metacognitivas están definidas en base a lo que se entiende por conocimiento cognitivo. Un conocimiento metacognitivo es un conocimiento sobre el conocimiento (es como justificar de lo que se sabe). Todo esto es importante para entender la estrategia analítica, que tiene de cognitiva y metacognitiva. A continuación, se precisa algunos conceptos que se confunden con estrategia didáctica, estos conceptos son: método, técnica, procedimiento, actividades.

Método: es “el camino lógico para hacer algo(fin)”, es decir es el camino teórico (cognoscitivo) más general que técnica, procedimiento y estrategias. Aplicado a la educación, el concepto de método se dice que es "el camino lógico para conseguir un objetivo de enseñanza o aprendizaje". Un método tiene una serie de pasos que se concretiza mediante modos, formas, estrategias, técnicas y procedimientos.

Técnica: en forma general, una técnica es toda aplicación de conocimientos para la resolución de problemas repetitivos prácticos de la vida humana. Las técnicas se subordinan a un método. Las técnicas son procedimientos concretos, específicos y tienen un carácter eminentemente práctico.

En la educación, se habla de técnicas de enseñanza y de aprendizaje, si la relacionamos a las estrategias, una técnica puede definirse teniendo elegida la estrategia tanto de enseñanza como el de aprendizaje. Se dice que "la técnica es una habilidad específica que está al servicio de la estrategia" y que la técnica es un conjunto de "procedimientos pedagógicos específicos para orientar las estrategias didácticas" (Tobón, 2013, p.289).

Procedimiento: es una secuencia de pasos para realizar una actividad práctica. La aplicación de los procedimientos está orientada por el método. Todo procedimiento está orientado a la acción-actividad. Podemos decir, también, que un procedimiento es un conjunto de pasos finitos, concatenados y repetitivos, y es un recurso mediante el cual se ejecuta acciones. El procedimiento, también, es conocido como reglas o como "conjunto de acciones ordenadas hacia la consecución de una meta".

Actividad: son procesos que sirven para poner en acción las técnicas, teniendo en cuenta los recursos y objetivos fijados. Las actividades siempre están en la ejecución del método, estrategias, procedimientos y técnicas; en este proceso siempre se habla de "secuencia de actividades".

La Matemática es fundamentalmente una ciencia cognitiva, por lo tanto, para orientar su proceso enseñanza-aprendizaje, requiere de la orientación de la psicología cognitiva;

específicamente de las estrategias cognitivas y metacognitivas. La estrategia analítica, que es tema de estudio del presente trabajo, tiene características de las estrategias cognitivas y metacognitivas. Al respecto algunas precisiones:

Las estrategias cognitivas "es un conjunto de procesos que facilitan la comprensión del proceso de las tareas intelectuales". Una clasificación de las estrategias cognitivas, que interesa, por la naturaleza del presente trabajo es:

1.- Inductivas: la observación, experimentación, la abstracción y generalización.

2.- Deductivas: consiste en ir del concepto hasta la comprobación de la realidad: comprobación, demostración.

3.- Analíticas: consideradas como operaciones mentales en la que el estudiante divide en partes un concepto complejo para comprenderlo mejor: análisis, clasificación; aquí se va ubicar la estrategia analítica, que se aplica en el presente trabajo.

4.- Sintéticas: conclusiones, definiciones, resúmenes, etc.

2.3.8. Estrategia analítica y su estructura

La estrategia analítica, es un tipo de estrategia cognitiva, específicamente lo caracterizan como estrategia creativa; se puede utilizar, tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. En el presente trabajo se utiliza en el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Algunas referencias sobre esta estrategia:

Todo objeto matemático (teorema, problema, definición, ejercicio, etc.) es síntesis de otros conceptos matemáticos. La síntesis es un proceso lógico del pensamiento humano, que consiste en la integración en un todo de las partes, es la que define la esencia del objeto matemático. Los conceptos matemáticos que se integran en un todo (otro concepto más complejo) pueden ser: conceptos no definidos (primitivos), conceptos definidos (definiciones), axiomas (proposiciones verdaderas sin demostración) y teoremas (proposiciones verdaderas que requieren de la demostración); estos son elementos del método axiomático.

Al estudiar un objeto matemático, es necesario utilizar el análisis para identificar los conceptos no definidos, los conceptos definidos, los axiomas y teoremas utilizados en la construcción del objeto.

El análisis es un proceso lógico del pensamiento humano que consiste en separar en partes un todo, para identificar las partes y sus relaciones entre las partes. Este proceso se puede utilizar para enseñar y aprender matemáticas; a este proceso le llamo estrategia analítica y se aplica en la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial.

La estrategia analítica es utilizada en resolver ejercicios, problemas y en la demostración de teoremas. Hacemos aclaraciones sobre problema y ejercicio.

Problema: es una proposición matemática que genera obstáculo, dificultad o motivo de controversia; esta dificultad puede ser teórica o práctica y se debe aclarar. La solución de un problema no tiene un proceso conocido.

Ejercicio: es una proposición matemática que genera un obstáculo, dificultad o motivo de controversia, cuya solución tiene un proceso conocido o que tiene un algoritmo o fórmula para resolver la dificultad.

Teorema (lema, corolario): es toda proposición matemática verdadera que requiere ser demostrada para aceptar su veracidad y esta se da mediante la deducción, y utiliza las definiciones, axiomas u otros teoremas ya demostrados. Todo teorema tiene hipótesis (conjunto de proposiciones verdaderas) y la tesis (proposición que se quiere demostrar).

La Estrategia Analítica consiste en lo siguiente: Dado un objeto matemático (definición, axioma, teorema, ejercicio o problema) se debe identificar:

1. Nombre del objeto.
2. Área al que pertenece.
3. Conceptos no definidos que están presentes en el objeto.
4. Conceptos definidos.
5. Axiomas y teoremas previos que han sido utilizados para su construcción. Se identifica en el proceso de comprensión de un concepto, resolución de ejercicios y problemas; y en la demostración de un teorema.

La aplicación de la estrategia analítica tiene la siguiente estructura:

2.3.8.1. Estructura general de la estrategia analítica y la demostración de teoremas.

1. Enunciado del teorema.
2. Nombre del objeto matemático en estudio.
3. Área de la matemática a la que pertenece el teorema.
4. Unidad didáctica a la que pertenece el teorema.
5. Identificar los conceptos no definidos, contenidos en el enunciado del teorema.
6. Identificar los conceptos definidos, contenidos en el enunciado del teorema.
7. Identificar los axiomas utilizados en la construcción del teorema. Generalmente son identificados en el proceso de demostración.
8. Identificar los teoremas utilizados en la construcción del enunciado del teorema. Generalmente son identificados en el proceso de la demostración.
9. Formulación del enunciado del teorema.
   9.1 Enunciar el teorema como proposición condicional o bicondicional.
   9.2 Identificar el antecedente y el consecuente en la proposición condicional.
   9.3 Formalización del enunciado del teorema (uso del lenguaje matemático).
10. Demostración del teorema.
   10.1. Identificar el método de demostración.
   10.2. El proceso de demostración debe considerar lo siguiente:
      a. Expresión gráfica del enunciado del teorema, mediante figuras se hace referencia intuitiva del enunciado.
      b. Proceso operativo: etapa que conduce a la demostración del teorema.

c. Justificación de cada etapa del proceso operativo, utilizando las definiciones, axiomas o teoremas de la teoría matemática donde esta contextualizada el teorema.

11.Resumen teórico.

Se menciona toda la teoría (definiciones, axiomas y teoremas) utilizada en la construcción y demostración del enunciado del teorema.

2.3.8.2. Estructura general de la estrategia analítica y la resolución de ejercicios.

1. Enunciado del ejercicio.
2. Nombre del objeto que se estudia.
3. Área de la matemática a la que pertenece el ejercicio.
4. Unidad didáctica a la que pertenece el ejercicio.
5. Identificar los conceptos no definidos, contenidos en el enunciado del ejercicio.
6. Identificar los conceptos definidos, contenidos en el enunciado del ejercicio. Es recomendable dar la definición de cada concepto, la cual motiva a revisar los textos donde están las definiciones. Algunas definiciones no aparecen en el enunciado, se le detecta en el proceso de resolución del ejercicio.
7. Identificar los axiomas (proposiciones utilizadas en la construcción del ejercicio). Generalmente los axiomas son identificados en el proceso de resolución del ejercicio. Se recomienda enunciar los axiomas para memorizarlos.
8. Identificar los teoremas (proposiciones utilizadas en la construcción del ejercicio) generalmente los teoremas se identifican en el proceso de resolución del ejercicio. Se recomienda escribir el enunciado del teorema, motiva a revisar los textos y memorizarlos.
9. Resolución del ejercicio, esta parte de la estructura puede tener muchos pasos, pero cada paso debe considerar, en lo posible, lo siguiente:

   9.1 Expresión gráfica del enunciado, mediante figuras se hace referencia intuitiva del enunciado.

   9.2 Proceso operativo. Donde se realizan los cálculos que conduce a la resolución del ejercicio.

   9.3 Justificación de cada proceso operativo. Cada proceso operativo se justifica mediante definiciones, axiomas o teoremas. En esta parte de la estrategia analítica es donde se identifica los axiomas y teoremas utilizados en la construcción del enunciado del ejercicio. Se puede decir que el objetivo de resolver un ejercicio es para identificar las definiciones, los axiomas y teoremas utilizados en la construcción del enunciado del ejercicio. Se puede decir que la esencia de la estrategia analítica es identificar los elementos del método axiomático.

10. Resumen de la teoría.

Se menciona toda la teoría (definiciones, axiomas y teoremas) utilizada en la construcción del enunciado y la resolución del ejercicio.

2.3.8.3. Estructura general de la estrategia analítica y la resolución de problemas matemáticos.

1.Enunciado del problema.

2.Nombre del objeto de estudio.

3.Área de la matemática a la que pertenece el problema.

4.Unidad didáctica a la que pertenece el problema.

5.Identificar los conceptos no definidos, contenidos en el enunciado del problema.

6.Identificar los conceptos definidos, contenidos en el enunciado del problema.

7.Identificar los axiomas utilizados en la construcción del problema. Generalmente se identifica en el proceso de resolución.

8.Identificar los teoremas utilizados en la construcción del problema. Generalmente se identifican en el proceso de resolución.

9.Resolución del problema. Cada paso de resolución, en lo posible, debe considerar lo siguiente:

9.1. Expresión gráfica del enunciado, mediante figuras se hace referencia intuitiva del enunciado del problema.

9.2. Proceso operativo, en la que se realizan los cálculos para la resolución del problema.

9.3. Justificación de cada proceso operativo. Cada proceso operativo se justifica mediante definiciones, axiomas o teoremas utilizados en la construcción del enunciado

10.Resumen de la teoría. Se menciona toda la teoría (definiciones, axiomas y teoremas) utilizada en la construcción del enunciado y de la resolución del problema.

2.3.8.4. Estructura general de la estrategia analítica y la resolución de problemas de aplicación.

Los problemas propuestos son de otra área de conocimiento, pueden pertenecer a las ciencias naturales, sociales, económicas, etc., pero su solución necesita de la matemática. El área de conocimiento donde se aplica la matemática tiene sus principios (axiomas), conceptos definidos y proposiciones verdaderas (teoremas) que sustenta su edificio teórico y, por otro lado, la matemática, en nuestro caso el cálculo diferencial, tiene su sustento teórico en base a conceptos no definidos, definiciones, axiomas y teoremas. Al formular la estructura de la estrategia analítica para resolver este tipo de problemas, se debe tener en cuenta los dos aspectos:

Estructura:

1.Enunciado del problema.
2.Nombre del objeto de estudio.
3.Área de la matemática:
4.Unidad didáctica:
5.Identificar los conceptos no definidos:
  5.1. Conceptos no definidos matemáticos
  5.2. Conceptos no definidos del área de aplicación.
6.Identificar los conceptos definidos:
  6.1.Conceptos definidos matemáticos
  6.2.Conceptos definidos del área de aplicación.
7.Identificar los axiomas:
  7.1. Axiomas matemáticos
  7.2. Principios del área de aplicación.
8.Identificar los teoremas:
  8.1. Teoremas matemáticos

8.2. Proposiciones verdaderas del área de aplicación

9.Resolución del problema: proceso.

9.1.Identificar la información básica contenida en el enunciado. Interpretación matemática de los conceptos del área de aplicación.

9.2. Identificar nueva información deducida a partir de la información básica. Interpretación matemática de los conceptos del área de aplicación. Proceso de cálculo.

9.3. Respuesta a las preguntas formuladas en el enunciado del problema. Proceso operativo matemático e interpretación en el área de aplicación.

10.Resumen teórico:

10.1.Resumen teórico matemático.

10.2.Resumen teórico del área de aplicación.

2.3.9. Cálculo diferencial o análisis matemático.

El análisis matemático es una forma de estudiar los conceptos básicos del cálculo diferencial, como son: Límite, deriva e integral.

El análisis real es un área fundamental de la matemática pura, es principalmente una ciencia deductiva; es rigurosa en la estructuración de sus conceptos, esto hace que sea una ciencia exacta por excelencia y tiene un valor educativo, tanto como ejercicio mental y modelo de probidad científica.

El análisis es la base de la matemática moderna, tanto por las nociones que estudia, como por sus métodos de razonamiento, sus características son descritas en los siguientes términos: " el análisis matemático es la rama de la matemática que proporciona métodos para la investigación cuantitativa de los distintos procesos de cambio, movimiento y dependencia de una magnitud respecto de otro" (Kolmogorov, Alekasandrov y Laurentiev, 2003, p.92), o este otro texto que dice que "se puede describir el análisis como el estudio de los procesos infinitos, tales como las series infinitas, los límites, la diferenciación y la integración" (Stewart, 1975, p. 260)

Los conceptos fundamentales que se desarrollan en el presente marco teórico son: el sistema de los números reales; se desarrolla brevemente su estructura algebraica y de orden (ecuaciones e inecuaciones), enfatizando en la demostración de sus propiedades. Se estudia la propiedad de completitud de R-axioma del supremo – y su estructura topológica; distancia entre dos puntos; que sirve para entender el concepto de puntos “próximamente cercanos”.

El concepto de función real básica, es uno de los fundamentales en matemática, se dice que “la palabra clave del análisis es desde luego, la de función”; “el concepto de función es central en todo el análisis matemático y sus aplicaciones”, “el elemento principal en la creación de los conceptos fundamentales del análisis matemático, consiste en la introducción de conceptos de función”.

Se asume como conocimiento previo a la geometría analítica plana, esta es una de las bases para el estudio del cálculo infinitesimal. La geometría analítica “es un proceso de traducción por medio del cual se utiliza una interpretación algebraica para resolver problemas y establecer teoremas de geometría”, “La geometría analítica resulta ser un método notablemente fértil, tanto para resolver como para descubrir nuevos resultados en geometría”

El concepto de límite de una función en un punto es el “corazón del análisis”. La teoría de los límites es indispensable en el cálculo, en base a él se dan los conceptos fundamentales del cálculo, como es el de continuidad, derivada e integral. La noción de límite, es la operación fundamental del análisis, “el análisis se funda en procesos infinitos; es decir, límites”.

El concepto de continuidad de una función en un punto o en un intervalo es uno de los conceptos básicos del análisis matemático. Está estrechamente relacionado con el concepto de límite; se basa directamente en él.

El concepto de derivada también es fundamental en el cálculo. La derivada fue originada por un problema de geometría: el problema de hallar la tangente en un punto a una curva.

2.3.10. Sistema de los Números Reales

Para comprender los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral o análisis matemático, tales como: Límite, continuidad, derivada e integral, se necesita de la teoría de los números reales, y no basta su estructura algebraica y de orden, se requiere de la topológica; distancia entre dos puntos que sirve para entender el concepto de "próximamente cercanos y la propiedad de continuidad"- axioma del supremo.

2.3.10.1. NECESIDAD DE EXTENDER $\mathbb{Q}$ $\boldsymbol{a}$ $\mathbb{R}$

El conjunto de los números racionales es un campo ordenado no completo (estructura algebraica y de orden) y es un espacio métrico (estructura topológica); además $\mathbb{Q}$ es denso (están debidamente ordenados en su orden natural) pero, en su relación con la recta, la correspondencia no es biunívoca. En la estructura de $\mathbb{Q}$ se encontraron dificultades (problemas) que no tienen solución y requieren de un nuevo conjunto de números ($\mathbb{R}$).

Algunas de estas dificultades están relacionadas con lo siguiente:

a. Las dos formas de representar un número racional, como razón de dos números enteros y como fracción decimal.
b. La correspondencia entre $\mathbb{Q}\ y\ \mathcal{L}$ (la recta) que no es biunívoca.
c. Resolución de ecuaciones de segundo grado.
d. Convergencia de sucesiones de números racionales.
e. Al estudiar la estructura de orden de $\mathbb{Q}$, hay que determinar si un subconjunto acotado superiormente tiene supremo o no en $\mathbb{Q}$.

Comentamos algunos de ellas.

i) Longitudes conmensurables e inconmensurables.

El concepto de contar (número natural) y el de medir (número racional) son los más antiguos.

La historia muestra que la aritmética y la geometría (hoy es el de conjunto) son las raíces sobre las cuales ha crecido toda la matemática; algunas veces avanzaron juntas y otras tantas separadas impulsando o trabando el progreso de la matemática.

La matemática de los griegos fue sobre todo geometría; por eso los números enteros positivos y sus respectivas razones fueron interpretados mediante longitudes de segmentos. Cuando se apartaron de la geometría (escuela pitagórica), y trataron de fundamentar el concepto de número se encontraron con consecuencias impredecibles que estremeció todo el edificio de la geometría griega. Los griegos partían de la suposición "… que dados los segmentos de recta cualesquiera existía una unidad común de longitud…". Los pitagóricos hallaron ejemplos que contradecían esta suposición, así tenemos:

La razón de la diagonal de un cuadrado a su lado, no tenía unidad común; y se dieron cuenta de que "esta era la falla en la estructura lógica de la geometría euclidiana y una imperfección en la discusión de los cocientes y proposiciones de las longitudes" (las demostraciones de los teoremas eran válidos para segmentos conmensurables y para los inconmensurables quedaban sin justificación); y para evitar el colapso de su ciencia predilecta, optaron por guardar el descubrimiento del problema como secreto, se tuvo que esperar a Eudoxio y Arquímedes.

ii) Fracciones decimales periódica infinita. Un número racional, aparte de representarse como la razón de dos números enteros (fracción racional) tiene la representación decimal, esas pueden ser limitadas (finitas) o ilimitadas (infinitas).

Surge la interrogante: ¿Qué fracciones racionales p/q tienen representación decimal finita y quiénes decimal infinita? La respuesta está sustentada en el siguiente teorema "Cualquier fracción racional a/b se puede expresar como un decimal finito o infinito. Recíprocamente, cualquier expresión decimal que sea finita o periódica infinita es igual a algún numero racional".

Como se conoce el "algoritmo de la raíz cuadrada", $\sqrt{2}$ se puede expresar como decimal infinito, $\sqrt{2} \approx 1{,}4142134 \ldots$

La interrogante es: ¿La expresión de $\sqrt{2}$ es periódica infinita o no? Para demostrar, se supone que la expresión decimal de $\sqrt{2}$ es periódica infinita, el razonamiento lleva a una contradicción, lo que evidencia que existen números no racionales.

iii) Limitaciones de las estructuras fundamentales de $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}$ es un campo ordenado no completo, $(\mathbb{Q}, +, \ .)$ es la estructura de campo, y no hay problemas para generar la extensión de $\mathbb{Q}$.
$(\mathbb{Q}, +, . \ , \leq)$ es la estructura de orden de $\mathbb{Q}$. Los elementos de $\mathbb{Q}$ están ordenados; cualquier subconjunto de $\mathbb{Q}$ también tiene sus elementos ordenados. Son inevitables las preguntas ¿estos subconjuntos tienen un primer elemento?, ¿un último?, ¿existen elementos de $\mathbb{Q}$ que son mayores o menores que todos los elementos de esos subconjuntos? Estas interrogantes se responden definiendo los conceptos de: mínimo, máximo elemento, elemento maximal y minimal; cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de estos subconjuntos.

Si tenemos el conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < 2\}$, este conjunto es acotado superiormente en $\mathbb{Q}$, pero no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.
Se demuestra que sup $\mathrm{A} = \sqrt{2}$, pero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Aquí una muestra de que la estructura de orden de $\mathbb{Q}$, no puede explicar todas sus consecuencias.

Este impase es lo que llevó a R. Dedekind a construir $\mathbb{R}$ mediante cortaduras en $\mathbb{Q}$; partía de que “la esencia de la continuidad de un segmento no se debe a una vaga cohesión de sus puntos sino a una propiedad opuesta exactamente a este, la de división de un segmento en dos partes por un punto del segmento”.

En $\mathbb{Q}$ definimos el concepto de métrica a partir del valor absoluto de un número racional y este en base a la de orden. La métrica es: $d(p,q) = |p-q|$
$(\mathbb{Q},d)$ es un espacio métrico pero, "todo espacio métrico puede topologizarse", $(\mathbb{Q},d)$ adquieren la estructura topológica. En este espacio se estudia nociones de convergencia; la sucesión de números racionales puede converger a números racionales o no racionales.

2.3.10.2. ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE $\mathbb{R}$

i) Adición de dos o más números reales.

Definición: $+: \mathbb{R}x\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longrightarrow z\,;\ \ x+y=z$$

Axiomas:

A_1 : $\forall x, \forall y$: $x+y=y+x$

A_2 : $\forall x, \forall y, \forall z$: $(x+y)+z=x+(y+z)$

A_3 : $\exists!\, 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$: $x+0=x$

A_4 : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\exists!\,(-x) \in \mathbb{R}$: $x+(-x)=0$

ii) Multiplicación de dos o más números reales

Definición: $.: \mathbb{R}x\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

$$(x,y) \longrightarrow z\,;\quad xy=z$$

Axiomas:

M_1 : $\forall x, \forall y$: $xy=yx$

M_2 : $\forall x, \forall y, \forall z$: $(xy)z=x(yz)$

$M_3 \quad : \quad \exists!\, 1 \in \mathbb{R}\ , \forall x \in \mathbb{R} \quad : 1.x = x$

$M_4 \quad : \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\ , x \neq 0, \exists!\, x^{-1} \in \mathbb{R} \quad : \quad x.x^{-1} = 1$

$D \quad : \quad \forall x, \forall y\ , \forall z \quad : \quad x(\,y + z) = xy + xz$

iii) Relación de igualdad de dos números reales.

Asumimos a = b como concepto no definido o primitivo.

$I_1 \quad : \quad x = x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$I_2 \quad : \quad x = \ y \rightarrow \ y \ = x \ \ , \forall x, \forall y$

$I_3 \quad : \quad (x = y \ \wedge \ \ y = z) \ \rightarrow x = z \ \ , \forall x, \forall y, \forall z$

$I_4 \quad : \quad (x \in A \ \ \wedge \ \ \ x = y) \rightarrow y \in A$ (Principio de sustitución)

iv) Sustracción de los números reales.

Definición: x-y = x+ (-y)

v) División de los números reales

Definición: $\frac{x}{y} = \ x.y^{-1} \ ;\ y \neq 0$

Con la teoría expuesta, ya podemos construir elementos de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}\ y\ \mathbb{Q}$.

a. Los elementos de $\mathbb{N}$ se construyen a partir de $\mathbb{R}$, utilizando el axioma

   $M_3 \ \ (\exists 1 \ \in \mathbb{R}\ , \forall\, x \in \ \mathbb{R} : 1.x = x)$ y la definición de adición de los números reales, así tenemos que:

   $1 \in \ \mathbb{R} \rightarrow (1 + 1) = 2 \ \in \mathbb{R} \rightarrow (2 + 1) = 3 \ \in \mathbb{R}$, Así sucesivamente se tiene

   $\mathbb{N} = \{1,2,3, \ldots \ldots\}$ (se prueba inductivamente)

b. Los elementos $\mathbb{Z}$ se construyen a partir de $\mathbb{R}$, utilizando el axioma

   $A_4 \ \ (\forall\, x \in \ \mathbb{R}, \exists(-x) \ \in \mathbb{R} \quad : x + (-x) = 0)$

Así tenemos :

$1 \in \mathbb{R}, \exists(-1) \in \mathbb{R} : 1 + (-1) = 0$

$2 \in \mathbb{R}, \exists(-2) \in \mathbb{R} : 2 + (-2) = 0$

$3 \in \mathbb{R}, \exists(-3) \in \mathbb{R} : 3 + (-3) = 0$

Así sucesivamente (se prueba inductivamente) se tiene que

$\mathbb{Z} = \{0, \underline{+}\ 1, \underline{+}\ 2, \underline{+}3 \ldots.\}$

c. Los elementos de $\mathbb{Q}$ se construyen a partir de $\mathbb{R}$, utilizando el axioma M_4 $(\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \exists\, x^{-1} \in \mathbb{R} : x . x^{-1} = 1)$

Así tenemos que:

$1 \in \mathbb{R}, \exists 1^{-1} \in \mathbb{R} : 1 . 1^{-1} = 1$

$2 \in \mathbb{R}, \exists 2^{-1} = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{R} : 2 . 2^{-1} = 1$

$3 \in \mathbb{R}, \exists 3^{-1} = \dfrac{1}{3} \in \mathbb{R} : 3 . 3^{-1} = 1$

Y así sucesivamente (se prueba inductivamente) se tiene

$A = \left\{x : x = \dfrac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\right\}$

Utilizando la definición de multiplicación de los números reales, se obtiene los otros números racionales. Así tenemos que:

$\dfrac{1}{2} \in \mathbb{R} \wedge 3 \in \mathbb{R} \rightarrow \dfrac{3}{2} \in \mathbb{R}$

$-2 \in \mathbb{R} \wedge \dfrac{1}{5} \in \mathbb{R} \rightarrow \dfrac{-2}{5} \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{7} \in \mathbb{R} \wedge 4 \in \mathbb{R} \rightarrow \frac{-4}{7} \in \mathbb{R}$$

Así sucesivamente se construyen todos los elementos de $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ x : x = \frac{p}{q} \wedge p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

d. Las elementos de I: el conjunto de los números irracionales no es posible construir a partir de la estructura algebraica de $\mathbb{R}$, necesita de la estructura de orden de $\mathbb{R}$ y de axioma del supremo.

   A continuación enunciamos las propiedades más importantes de la estructura algebraica de $\mathbb{R}$, su demostración se sustenta en las definiciones y axiomas antes enunciados.

PROPIEDADES

1. $x = y \leftrightarrow x + z = y + z$
2. $x = y \rightarrow xz = yz$
3. $(xz = yz \wedge z \neq 0) \rightarrow x = y$
4. $(ax + b = 0 \wedge a \neq 0) \rightarrow x = -b.a^{-1}$ y es $único.$
5. $(x = y \wedge z = t) \rightarrow x + z = y + t$
6. $(x = y \wedge z = t) \rightarrow xz = yt$
7. $x.0 = 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$
8. $-(-x) = x$
9. $(-1)x = -x$
10. $(-x)(-y) = -xy$
11. $(-x)y = x(-y) = -xy$
12. $-(x + y) = -x - y$
13. $(x^{-1})^{-1} = x; x \neq 0$
14. $(x.y)^{-1} = x^{-1}.y^{-1}; x \neq 0, y \neq 0$
15. $x(y - z) = xy - xz$

16. $-(x-y) = y - x$

17. $-\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y} = \frac{x}{-y}; y \neq 0$

18. $xy = 0 \leftrightarrow x = 0 \lor y = 0$

19. $\frac{x}{y} + \frac{r}{s} = \frac{xs+yr}{ys}; y \neq 0, s \neq 0$

20. $\frac{x}{y} . \frac{r}{s} = \frac{xr}{ys}; y \neq 0, s \neq 0$

21. $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{r}{s}\right)} = \frac{xs}{ry}; y \neq 0,\ s \neq 0, r \neq 0$

22. $\frac{x}{y} - \frac{r}{s} = \frac{xs-yr}{ys}; y \neq 0, s \neq 0$

23. $\frac{x}{y} = \frac{r}{s} \leftrightarrow\ xs = yr;\ y \neq 0, s \neq 0$

24. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}; x \neq 0, y \neq 0$

25. $\frac{x}{y} = \frac{kx}{ky}; k \neq 0, y \neq 0$

26. $\frac{x}{y} = \frac{r}{s} \leftrightarrow \frac{x+y}{y} = \frac{r+s}{s}$; $\qquad y \neq 0,\ s \neq 0$

27. $\frac{x}{y} = \frac{r}{s} \leftrightarrow \frac{x-y}{y} = \frac{r-s}{s}$; $\qquad y \neq 0,\ s \neq 0$

28. $\frac{x}{y} = \frac{r}{s} \leftrightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{r+s}{r-s}$; $\qquad y \neq 0,\ s \neq 0, x \neq y,\ r \neq s$

29. $\frac{x}{y} = \frac{r}{s} \leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{x+r}{y+s}$; $\qquad y \neq 0,\ s \neq 0,\ y + s \neq 0,$

30. $\frac{x}{y} = \frac{s}{t} = \frac{m}{n} = \frac{e}{f} \rightarrow \frac{x+s+m+e}{y+t+n+f} = \frac{x}{y}$; $\quad y \neq 0,\ t \neq 0,\ n \neq 0,$

$f \neq 0, y+t+n+f \neq 0$

31. $\frac{x}{y} = \frac{r}{s} \leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{s}{r}$; $\quad y \neq 0,\ s \neq 0,\ x \neq 0,\ r \neq 0$

32. $\frac{x}{y} = \frac{r}{s} \leftrightarrow \frac{x}{r} = \frac{y}{s}$; $\quad y \neq 0,\ s \neq 0,\ r \neq 0$

vi) Potencia de un número real de exponente natural

$x \in \mathbb{R}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}$. La demostración de muchas propiedades se procede por inducción matemática.

PROPIEDADES:

1. $x^n . x^m = x^{n+m}$
2. $(x.y)^n = x^n . y^n$
3. $(x/y)^n = \frac{x^n}{y^n}$; $y \neq 0$
4. $(x^n)^m = x^{nm}$
5. $(x/y)^{-n} = (x/y)^n$; $y \neq 0,\ x \neq 0$
6. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
7. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$
8. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
9. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ $\pm$
10. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

11. $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}; \quad x \neq 0$

12. $x^2 = y^2 \leftrightarrow x = y \lor x = -y$

13. $x^m = x^n \leftrightarrow n = m; \quad x > 0, x \neq 1$

14. $x^n = y^n \leftrightarrow x = y; \quad x > 0,\ y > 0$

15. $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$

16. $(ax^2 + bx + c = 0\ \land a \neq 0\ \land (b^2 - 4ac) \geq 0) \leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

vii) Potencia de un número real de exponente 1/n

$x \in \mathbb{R}^+; n \in \mathbb{N}$

PROPIEDADES

1. $(x^{1/n})^{\frac{1}{m}} = x^{1/nm}$
2. $x^{1/n} = x^{m/nm}$
3. $(xy)^{1/n} = x^{1/n}.y^{1/n}$
4. $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{y^{\frac{1}{n}}}; \quad y \neq 0$
5. $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{-1}{n}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{n}};\ x \neq 0\ ,\ y \neq 0$
6. $(x^n)^{1/n} = x\ ;\ x > 0$
7. $(x^2 = a \land a > 0) \leftrightarrow x = \sqrt{a} \lor x = -\sqrt{a}$
8. $(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - y^{1/2}) = x - y$

2.3.10.3. ESTRUCTURA DE ORDEN DE $\mathbb{R}$

i) Relación de orden

Asumimos "$a < b$" (relación "menor que") como concepto no definido.

Axiomas:

O_1: $\forall x, \forall y, x < y \vee x = y \vee x > y$

O_2: $\forall x, \forall y, \forall z, (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < y$

O_3: $\forall x, \forall y, \forall z,\ x < y \rightarrow x + z < y + z$

O_4: $\forall x, \forall y, \forall z, (x < y \wedge z > 0) \rightarrow xz < yz$

Definición. $x \leq y \leftrightarrow (x < y \vee x = y)$

Propiedades. La relación $x \leq y$ es de orden, cumple con las propiedades siguientes:

1. $\forall x, x \leq x$
2. $\forall x, \forall y,\ (x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y$
3. $\forall x, \forall y, \forall z,\ (x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z$

$(\mathbb{R}, +, ., \leq)$ significa que $\mathbb{R}$ es un campo ordenado. Algunas propiedades de la relación de orden.

PROPIEDADES

1. $x + z < y + z \rightarrow x < y$
2. $x \leq y \leftrightarrow x + z \leq y + z$
3. $(x < y \wedge z < r) \rightarrow x + z < y + r$
4. $(x > y \wedge z > 0) \rightarrow xz > yz$
5. $(x > y \wedge z < r) \rightarrow x - z > y - r$
6. $x < y \rightarrow -x > -y$
7. $xy > 0 \rightarrow (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$
8. $xy < 0 \rightarrow (x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)$
9. $[(0 \leq x < y) \wedge (0 \leq z < r)] \rightarrow xz < yr$
10. $(\frac{x}{y} < 0 \wedge y \neq 0) \leftrightarrow xy < 0)$
11. $(\frac{x}{y} > 0 \wedge y \neq 0) \leftrightarrow xy > 0)$
12. $(x \geq y \geq 0) \rightarrow x^2 \geq y^2$
13. $(x^2 \geq y^2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0) \rightarrow x \geq y$
14. $(x^2 > a \wedge a \geq 0) \leftrightarrow (x < -\sqrt{a} \vee x > \sqrt{a})$
15. $(x^2 < a \wedge a \geq 0) \leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a})$
16. $0 < x < y \rightarrow x < \sqrt{xy} < y$
17. $0 < x < 1 \leftrightarrow x^2 < x < 1$
18. $0 < x < y \leftrightarrow x^{-1} > y^{-1} > 0$
19. $x < y < 0 \leftrightarrow 0 > x^{-1} > y^{-1}$
20. $(0 < x < y) \rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$

ii) Logaritmo de un número real positivo.

La definición la damos en base a la potencia.

Definición: $x > 0, a > 0, a \neq 1 \ \wedge \ \log_a x = y \ \leftrightarrow a^y = x$

PROPIEDADES:

1. $a^{\log_a x} = x$
2. $\log_a a = 1, \qquad \log_a 1 = 0$
3. $\log_a xy \ = \ \log_a x + \log_a y$
4. $\log_{a^c} x^b = \frac{b}{c} \log_a x\,;\ \ c \ \neq 0$
5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \ \ \ y \ \neq 0$
6. $\log_b x = \ \frac{\log_a x}{\log_a b} \ , a \ > 0, \ a \neq 1$
7. $\log_{\frac{a}{b}} x = \frac{\log_a x}{1 - \log_a b} \ , b > 0$
8. $\log_a x = \log_a y \leftrightarrow x = y$
9. $\log_{ab} x = \frac{\log_a x}{\log \frac{b}{a} + 1} \ ;\ ab > 0, ab \neq 1$
10. $a > 1 \wedge (\log_a x < \log_a y) \leftrightarrow x < y$
11. $0 < a < 1 \wedge (\log_a x < \log_a y \leftrightarrow x > y$

iii) Valor absoluto de un número real.

Definición: $\forall x : x \in \ \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$$

La definición se puede escribir de otra forma equivalente.

$|x| \equiv (x \geq 0 \wedge |x| = x) \vee (x < 0 \wedge |x| = -x)$

PROPIEDADES

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$
4. $-|x| \leq x \leq |x|$
5. $|xy| = |x||y|$
6. $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$
7. $|x| = \sqrt{x^2}$
8. $|x + y| \leq |x| + |y|$
9. $|x + y| = |x| + |y| \leftrightarrow xy \geq 0$
10. $(|x| = a \land a \geq 0) \leftrightarrow x = a \lor x = -a$
11. $|x| = |y| \leftrightarrow x = y \lor x = -y$
12. $|x - y| \leq |x| + |y|$
13. $(|x| \leq a \land a \geq 0) \leftrightarrow -a \leq x \leq a$
14. $(|x| \geq a \land a \geq 0) \leftrightarrow x \geq a \lor x \leq -a$
15. $\left||x| - |y|\right| \leq |x - y|$
16. $|x| \leq |y| \leftrightarrow (x + y)(x - y) \leq 0$
17. $|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$

2.3.10.4. CORRESPONDENCIA ENTRE $\boldsymbol{L}$ $\boldsymbol{y}$ $\mathbb{R}$

i) En geometría elemental, encontramos la siguiente proposición como postulado**:** "Es posible poner los puntos de una recta en correspondencia con los números reales, de tal manera que a todo número real le corresponde exactamente un punto de la recta y a todo punto le corresponde exactamente un número real" conocido como el postulado de la regla o de colocación de la regla.

Este postulado es el resultado de una serie de pasos que se sigue para establecer la correspondencia ente $L \ y \ \mathbb{R} \ (f\colon L \leftrightarrow \ \mathbb{R})$

1. Sea L una recta arbitraria , fijamos en ella un punto O (origen de coordenadas) tal que f(O)=0
2. El punto O divide a la recta L en dos semirrectas, llamamos a una de ellas positiva y a la otra negativa.
3. Asumimos, algún segmento como unidad de medida (OA)
4. A cada punto M de la recta L le corresponde la coordenada

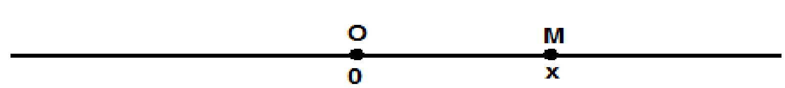
$$f(M) = x \ y \ \ |x| = \ \ OM.$$

El signo de x es determinado según la posición de M.

. si M está en la semirrecta positiva, $x > 0$

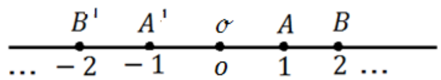
. si M está en la semirrecta negativa, $x < 0$

. Si M coincide con O, x=0



$$x > o \ \wedge \ M \ (x)$$

Finalmente, diremos que “cualquiera que sea el número x, existe sobre la recta exactamente un punto, cuya coordenada sea igual a x”. El resultado es la recta numérica real o sistema de coordenadas unidimensional.



A(1), B(2), A' (-1), B' (-2)

La recta numérica real tiene subconjuntos, los más comunes son los intervalos.

1. $[a, b] = \{x: x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
2. $[a,b\rangle = \{x: x \in R; a \leq x < b\}$
3. $\langle a,b] = \{x: x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$
4. $\langle a, b\rangle = \{x: x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$
5. $\langle a, \rightarrow\rangle = \{x: x \in \mathbb{R};\ x > a\}$
6. $\langle \leftarrow, b\rangle = \{x: x \in \mathbb{R};\ x < b\}$
7. $[a, \rightarrow\rangle = \{x: x \in \mathbb{R};\ x \geq b\}$
8. $\langle \leftarrow, b] = \{x: x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$

Algunos comentarios respecto de la correspondencia entre L y ℝ.

ii) La continuidad de la recta.

La continuidad de la recta está sustentada en dos axiomas, llamados de continuidad.

a. Postulado de Arquímedes ($\boldsymbol{f}: \boldsymbol{L} \to \mathbb{R}$)

Los axiomas anteriores a este postulado en la geometría elemental, no nos dan un procedimiento para medir la longitud de un segmento, es decir que a cada segmento no podemos asignarle un valor numérico de manera única.

El postulado de Arquímedes permite, eligiendo una unidad lineal, definir para cada segmento de manera única un número positivo, llamado la medida de este segmento; también nos permite la posibilidad de dividir una recta en segmentos de una medida dada.

Postulado de Arquímedes: sean $\overline{AB}\ y\ \overline{CD}$

Segmentos arbitrarios, entonces sobre el segmento $\overline{AB}$ existe un numero finito de puntos $A_1, A_2, , \dots A_n$ situados de tal manera que A_1 está entre $A\ y\ A_2$, A_2 está entre $A_1\ y\ A_3$, etc; tales que los segmentos $\overline{AA_1}, \overline{AA_2}, \dots, \overline{A_{n-1}\,A_n}$ son congruentes al segmento $\overline{CD}$ y B está entre $A\ y\ A_n$.

b. Postulado de Cantor ($\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \boldsymbol{L}$)

Los axiomas anteriores a este postulado, en la geometría elemental, no nos dan las herramientas para resolver el problema de asignar a cada número real un segmento de longitud al dado; el axioma de Cantor resuelve el impase.

Postulado de Cantor: Supongamos que en una recta arbitraria L se da un número indeterminado de segmentos $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2\,B_2}$ ... de los cuales cada uno está en el interior del precedente, supongamos además que cualquiera que sea un segmento prefijado $\overline{EF}$, existe un índice n para el cual el segmento $\overline{A_nB_n}$ es menor que $\overline{EF}$; entonces existe sobre la recta L un punto X que está en el interior de todos los segmentos.

Este postulado asegura la continuidad de la recta y este resultado nos da la posibilidad de establecer una correspondencia entre los números reales y la recta. Los axiomas de continuidad de Arquímedes y de Cantor, fundamentan la medida de segmentos y ponen en correspondencia cada segmento con un número positivo, llamado medida.

c. Infinitud de la recta.

La propiedad universal de los conjuntos infinitos enunciada por R. Dedekind es “un conjunto S de elementos se dice que en infinito si los elementos de un subconjunto propio S' de S pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con los elementos de S”, G. Cantor demostró que la recta es un conjunto infinito.

Teorema de Cantor. Los puntos de una recta se pueden poner en correspondencia uno a uno con los puntos de un segmento.

Gráficamente, se establece una correspondencia uno a uno entre los puntos del segmento $\overline{PQ}\ y\ la\ recta\ \overleftrightarrow{RS}$; condiciones.

1. $\overline{MN} \perp \overline{RS}$ en O

2. $\overline{PM} \parallel \overline{RS}\ y\ \overline{QN} \parallel \overline{RS}$

3. Todas las semirrectas que parten de M y cortan a $\overline{PO}$ cortan también a la semirrecta $\overrightarrow{OR}$.

4. Todas las semirrectas que parten en N y cortan a $\overline{OQ}$ cortan también a la semirrecta $\overrightarrow{OS}$.

