Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Profesional de Matemática

Existencia y unicidad de la solución de la ecuación de Poisson en una región anular

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jonathan RUIZ QUIROZ

ASESOR

Dr. José Raúl LUYO SÁNCHEZ

Lima, Perú

2019

Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Ruiz, J. (2019). *Existencia y unicidad de la solución de la ecuación de Poisson en una región anular*. Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

CÓDIGO ORCID DEL AUTOR: NO TIENE.

CÓDIGO ORCID DEL ASESOR: 0000-0001-5120-5274.

DNI DEL AUTOR: 44937232.

GRUPO DE INVESTIGACIÓN: NO PERTENECE.

INSTITUCIÓN QUE FINANCIA TOTAL O PARCIALMENTE LA INVESTIGACIÓN: AUTOFINANCIADO.

UBICACIÓN GEOGRÁFICA DONDE SE DESARROLLO LA INVESTIGACIÓN. DEBE INCLUIR LOCALIDADES Y COORDENADAS GEOGRÁFICAS:

JR. ANDRÉS AVELINO CÁCERES 290, URB. LUCYANA-CARABAYLLO-LIMA.

COORDENADAS GEOGRÁFICAS: -11.8952769,-77.0322619.

AÑO O RANGO DE AÑOS QUE LA INVESTIGACIÓN ABARCÓ: COMENZÓ EN ENERO DEL 2018, TERMINÓ EN FEBRERO DEL 2019.

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS
(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS
Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34
Teléfono IP Nº 619-7000
Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe
Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 17:00 horas del día Lunes 25 de marzo de 2019, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Crisóstomo Parejas (Presidente), Mg. Luz Teresa Quispe Vega (Miembro), Dr. José Raúl Luyo Sánchez (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON EN UNA REGIÓN ANULAR», presentado por el señor Bachiller JONATHAN RUIZ QUIROZ, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

SOBRESALIENTE DIECIOCHO (18).

A continuación el Presidente del Jurado, Dr. Jorge Crisóstomo Parejas, manifestó que el señor Bachiller JONATHAN RUIZ QUIROZ, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 18:00 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. JORGE CRISÓSTOMO PAREJAS
PRESIDENTE

MG. LUZ TERESA QUISPE VEGA
MIEMBRO

DR. JOSÉ RAÚL LUYO SÁNCHEZ
MIEMBRO ASESOR

Ficha Catalográfica

Ruiz Quiroz, Jonathan.
EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE POISSON EN UNA REGIÓN ANULAR
Lima: UNMSM, 2018.
VII, 65 p; 31cm (UNMSM, Licenciado, Matemática, 2018).
Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos,
Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Resultados Preliminares.
2. Existencia y unicidad.
3. Conclusiones.
Título
(Serie).

Agradecimentos

Quiero agradecer a Dios Padre de nuestro Señor Jesucristo, por haber extendido su gracia inmerecida sobre mi vida.
Agradezco a mis padres Irma y José quienes son los ejemplos de amor, perseverancia, y fe. A mis hermanas Mónica y Paola por el apoyo incondicional en estos años.
Mi novia Lila, gracias por compartir conmigo estos años de luchas y victorias. Hemos experimentado juntos el verdadero significado de la palabra amor, en toda su extensión.
Al profesor Dr. José Luyo Sánchez por su disposición y consejos para la elaboración esta tesis.
A mis amigos Alexander, Alan, Himer, Rocio, Isabel, Jhelly, Jorge, Luis y Paola por el cálido recibimiento y apoyo en este hermoso Perú.

Resumen

En este trabajo de tesis estudiamos la ecuación de Poisson, con condiciones de frontera tipo Robin, en una región anular. Demostramos resultados de existencia y unicidad de la solución débil, para dos sub-problemas, utilizando el método de formulación variacional y el Teorema de Lax-Milgram, asociado a espacios de Sobolev. En este análisis también mostramos resultados de regularidad de la solución utilizando series de Fourier y finalmente establecemos una relación entre el flujo de transferencia de calor y la temperatura externa del tubo a través de un operador lineal compacto.

Palabras clave: Ecuación de Poisson, Espacios de Sobolev, Lax-Milgram, Análisis de Fourier, Operadores compactos.

Abstract

In this thesis we study the Poisson equation, with Robin boundary conditions, in an annular region. We show results of existence and uniqueness of the weak solution, for two sub-problems, using the variational formulation method and the Lax-Milgram Theorem, associated with Sobolev spaces. In this analysis we also show regularity results of the solution using Fourier series and finally we establish a relationship between the heat transfer flow and the external temperature of the tube through a compact linear operator.

Keywords: Poisson equation, Sobolev spaces, Lax-Milgram, Fourier analysis, Compact operators.

Índice general

1. Resultados preliminares **4**

1.1. Espacios de Hilbert 4

1.1.1. Teoría de Operadores 16

1.1.2. El Teorema de Picard 19

1.2. Teoría de Distribuciones y espacios de Sobolev 20

1.2.1. Distribuciones 22

1.2.2. Espacios $L^p(\Omega)$ 22

1.2.3. Espacios de Sobolev 26

1.2.4. Espacios de Hilbert asociados a funciones periódicas 29

1.3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes 31

1.3.1. Solución general de la ecuación $ay'' + by' + c = 0$ 32

1.3.2. Ecuación de Cauchy-Euler 34

2. Existencia y unicidad **35**

2.1. Cambio de coordenadas 35

2.2. La Formulación variacional 37

2.2.1. Formulación variacional del problema de valor de frontera homogéneo 37

2.2.2. Solución del problema no homogéneo 53

3. Conclusiones **56**

A. Sucesiones y series de funciones **58**

B. Frontera **60**

Introducción

Este estudio es motivado por los trabajos publicados en el área de problemas inversos en transferencia de calor, en que la ecuación de Poisson se utiliza como modelo para reconstruir el coeficiente de transferencia de calor convectivo, a partir de las informaciones de temperatura en la pared exterior.

En los procesos térmicos como la pasteurización, un alimento, generalmente líquido, es expuesto a altas temperaturas durante un breve período de tiempo y después es enfriado rápidamente con la finalidad de reducir los microorganismos dañinos para la salud sin alterar la calidad y la composición del líquido. En este proceso, aparece el coeficiente de convección, el cual cuantifica la transferencia de calor entre el líquido y la pared interna del conducto tubular. Así, estimar el coeficiente convectivo es de vital importancia, ya que si este presenta pequeños valores, el proceso térmico no eliminaría la mayoría de microorganismos, comprometiendo la salud pública. En caso contrario, si fuese muy elevado, la calidad del alimento podría verse afectada debido al sobrecalentamiento.

Actualmente existe un gran interés en determinar el coeficiente convectivo a partir de las informaciones de temperatura en la pared externa del tubo. Este estudio realizado corresponde al área de problemas inversos en transferencia de calor. Entre los diferentes métodos utilizados para determinar este coeficiente se incluyen la utilización de sondas colocadas en el interior del tubo, sin embargo esto presenta inconvenientes pues en algunos casos la geometría del conducto impide utilizar esta estrategia. Por otro lado, en el caso posible, las sondas pueden llegar a alterar la temperatura interna y consecuentemente distorsionar la información del coeficiente; o en último caso ser destruidas por las altas temperaturas.

El proceso anteriormente descrito puede ser modelado mediante ecuaciones en derivadas parciales con condiciones de frontera.

En este trabajo estudiaremos la ecuación de Poisson, definida sobre la región transversal de un tubo espiralado, con condiciones de frontera tipo Robin. Mostraremos resultados de existencia y unicidad de la ecuación de Poisson en un dominio anular utilizando el método variacional y el Teorema de Lax-Milgram.

Consideramos el dominio como la sección transversal de un tubo el cual es descrito por el conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 | r_i < \|x\|_2 < r_e\}$, como es mostrado en la Figura 1, con fronteras interior y exterior denotadas por $\Gamma_i = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = r_i\}$ y $\Gamma_e = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = r_e\}$, respectivamente.

Utilizamos este dominio debido a que los experimentos realizados en laboratorio muestran que la temperatura en el tubo espiralado posee una variación significativa a lo largo de la circunferencia, mientras que en la dirección del axial esta variación es insignificante [13].

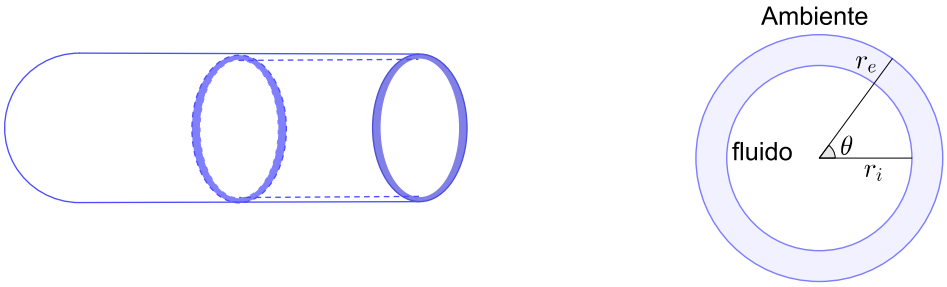

Figura 1: Conducto y sección transversal.

Para el modelo matemático nos basamos en el trabajo de Bozzoli *et. al* [13] y utilizamos la ecuación de Poisson, en coordenadas polares (r, θ), con condiciones de frontera de Robin.

$$\lambda_w \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \lambda_w \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + q_g = 0, \quad r_i < r < r_e, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{1}$$

$$\lambda_w \frac{\partial T}{\partial r}(r_e, \theta) = \alpha(T_{env} - T(r_e, \theta)), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \tag{2}$$

$$-\lambda_w \frac{\partial T}{\partial r}(r_i, \theta) = Q(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{3}$$

Donde las constantes corresponden a los siguientes parámetros físicos: λ_w denota la conductividad térmica del material del tubo, q_g es una fuente de calor que depende de la posición (r, θ), el parámetro α es la resistencia del material a la transferencia de calor, en Γ_e, con la temperatura ambiente T_{env} y $Q(\theta)$ representa el flujo de calor entre el líquido y la pared interior Γ_i.

En su investigación, Bozzoli utilizó una bomba volumétrica para transportar el fluido a un tanque de almacenamiento, el cual posteriormente ingresó en la sección de prueba del tubo en espiral equipado con electrodos de acero inoxidable, que estaban conectados a un suministro. Esta configuración permitió la investigación acerca de la transferencia de calor en el interior de un tubo bajo la condición de fuente de calor uniforme q_g generado por el efecto Joule.

En este entorno, a medida que el fluido discurre en el conducto tubular experimenta el efecto de la fuerza centrifuga, cuya velocidad depende del radio de curvatura, causando que el fluido sea empujado desde la región central hacia las paredes del tubo. Este fenómeno genera vórtices contra rotativos, llamados vórtices de Dean [18], que aumentan considerablemente la transferencia de calor entre las paredes del tubo y el fluido con respecto a procesos térmicos en tubos rectos. Así, la curvatura produce una distribución irregular del campo de velocidad en la sección transversal del tubo que conduce a una variación significativa en el coeficiente convectivo de transferencia de calor a lo largo de la circunferencia en la dirección angular: presenta valores más altos en la curva exterior de la superficie de la pared que en el lado interior. Por lo tanto, se tiene que la temperatura en el tubo así como el flujo de calor varían a lo largo de la coordenada angular [12], [23].

Usando como base el modelo (1)-(3), usaremos la teoria de los espacios de Sobolev para demostrar los resultados de existencia y unicidad para este problema. El contenido de este trabajo es presentado de la siguiente manera:

En el capítulo 1 introducimos las definiciones y resultados importantes para el desarrollo de este trabajo, entre estos temas destacamos los espacios de Hilbert, series de Fourier, Teoría de distribuciones, espacios de Sobolev y ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

En el capítulo 2, estudiamos el problema (1) con las condiciones de frontera (2) y (3), en espacios de Sobolev. Estudiamos resultados de existencia y unicidad para determinar la función temperatura T a partir del flujo Q. La estrategia utilizada será dividir este problema en dos subproblemas con soluciones V y W, siendo estas determinadas por el Teorema de Lax-Milgram y bajo ciertas hipótesis sobre las funciones Q y q_g, respectivamente. La solución de (1)-(3) es recuperada como $T = V+W$. Finalmente, establecemos una relación entre el flujo $Q(\theta)$ y la temperatura en la frontera exterior $G(\theta) = T(r_e, \theta) - W(r_e, \theta)$ a través de una ecuación $A(Q) = G$, siendo A un operador linear, compacto, auto-adjunto e inyectivo. Siendo esta última ecuación la base para el estudio del problema inverso correspondiente [4].

Las conclusiones finales del trabajo son presentadas en el capítulo 3.

Capítulo 1

Resultados preliminares

En este capítulo introducimos las definiciones y resultados básicos que serán utilizados en este trabajo.

1.1. Espacios de Hilbert

Definición 1.1.1. *Sea V un espacio vectorial real. El mapeo $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$ es una norma en V si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\|u\| \geq 0$ *para todo* $u \in V$.
2. $\|u\| = 0$ *si y sólo si* $u = 0$.
3. $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$, *para todo* $u \in V$.
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *para todo* $u, v \in V$.

El par $(V, \|\cdot\|)$, donde V es un espacio vectorial y la función $\|\cdot\|$ es una norma es llamado espacio vectorial normado o espacio normado.

Definición 1.1.2. *Sea V un espacio normado y $S \subset V$. Decimos que S es un subespacio de V si se verifican las siguientes condiciones*

1. $u + v \in S$, *para todo* $u, v \in S$.
2. $\lambda u \in S$, *para todo* $u \in S$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1.3. *Sea V un espacio vectorial normado. Una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en V converge a un elemento $u \in V$, denotado por $u_n \to u$, si*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Definición 1.1.4. *Sea V un espacio vectorial normado.*

(i) Una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en V es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N$ implica que

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

(ii) Un espacio normado V se dice que es completo si toda sucesión de Cauchy en V converge a un elemento en el mismo espacio.

(iii) Un espacio vectorial normado y completo es llamado espacio de Banach.

Definición 1.1.5. *Sea V un espacio de normado. Una aplicación $F : V \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal si*

a. $F(u+v) = F(u) + F(v)$ para todo $u, v \in V$.

b. $F(\alpha u) = \alpha F(u)$ para todo $u \in V$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1.6. *Sea V un espacio de normado. Un funcional lineal $F : V \to \mathbb{R}$ es acotado si existe una constante $M > 0$ tal que*

$$|F(u)| \leq M\|u\|, \text{ para todo } u \in V.$$

Definición 1.1.7. *Sean $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ espacios normados, definimos el conjunto*

$$\mathcal{L}(V, W) = \{F : V \to W | \ F \text{ es un funcional lineal acotado}\}.$$

Definición 1.1.8. *Si $W = \mathbb{R}$, el espacio $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ es llamado espacio dual de V y es denotado por V'*

$$V' = \{F : V \to \mathbb{R} | \ F \text{ es un funcional lineal acotado}\}.$$

Este espacio es provisto por las operaciones

- $(F+G)(v) = F(v) + G(v)$ *para todo $v \in V$, para todo $F, G \in V'$.*
- $(\alpha F)(v) = \alpha F(v)$ *para todo $v \in V$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ para todo $F \in V'$.*

El espacio V' es provisto por la norma $\|\cdot\|_{V'} : V' \to [0, +\infty)$ definida por

$$\|F\|_{V'} := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|F(v)|}{\|v\|}, \text{ para todo } F \in V'.$$

En este caso, decimos que $(V', \|\cdot\|_{V'})$ es un espacio vectorial normado.

Observamos que si $F \in V'$, entonces de la definición anterior se tiene

$$|F(v)| \leq \|F\|_{V'}\|v\| \text{ para todo } v \in V.$$

Definición 1.1.9. *Sea V un espacio de Banach, decimos que V es reflexivo si $(V')' = V$.*

Definición 1.1.10. *Sea V un espacio de Banach, decimos que una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en V converge débilmente a $u \in V$, y lo expresamos como $u_n \rightharpoonup u$ si*

$$F(u_n) \to F(u), \quad \text{cuando } n \to \infty$$

para cada funcional $F \in V'$.

Teorema 1.1.1 (**Compacidad débil**). *Sea V un espacio de Banach reflexivo y supongamos que la sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ es acotada. Entonces existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un vector $u \in V$ tal que*

$$u_{n_k} \rightharpoonup u, \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Demostración. Ver Brezis [7].

Teorema 1.1.2. *Sea V un espacio de Banach y sea $M \subset V$ un subespacio. Entonces M es un espacio de Banach si y solamente si M es cerrado en V.*

Demostración. Ver Kreyszig [31].

Definición 1.1.11. *Sea V un espacio vectorial real. El mapeo $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto interno en V si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. $\langle u, u\rangle \geq 0$, *para todo* $u \in V$.
2. $\langle u, u\rangle = 0$ *si y sólo si* $u = 0$.
3. $\langle u + v, w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$.
4. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$ *para todo* $u, v \in V$, *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, *para todo* $u, v \in V$.

El par $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, donde V es un espacio vectorial y la función $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno es llamado espacio con producto interno.

Lema 1.1.1. *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Entonces se verifican los siguientes resultados:*

1. *La función $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$ definida como $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ para todo $u \in V$ es una norma.*
2. $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$ *para todo $u, v \in V$ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz).*
3. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ *para todo $u, v \in V$ (Identidad del Paralelogramo).*

Demostración. Ver Kreyszig [31].

Definición 1.1.12. *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interno. Si V con la norma definida por $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ es completo, entonces $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es llamado espacio de Hilbert.*

En este capítulo H denota el espacio de Hilbert.
Los siguientes resultados pueden ser encontrados en Brezis [7].