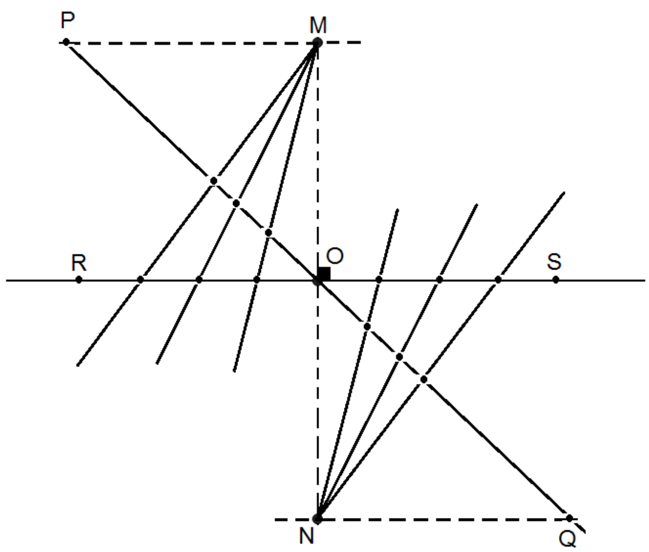


Figura 1. Teorema de Cantor

iii) La continuidad de R

La continuidad de los números reales está sustentada en el axioma del supremo y en el de Arquímedes.

a. Axioma del supremo: Todo conjunto no vacío de números reales que tenga una cota superior tiene supremo.

b. Postulado de Arquímedes.

   Si $x \in R$, existe un número natural $n \in N$, tal que $x < n$.

La continuidad de R, también puede determinarse con el postulado de los Encajes de intervalos.

Postulado de los encajes de intervalos. Si $I_1, I_2, I_3, \ldots$ forman una sucesión "encaje" de intervalos con puntos extremos racionales, existe un número real x que pertenece a todo I_n.

c. La infinitud de R

Aplicando la propiedad universal de los conjuntos infinitos a R, se demuestra que $f: (-1,1) \leftrightarrow R; \quad f(x) = \frac{x}{1-x^2}; x \in (-1,1)$ es una biyección. Por lo tanto, R es un conjunto infinito.

Todo lo expuesto es garantía de que $f: L \leftrightarrow R$.

Dedekind estableció la continuidad de R en otros términos, es como sigue (son teoremas que expresan propiedades):

1. $a, b, c, \in R.\ \ a > b\ \wedge b > c \rightarrow a > c.$ El número b esta entre a y c.
2. $a, c, \in R.\ y\ \ a \neq c \rightarrow$ existen infinidad de números reales diferentes entre a y c.
3. Si $\propto$ es un número determinado, entonces todos los números del sistema de los reales R son de dos clases $V_1\ y\ V_2$; cada una de las cuales contiene infinitos números.

   La primera clase contiene todos los números x que son menores que $\propto$ pueden asignarse a voluntad.

4. Si el sistema de los números reales R se divide en dos clases $V_1 \ y \ V_2$, tales que la primera clase contiene todos los números x que son menores que $\propto$, y la segunda clase todos los números y que son mayores que $\propto$, entonces existe un numero único $\propto$, que puede generar esta separación (cortaduras)

2.3.10.5. COMPLETITUD DE R

Hasta esta parte se han estudiado las propiedades algebraicas y de orden de R.

Q satisface estas propiedades, pero existen números que no son racionales; se requiere de una propiedad adicional para introducirlos, esta propiedad se llama de completitud o continuidad. Una versión de esta propiedad es el axioma del supremo (" todo conjunto no vacío y acotado superiormente de números reales tiene supremo"); las otras versiones dependen del método de construcción de R.

Aquí las otras versiones.

a. Toda cortadura en R o todo par de clases contiguas tienen frontera.
b. Toda sucesión de intervalos (segmentos cerrados) encajados en R tiene intersección no vacía.
c. Toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente.

   La propiedad de continuidad es una característica esencial de R y es radicalmente diferente a los axiomas algebraicos y de orden (no es consecuencia de ellos).

Mencionamos algunas utilidades del axioma del supremo (versión que asumimos en el presente trabajo).

1. El axioma del supremo distingue el sistema de los números reales R de los racionales (Q).
2. Es necesario para establecer la correspondencia entre L y R.
3. Sirve para demostrar la existencia de la raíz cuadrada de un número real positivo $(x^2 = a \wedge a \geq 0)$
4. Se utiliza para demostrar que N no está acotado superiormente.
5. Sirve para demostrar la propiedad arquimediana de R (propiedad fundamental para la teoría de la medición).
6. Se utiliza para demostrar la densidad de Q en R, fundamental para estudiar las funciones.
7. Se usa para estudiar la continuidad de las funciones reales.
8. Este axioma (axioma de supremo) permite introducir los números irracionales en R.
9. Sirve para demostrar el principio de los intervalos encajados, enunciado por B. Bolzano en 1817.

10. El axioma del supremo explica la continuidad de los puntos de la recta, la circunferencia, etc.

11. En geometría sirve para estudiar la intersección de una recta y una circunferencia; y de la circunferencia entre sí.

12. Sobre el axioma del supremo y el principio de Arquímedes se ha construido toda la teoría de la medición de las magnitudes geométricas.

13. Todas las construcciones geométricas, hechas con regla y compás se apoyan en este axioma (axioma del supremo).

14. El cuerpo de los números reales con el axioma del supremo constituye la columna vertebral de los espacios métricos.

15. Sirve para contestar a la pregunta ¿existe un campo ordenado completo que contenga a Q?

Algunas definiciones básicas, antes del enunciado del axioma del supremo y su utilidad en la demostración:

a. Cotas superiores e inferiores de un subconjunto de R.

   Definición: sea $A \subset R, u \in R$ es una cota superior de A,

   si $u \geq x;\ \forall x \ \in A$ (se dice que A está acotado superiormente).

   Definición: sea $A \subset R, s \in R$ es una cota inferior de A,

   si s $\leq x;\ \forall x \ \in A$ (se dice que A está acotado inferiormente).

b. Máximo y mínimo de un subconjunto de R.

   Definición: Sea $A \subset R, r \in A$ es un elemento mínimo de A,

   si $r \leq x;\ \forall x \in A$

   Definición: sea $A \subset R,\ t \in A$ es un elemento máximo de A,

   si $x \ \leq t,\ \forall x \ \in A$

c. Supremo e ínfimo de un subconjunto de R

1. Supremo de A.

Definición 1: Sea $A \subset R,\ A \neq \emptyset$; si A esta acotado superiormente, la mínima de las cotas superiores se llama supremo.

Definición 2: Sea $A \neq \emptyset\ A \subset R, u \in R; u = Sup\ A,$ sii

I. $x \leq u;\ \forall\ x \in A$

II. $x \leq v;\ \forall\ x \in A \rightarrow u\ \leq v$

Definición 3: Sea $A \subset R;\ A \neq \emptyset\ ; u = \sup A,$ sii

I. $x \leq u;\ \forall\ x \in A$

II. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in A){:}\ u{-}{\in}{<}\ x_0\ ;\ \ \varepsilon\ \in R$

2. Ínfimo de A.

Definición 1: Sea $A \subset R,\ A \neq \emptyset$; si A está acotado inferiormente, el máximo de las cotas inferiores se llama ínfimo de A.

Definición 2: Sea $A \subset R,\ A \neq \emptyset\ ; s \in R;\ \ s = infA,$ sii

I. $s \leq x;\ \forall\ x \in A$

II. $t \leq x;\ \forall\ x \in A \rightarrow t\ \leq s$

Definición 3: Sea $A \subset R;\ A \neq \emptyset\ ; s = infA,$ si

I. $s \leq x;\ \forall\ x \in A$

II. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_0 \in A){:}\ x_0 < \varepsilon + s\ \ \ (\varepsilon \in R)$

AXIOMA DEL SUPREMO:

“Si todo conjunto $A \neq \emptyset\ y\ A \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente, entonces tiene supremo”.

Algunos teoremas que requieren del axioma del supremo para su demostración.

Teorema: N no está acotado superiormente.

Demostración:

1. Suponemos que N está acotado superiormente $N = \{1,2,3, \dots, n\}$
2. Sup N= b (axioma del supremo)
3. $b - 1 < b$ $(\forall\, x \in R: x - 1 < x)$
4. b−1 no es cota superior de N. (def. de supremo)
5. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N: b - \varepsilon < n_0)$ (def. 3 de supremo)
6. $\varepsilon = 1 \wedge b - 1 < n_0$ (PS)
7. $b < (n_0 + 1) \wedge (n_0 + 1) \in N \wedge (n_0 + 1)$ es cota superior de N.
8. $(n_0 + 1) \in N \wedge (n_0 + 1) \notin N$ (contradicción)
9. N no está acotado superiormente.

Teorema. Si $A \subset R,\ A \neq \emptyset,$ acotado inferiormente, entonces A tiene ínfimo.

Demostración.

1. $A \subset R,\ A \neq \emptyset\ \wedge A$ acotado inferiormente. (hip.)
2. $A = \{x: s \leq x;\ \forall x \in A\},$ (definición de cota inferior)
3. $-A = \{-x: -x \leq -s;\ \forall x \in A\},$ (definición del conjunto (-A))

4. A está acotado superiormente; (definición de cota superior)
5. –u= Sup(-A); (axioma del supremo)
6. –(-u)=inf(-(-A)); (teorema. Si c=Sup A, entonces –c= inf(-A))
7. u=inf(A)
8. A tiene ínfimo.

Teorema. Si A $\subset R,\ A \neq \emptyset\ y$ acotado superiormente y sea a $\in R$ tal que $a + A = \{a + x : x\ \in A\}$, entonces Sup (a+A)= a + SupA.

Demostración.

1. $A \subset R,\ A \neq \emptyset\ \wedge A$ acotado superiormente. (hip.)
2. $A = \{x : x\ \in R\} \wedge A$ acotado superiormente. (def. del conjunto A)
3. Sup A = u; (axioma del supremo)
4. $A = \{x : x\ \leq u;\ \forall x\ \in A\}$, (def. del conjunto acotado)
5. $a + A = \{a + x : a + x \leq a + u;\ \forall x\ \in A\}$; (definición del conjunto a +A y A acotado superiormente.)
6. a +A está acotado superiormente; (definición de cota superior)
7. a+A tiene supremo; (axioma del supremo).
8. Sup(a+A)$\leq a + u$; (definicion de supremo).
9. Sea v cualquier cota superior de a+A; (definición de cota superior).
10. $a + A = \{x + a : a + x \leq v\ ;\ \forall x\ \in A\}$; (definición de cota superior).
11. $a + A = \{x + a : x \leq v - a\ ;\ \forall x\ \in A\}$

12. v-a es cota superior de A; (definición de cota superior).

13. Sup A = $u \leq v - a$; (definición de cota superior).

14. $u + a \leq v \wedge u + a$ es la menor cota superior de a + A

15. $u + a = Sup\ (a + A) \wedge Sup\ (a + A) \leq a + u\ \wedge u = Sup\ A$.

16. $Sup\ (a + A) = a + u\ \wedge u = Sup\ A$.

17. $Sup\ (a + A) = a + Sup\ A$.

Teorema: Propiedad arquimediana.

Si $x \in R$, entonces existe $n \in N: x\ < n$

1. Suponiendo $n < x; \forall n \in N\ \wedge x \in\ R$:
2. x es una cota superior de N (N está acotada superiormente).
3. Sup N=u; (axioma del supremo).
4. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in N): u - \varepsilon < m$; (definición 3 de supremo).
5. $\varepsilon = 1\ \wedge u - 1 < m$
6. $u < m + 1\ \wedge (m + 1)\ \in N$
7. $(m + 1) \notin N\ \wedge (m + 1) \in N$; (contradicción)
8. $(\forall x \in R)(\exists n \in N): x < n$

Teorema: Propiedad arquimediana (otra versión).

$y \in R \wedge x > 0 \wedge\ \exists n \in N: nx > y$

1. $y \in R \wedge x > 0 \wedge \exists n \in N$ (hip.)
2. $\frac{y}{x} \in R \wedge \exists n \in N$ (def. de división)
3. $n > \frac{y}{x}$; (propiedad arquimediana)
4. $nx < y$
5. $1 + nx < ny$
6. $x \in \mathbb{R} \wedge x > 0 \wedge \ nx > 0$; (propiedad arquimediana)
7. $nx \in \mathbb{R} \wedge nx > 0 \ \exists \ m \in N \wedge m - 1 \leq \ nx < m$

   (teorema. $\forall b \in R \wedge b > 0, existe\ un\ entero\ m\ tal\ que\ 1 \leq b < m$)
8. $m \leq nx + 1 < m + 1 \wedge 1 + nx < ny$
9. $m \leq nx + 1 \wedge nx + 1 < ny \ \wedge nx + 1 < m + 1$

   $(teor. a \leq b < c \rightarrow a \leq b \wedge b < c)$
10. $m < ny \wedge nx \ < m$

    $(ax. \ (a < b \wedge b < c) \leftrightarrow a < c)$
11. $nx < m \wedge m < ny$
12. $nx < m < ny; (teor. a < b \wedge b < c) \leftrightarrow a < b < c\ )$
13. $x < \frac{m}{n} < y \wedge r = \frac{m}{n}$
14. $x < r < y; \exists r \in \mathbb{Q}$

Teorema: Densidad de Q en R

$(x, y \in R \wedge x < y) \rightarrow \ \exists r \in Q \wedge x < r < y$

1.$x, y \in R \wedge x < y$

2.$(y-x) \in R \wedge y-x>0$

3. $\frac{1}{y-x} \in R \wedge \frac{1}{y-x}>0$

4. $n>\frac{1}{y-x}$; (propiedad arquimediana)

5. $1+nx<ny$

6. $x \in \mathbb{R} \wedge x>\wedge \quad nx>0$; (propiedad arquimediana)

7. $nx \in \mathbb{R} \wedge nx>0 \; \exists \; m \in N \wedge m-1 \leq \quad nx<m$

(teorema. $\forall b \in R \wedge b>0, existe \; un \; entero \; m \; tal \; que \; m-1 \leq b<$

$m)$

8.$m \leq nx+1<m+1 \wedge 1+nx<ny$

9. $m \leq nx+1 \wedge nx+1<ny \;\; \wedge nx+1<m+1$

$(teor. a \leq b<c \rightarrow a \leq b \wedge b<c)$

10. $m<ny \wedge nx \;\; <m$

$(ax. \; (a \leq b \wedge b<c) \leftrightarrow a<c)$

11. $nx<m \wedge m<ny$

12. $nx<m<ny; (teor. a<b \wedge b<c) \leftrightarrow a<b<c \;)$

13. $x<\dfrac{m}{n}<y \wedge r=\dfrac{m}{n}$

14.$x<r<y; \exists r \in \mathbb{Q}$

2.3.10.6. R COMO ESPACIO MÉTRICO.

i) Si R tiene la estructura de espacio métrico es posible definir el concepto de vecindad o entorno de un número real; luego se puede definir el de conjunto abierto y punto de acumulación.

Antes de definir a R como espacio métrico, definimos el concepto de distancia o métrica.

Definición. Sea E un conjunto cualquiera, $E \neq \emptyset$ una métrica d en E es una función (función distancia):

$d: ExE \rightarrow R$

$(x, y) \rightarrow d(x, y)$

d es una distancia o la proximidad entre los puntos del conjunto E, que cumple lo siguiente:

1. $d(x, y) \geq 0; \ \forall\, x, y \ \in E$
2. $d(x, y) = 0; \leftrightarrow \ x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x); \ \forall\, x, y \ \in E$
4. $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y); \ \forall\, x, y, z \ \in E$

Si d es una métrica, $d(x, y)$ se llama distancia entre los puntos x e y.

Consideramos $E = R \quad y \quad d(x, y) = \ |x - y|$ llamada métrica euclidiana o usual. En R pueden definirse diversas métricas.

A continuación demostramos que $d(x,y) = |x-y|$ es una métrica, utiliza las propiedades del valor absoluto de un número real.

1. $d(x,y) \geq 0; \ \forall\, x,y \in R$

   $|x-y| \geq 0; |x| \geq 0; \ \forall\, x \in R$

2. $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$

   $|x-y| = 0 \leftrightarrow x - y = 0$

   $|x-y| = 0 \leftrightarrow x = y$

   $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$

3. $d(x,y) = d(y,x); \ \forall\, x,y \in R$

   $d(x,y) = |x-y|$

   $|x-y| = |(-1)(y-x)|$

   $|(-1)(y-x)| = |y-x|$

   $|y-x| = d(y,x)$

   $d(x,y) = d(y,x)$

4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y); \ \forall\, x,y,z \in E$

   $d(x,y) = |x-y|$

   $|x-y| = |x+z-z-y|$

   $|x+z-z-y| = |(x-z)+(z-y)|$

   $|(x-z)+(z-y)| \leq |x-z| + |z-y|$

   $|x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$

   $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

(R, //) es un espacio métrico.

ii) Vecindad o entorno en R.

Definición. Sea (R, //) un espacio métrico, $a \in \mathbb{R}\ y\ \delta > 0\ (\delta \in R)$.

Una vecindad o entorno de a con radio δ se define:

$$\sqrt{}(a, \delta) = \{x : x \in R \wedge d(x, a) < \delta\}$$

$$= \{x : x \in R \wedge |x - a| < \delta\}$$

$$= \{x : x \in R \wedge -\delta < x - a < \delta\}$$

$$= \{x : x \in R \wedge a - \delta < x < a + \delta\}$$

$$\sqrt{}(a; \delta) = \{x : x \in R \wedge x \in \langle a - \delta, a + \delta\} = \langle a - \delta, a + \delta\rangle$$

Es decir, una vecindad de a y radio δ es el intervalo abierto $\langle a - \delta, a + \delta\rangle$

Ejemplo 1: Dada la vecindad $\sqrt{-3; 2}$, hallar el intervalo abierto correspondiente.

$$\sqrt{}(-3; 2) = \{x : x \in R \wedge d(x, -3) < 2\}$$

$$= \{x : x \in R \wedge |x + 3| < 2\}$$

$$= \{x : x \in R \wedge -2 < x + 3 < 2\}$$

$$\sqrt{}(-3; 2) = \{x : x \in R \wedge -5 < x < -1\} = \langle -5; -1\rangle$$

Ejemplo 2: Dado el intervalo $I = \langle 4,7\rangle$, hallar la vecindad correspondiente.

$I = \langle a, b \rangle = \sqrt{(}x_0; \delta)$

$\delta = \frac{b-a}{2} = \frac{|a-b|}{2}$

$x_0 = \frac{a+b}{2}$

Si $\quad I = \langle 4{,}7 \rangle$

$$\delta = \frac{7-4}{2} = \frac{3}{2}$$

$x_0 = \frac{4+7}{2} = \frac{11}{2}$

$$\sqrt{(}\frac{11}{2}; \frac{3}{2})) = \langle 4{,}7 \rangle$$

iii) Bola cerrada en R.

Definición. Sea (E, d) un espacio métrico, donde $a \in E\ y\ \delta > 0\ (\delta \in R)$.

Una bola cerrada con centro en a y radio δ se define:

$\bar{B}\ (a, \delta) = \{x: x \in E \wedge d(x, a) \leq \delta\}$

Si $E = R\ y\ d(x, y) = |x - y|$ la bola cerrada en R se define.

$\bar{B}\ (a, \delta) = \{x: x \in R \wedge |x - a| \leq \delta\}$

$\quad = \{x: x \in R \wedge -\delta \leq x - a \leq \delta\}$

$= \{x: x \in R \wedge a - \delta \leq x \leq a + \delta\}$

$\bar{B}\ (a, \delta) = \ [a - \delta, a + \delta]$

Es decir una bola cerrada en R de centro a y radio δ es el intervalo cerrado $[a - \delta, a + \delta]$

iv) Esfera en R.

Definición. Sea (E, d) un espacio métrico, donde $a \in E\ y\ \delta > 0\ (\delta \in R)$.

Una esfera con centro en a y radio δ se define:

$S(a, \delta) = \{x: x \in E \wedge d(x, a) = \delta\}$

Si $E = R\ y\ d(x, y) = |x - y|$ la esfera se define.

$S(a, \delta) = \{x: x \in R \wedge d(x, a) = \delta\}$

$= \{x: x \in R \wedge |x - a| = \delta\}$

$= \{x: x \in R \wedge x - a = \delta \vee x - a = -\delta\}$

$= \{x: x \in R \wedge x = a + \delta \vee x = a - \delta\}$

$S(a, \delta) = \ \{a + \delta, a - \delta\}$

La esfera en R es un conjunto de dos punto; estos puntos son el extremo (frontera) de un intervalo cerrado.

v) Conjunto abierto en R.

Definición. Sea (E,d) un espacio métrico, y $A \subset E$; se dice que A es un conjunto abierto si: $\forall x \in A, \exists \delta > 0\ (\delta \in R)$ tal que $\surd(x, \delta) \subset A$

Si $E = R\ y\ d(x,y) = |x - y|$ el conjunto abierto se define:

$A \subset R$ es un conjunto abierto si $\forall x \in A, \exists \delta > 0\ (\delta \in R)$: $\surd(x, \delta) \subset A$

vi) Conjunto derivado en R.

Definición. Sea (E,d) un espacio métrico, y $A \subset E$. Un punto $p \in E$ es un punto de acumulación o punto límite de A, si todo conjunto abierto G contiene un punto de A, diferente de p. Esto es, si G abierto y $p \in G$, entonces $A \cap (G - \{p\}) \neq \emptyset$

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A (A') se llama conjunto derivado.

Si $E = R\ y\ d(x,y) = |x - y|$ el punto de acumulación se define.

$A \subset R,$ un punto $p \in R$ es un punto de acumulación o límite de A si todo conjunto $\mathcal{U}$-abierto tal que $p \in \mathcal{U}$- abierto contiene un punto de A, diferente de p, es decir, si $\mathcal{U}$-abierto y $p \in \mathcal{U}$- abierto, entonces

$A \cap (\mathcal{U} - abierto - \{p\}) \neq \emptyset$

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A (A′) se llama conjunto derivado.

Del espacio métrico (R, //) diremos lo siguiente:

1. El espacio métrico (R, //), constituye el fundamento matemático real indispensable e inmediato para un estudio riguroso del análisis matemático real.
2. En el espacio métrico (R ,//) se puede hablar de la distancia (proximidad) entre los elementos de R.
3. Un modelo intuitivo de espacio métrico es la recta L y el plano P.
4. En R puede definirse diversas métricas.
5. Como “todo espacio métrico puede topologizarse”, entonces R adquiere una estructura topológica.

   El cuerpo de los números reales constituye la columna vertebral de la topología de espacio métrico (en este caso, R como espacio métrico) y muchos conceptos topológicos son abstracciones de propiedades del conjunto de los números reales:este ayuda a estudiar con propiedad las funciones reales continuas.

2.3.10.7. ESTRUCTURA TOPOLÓGICA DE R.

Los conceptos básicos que se necesitan para definir la estructura topológica de R es la de vecindad y conjunto $u - abierto$.

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto formado por la colección de todos los subconjuntos de R que son $u - abiertos$ y que cumplen las siguientes condiciones:

1. $R\ y\ \emptyset\ \ son\ \ u - abiertos$
2. La unión de cualquier número de $u - abiertos$ de R es $u - abierto.$
3. La intersección de cualquier número finito de $u - abierto$ de R es $u - abierto.$

$\mathcal{U}$ con las propiedades (1), (2) y (3) antes mencionadas es una topología de R. la topología u se llama topología usual o normal de R; es por la métrica usual o euclidiana

$d(x, y) =, |x - y|,$ que sirve para definir la vecindad y conjunto abierto en R.

$(R,\ \mathcal{U}\ )$ es un espacio topológico usual de R, por eso se dice que R tiene una estructura topológica.

2.3.11. Funciones reales de variable real

2.3.11.1. FUNCIONES REALES

Cuando encontramos expresiones como “las funciones son verdaderamente fundamentales para las matemáticas” o que “el concepto de función es central en todo el análisis matemático y en sus aplicaciones”, al concepto de función debe dársele la importancia necesaria.

Una función es una relación entre dos conjuntos, es decir es un subconjunto de A x B.

No toda relación es una función; una relación entre A y B es una función si “a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B”.

En toda función intervienen dos conjuntos A y B, y "una regla de correspondencia *f* ", se puede decir que una función es una terma ordenada (A, B, *f*). Los elementos de los conjuntos A y B pueden ser: números, puntos, rectas, vectores, polígonos, sólidos, matrices, etc. Los conjuntos A y B pueden ser finitos o infinitos.

Si los elementos de los conjuntos A y B son números (en nuestro caso, números reales), la regla de correspondencia, generalmente son ecuaciones $E(x,y)=0$. No toda ecuación es regla de correspondencia de una función.

La definición de función se puede dar verbalmente (lenguaje natural), así por ejemplo:

Una función real f es todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$, que cumple con la condición de que "dos pares distintos del subconjunto no pueden tener igual la primera componente".

La definición de función se puede dar teniendo en cuenta su gráfica, así tenemos: si la ecuación E(x, y)=0 está representada gráficamente, es función si "ninguna recta vertical puede intersectar a la gráfica que representa en más de un punto". También podemos decir que: "una función es una regla que asigna a cada uno de ciertos números reales un único número real".

Cuando se estudia las funciones, se debe tener en cuenta los siguientes conceptos: dominio de la función (dom(f), el rango de la función (ran(f)), la regla de correspondencia F(x, y)=0 o y= f(x)) y la gráfica (graf(f)).

A continuación, vamos a mencionar algunos hechos prácticos que requieren del uso del concepto de función para comprenderlos.

Se puede contar ríos, dinero, años, los dedos, etc. Si A es el conjunto de estos objetos y $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, el proceso de contar es una correspondencia entre los elementos del conjunto A y N.

Se puede identificar calles, viviendas, planetas, ríos, etc. Si C es el conjunto de las calles de una ciudad y M el conjunto de nombres, el proceso de identificar las calles es mediante la correspondencia entre los elementos de C y M.

En geometría se calcula la medida de la longitud de un segmento, el área de una región plana o el volumen de un sólido; este proceso se da mediante una correspondencia, así por ejemplo:

Si A es el conjunto de las regiones cuadradas del plano, x es el lado de la región cuadrada y $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, el área es una función entre los conjuntos A y $\mathbb{R}$.

Si se quiere registrar la población de un país por cada año es mediante una correspondencia entre dos conjuntos, los años y la población por cada año. Se puede continuar presentando casos donde los elementos de dos conjuntos se corresponden; así tenemos: el costo C para enviar por correo una carta de primera clase depende de su peso W. Una tabla de potencias de los números naturales. Lanzar un dado y registrar el universo de su resultado. Las tablas de sumar, de multiplicar números naturales. Las tablas trigonométricas. Una gráfica en el plano cartesiano, hace corresponder números reales.

Un caso importante del uso de las funciones es cuando la matemática trata de estudiar un fenómeno del mundo real; el proceso de representar mediante ecuaciones, un hecho real, se llama modelación matemática.

El modelo matemático es una descripción matemática (a menudo por medio de una ecuación o función) de un fenómeno del mundo real; así, por ejemplo, el tamaño de una población, la demanda de un producto, la velocidad de un objeto que cae, la concentración de un producto en una reacción química.

La estructura de un modelo es, aproximadamente como sigue:

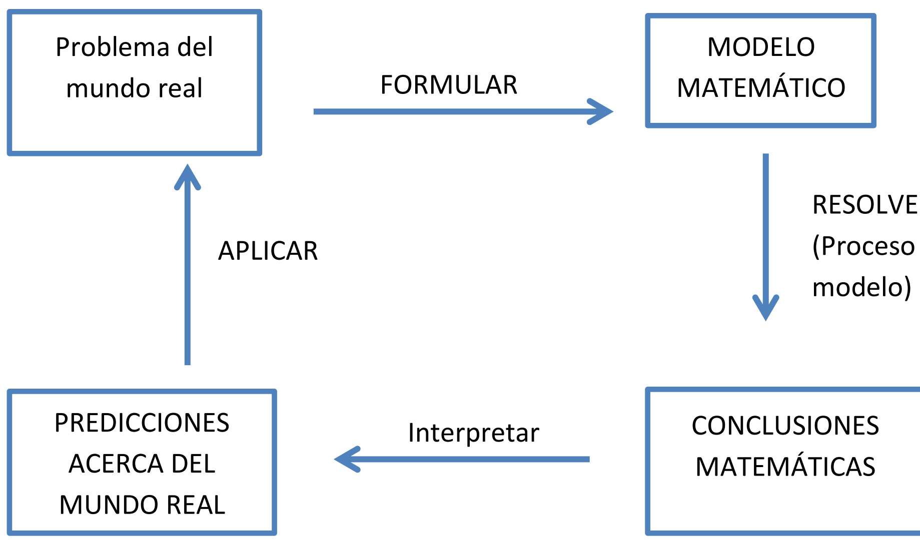


Figura 2. Estructura de un modelo. Fuente: Enríquez y Fiol (1985, p.18)

Las formas más comunes de representar las funciones son:

1. Verbalmente: La correspondencia entre los elementos se describe mediante palabras.
2. Numéricamente: Mediante tablas de valores numéricos.
3. Visualmente: Mediante gráficos y diagramas
4. Algebraicamente: Mediante ecuaciones o fórmulas explícita o implícitamente. Esta es la opción que asume el presente trabajo.
5. Mediante serie de números reales.

Algunas definiciones:

Definición. Sean los conjuntos $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B \subseteq \mathbb{R}$. Una función f de A en B ($\mathrm{f: A \rightarrow B}$) es una relación de A en B con la propiedad de que para cada $x \in A$, existe un $y \in B$ único, tal que $(x, y) \in f$, es decir $y = f(x)$.

Definición. Sean $f: A \rightarrow B$ una función real de variable real, el dominio, el rango, la gráfica y la regla de correspondencia se definen como sigue:

1. $dom(f) = \{x \in A: \exists y \in B \wedge y = f(x)\}$
2. $ran(f) = \{f(x): x \in dom\ (f)\}$
3. $r.c: y = f(x)$
4. $graf(f) = \{(x\ f(x)): x \in dom\ (f)\}$
5. Gráfica en el plano cartesiano.

2.3.11.2. FUNCIONES REALES BÁSICAS

Definición. Una función real f es básica si su regla de correspondencia (ecuación) no considera la operación de adición y sustracción en su construcción. Se considera 26 funciones básicas. Las otras funciones se construyen utilizando las funciones básicas y las operaciones básicas con funciones.

A continuación, se describe cada una de ellas.

i) Función identidad: $f(x) = x$ ó $y = x$

- $dom(f) = \mathbb{R}$

- $ran(f) = \mathbb{R}$
- $r.c: y = x$
- $\text{graf}(f) = \{(x, x): x \in \mathbb{R}\}$

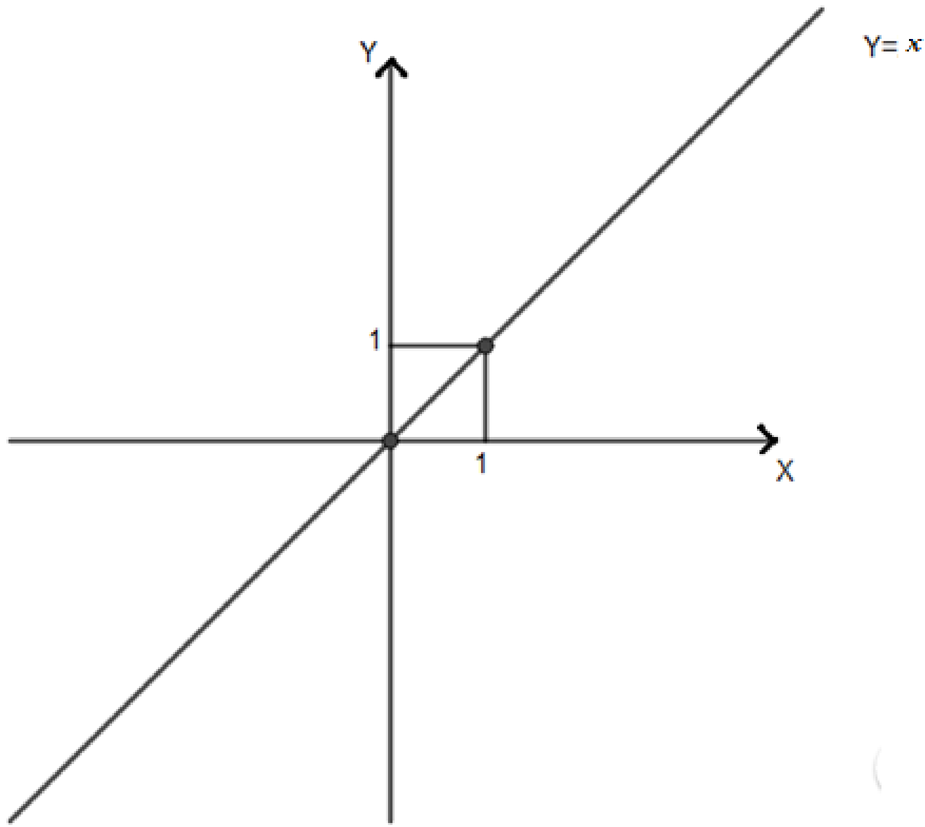


Figura 3. Gráfica de función identidad

ii) Función constante: $f(x) = k$ ó $y = k$

k es un número real .

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = \{k\}$
- $r.c: y = k$
- $\text{graf}(f) = \{(x, k): x \in \mathbb{R}\}$

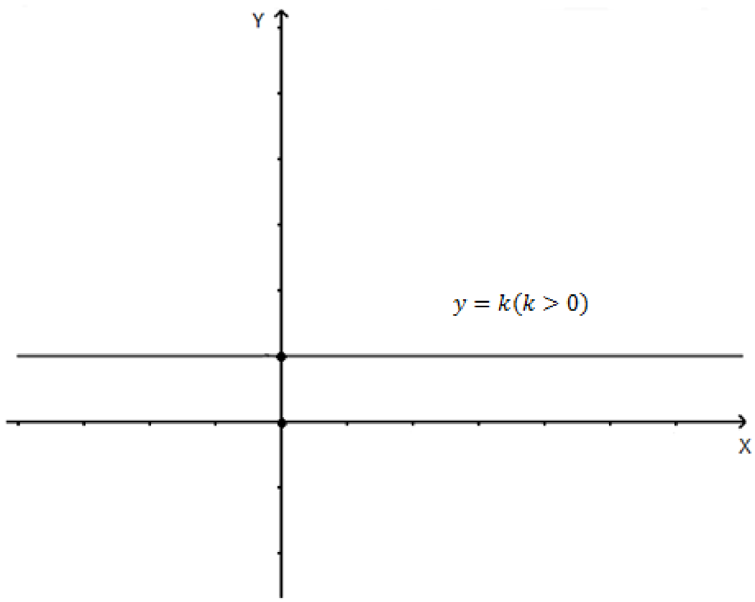


Figura 4. Gráfica de función constante

iii) Función cuadrática: $f(x) = x^2$ ó $y = x^2$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = [0, +\infty\rangle$
- $r.c: y = x^2$
- $\text{graf}(f) = \{(x, x^2): x \in \mathbb{R}\}$

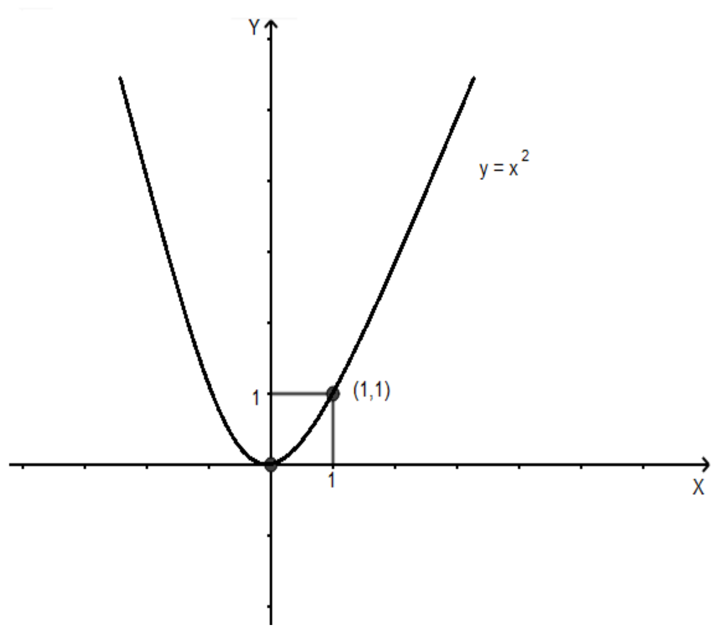


Figura 5. Gráfica de función cuadrática

iv) Función cúbica: $f(x) = x^3$ ó $y = x^3$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = \mathbb{R}$
- $r.c: y = x^3$
- $\text{graf}(f) = \{(x, x^3): x \in \mathbb{R}\}$

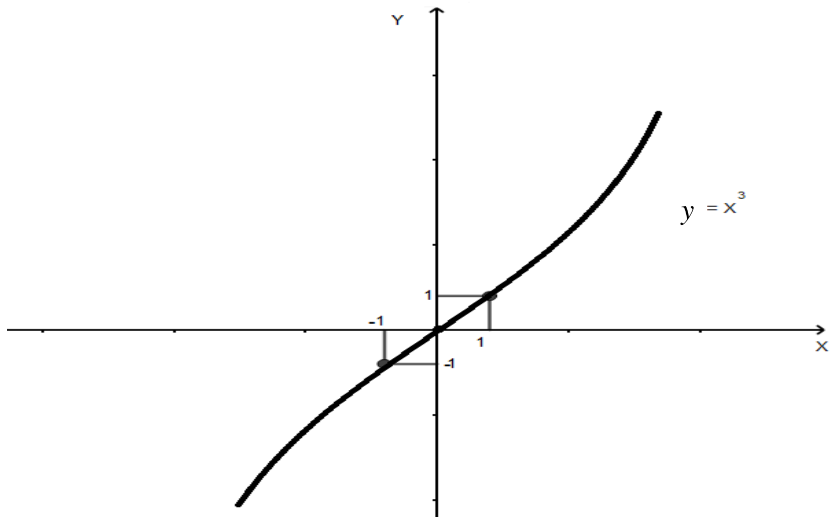


Figura 6. Gráfica de función cúbica

v) Función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$ ó $y = \sqrt{x}$

- $dom(f) = [0, +\infty\rangle$
- $ran(f) = [0, +\infty\rangle$
- $r.c: y = \sqrt{x}$
- $\text{graf}(f) = \{(x, \sqrt{x}): x \in [0, +\infty\rangle\}$

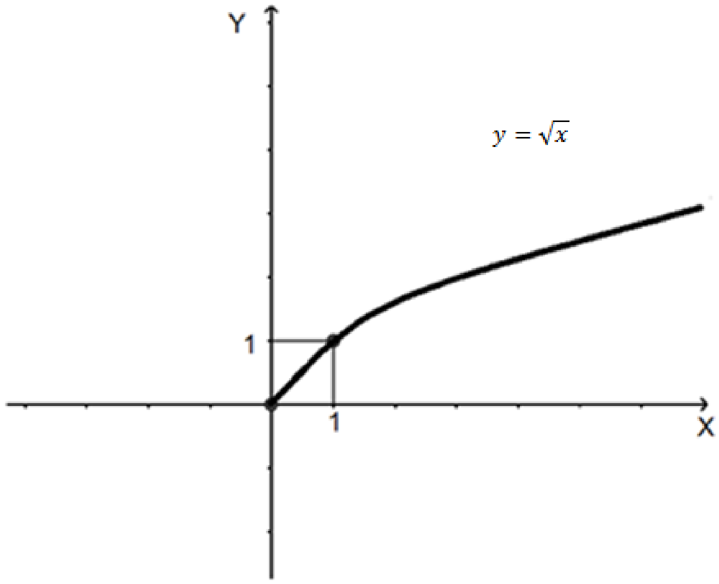


Figura 7. Gráfica de función raíz cuadrada

vi) Función raíz cúbica: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ó $y = \sqrt[3]{x}$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = \mathbb{R}$
- $r.c: y = \sqrt[3]{x}$
- $\text{graf}(f) = \{(x, \sqrt[3]{x}): x \in \mathbb{R}\}$

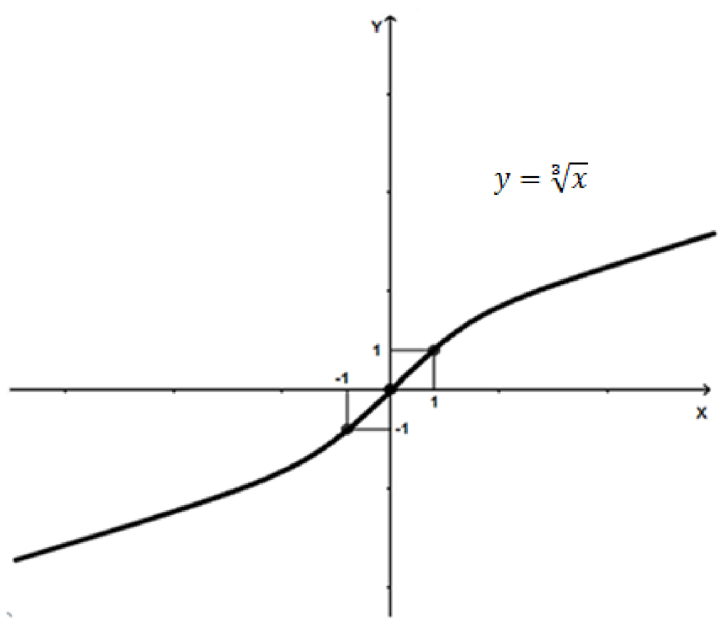


Figura 8. Gráfica de función raíz cúbica

vii) Función valor absoluto: $f(x) = |x|$ ó $y = |x|$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = [0, +\infty\rangle$
- $r.c: y = |x|$
- $\text{graf}(f) = \{(x, |x|): x \in \mathbb{R}\}$