Definición 1.1.13. *Sea S un subconjunto de H, el subespacio ortogonal a S es definido por*

$$S^{\perp} = \{u \in H | \ \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in S\}.$$

Definición 1.1.14. *Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios cerrados de H. Decimos que H es la suma de Hilbert de los subespacios E_n, denotado por $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$, si*

1. *Los subespacios $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son mutuamente ortogonales, esto es,*

$$\langle u, v\rangle = 0, \quad \forall u \in E_m, \quad \forall v \in E_n,\ m \neq n.$$

2. *El espacio generado por span$\{E_n, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en H.*

Teorema 1.1.3. *Sea $K \subset H$ un subconjunto no vacío cerrado y convexo*[1]*. Entonces para todo $f \in H$ existe un único elemento $u \in K$ tal que*

$$\|f - u\| \leq \min_{v\in K} \|f - v\|.$$

Además, u es caracterizado por la propiedad

$$u \in K \quad y \quad \langle f - u, v - u\rangle \leq 0, \quad \forall v \in K.$$

El elemento $u \in K$ obtenido en el teorema anterior es llamado proyección de f sobre K y es denotado por $u = P_K f$.

Teorema 1.1.4. *Sea $K \subset H$ un subconjunto no vacío cerrado y convexo. Entonces P_K satisface la siguiente desigualdad*

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|, \quad \forall f_1, f_2 \in K.$$

Corolário 1.1.1. *Supongamos que $M \subset H$ es un subespacio cerrado. Sea $f \in H$, entonces la proyección de f en M, $u = P_M f$, es caracterizado por la siguiente condición*

$$u \in M \ y\ \langle f - u, v\rangle = 0, \quad \forall v \in M.$$

Más aún, P_M es un operador lineal llamado proyección ortogonal.

Lema 1.1.2. *Supongamos que $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en H tal que*

$$\langle v_m, v_n\rangle = 0, \quad \forall m \neq n, \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|^2 < \infty.$$

Sea la suma parcial $s_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$. Entonces, $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ existe y

$$\|s\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|^2.$$

Teorema 1.1.5. *Asumamos que H es la suma de Hilbert de los subespacios cerrados $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $u \in H$, defina el vector $u_n = P_{E_n} u$ como la proyección de u sobre el subespacio E_n y sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} s_n = u \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2 \text{ (Identidad de Bessel-Parseval).}$$

[1]Un conjunto K es convexo si dados $x, y \in K$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$.

Definición 1.1.15. *Una sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ es llamada una base ortonormal de H si satisface las siguientes propiedades.*

1. *$\|e_n\| = 1$, para todo $n \geq 1$, $\langle e_m, e_n\rangle = 0$ si $m \neq n$.*
2. *El espacio span$\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ es denso en H, i.e., para cada $f \in H$ existen constantes c_k (que dependen de f) tal que*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_k f_k.$$

Teorema 1.1.6. *Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert H, y supongamos que $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Entonces el coeficiente $c_k = \langle f, e_k\rangle$, para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ la n-ésima suma parcial de f. Por la hipótesis inicial tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - f\| = 0.$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo y sea $n \geq m$, entonces utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$|\langle s_n, e_m\rangle - \langle f, e_m\rangle| = |\langle s_n - f, e_m\rangle| \leq \|s_n - f\|\|e_m\| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto,

$$\langle f, e_m\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_m \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_m\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,m} = c_m$$

y obtenemos el resultado. □

Corolário 1.1.2. *Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H. Entonces para cada $u \in H$, tenemos*

$$u = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k\rangle e_k \quad y \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, e_k\rangle|^2.$$

Definición 1.1.16. *Sea $f \in H$ y $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H.*

- *La expresión $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n\rangle e_n$ es denominada **serie de Fourier** de f.*
- *El coeficiente $\langle f, e_n\rangle$ es denominado el **coeficiente de Fourier** de f con respecto al conjunto $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Teorema 1.1.7 (Desigualdad de Bessel). *Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal en H. Entonces para todo $f \in H$, se tiene*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Demostración. Considere la suma parcial s_n de la serie de Fourier de f. Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle f - s_n, e_k \rangle &= \langle f, e_k \rangle - \langle s_n, e_k \rangle \\
&= \langle f, e_k \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle \, e_j, e_k \right\rangle \\
&= \langle f, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle \, \langle e_j, e_k \rangle \\
&= \langle f, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle \, \delta_{j,k} \\
&= \langle f, e_k \rangle - \langle f, e_k \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Luego, $f - s_n$ es ortogonal a cada elemento e_k. Además,

$$\begin{aligned}
\langle f - s_n, s_n \rangle &= \left\langle f - s_n, \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle \, e_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle f - s_n, \langle f, e_k \rangle \, e_k \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle \, \langle f - s_n, e_k \rangle = 0,
\end{aligned}$$

esto muestra que $f - s_n$ es ortogonal a s_n. Entonces,

$$\|f\|^2 = \|f - s_n + s_n\|^2 = \|f - s_n\|^2 + \|s_n\|^2,$$

de esta igualdad se tiene

$$\|s_n\|^2 \leq \|f\|^2. \tag{1.1}$$

Desde que el conjunto $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortonormal, entonces

$$\|s_n\|^2 = \| \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k \rangle \, e_k \|^2 = \sum_{k=1}^{n} | \langle f, e_k \rangle |^2$$

luego en (1.1) se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} | \langle f, e_k \rangle |^2 \leq \|f\|^2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

El resultado se sigue tomando límite cuando n tiende a infinito, esto es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} | \langle f, e_k \rangle |^2 \leq \|f\|^2.$$

□

El siguiente teorema establece las condiciones necesarias y suficientes para determinar si un conjunto $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ es una base ortonormal.

Teorema 1.1.8. *Sea $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en H. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *El conjunto $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de H.*
2. *Para toda función $f \in H$ y $\varepsilon > 0$ existe una combinación lineal finita $g = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ tal que*
$$\|f - g\| \leq \varepsilon.$$
3. *Si los coeficientes de Fourier $\langle f, e_n\rangle$, con respecto a $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de una función $f \in H$ son todos nulos, entonces $f = 0$.*

Demostración. Si 1 se verifica, 2 se sigue directamente de la definición.

Para demostrar que 2 implica 3, supongamos que $f \in H$ tal que $\langle f, e_k\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$, por hipótesis existe $g = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$. Entonces, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\|f\|^2 = \big|\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k \langle f, e_k\rangle \big| = \big| \langle f, f\rangle - \langle f, g\rangle \big| = | \langle f, f - g\rangle | \leq \|f\|\|f-g\| \leq \|f\|\varepsilon.$$

Esto implica que $\|f\| \leq \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por lo tanto $f = 0$.

Finalmente mostramos que 1 resulta de 3. En efecto, tomemos $f \in H$ y sea la suma parcial

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k.$$

Veamos que la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en H. En efecto, consideremos $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ desde que el conjunto $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es ortonormal y por la desigualdad de Bessel se tiene

$$\|s_n - s_m\|^2 = \| \sum_{k=n+1}^{m} \langle f, e_k\rangle e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} | \langle f, e_k\rangle |^2 \to 0, \text{ cuando } m, n \to \infty.$$

Desde que H es completo, existe una función $h \in H$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n - h\| = 0,$$

esto es

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k.$$

Por el Teorema 1.1.6, tenemos que los coeficientes de Fourier de f y h, con respecto a $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, son iguales. Es decir $\langle h - f, e_k\rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego por la hipótesis 3 tenemos que $f - h = 0$. Por lo tanto,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k.$$

Como f es arbitrário, se sigue que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal. □

Considere el espacio de Hilbert $L^2(0,2\pi)$ de las clases de funciones medibles en $(0,2\pi)$ y cuadrado integrables. En base a este último teorema, vamos a demostrar que el conjunto

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(m\theta)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\sqrt{\pi}};\ m,n \in \mathbb{N} \right\} \tag{1.2}$$

es una base ortonormal del espacio $L^2(0,2\pi)$.

En efecto, utilizando las identidades de producto a suma de las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}(n\theta)$, $\cos(m\theta)$ para todo $m,n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left\langle \frac{\operatorname{sen}(m\theta)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(m\theta)\operatorname{sen}(n\theta)d\theta = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

$$\left\langle \frac{\cos(m\theta)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\cos(n\theta)d\theta = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & m\neq n \end{cases}$$

$$\left\langle \frac{cos(m\theta)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\operatorname{sen}(n\theta)d\theta = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cos(m\theta)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)d\theta = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(n\theta)d\theta = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = 1.$$

Teorema 1.1.9. *El conjunto B definido en* (1.2) *es una base ortonormal de $L^2(0,2\pi)$. Esto es, si $f \in L^2(0,2\pi)$ entonces su série de Fourier*

$$S = \frac{a_0}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)$$

es convergente en $L^2(0,2\pi)$ y se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \left[f(\theta) - \left(\frac{a_0}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta) \right) \right]^2 d\theta = 0. \tag{1.3}$$

Donde los coeficientes son dados por

$$a_0 = \langle f, 1\rangle, \quad a_k = \langle f, \cos(k\theta)\rangle, \quad b_k = \langle f, \operatorname{sen}(k\theta)\rangle, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Este tipo de convergencia dada en (1.3) *es llamada convergencia en la media.*

Demostración. Como vimos anteriormente, B es un conjunto ortonormal en $L^2(0,2\pi)$, procederemos a demostrar que B es una base ortonormal. Para este objetivo, haremos uso del item 3 del Teorema 1.1.8.

Sea $f \in L^2(0,2\pi)$, tal que

$$\langle f, 1\rangle = 0,\ \langle f, \cos(k\theta)\rangle = \langle f, \operatorname{sen}(k\theta)\rangle = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{1.5}$$

vamos a mostrar que $f = 0$.

Supongamos que esto no se cumple, es decir, $f \neq 0$. Consideremos en primer lugar el caso en que f es continua, el caso general se verá más adelante. Por la continuidad de f en el conjunto compacto $[0, 2\pi]$, existe $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ tal que

$$f(\theta) \leq f(\theta_0), \text{ para todo } \theta \in [0, 2\pi]. \tag{1.6}$$

Sin perder generalidad asumimos que $f(\theta_0) > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que

$$f(\theta) > \frac{f(\theta_0)}{2} > 0, \quad \forall \theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta). \tag{1.7}$$

Definimos la función

$$t(\theta) = 1 + \cos(\theta_0 - \theta) - \cos(\delta), \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Esta función es combinación lineal finita de funciones en B, este tipo de expresiones son llamadas polinomios trigonométricos. Además verifica las siguientes propiedades.

1. $t(\theta) > 1$, para todo $\theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$.
2. $|t(\theta)| \leq 1$, para todo $\theta \notin (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$.

En efecto, si $\theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$, entonces $0 \leq |\theta - \theta_0| < \delta$. Se sigue que $\cos(\delta) < \cos(\theta_0 - \theta) \leq 1$ y adicionando constantes obtenemos

$$1 < 1 + \cos(\theta_0 - \theta) - \cos(\delta) \leq 2 - \cos(\delta).$$

Por lo tanto $t(\theta) > 1$.

Por otro lado, si $\theta \notin (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ entonces $|\theta - \theta_0| > \delta$. Así, se tiene que

$$-1 \leq \cos(\theta - \theta_0) < \cos(\delta),$$

luego

$$0 \leq 1 + \cos(\theta - \theta_0) - \cos(\delta) < 1$$

y se obtiene el resultado.

Por la hipótesis (1.5) tenemos que f es ortogonal al conjunto B, y la función t es combinación lineal de este conjunto, pues

$$t(\theta) = \left(\sqrt{2\pi} - \sqrt{2\pi}\cos(\delta)\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sqrt{\pi}\cos(\theta_0)\frac{cos(\theta)}{\sqrt{\pi}} + \sqrt{\pi}\,\mathrm{sen}(\theta_0)\frac{\mathrm{sen}(\theta)}{\sqrt{\pi}}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Entonces f es ortogonal a la función t^n, donde $n \in \mathbb{N}$, esto es

$$\langle f, t^n \rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Así, se tiene

$$0 = \langle f, t^n \rangle = \int_0^{2\pi} f(\theta) t^n(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0-\delta} f(\theta)t^n(\theta)d\theta + \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} f(\theta)t^n(\theta)d\theta + \int_{\theta_0+\delta}^{2\pi} f(\theta)t^n(\theta)d\theta.$$

En la primera y última integral, utilizamos (1.6) y el item 2, luego

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(\theta_0)(\theta_0-\delta) + \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} f(\theta)t^n(\theta)d\theta + f(\theta_0)(2\pi-\theta_0+\delta) \\ &= 2\pi f(\theta_0) + \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} f(\theta)t^n(\theta)d\theta. \end{aligned}$$

Para última la integral, considere el intervalo cerrado $[a,b] \subset (\theta_0-\delta, \theta_0+\delta)$. Desde que las funciones f y t son positivas en $(\theta_0-\delta, \theta_0+\delta)$ entonces

$$\int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} f(\theta)t^n(\theta)d\theta \geq \int_a^b f(\theta)t^n(\theta)d\theta.$$

Como t es continua en $[a,b]$, entonces existe $m > 1$ tal que $t(\theta) \geq m$ para todo $\theta \in [a,b]$. Por lo tanto,

$$\int_a^b f(\theta)t^n(\theta)d\theta \geq \frac{f(\theta_0)}{2} m^n(b-a) \to +\infty, \quad n \to +\infty. \tag{1.9}$$

Así, tenemos que

$$0 = \langle f, t^n \rangle \leq 2\pi f(\theta_0) + \int_{\theta_0-\delta}^{\theta_0+\delta} f(\theta)t^n(\theta)d\theta \to +\infty \text{ cuando } n \to \infty.$$

Esto contradice (1.8). Por lo tanto $f = 0$.

Veamos el caso general en que $f \in L^2(0, 2\pi)$. Definimos la función continua

$$F(\theta) = \int_0^\theta f(s)ds, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{1.10}$$

Desde que f es ortogonal al conjunto B en particular se tiene que $(f, 1) = 0$, luego $F(2\pi) = 0$. Primeramente consideremos la función $\cos(k\theta)$, $k \in \mathbb{N}$. De la hipótesis (1.5) tenemos

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(k\theta)d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(\theta)\operatorname{sen}(k\theta)d\theta = 0.$$

Luego, utilizando integración por partes en la siguiente integral obtenemos

$$\int_0^{2\pi} F(\theta)\operatorname{sen}(k\theta)d\theta = -\frac{F(\theta)\cos(k\theta)}{k}\bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(k\theta)d\theta = 0.$$

de manera análoga se tiene

$$\int_0^{2\pi} F(\theta)\cos(k\theta)d\theta = \frac{F(\theta)\operatorname{sen}(k\theta)}{k}\bigg|_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f(\theta)\operatorname{sen}(k\theta)d\theta = 0..$$

Así hemos mostrado que la función continua F, y por lo tanto $F-C$, es ortogonal a cada elemento no constante de B, donde C es una constante. Ahora vamos a verificar, en particular, que $F-C_0$ es ortogonal a la función constante $1/\sqrt{2\pi}$, donde

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)d\theta.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\left\langle F-C_0, 1/\sqrt{2\pi}\right\rangle &= \int_0^{2\pi} F(\theta)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}d\theta - \int_0^{2\pi}\frac{C_0}{\sqrt{2\pi}}d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} F(\theta)d\theta - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} F(\theta)d\theta = 0\end{aligned}$$

por lo tanto $F-C_0$ es ortogonal a todos los elementos del conjunto B. Desde que $F-C_0$ es continua, de la primera parte de la demostración se sigue que $F-C_0=0$. Consecuentemente $f=F'=0$ casi siempre.

Concluimos por el Teorema 1.1.8 que B es una base ortonormal. □

Teorema 1.1.10 (**Teorema de Representación de Riesz-Fréchet**). *Sea H un espacio de Hilbert y $F\in H'$, entonces existe un único $u\in H$ tal que*

$$F(v) = \langle u, v\rangle, \quad \forall v\in H.$$

Además se tiene $\|F\|_{H'} = \|u\|$ y el mapeo lineal $F\longmapsto u$ es una isometría.

Demostración. Ver Brezis [7].

Observación 1.1.1. *El Teorema de Riesz determina una manera de identificar el espacio dual de un espacio de Hilbert. En efecto, este resultado muestra que el espacio dual H', de un espacio de Hilbert H, es un espacio de Hilbert cuando es provisto con el producto interno definido por*

$$\langle F_1, F_2\rangle_{H'} = \langle u_1, u_2\rangle, \quad F_1, F_2\in H',$$

donde u_1, u_2 son obtenidos por el Teorema de Riesz a partir de los funcionales $F_1, F_2\in H'$, respectivamente.

Definición 1.1.17. *Una forma $a: V\times V\to\mathbb{R}$ sobre un espacio vectorial V es una aplicación bilineal si cumple las siguientes condiciones:*

Para todo $u, v, w\in V$ y para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$a(\alpha u+\beta v, w) = \alpha a(u,w) + \beta a(v,w)$$

$$a(w, \alpha u+\beta v) = \alpha a(w,u) + \beta a(w,v)$$

La forma a es simétrica si para todo $u, v\in V$ se tiene

$$a(u,v) = a(v,u).$$

Definición 1.1.18. *La forma bilineal $a : V \times V \to \mathbb{R}$ es acotada (continua) si existe $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

Esta forma es coerciva si existe una constante $\rho > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \rho\|v\|^2, \quad \forall v \in V.$$

La constante ρ es llamada constante de coercividad.