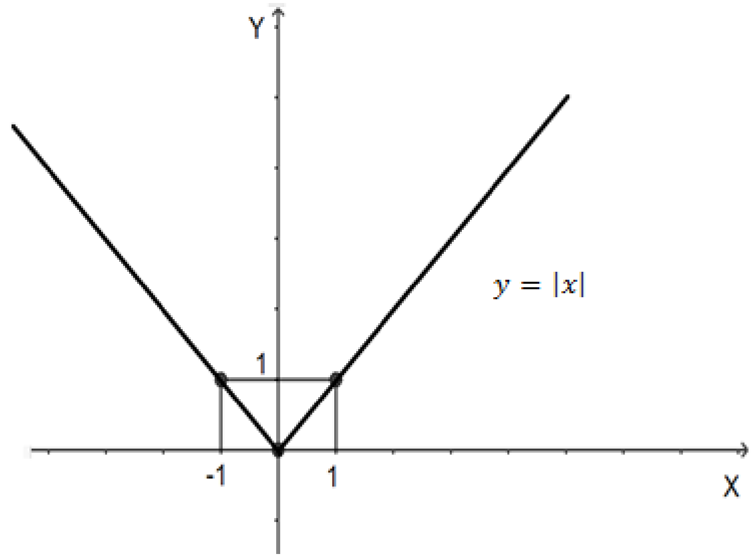


Figura 9. Gráfica de función valor absoluto

viii) Función racional: $f(x) = \frac{1}{x}$ ó $y = \frac{1}{x}$

- $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $ran(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $r.c: y = \frac{1}{x}$
- $\text{graf}(f) = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right): x \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$

Asíntota vertical (A.V.): $x = 0$

Asíntota horizontal (A.H): $y = 0$

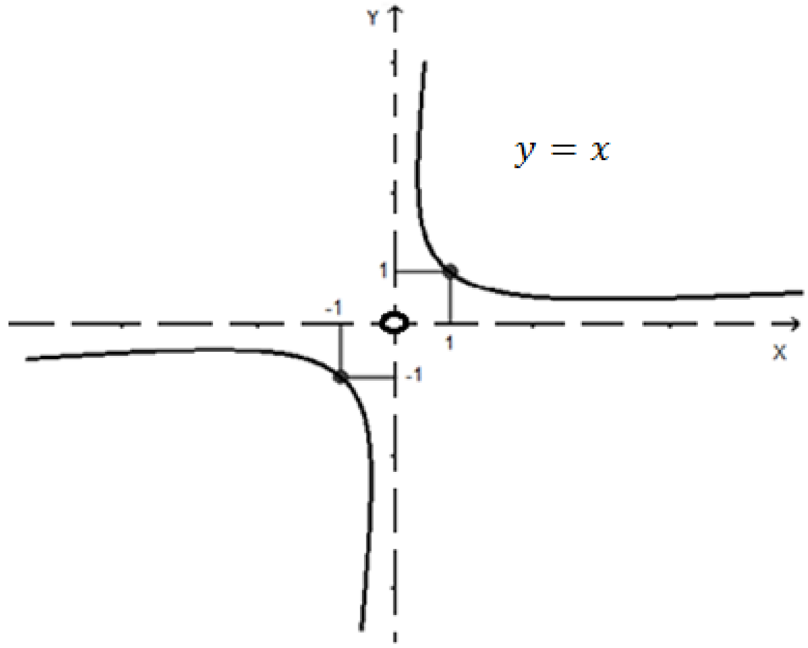


Figura 10. Gráfica de función racional

ix) Función signo: $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ 0; x = 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = \{-1,0,1\}$
- $r.c: y = sgn(x)$
- $\text{graf}(f) = \{(x, sgn(x)): x \in \mathbb{R}\}$

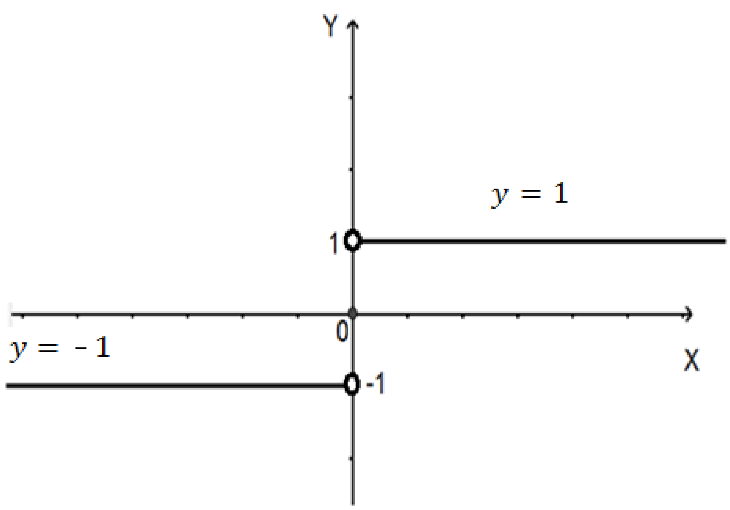


Figura 11. Gráfica de función signo

x) Función máximo entero $f(x) = [\![x]\!]$ ó $y = [\![x]\!]$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = \mathbb{Z}$
- $r.c: y = [\![x]\!]$
- graf$(f) = \{(x, [\![x]\!]\ ): x \in dom\ (f)\}$

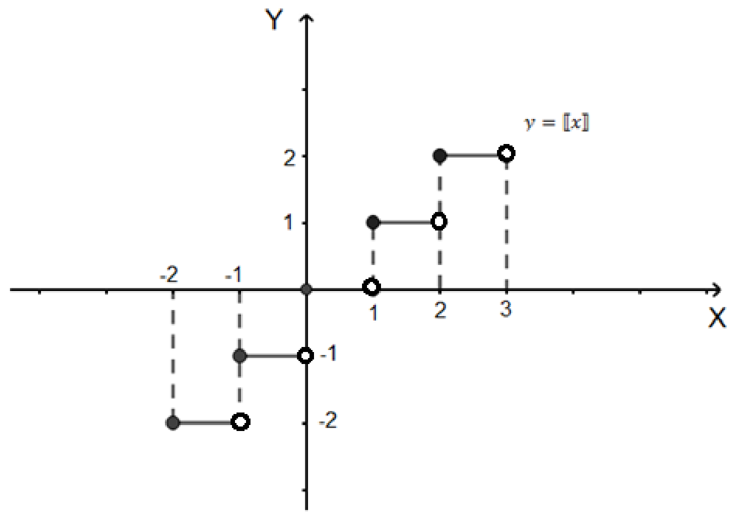


Figura 12. Gráfica de función máximo entero

xi) Función exponencial: $f(x) = a^x \wedge a > 1$ ó $y = a^x$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = \langle 0, +\infty \rangle$
- $r.c: y = a^x$
- graf$(f) = \{(x, a^x\ ): x \in\ \mathbb{R}\}$

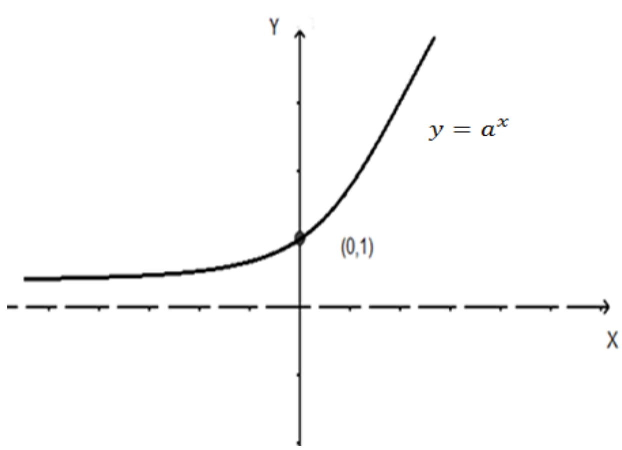


Figura 13. Gráfica de función exponencial

xii) Función exponencial: $f(x) = a^x \wedge 0 < a < 1$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = \langle 0, +\infty \rangle$
- $r.c: y = a^x$
- $\mathrm{graf}(f) = \{(x, a^x) : x \in \mathbb{R}\}$

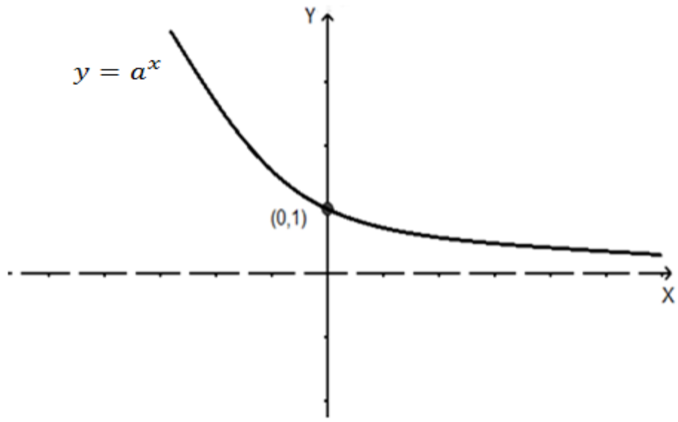


Figura 14. Gráfica de función exponencial

xiii) Función logaritmo: $f(x) = \log_a x \wedge a > 1$

- $dom(f) = \langle 0, +\infty \rangle$
- $ran(f) = \mathbb{R}$
- $r.c: y = \log_a x$
- $\mathrm{graf}(f) = \{(x, \log_a x) : x \in \langle 0, +\infty \rangle\}$

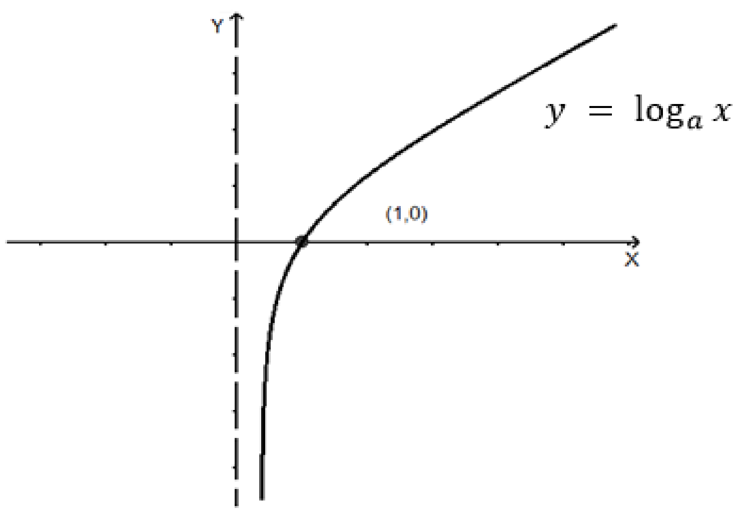


Figura 15. Gráfica de función logaritmo

xiv) Función logaritmo: $f(x) = \log_a x \wedge\ 0 < a\ < 1$

- $dom(f) = \langle 0, +\infty\rangle$
- $ran(f) = \mathbb{R}$
- $r.c: y = \log_a x$
- $\text{graf}(f) = \{(x, \log_a x\ ): x \in\ \langle 0, +\infty\rangle\}$

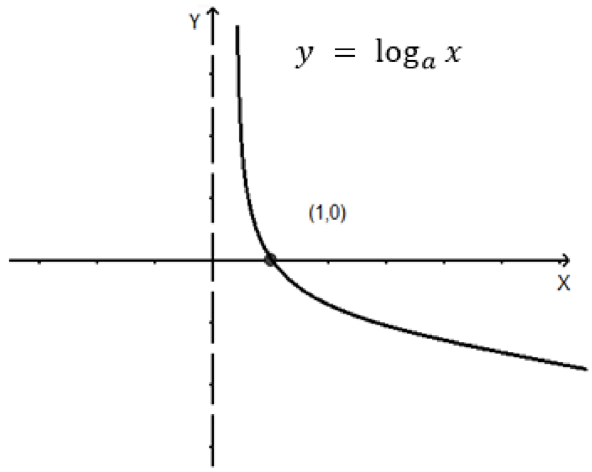


Figura 16. Gráfica de función logaritmo

xv) Función seno: $\boldsymbol{f}(x) = senx$ ó $y = senx$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = [-1,1]$
- $r.c: y = senx$
- $\text{graf}(f) = \{(x, senx\ ): x \in\ \mathbb{R}\}$

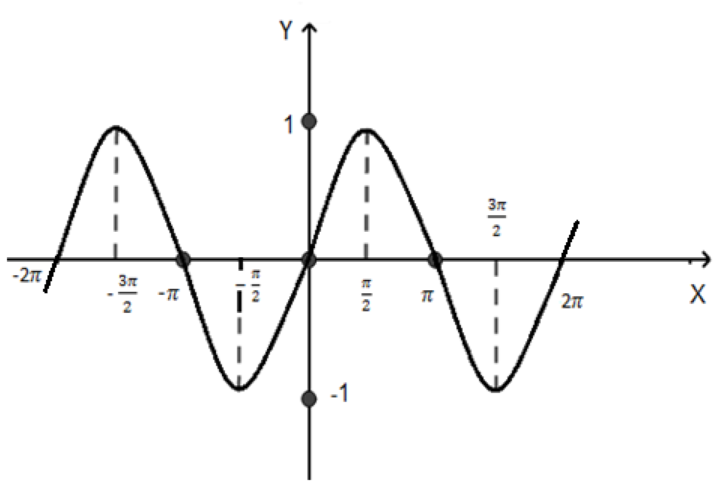


Figura 17. Gráfica de función seno

xvi) Función coseno: $f(x) = cosx$ ó $y = cosx$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = [-1,1]$
- $r.c: y = cosx$
- graf$(f) = \{(x, cosx\ ): x \in \ \mathbb{R}\}$

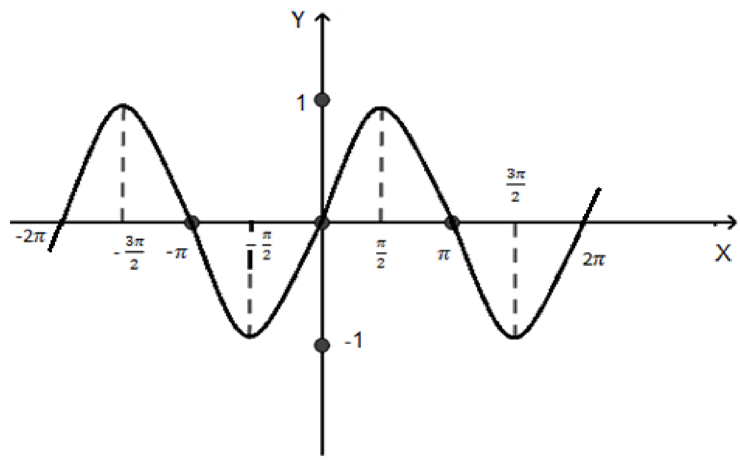


Figura 18. Gráfica de función coseno

xvii) Función tangente: $f(x) = tgx$ ó $y = tgx$

- $dom(f) = \mathbb{R} - \{(2n+1)\pi/2; n \in \mathbb{Z}\}$
- $ran(f) = \mathbb{R}$
- $r.c: y = tgx$
- graf$(f) = \{(x, tgx\ ): x \in \ dom(f)\}$

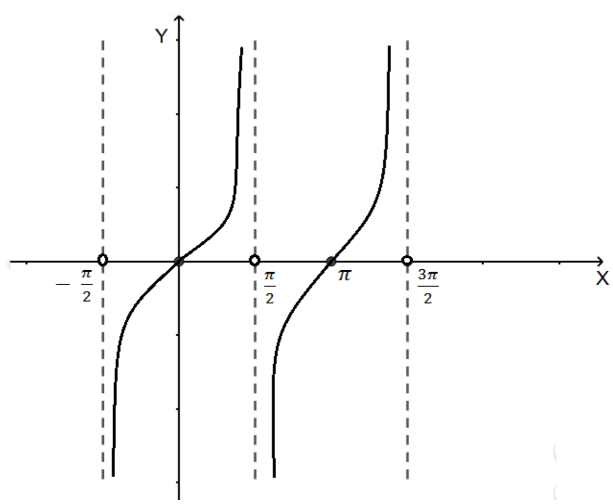


Figura 19. Gráfica de función tangente

xviii) Función cotangente: $f(x) = ctgx$ ó $y = ctgx$

- $dom(f) = \mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$
- $ran(f) = \mathbb{R}$
- $r.c: y = ctgx$
- graf$(f) = \{(x, ctgx\ ): x \in\ dom(f)\}$

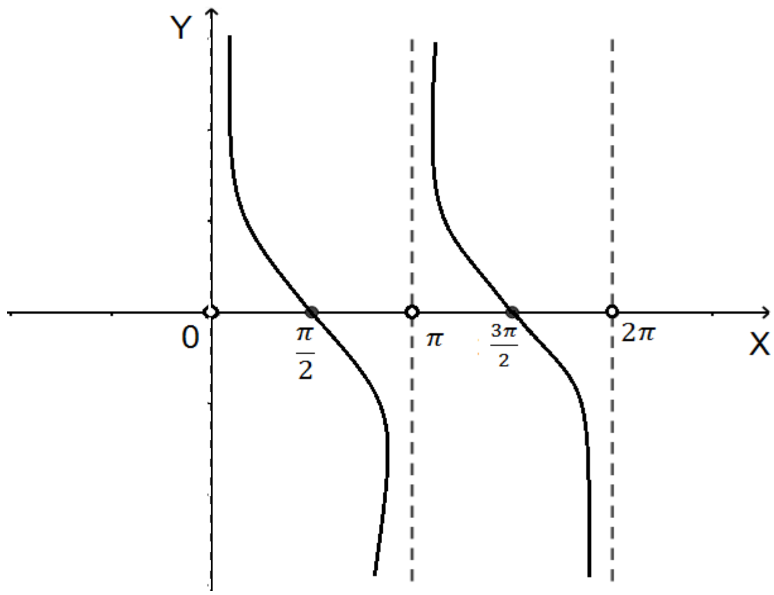


Figura 20. Gráfica de función cotangente

xix) Función secante: $f(x) = secx$ ó $y = secx$

- $dom(f) = \mathbb{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\right\}$
- $ran(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$
- $r.c: y\ = secx$
- graf$(f) = \{(x, secx): x \in\ dom(f)\}$

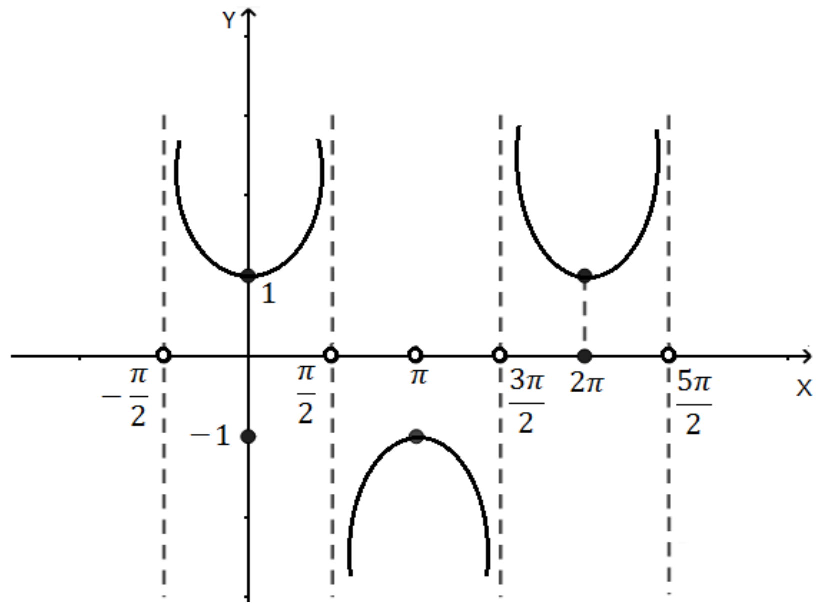


Figura 21. Gráfica de función secante

xx) Función cosecante: $f(x) = \csc x$ ó $y = \csc x$

- $dom(f) = \mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$
- $ran(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty \rangle$
- $r.c: y = csc\, x$
- $graf(f) = \{(x, csc\, x): x \in dom(f)\}$

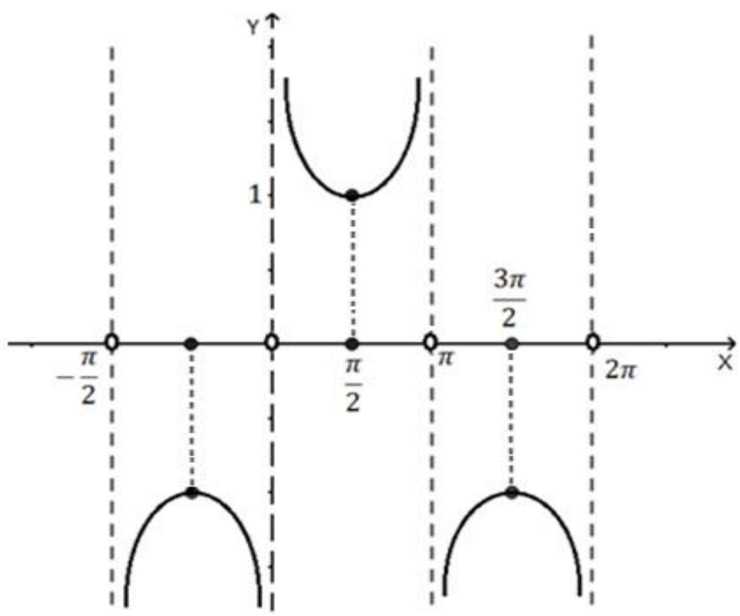


Figura 22. Gráfica de función cosecante

xxi) Función arcoseno: $f(x) = arcsen\ x$ ó $y = arcsen\ x$

- $dom(f) = [-1,1]$
- $ran(f) = [-\pi/2, \pi/2]$
- $r.c: y = arcsen\ x$
- $graf(f) = \{(x, arcsen\ x): x \in [-1,1]\}$

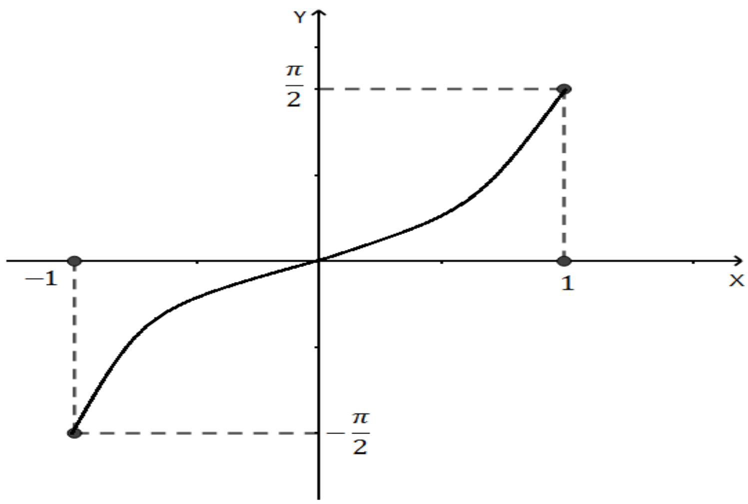


Figura 23. Gráfica de función arcoseno

xxii) Función arcocoseno: $f(x) = \arccos x$ ó $y = \arccos x$

- $dom(f) = [-1,1]$
- $ran(f) = [0, \pi]$
- $r.c: y = arccos\ x$
- $graf(f) = \{(x, arccos\ x): x \in [-1,1]\}$

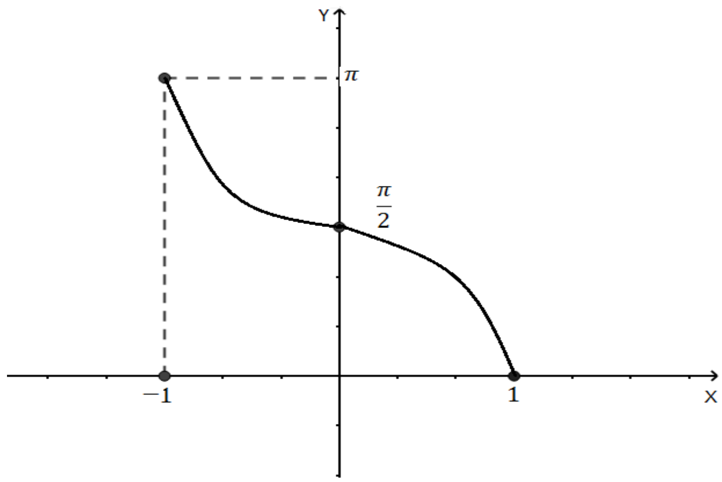


Figura 24. Gráfica de función arcocoseno

xxiii) Función arcotangente: $f(x) = arctg\ x$ ó $y = arctg\ x$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = \langle -\pi/2 , \pi/2 \rangle$
- $r.c: y = arctg\ x$
- $graf(f) = \{(x, arctg\ x): x \in \mathbb{R}\}$

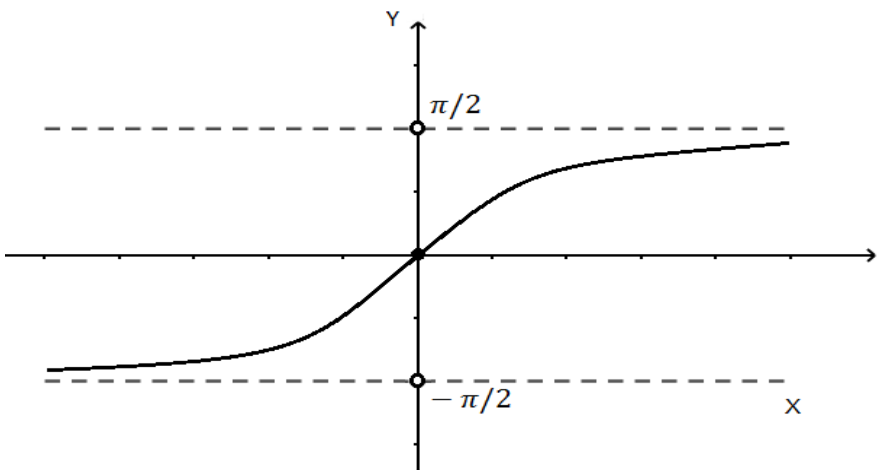


Figura 25. Gráfica de función arcotangente

xxiv) Función arcocotangente: $f(x) = arcctg\ x$ ó $y = arcctg\ x$

- $dom(f) = \mathbb{R}$
- $ran(f) = \langle 0, \pi \rangle$

- $r.c: y = arcctg\ x$
- $graf(f) = \{(x, arcctg\ x): x \in \mathbb{R}\}$

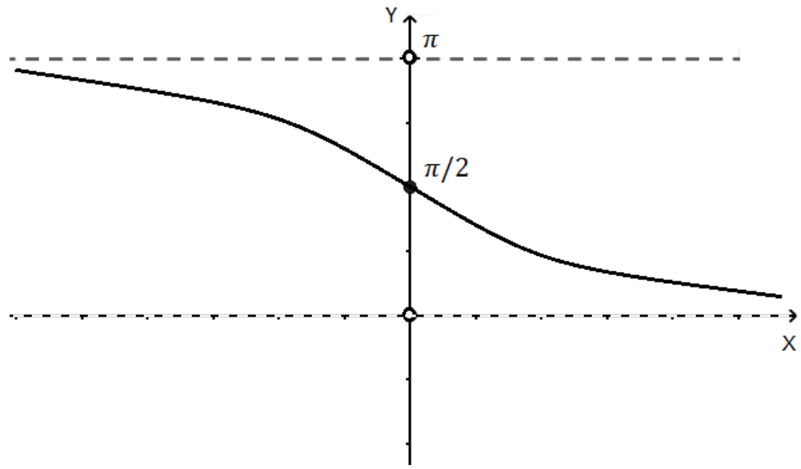


Figura 26. Gráfica de función arcocotangente

xxv) Función arcosecante: $f(x) = \operatorname{arcsec} x$ ó $y = \operatorname{arcsec} x$

- $dom(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$
- $ran(f) = [0, \pi/2\rangle \cup \langle \pi/2, \pi]$
- $r.c: y = arcsec\ x$
- $graf(f) = \{(x, arcsec\ x): x \in dom(f)\}$

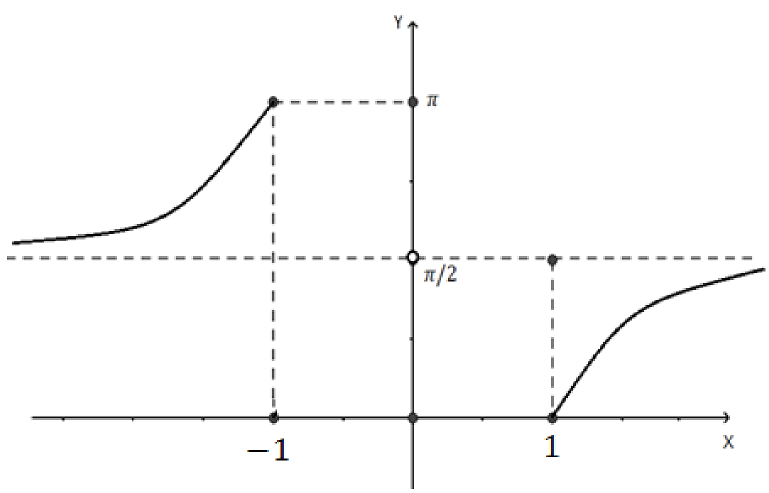


Figura 27. Gráfica de función arcosecante

xxvi) Función arcocosecante: $f(x) = \operatorname{arccsec} x$ ó $y = \operatorname{arccsec} x$

- $dom(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$
- $ran(f) = [-\pi/2, 0\rangle \cup \langle 0, \pi/2]$
- $r.c: y = arccsec\, x$
- $graf(f) = \{(x, arccsec\, x) : x \in \; dom(f)\}$

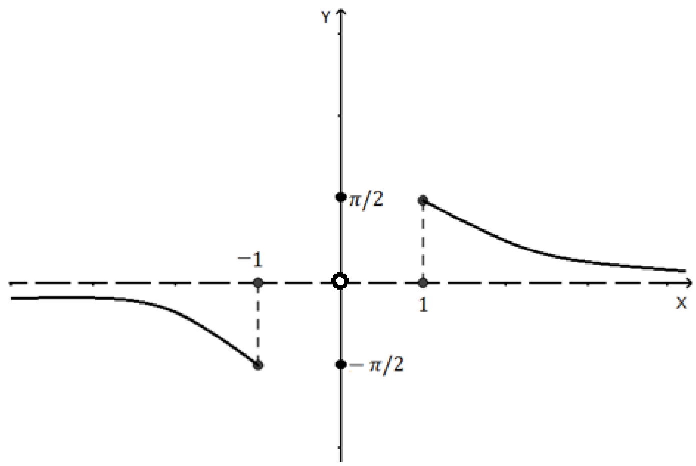


Figura 28. Gráfica de función arcocosecante

2.3.11.3. OPERACIONES BÁSICAS CON FUNCIONES BÁSICAS.

Definición. Sean $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: A \to \mathbb{R}$ dos funciones reales básicas con $dom(f) \cap dom(g) \neq \emptyset$, definimos las siguientes operaciones.

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
   $dom\,(f + g) = dom\,(f) \cap dom(g)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
   $dom\,(f - g) = dom\,(f) \cap dom(g)$
3. $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
   $dom\,(f.g) = dom\,(f) \cap dom(g)$

4. $(kf)(x) = kf(x)$

   $dom\ (kf) = dom\ (f)$
5. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$

   $dom\ (f/g) = dom\ (f) \cap dom(g) - \{x: g(x) = 0\}$
6. $(f\ o\ g)(x) = f(g(x))$

   $a.\ dom\ (f) \cap ran(g) \neq \emptyset$

   $b.\ dom\ (f\ o\ g) = \{x: x\ \in dom(g) \wedge g(x) \in dom\ (f)\}$

Ejemplo 1. Sean $f(x) = ln\, x$ y $g(x) = senx,$ ejecutar todas las operaciones básicas con f y g. Antes de efectuar las operaciones determina el dominio y rango de cada una de ellas.

$f(x) = ln\, x$	$g(x) = sen\, x$
$dom(f) = \langle 0, +\infty\rangle$	$dom(g) = \mathbb{R}$
$ran(f) = \mathbb{R}$	$ran(g) = [-1,1]$

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = lnx + senx$

   $dom(f + g) = \langle 0, +\infty\rangle \cap \mathbb{R} = \langle 0, +\infty\rangle$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = lnx - senx$

   $dom(f - g) = \langle 0, +\infty\rangle$
3. $(fg)(x) = f(x).g(x) = lnx.senx$

   $dom(f.g) = \langle 0, +\infty\rangle$
4. $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = lnx/senx$

   $dom(f/g) = \langle 0, +\infty\rangle - \{x: senx = 0\}$

   $= \langle 0, +\infty\rangle - \{n\pi: n\ \epsilon\mathbb{Z}\}$
5. $(f\ o\ g)(x) = f(g(x)) = f(senx) = \ln(senx)$

$a.\quad ran(g) \cap \; dom(f) = \; [-1,1] \cap \langle 0, +\infty \rangle = \; \langle 0, 1] \neq \emptyset$

$b.\quad dom(f \; o \; g) = \{x: x \in dom\;(g) \wedge g(x) \in dom(x)\}$

$= \{x: x \in \mathbb{R} \wedge senx \in \langle 0, +\infty \rangle\}$

$= \{x: x \in \mathbb{R} \wedge 0 < senx \;\; \leq 1\}$

$= \left\{x: x \in \mathbb{R} \wedge x \in \langle \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n]\right\}$

$= \langle \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$

Ejemplo 2. Sean $f(x) = \; x^2 \;\; y \;\; g(x) = 3^x$, efectuar todas las operaciones básicas con f y g. Antes de efectuar las operaciones se determina el dominio y rango de f y g.

$f(x) = \; x^2$	$g(x) = 3^x$
$dom(f) = \mathbb{R}$	$dom(g) = \mathbb{R}$
$ran(f) = \; [0, +\infty\rangle$	$ran(g) = \langle 0, +\infty\rangle$

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3^x$

   $dom(f + g) = \; \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 3^x$

   $dom(f - g) = \; \mathbb{R}$

3. $(fg)(x) = f(x).\, g(x) = 3^x.\; x^2$

   $dom(fg) = \; \mathbb{R}$

4. $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = x^2/3^x$

   $dom(f/g) = \; \mathbb{R} - \{x: 3^x = 0\} = \mathbb{R} - \emptyset = \mathbb{R}$

5. $(f\ o\ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3^x) = 3^{2x}$

   a. $ran(g) \cap\ dom(f) = \langle 0, +\infty\rangle \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$

   b. $dom(f\ o\ g) = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge 3^x \in \mathbb{R}\}$

   $= \{x: x \in \mathbb{R} \wedge 3^x \in \langle 0, +\infty\rangle\}$

   $= \{x: x \in \mathbb{R} \wedge 3^x > 0\}$

   $= \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Ejemplo 3. Sean $f(x) = \sqrt{x}\ y\ \ g(x) = x^3$, efectuar todas las operaciones básicas en f y g. Antes de efectuar las operaciones, se determina el dominio y rango de f y g.

$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = x^3$
$dom(f) = [0, +\infty\rangle$	$dom(g) = \mathbb{R}$
$ran(f) = [0, +\infty\rangle$	$ran(g) = \mathbb{R}$

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + x^3$

   $dom(f + g) = [0, \infty\rangle \cap \mathbb{R} = [0, +\infty\rangle$

2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} + x^3$

   $dom(f - g) = \mathbb{R}$

3. $(fg)(x) = f(x).g(x) = x^{1/2}.\ x^3 = x^{7/2}$

   $dom(fg) = \mathbb{R}$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x^3}$

   $dom\left(\frac{f}{g}\right) = [0, +\infty\rangle - \{x: x^3 = 0\} = \langle 0, +\infty\rangle$

5. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \sqrt{x^3}$

$$dom(f \circ g) = \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x^3 \in [0, +\infty\rangle\}$$

$$= \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x^3 \in [0, +\infty\rangle\}$$

$$= \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x^3 \geq 0\}$$

$$= \{x: x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = [0, +\infty\rangle$$

2.3.11.4. PROPIEDADES Y TIPO DE FUNCIONES

i) Igualdad de funciones:

Definición: Sea $f: A \to B$ y $g: A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$.

$$f = g \leftrightarrow \forall x \in Domf \wedge f(x) = g(x) \wedge Domf = Domg$$

ii) Función par e impar:

Definición: Sea $f: A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ una función f es par si

$$f(-x) = f(x); \forall x \in Domf = Df$$

Definición: Sea $f: A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ una función f es impar si

$$f(-x) = -f(x); \forall x \in Domf.$$

iii) Función periódica y no periódica:

Definición: Sea $f: A \to B$, $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ una función f es periódica en el Domf si existe un número $T > 0$ tal que; $f(x + T) = f(x); \forall x \in Domf$.

iv) Función restringida o restricción de una función en un conjunto:

Definición: Sea $f: A \to B,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ una función con dominio Domf y sea $D \subset Domf$. La función $f/D: D \to B$ es una función con f/D$(x) = f(x), x \in D$. Esta función se denomina la restricción de f al conjunto D.

$f/D = \{(x, y) \in\ f: x \in\ D\}$

v) Función creciente o decreciente:

Definición: Si $f: A \to B\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ f es creciente en D_f,

$x_1 \leq x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2);\ \forall x \in Df.$

Definición: Si $f: A \to B\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ f es creciente en

$I = [a, b] \subset Domf: x_1 \leq x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2);\ \forall x \in I = [a, b] \subset Df.$

Definición: Si $f: A \to B\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ f es decreciente

en $D_f: x_1 \leq x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2);\ \forall x \in Df.$

Definición: Si $f: A \to B\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ f es decreciente

en $I = [a, b] \subset Df: x_1 \leq x_2 \to f(x_1) \geq f(x_2);\ \forall x \in I.$

Definición: Si $f: A \to B\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ f es estrictamente creciente en $D_f\ o\ I = [a, b] \subset Df: si\ x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2);\ \forall x \in Df\ o\ \ \forall x \in I.$

Definición: Si $f: A \to B\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ f es estrictamente decreciente en

$$D_f \ o \ I = [a,b] \subset Df: \ x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2); \ \forall x \in D_f \ o \ \ \forall x \in I.$$

Definición: Si $f: A \rightarrow B \ una \ función, \ A \subseteq \mathbb{R}, \ B \subseteq \mathbb{R};$ si f es creciente o decreciente en $D_f \ o \ I = [a,b]$, se dice que f es monótona.

Definición: Si $f: A \rightarrow B, una \ función, \ A \subseteq \mathbb{R}, \ B \subseteq \mathbb{R}$ f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $D_f \ o \ I = [a,b] \subset Df$, se dice que f es estrictamente monótona.

vi) Función acotada o no acotada:

Definición: Si $f: A \rightarrow B \ una \ función, \ A \subseteq \mathbb{R}, \ B \subseteq \mathbb{R};$ f está acotada en

$D_f \ o \ I = [a,b]$, superiormente e inferiormente si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in Df \ o \ \ \forall x \in I.$

En términos simples, una función está acotada si su rango es un conjunto acotado.

vii) Función aditiva:

Definición: Si $f: A \rightarrow B \ una \ función, \ A \subseteq \mathbb{R}, \ B \subseteq \mathbb{R}$ f es aditiva si

$f(x+y) = f(x) + f(y); \ \forall x, y \in Df.$

viii) Función inyectiva, suryectiva y biyectiva.

Definición: $f: A \rightarrow B \ una \ función, \ A \subseteq \mathbb{R}, \ B \subseteq \mathbb{R}$ f es inyectiva si:

$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ó $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow \ x_1 = x_2.$

En términos simples, se dice que una función es inyectiva si elementos distintos de su rango se corresponden a elementos distintos del dominio; es decir, si dos elementos distintos del dominio tienen imágenes distintas.

Definición: $f: A \to B\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ f es suryectiva o sobreyectiva si: $\forall y\ \in B, \exists x \in A\ tal\ que\ y = f(x)$.

Comentando $f:\ \ A \to B\ es\ una\ función, f(A)\ \subset B$.

Si f(A)=B, es decir, si todo elemento de B es imagen de al menos un elemento de A, se dice que f es una función sobreyectiva de A en B o que f es una función de A sobre B, o bien f aplica sobre B.

Definición: $f: A \to B\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ f es biyectiva sii f es inyectiva y f es suryectiva.

ix) Función inversa:

a) Función inversa de la adición

Definición: $f: A \to B\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ - f es la función inversa de f sii $f + (-f) = 0;\ \forall x\ \in Df, D_f = D_{-f.}$

$[f + (-f)]_{(x)} =\ 0; (-f)_{(x)} = -f_{(x)}; \to f = (-1)f\ \wedge\ f + (-f) = 0$

b) Función inversa de la multiplicación

Definición: $f: A \to B\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R};\ \frac{1}{f}$ es la función inversa de f sii $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f_{(x)}} \wedge f(x) \neq 0;\ \forall x \in Df = D_{\frac{1}{f}}.$

Comentando: $f.\frac{1}{f} = 1 \leftrightarrow Df = \mathbb{R}$ y el rango de f no contiene el cero.

c) Función inversa mediante la composición.

Definición: $f: A \to B\ es\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R};$ f admite inversa mediante la composición si existe

$$g: B \to A(f^{-1}: B \to A)\ tal\ que\ gof = I_A\ y\ fog = I_B$$

Comentando: la función $f: A \to B$ admite INVERSA sii es biyectiva.

Sea $f: A \to B,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$; una función biyectiva, la función $f^{-1}: R_f \to A$ es la inversa de f.

Sea $f: A \to B,$ es una función inyectiva, entonces existe la función inversa de f y se denota $f^{-1}: B \to A$ si:

1. $D_{f^{-1}} = f(A) \subseteq B$
2. $R_{f^{-1}} = A$
3. $Graf(f^{-1}) = \{(f(x), x): f(x) \in f(A) \wedge x \in D_f\}$

Sea $f: A \to B,\ una\ función,\ A \subseteq \mathbb{R},\ B \subseteq \mathbb{R}$ una función inyectiva; la función $f^{-1}: B \to A$ con $D_{f^{-1}} = R_f\ \wedge\ R_{f^{-1}} = D_f;$ es la inversa de f sii $f(x) = y \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. La gráfica de la función inversa $f^{-1}: B \to A$ de $f: A \to B$ es simétrica a la de $f: A \to B$ con respecto a la recta

$I(x) = x$ (función identidad).