Teorema 1.1.11 (Lax-Milgram). *Supongamos que $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal sobre H continua y coerciva. Dado $F \in H'$, entonces existe un único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in H. \tag{1.11}$$

Demostración. Para cada elemento $u \in H$, el mapeo $v \mapsto a(u, v)$ es un funcional lineal en H, luego por el Teorema de Representación de Riesz existe un único elemento, que depende de u, denotado por $w_u \in H$ tal que

$$a(u, v) = \langle w_u, v \rangle, \quad \forall v \in H. \tag{1.12}$$

De este resultado, definimos el operador $A : H \to H$ tal que $Au = w_u$ tal que (1.12) se verifica, por lo tanto

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad \forall u, v \in H. \tag{1.13}$$

Demostraremos que el operador $A : H \to H$ es lineal y limitado.

En efecto, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u_1, u_2 \in H$, vemos para cada $v \in H$

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha u_1 + \beta u_2), v \rangle &= a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) \\ &= \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v) \\ &= \alpha \langle Au_1, v \rangle + \beta \langle Au_2, v \rangle \\ &= \langle \alpha Au_1 + \beta Au_2, v \rangle . \end{aligned}$$

Desde que esta igualdad se obtiene para cada $v \in H$, entonces

$$A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha Au_1 + \beta Au_2,$$

luego el operador A es lineal. Además,

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = a(u, Au) \leq C\|u\|\|Au\|.$$

Consecuentemente $\|Au\| \leq C\|u\|$ para todo $u \in H$, y por lo tanto A es limitado.

Afirmación 1.1.1. *El operador lineal A es inyectivo y su imagen $\mathcal{R}(A) = H$.*

En efecto, de la coercividad de a se tiene

$$\rho\|u\|^2 \leq a(u, u) = \langle Au, u \rangle \leq \|Au\|\|u\|.$$

Por lo tanto $\rho\|u\| \leq \|Au\|$. Luego si $u \in \mathcal{N}(A)$ se sigue que $u = 0$.

Para demostrar que $\mathcal{R}(A) = H$ procedemos por contradicción. Supongamos que $R(A) \subsetneq H$, entonces existe un elemento no nulo $w \in H$ con $w \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$. Luego, la desigualdad

$$\rho\|w\|^2 \leq a(w,w) = \langle Aw, w\rangle = 0,$$

implica que $w = 0$ lo cual es una contradicción.

Por otro lado, observamos del Teorema de representación de Riesz que

$$F(v) = \langle w, v\rangle \quad \forall v \in H$$

para algún elemento $w \in H$. Por lo tanto, de las ecuaciones (1.11), (1.13) y este último resultado obtenemos lo siguiente:

$$\langle Au, v\rangle = a(u,v) = F(v) = \langle w, v\rangle, \quad \forall v \in H.$$

Así utilizando la Afirmación 1.1.1 tenemos que existe $u \in H$ tal que $Au = w$.

Finalmente, mostramos que la solución u que verifica (1.11) es única. En efecto, supongamos que existe $\hat{u} \in H$ tal que

$$a(\hat{u}, v) = F(v), \quad \forall v \in H.$$

Definimos $v = u - \hat{u}$, desde que $u, \hat{u}$ son soluciones de (1.11) entonces

$$a(v,v) = a(u - \hat{u}, v) = a(u,v) - a(\hat{u}, v) = F(v) - F(v) = 0,$$

luego por la coercividad de a tenemos que $\rho\|v\|^2 \leq a(v,v) = 0$. Por lo tanto $\|v\| = 0$, consecuentemente $\hat{u} = u$ y concluye la demostración. □

Teorema 1.1.12. *Todo espacio de Hilbert H es reflexivo.*

Demostración. Ver Kreyszig [31].

1.1.1. Teoría de Operadores

Definición 1.1.19. *Sean X, Y espacios normados. Decimos que una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es compacta, si para cualquier sucesión acotada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, la sucesión $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ contiene una subsucesión convergente.*

El conjunto de operadores compactos en $\mathcal{L}(X,Y)$ es denotado por $\mathcal{K}(X,Y)$.

Teorema 1.1.13. *Sean X, Y espacios normados y sea $T \in \mathcal{K}(X,Y)$, entonces T es acotado. Ademas, se tiene que $\mathcal{K}(X,Y) \subset \mathcal{B}(X,Y)$, donde $\mathcal{B}(X,Y)$ es el conjunto de las transformaciones lineales acotadas.*

Demostración. Supongamos que T no es acotado, entonces para cada $n \geq 1$ existe un vector unitario $x_n \in X$ tal que $\|Tx_n\| \geq n$.

Como la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es limitada, por la compacidad de T, existe una subsucesión $\{Tx_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Esto es una contradicción desde que $\|Tx_{n_k}\| \geq n_k$.

Por lo tanto T es acotado. □

Teorema 1.1.14. *Sean X, Y, Z espacios normados y sean las transformaciones $E \in \mathcal{B}(X,Y)$, $F \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Entonces $FE \in \mathcal{K}(X,Z)$ si uno de los operadores E o F son compactos.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión limitada en X. Si E es compacto, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $Ex_{n_k} \to y \in Y$ cuando $k \to \infty$.

Desde que F es limitado y por ende continuo, tenemos que

$$FEx_{n_k} \to Fy \in Z \text{ cuando } k \to \infty.$$

Luego FE es compacto.

Por otro lado, si E es limitado y F es compacto la sucesión $\{Ex_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es limitada en Y, pues operadores limitados llevan conjuntos limitados en conjuntos limitados. Así, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$(FE)x_{n_k} = F(Ex_{n_k}) \to z \in Z, \text{ cuando } k \to \infty.$$

Por lo tanto el operador FE es compacto. □

Lema 1.1.3 (**Lema de Riesz**). *Sean Y, Z subespacios de un espacio normado X, y supongamos que Y es un subespacio cerrado propiamente contenido en Z. Entonces para todo número real $\theta \in (0,1)$ existe un elemento $z \in Z$ tal que*

$$\|z\| = 1, \quad \|z - y\| \geq \theta, \quad \forall y \in Y.$$

Demostración. Ver Kreyszig [31].

Teorema 1.1.15. *El operador identidad $I : X \to X$ es compacto si y solamente si X tiene dimensión finita.*

Demostración. Para demostrar la primera parte procedemos por contradicción. Supongamos que I es compacto y X no posea dimensión finita.

Escogemos $x_1 \in X$ arbitrario con $\|x_1\| = 1$. Entonces el subespacio $U_1 := \text{span}\{x_1\}$ tiene dimensión finita y, consecuentemente, es un subespacio cerrado de X. Por el Lema de Riesz, existe $x_2 \in X$ con $\|x_2\| = 1$ y $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$.

Definimos el subespacio $U_2 := \text{span}\{x_1, x_2\}$, nuevamente por el Lema de Riesz, existe $x_3 \in X$ con $\|x_3\| = 1$ y $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$, $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$.

Repitiendo este proceso, obtenemos una sucesión limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$, $n \neq m$.

Esto implica que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no posee alguna subsucesión convergente, lo que contradice la compacidad del operador I.

Por lo tanto, si el operador identidad I es compacto, entonces X tiene dimensión finita. La segunda parte de la demostración puede ser encontrada en [31]. □

Teorema 1.1.16. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces:*

a. Si T es acotado y $\dim(T(X))$ es finita, el operador T es compacto.

b. Si $\dim(X)$ es finita, el operador T es compacto.

Demostración. Ver Kreyszig [31].

Teorema 1.1.17. *Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X,Y)$ una sucesión de operadores compactos, donde X un espacio normado e Y es un espacio de Banach. Si $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente, es decir $\|T_n - T\| \to 0$, entonces el operador limite T es compacto.*

Demostración. Ver Kreyszig [31].

Definición 1.1.20. *Sea $T : D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal acotado. Una extensión de T a un conjunto $M \supset D(T)$ es un operador $\widetilde{T} : M \to Y$ tal que $\widetilde{T}|_{D(T)} = T$, es decir,*

$$\widetilde{T}(x) = T(x), \quad \forall x \in D(T).$$

Teorema 1.1.18 (**Teorema de extensión**). *Sea X un espacio normado, Y un espacio de Banach y $T : D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal acotado. Entonces T posee una extensión*

$$\widetilde{T} : \overline{D(T)} \to Y$$

donde $\widetilde{T}$ es un operador lineal, acotado y

$$\|\widetilde{T}\| = \|T\|.$$

Demostración. Ver Kreyszig [31].

Definición 1.1.21 (**Operador adjunto**). *Sea $T : H_1 \to H_2$ un operador lineal acotado, donde H_1 y H_2 son espacios de Hilbert, el operador adjunto de T, denotado por T^*, es el operador $T^* : H_2 \to H_1$ tal que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2.$$

El siguiente teorema garantiza la existencia de este operador.

Teorema 1.1.19. *El operador adjunto T^* de T en la definición anterior existe y es único. Además*

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

Demostración. Ver Kreyszig [31].

Definición 1.1.22 (**Operador auto-adjunto**). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $T : H \to H$ un operador lineal limitado. Decimos que T es un operador auto-adjunto si*

$$T^* = T.$$

Definición 1.1.23. *Un operador lineal, acotado, auto-adjunto $T : H \to H$ es positivo, denotado por $T \geq 0$, si*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in H.$$

Teorema 1.1.20. *Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales acotados y autoadjuntos, $T_n : H \to H$ sobre un espacio de Hilbert H.*

Si $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente, es decir $\|T_n - T\| \to 0$, entonces el operador limite T es un operador lineal, autoadjunto y acotado.

Demostración. Ver Kreyszig [31].

Teorema 1.1.21. *Sea H un espacio de Hilbert separable, supongamos que el operador $S : H \to H$ es compacto y auto-adjunto. Entonces existe una base ortonormal de H los cuales son autovectores de S.*

Demostración. Ver Evans [21].

1.1.2. El Teorema de Picard

A continuación, vamos a definir la inversa de Moore-Penrouse de un operador $T : H_1 \to H_2$, con H_1, H_2 espacios de Hilbert, restringiendo el dominio y la imagen del operador T de tal manera que es invertible y la inversa siendo extendida en su dominio.

Definición 1.1.24 (**Inversa de Moore-Penrouse**). *Sea $T : H_1 \to H_2$ una transformación lineal. Considere el operador*

$$\widetilde{T} := T|_{\mathcal{N}(T)^\perp} : \mathcal{N}(T)^\perp \to \mathcal{R}(T). \tag{1.14}$$

Desde que $\mathcal{N}(\widetilde{T}) = \{0\}$ y la imagen $\mathcal{R}(\widetilde{T}) = R(T)$, se sigue que existe $\widetilde{T}^{-1}$ y

$$\widetilde{T}^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{N}(T)^\perp. \tag{1.15}$$

La inversa (generalizada) de Moore-Penrouse de T, denotada por $T^\dagger$, es definida como la única extensión lineal de $\widetilde{T}^{-1}$ hacia el conjunto

$$D(T^\dagger) := \mathcal{R}(T) \oplus \mathcal{R}(T)^\perp, \tag{1.16}$$

esto es

$$T^\dagger : D(T^\dagger) \to \mathcal{N}(T)^\perp$$

cuyo núcleo

$$\mathcal{N}(T^\dagger) = \mathcal{R}(T)^\perp. \tag{1.17}$$

El operador $T^\dagger$ está bien definido. En efecto, debido a (1.17) *y la condición de linealidad sobre $\widetilde{T}$, se tiene para cualquier $y \in D(T^\dagger)$ con representación única*

$$y = y_1 + y_2,\ y_1 \in \mathcal{R}(T),\ y_2 \in \mathcal{R}(T)^\perp,$$

que $T^\dagger$ es definido como

$$T^\dagger y := \widetilde{T}^{-1} y_1.$$

Teorema 1.1.22. *Sean $T : H_1 \to H_2$ una transformación lineal, $P_1 : H_1 \to \mathcal{N}(T)$, $P_2 : H_2 \to \overline{\mathcal{R}(T)}$ proyecciones ortogonales sobre los subespacios $\mathcal{N}(T)$ y $\overline{\mathcal{R}(T)}$ respectivamente. Entonces $\mathcal{R}(T^\dagger) = \mathcal{N}(T)^\perp$ y se verifican las siguientes identidades*

1. $TT^\dagger T = T$.
2. $T^\dagger T T^\dagger = T^\dagger$.
3. $T^\dagger T = I - P_1$.
4. $TT^\dagger = P_2|_{D(T^\dagger)}$.

Demostración. Ver Engl [20].

Definición 1.1.25. *Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert, $K : H_1 \to H_2$ un operador compacto y su adjunto $K^* : H_2 \to H_1$. Decimos que el conjunto $\{\mu_n, v_n, u_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un sistema singular de K, si satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *La sucesión* $\{\mu_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ *son autovalores no nulos del operador autoadjunto* K^*K.

2. *La sucesión* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *son autovectores de* K^*K *y forman una base ortonormal generando el subespacio* $\overline{\mathcal{R}(K^*)}$.

3. *El conjunto* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *son autovalores de* KK^* *y forman una base ortonormal que genera el subespacio* $\overline{\mathcal{R}(K)}$, *donde* u_n *es definido como*

$$u_n := \frac{Kv_n}{\|Kv_n\|}.$$

Además las siguientes identidades se verifican.

$$\begin{aligned} Kv_n &= \mu_n u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\ K^*u_n &= \mu_n v_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\ Kx &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, v_n\rangle u_n, \quad \forall x \in H_1 \\ K^*y &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle y, u_n\rangle v_n, \quad \forall y \in H_2, \end{aligned}$$

donde las series convergen en los espacios H_1 *y* H_2, *respectivamente.*

Teorema 1.1.23 (**Teorema de Picard**). *Sea* $\{\mu_n, v_n, u_n, n \in \mathbb{N}\}$ *un sistema singular para el operador compacto* $K : H_1 \to H_2$, *e* $y \in H_2$. *Entonces:*

1. $y \in D(K^\dagger) \Leftrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle y, u_n\rangle|^2}{\mu_n^2} < \infty.$

2. *Para* $y \in D(K^\dagger)$, *entonces*

$$K^\dagger y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle y, u_n\rangle}{\mu_n} v_n.$$

Demostración. Ver Engl [20].

1.2. Teoría de Distribuciones y espacios de Sobolev

En esta sección consideramos Ω un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, con frontera $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular. También introducimos las notaciones y resultados correspondientes a la teoría de Distribuciones.

Sea el multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ con componentes naturales, definimos la norma $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ y representamos por D^α al operador derivación de orden $|\alpha|$, definido por:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Note que cuando $\alpha = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^n$ denotamos $D^0 u = u$.

Sea $\mathcal{C}^0(\Omega)$ es el espacio de las funciones continuas sobre Ω a valores reales y para todo $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} |\ D^\alpha u \in \mathcal{C}^0(\Omega);\ |\alpha| \leq k;\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

el espacio de la funciones k veces diferenciables sobre Ω.

El espacio de las funciones infinitamente diferenciables sobre Ω es definido por

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(\Omega).$$

Definición 1.2.1. *Decimos que una sucesión de funciones $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en Ω hacia una función φ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $n \geq N$ implica*

$$|\varphi_k(x) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

para todo $x \in \Omega$.

Definición 1.2.2. *Dada una función continua $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definimos el soporte de φ, denotado por $Supp(\varphi)$, como la clausura en Ω del conjunto $\{x \in \Omega |\ \varphi(x) \neq 0\}$. Esto es*

$$Supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega |\ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

El soporte de φ es el menor conjunto relativamente cerrado en $\mathbb{R}^n$, fuera del cual φ es idénticamente cero. Si este conjunto es compacto en $\mathbb{R}^n$ decimos que φ tiene soporte compacto.

Definición 1.2.3. *Denotamos por $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, que son infinitamente diferenciables y tienen soporte compacto en Ω.*

En el siguiente ejemplo mostramos que $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es un conjunto no vacío.

Ejemplo 1.2.1. *Sea $\eta : \mathbb{R}^n \to R$ una función definida por*

$$\eta(x) = \begin{cases} \exp\left(-1/(1 - \|x\|_2^2)\right), & si \ \ \|x\|_2 < 1 \\ 0, & si \ \ \|x\|_2 \geq 1. \end{cases}$$

Se verifica que $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ y $Supp(\eta) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\|_2 \leq 1\}$ ver [14], donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma euclidiana.

Definición 1.2.4. *Decimos que la sucesión de funciones $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ converge a una función $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, si existe un subconjunto compacto K de Ω tal que se verifican las siguientes condiciones:*

(1) $Supp(\varphi_k) \subset K$, $\forall k \in \mathbb{N}$ y $Supp(\varphi) \subset K$.

(2) Para cada multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_k \to D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre K.

Definición 1.2.5. *El espacio vectorial $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ provisto de la convergencia anterior es llamado espacio de las funciones de prueba y denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.*

1.2.1. Distribuciones

El concepto de distribuciones es una generalización del concepto de funciones, esto es debido a que las funciones que son diferenciables en el sentido clásico no son suficientes para trabajar con ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Como veremos a continuación, una distribución puede ser diferenciada indefinidamente y sus derivadas pueden corresponder a funciones no derivables en el sentido clásico. Utilizaremos las distribuciones para definir una clase importante de espacios funcionales denominados espacios de Sobolev.

Definición 1.2.6. *Una distribución $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ es una aplicación que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*
2. *T es continua, es decir si la sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a φ en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces*

$$T(\varphi_k) \longrightarrow T(\varphi).$$

Dados $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, denotaremos por $\langle T, \varphi\rangle$ el valor de T aplicado en φ. El espacio de las distribuciones es provisto de la siguiente noción de convergencia.