2.3.12. Límite de funciones reales básicas

Se puede decir que el cálculo o análisis matemático se basa en el sistema de los números reales y la teoría de límites. Lo característico del cálculo es el uso del proceso de límite. La diferenciación y la integración implican ciertos conceptos de paso al límite. Este concepto es fundamental en la definición de derivada.

El concepto de continuidad está estrictamente relacionado con el de límite; se puede decir que se basa directamente en este concepto.

La teoría de límite no requiere de nuevos axiomas, se basa en la de los números reales y en la teoría de las funciones reales de variable real.

En una función real el dominio está definido, es decir se conoce sus elementos. Conociendo el dominio, se puede "reconocer" sus elementos o aproximarse a los que le pertenecen; la preocupación está en saber qué sucede con los elementos del rango.

Se estudia tendencias de límite de las funciones básicas y así se ejercita el uso de la notación $\lim_{x \to x_\circ} f(x) = L$

Las funciones básicas son 26; se estudia cada una de ellas, la gráfica ayuda en este proceso; después se presenta la definición de límite y se aplica a cada una de las funciones básicas.

2.3.12.1. TENDENCIAS DE LÍMITE DE FUNCIONES BÁSICAS

i) Función constante: $f(x) = k$

$dom(f) = \mathbb{R}$

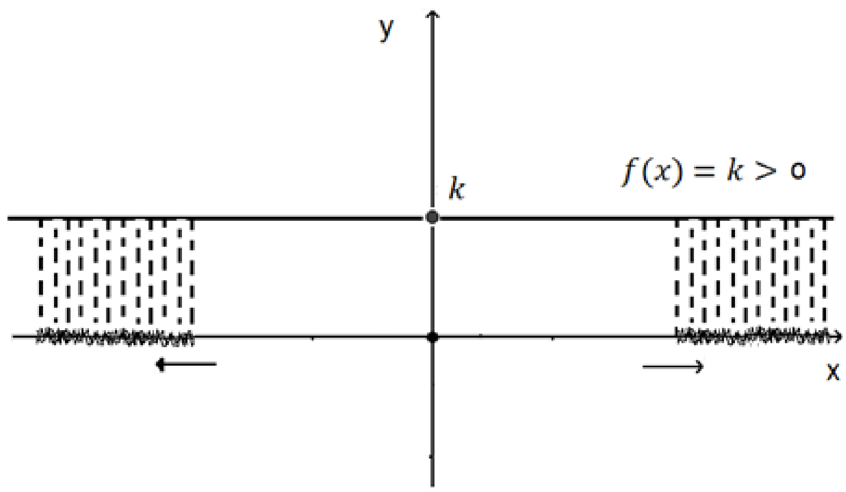


Figura 29. Gráfica del límite de la función constante

1.1. $x \to +\infty \Rightarrow k \to k$

$$\lim_{x \to +\infty} k = k$$

1.2. $x \to -\infty \Rightarrow k \to k$

$$\lim_{x \to -\infty} k = k$$

1.3. $$\lim_{x \to \infty} k = k$$

ii) Función identidad: $I(x) = x$

$dom(I) = \mathbb{R}$

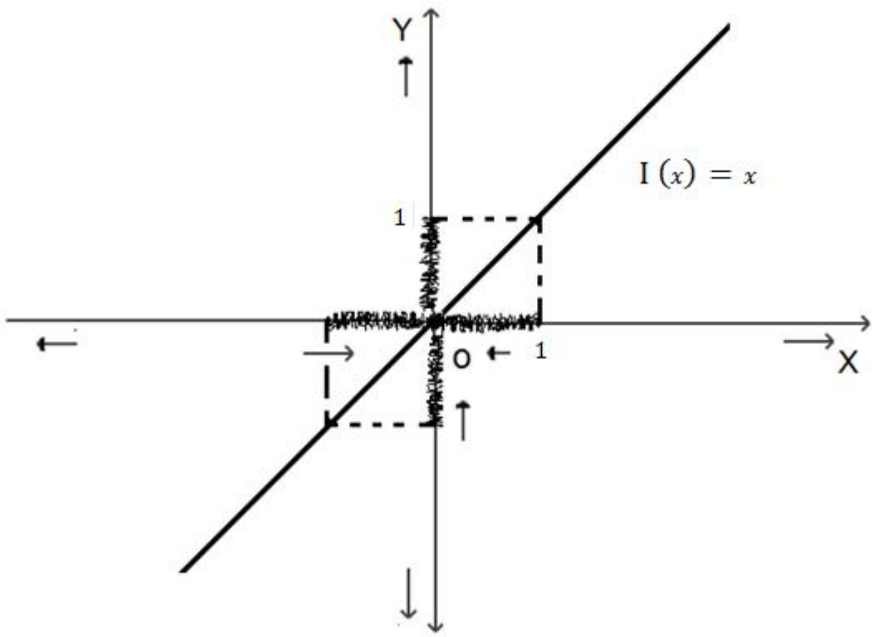


Figura 30. Gráfica del límite de la función identidad

2.1. $x \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

2.2. $x \to -\infty \Rightarrow x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

2.3. $x \to 0^{+} \ \Rightarrow \ x \to 0^{+}$

$$\lim_{x \to 0^{+}} x = 0^{+}$$

2.4. $x \to 0^{-} \ \Rightarrow \ x \to 0^{-}$

$$\lim_{x \to -0} x = 0^{-}$$

2.5. $\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$

2.6. $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

iii) Función cuadrática: $f(x) = x^2$

$dom(f) = \mathbb{R}$

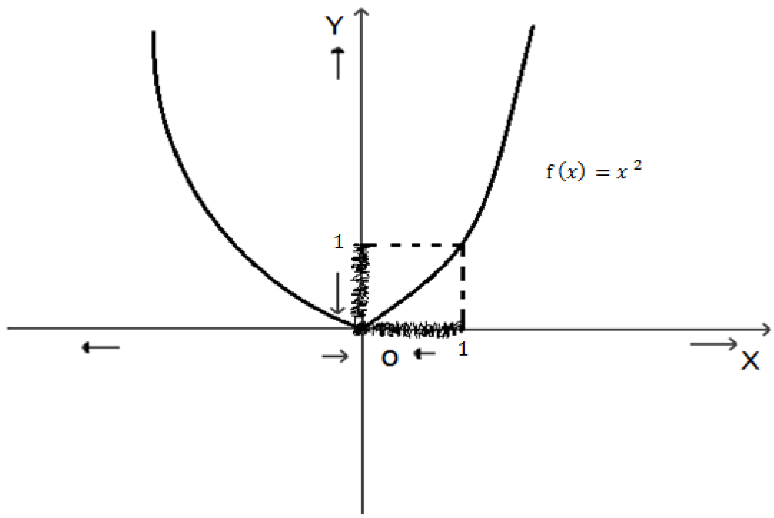


Figura 31. Gráfica del límite de la función cuadrática

3.1. $x \to +\infty \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

3.2. $x \to -\infty \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

3.3. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = +\infty$

3.4. $x \to 0^+ \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \to 0^+$

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0^+$

3.5. $x \to 0^- \;\; \Rightarrow \;\; x^2 \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^+$$

3.6. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0^+$

iv) Función cúbica: $f(x) = x^3$

$dom(f) = \mathbb{R}$

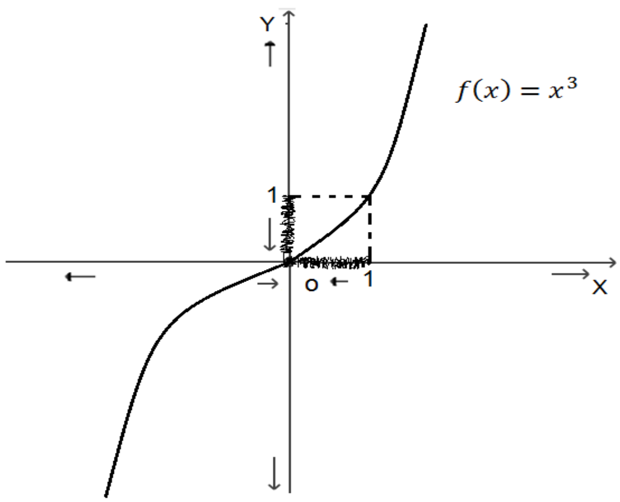


Figura 32. Gráfica del límite de la función cúbica

4.1. $x \to +\infty \;\Rightarrow\; x^3 \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

4.2. $x \to -\infty \;\Rightarrow\; x^3 \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

4.3. $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$

4.4. $x \to 0^+ \;\Rightarrow\; x^3 \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 = 0^+$$

4.5. $x \to 0^- \;\; \Rightarrow \;\; x^3 \to 0^-$

$$\lim_{x \to 0^-} x^3 = 0^-$$

4.6. $$\lim_{x \to 0} x^3 = 0$$

v) Función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$

$dom(f) = [0, +\infty\rangle$

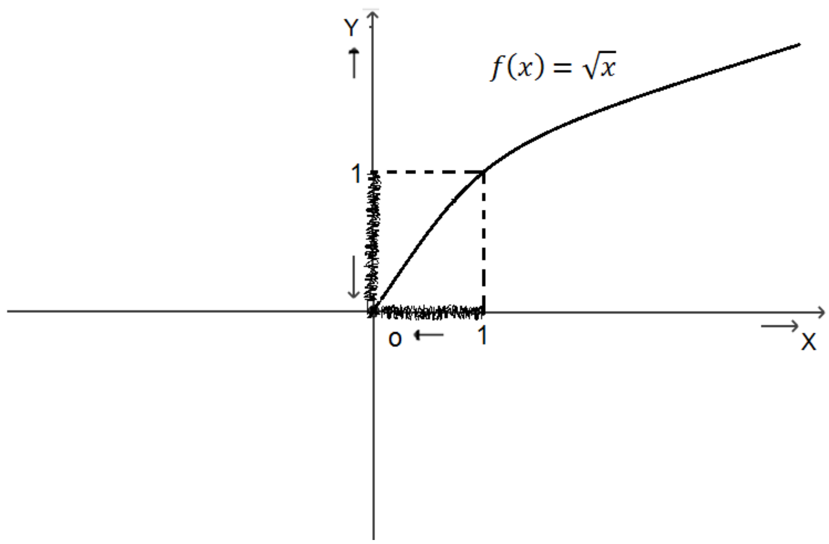


Figura 32. Gráfica del límite de la función raíz cuadrada

5.1. $x \to +\infty \;\; \Rightarrow \;\; \sqrt{x} \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

5.2. $x \to 0^+ \;\; \Rightarrow \;\; \sqrt{x} \to -\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$$

vi) Función raíz cúbica: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt[3]{x}}$

$dom(f) = \mathbb{R}$

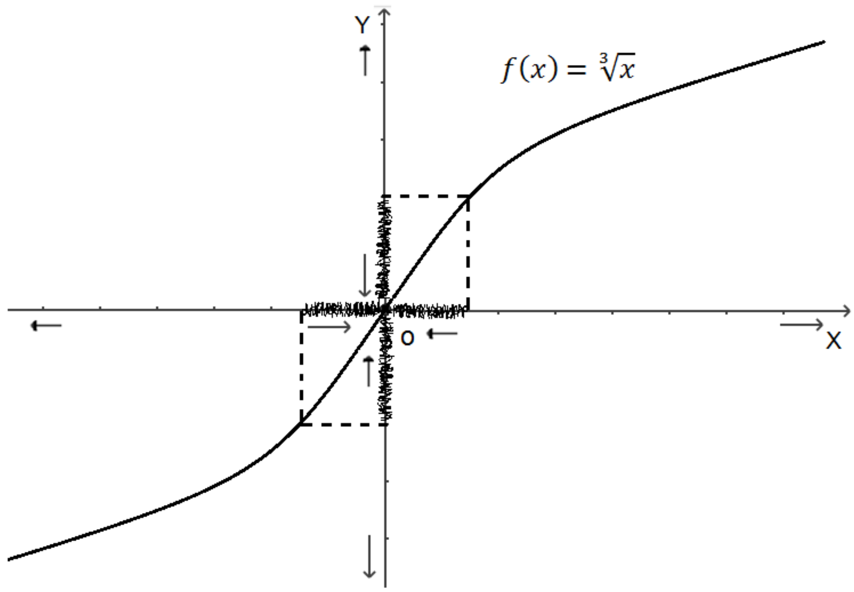


Figura 33. Gráfica del límite de la función raíz cúbica

6.1. $x \to +\infty \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{x} \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$$

6.2. $x \to -\infty \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{x} \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$$

6.3. $\lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{x} = \infty$

6.4. $x \to 0^+ \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{x} \to 0^+$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x} = 0^+$$

6.5. $x \to 0^- \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{x} \to 0^-$

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{x} = 0^-$$

6.6. $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

vii) Función racional básica: $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

$dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

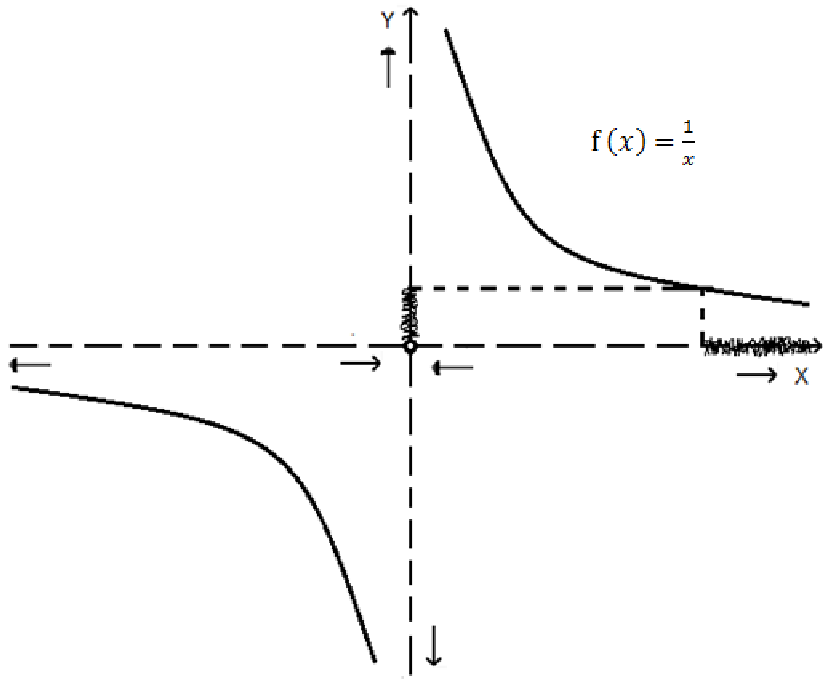


Figura 34. Gráfica del límite de la función racional básica

7.1. $x \to +\infty \;\; \Rightarrow \;\; \frac{1}{x} \to 0^{+}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^{+}$$

7.2. $x \to -\infty \;\; \Rightarrow \;\; \frac{1}{x} \to 0^{-}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^{-}$$

7.3. $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$

7.4. $x \to 0^{+} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{1}{x} \to +\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

7.5. $x \to 0^- \;\; \Rightarrow \frac{1}{x} \to -\infty$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

7.6 $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

viii) Función valor absoluto: $f(x) = |x|$

$dom(f) = \mathbb{R}$

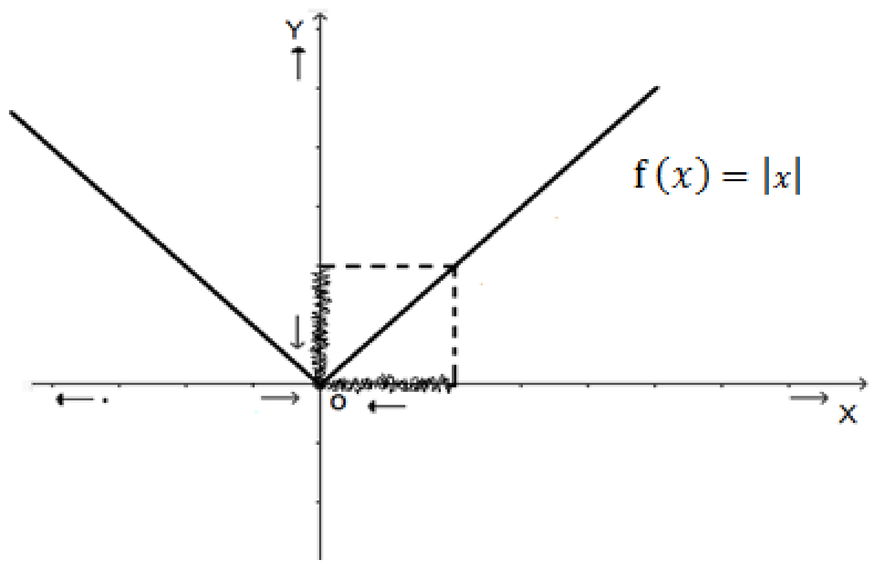


Figura 35. Gráfica del límite de la función valor absoluto

8.1. $x \to +\infty \;\; \Rightarrow \;\; |x| \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} |x| = +\infty$$

8.2. $x \to -\infty \;\; \Rightarrow \;\; |x| \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty$$

8.3. $\underset{x \to \infty}{lím} |x| = +\infty$

8.4. $x \to 0^+ \Rightarrow |x| \to 0^+$

$\underset{x \to 0^+}{lím} |x| = 0^+$

8.5. $x \to 0^- \Rightarrow |x| \to 0^+$

8.6. $\underset{x \to 0}{lím} |x| = 0^+$

ix) Función signo: $\boldsymbol{f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}}$

$dom(f) = \mathbb{R}$

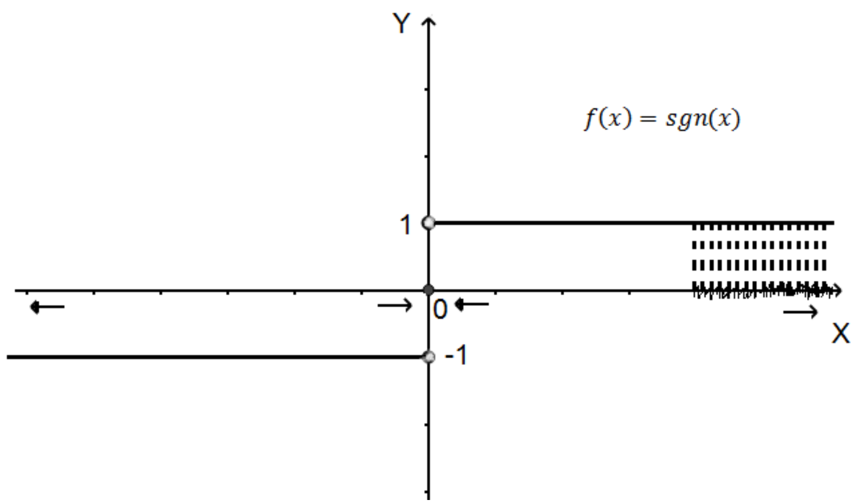


Figura 36. Gráfica del límite de la función signo

9.1 $x \to 0^+ \Rightarrow sgn(x) \to 0$

9.2. $x \to 0^- \Rightarrow sgn(x) \to 0$

9.3. $x \to 0 \Rightarrow sgn(x) \to 0$

9.4. $\underset{x \to 0}{lím\, sgn(x)} = 0$

9.5.$x \to +\infty \;\Rightarrow\; sgn(x) \to 1$

9.6. $x \to -\infty \;\Rightarrow\; sgn(x) \to -1$

x) Función máximo entero: $f(x) = [\![x]\!]$

$dom(f) = \mathbb{R}$

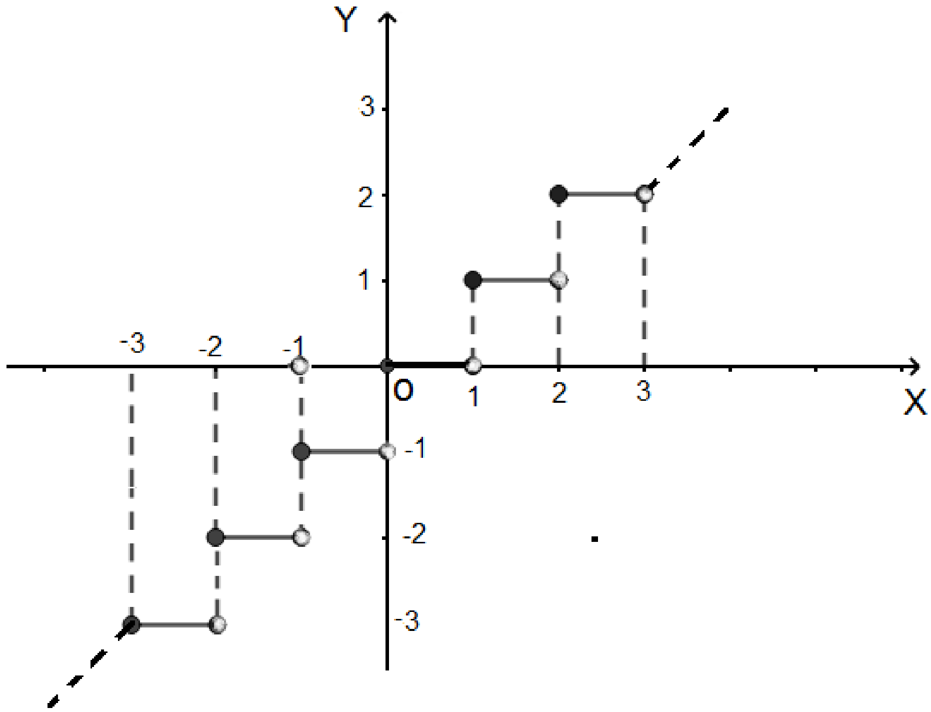


Figura 37. Gráfica del límite de la función máximo entero

En esta función la tendencia de límite se estudia en cada intervalo entero.

$$x \to 0^+ \;\Rightarrow\; [\![x]\!] \to 0$$

10.1. $x \to 0^- \;\Rightarrow\; [\![x]\!] \to -1$

10.2. $x \to 1^- \Rightarrow\; [\![x]\!] \to 0$

10.3. $x \to 1^+ \;\Rightarrow\; [\![x]\!] \to 1$

10.4. $x \in [n,n+1\rangle \;\Rightarrow\; [\![x]\!] = n$

$$x \to n^+ \;\Rightarrow\; [\![x]\!] \to n$$

$$\lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n$$

$$x \to (n+1)^- \quad \Rightarrow \quad [\![x]\!] \to n$$

$$\lim_{x \to (n+1)^-} [\![x]\!] = n$$

xi) Función exponencial: $f(x) = a^x \wedge \ a > 1$

$dom(f) = \ \mathbb{R}$

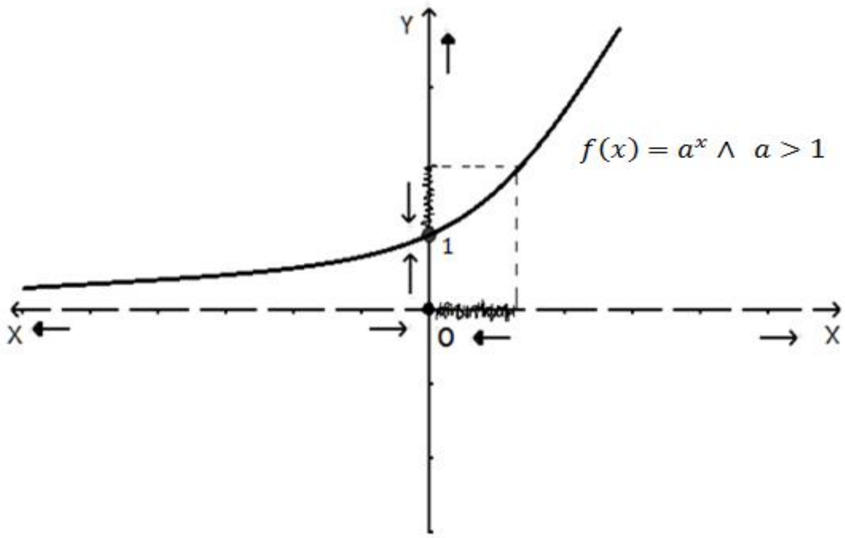


Figura 38. Gráfica del límite de la función exponencial

11.1. $x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad a^x \to 1^+$

11.2. $x \to 0^- \quad \Rightarrow \ a^x \to 1^-$

11.3. $\lim_{x \to 0} a^x = 1$

11.4. $x \to +\infty \Rightarrow \quad a^x \to +\infty$

11.5. $x \to -\infty \Rightarrow \quad a^x \to 0^+$

xii) Función exponencial: $f(x) = a^x \wedge \ \ 0 < a < 1$

$dom(f) = \ \langle 0, +\infty \rangle$

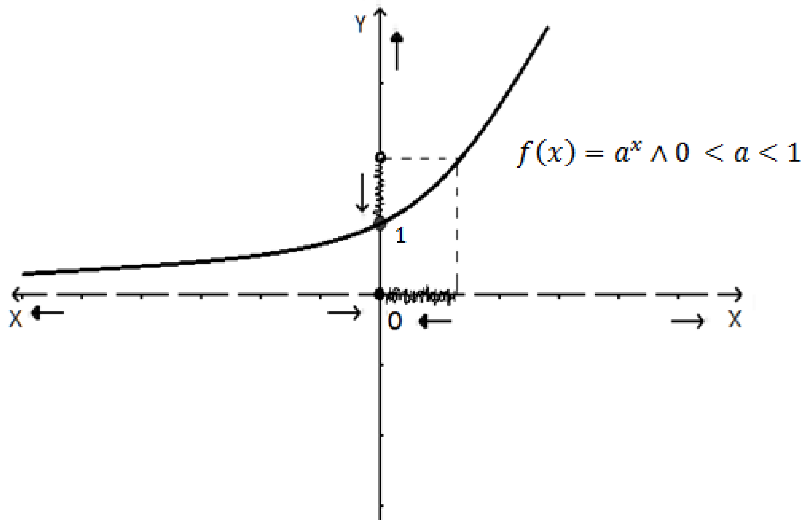


Figura 39. Gráfica del límite de la función exponencial

12.1. $x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad a^x \to 1^+$

12.2. $x \to 0^- \quad \Rightarrow \quad a^x \to 1^-$

12.3. $x \to 0 \quad \Rightarrow \quad a^x \to 1$

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1$$

12.4. $x \to +\infty \Rightarrow \quad a^x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

12.5. $x \to -\infty \Rightarrow \quad a^x \to 0^+$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0^+$$

xiii) Función logaritmo: $f(x) = \log_a x \wedge \; a > 1$

$dom(f) = \langle 0, +\infty \rangle$

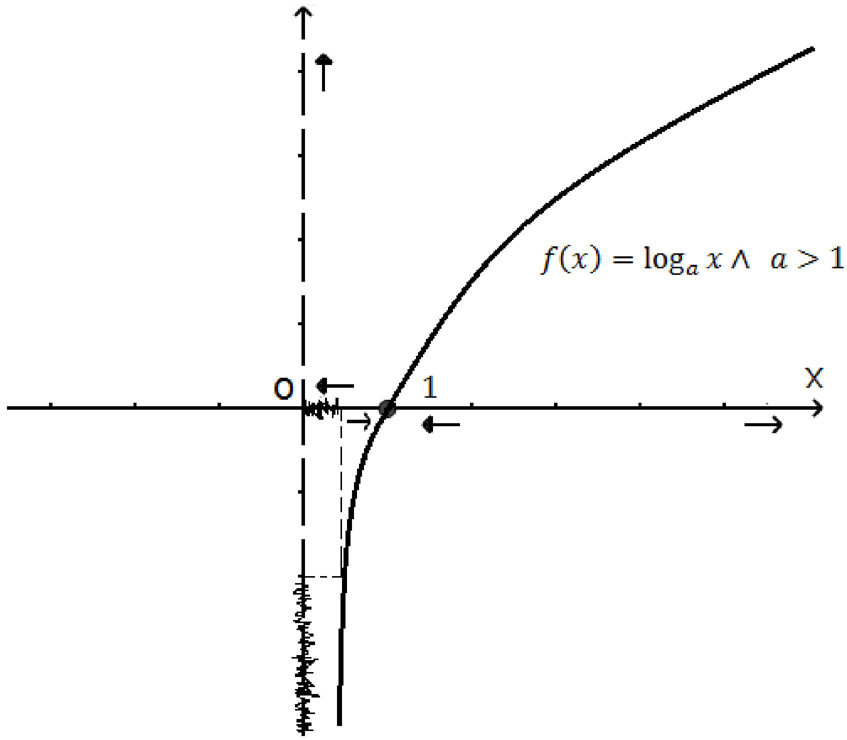


Figura 40. Gráfica del límite de la función logaritmo

13.1. $x \to 0^+ \ \Rightarrow \ \log_a x \to -\infty$

13.2. $x \to 1^- \ \Rightarrow \log_a x \to 0^-$

13.3. $x \to 1^+ \ \Rightarrow \ \log_a x \to 0^+$

13.4. $x \to 1 \ \Rightarrow \ \log_a x \to 0$

$$\lim_{x \to 1} \log_a x = 0$$

13.5. $x \to +\infty \Rightarrow \ \log_a x \to +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

xiv) Función logaritmo: $f(x) = \log_a x \wedge 0 < a < 1$

$dom(f) = \langle 0, +\infty \rangle$

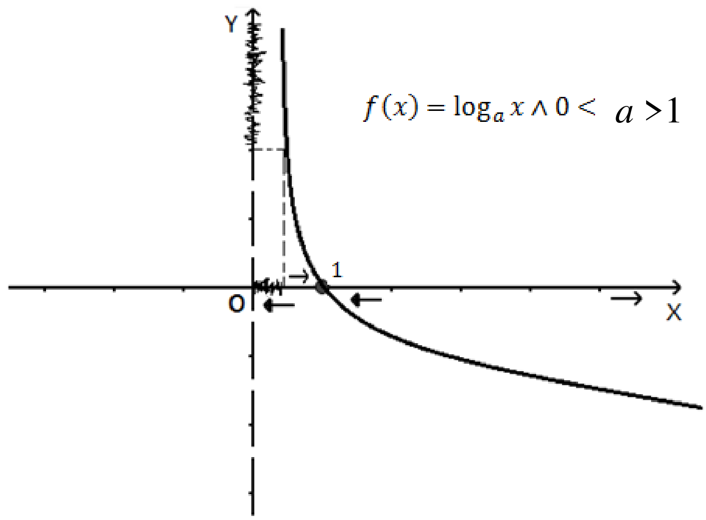


Figura 41. Gráfica del límite de la función logaritmo

14.1. $x \to 0^- \Rightarrow \log_a x \to +\infty$

14.2. $x \to 1^- \Rightarrow \log_a x \to 0^+$

14.3. $x \to 1^+ \Rightarrow \log_a x \to 0^-$

14.4. $x \to 1 \Rightarrow \log_a x \to 0$

$$\lim_{x \to 1} \log_a x = 0$$

14.5. $x \to +\infty \Rightarrow \log_a x \to -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

xv) Funciones trigonométricas: función seno. $f(x) = senx$

$dom(f) = \mathbb{R}$

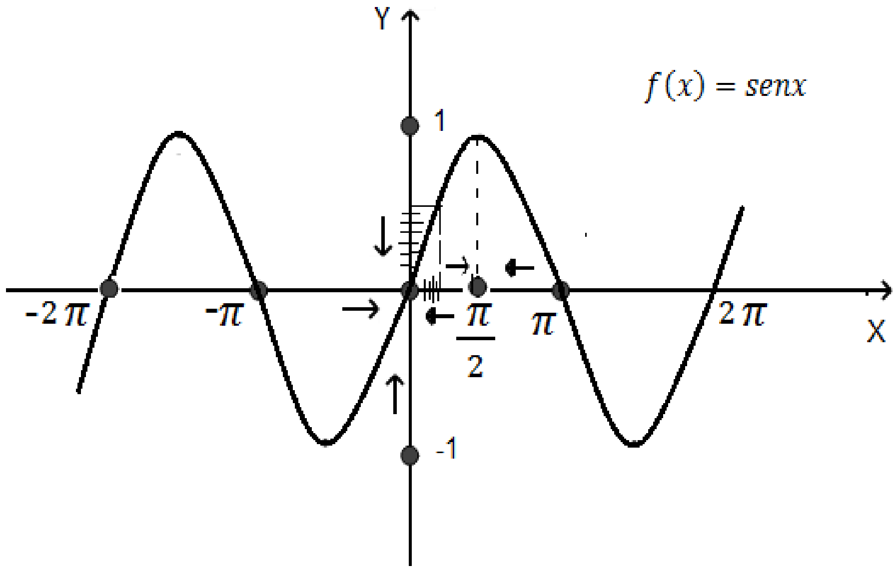


Figura 42. Gráfica del límite de la función seno

Se estudia la tendencia de límite en algunos puntos del dominio $\mathbb{R}$

15.1 $x \to 0^+ \;\; \Rightarrow \;\; senx \to 0^+$

15.2. $x \to 0^- \;\; \Rightarrow senx \to 0^-$

15.3. $x \to 0 \Rightarrow \;\; senx \to 0$

$$\lim_{x \to 0} senx = 0$$

15.4. $x \to \pi/2^- \;\; \Rightarrow \;\; senx \to 1^-$

15.5 $x \to \pi/2^+ \;\; \Rightarrow senx \to 1^-$

15.6. $x \to \pi/2 \;\; \Rightarrow \;\; senx \to 1^-$

$$\lim_{x \to \pi/2} senx = 1^-$$

xvi) Función trigonométrica: Función coseno. $\boldsymbol{f(x) = cosx}$

$dom(f) = \mathbb{R}$

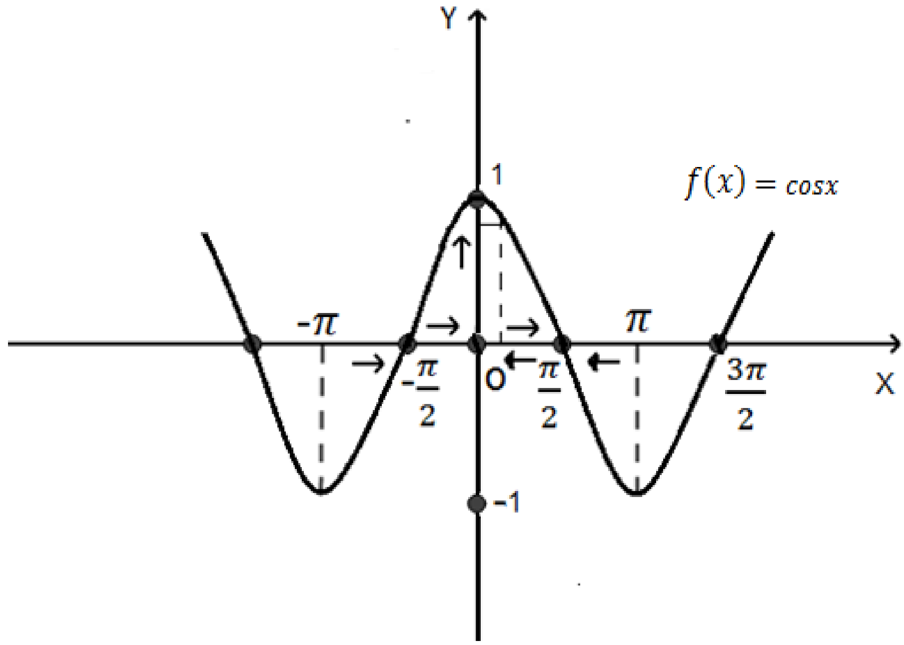


Figura 43. Gráfica del límite de la función coseno

16.1. $x \to 0^+ \;\Rightarrow\; cosx \to 1^-$

16.2. $x \to 0^- \;\Rightarrow\; cosx \to 1^-$

16.3. $x \to 0 \;\Rightarrow\; cosx \to 1^-$

$$\lim_{x \to 0} cosx = 1^-$$

16.4. $x \to \pi/2^+ \;\Rightarrow\; cosx \to 0^-$

16.5. $x \to \pi/2^- \;\Rightarrow\; cosx \to 0^+$

16.6. $x \to \pi/2 \;\Rightarrow\; cosx \to 0$

$$\lim_{x \to \pi/2} cosx = 0$$

xvii) Función trigonométrica: Función tangente. $\boldsymbol{f(x) = tg\ x}$

$$dom(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z}\right\}$$

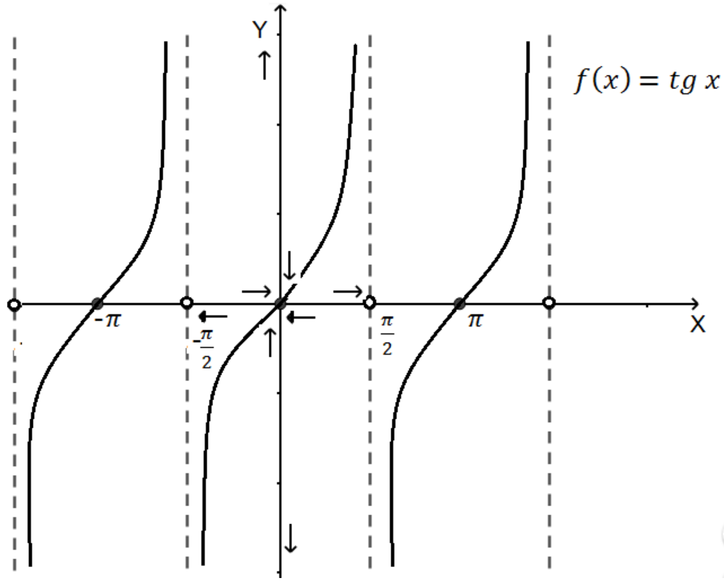


Figura 43. Gráfica del límite de la función tangente

17.1. $x \to 0^+ \;\Rightarrow\; tgx \to 0^+$

17.2. $x \to 0^- \;\Rightarrow\; tgx \to 0^-$

17.3. $x \to 0 \;\Rightarrow\; tgx \to 0$

$$\lim_{x \to 0} tgx = 0$$

17.4. $x \to \pi/2^- \;\Rightarrow\; tgx \to +\infty$

17.5. $x \to \frac{\pi}{2}^+ \;\Rightarrow\; tgx \to -\infty$

xviii) Función trigonométrica: Función cotangente. $\boldsymbol{f(x) = ctg}\ x$

$$dom(f) = \mathbb{R} - \{k\,\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

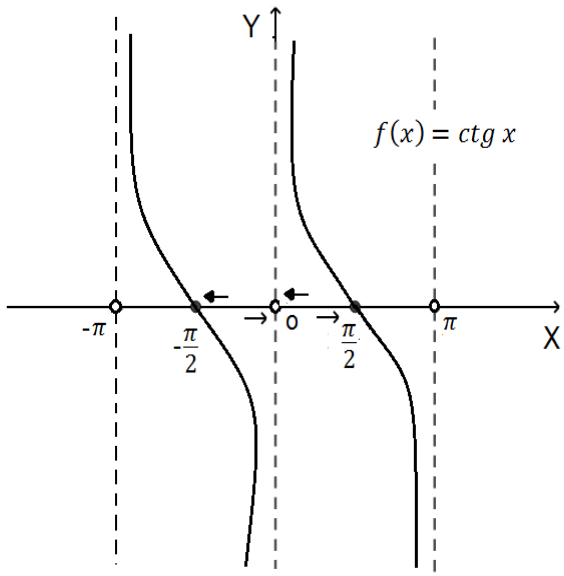


Figura 44. Gráfica del límite de la función cotangente

18.1. $x \to 0^+ \ \Rightarrow \ ctgx \to +\infty$

18.2. $x \to 0^- \ \Rightarrow ctgx \to -\infty$

18.3. $x \to \pi/2^- \ \Rightarrow \ ctgx \to 0^+$

18.4. $x \to \frac{\pi}{2}^+ \ \Rightarrow ctgx \to 0^-$

18.5. $x \to \pi/2 \ \Rightarrow \ ctgx \to 0$

$$\lim_{x \to \pi/2} ctgx = 0$$

xix) Función trigonométrica: Función secante. $\boldsymbol{f(x) = sec\ x}$

$$dom(f) = \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \wedge k \in \mathbb{Z}\right\}$$

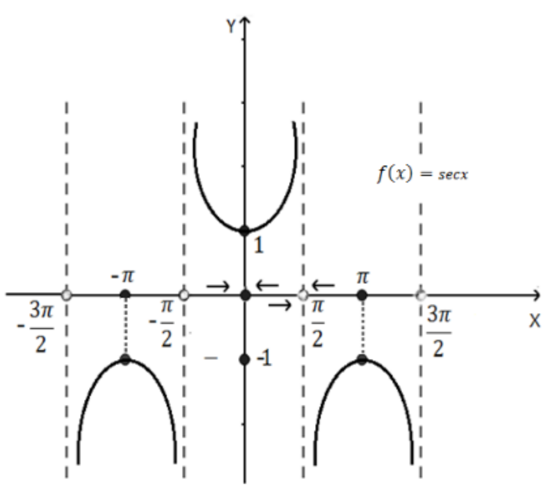


Figura 45. Gráfica del límite de la función secante

19.1. $x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad secx \to 1^+$

19.2. $x \to 0^- \quad \Rightarrow \quad secx \to 1^+$

19.3. $x \to 0 \quad \Rightarrow \quad secx \to 1^+$

$$\lim_{x \to 0} secx = 1^+$$

19.4. $x \to \pi/2^- \quad \Rightarrow \quad secx \to +\infty$

19.5. $x \to \frac{\pi^+}{2} \quad \Rightarrow \quad secx \to -\infty$

xx) Función trigonométrica: Función cosecante. $\boldsymbol{f(x) = csc\,x}$

$dom(f) = \mathbb{R} - \{k\,\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$

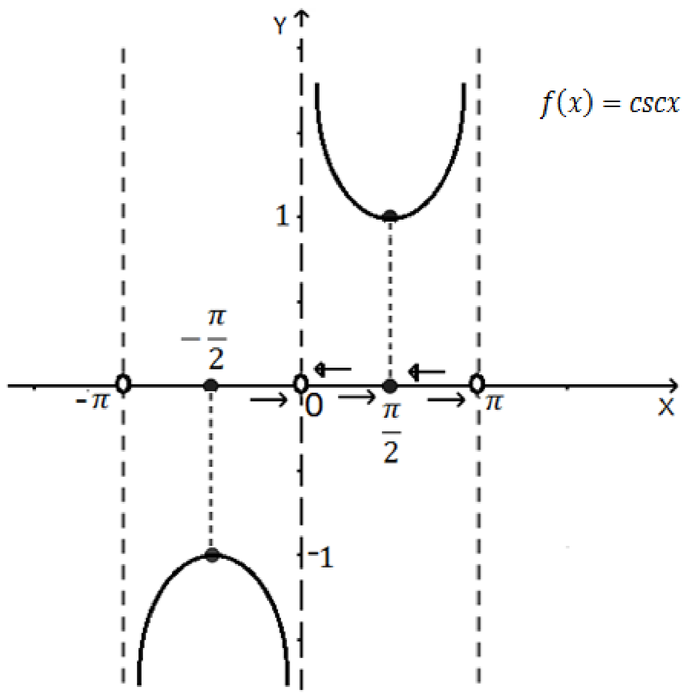


Figura 46. Gráfica del límite de la función secante

20.1. $x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad cscx \to +\infty$

20.2. $x \to 0^- \quad \Rightarrow \quad cscx \to -\infty$

20.3. $x \to \pi/2^- \quad \Rightarrow \quad cscx \to 1^+$

20.4. $x \to \frac{\pi^+}{2} \quad \Rightarrow \quad cscx \to 1^+$

20.5. $x \to \pi/2 \quad \Rightarrow \quad cscx \to 1^+$

$$\lim_{x \to \pi/2} cscx = 1^+$$

xxi) Función trigonométrica inversa: Función arcoseno. $\boldsymbol{f(x) = arcsen\ x}$

$$dom(f) = [-1,1]$$

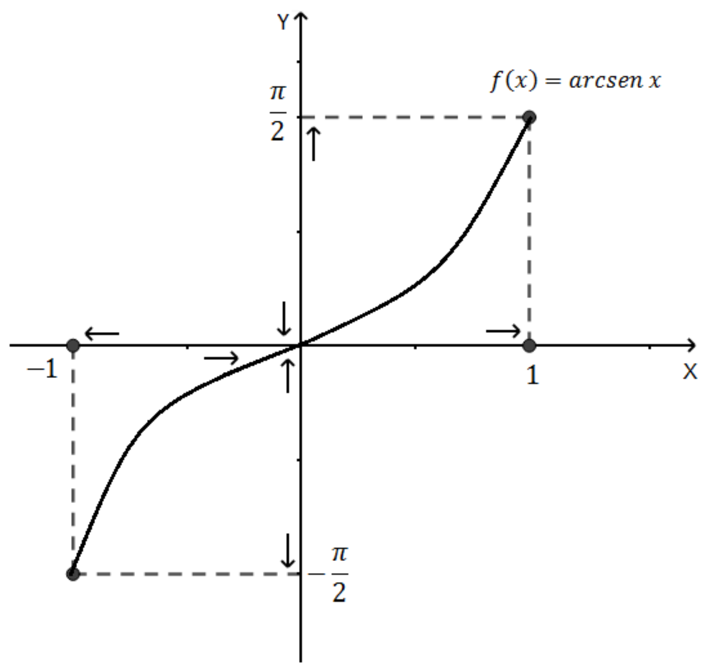


Figura 47. Gráfica del límite de la función arcoseno

21.1. $x \to 0^+ \quad \Rightarrow \quad arcsen\ x \to 0^+$

21.2. $x \to 0^- \quad \Rightarrow \quad arcsen\ x \to 0^-$

21.3. $x \to 0 \Rightarrow \quad arcsen\ x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} arcsen\ x = 0$$

21.4. $x \to 1^- \quad \Rightarrow \quad arcsen\ x \to \frac{\pi}{2}^-$

21.5. $x \to -1^+ \quad \Rightarrow \quad arcsen\ x \to -\frac{\pi}{2}^+$

xxii) Función trigonométrica inversa: Función arcocoseno. $\boldsymbol{f(x) = arccos\ x}$

$dom(f) = [-1,1]$

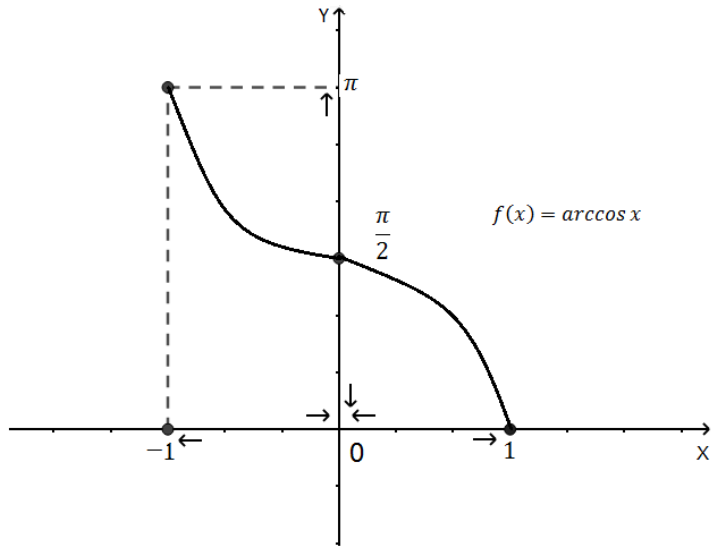


Figura 48. Gráfica del límite de la función arcocoseno

22.1. $x \to 0^{+} \;\Rightarrow arccos\,x \to \frac{\pi^{-}}{2}$

22.2. $x \to 0^{-} \;\Rightarrow arccos\,x \to \frac{\pi^{+}}{2}$

22.3. $x \to 0 \Rightarrow \; arccos\,x \to \pi/2$

$$\lim_{x \to 0} arccos\,x = \pi/2$$

22.4. $x \to 1^{-} \;\Rightarrow\; arccos\,x \to 0^{+}$

22.5. $x \to -1^{+} \;\Rightarrow\; arccos\,x \to \pi^{-}$

xxiii) Función trigonométrica inversa: Función arcotangente.