Definición 1.2.7. *Sea una sucesión $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Decimos que T_k converge a T en $\mathcal{D}'(\Omega)$, que denotamos por $T_k \to T$, si*

$$\langle T_k, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.2.2. Espacios $L^p(\Omega)$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $1 \le p \le \infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ al espacio de las clases de equivalencia de las funciones medibles definido por

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}^n |\ u \text{ es medible}, \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty \right\}$$

provisto de la norma

$$|u|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \qquad si\ 1 < p < \infty.$$

Si $p = \infty$, definimos por $L^\infty(\Omega)$ el espacio de las funciones medibles acotadas casi siempre en Ω provisto de la norma

$$|u|_{\infty,\Omega} = \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |u(x)|\,,$$

donde

$$\sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess} |u(x)| = \text{ínf}\,\{M > 0|\ |u(x)| \le M \text{ casi siempre en } \Omega\}\,.$$

Para $1 \le p \le \infty$, los espacios $L^p(\Omega)$ provistos de la norma $|\cdot|_{p,\Omega}$ son espacios de Banach.

En el caso particular $p = 2$, se tiene que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert, provisto de la norma

$$|u|_{2,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

asociado al producto interno definido por

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Los espacios $L^p(\Omega)$ juegan un papel muy importante en el análisis funcional y en el estudio de diversos problemas asociados a ecuaciones diferenciales parciales.

Teorema 1.2.1. *El conjunto $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demostración. Ver demostración en Brezis [7].

Teorema 1.2.2 (**Desigualdad de Hölder**). *Sean p, q números positivos tales que $1 \leq p \leq \infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, entonces $fg \in L^1(\Omega)$. Además,*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

Demostración. Ver Kantorovich [27].

Definición 1.2.8. *Sea $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p_{loc}(\Omega)$ el conjunto de las funciones medibles $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ tales que $f\chi_K \in L^p(K)$ para todo K subconjunto compacto de Ω, donde χ_K es la función característica en K* [2].

El espacio $L^p_{loc}(\Omega)$ es llamado el conjunto de funciones localmente integrables en Ω.

Dada una función $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ consideremos el operador $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.18}$$

El funcional T_u define una distribución sobre Ω. En efecto, de la definición es fácil verificar que T_u es linear. Para mostrar la continuidad, consideremos una sucesión $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, tal que converge para φ en $\mathcal{D}(\Omega)$. Entonces,

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_k \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| &= |\langle T_u, \varphi_k - \varphi \rangle| = \left| \int_\Omega u(x) \left(\varphi_k(x) - \varphi(x)\right) dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |u(x)(\varphi_k - \varphi)(x)|dx \leq \sup_{x\in\Omega} |\left(\varphi_k - \varphi\right)(x)| \int_\Omega |u(x)|dx \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

desde que la convergencia $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ es uniforme.

[2] Sean A, B conjuntos tales que $A \subset B$. La función característica χ_A del subconjunto A es definida como $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in B \setminus A \end{cases}$

Observación 1.2.1. *De la desigualdad de Hölder tenemos que $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^q_{loc}(\Omega)$, si $q \leq p$. En particular, los espacios funcionales $L^p(\Omega)$ están contenidos continuamente en $L^p_{loc}(\Omega)$.*

Lema 1.2.1 (**Lema de Du Bois Raymond**). *Sea $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ considere el operador T_u definido en* (1.18)*. Entonces $T_u = 0$ si y sólo si $u = 0$ casi siempre en Ω.*

Demostración. Ver Medeiros, Milla Miranda [34].
De este lema, tenemos que el operador

$$L^p_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$u \longmapsto T_u$$

es lineal, contínuo e inyectivo (esto último debido a que $T_u = 0$ implica que $u = 0$). Consecuentemente, podemos identificar indistintamente una función $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ con su distribución correspondiente T_u. Como $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$, tenemos que toda función en $L^p(\Omega)$ define una distribución sobre Ω, i.e.,

$$L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Es importante resaltar que esta inclusión es propia, es decir existen distribuciones que no son definidas a partir de funciones en $L^p_{loc}(\Omega)$ como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.2. *Sea $x_0 \in \Omega$, definimos la función $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Es fácil verificar que δ_{x_0} es una distribución, esta función es conocida como Delta de Dirac. Mostraremos que no existe una función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle$, i.e.,

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.19}$$

En efecto, procedemos por contradicción y vamos a suponer que existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que se verifica la ecuación (1.19)*. Consideremos la función $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$ definida por*

$$\xi(x) = \|x - x_0\|_2^2 \varphi(x).$$

Entonces,

$$\xi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \xi \rangle = \int_\Omega u(x)\|x - x_0\|_2^2 \varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por el Lema 1.2.1 tenemos que $u(x)\|x - x_0\|_2^2 = 0$ casi siempre en Ω, lo cual implica que $u = 0$ casi siempre en Ω.

Con este resultado, obtenemos que $\varphi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, lo cual es una contradicción.

Definición 1.2.9. *Sean $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La derivada de T de orden α, denotada por $D^\alpha T$, es definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

La distribución $D^\alpha T$ es llamada derivada distribucional de T.

Con esta definición tenemos que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ entonces su derivada distribucional $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Observación 1.2.2. *Es importante resaltar que dada una función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ su derivada distribucional $D^\alpha u$ no pertenece necesariamente a $L^1_{loc}(\Omega)$, como muestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 1.2.3. *Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de Heaviside definida como*

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

La función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ mas su derivada $u' \notin L^1_{loc}(\Omega)$. En efecto, sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ luego tenemos que

$$\langle u', \varphi \rangle = - \langle u, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi'(x)dx = \int_{+\infty}^{0} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por lo tanto, $u' = \delta_0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, este resultado es el motivo de la definición de una clase importante de espacios de Banach, denominados espacios de Sobolev.

Observación 1.2.3. *Si $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, entonces para cada $|\alpha| \leq k$ se cumple, utilizando la fórmula de integración por partes, que la derivada distribucional de u coincide con su derivada clásica, i. e.,*

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Teorema 1.2.3. *Si la sucesión $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, para algún $p \in [1, +\infty)$. Entonces $u_n \to u$ en el sentido de las distribuciones*

Demostración. En efecto, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y por la desigualdad de Hölder tenemos

$$| \langle u_n, \varphi \rangle - \langle u, \varphi \rangle | \leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\varphi(x)|dx \leq |u_n - u|_{p,\Omega} |\varphi|_{q,\Omega} \to 0,$$

cuando n tiende al infinito □

Teorema 1.2.4. *Si la sucesión $T_n \to T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces, para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tenemos*

$$D^\alpha T_n \to D^\alpha T \text{ en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Demostración. En efecto, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tenemos

$$\langle D^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, D^\alpha \varphi \rangle \to (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha T_n, \varphi \rangle .$$

□

Esta convergencia proporciona otra razón por la cual es adecuado el uso de las distribuciones. En efecto, el espacio $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ es denso en $\mathcal{D}'(\Omega)$, luego para cualquier distribución T, existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C^\infty(\Omega)$ que converge a T en el sentido de las Distribuciones. Por lo tanto, sus derivadas parciales clásicas coinciden con sus derivadas distribucionales. Así, las derivadas parciales de una distribución T pueden ser expresadas como limites distribucionales de derivadas de funciones clásicas.

Teorema 1.2.5. *Sea Ω un subconjunto abierto conexo de $\mathbb{R}^n$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $\dfrac{\partial T}{\partial x_i} = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $T = c$.*

Demostración. Ver Le Dret [32].

1.2.3. Espacios de Sobolev

Definición 1.2.10. *Sea $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) |\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\, |\alpha| \leq m\}$$

siendo $D^\alpha u$ la derivada distribucional de u. El Espacio $W^{m,p}(\Omega)$ es llamado el espacio de Sobolev de orden m relativo al espacio $L^p(\Omega)$.

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$, definimos la norma $\|u\|_{m,p}$ como

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad si\ 1 \leq p < \infty$$

y

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|_{\infty,\Omega}, \quad si\ p = \infty.$$

Para $p = 2$, denotamos $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),\ m \in \mathbb{N}$. Este es un espacio de Hilbert con producto interno y norma dados por:

$$(u, v) = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx$$

$$\|u\|_m = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ posee las siguientes propiedades [28]

1. Para $1 \leq p \leq \infty$, el espacio $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ es un espacio de Banach.
2. Si $1 < p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ es reflexivo y si $1 \leq p \leq \infty$ es separable.
3. En particular $H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert es reflexivo y separable.

Procedemos a analizar el caso particular de evaluar funciones $u \in W^{m,p}(\Omega)$ en la frontera $\Gamma = \partial\Omega$. Note que si $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ entonces tiene sentido evaluar $u(x)$ para $x \in \Gamma$; esto es muy diferente para funciones en $W^{m,p}(\Omega)$, donde no son necesariamente continuas y están definidas casi siempre en Ω. Además, note que Γ tiene medida cero, y consecuentemente, evaluar u en Γ carece de sentido. Esta dificultad es resuelta utilizando la noción del operador trazo. La demostración de los siguientes teoremas puede ser encontrada en [21].