$\boldsymbol{f(x) = arctg\,x}$

$dom(f) = \mathbb{R}$

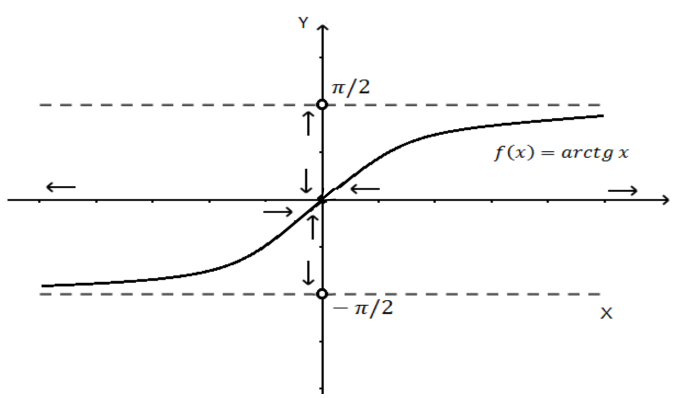


Figura 49. Gráfica del límite de la función arco tangente

23.1. $x \to 0^+ \quad \Rightarrow arctg\ x \to 0^+$

23.2. $x \to 0^- \quad \Rightarrow arctg\ x \to 0^-$

23.3. $x \to 0 \Rightarrow \quad arctg\ x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} arctg\ x = 0$$

23.4. $x \to +\infty \quad \Rightarrow\ arctg\ x \to \frac{\pi}{2}^-$

23.5. $x \to -\infty \quad \Rightarrow\ arctg\ x \to \frac{\pi}{2}^+$

xxiv) Función trigonométrica inversa: Función arcocotangente.

$\boldsymbol{f(x) = arcctg\ x}$

$dom(f) = \mathbb{R}$

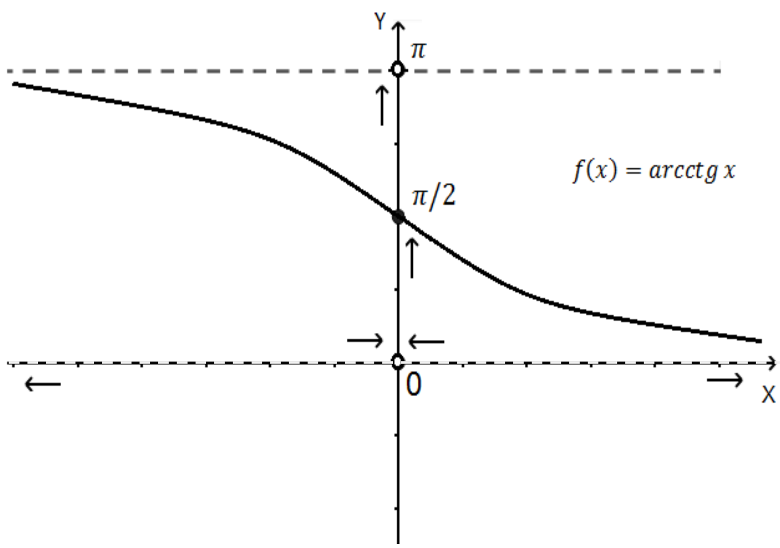


Figura 50. Gráfica del límite de la función arcocotangente

24.1. $x \to 0^+ \quad \Rightarrow arcctg\ x \to \frac{\pi}{2}^-$

24.2. $x \to 0^- \quad \Rightarrow arcctg\ x \to \frac{\pi}{2}^+$

24.3. $x \to 0 \Rightarrow \quad arcctg\ x \to \pi/2$

$$\lim_{x \to 0} arcctg\ x = \pi/2$$

24.4. $x \to +\infty \quad \Rightarrow\ arcctg\ x \to 0^+$

24.5. $x \to -\infty \quad \Rightarrow\ arcctg\ x \to \pi^-$

xxv) Función trigonométrica inversa: Función arcosecante.

$\boldsymbol{f(x) = arcsec\ x}$

$dom(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$

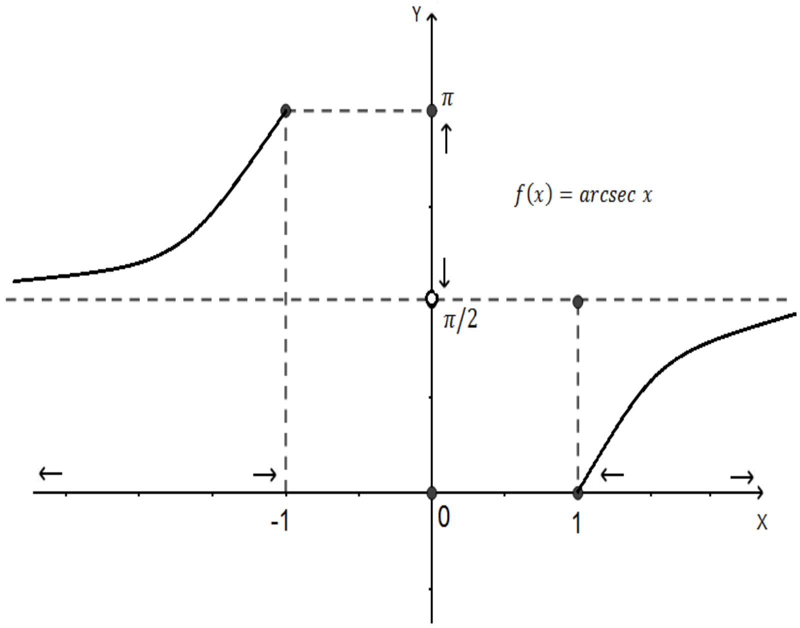


Figura 51. Gráfica del límite de la función arcosecante

25.1. $x \to 1^{+} \ \Rightarrow arcsecx \to 0^{+}$

25.2. $x \to -1^{-} \ \Rightarrow arcsecx \to \pi^{-}$

25.3. $x \to +\infty \Rightarrow \ arcsecx \to \frac{\pi^{-}}{2}$

25.4. $x \to -\infty \ \ \Rightarrow \ arcsecx \to \frac{\pi^{+}}{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} arcsecx = \frac{\pi^{+}}{2}$$

xxvi) Función trigonométrica inversa: Función arcocosecante.

$\boldsymbol{f(x) = arccsc}$

$dom(f) = \langle -\infty, -1] \cup [1, +\infty\rangle$

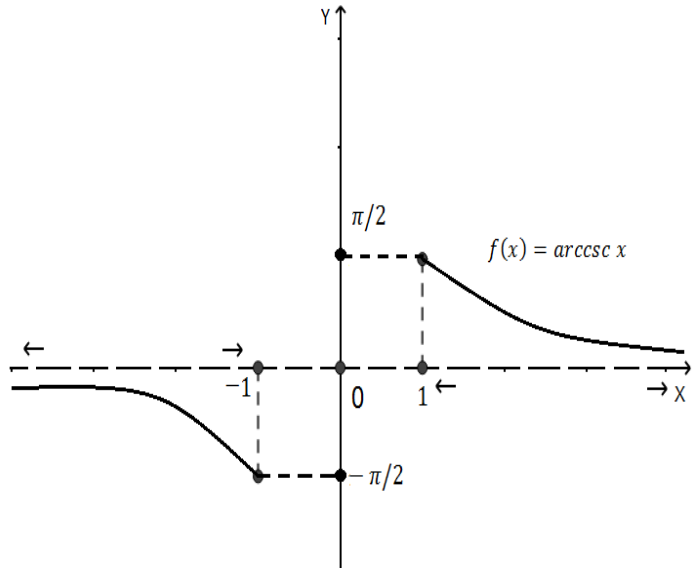


Figura 52. Gráfica del límite de la función arcocosecante

26.1. $x \to 1^{+} \Rightarrow arccscx \to \frac{\pi}{2}^{-}$

26.2. $x \to -1^{-} \Rightarrow arccscx \to \frac{\pi}{2}^{+}$

26.3 $x \to +\infty \Rightarrow arccscx \to 0^{+}$

26.4. $x \to -\infty \Rightarrow arccscx \to 0^{-}$

$$\lim_{x \to -\infty} arccscx = 0^{-}$$

2.3.12.2. LÍMITE DE FUNCIONES BÁSICAS CON LA DEFINICIÓN

Definición: La definición de límite de una función se basa en la estructura de espacio métrico de ℝ, donde tiene sentido el concepto de punto de acumulación y el $\mathcal{E} - \mathcal{S}$. En esta parte, el límite de una función básica solo tendrá una interpretación gráfica y será expresada en base a intervalos abiertos, donde se utiliza $\mathcal{E} - \mathcal{S}$. El uso de la definición se deja para otra etapa del estudio de límite. Estudiaremos solo algunas funciones básicas y no 26 como en los casos anteriores, es mediante ejemplos específicos.

Definición: sea $f: A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$, una funcion; x_0 un punto de acumulación del dominio de f.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) tal\ que\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Con esta definición se demuestra que L es límite de f en x_0.

i) Función identidad: $f(x) = x$

Ejemplo: $\lim_{x \to 2} x = 2$

a) Interpretación geométrica.

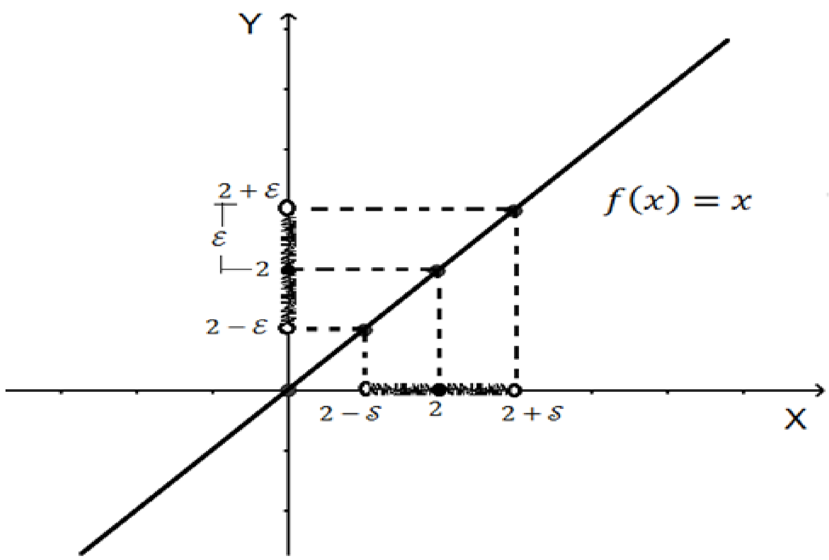


Figura 53. Gráfica, definición de límite de la función básica identidad

b) Interpretación analítica (relación de intervalos abiertos)

1. $\lim_{x \to 2} x = 2$
2. $. x \to 2 \Rightarrow x \to 2$
3. $(x \to 2^- \wedge x \to 2^+) \Rightarrow (x \to 2^- \wedge x \to 2^+)$

4. $x \in \langle 2-\mathcal{S}\,, 2+\mathcal{S}\rangle \Rightarrow x \in \langle 2-\mathcal{E}\,, 2+\mathcal{E}\rangle$

ii) Función cuadrática: $f(x) = x^2$

Ejemplo 1: $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

a) Interpretación geométrica.

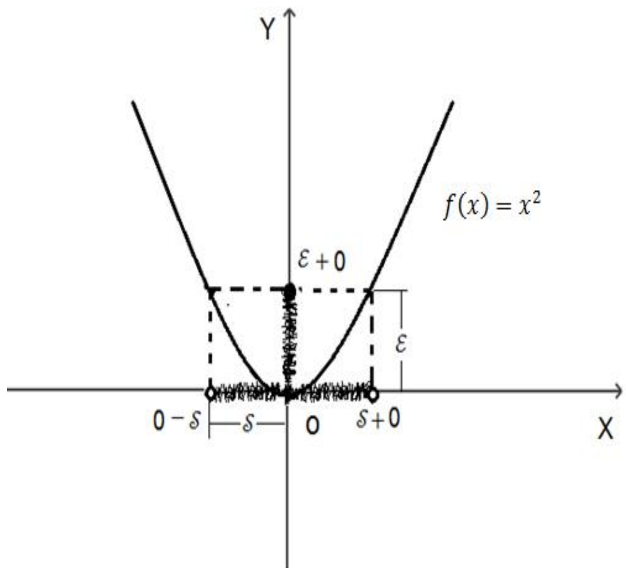


Figura 54. Gráfica, definición de límite de la función cuadrática básica

b) Interpretación analítica (relación de intervalos abiertos)

1. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$
2. $x \to 0 \Rightarrow x^2 \to 0$
3. $(x \to 0^- \wedge x \to 0^+) \Rightarrow x^2 \to 0^+$
4. $x \in \langle -\mathcal{S}\,, \mathcal{S}\rangle \Rightarrow x^2 \in \langle 0, \mathcal{E}\rangle$

Ejemplo 2: $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

a) Interpretación geométrica.

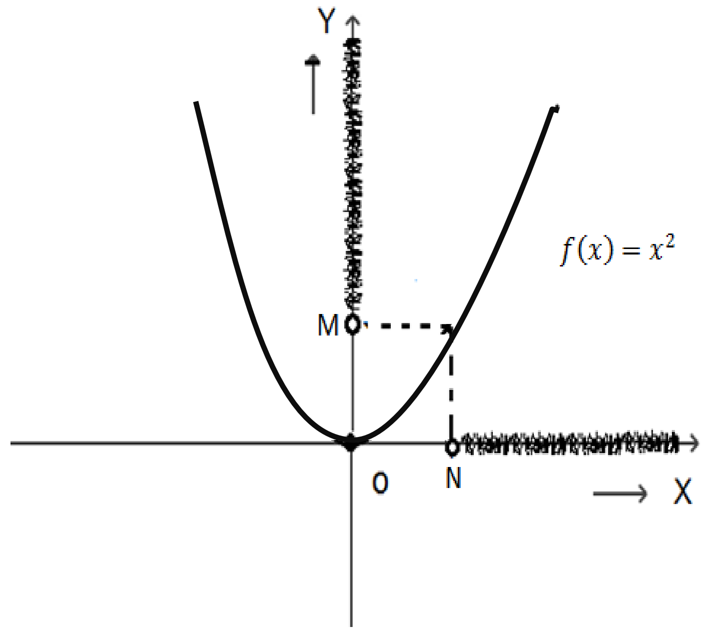


Figura 55. Gráfica, definición de límite de la función cuadrática básica

b) Interpretación analítica (relación de intervalos abiertos)

1. $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
2. $x \to +\infty \Rightarrow x^2 \to +\infty$
3. $x > N \Rightarrow x^2 > M$
4. $x \in \langle N, +\infty\rangle \Rightarrow x^2 \in \langle M, +\infty\rangle$

iii) Función racional básica: $f(x) = \frac{1}{x}$

Ejemplo 1: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

a) Interpretación geométrica.

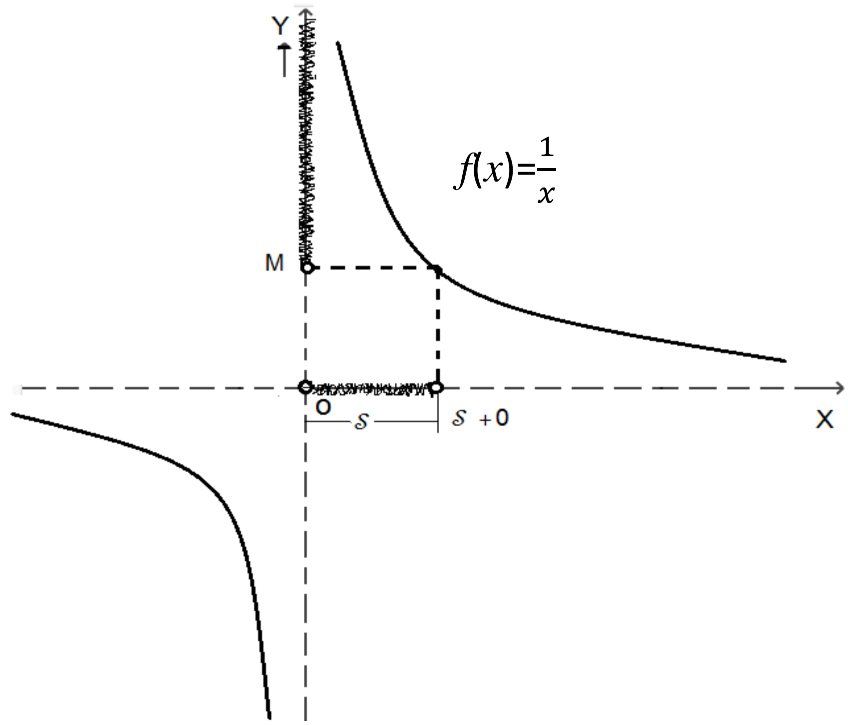


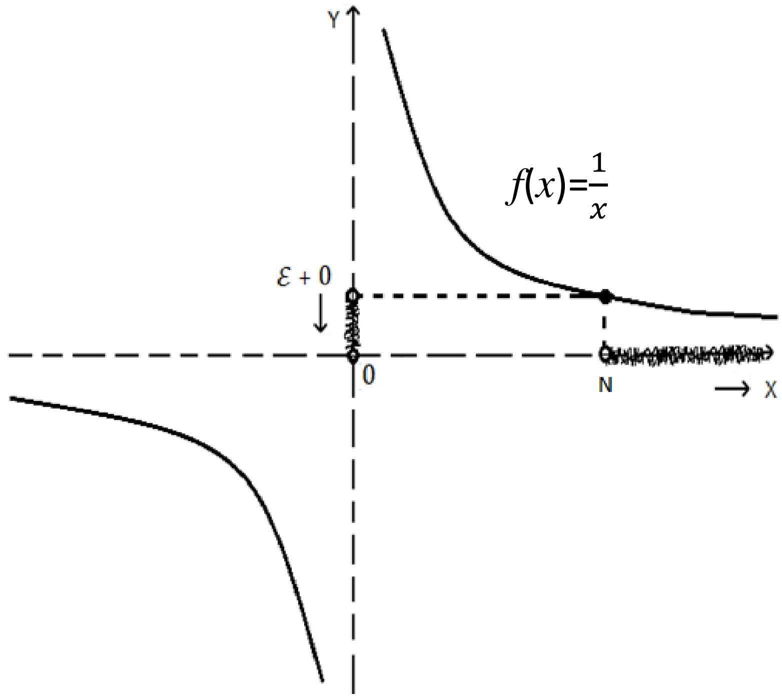
Figura 56. Gráfica, definición de límite de la función racional básica

b) Interpretación analítica (relación de intervalos abiertos)

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
2. $x \to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \to +\infty$
3. $x \in \langle 0\,, \delta \rangle \Rightarrow \frac{1}{x} \in \langle M, +\infty \rangle$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

a) Interpretación geométrica.



onal

b

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

2. $x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \to 0^+$

3. $x > N \Rightarrow \frac{1}{x} \in \langle 0 , \varepsilon \rangle$

4. $x \in \langle N , +\infty \rangle \Rightarrow \frac{1}{x} \in \langle 0 , \varepsilon \rangle$

iv) Función trigonométrica: función seno. $\boldsymbol{f(x) = senx}$

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x \to \pi/2} senx = 1$

a) Interpretación geométrica.

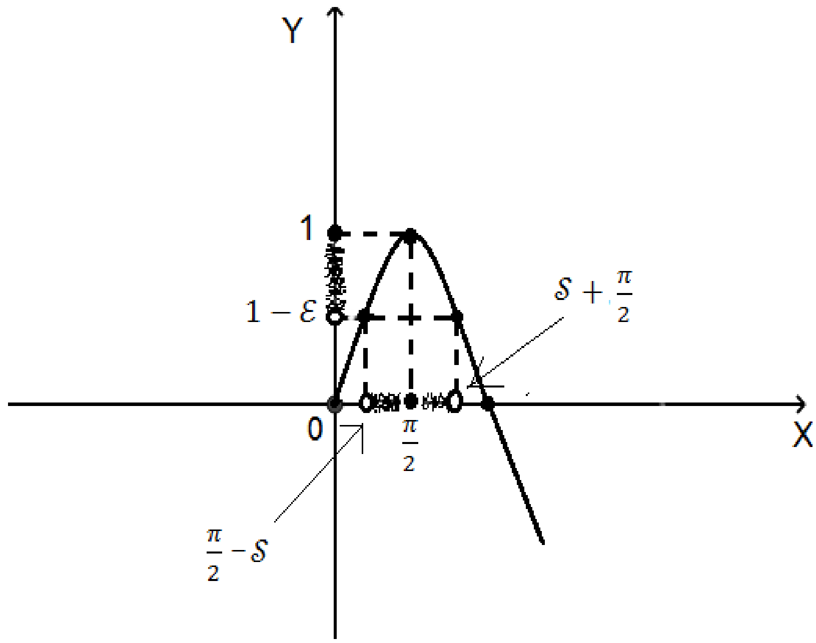


Figura 58. Gráfica, definición de límite la función seno

b) Interpretación analítica (relación de intervalos abiertos)

1. $\lim_{x \to \pi/2} senx = 1^-$
2. $x \to \pi/2 \Rightarrow senx \to 1^-$
3. $x \in \langle \frac{\pi}{2} - \mathcal{S}, \frac{\pi}{2} + \mathcal{S} \rangle \Rightarrow senx \in \langle 1 - \mathcal{E}, 1 \rangle$

2.3.12.3. LÍMITE DE LAS OPERACIONES BÁSICAS CON FUNCIONES BÁSICAS.

Con las funciones básicas se efectúan operaciones de: adición, sustracción, multiplicación, división, y la composición. A continuación, enunciamos los límites de las operaciones básicas.

Definición. Sean f y g dos funciones básicas tales que: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$ y K una constante real.

1. $\lim\limits_{x \to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = k\,L$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L + M$

3. $\lim\limits_{x \to x_0} (f.g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L.M$

4. $\lim\limits_{x \to x_0} (f/g)(x) = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L}{M} \wedge M \neq 0$

5. $\lim\limits_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f[\lim\limits_{x \to x_0} g(x)]$

2.3.13. Derivada de las funciones básicas.

La definición de derivada constituye una herramienta fundamental para conocer el comportamiento de las funciones: crecimiento o decrecimiento, máximo o mínimo locales, concavidad o convexidad, situación de la gráfica respecto de las tangentes, aproximación a los valores en las proximidades de un punto x, etc. La definición de derivada es una aplicación del límite, por eso se puede estudiar derivada por la izquierda y por la derecha. La derivada de una función básica puede estudiarse en un punto específico del dominio o en todo su dominio, también puede estudiarse la derivada de una función en los intervalos

$\langle a,b\rangle, [a,b\rangle, \langle a,b], [a,b]$. El dominio de la función derivada es parte del dominio de la función.

El concepto de derivada puede presentarse al estudiar:

1. La pendiente de la recta tangente a una curva (geométricamente y analíticamente).
2. Velocidad instantánea.

A continuación, damos dos definiciones:

1. Derivada de una función $y = f(x)$ en un punto $x_0 \in I$

   Definición: **S**ea $f\colon I \to \mathbb{R}$ $una\ función\ , x_0 \in I$

   l$a\ derivada\ de\ f\ \ en\ \ x_0\ \ \ es$:

$$f'(x_0) = \begin{matrix} lím \\ x \to x_0 \end{matrix} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. La derivada de una función en su dominio o la función derivada.

$$f'(x) = \begin{matrix} lím \\ x \to 0 \end{matrix} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

La derivada de una función básica la podemos estudiar con las dos definiciones, pero para tener un resultado general es preferible utilizar la segunda definición. No es necesario aplicar la segunda definición a todas las funciones básicas, ya que algunas (trigonométricas) son definidas en base a otras funciones básicas, en este caso se puede utilizar la derivada de las operaciones básicas de funciones básicas, que a continuación la presentamos.

Definición. Sean $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones que son derivables en cada uno de los elementos de I , luego se tiene:

1. $(kf)'(x) = k \quad f'(x)$
2. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
3. $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
4. $(f+g)'(x) = f'(x) \;\; g'(x) + f'(x) \;\; g'(x)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \;\; g(x) - f(x) \;\; g'(x)}{g^2(x)}$
6. $(f \circ g)'(x) =$

   $f'\big(g(x)\big)g'(x), con\ f\ y\ g\ \ definimos\ adecuadamente.$

A continuación, estudiamos la derivada de las funciones básicas.

i) Función constante: $\boldsymbol{f(x) = k}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} \quad 0 = 0$$

$$f'(x) = 0$$

ii) Función identidad: $\boldsymbol{f(x) = x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(x) = 1$$

iii) Función cuadrática: $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2) - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(2x + h)h}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

iv) Función cúbica: $\boldsymbol{f(x) = x^3}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3) - x^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(3x^2 + 3hx + h^2)h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2)$$

$$f'(x) = 3x^2$$

v) Función raíz cuadrada: $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

vi) Función raíz cúbica: $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h)^{1/3} - x^{1/3}\right]\left[(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}\, x^{1/3} + x^{2/3}\right]}{h\left[(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}\, x^{1/3} + x^{2/3}\right]}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x)}{h\left[(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}\, x^{1/3} + x^{2/3}\right]}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}\, x^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

vii) Función racional: $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

viii) Función signo: $\boldsymbol{f(x) = sgn(x)}$

Para estudiar la derivada de esta función se requiere de la definición de derivada lateral (por la derecha e izquierda).

Definición.

1. $f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
2. $f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

1. $f(x) = sgn(x) = 1 \wedge x > 0$
   - $f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
   - $f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{1-1}{h} = \lim_{h \to 0^{+}} 0 = 0$
   - $f'_{+}(x) = 0$

2. $f(x) = sgn(x) = 0 \wedge x = 0$

   $f'(x) = 0$
3. $f(x) = sgn(x) = -1 \wedge x < 0$
   - $f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
   - $f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{(-1)-(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^{+}} 0 = 0$
   - $f'_{-}(x) = 0$

ix) Función máximo entero: $\boldsymbol{f(x) = [\![x]\!] = n \wedge n \leq x < n+1}$

- $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

- $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[\![x+h]\!]-[\![x]\!]}{h} \wedge \quad n \leq x < n+1$
- $f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{n-n}{h}\right) = \lim_{h \to 0} 0 \ \wedge \ \ n \leq x < n+1$
-
- $f'(x) = \ 0 \wedge n \leq x < n+1$ (la derivada se calcula en cada intervalo).

x) Función valor absoluto: $\boldsymbol{f(x) = |x|}$ $\boldsymbol{(derivadas\ laterales)}$

1. $f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
   - $f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{|x+h|-|x|}{h}$
   - $f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0^{+}} = 1$
   - $f'_{+}(x) = 1$

2. $f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
   - $f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h \to 0^{-}} \frac{-(x+h)-(-x)}{h}$
   - $f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0^{+}} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^{-}}(-1) = -1$
   - $f'_{-}(x) = -1$

xi) Función exponencial: Esta función se considera en un solo caso**.**

$\boldsymbol{f(x) = a^{x} \wedge a > 0 \wedge a \neq 1}$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \begin{matrix} lím \\ h \to 0 \end{matrix} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \begin{matrix} lím \\ h \to 0 \end{matrix} a^x \frac{(a^h - 1)}{h}$$

$$f'(x) = a^x \begin{matrix} lím \\ h \to 0 \end{matrix} \left(\frac{a^h - 1}{h}\right) \wedge \begin{matrix} lím \\ h \to 0 \end{matrix} \frac{(a^h - 1)}{h} = lna$$

$$f'(x) = a^x . lna.$$

xii) Función logaritmo: Esta función se considera en un solo caso.

$\boldsymbol{f(x) = log_a^x \wedge a > 0 \wedge a \neq 1.}$

$$f'(x) = \begin{matrix} lím \\ h \to 0 \end{matrix} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \begin{matrix} lím \\ h \to 0 \end{matrix} \frac{log_a (x+h) - log_a x}{h} = \begin{matrix} lím \\ h \to 0 \end{matrix} \frac{1}{h} log_a \left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$f'(x) = \begin{matrix} lím \\ h \to 0 \end{matrix} \; log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}.\frac{1}{x}}$$

$$= log_a \left(\begin{matrix} lím \\ x/h \to 0 \end{matrix} \left[\left(1 + \frac{1/x}{h}\right)^{x/h} \right] \right)^{1/x}$$

$$f'(x) = log_a e^{1/x} = \frac{1}{x} . log_a e = \frac{1}{x} \; \frac{lne}{lna}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \, lna}.$$

xiii) Función trigonométrica: $\boldsymbol{f(x) = senx}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{senx\ cosh + senh.cosx - senx}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{senx(\ cosh - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{senh\ cosx}{h}$$

$$f'(x) = senx \lim_{h \to 0} \frac{(\ cosh - 1)}{h} + cosx \lim_{h \to 0} \frac{senh}{h}$$

$$f'(x) = senx \lim_{h \to 0} \frac{-(1 - cos^2 h)}{h(1+cosh)} + cosx(1) \wedge \lim_{h \to 0} \frac{senh}{h} = 1$$

$$f'(x) = senx \lim_{h \to 0} \frac{(-\ sen^{\,2} h).}{h^2}\ h.\left(\frac{1}{1 + cosh}\right) + \quad cosx$$

$$f'(x) = senx.(-1) \lim_{h \to 0} \quad h. \lim_{h \to 0} \frac{1}{(1 + \cosh)} + \quad cosx$$

$$f'(x) = senx(-1)(0)\ \left(\frac{1}{2}\right) + cosx$$

$$f'(x) = senx(0) + cosx$$

$$f'(x) = cosx.$$

xiv) Función trigonométrica: $\boldsymbol{f(x) = cosx}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \quad \frac{cos(x+h) - cosx}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{cosx\ cosh - senx.senh - cosx}{h}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left[-senx \, . \, \frac{senh}{h} - cosx \frac{(1 - cosh)}{h} \right]$$

$$f'(x) = -senx \lim_{h \to 0} \left(\frac{senh}{h} \right) - cosx \lim_{h \to 0} \frac{(1 - cos^2 h)}{h^2 (1 + cosh)} . h$$

$$f'(x) = -senx(1)$$

$$- cosx \lim_{h \to 0} \left(\frac{sen^2 h}{h^2} \right) \lim_{h \to 0} h \lim_{h \to 0} \frac{1}{(1 + \cosh)}$$

$$f'(x) = -senx - cosx \, (1)(0) \left(\frac{1}{2} \right) = -senx$$

$$f'(x) = -senx.$$

xv) Función trigonométrica. Las otras funciones trigonométricas están definidas en función de senx y cosx, para hallar su derivada la obtenemos aplicando la derivada de las operaciones básicas con funciones básicas. Función trigonométrica. $f(x) = tgx = \frac{senx}{cosx}$ (utilidad de las identidades trigonométricas)

- $f'(x) = \left(\frac{senx}{cosx} \right)'$
- $f'(x) = \frac{(senx)' cosx - (senx)(cosx)'}{h}$
- $f'(x) = \frac{cosx.cosx - (senx)(-senx)}{(cosx)^2}$
- $f'(x) = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{(cosx)^2} = \left(\frac{1}{cosx} \right)^2 = sec^2 x$
- $f'(x) = sec^2 \, x$

xvi) Función trigonométrica: $f(x) = ctgx = \frac{cosx}{senx}$

- $f'(x) = \left(\frac{cosx}{senx}\right)'$
- $f'(x) = \frac{(cosx)'(senx)-(cosx)(senx)'}{(cosx)^2}$
- $f'(x) = \frac{(-senx)(senx)-(cosx).(cosx)}{(senx)^2}$
- $f'(x) = \frac{-sen^2x- cos^2x}{sen^2x} = -\frac{(sen^2x+cos^2x)}{sen^2x} = -\frac{1}{sen^2x}$
- $f'(x) = -\left(\frac{1}{senx}\right)^2 = -\ csc^2\ x$

xvii) Función trigonométrica: $\boldsymbol{f(x) = secx = \frac{1}{cosx}}$

- $f'(x) = \left(\frac{1}{cosx}\right)'$
- $f'(x) = \frac{(1')(cosx)-(1)(cosx)'}{(cosx)^2}$
- $f'(x) = \frac{0.cosx-(senx)}{cos^2x} = \frac{senx}{cosx} \cdot \frac{1}{cosx}$
- $f'(x) = secx.tgx$

xviii) Función trigonométrica: $\boldsymbol{f(x) = cscx = \frac{1}{senx}}$

- $f'(x) = \left(\frac{1}{senx}\right)'$
- $f'(x) = \frac{(1')(senx)-(1)(senx)'}{(senx)^2}$
- $f'(x) = \frac{(0)(senx)-cosx}{sen^2x} = \frac{cosx}{senx} \cdot \frac{1}{senx}$

- $f'(x) = cscx.ctgx$

xix) Función trigonométrica inversa. La derivada de estas funciones no se halla utilizando la definición en base a límite, sino en base a su relación con la función trigonométrica y su derivada con la ayuda de las identidades trigonométricas.

$\boldsymbol{f(x) = arcsen}$ ó $\boldsymbol{y = arcsenx}$

- $y = arcsenx \;\; \leftrightarrow \;\; x = seny$
- $x' = (seny)'$
- $1 =$
  $\cos y\,.\,y'$ $(derivada\ de\ la\ composición\ de\ dos\ funciones)$
- $y' = \frac{1}{cosy} \;\wedge\; sen^2y + cos^2y = 1$
- $y' = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

xx) Función trigonométrica inversa: $\boldsymbol{f(x) = arccosx}$ ó $\boldsymbol{y = cosx}$

- $y = arcsenx \;\; \leftrightarrow \;\; x = seny$
- $x' = (cosy)'$
- $1 = \operatorname{sen} y\,.\,y'$
- $y' = \frac{-1}{seny} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

xxi) Función trigonométrica Inversa: $\boldsymbol{f(x) = arctgx}$ ó $\boldsymbol{y = arctgx}$

- $y = arctgx \;\; \leftrightarrow \;\; x = tgy$
- $x' = (tgy)'$
- $1 = sec^{\,2}\, y. y\,'$
- $y' = \frac{1}{sec^{\,2}\, y} \wedge \; sec^2 y = \; 1 + tg^2 y$
- $y' = \frac{1}{1+tg^{\,2}\, y} = \frac{1}{1+x^{\,2}}$
- $f'(x) = \frac{1}{1+x^{\,2}}$

xxii) Función trigonométrica inversa: $\boldsymbol{f(x) = arcctgx}$ ó $\boldsymbol{y = arcctgx}$

- $y = arcctgx \;\; \leftrightarrow \;\; x = ctgy$
- $x' = (ctgy)'$
- $1 = -csc^{\,2}\, y. y\,'$
- $y' = -\,\frac{1}{csc^{\,2}\, y} \wedge \; ctg^2 y = \; 1 + ctg^2 y$
- $y' = \frac{-1}{1+ctg^{\,2}\, y} = \frac{-1}{1+x^{\,2}}$
- $f'(x) = \frac{-1}{1+x^{\,2}}$

xxiii) Función trigonométrica inversa: $\boldsymbol{f(x) = arcsecx}$ ó $\boldsymbol{y = arcsecx}$

- $y = arcsecx \;\leftrightarrow\; x = secy$
- $x' = (secy)'$
- $1 = secy.tg\, y.\; y\,'$
- $y' = \frac{1}{secy.tgy} \wedge\; sec^2y = \; 1 + tg^2y.$
- $y' = \frac{1}{x\sqrt{sec^2y-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

xxiv) Función trigonométrica inversa: $\boldsymbol{f(x) = arccscx}$ ó $\boldsymbol{y = arccscx}$

- $y = arccscx \;\leftrightarrow\; x = cscy$
- $x' = (cscy)'$
- $1 = -cscy.ctg\, y.\; y\,'$
- $y' = \frac{-1}{cscy.ctgy} \wedge\; csc^2y = \; 1 + ctg^2y.$
- $y' = \frac{-1}{cscy\sqrt{csc^2y-1}} = -\,\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
- $f'(x) = -\,\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

2.3.14. Aplicación de la estrategia analítica en el cálculo diferencial

2.3.14.1. SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES.

i) Estrategia analítica y la demostración de un teorema

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para demostrar teoremas.

Ejemplo 1. Demostrar $x.0 = 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Estructura de la estrategia analítica para la demostración de un teorema.

1. Enunciado del teorema; $(\forall x \in \mathbb{R}): x.0 = 0$
2. Nombre del objeto de estudio: Teorema
3. Área de matemática: Calculo diferencial
4. Unidad didáctica: Números reales
5. Identificar los conceptos no definidos: número real: $x, 0$; $a = b$
6. Identificar los conceptos definidos: *a. b*
7. Identificar los axiomas: en el proceso de la demostración.
8. Identificar los teoremas: en el proceso de la demostración
9. Formalización del enunciado del teorema. Ya está formalizado el teorema.
10. Demostración del teorema.

    10.1.Identificar el método de demostración: el método es el directo.

    10.2.Proceso de la demostración del teorema.

    1. $x.0 = 0$ (enunciado del teorema)
    2. $x.0 = x.0 + 0 \quad (ax.a + 0 = a)$
    3. $x.0 + 0 = x.0 + [x + (-x)]\ (ax.a + (-a) = 0)$
    4. $x.0 + [x + (-x)] = (x.0 + x) + (-x)(ax.(a + b) + c = a + (b + c))$
    5. $(x.0 + x) + (-x) = (x.0 + x.1) + (-x)\ (ax.a.1 = a)$

6. $(x.0 + x.1) + (-x) = x.(0 + 1) + (-x)$ $(ax. a.b + a.c = a(b + c))$

7. $x(0 + 1) + (-x) = x.1 + (-x)(ax. a + 0 = a)$

8. $x.1 + (-x) = x + (-x)$ $(ax. a.1 = a)$

9. $x + (-x) = 0$ $(ax. a + (-a) = 0)$

10. $x.0 = 0$ $(ax. a = b \wedge b = c \rightarrow a = c)$

11. Resumen de la teoría.

1. Conceptos no definidos (2): número real y la relación de igualdad.
2. Conceptos definidos (2): adición y multiplicación de números reales.
3. Axiomas (6): $a + 0 = a,$ $a + (-a) = 0,$ $a.1 = a,$

   $(a + b) + c = a + (b + c), a.(b + c) = ab + ac, (a = b \wedge b = c) \rightarrow a = c$
4. Teorema (0).

Ejemplo 2. Demostrar: $xy = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

Estructura de la estrategia analítica para la demostración de un teorema.

1. Enunciado del teorema, $xy = 0 \leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$
2. Nombre del objeto en estudio: Teorema
3. Área de la matemática: Calculo diferencial
4. Unidad didáctica: Números reales.
5. Identificar los conceptos no definidos: números reales: $x, y, 0;$ $a = b$
6. Identificar los conceptos definidos: $a.b, \frac{a}{b} = a.b^{-1} \wedge b \neq 0$
7. Identificar los axiomas: en el proceso de demostración.
8. Identificar los teoremas: en el proceso de demostración.

9. Formalización del enunciado del teorema.

9.1. Enunciar el teorema como proposición condicional o bicondicional. El teorema está enunciado como proposición bicondicional.

$E: xy = 0 \leftrightarrow (x = 0 \lor y = 0)$.

$E_1: xy = 0 \rightarrow (x = 0 \lor y = 0)$.

$E_2: (x = 0 \lor y = 0) \rightarrow xy = 0$

9.2. Identificar el antecedente y el consecuente.

E_1.

$A: xy = 0$

$C: x = 0 \quad \lor \quad y = 0$

E_2.

$A: x = 0 \quad \lor \quad y = 0$

$C: xy = 0$

9.3. Formalización del enunciado del teorema.

El teorema ya está formalizado.

10. Demostración del teorema.

10.1. Identificar el método de demostración: el método es indirecto.

Reducción al absurdo o Contradicción.

10.2. Proceso de la demostración del teorema. (E_1)

1. $xy = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
2. $[xy = 0 \wedge \sim (x = 0 \vee y = 0] \rightarrow C$ (nuevo enunciado, para aplicar, Reducción por el absurdo).
3. $xy = 0 \wedge \sim (x = 0 \vee y = 0)$ $(hip. del\ nuevo\ enunciado)$
4. $xy = 0 \wedge \sim (x = 0) \wedge \sim (y = 0)$ $(\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q)$
5. $xy = 0 \wedge x \neq 0 \ \wedge y \neq 0$ $(def. \sim (a = b) \equiv a \neq b)$
6. $(xy = 0 \wedge x \neq 0) \wedge y \neq 0$ $[(p \wedge q) \wedge r \ \equiv p \wedge (q \wedge r)]$
7. $(xy = 0 \wedge \exists x^{-1} \neq 0) \wedge \exists y^{-1} \neq 0$ $(ax. a. a^{-1} = 1)$
8. $x^{-1}xy = x^{-1}.0 \ \wedge \exists y^{-1} \neq 0$ $(T. a = b \rightarrow ac = bc)$
9. $(x^{-1}. x)y = 0 \wedge \exists y^{-1} \neq 0$ $(ax. a(bc) = (ab)c, T. a. 0 = 0)$
10. $1. y = 0 \wedge \exists y^{-1} \neq 0$ $(ax. a. a^{-1} = 1)$
11. $y = 0 \wedge \exists y^{-1} \neq 0$ $(ax. a. 1 = a)$
12. $y^{-1}. y = y^{-1}. 0$ $(T. a = b \rightarrow ac = bc)$
13. $1 = 0$ $(ax. a. a^{-1} = 1,\ T. a. 0 = 0)$
14. $1 = 0$ $(contradicción\ )$
15. $xy = 0 \rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

11. Resumen de la teoría.

1. Conceptos no definidos: Número real y relación de igualdad.
2. Conceptos definidos: multiplicación y negación de la igualdad
3. Axiomas. Números reales (3): $a. a^{-1} = 1, a. 1 = a, a(bc) = (ab)c$;

   $logica\ proporcional$(2):

   $(p \wedge q)r \equiv p \wedge (p \wedge r), \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

4. Teoremas(2): $a = b \rightarrow ac = bc, a.0 = 0$

Ejemplo 2. Demostrar: $(x^2 > a\ \wedge a > 0) \rightarrow (x < -\sqrt{a} \vee x > \sqrt{a})$

Estructura de la estrategia analítica para la demostración de un teorema.

1. Enunciado del teorema: $(x^2 > a\ \wedge a > 0) \rightarrow (x < -\sqrt{a} \vee x > \sqrt{a})$
2. Nombre del objeto matemático: Teorema
3. Área de la matemática: Calculo diferencial.
4. Unidad didáctica: Números reales
5. Identificar los conceptos no definidos: $a < b$, número real: x,a,0.
6. Identificar los conceptos definidos: $b = \sqrt{a}, a > b$
7. Identificar los axiomas: En el proceso de demostración
8. Identificar los teoremas: En el proceso de demostración
9. Formalización del enunciado del teorema.

   9.1.Enunciar el teorema como proposición condicional

   $T.\ (x^2 > a \wedge a > 0) \longrightarrow (x < -\sqrt{a} \vee x > \sqrt{a})$

   9.2. Identificar el antecedente y consecuente.

   $\boldsymbol{A}: \boldsymbol{x^2} > a \wedge a > 0$

   $\boldsymbol{C}: \boldsymbol{x} < -\sqrt{a} \vee x > \sqrt{a}.$

   9.3. Formalización del enunciado del teorema.

   El teorema ya está formalizado.

10. Demostración del teorema.

    10.1. Identificar el método de demostración: el método es directo.

10.2. Proceso de demostración.

1. $x^2 > a \ \wedge a > 0$ $(hip.)$
2. $x^2 > a \ \wedge a = \sqrt{a^2}$ $(T.\ \sqrt[n]{a^n} = a \wedge a > 0)$
3. $x^2 > a \ \wedge a = (\sqrt{a})^{\ 2}$ $(T.\ \sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n)$
4. $x^2 > (\sqrt{a})^2$ (ax. Principio de Sustitución)
5. $x^2 - (\sqrt{a})^2 > 0\ (def.\, a > b \leftrightarrow a - b > 0)$
6. $\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) > 0\ \ [T.\, a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$
7. $\left(x - \sqrt{a} > 0 \wedge x + \sqrt{a} > 0\right) \vee \left(x - \sqrt{a} < 0 \wedge x + \sqrt{a} < 0\right)$

   $[T.\ ab > 0 \leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0]$
8. $\left(x > \sqrt{a} \wedge x > -\sqrt{a}\right) \vee \left(x < \sqrt{a} \wedge x < -\sqrt{a}\right)$

   $(def.\ a - b > 0 \leftrightarrow a > b)$
9. $x > \sqrt{a} \vee x < -\sqrt{a}$ $(def.\, interseccion\ de\ intervalos)$

ii) Estrategia analítica y la resolución de ejercicios

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para resolver ejercicios.

Ejemplo 1: Resolver 3x+2=0.

La estrategia analítica tiene una estructura cuando se resuelve un ejercicio.

1. Enunciado de ejercicio, $3x + 2 = 0$
2. Nombre del objeto de estudio. Ecuación de primer grado con una variable.
3. Área de la matemática: Cálculo diferencial.
4. Unidad didáctica: Números reales.
5. Identificar los conceptos no definidos: número real: $3,2,0, x;\ a = b$

6. Identificar los conceptos definidos: $a + b, a. b, \frac{a}{b}$

7. Identificar los axiomas: En el proceso de resolución.

8. Identificar los teoremas. En el proceso de resolución

9. Resolución del ejercicio.

   a. $3x + 2 = 0$

   b. $3x + 2 + (-2) = 0 + (-2)$, $(T. a = b \ \rightarrow a + c = b + c$ $)$

   c. $3x + [2 + (-2)] = \ -2$;

      $(ax. (a + b) + c = a + (b + c), ax \,. a + 0 = a)$

   d. $3x + 0 = -2$; $(ax. a + (-a) = 0)$

   e. $3x = -2$; $(ax \,. a + 0 = a)$

   f. $3^{-1}. 3\, x = 3^{-1}. (-2)$; $(T. a = b \rightarrow ac = bc)$

   g. $(3^{-1}. 3)x = -\frac{2}{3}$;

      $(ax. (ab)c = a(bc), def. \dfrac{a}{b} = a. b^{-1} \wedge b \neq 0)$

   h. $1. x = -\frac{2}{3}$; $(ax. a. a^{-1} = 1)$

   i. $x = -\frac{2}{3}$; $(ax. a. 1 = a)$

10.Resumen teórico. La aplicación de la estrategia analítica en la resolución del ejercicio ayuda a identificar la teoría de los números reales que se ha utilizado en la construcción del ejercicio. $3x + 2 = 0$. Al resolver el ejercicio se ha identificado lo siguiente:

1. Conceptos no definidos (2): número real y la relación de igualdad.

2. Conceptos definidos (3): adición, multiplicación y división de números reales.

3. Axiomas (6):

$a + 0 = a, (a + b) + c = a + (b + c),$

$a + (-a) = 0, a.1 = a, a.a^{-1} = 1,$

$(ab)c = a(bc)$

4. Teoremas (2). $a = b \rightarrow a + c = b + c, \quad a = b \rightarrow ac = bc$

Ejemplo 2. Resolver $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$

Estructura de la estrategia analítica para resolver un ejercicio.

1. Enunciado del ejercicio: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$
2. Nombre del objetivo en estudio: inecuación de primer grado con una variable.
3. Área de la matemática: Cálculo diferencial
4. Unidad didáctica: Números reales
5. Identificar los conceptos no definidos: número real: 1,2,3,x
6. Identificar los conceptos definidos: $a + b, a > b, \frac{a}{b}, a - b$
7. Identificar los axiomas: en el proceso de resolución.
8. Identificar los teoremas: en el proceso de resolución
9. Resolución del ejercicio:

a. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}$

b. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}>\frac{3}{x+2}\wedge x\neq -1\wedge x\neq -3\wedge x\neq -2$

$$\left(def.\frac{a}{b}=a.b^{-1}\wedge b\neq 0\right)$$

c. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x+2}>0\wedge x\neq -1\wedge x\neq -3\wedge x\neq -2$

$$(def.\ a>b\leftrightarrow a-b>0)$$

d. $\frac{(x+3)(x+2)+2(x+1)(x+2)-3(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+2)}>0\wedge x\neq -1\wedge x\neq -3\wedge x\neq -2$

$$\left(T.\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}\right)$$

e. $\frac{x^2+5x+6+2x^2+6x+4-3x^2-12x-9}{(x+1)(x+3)(x+2)}>0\wedge x\neq -1\wedge x\neq -3\wedge x\neq -2$

$$(ax.a(b+c)=ab+ac)$$

f. $\frac{-x+1}{(x+1)(x+3)(x+2)}>0\wedge x\neq -1\wedge x\neq -3\wedge x\neq -2$

$$(def.\ a+b,a-b)$$

g. $\frac{(x-1)}{(x+1)(x+3)(x+2)}<0\wedge x\neq -1\wedge x\neq -3\wedge x\neq -2$

$$(T.\ a>b>0\rightarrow -a<-b)$$

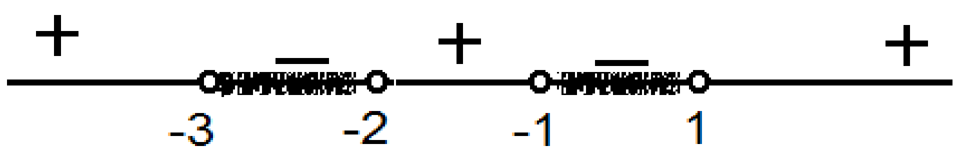
h. $(x-1)(x+1)(x+3)(x+2)<0\wedge x\neq -1\wedge x\neq -3\wedge x\neq -2$

$$\left(T.\ \frac{a}{b}<0\rightarrow a.b<0\right)$$

1. Técnica de los puntos críticos. Esta técnica evita usar la teoría – teoremas.

$x - 1 = 0, \quad x + 1 = 0, \qquad x + 3 = 0, \qquad x + 2 = 0$

$x = 1\ , \qquad x = -1, \qquad x = -3, \qquad x = -2$



2. $\langle -3, -2\rangle \cup \langle -1, 1\rangle$

(Def. Intervalo abierto y unión de intervalos)

10. Resumen de la teoría

1. Conceptos no definidos (1): número real,
2. conceptos definidos (6): adición, sustracción, multiplicación, división, relación mayor, intervalo abierto, unión de intervalos.
3. axiomas (1): distributiva de la multiplicación respecto a la adición
4. teoremas (3).

   $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{ad+bc}{bd}, a > b > 0 \rightarrow -a < -b, \qquad \frac{a}{b} < 0 \rightarrow ab < 0$

iii) Estrategia analítica y la resolución de problemas

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para resolver problemas.

Ejemplo1. El problema está propuesto y resuelto en (Murem , Yezze, 2006, p.55).

Estructura de la estrategia analítica en la resolución de problema.

1. Enunciado del problema: Utilizando la desigualdad triangular, hallar un número real c tal que $|x^3 + 3x^2 - 2x + 5| \leq c$ para cualquier valor de x, de modo que $|x| \leq 2$.
2. Nombre del objeto de estudio: problema con valor absoluto de un número real.
3. Área de la matemática: Calculo diferencial
4. Unidad didáctica: Números reales.
5. Identificar los conceptos no definidos: número real: x,2,3,5,c
6. Identificar los conceptos definidos: $a + b, a - b, ab, a \leq b, |x|$.
7. Identificar los axiomas: en el proceso de resolución
8. Identificar los teoremas: en el proceso de resolución
9. Resolución del problema:

a. $|x^3 + 3x^2 - 2x + 5| \leq c \wedge |x| \leq 2$

b. $|x^3 + 3x^2 - 2x + 5| \leq |x^3| + |3x^2| + |-2x| + |5| \wedge |x| \leq 2$

$(T. |a + b| \leq |a| + |b|)$

c. $|x^3 + 3x^2 - 2x + 5| \leq |x|^3 + 3|x|^2 + 2|x| + 5 \wedge |x| \leq 2$

$(T. |a.b| \leq |a|.|b|, T. |-x| = |x|, T. |x^n| = |x|^n, def. |x|)$

d. $|x^3 + 3x^2 - 2x + 5| \leq |x|^3 + 3|x|^2 + 2|x| + 5 \wedge |x|^3 \leq 8 \wedge 3|x|^2 \leq 12 \wedge 2|x| \leq 4$

$(T. 0 \leq a \leq b \rightarrow a^n \leq b^n, T.\ (a < b \wedge c > 0) \rightarrow ac < bc)$

e. $|x^3+3x^2-2x+5| \leq |x|^3+3|x|^2+2|x|+5 \wedge |x|^3+3|x|^2+2|x|+5 \leq$ 29

$(T.\ (a \leq b \wedge c \leq d) \rightarrow a+c\ \leq b+d)$

f. $|x^3+3x^2-2x+5| \leq 29$

$T.\ (a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c$

g. $c = 29$

10. Resumen de la teoría.

1. Concepto no definido (1). Número real.
2. Conceptos definidos (5). Adición, sustracción, multiplicación, la relación menor o igual, valor absoluto
3. Axiomas (0)
4. Teoremas (8). $T.|a+b| \leq |a|+|b|,\ T.|a.b| \leq |a|.|b|,\ T.|-x| = |x|,$

$T.|x^n| = |x|^n,\quad T.0 \leq a \leq b \rightarrow a^n \leq b^n, T.(a \leq b \wedge b \leq c) \rightarrow a \leq c$

$T.(\ a < b \wedge c > 0) \rightarrow ac < bc, T.(a \leq b \wedge c \leq d) \rightarrow a+c \leq b+d)$

2.3.14.2. FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

i) Estrategia analítica y la demostración de teoremas

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para demostrar un teorema.

Ejemplo 1.

Estructura de la estrategia analítica

1. Enunciado del teorema: Si f es una función decreciente, entonces f es inyectiva.
2. Nombre del objeto matemático: teorema.
3. Área de la matemática: Cálculo diferencial
4. Unidad didáctica: funciones reales de variable real.
5. Identificar los conceptos no definidos: son de los números reales.
6. Identificar los conceptos definidos: función real, función decreciente, función inyectiva.
7. Identificar los axiomas: los axiomas son de los números reales, las funciones son parte de $\mathbb{R}^2$ y este depende de $\mathbb{R}$. Se identifica en el proceso de la demostración.
8. Identificar los teoremas: los teoremas se identifican en el proceso de la demostración.
9. Formalización del enunciado del teorema.

   9.1. El teorema está enunciado como proposición condicional.

   9.2. Identificar el antecedente(A) y consecuente (C)

   A: f es una función decreciente.

   C: f es una función inyectiva.

   9.3. Formalización del enunciado

   Teorema: f es decreciente$\rightarrow$ f es inyectiva

10. Demostración del teorema

    10.1. Identificación del método: método directo

    10.2. Proceso de demostración del teorema.

    1. f es decreciente (hip)

2. $x_1, x_2 \in dom(f) \wedge x_1 \neq x_2$ $\quad (def.dom(f) \wedge$

   $condición\ de\ x_1, x_2)$

3. $x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1$ $\quad (def. a \neq b)$

4. $f(x_1) > f(x_2) \vee f(x_2) > f(x_1)$ $\quad (def. f\ es\ decreciente)$

5. $f(x_1) \neq f(x_2)$ $\quad (def\ \ a \neq b)$

6. $f\ es\ inyectiva$ $\quad (def. f\ es\ inyectiva)$.

7. $x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\quad (def. f\ es\ inyectiva)$

ii) Estrategia analítica y la resolución de ejercicios

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para resolver ejercicios con algunas modificaciones, propias de las funciones reales.

Ejemplo 1. Mostrar la construcción de la función.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3}{2x}} - \ln(x+4)$$

La estrategia analítica tiene una estructura cuando se resuelve un ejercicio.

Estructura de la estrategia analítica

1. Enunciado del ejercicio. Mostrar la construcción de:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+3}{2x}} - \ln(x+4)$$

2. Nombre del objeto de estudio: función real de una variable real.
3. Área de la matemática: Calculo diferencial.
4. Unidad didáctica: funciones reales de variable real.

5. Identificar los conceptos no definidos: número real: x,2,3,4 y a=b
6. Identificar los conceptos definidos: funciones reales básicas: $f_1(x) = 3$,

   $f_2(x) = 2 \;\; f_3(x) = 4,\; f_4(x) = x,\; f_5(x) = x^2,\; f_6(x) = lnx,$

   $f_7(x) = \sqrt{x},$

   Operaciones básicas con funciones básicas: $f - g,\;\; f + g,\; \frac{f}{g}, kf, f \circ g.$

7. Identificar los axiomas: Son los axiomas de $\mathbb{R}$, generalmente ya no se menciona, porque las operaciones son con nuevos objetos(funciones) y no directamente con números reales. Se identifica en el proceso de resolución del ejercicio.
8. Identificación de los teoremas: los teoremas son sobre funciones y ya no se menciona de los números reales. Su identificación es en el proceso de resolución del ejercicio.
9. Resolución del ejercicio.

   9.1.Identificar las funciones básicas y su dominio.

   1. Función constante: $f(x) = k$ $\qquad (def. de\ funcion\ constante)$

      $f_1(x) = 3\ y\ dom\ (f_1) = \mathbb{R}$

      $f_2(x) = 2\ y\ dom\ (f_2) = \mathbb{R}$

      $f_3(x) = 4\ y\ dom\ (f_3) = \mathbb{R}$

   2. Función identidad: $f(x) = x$

      $f_4(x) = x\ y\ dom\ (f_4) = \mathbb{R}$ $\qquad (def.\ de\ función\ identidad)$

   3. Función cuadrática: $f(x) = x^2$

      $f_5(x) = x^2\ \ y\ dom\ (f_5) = \mathbb{R}$ $\qquad (def. de\ función\ cuadrática)$

   4. Función logaritmo natural: $f(x) = log_a x$

$f_6(x) = log_e x = lnx\ y\ dom(\ f_6) =\ \langle 0, +\infty \rangle$

$(def. de\ función\ logaritmo)$

5. $f_7(x) = \sqrt{x}\ \ y\ dom(\ f_7) =\ [0, +\infty\rangle$

$(def. de\ función\ raíz\ cuadrada)$

9.2. Identificar las operaciones con funciones básicas y su dominio.

- $f_8(x) = (\ f_2.\ f_4)(x) =\ f_2(x).\ f_4(x) = 2x$ (def. *f.g*)

$dom(\ f_8) = dom(\ f_2) \cap dom(\ f_4) =\ \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ (def. dom(*f.g*))

- $f_9(x) = (\ f_4 +\ f_3)(x) =\ f_4(x) +\ f_3(x) = x + 4$ (def. *f*+*g*)

$dom(\ f_9) = dom(\ f_4) \cap dom(\ f_3) =\ \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ (def. dom(f+g))

- $f_{10}(x) = (\ f_5 +\ f_1)(x) =\ f_5(x) +\ f_1(x) = x^2 + 3$ (def. *f*+*g*)

$dom(\ f_{10}) = dom(\ f_5) \cap dom(\ f_1) =\ \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ (def. dom(*f*+*g*))

9.3. Identificar las operaciones básicas con las nuevas funciones.

- $f_{11}(x) = \left(\frac{f_{10}}{f_8}\right)(x) = \frac{f_{10}(x)}{f_8(x)} = \frac{x^2+3}{2x}$ (def. f/g)

$dom(\ f_{11}) = dom(\ f_{10}) \cap dom(\ f_8) - \{x\!:\ f_8(x) = 0\}$ (def. dom(f/g))

$dom(\ f_{11}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} - \{x\!: 2x = 0\}$

$dom(\ f_{11}) = \mathbb{R} - \{x\!: x = 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$

$dom(\ f_{11}) = \mathbb{R} - \{0\}$

- $f_{12}(x) = (\ f_6 \circ\ f_9)(x) =\ f_6\big(\ f_9(x)\big) =\ f_6(x + 4) = \ln(x + 4)$ (def. *f*∘*g*)

$dom(\ f_{12}) = \{x\!: x \in dom(\ f_9) \wedge\ f_9(x) \in dom(\ f_6)\}$ (def. dom(*f*∘*g*))

$dom(\ f_{12}) = \{x\!: x \in \mathbb{R} \wedge \quad (x + 4) \in \langle 0, +\infty\rangle\}$

$dom(\ f_{12}) = \{x\!: x \in \mathbb{R} \wedge \quad x + 4 > 0\}$

$dom(\ f_{12}) = \{x: x \in \mathbb{R} \ \ \wedge \quad x + 4 > 0\}$

$dom(\ f_{12}) = \{x: x \in \mathbb{R} \ \ \wedge \quad x > -4\} = \{x: x\ >\ -4\}$

$dom(\ f_{12}) = \langle -4, +\infty\rangle$

$ran(\ f_9) \cap dom(\ f_6) \neq\ \emptyset \ \ (def.\ f \circ g)$

$\mathbb{R} \cap \langle 0, +\infty\rangle \neq\ \emptyset \ \ (ran(\ f_9) = \mathbb{R})$

$\langle 0, +\infty\rangle \neq\ \emptyset$

- $f_{13}(x) = (\ f_7 \circ\ f_{11})(x) =\ f_7\big(\ f_{11}(x)\big) =\ f_7\left(\frac{x^2+3}{2x}\right) = \sqrt{\frac{x^2+3}{2x}}$ (def. f∘g)

$dom(\ f_{13}) = \{x: x \in dom(\ f_{11}) \wedge\ f_{11}(x) \in dom(\ f_7)\}$

(def.dom(f∘g))

$dom(\ f_{13}) = \left\{x: x \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge\ \frac{x^2+3}{2x}\ \in\ \ [0, +\infty\rangle\ \right\}$

$dom(\ f_{13}) = \left\{x: x \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge \frac{x^2+3}{2x}\ \ \geq 0\right\}$

$dom(\ f_{13}) = \{x: x \in \mathbb{R}\ - \{0\}\ \wedge\ \ x > 0\} = \{x: x > 0\} = \langle 0 + \infty\rangle$

$dom(\ f_{13}) = \langle 0, +\infty\rangle$

$ran(\ f_{11}) \cap dom(\ f_7) \neq\ \emptyset \ \ (def.\ f \circ g)$

$[0, +\infty\rangle \cap \mathbb{R} - \{0\} \neq\ \emptyset$

$\langle 0, +\infty\rangle \neq\ \emptyset$

9.4.Construcción de la función en estudio.

- $f(x) = (f_{13} - f_{12})(x) = f_{13} - f_{12}(x) = \sqrt{\frac{x^2+3}{2x}} - \ln(x+4)$ (def. *f-g)*

  $dom(f) = dom(f_{13}) \cap dom(f_{12})$ (def. dom(f-g))

  $dom(f) = \langle 0, +\infty\rangle \cap \langle -4, +\infty\rangle = \langle 0, +\infty\rangle$

  $dom(f) = \langle 0, +\infty\rangle$

10. Resumen de la teoría.

    - Definición de las funciones básicas: función constante, función identidad, función cuadrática, función raíz cuadrada, función logaritmo natural.
    - Definición de las operaciones básicas con funciones básicas y definición del dominio de cada operación básica.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \;\; y \;\; dom(f+g) = dom(f) \cap dom(g)$

$(f.g)(x) = f(x).g(x) \;\; y \;\; dom(f.g) = dom(f) \cap dom(g)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \;\; y \;\; dom\left(\frac{f}{g}\right) = dom(f) \cap dom(g) - \{x: g(x) = 0\}$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \;\; y \;\; dom(f-g) = dom(f) \cap dom(g)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \; y$

$dom(f \circ g) = \{x: x \in dom(g) \wedge g(x) \in dom(f)\}$

$y \; ran(g) \cap dom(f) \neq \emptyset$.

iii) Estrategia analítica y la resolución de problemas de aplicación

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para resolver problemas de aplicación. Se estudia un problema resuelto en Espinoza (2005, pp 345-346), organizamos su solución utilizando la estrategia analítica.

Estructura de la estrategia analítica

1. Enunciado del problema: Un fabricante tiene costos fijos mensuales de $ 60 000 y un costo de producción unitario de $ 10. El producto se vende por $ 15 la unidad.
   a. ¿Cuál es la función de costo?
   b. ¿Cuál es la función de ingresos?
   c. ¿Cuál es la función de ganancia?
   d. Calcule la ganancia (o pérdida) correspondiente a los niveles de producción de 10 000 y 14 000 unidades.
2. Nombre del objeto de estudio: problema de aplicación a la economía.
3. Área de la matemática: calculo diferencial
4. Unidad didáctica: aplicación de las funciones reales
5. Identificar los conceptos no definidos:
   5.1. Conceptos matemáticos no definidos: se asume de los números reales, ya que las funciones reales es parte de $\mathbb{R}^2$ y este está construido sobre $\mathbb{R}$.
   5.2. Conceptos no definidos del área de aplicación.

En el caso del ejemplo en estudio pertenece a la economía. Falta determinar si en la economía hay conceptos no definidos en su estructura teórica.

6. Identificar los conceptos definidos:

    6.1. Conceptos definidos matemáticos: función real, función básica: función constante, función lineal, operaciones básicas con funciones básicas: f-g, fg, f+g.

    6.2. Conceptos definidos del área de aplicación: en el caso del ejemplo, es la economía: costos fijos, costo de producción, función de ganancia, precio por unidad de un producto.

7. Identificar los axiomas.

    7.1. Axiomas matemáticos: los axiomas de los números reales sustenta las operaciones con las funciones, que es parte de $\mathbb{R}^2$. Se identifican en el proceso de resolución.

    7.2. Principios del área de aplicación: la economía debe tener principios teóricos que rigen su estructura teórica (falta determinar).

8. Identificar los teoremas:

    8.1. Teoremas matemáticos: se identifica en el proceso de resolución.

    8.2. Proposiciones verdaderas del área de aplicación. La economía debe tener proposiciones que son parte de su estructura teórica (falta determinar).

9. Resolución del problema de aplicación.

9.1. Información básica contenida en el enunciado del problema e interpretación matemática.

x: números de unidades producidas y vendidas

m: costo de producción unitario (m=10)

$\propto$: precio por unidad de un producto fabricado y vendido. ($\propto = 15$)

b: costo fijo (b = 60 000)

9.2. Información deducida a partir de la información básica e interpretación matemática.

mx: costo variable (10x)

$mx + b = c(x)$: $costo\ total$ ($c(x) = 10x + 60\,000$)

$\propto x = R(x)$: $función\ de\ ingresos$ ($R(x) = 15x$)

$R(x) - C(x) = P(x)$: $función\ de\ ganancia$ ($P(x) = 5x - 60\,000$)

9.3. Respuesta a las preguntas del problema.

a. Función de costo o costo total: C(x)=10x+60 000

b. Función de ingresos: R(x) = 15x

c. Función de ganancia: P(x) = 5x – 60 000

d. Cálculo de la ganancia para cada nivel de producción que se señala.

- $x = 10\,000 \rightarrow P(10\,000) = 5(10\,000) - 60\,000 = -10\,000$

Se tiene una pérdida de $ 10,000.

- $x = 14\ 000 \rightarrow P(1\ 4\ 000) = 5(14\ 000) - 60\ 000 =$

  $10\ 000$

  Se tiene una ganancia de $ 10 000.

2.3.14.3. LÍMITE DE FUNCIONES REALES

i) Estrategia analítica y la demostración de teorema

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para demostrar teoremas. Se demuestra un teorema sobre el límite de la adición de dos funciones.

Ejemplo 1. Límite de las operaciones básicas con funciones.

Estructura de la estrategia analítica

1. Enunciado del teorema: sean f y g dos funciones y si $\lim_{x \to a} f(x) =$

   L y $\lim_{x \to a} g(x) = M$

   entonces $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = L + M$
2. Nombre del objeto matemático: teorema.
3. Área de la matemática: Cálculo diferencial
4. Unidad didáctica: límite de funciones.
5. Identificar los conceptos no definidos: se asume que son de los números reales ya que se estudia límite de funciones y las funciones son parte de $\mathbb{R}^2$ y este depende de $\mathbb{R}$.
6. Identificar los conceptos definidos: funciones reales, límite de funciones, intervalos abiertos, espacio métrico ($\mathbb{R}$), distancia entre dos puntos.
7. Identificar los axiomas: se asume los axiomas de $\mathbb{R}$.
8. Identificar los teoremas: teorema: La desigualdad triangular de valor absoluto y otros que se identifica en el proceso de demostración.
9. Formulación del enunciado del teorema.

9.1. El teorema está enunciado como proposición condicional.

9.2. Identificar el antecedente (A) y consecuente (C) del teorema.

A: f y g son funciones y $\underset{x \to a}{lím} f(x) = L \; y \; \underset{x \to a}{lím} g(x) = M$

C: $\underset{x \to a}{lím} (f + g) = L + M$

9.3. Formalización del enunciado del teorema.

Teorema:

$$(f \wedge g \; funciones \; \wedge \underset{x \to a}{lím} f(x) = \; L \; \wedge \underset{x \to a}{lím} g(x) = M) \to \underset{x \to a}{lím}(f + g) = L + M$$

1. Demostración del teorema.

1.1. Método de demostración: método directo

1.2. Proceso de la demostración del teorema.

1. f y g son funciones y $\underset{x \to a}{lím} f(x) = L \; y \; \underset{x \to a}{lím} g(x) = M$
2. $\underset{x \to a}{lím} f(x) = \; L \; \wedge \underset{x \to a}{lím} g(x) = M \; (hip.)$
3. $(0 < |x - a| < \delta_1 \to |f\;(x) - L| < \varepsilon_1) \wedge$

   $(0 < |x - a| < \delta_2 \to |g(x) - M| < \varepsilon_2)$

   (def. de límite de una función)
4. $(0 < |x - a| < \delta_1 \leq \delta_2 \vee 0 < |x - a| < \delta_1 \leq \delta_2) \to |f(x) - L| +$

   $|g(x) - M| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

   (ax. tricotomía de los reales)

teorema: $(a < b \wedge c < d) \rightarrow a + c < b + d)$.

5. $0 < |x - a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2) \rightarrow |f(x) - L + g(x) - M| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \wedge \left(\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \wedge \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}\right)$

$(teorema\text{: } |a + b| < |a| + |b|)$

6. $0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) + g(x) - (L + M)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(ax. Sustitución)

7. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \wedge 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |(f + g)(x) - (L + M)| < \varepsilon$

(def. de adición de funciones y límite)

8. $\lim\limits_{x \rightarrow a} (f + g) = L + M \ (def.\, límite\ de\ una\ función)$

ii) Estrategia analítica y la resolución de ejercicios

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para resolver ejercicios.

En el ejemplo, se estudia el cálculo de límite de una función.

Ejemplo 1. Calcular el límite de la función.

Estructura de la estrategia analítica

1. Enunciado del ejercicio: calcular

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$$

2. Nombre del objeto de estudio: ejercicio sobre límite
3. Área de la matemática: Cálculo diferencial
4. Unidad didáctica: Límite de una función
5. Identificar los conceptos no definidos: número real : x,2,3,4,5;13

6. Identificar los conceptos definidos: funciones básicas:

   $f_1(x) = 2\,,\ f_2\,(x) = 3\,,\ f_3\,(x) = 4,\ f_4\,(x) = 5,\ f_5\,(x) = 13;$

   $f_6\,(x) = x,\ f_7\,(x) = x^2,\ f_8\,(x) = x^3$

   - Operaciones básicas: $f + g, f - g, kf, f/g$
   - $\underset{x \to x_\circ}{lím} f(x) = L$

7. Identificar los axiomas: los axiomas son de los números reales, el límite es de una función en un punto y una función es parte de $\mathbb{R}^2$ y este depende de $\mathbb{R}$. Se identifica en el proceso de la resolución.
8. Identificar los teoremas: mencionamos los teoremas de límite de funciones y otros se identifica en el proceso de resolución.

$$\underset{x \to x_\circ}{lím} k = k\,,\quad \underset{x \to x_\circ}{lím} x = x_\circ\,,\quad \underset{x \to x_\circ}{lím} kf = k(lím f),\quad \underset{x \to x_\circ}{lím} x^2 = x_\circ^2$$

$$\underset{x \to x_\circ}{lím} x^3 = x_\circ^3\,,\quad \underset{x \to x_\circ}{lím} (f - g)(x),\quad \underset{x \to x_\circ}{lím} \left(\frac{f}{g}\right)(x),\quad \underset{x \to x_\circ}{lím} (f + g)(x)$$

9. Resolución del ejercicio

   9.1. Calculemos el límite de las funciones básicas en $x_\circ\,,\ \ x_\circ = 3$

   - Función constante.

$$.\ \underset{x \to 3}{lím} f_1\,(x) = \underset{x \to 3}{lím} 2 = 2 \qquad .\ \underset{x \to 3}{lím} f_2\,(x) = \underset{x \to 3}{lím} 5 = 5$$

$$.\ \underset{x \to 3}{lím} f_2\,(x) = \underset{x \to 3}{lím} 3 = 3 \qquad .\ \underset{x \to 3}{lím} f_5\,(x) = \underset{x \to 3}{lím} (13) = 13$$

$$\cdot \lim_{x \to 3} f_3(x) = \lim_{x \to 3} 4 = 4$$

- Función potencia

$$\cdot \lim_{x \to 3} x = 3 \qquad \cdot \lim_{x \to 3} x^2 = 9 \qquad \lim_{x \to 3} x^3 = 27$$

9.2.Calculemos el límite de la operación producto.

$$\cdot \lim_{x \to 3} 2x^3 = 54 \qquad \lim_{x \to 3} 5x^2 = 45$$

$$\cdot \lim_{x \to 3} 2x = 6 \qquad \cdot \lim_{x \to 3} 4x^3 = 108$$

$$\cdot \lim_{x \to 3} 13x^2 = 117 \qquad \cdot \lim_{x \to 3} 4x = 12$$

9.3.Calculemos el límite de las operaciones básicas.

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 - 4x - 3} = \frac{\lim_{x \to 3} (2x^3 - 5x^2 - 2x - 3)}{\lim_{x \to 3} (4x^3 - 13x^2 - 4x - 3)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 3}(2x^3) - \lim_{x \to 3}(5x^2) - \lim_{x \to 3}(2x) - \lim_{x \to 3} 3}{\lim_{x \to 3}(4x^3) - \lim_{x \to 3}(13x^2) + \lim_{x \to 3}(4x) - \lim_{x \to 3} 3}$$

$$= \frac{54-45-6-3}{108-117+12-3} \to \frac{0}{0}$$

9.4. Escribir la función $f(x) = \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2-4x-3}$, considerando el factor (x-3) en el numerador y denominador. $x \to 3 \equiv (x-3) \to 0$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(2x^2+x+1)}{(x-3)\,(4x^2-x+1)} = \frac{22}{34} = \frac{11}{17}$$

iii) Estrategia analítica y la resolución de problema matemático

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para resolver problemas matemáticos. El ejemplo a estudiar es un problema propuesto en Espinoza (2005, p. 483).

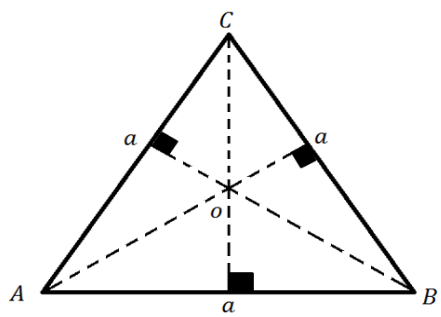
Ejemplo 1. Necesidad de utilizar el cálculo de límite para hallar la respuesta del problema.

2. Enunciado del problema: consideremos un triángulo equilátero de lado ***a***, sus tres alturas sirven para engendrar un nuevo triángulo equilátero y así sucesivamente n veces. Hallar, el límite de la suma de las áreas de todos los triángulos cuando $n \to +\infty$.
3. Nombre del objeto de estudio: problema matemático.
4. Área de la matemática: Cálculo diferencial
5. Unidad didáctica: aplicación de límites.
6. Identificar los conceptos no definidos: se asume que son de los números reales. Se estudia límite de una función y esta es parte de $\mathbb{R}^2$, que depende de $\mathbb{R}$.
7. Identificar los conceptos definidos: triángulo equilátero, área de un triángulo, sucesión, serie geométrica, límite de una función, altura de un triángulo, sumatoria.
8. Identificar los axiomas: se asume que son de los números reales y de la geometría elemental plana.

9. Identificar los teoremas: área de un triángulo equilátero, suma finita de una serie, límite de la serie finita. Suma de una serie infinita; otros teoremas se identifican en el proceso de resolución.

10. Resolución del problema:

1.



. $\Delta\, ABC \ \ equilatero\ (información\ del\ enunciado)$

. $l = a\ (\ lado\ \Delta\, ABC)$

. $área\ (\ \Delta\, ABC) = \frac{\sqrt{3}a}{4} =$

$A_{\circ}\ (teorema\!: área\ de\ un\ triángulo\ \ equilátero\ de\ lado\ a)$

. $A_{\circ} = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{1}{2^{0}}\right)$

2.

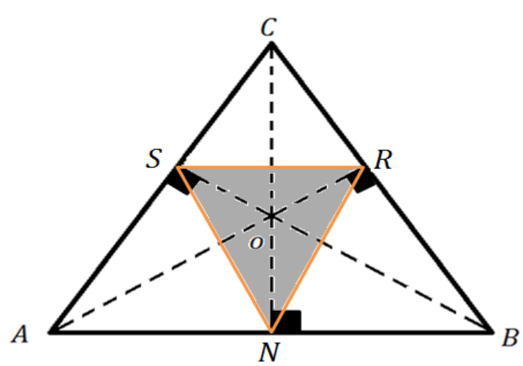


Figura 59. Δ Determinado por las alturas de un triángulo equilátero de lado a.

$\Delta\, NRS\ equilátero\ (teorema{:}\ \Delta\ determinado\ por\ las\ alturas\ de\ un\ \Delta\ \ equilátero)$

$.l = \frac{1}{2}\ a\ (lado\ \Delta\ NRS)$

$área\ (\ \Delta\ NRS) = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{1}{2^1}\right) = A_1$

3.

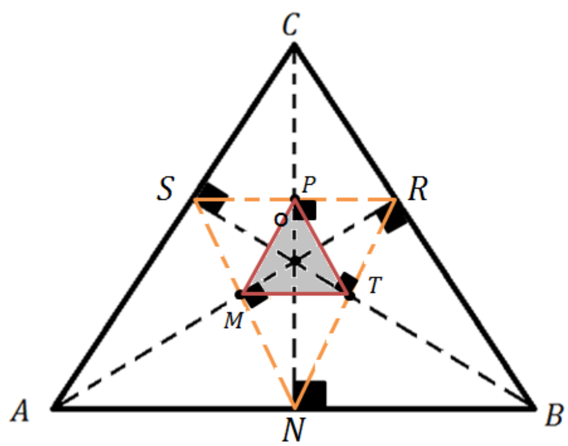


Figura 60. Δ determinado por las alturas de un triángulo equilátero

$\Delta\, MTP\ equilátero(teorema{:}\ \Delta\ determinado\ por\ las\ \ alturas\ de\ un\ \Delta\ equilátero)$

$. \ l = \frac{1}{4}a \ (lado \ \Delta \ MTP)$

$. \ área \ (\ \Delta \ MTP) = \frac{\sqrt{3}a}{4.4}, (teorema: área \ de \ un \ triángulo \ equilátero)$

$. A_2 = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{1}{2^2}\right)$

4. $A_3 = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{1}{2^3}\right)$

$$A_4 = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{1}{2^8}\right)$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$(deducción\ a\ partir\ del\ \text{área}\ de\ A_0, A_1, A_2\ utilizando\ la\ definición\ de\ sucesión$

$de\ números\ reales$)

5. $A = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$

$$A = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{1}{2^0}\right) + \frac{\sqrt{3}a}{4},\left(\frac{1}{2^1}\right) + \frac{\sqrt{3}a}{4},\left(\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \frac{\sqrt{3}a}{4},\left(\frac{1}{2^n}\right) + \cdots$$

$$A = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \cdots\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}\right) = \frac{\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{1}{\frac{1}{2} - 1}\right)\left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

(Teorema: suma finita de una serie de potencia)

$$A = \frac{-\sqrt{3}a}{4}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)$$

6. $\lim_{n \to +\infty} A = -\frac{\sqrt{3}a}{2} \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right) = -\frac{\sqrt{3}a}{2}(-1) = \frac{\sqrt{3}a}{4}$

$(teorema$: $límite\ de\ funciones)$.

2.3.14.4. DERIVADA DE FUNCIONES REALES

i) Estrategia analítica y la demostración de teorema

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para demostrar un teorema.

Ejemplo 1. Demostración de un teorema.

Estructura de la estrategia analítica

1. Enunciado del teorema: $si\ \ f(x) = x^n$,

   $f'(x) = nx^{n-1} \wedge n \in \ \mathbb{N} - \ \{0\} \wedge x \in \mathbb{R}$.
2. Nombre del objeto matemático: Teorema
3. Área de la matemática: Cálculo diferencial
4. Unidad didáctica: Derivada de una función real.
5. Identificar los conceptos no definidos: Se asume que son de los números reales.
6. Identificar los conceptos definidos: función potencial, def. de derivada de una función.
7. Identificar los axiomas: se asume que son de los números reales.
8. Identificar los teoremas: en el proceso de demostración.
9. Formalización del enunciado del teorema.

   9.1. Enunciado del teorema como proposición condicional: el teorema está enunciado como proposición condicional.

   9.2. Identificar el antecedente (A) y el consecuente(C)

   $A: f(x) = x^n$ es una función

   $C: f'(x) = nx^{n-1}$ es la derivada de la función

   9.3. Formalización del teorema.

   Teorema: $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
10. Demostración del teorema.

    10.1. Método de demostración: Método directo

    10.2. Proceso de demostración del teorema.

    1. $f(x) = x^n \wedge n \in \ \mathbb{N}\ (hip.)$

2. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (def. de derivada)

3. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$ (aplicación de la def. de derivada)

4. $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-x)[(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}]}{h}$

   $[teorema: a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + b^{n-1})]$

5. $f'(x) = \lim_{h \to 0} [(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + x^{n-1}]$

   $(teorema: \frac{a}{b} = \frac{ka}{kb} \wedge k \neq 0)$

6. $f'(x) = x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1}$

   $(teor. límite\ de\ funciones\ básicas)$

7. $f'(x) = nx^{n-1}$ $(def. de\ multiplicación)$

ii) Estrategia analítica y la resolución de ejercicios

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para resolver ejercicios. En el ejemplo se estudia el proceso para hallar la derivada de una función utilizando la derivada de las funciones básicas y de las operaciones con funciones básicas.

Ejemplo 1. Hallar la derivada de la función.

Estructura de la estrategia analítica

1. Enunciado del ejercicio: hallar la derivada de $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2-4}} + 3\ senx$
2. Nombre del objeto de estudio: Ejercicio sobre derivada.
3. Área de la matemática: Cálculo diferencial
4. Unidad didáctica: Derivada de una función

5. Identificar los conceptos no definidos: número real: 2,4,3,x, a=b

6. Identificar los conceptos definidos: funciones básicas:

$$f_1(x) = 2, f_2(x) = 4, f_3(x) = 3, f_4(x) = x, f_5(x) = x^2, f_6(x) = senx, f_7(x) = \sqrt{x}$$

Operaciones básicas: $f - g,\ \ fg,\ \ \frac{f}{g},\ f \circ g$

7. Identificar los axiomas: se asume que son de los números reales.

8. Identificar los teoremas: teorema: derivada de las funciones básicas:

$f(x) = k \to f'(x) = 0\ ,\ \ f(x) = x \to f'(x) = 1$

$f(x) = x^n \to f'(x) = nx^{n-1}\ ,\ f(x) = senx \to f'(x) = cosx.$

$f(x) = kg(x) \wedge\!\to f'(x) = kg'(x)$

Teorema: derivada de las operaciones básicas:

$(f + g)' = f' + g',\qquad (f - g)' = f' - g',$

$(f.g)' = f'g + g'f,$

$$(f/g)' = \frac{fg' - g'f}{g^2}, (f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$$

9. Resolución del ejercicio

9.1. Hallamos la derivada de las funciones básicas.

$$f_1'(x) = f_2'(x) = f_3'(x) = 0,\quad f_4'(x) = 1,\ \ f_5'(x) = 2x,\qquad f_6'(x) = cosx,$$

$$f_7'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

9.2. Hallamos la derivada de las operaciones.

- $f(x) = 2x \to f'(x) = (2x)' = 2$

  $\big(f(x) = kg(x) \to f'(x) = kg'(x)\big),$

- $f(x) = 3senx \rightarrow f'(x) = (3senx)' = 3(senx)' = 3\ cosx$

$[\,f\ (x) = kg(x) \rightarrow f'(x) = kg'(x),$

$f(x) = senx \rightarrow f'(x) = cosx)]$

- $f(x) = x^2 - 4 \rightarrow f'(x) = 2x$

$((f-g)' = f' - g',\ f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0\ \ )$

- $f(x) = \frac{2x}{x^2-4} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x)'(x^2-4)-(2x)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}$

$f'(x) = \frac{2(x^2-4)-2x(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^2-8-4x^2}{(x^2-4)^2}$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

$$\left(\quad (f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}\right)$$

- $f(x) = \left(\frac{2x}{x^2-4}\right)^{1/2} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)^{-1/2}.\left(\frac{2x}{x^2-4}\right)'$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)^{+1/2}.\left(\frac{-2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-(x^2+4)}{\sqrt{2x}(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)).\,g'(x)\right)$$

9.3. Derivada de la función.

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x^2-4}} + 3senx$$

$$f'(x) = \frac{-(x^2+4)}{\sqrt{2x}(x^2-4)^{3/2}} + cosx.$$

$$(\quad (f+g)' = f' + g')$$

iii) Estrategia analítica y la resolución de problema matemático

Se utiliza la estructura general de la estrategia analítica para resolver problema matemático. En el ejemplo se estudia problema de máximo y mínimo, necesita de la derivada para resolver.

Ejemplo1. Problema de máximo y mínimo.

Estructura de la estrategia analítica

1. Enunciado del problema: hallar un triángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de radio r.
2. Nombre del objeto de estudio: problema matemático.
3. Área de la matemática: Cálculo diferencial
4. Unidad didáctica: aplicación de la derivada
5. Identificar los conceptos no definidos: se asume que son de los números reales. Se estudia la derivada de una función y esta es parte de $\mathbb{R}^2$ que depende de $\mathbb{R}$.
6. Identificar los conceptos definidos: triángulo, área de un triángulo, triángulo inscrito, circunferencia, valores máximos de una función.
7. Identificar los axiomas: se asume que son de los números reales y de la geometría elemental plana.

8. Identificar los teoremas: en el proceso de la resolución del problema.

9. Resolución del problema.

1.

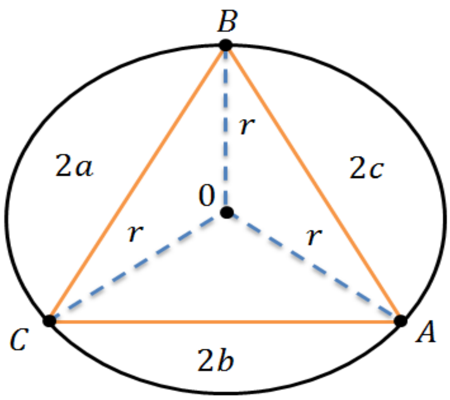


Figura 61. Triángulo inscrito

$.\Delta\, ABC\ inscrito\ en\ \ C(0,r)\ \ \ (\,dato\ del\ enunciado)$

$.A = \frac{1}{2}\ Bh(teorema\text{: área } un\ triángulo\ )$

2.

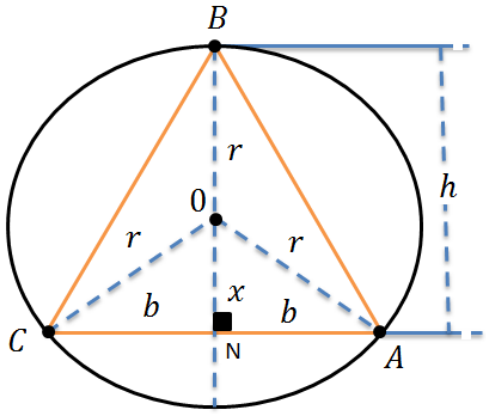


Figura 62. Triángulo inscrito y una altura

$.\Delta\, ABC\ \ de\ altura\ \ h = r + x$

$. A = \dfrac{1}{2}\, hB = \dfrac{1}{2}(r + x\,)B \wedge B = 2b$

$. x = h - r$

$.(h - r)^2 = r^2 - b^2\ (Teorema\ de\ pitágoras\ en\ \Delta\, ANO)$

$. b = \sqrt{r^2 - (h - r)^2}$

3. $A = \frac{1}{2}h(2b) = h\sqrt{(h - r)^2 - r^2}\ \ (teorema\text{: }área\ del\ \Delta)$

   $A = h\sqrt{2rh - h^2}.$

4. Maximizando al área de $\Delta\, ABC$

   $. A(h) = h\sqrt{2rh - h^2}$

   $. A'(h) = \dfrac{3rh - 2h^2}{\sqrt{2rh - h^2}}.$

   (Teorema: derivada de funciones y operaciones básicas)

   $. A'(h) = 0\ \vee\ A'(h) \nexists.$

   $. \dfrac{3rh - 2h^2}{\sqrt{2rh - h^2}} = 0\ \vee\ \sqrt{2rh - h^2} = 0$

   $. 3rh - 2h^2 = 0\ \vee\ 2rh - h^2 = 0$

   $. h(3r - 2h) = 0\ \ \ \vee\ \ \ \ \ (2r - h)h = 0$

$.[h = 0 \vee (3r - 2h) = 0] \quad \vee \quad [h = 0 \vee 2r - h = 0]$

$.h = \frac{3}{2}r \quad \vee \quad h = 2r$

5. $.A(h) = h\sqrt{2rh - h^2} \wedge h = \frac{3}{2}r$

$.A\left(\frac{3}{2}r\right) = \frac{3}{2}r\sqrt{2r\left(\frac{3}{2}r\right) - \left(\frac{3}{2}r\right)^2}$

$.A = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,r^2$

$.A(h) = h\sqrt{2rh - h^2} \wedge h = 2r$

$.A(2r) = h\sqrt{2rh - h^2} = 0(no\ existe\ el\ triángulo)$

6. El área máxima del triángulo inscrito es:

$.A = \frac{3}{4}\sqrt{3}\,r^2 \wedge h = \frac{3}{2}r$

CAPÍTULO III: METODOLOGÍA

3.1. Operacionalización de variables

VARIABLE (X): Estrategia analítica para la enseñanza del cálculo diferencial de funciones básicas.

Definición: Conjunto de procedimientos que se ejecuta para demostrar teoremas, resolver ejercicios y problemas.

Dimensiones o subvariables: estrategia analítica en la demostración de teoremas, estrategia analítica en la resolución de ejercicios, estrategia analítica en la resolución de problemas.

a.- Dimensión: Estrategia analítica en la demostración de un teorema.

- Definición. Conjunto de procedimiento ejecutadas en la demostración de un teorema.
- Indicador.
    - Nombre. Elementos básicos del método axiomático.
    - Atributos. Conceptos no definidos, conceptos definidos, axiomas, teoremas.
    - Unidad. No hay unidad por ser subvariable cualitativa.
    - Unidad operacional. Si utiliza o no utiliza el número adecuado de cada uno de los atributos al demostrar un teorema.

b.- Dimensión: Estrategia analítica en la resolución de ejercicios.

- Definición. Conjunto de procedimientos ejecutados en la resolución de un ejercicio.
- Indicador.
    - Nombre. Elementos básicos del método axiomático.
    - Atributos. Conceptos no definidos, conceptos definidos, axiomas, teoremas.
    - Unidad. No hay unidad por ser variable cualitativa.
    - Unidad operacional. Se utiliza el número adecuado de cada uno de los atributos al resolver el ejercicio

c.- Dimensión: Estrategia analítica en la resolución de problemas.

- Definición. Conjunto de procedimientos ejecutados en la resolución de un problema.
- Indicador.
  - Nombre. Elementos básicos del método axiomático.
  - Atributos. Conceptos no definidos, conceptos definidos, axiomas, teoremas.
  - Unidad. No hay unidad por ser una subvariable cualitativa.
  - Unidad operacional. Si utiliza o no utiliza el número adecuado de cada uno de los atributos al resolver un problema.

VARIABLE (Y): Aprendizaje de los contenidos del cálculo diferencial de funciones básicas.

- Definición: Competencias adquiridas en la demostración de teoremas, resolución de ejercicios y problemas del cálculo diferencial de funciones básicas.
- Dimensiones o subvariables: Aprendizaje de demostración de teoremas, aprendizaje de resolución de ejercicios y aprendizaje resolución de problemas.

a. Dimensión: Aprendizaje de la demostración de un teorema.
    - Definición: Proceso de la demostración de un teorema utilizando la estrategia analítica.

- Indicador:
  - Nombre: Demostración de teoremas.
  - Atributos: 0, 3, 4, 5
  - Unidad: puntos
  - Unidad operacional: Cada respuesta correcta tres, cuatro o cinco puntos y errada cero puntos.

b. Dimensión: Aprendizaje de resolución de ejercicios.

- Definición. Proceso de la resolución de ejercicios, utilizando la estrategia analítica.
- Indicador.
  - Nombre: Resolución de ejercicios
  - Atributos: 0, 1, 2, 3, 4
  - Unidad: puntos
  - Unidad operacional: Cada respuesta correcta uno, dos, tres o cuatro puntos y errada cero puntos.

c. Dimensión: Aprendizaje de la resolución de problemas.

- Definición: Proceso de la resolución de problemas utilizando la estrategia analítica.
- Indicador:
  - Nombre: Resolución de problemas
  - Atributos: 0, 2, 3, 4, 5
  - Unidad: puntos
  - Unidad operacional: Cada respuesta correcta dos, tres, cuatro o cinco puntos y errada cero puntos.

Hipótesis nula (H_o): La estrategia analítica utilizada en la enseñanza de los conceptos básicos del cálculo diferencial de funciones básicas no genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de matemática e informática.

Hipótesis alterna (Ha): La estrategia analítica utilizada en la enseñanza de los conceptos básicos del cálculo diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de matemática e informática.

3.2. Tipificación de investigación

Esquema del diseño

Tipo de investigación: Cuantitativa

Método de investigación: Cuasiexperimental

Diseño de investigación: Cuasiexperimental

Grupo experimental: O_1 X O_2

Grupo de comparación: O_3 O_4

X: Variable independiente (Estrategia analítica)

O_1 y O_2: Medición antes (O_1) y medición después (O_2) de la variable dependiente (Aprendizaje)

O_3 y O_4: Medición antes (O_3) y medición después (O_4) de la variable dependiente (Aprendizaje)

3.3. Estrategia para la prueba de hipótesis

1. Se determinó la muestra de estudio y se procedió a aplicar las pruebas pre test y pos test a los dos grupos, de control y experimental. Esta misma prueba se aplicó al inicio y final del desarrollo de los contenidos del cálculo diferencial.
2. Se realizó la presentación de los datos mediante tablas y gráficamente, utilizando la estadística descriptiva.

Realizado el estudio de la normalidad de los datos obtenidos, después de aplicar los instrumentos de investigación, se determinó el procedimiento de la prueba de hipótesis mediante las estadísticas paramétricas o no paramétricas. Para el caso de los datos que no difieran de la distribución normal; se estudió mediante el estadístico T-student (grupos pequeños).

3.4. Población y Muestra

POBLACIÓN: estudiantes de la Facultad de Ciencias de la UNE Enrique Guzmán y Valle, de la especialidad de Matemática e Informática, agrupados en las secciones C-1 y C-5 (Promoción 2016) y C-9 (Promoción 2017). Estas promociones están programadas a llevar la asignatura de Análisis Matemático I (Calculo Diferencial) durante el semestre académico 2017 – 1-

MUESTRA. La muestra es no probabilística, se puede identificar como muestreo intencional o también llamada muestra por accesibilidad.

Las secciones C-1 y C-5 ya están establecidas. La C1 es el grupo experimental y la C-5 es el grupo de comparación o de control.

3.5. Instrumento de recolección de datos

El instrumento para recoger datos de la variable aprendizaje de los conceptos básicos del cálculo diferencial es un cuestionario (prueba) de 20 items (preguntas) de alternativa múltiple distribuidos de la siguiente forma:

1. Demostración de teoremas: 5 items
2. Resolución de ejercicios: 9 items
3. Resolución de problemas: 6 items

El instrumento fue elaborado por el autor del proyecto.

3.5.1. Tabla de especificación de la prueba

Tabla 1

Especificaciones de la prueba

Procesos cognitivos	Área de contenidos				
	Números Reales	Funciones Reales	Límite de funciones	Derivada de funciones	Total
Demostración de teoremas	1 (3 P) 5 (3 P)	2 (5 P)	3 (4 P)	4 (5 P)	5 (20 P)
Resolución de ejercicios	6 (1 P) 7 (1 P) 13 (2 P) 14 (2 P)	8 (1 P)	9 (3 P) 10 (3 P)	11 (3 P) 12 (4 P)	9 (20 P)
Resolución de problemas	15 (2 P) 20 (4 P)	16 (2 P) 17 (4 P)	18 (3 P)	19 (5 P)	6 (20 P)
Total	8 (18 P)	4 (12 P)	4 (13 P)	4 (17 P)	20 (60)

3.5.2. Validez y Confiabilidad de la prueba

Validación del test de conocimiento

Considerando a Hernández, Fernández y Baptista(2004)

“Toda medición o instrumento de recolección de datos debe reunir dos requisitos esenciales: Confiabilidad y validez.”

Para la validez de los instrumentos, antes de ser aplicados, fue sometido al juicio de expertos por los siguientes docentes, quienes son profesionales de la especialidad de Matemática:

Tabla 2

Validación de instrumentos

DOCENTES	PRUEBA DE PRETEST Y POS TEST
Mg. Florencio Trujillo Cauti	84
Dra. Dora Escolástica Mesías Borja	80
Dr. Carlos Javier Vicente De Tomás	80
Dr. Daniel Marcos Chirinos Maldonado	86
Mg. Adolfo Yalta Dorregaray	90
PROMEDIO	84

Obteniéndose un coeficiente de validez de las pruebas de pre test y pos test 84 lo que significa que el 84% de 100 puntos, se considera como una validez muy alta.

Confiabilidad del Test de conocimientos

Para verificar la confiabilidad del test de **conocimientos**, que está relacionado con el uso de la Estrategia Analítica en la enseñanza del Cálculo Diferencial de funciones básicas de una variable en el aprendizaje de los estudiantes de Educación de la especialidad de Matemática e Informática, utilizamos el modelo de Kuder-Richardson, cuya fórmula es:

$$r_N = \left(\frac{N}{N-1}\right) \cdot \left(\frac{V_t - \sum p.q}{V_t}\right)$$

Donde:
r_N: Coeficiente de Confiabilidad
N: Número de ítemes que contiene el instrumento
V_t: Varianza total de la prueba
$\sum p.q$: Sumatoria de la varianza individual de los ítemes

El modelo de Kuder-Richardson es aplicable en las pruebas de ítems dicotómicos en los cuales existen respuestas correctas e incorrectas.

La confiabilidad de un instrumento se expresa mediante un coeficiente de correlación, que teóricamente significa correlación del test consigo mismo. Sus valores oscilan entre cero (0) y uno (1,00). Una manera práctica de interpretar la magnitud de un coeficiente de confiabilidad puede ser guiada por la escala siguiente:

Tabla 3

Escala de magnitudes del coeficiente de confiabilidad

Rangos	Magnitud
0,81 a 1,00	Muy Alta
0,61 a 0,80	Alta
0,41 a 0,60	Moderada
0,21 a 0,40	Baja
0,01 a 0,20	Muy Baja

A. USO DE LA ESTRATEGIA ANALÍTICA EN LA DEMOSTRACÓN DE TEOREMAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES BÁSICAS DE UNA VARIABLE

De la prueba respecto de la **estrategia analítica en la demostración de teoremas del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable**, sometida al coeficiente de confiabilidad de Kuder-Richardson se obtuvo 0,64; lo que nos indica que la magnitud del coeficiente de confiabilidad es alta.

Tabla 4

Uso de la Estrategia Analítica en la demostración de teoremas del Cálculo Diferencial de funciones básicas de una variable.

Alumnos	P1	P2	P3	P4	P5	Suma		
1	1	1	1	1	0	4		
2	0	1	0	0	0	1		
3	0	1	1	0	1	3		
4	0	0	0	0	0	0		
5	0	1	1	1	0	3		
6	1	1	1	1	0	4		
7	0	1	1	0	0	2		
8	0	0	0	0	1	1		
9	1	1	1	1	0	4		
10	1	1	0	1	1	4		
Suma	4	8	6	5	3			
p	0.40	0.80	0.60	0.50	0.30		Vt =	2.27
q	0.60	0.20	0.40	0.50	0.70			
$p.q$	0.24	0.16	0.24	0.25	0.21		$\sum p.q$ =	1.10
						KR20=	r_n =	0.64

B. USO DE LA ESTRATEGIA ANALÍTICA EN LA RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES BÁSICAS DE UNA VARIABLE

De la prueba respecto de la **estrategia analítica en la resolución de ejercicios del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable**, sometida al coeficiente de confiabilidad de Kuder-Richardson se obtuvo 0,69; lo que nos indica que la magnitud del coeficiente de confiabilidad es alta.

Tabla 5

Uso de la Estrategia Analítica en la resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial de funciones básicas de una variable.

Alumnos	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	Suma		
1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	4		
2	1	0	1	0	0	1	1	1	0	5		
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
4	1	0	1	0	0	1	1	1	0	5		
5	1	1	0	0	1	1	0	1	1	6		
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1		
7	1	1	0	1	1	0	0	0	1	5		
8	0	0	1	0	0	1	1	1	0	4		
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
10	1	0	1	0	1	1	0	1	0	5		
Suma	6	2	5	2	3	5	5	5	5			
p	0.60	0.20	0.50	0.20	0.30	0.50	0.50	0.50	0.50		Vt =	5.17
q	0.40	0.80	0.50	0.80	0.70	0.50	0.50	0.50	0.50			
$p.q$	0.24	0.16	0.25	0.16	0.21	0.25	0.25	0.25	0.25		$\sum p.q$ =	2.02
									KR20 =		r_n =	0.69

C. USO DE LA ESTRATEGIA ANALÍTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES BÁSICAS DE UNA VARIABLE

De la prueba respecto de la **estrategia analítica en la resolución de problemas del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable**, sometida al coeficiente de confiabilidad de Kuder Richardson se obtuvo 0,72; lo que nos indica que la magnitud del coeficiente de confiabilidad es alta.

Tabla 6

Uso de la Estrategia Analítica en la resolución de problemas del Cálculo Diferencial de funciones básicas de una variable.

Alumnos	P15	P16	P17	P18	P19	P20	Suma		
1	1	1	0	1	1	1	5		
2	0	1	0	0	0	0	1		
3	1	0	1	0	1	1	4		
4	0	0	0	0	0	0	0		
5	1	1	1	0	1	0	4		
6	0	0	0	1	1	0	2		
7	0	0	0	1	0	0	1		
8	0	1	0	0	1	0	2		
9	1	0	1	0	1	1	4		
10	0	0	0	0	0	0	0		
Suma	4	4	3	3	6	3			
p	0.40	0.40	0.30	0.30	0.60	0.30		Vt =	3.34
q	0.60	0.60	0.70	0.70	0.40	0.70			
$p.q$	0.24	0.24	0.21	0.21	0.24	0.21		$\sum p.q$ =	1.35
							KR20=	r_n =	0.72

CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Análisis, interpretación y discusión de resultados

4.1.1. Prueba de normaldiad

El presente informe muestra los resultados de las pruebas pretest y postest, aplicadas al grupo control y experimental de las estrategias analíticas utilizadas en:

- **Demostración de teoremas** del Cálculo Diferencial de funciones básicas.
- **Resolución de ejercicios** del Cálculo Diferencial de funciones básicas.
- **Resolución de problemas d**el Cálculo Diferencial de funciones básicas.

A: PRUEBA PRETEST

A.1. La estrategia analítica utilizada en la demostración de teoremas del Cálculo Diferencial de funciones básicas.

Tabla 7

Resultado de notas de estrategia 1

NOTAS	GRUPO CONTROL	GRUPO EXPERIMENTAL
CERO	8	0
TRES	7	2
CUATRO	1	4
CINCO	0	1
SIETE	2	8
NUEVE	0	3
DIEZ	0	2
DOCE	2	1
TRECE	1	0
TOTAL	**21**	**21**

En la tabla 7 de los resultados del test en la estrategia analítica utilizada en la demostración de teoremas del Cálculo Diferencial de funciones básicas, podemos observar que la moda en el grupo de control es 0, mientras que la moda en el grupo experimental es 7; asimismo más del 80% de los estudiantes del grupo experimental y control desaprobaron.

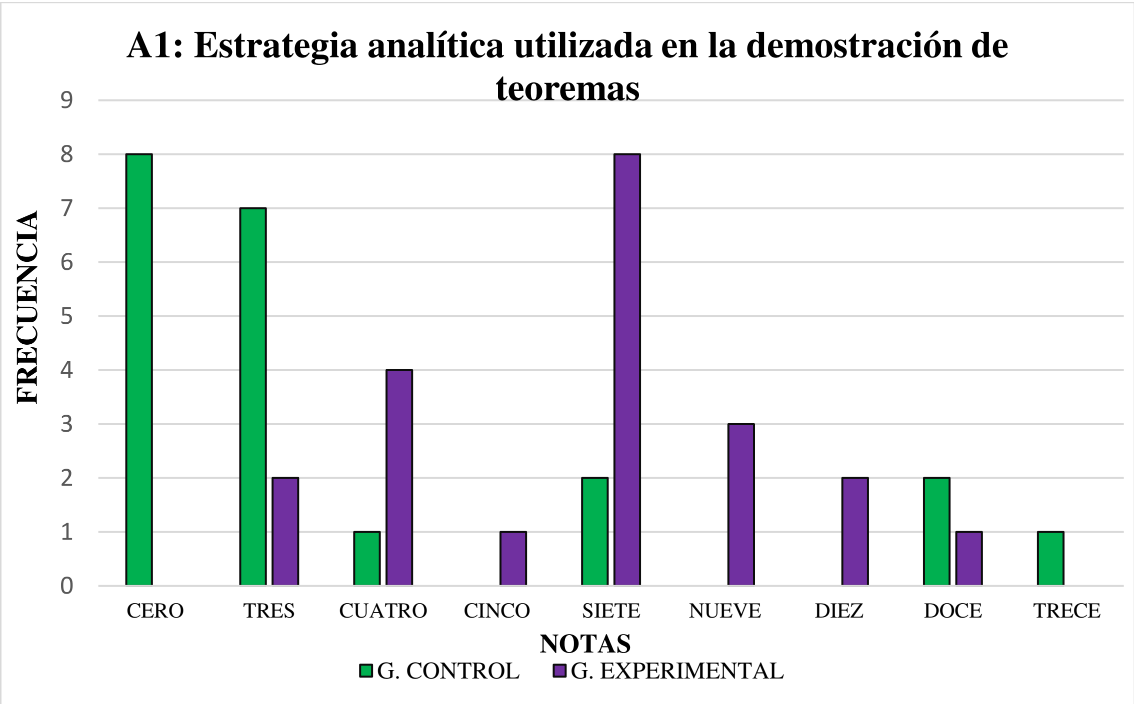


Figura 63. Comparación promedios pretest de estrategia analítica utilizada en la **demostración de teoremas** del Cálculo Diferencial de funciones básicas

A.2. La estrategia analítica utilizada en la Resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial de funciones básicas

Tabla 8

Resultado de notas de estrategia 2

	GRUPO	
NOTAS	**CONTROL**	**EXPERIMENTAL**
CERO	2	1
UNO	1	0
DOS	1	0
TRES	3	2
CUATRO	4	3
CINCO	3	3
SEÍS	0	2
SIETE	1	3
OCHO	2	3
NUEVE	3	2
DIEZ	0	2
DOCE	1	0
TOTAL	**21**	**21**

En la tabla 8 de los resultados del test en la estrategia analítica utilizada en la resolución de ejercicios, más del 98% de los estudiantes del grupo experimental y control desaprobaron.

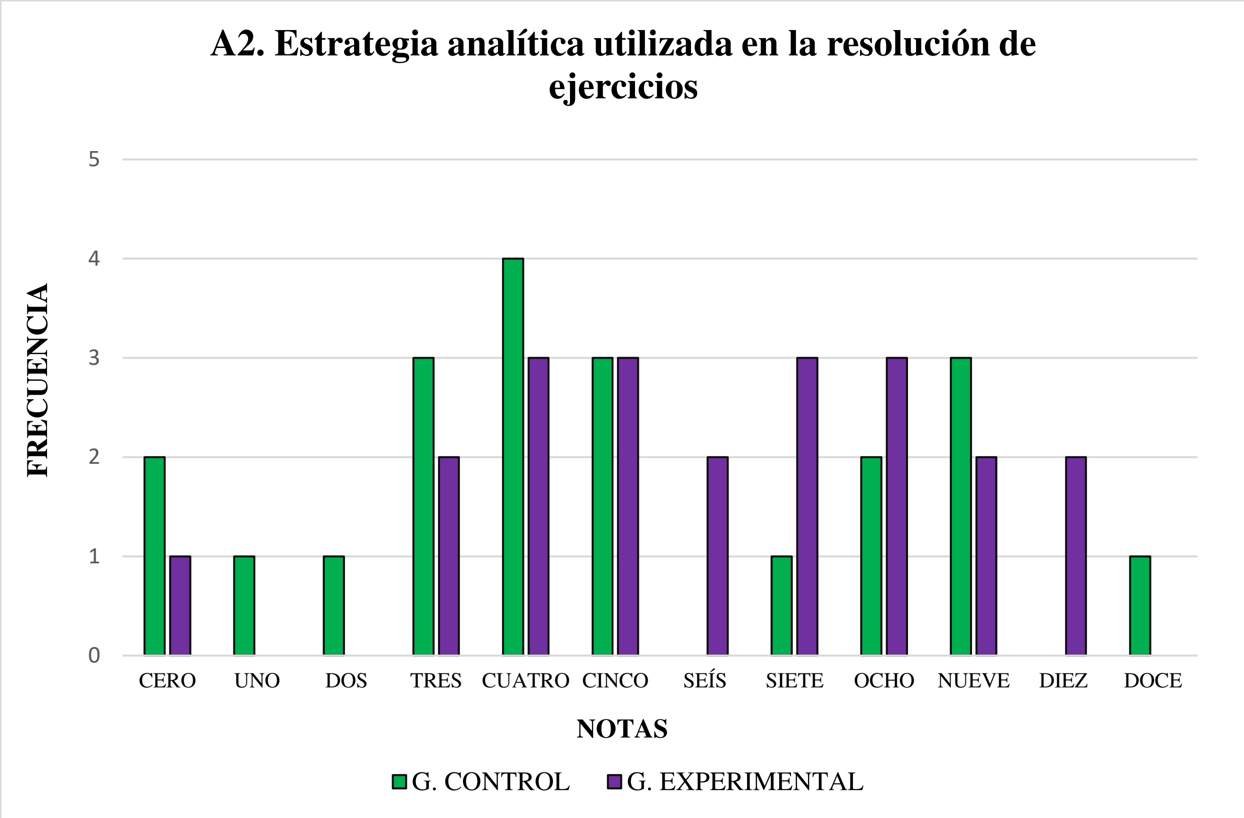


Figura 64. Comparación promedios pretest de estrategia analítica utilizada en la **resolución de ejercicios** del Cálculo Diferencial de funciones básicas

A.3. La estrategia analítica utilizada en la Resolución de problemas del Cálculo Diferencial de funciones básicas

Tabla 9

Resultado de notas de estrategia 3

	GRUPO	
NOTAS	**CONTROL**	**EXPERIMENTAL**
CERO	3	1
DOS	0	2
TRES	2	1
CUATRO	2	0
CINCO	3	3
SEÍS	2	0
SIETE	3	2
OCHO	0	2
NUEVE	1	4
ONCE	1	0
DOCE	2	4
CATORCE	1	1
QUINCE	1	0
VEINTE	0	1
TOTAL	**21**	**21**

En la tabla 9 de los resultados del test en la estrategia analítica utilizada en la resolución de ejercicios, más del 98% de los estudiantes del grupo experimental y control desaprobaron.

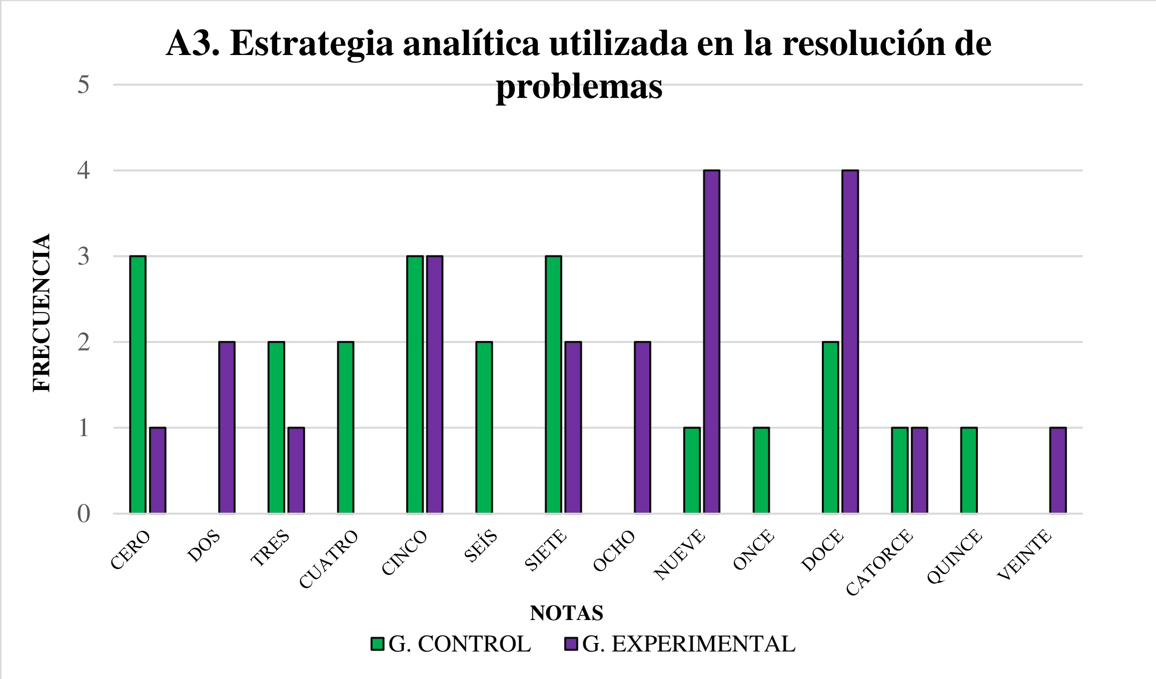


Figura 65. Comparación promedios pretest de estrategia analítica utilizada en la **resolución de problemas** del Cálculo Diferencial de funciones básicas

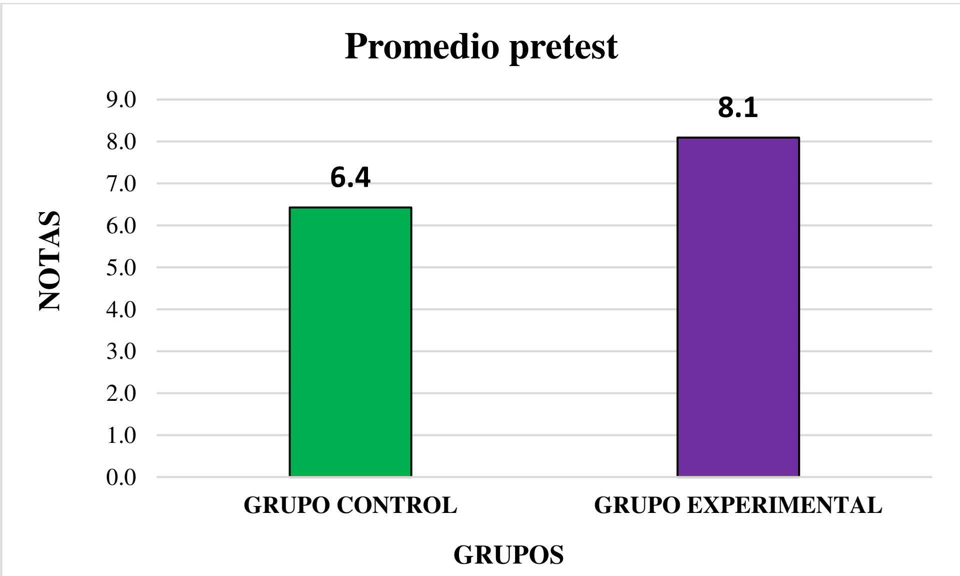


Figura 66. Comparación promedios pretest

En la figura 65 podemos observar que el promedio de las notas del test de los estudiantes del grupo de control es 6,4; mientras que en los estudiantes del grupo experimental es 8,1.

B: PRUEBA POS TEST

B.1. La estrategia analítica utilizada en la demostración de teoremas del Cálculo Diferencial de funciones básicas.

Tabla 10

Resultado de notas de estrategia 1

	GRUPO	
NOTAS	**CONTROL**	**EXPERIMENTAL**
CERO	1	0
TRES	2	0
CINCO	6	0
SEÍS	0	2
SIETE	2	1
OCHO	3	5
NUEVE	0	1
DIEZ	0	1
ONCE	1	4
DOCE	3	1
TRECE	2	0
QUINCE	1	5
DIECISÉIS	0	1
TOTAL	**21**	**21**

En la tabla 10 de los resultados del postest en la estrategia analítica utilizada en la demostración de teoremas del Cálculo Diferencial, de funciones básicas podemos observar que la moda en el grupo de control es 5, mientras que la moda en el grupo experimental es 8; asimismo más del 33,3% del grupo de control están aprobados, mientras que el 52,4% del grupo experimental aprobaron.

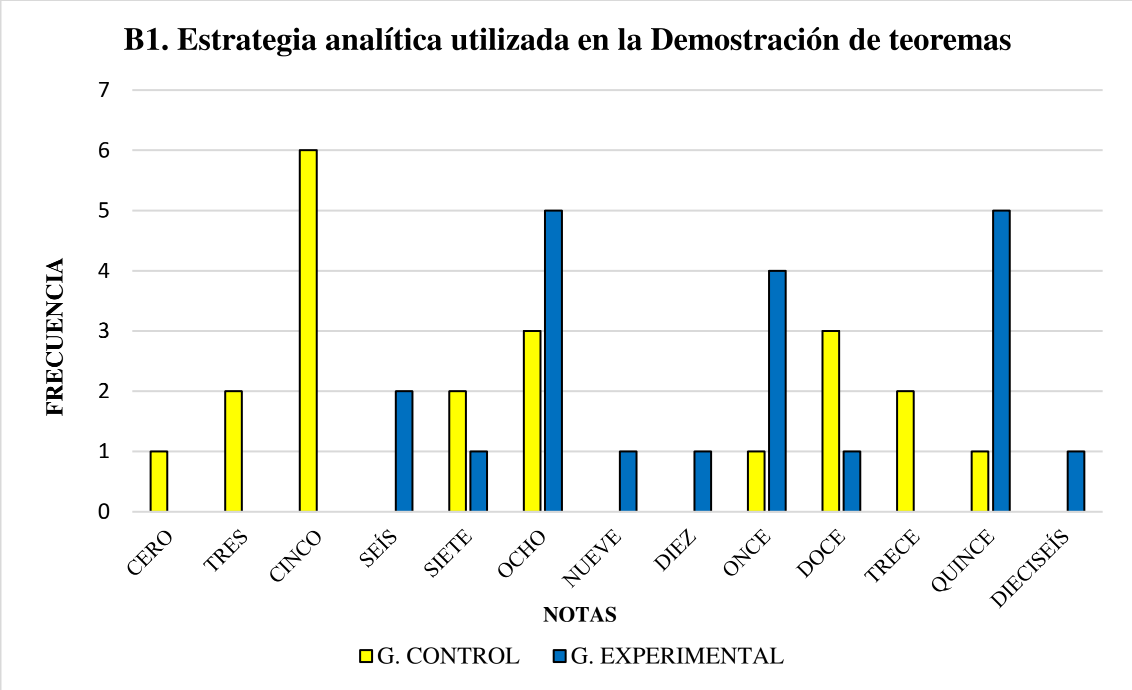


Figura 67. Comparación promedios postest de estrategia analítica utilizada en la demostración de teoremas del Cálculo Diferencial de funciones básicas

Tabla 11

Porcentajes de aprobados y desaprobados según estrategia 1

B1. Estrategia analítica utilizada en la Demostración de teoremas					
	ARPOBADOS		**DESAPROBADOS**		**TOTAL**
GRUPOS	N°	%	N°	%	
G. EXPERIMENTAL	11	52,4%	10	47,6%	**21**
G. CONTROL	7	33,3%	14	66,7%	**21**
TOTAL	**18**	**42,9%**	**24**	**57,1%**	**42**

En la tabla 11 de los resultados del postest en la **Estrategia analítica utilizada en la Demostración de teoremas,** podemos observar que la cantidad de estudiantes aprobados en el grupo experimental es 52,4%, mientras que en el grupo de control es el 33,3% y la cantidad de estudiantes desaprobados en el grupo experimental es el 47,6%, mientras que en el grupo de control es el 66,7%.

Tabla 12

Resultados estadísticos de estrategia 1

		DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS - CONTROL	DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS - EXPERIMENTAL
N	Válido	21	21
	Perdidos	0	0
Media		7,71	10,71
Mediana		7,00	11,00
Moda		5	8[a]
Desviación estándar		4,027	3,319
Varianza		16,214	11,014
Mínimo		0	6
Máximo		15	16
Percentiles	25	5,00	8,00
	50	7,00	11,00
	75	12,00	15,00

En la tabla 12 observamos que la diferencia entre las medias en l**a estrategia analítica utilizada en la demostración de teoremas del Cálculo Diferencial de funciones básicas del** grupo de Control y Experimental del postest es 3; el cuartil inferior en el grupo de control tiene notas menores que 5, mientras que en el grupo experimental tiene notas menores que 8 y en el cuartil superior el grupo de control tiene como nota máxima 12 y en el grupo experimental tiene como nota máxima 15.

B.2. La estrategia analítica utilizada en la Resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial de funciones básicas

Tabla 13

Resultado de notas de estrategia 2

	GRUPO	
NOTAS	**CONTROL**	**EXPERIMENTAL**
TRES	2	0
CUATRO	2	0
CINCO	1	0
SEÍS	5	2
SIETE	1	0
OCHO	4	2
NUEVE	1	1
DIEZ	1	4
ONCE	0	3
DOCE	2	2
TRECE	1	3
CATORCE	0	3
QUINCE	1	0
DICISÉISS	0	1
TOTAL	**21**	**21**

En la tabla 13 de los resultados del postest en la estrategia analítica utilizada en la resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial de funciones básicas podemos observar que la moda en el grupo de control es 6, mientras que la moda en el grupo experimental es 10; asimismo más del 19,1% del grupo de control están aprobados mientras que el 57,1% del grupo experimental aprobaron.

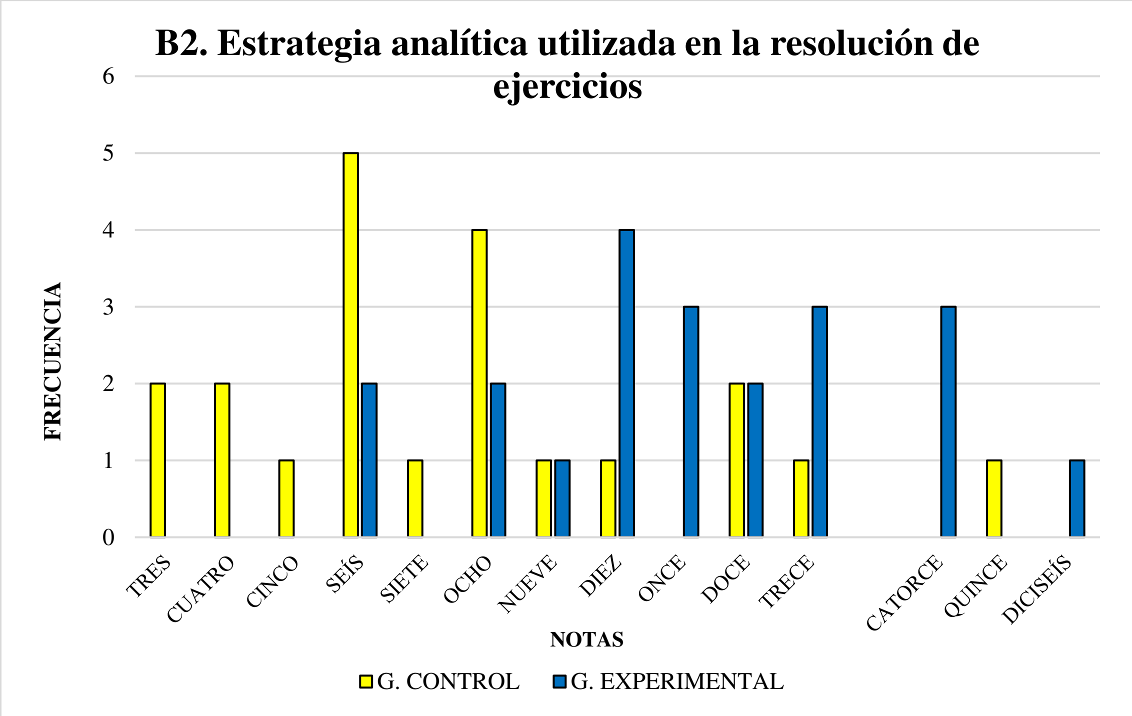


Figura 68. Comparación promedios pos test de estrategia analítica utilizada en la resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial de funciones básicas

Tabla 14

Porcentajes de aprobados y desaprobados según estrategia 2

B2. Estrategia analítica utilizada en la Resolución de ejercicios					
	ARPOBADOS		**DESAPROBADOS**		
GRUPOS	N°	%	N°	%	TOTAL
G. EXPERIMENTAL	12	57,1%	9	42,9%	21
G. CONTROL	4	19,0%	17	81,0%	21
TOTAL	**16**	**38,1%**	**26**	**61,9%**	**42**

En la tabla 14 de los resultados del postest en la **Estrategia analítica utilizada en la Resolución de ejercicios** podemos observar que la cantidad de estudiantes aprobados en el grupo experimental es 57,1%, mientras que en el grupo de control es el 19% y la cantidad de estudiantes desaprobados en el grupo experimental es el 42,9%, mientras que en el grupo de control es el 81%.

Tabla 15

Resultados estadísticos de estrategia 2

		RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS - CONTROL	RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS - EXPERIMENTAL
N	Válido	21	21
	Perdidos	0	0
Media		7,57	11,00
Mediana		7,00	11,00
Moda		6	10
Desviación estándar		3,310	2,665
Varianza		10,957	7,100
Mínimo		3	6
Máximo		15	16
Percentiles	25	5,50	9,50
	50	7,00	11,00
	75	9,50	13,00

En la tabla 15 observamos que la diferencia entre las medias en l**a estrategia analítica utilizada en la Resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial de funciones básicas del** grupo de Control y Experimental del pos test es 3,43; el cuartil inferior en el grupo de control tiene notas menores que 5,5, mientras que en el grupo experimental tiene notas menores que 9,5 y en el cuartil superior el grupo de control tiene como nota máxima 9,5 y en el grupo experimental tiene como nota máxima 13.

B.3. La estrategia analítica utilizada en la Resolución de Problemas del Cálculo Diferencial de funciones básicas

Tabla 16

Resultado de notas de estrategia 3

NOTAS	GRUPO CONTROL	GRUPO EXPERIMENTAL
CINCO	1	0
SIETE	1	0
OCHO	2	0
NUEVE	2	0
ONCE	2	1
DOCE	3	1
TRECE	2	0
CATORCE	1	5
QUINCE	0	2
DIECISÉIS	4	5
DIECISIETE	0	1
DIECIOCHO	2	4
VEINTE	1	2
TOTAL	**21**	**21**

En la tabla 16 de los resultados del postest en la estrategia analítica utilizada en la resolución de problemas del Cálculo Diferencial de funciones básicas, podemos observar que la moda en el grupo de control es 16, mientras que la moda en el grupo experimental es 18; asimismo más del 71,4% del grupo de control están aprobados, mientras que el 100% del grupo experimental aprobaron.

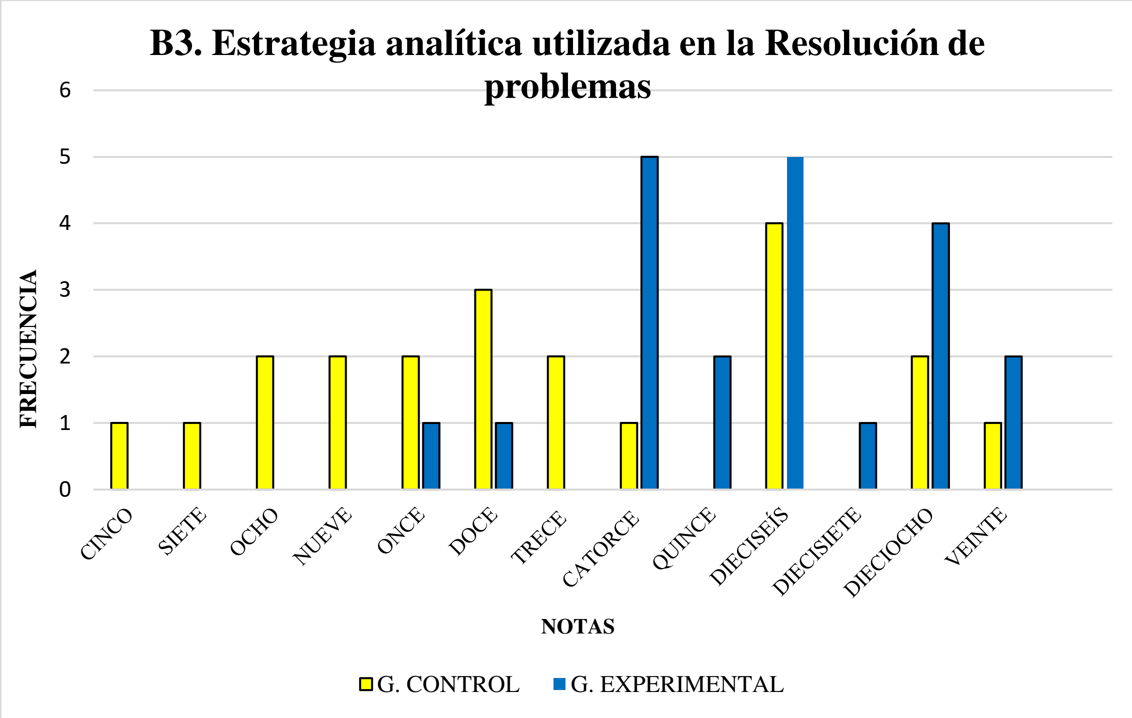


Figura 69. Comparación promedios postest de estrategia analítica utilizada en la resolución de problemas del Cálculo Diferencial de funciones básicas

Tabla 17

Porcentajes de aprobados y desaprobados según estrategia 3

B3. Estrategia analítica utilizada en la Resolución de problemas					
	ARPOBADOS		DESAPROBADOS		
GRUPOS	N°	%	N°	%	TOTAL
G. EXPERIMENTAL	21	100,0%	0	0,0%	21
G. CONTROL	15	71,4%	6	28,6%	21
TOTAL	**36**	**85,7%**	**6**	**14,3%**	**42**

En la tabla 17 de los resultados del pos test en la **Estrategia analítica utilizada en la Resolución de problemas,** podemos observar que la cantidad de estudiantes aprobados en el grupo experimental es 100%, mientras que en el grupo de control es el 71,4% y la cantidad de estudiantes desaprobados en el grupo experimental es el 0%, mientras que en el grupo de control es el 28,6%.

Tabla 18

Resultados estadísticos de estrategia 3

		RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS - CONTROL	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS - EXPERIMENTAL
N	Válido	21	21
	Perdidos	0	0
Media		12,57	15,81
Mediana		12,00	16,00
Moda		16	14[a]
Desviación estándar		4,032	2,358
Varianza		16,257	5,562
Mínimo		5	11
Máximo		20	20
Percentiles	25	9,00	14,00
	50	12,00	16,00
	75	16,00	18,00

En la tabla 18 observamos que la diferencia entre las medias en l**a estrategia analítica utilizada en la Resolución de problemas del Cálculo Diferencial de funciones básicas del** grupo de Control y Experimental del postest es 3,24; el cuartil inferior en el grupo de control tiene notas menores que 9, mientras que en el grupo experimental tiene notas menores que 14 y en el cuartil superior, el grupo de control tiene como nota máxima 16 y en el grupo experimental tiene como nota máxima 18.

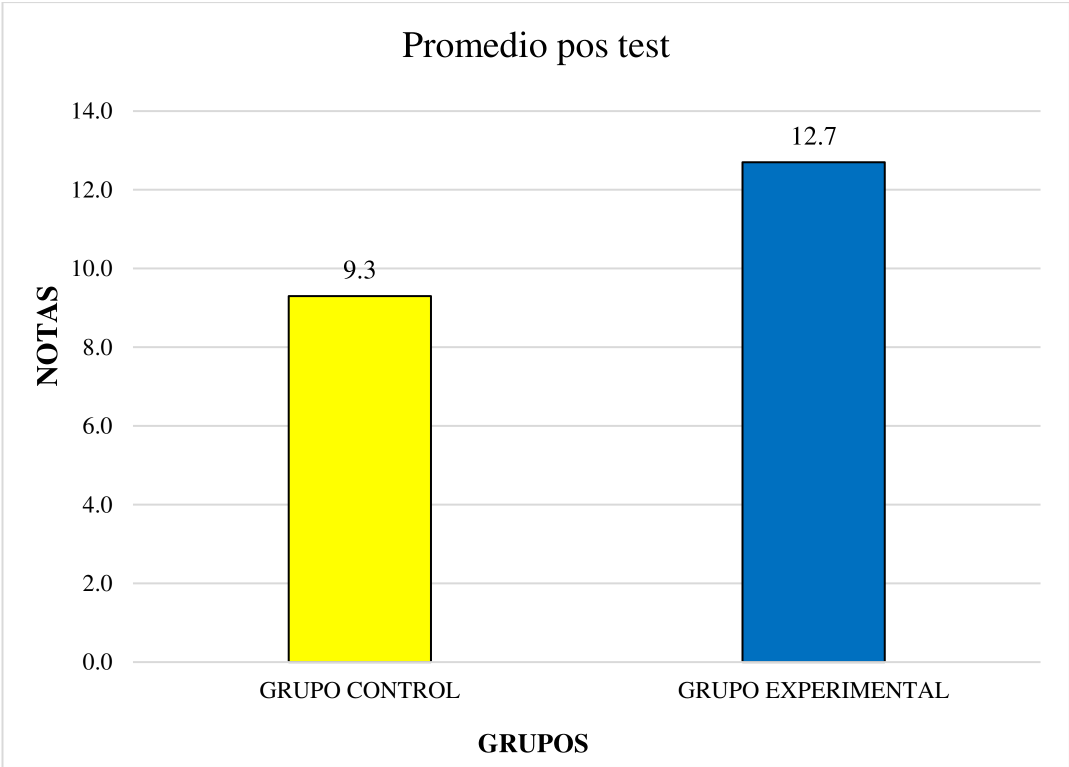


Figura 70. Comparación promedios pos test

En la figura 69 podemos observar que el promedio de las notas del pos test de los estudiantes del grupo de control es 9,3; mientras que en los estudiantes del grupo experimental es 12,7.

Tabla 19

Porcentajes de aprobados y desaprobados

	Aplicación de estrategias analíticas				
	ARPOBADOS		DESAPROBADOS		
GRUPOS	N°	%	N°	%	**TOTAL**
G. EXPERIMENTAL	19	90,5%	2	9,5%	21
G. CONTROL	7	33,3%	14	66,7%	21
TOTAL	**26**	**61,9%**	**16**	**38,1%**	**42**

En la tabla 19 de los resultados del postest en la **Estrategia analítica utilizada en la asignatura,** podemos observar que la cantidad de estudiantes aprobados en el grupo experimental es 90,5%, mientras que en el grupo de control es el 33,3;% y la cantidad de estudiantes desaprobados en el grupo experimental es el 9,5%, mientras que en el grupo de control es el 66,7%.

Tabla 20

Resultados estadísticos de estrategias

		CONTROL_SALIDA_PF	EXPERIMENTAL_SALIDA_PF
N	Válido	21	21
	Perdidos	0	0
Media		9,33	12,67
Mediana		9,00	13,00
Moda		7	13
Desviación estándar		2,763	1,494
Varianza		7,633	2,233
Mínimo		5	10
Máximo		15	16
Percentiles	25	7,00	12,00
	50	9,00	13,00
	75	11,00	13,50

En la tabla 20 observamos que la diferencia entre las medias en l**a estrategia analítica utilizada en la asignatura** del grupo de Control y Experimental del postest es 3,34; el cuartil inferior en el grupo de control tiene notas menores que 7, mientras que en el grupo experimental tiene notas menores que 12 y en el cuartil superior el grupo de control tiene como nota máxima 11 y en el grupo experimental tiene como nota máxima 13,5.

Para determinar si la variable la estrategia analítica utilizada en la enseñanza del Cálculo Diferencial de funciones básicas sigue una distribución normal, se aplicó la Prueba de Kolmogorov-Smirnov, obteniéndose los resultados que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 21

Prueba de Kolmogorov-Smirnov en una muestra para grupo de control y grupo experimental

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		CONTROL_SALIDA_PF	EXPERIMENTAL_SALIDA_PF
N		21	21
Parámetros normales[a,b]	Media	9,33	12,67
	Desviación estándar	2,763	1,494
Máximas diferencias extremas	Absoluta	,134	,174
	Positivo	,134	,174
	Negativo	-,104	-,160
Estadístico de prueba		,134	,174
Sig. asintótica (bilateral)		,200[c,d]	,098[c]

a. La distribución de prueba es normal.
b. Se calcula a partir de datos.
c. Corrección de significación de Lilliefors.
d. Esto es un límite inferior de la significación verdadera.

Para determinar si la variable de la estrategia analítica utilizada en la enseñanza del Cálculo Diferencial de funciones básicas siguen una distribución normal, se debe cumplir lo siguiente:

- si sig > 0,05, entonces podemos afirmar que proviene de una distribución normal.
- Si sig < 0,05, entonces podemos afirmar que no proviene de una distribución normal.

Como la variable de la estrategia analítica, utilizada en la enseñanza del Cálculo Diferencial de funciones básicas que observamos resulta con Sig = 0,200 > 0,05 en el caso del grupo control y Sig = 0,098 > 0,05 en el caso del grupo experimental, entonces podemos afirmar que los datos de ambos grupos provienen de una distribución normal.

Por otro lado, para determinar si la variable de las tres dimensiones sigue una distribución normal, se aplicó la prueba de Kolmogorov-Smirnov, obteniéndose los resultados que se muestran en la siguiente tabla

Tabla 22

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra de las estrategias analíticas del grupo experimental

Prueba de Kolmogorov-Smirnov para una muestra

		DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS - EXPERIMENTAL	RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS - EXPERIMENTAL	RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS - EXPERIMENTAL	EXPERIMENTAL_SALIDA_PF
N		21	21	21	21
Parámetros normales[a,b]	Media	10,71	11,00	15,81	12,67
	Desviación estándar	3,319	2,665	2,358	1,494
Máximas diferencias extremas	Absoluta	,187	,116	,134	,174
	Positivo	,174	,082	,134	,174
	Negativo	-,187	-,116	-,126	-,160
Estadístico de prueba		,187	,116	,134	,174
Sig. asintótica (bilateral)		,052[c]	,200[c,d]	,200[c,d]	,098[c]

a. La distribución de prueba es normal.

b. Se calcula a partir de datos.

c. Corrección de significación de Lilliefors.

d. Esto es un límite inferior de la significación verdadera.

Para determinar si las tres dimensiones provienen de una distribución normal, se debe cumplir lo siguiente:

- si sig > 0,05, entonces podemos afirmar que proviene de una distribución normal.
- Si sig < 0,05, entonces podemos afirmar que no proviene de una distribución normal.

Como observamos que el sig > 0,05 de cada una de las tres dimensiones cumple, entonces podemos afirmar que provienen de una distribución normal.

4.1.2. Prueba de hipótesis

Hipótesis general

La estrategia analítica utilizada en la enseñanza de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

H_0: La estrategia analítica utilizada en la enseñanza de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial de funciones básicas no genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

H_1: La estrategia analítica utilizada en la enseñanza de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

Tabla 23

Prueba de hipótesis con t de Student para la estrategia analítica

Estadísticas de grupo

	GRUPOS	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
NOTAS DE PROMEDIO	0	21	9,33	2,763	,603
FINAL	1	21	12,67	1,494	,326

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene de igualdad de varianzas		prueba t para la igualdad de medias						
									95% de intervalo de confianza de la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	Inferior	Superior
NOTAS DE PROMEDIO FINAL	Se asumen varianzas iguales	8,202	,007	-4,863	40	,000	-3,333	,685	-4,719	-1,948
	No se asumen varianzas iguales			-4,863	30,780	,000	-3,333	,685	-4,732	-1,935

La regla de decisión es la siguiente:

Si /$t_{obtenido}$ / ≥ / $t_{crítico}$ /, entonces se rechaza H_0 y por lo tanto se acepta H_1.

El $t_{crítico}$ lo obtenemos según la tabla estadística de la distribución T de Student al 95% de confianza con 40 grados de libertad (21+21-2) que es igual a 1,684 es decir $t_{crítico}$=1,684.

Como observamos en la tabla 22, el valor de $t_{obtenido}$ mediante el procesador estadístico SPSS versión 23, analizando la comparación de medias, resulta $t_{obtenido}$= -4,863.

Luego: / $t_{obtenido}$/= /-4,863/ ≥ / $t_{crítico}$/ = /1,684/ por lo que se rechaza H_0 y, por lo tanto, se acepta H_1, es decir La estrategia analítica utilizada en la enseñanza de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

Hipótesis específica 1:

La estrategia analítica utilizada en la demostración de teoremas del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

H_0: La estrategia analítica utilizada en la **demostración de teoremas** del Cálculo Diferencial de funciones básicas no genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

H_1: La estrategia analítica utilizada en la **demostración de teoremas** del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

Tabla 24

Prueba de hipótesis con t de Student para la estrategia analítica demostración de teoremas

Estadísticas de grupo

	GRUPOS	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
NOTAS DE DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS	0	21	7,71	4,027	,879
	1	21	10,71	3,319	,724

Prueba de muestras independientes

	Prueba de Levene de igualdad de varianzas		prueba t para la igualdad de medias						
								95% de intervalo de confianza de la diferencia	
	F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	Inferior	Superior

NOTAS DE DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS	Se asumen varianzas iguales	,822	,370	-2,635	40	,012	-3,000	1,139	-5,301	-,699
	No se asumen varianzas iguales			-2,635	38,592	,012	-3,000	1,139	-5,304	-,696

La regla de decisión es la siguiente:

Si /$t_{obtenido}$ / ≥ / $t_{crítico}$ /, entonces se rechaza H_0 y por lo tanto se acepta H_1.

El $t_{crítico}$ lo obtenemos según la tabla estadística de la distribución T de Student al 95% de confianza con 40 grados de libertad (21+21-2) que es igual a 1,684 es decir $t_{crítico}$=1,684.

Como observamos en la tabla 23, el valor de $t_{obtenido}$ mediante el procesador estadístico SPSS versión 23, analizando la comparación de medias, resulta $t_{obtenido}$= -2,635.

Luego: / $t_{obtenido}$/= /-2,635/ ≥ / $t_{crítico}$/ = /1,684/ por lo que se rechaza H_0 y, por lo tanto, se acepta H_1, es decir La estrategia analítica utilizada en la **demostración de teoremas** del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

Hipótesis específica 2:

La estrategia analítica utilizada en la **resolución de ejercicios** del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

H_0: La estrategia analítica utilizada en la **resolución de ejercicios** del Cálculo Diferencial de funciones básicas no genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

H_1: La estrategia analítica utilizada en la **resolución de ejercicios** del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

Tabla 25

Prueba de hipótesis con t de Student para la estrategia analítica resolución de ejercicios

Estadísticas de grupo

	GRUPOS	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
NOTAS DE RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS	0	21	7,57	3,310	,722
	1	21	11,00	2,665	,581

Prueba de muestras independientes

		Prueba de Levene de igualdad de varianzas		prueba t para la igualdad de medias						
									95% de intervalo de confianza de la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	Inferior	Superior
NOTAS DE RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS	Se asumen varianzas iguales	,837	,366	-3,697	40	,001	-3,429	,927	-5,303	-1,554
	No se asumen varianzas iguales			-3,697	38,255	,001	-3,429	,927	-5,305	-1,552

La regla de decisión es la siguiente:

Si $/t_{obtenido}/ \geq /t_{crítico}/$, entonces se rechaza H_0 y por lo tanto se acepta H_1.

El $t_{crítico}$ lo obtenemos según la tabla estadística de la distribución T de Student al 95% de confianza con 40 grados de libertad (21+21-2) que es igual a 1,684 es decir $t_{crítico}=1,684$.

Como observamos en la tabla 24, el valor de $t_{obtenido}$ mediante el procesador estadístico SPSS versión 23, analizando la comparación de medias, resulta $t_{obtenido}$= -3,697.

Luego: / $t_{obtenido}$/= /-3,697/ ≥ / $t_{crítico}$/ = /1,684/ por lo que se rechaza H_0 y, por lo tanto, se acepta H_1, es decir La estrategia analítica utilizada en la **resolución de ejercicios** del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

Hipótesis específica 3:

La estrategia analítica utilizada en **resolución de problemas d**el Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

H_0: La estrategia analítica utilizada en **resolución de problemas d**el Cálculo Diferencial de funciones básicas no genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

H_1: La estrategia analítica utilizada en **resolución de problemas d**el Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

Tabla 26

Prueba de hipótesis con t de Student para la estrategia analítica resolución de problemas

Estadísticas de grupo					
	GRUPOS	N	Media	Desviación estándar	Media de error estándar
NOTAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	0	21	12,57	4,032	,880
	1	21	15,81	2,358	,515

Prueba de muestras independientes										
		Prueba de Levene de igualdad de varianzas		prueba t para la igualdad de medias						
									95% de intervalo de confianza de la diferencia	
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Diferencia de error estándar	Inferior	Superior
NOTAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	Se asumen varianzas iguales	6,052	,018	-3,177	40	,003	-3,238	1,019	-5,298	-1,178
	No se asumen varianzas iguales			-3,177	32,251	,003	-3,238	1,019	-5,314	-1,162

La regla de decisión es la siguiente:

Si $/t_{obtenido}/ \geq /t_{crítico}/$, entonces se rechaza H_0 y por lo tanto se acepta H_1.

El $t_{crítico}$ lo obtenemos según la tabla estadística de la distribución T de Student al 95% de confianza con 40 grados de libertad (21+21-2) que es igual a 1,684, es decir $t_{crítico}$=1,684.

Como observamos en la tabla 25, el valor de $t_{obtenido}$ mediante el procesador estadístico SPSS versión 23, analizando la comparación de medias, resulta $t_{obtenido}$= -3,177.

Luego: / $t_{obtenido}$/= /-3,177/ ≥ / $t_{crítico}$/ = /1,684/ por lo que se rechaza H_0 y, por lo tanto, se acepta H_1, es decir La estrategia analítica utilizada en **resolución de problemas** del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.

CONCLUSIONES

1.- El estudio previo de las funciones básicas, que son 26 y las operaciones básicas que son 5, facilita el estudio de las otras funciones reales, porque son construidas con las funciones y operaciones básicas.

2.- El método axiomático, que organiza los conocimientos de la Matemática; es el que sustenta la estructura de la Estrategia Analítica y esta facilita la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial.

3.- La aplicación de la Estrategia Analítica en la resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial en la sección C5 (grupo experimental) tiene resultados diferenciados con respecto a la sección C1 (grupo de control)

4.- La aplicación de la Estrategia Analítica en la resolución de problemas del Cálculo Diferencial en la sección C5 (grupo experimental) tiene resultado diferenciado con respecto a la sección C1 (grupo de control).

5.- La aplicación de la Estrategia Analítica en la demostración de teoremas del Cálculo Diferencial en la sección C5 (grupo experimental) tiene resultado diferenciado con respecto a la sección C1 (grupo de control).

RECOMENDACIONES

1.- Se recomienda, iniciar el estudio de las funciones básicas y las operaciones básicas, para luego estudiar una función real cualquiera y así facilitar el estudio de límites y la derivada como parte de los conceptos básicos del Cálculo Diferencial.

2.- Se recomienda la apertura de una asignatura, que puede llamarse Precálculo, cuyo contenido sería el estudio de la funciones y operaciones básicas, tendencia de límites y derivada de cada función básica.

3.- Se recomienda que al resolver ejercicios, problemas y demostrar teoremas, se debe justificar cada paso del proceso de razonamiento; utilizando las definiciones, axiomas y teoremas de las respectivas unidades del Cálculo Diferencial.

4.- Se recomienda elaborar un texto, cuyo contenido tenga las siguientes unidades: Números reales, funciones reales básicas, tendencia de límite de cada una de las funciones básicas, derivada de cada una de las funciones básicas utilizando la definición en base a límite y, finalmente, estudiar las aplicaciones.

Referencia

Aleksandrov, A. Kolmogorov, A. & Laurentiev, M. (2003). *La matemática: su contenido, métodos y significados*. (1 ed.). Madrid: Alianza Editorial.

Stewart, J. (1999). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: International Thomson Editores.

Stewart I. (1975). *Concepto de matemática moderna.* (1 ed.). Madrid: Alianza Editorial.

Tegmark, M. (2014). *Nuestro Universo Matemático*. España: Antonio Bosh editor, S. A.

Linés, E. (2013). *Principios de Análisis Matemático*. España: Reverté, S. A.

Apostol, T. M. (1996). *Análisis matemático*. (2 ed.). Barcelona: Reverté, S. A.

Bartle, R. (1980). *Introducción al Análsis Matemático*. (1ª. ed.) México: Limusa, S.A.

Haaser N. B. y Sullivan, J. A. (1978). *Análisis Real*. (1 ed.). México: Trillas, S. A.

Munem, M. A. y Yizze, J. P. (2006). *Precálculos. Introducción funcional*. España: Reverté, S. A.

Espinoza, E. (2005*) Análisis Matemártico* I. Perú: Servicios Gráficos J. J.

Barrera, L. (2015). *Cálculo de una variable con aplicaciones*. (2 ed.) Perú: San Marcos E. I. R. L.

Kline, M. (2000). *Matemática para los estudiantes de humanidades*. (1 ed.). México: Fondo de Cultura Económica.

Sanguineti, J. J. (2007). *Lógica*. (7 ed.). España: EUNSA.

Klimovsky, G. (1997). *Las desventuras del conocimiento científico. Una introducción a la epistemología*. (3 ed.). Argentina: A-Z editora.

Sacristán, M. (1964). *Introducción a la lógica y al análisis formal*. España: Ediciones Anil, S. A.

Bartte, R. y Sherbert, D. (1999*). Introducción al análisis Matemático de una variable*. (2 ed.). México: Limusa, S. A.

Rodríguez, R. (2013). *Matemática I: Conjuntos, Números, Estructuras Algebraicas* y Fundamentos de Algebra Lineal. Volumen I: Conjuntos Numéricos: Complementos. España: Tébor, S. L.

Chaitin, G. (2015). *Número Omega. Límites y enigmas de las matemáticas*. (1 ed). España: Tusquets Editores, S. A.

Sánchez, J. (2009). *Compendio de Didáctica General*. España: CCS.

Rodríguez, J. (1994). *"Los componentes del currículo".* En Sáez Barnio, O. (dir.): Didáctica General. Un enfoque curricular. Alcoy: Marfil ((Citado por Sánchez H. P. 163).

Rojano, M.T. (2015). *Las Tecnologías Digitales en la enseñanza de las matemáticas*. México: Trillas.

Tobón, S. (2013*). Formación Integral. Pensamiento complejo, currículo, didáctica* y evaluación. ECOE Ediciones. Bogotá: Colombia.

Linés, E. (1991*). Principios de Análisis Matemático*. España: Reverté, S. A.

Enríquez, J. y Fiol, m. (1985). *Cálculo Diferencial e Integral Aplicado a las Ciencias administrativas y Económicas*. Trillas. México: D.F.

Irazoqui, E. (2015).*Tesis doctoral. El aprendizaje del cálculo diferencial: Una propuesta basada en la modularización*.http://IRAZOQUI_BECERRA_Elias_Tesis.pdf. España.

Romero, T. (2013*). Uso de Recursos Educativos Abiertos(REA) para la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en el nivel medio de enseñanza.* http://Tesis%20Tania%20Romero%20R.pdf?.México

Abarca, N. (2015). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas, una propuesta motivadora*. http. Revistasbolivianas.org.bo/pdf.

Oliveira, C. (2015*).Una posible "razón de ser" del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*.http://Una-posible-"razón-de-ser"-del-cálculo-diferencial-elemental2.pdf.

ANEXOS

1.- Cuadro de consistencia

2.- Instrumento de recolección de datos

ANEXO I. CUADRO DE CONSISTENCIA

TÍTULO: LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES BÁSICAS DE UNA VARIABLE, UTILIZANDO LA ESTRATEGIA ANALÍTICA; A LOS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA; DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN, ENRIQUE GUZMÁN Y VALLE:

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	DIMENSIONES E INDICADORES	MÉTODO Y DISEÑO	UNIVERSO Y MUESTRA	TRATAMIENTO ESTADÍSTICO
¿Qué efecto genera, la enseñanza del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable. Utilizando la estrategia analítica en el aprendizaje de los estudiantes de Educación, especialidad de Matemática e Informática de la UNE – Enrique Guzmán y Valle? **Problemas específicos:**	Determinar los efectos que generan el uso de la estrategia analítica en la enseñanza del Calculo Diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de Educación, de la especialidad de Matemática e informática de la UNE. **Objetivos específicos:**	La estrategia analítica utilizada en la enseñanza de los conceptos básicos del cálculo diferencial de funciones básicas generan efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de Educación, de la especialidad de Matemática e informática de la UNE. **Hipótesis específicas:**	**VARIABLE INDEPENDIENTE.** La estrategia analítica, utilizada en la enseñanza del cálculo diferencial.	**ESTRATEGIA ANALÍTICA EN LA DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS.** - Conceptos no definidos. - Conceptos definidos. - Axiomas. - Teoremas. **ESTRATEGIA ANALÍTICA EN LA RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS.** - Conceptos no definidos. - Conceptos definidos. - Axiomas. - Teoremas. **ESTRATEGIA ANALÍTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.** - Conceptos no definidos. - Conceptos definidos.	Método: Cuasi experimental Diseño cuasi experimental	Población Secciones C_1, C_5 y C_9 Grupo de control C_5 Grupo experimental C_1	Estadístico T-Student

¿Qué efecto genera, el uso de la estrategia analítica en la demostración de teoremas del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE? ¿Qué efecto genera, el uso de la estrategia analítica en la resolución e ejercicios del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE?	Determinar los efectos que se genera, en el uso de la Estrategia Analítica en la demostración de Teoremas del Cálculo Diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE. Determinar los efectos que genera, el uso de la Estrategia Analítica en la resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la	La estrategia analítica utilizada en la demostración de teoremas del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática. La estrategia analítica utilizada en la resolución de ejercicios del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.	**VARIABLE DEPENDIENTE** Nivel de aprendizaje de los conceptos básicos del cálculo diferencial.	- Axiomas. - Teoremas. **APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS.** - Uso adecuado de los conceptos no definidos, definidos, axiomas y teoremas. **APRENDIZAJE DE RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS.** - Uso adecuado de los conceptos no definidos, definidos, axiomas y teoremas. **APRENDIZAJE DE LA RESOLUCIÓN DE**			

¿Qué efecto genera, el uso de la estrategia analítica en la resolución de problemas del cálculo diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE?	UNE. Determinar los efectos que genera, el uso de la Estrategia Analítica en la resolución de problemas del Cálculo Diferencial de funciones básicas de una variable; en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática de la UNE	La estrategia analítica utilizada en resolución de problemas del Cálculo Diferencial de funciones básicas genera efectos diferentes en el aprendizaje de los estudiantes de la especialidad de Matemática e Informática.		**PROBLEMAS.** Uso adecuado de los conceptos no definidos, definidos, axiomas y teoremas.				

ANEXO II. INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE DATOS.

CUESTIONARIO: Uso de la Estrategia Analítica: Identificar los conceptos no definidos, definidos, axiomas y teoremas en el proceso de demostración de teoremas, resolución de ejercicios y resolución de problemas referentes a: Sistema de los números reales, funciones reales básicas de una variable independiente, limite y derivada.

INSTRUCTIVO: Encierra en un círculo la alternativa, que según su conocimiento es la verdad. Proceda con sinceridad. La encuesta es anónima.

TEMAS EVALUADOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES BÁSICAS: Sistema de los Números Reales; Funciones reales básicas de una variable: $F: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; Derivada de una función real básica de una variable y Límite de funciones reales básicas de una variable

I. Demostración de teoremas

1) (3 P) Es un teorema del sistema de los números reales.

a. $x + y = y + x$ b. $x \in \mathbb{R}$ c. $(-x)\, y = -x\, y$ d. $x \leq y$
e. $x\,(y + z) = xy + xz$

2) (5 P) Dada las funciones $f\,(x) = lnx$ y $g\,(x) = \sqrt{x}$. El dominio de $f \;o\; g$ con $g\,(f\,(x))$, es:

a. $\langle 0, 1\rangle$ b. $[1, +\infty\rangle$ c. $\langle e, +\infty\rangle$ d. $\langle 0, e\rangle$ e. $\langle 0, +\infty\rangle$

3) (4 P) En $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$. $x \to 3^-$ significa que:

a. $x \in \langle 3 - \varepsilon,\ 3\rangle$ b. $x \in \langle 3,\ 3 + \delta\rangle$ c. $x \in \langle 3 - \delta, 3 + \delta\rangle$
d. $x \in \langle 3, 3 + \varepsilon\,\rangle$ e. $x \in \langle -\delta,\ \delta\rangle$

4) (5 P) La derivada de la función básica $y = tgx$ en $x = {}^{\pi}/_{4}$ es:

a. - 2 b. 1 c. -1 d. 2 e. $\sqrt{2}$

5) (3 P) La demostración en matemática es un instrumento:

a. De generación de nuevos conocimientos.

b. Para aprender nuevos conocimientos.
c. Para aprender los teoremas.
d. Para comprender los axiomas.
e. De validación por excelencia de proposiciones.

II. Resolución de ejercicios

6) (1 P) Es un concepto no definido en $\mathbb{R}$

a. $x \geq y$ b. $x + y$ c. $[a, b]$ d. $x = y$ e. $x\, y$

7) (1 P) En la expresión $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, el concepto definido no utilizado en su construcción es:

a. $x + y$ b. $x\, y$ c. x/y d. $x \geq y$ e. x^n

8) (1 P) En una función real básica, $f\,(x)$ no pertenece al:

a. Codominio b. Rango c. Campo de variación
d. Ámbito e. Recorrido

9) (3 P) En $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$, para calcular se necesita utilizar los límites de la operación básica de funciones ¿Cuál es la operación?

a. $f \,.\, g$ b. f/g c. f^2 d. $f - g$ e. $f \; o \; g$

10) (3 P) Si $x \to +\infty$, entonces se tiene que:

a. $x^2 \to -\infty$ b. $\sqrt{x} \to 0^+$ c. $\ln x \to 1^+$ d. $x^3 \to -\infty$
e. $2^x \to +\infty$

11) (3 P) Dada la función $y = ln^2 x$, el número de funciones básicas de su derivada es:

a. 3 b. 2 c. 4 d. 0 e. 1

12) (4 P) Dada la función $y = 2^x + lnx$, su derivada no está definida para:

a. $x \neq 0$ b. $x = 0$ c. $x > 1$ d. $x < 0$ e. $x > 7$

13) (2 P) La definición en un sistema axiomático sirve para:

a. Definir otro concepto.
b. Introducir los conceptos no definidos.
c. Evitar la regresión hasta el infinito en el proceso de implicación.

d. Evitar la reversibilidad.
e. Colocar el término dentro de un conjunto.

14) (2 P) En la demostración matemática se utiliza fundamentalmente el razonamiento.

a. Inductivo b. Analógico c. Contradictorio
d. Deductivo e. Prueba por casos

III. Resolución de problemas

15) (2 P) Es un axioma de $\mathbb{R}$

a. $x = x$ b. $+(-a) = -a$ c. $(-1)\, a = -a$
d. $-(a + b) = -a - b$ e. $|x| > 0$

16) (2 P) Dada la función $f(x) = cosx$, la función $g(x) = cos^2x$ ha sido construida utilizando la operación básica de:

a. $f - g$ b. $f + g$ c. $f \,.\, g$ d. $f\ o\ g$ e. ${}^{f}/_{g}$

17) (4 P) Dada la función $f(x) = \ln(x - 1) + |x + 4|$, no es una función básica utilizada en su construcción.

a. $y = x$ b. $y = 4$ c. $y = x^4$ d. $y = lnx$ e. $y = |x|$

18) (3 P) Dada la función $y = \frac{1}{x}$. Si $x \rightarrow 0^+$ entonces y tiende a:

a. $+\infty$ b. $-\infty$ c. 0^- d. 0^+ e. 1^+

19) (5 P) Para derivar $y = \frac{(x-1)\,(x+3)}{x}$ no se debe usar la derivada de la operación básica.

a. $f\ o\ g$ b. $f \,.\, g$ c. $f - g$ d. $f + g$ e. ${}^{f}/_{g}$

20) (4 P) La estructura lógica de la demostración por contradicción de $p \rightarrow q$ es:

a. $(p \vee \sim q) \rightarrow c$ b. $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow c$ c. $(p \wedge \sim q) \rightarrow c$
d. $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow c$ e. $\sim(p \wedge q) \rightarrow c$