Teorema 1.2.6. *Sea $1 \leq p < \infty$, y $\Gamma = \partial\Omega$ continuamente diferenciable. Entonces, existe un mapeo lineal acotado*

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma)$$

tal que

1. $\gamma(u) = u|_\Gamma$ *si* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.
2. *Para cada* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *se tiene la siguiente desigualdad,*

$$|\gamma(u)|_{p,\Gamma} \leq C_\Gamma \|u\|_{1,p},$$

donde $C_\Gamma = C(p, \Omega)$.

El teorema anterior garantiza la existencia de un mapeo lineal continuo γ es cual es llamado mapeo trazo. Para el caso $p = 2$, el espacio de las funciones de $L^2(\Gamma)$ que son trazas de funciones en $H^1(\Omega)$ constituyen un subespacio de $L^2(\Gamma)$, denotado por $H^{1/2}(\Omega)$ y definido como

$$H^{1/2}(\Gamma) := \left\{ w \in L^2(\Gamma) |\ \exists v \in H^1(\Omega),\ w = \gamma(v) \right\}.$$

También definimos la norma en $H^{1/2}(\Gamma)$ como

$$\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma)} := \text{ínf} \left\{ \|v\|_{H^1(\Omega)} |\ v \in H^1(\Omega);\ w = \gamma(v) \right\}.$$

Definición 1.2.11. *Sea $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ la cerradura de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ en $W^{m,p}(\Omega)$, i.e.,*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}}.$$

Teorema 1.2.7 (Funciones con trazo cero). *Supongamos que Ω es acotado con frontera Γ continuamente diferenciable y sea $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Entonces,*

$$u \in W_0^{m,p}(\Omega) \text{ si y solamente si } \gamma(u) = 0 \text{ en } \Gamma.$$

Teorema 1.2.8 (Desigualdad de Poincaré). *Sea Ω un subconjunto abierto, conexo y acotado de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe $C_p = C_p(n, \Omega)$ tal que*

$$|u|_{2,\Omega} \leq C_p |\nabla u|_{2,\Omega}, \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

donde C_p es la constante de Poincaré.

Definición 1.2.12 (**Cono**). *Sea $\xi, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\xi\| = 1$ y $\varepsilon > 0$. El conjunto definido por*

$$C(y, \xi, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \|(x-y)\xi\| \geq \|x-y\| \cos(\varepsilon),\ \|x-y\| < \varepsilon\}$$

es llamado cono con vértice y, dirección ξ y lado $\varepsilon > 0$.

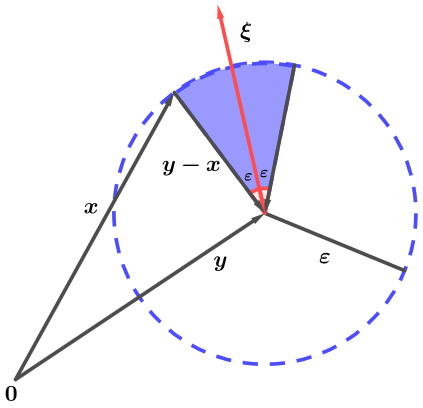

Figura 1.1: El cono $C(y, \xi, \varepsilon)$ en $\mathbb{R}^2$.

Este conjunto $C(y, \xi, \varepsilon)$ está formado por elementos $x \in B(y, \varepsilon)$ tal que el ángulo entre los vectores $y - x$, ξ es menor o igual que $\varepsilon > 0$, donde $B(y, \varepsilon)$ es la bola abierta de centro y y radio ε.

Un dominio $\Omega \in \mathbb{R}^n$ tiene la propiedad ε-cono si para todo $x \in \partial\Omega$ existe un vector dirección ξ y un número $\varepsilon > 0$ tal que

$$C(y, \xi, \varepsilon) \subset \Omega,\ \text{para todo } y \in B(x, \varepsilon) \cap \bar{\Omega}.$$

El siguiente resultado establece una extensión del Teorema de Poincaré en domínios que poseen la propiedad ε-cono.

Teorema 1.2.9 (**Abdesslam**). *Sea Ω un domínio que tiene la propiedad ε-cono con frontera $\Gamma = \partial\Omega$. Supongamos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u = 0$ en $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Entonces, existe $C > 0$ tal que*

$$|u|_{p,\Omega} \leq C|\nabla u|_{p,\Omega}.$$

Demostración. Ver Abdeslan [1].

Los siguientes resultados buscan responder a la pregunta ¿Si $u \in W^{m,p}(\Omega)$, entonces u pertenece a otros espacios de Sobolev? La respuesta es afirmativa y como se verá, depende de la relación entre n e p.

Teorema 1.2.10 (**Rellich-Kondrachov**). *Sea Ω un subconjunto acotado de R^n, de clase C^1 y $1 \leq p < \infty$, entonces las siguientes inmersiones son compactas*

1. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-p}$ *si* $p < n$.

2. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $1 \leq q < \infty$ *si* $p = n$.

3. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ *si* $p > n$.

Demostración. Ver Medeiros [34].

Definición 1.2.13. *Sean* $1 \leq p < \infty$ *y* $q > 1$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Representamos por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *el espacio dual de* $W_0^{m,p}(\Omega)$. *Si* $p = 2$, *denotamos por* $H^{-m}(\Omega)$ *es el espacio dual de* $H_0^m(\Omega)$.

Observación 1.2.4. *Note que* $H_0^m(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert y, por el Teorema de representación de Riesz, puede ser identicado con su espacio dual correspondiente. Si* $m = 0$, *es decir para* $L^2(\Omega)$, *esta identificación no es considerada y tenemos las siguientes inclusiones densas y continuas.*

$$H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega).$$

1.2.4. Espacios de Hilbert asociados a funciones periódicas

En este capítulo, desarrollaremos las definiciones y propiedades de espacios de Hilbert de funciones periódicas. Un estudio completo y detallado puede ser visto en [30].

Denotamos por $L^2_{\text{per}}(0, 2\pi)$ el espacio de las funciones $u : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ que son medibles, periódicas de periodo 2π y cuadrado integrables. Este espacio es provisto de la norma usual

$$|u|_{L^2_{per}} = \left(\int_0^{2\pi} |u(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2}$$

Dado $u \in L^2_{\text{per}}(0, 2\pi)$, la serie de Fourier asociada a u es dada por

$$S[u] = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta))$$

donde los coeficientes son

$$a_k = \frac{1}{c_k \pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \cos(k\theta) d\theta$$

con

$$c_k = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ 1 & k \geq 1 \end{cases}.$$

y

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta) \operatorname{sen}(k\theta) d\theta.$$

Alternativamente, las series de Fourier pueden ser expresadas en la forma compleja

$$S[u] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_k e^{\imath k\theta}$$

donde los coeficientes $\widehat{u}_k$ son definidos por

$$\widehat{u}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\theta)e^{-\hat{\iota}k\theta}d\theta = \begin{cases} a_0 & k=0 \\ (a_k - \hat{\iota}b_k)/2 & k>0 \\ (a_{-k} - \hat{\iota}b_{-k})/2 & k<0. \end{cases}$$

Utilizando la desigualdad de Parseval, tenemos que $u \in L^2_{\text{per}}(0,2\pi)$, si y solamente si sus coeficientes de Fourier $\widehat{u}_k$ son cuadrado sumables y satisface

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{u}_k|^2 = \frac{1}{2\pi}|u|^2_{L^2_{per}}. \tag{1.21}$$

De esta propiedad, el espacio $L^2_{\text{per}}(0,2\pi)$ puede ser caracterizado como

$$L^2_{\text{per}}(0,2\pi) = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k e^{\hat{\iota}k\theta} \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{u}_k|^2 < \infty \right\}.$$

Note que si $u, u' \in L^2_{\text{per}}(0,2\pi)$, entonces por el Teorema 1.2.10 se tiene que $u \in C([0,2\pi])$. Así, utilizando integración por partes obtenemos

$$\widehat{u}_k = \frac{-\hat{\iota}}{2\pi k}\int_0^{2\pi} u'(\theta)e^{-\hat{\iota}k\theta}d\theta,$$

luego

$$\hat{\iota}k\widehat{u}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u'(\theta)e^{-\hat{\iota}k\theta}d\theta = \widehat{u'}_k,$$

esto es $\{\hat{\iota}k\widehat{u}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ son los coeficientes de Fourier de u' y son cuadrado sumables.

Por lo tanto, si $u, u' \in L^2_{per}(0,2\pi)$ entonces su serie de Fourier es

$$S[u'] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\iota}k\widehat{u}_k e^{\hat{\iota}\theta}.$$

y se tiene

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|\widehat{u}_k|^2 = \frac{1}{2\pi}|u'|^2_{L^2_{\text{per}}}.$$

Esto motiva la introducción de los subespacios $H^r_{\text{per}}(0,2\pi)$ de $L^2_{\text{per}}(0,2\pi)$, basado en series de Fourier, como sigue.

Definición 1.2.14 (Espacio de Sobolev)**.** *Sea $r>0$, el espacio de Sobolev $H^r_{per}(0,2\pi)$ de orden r es definido por*

$$H^r_{per}(0,2\pi) := \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k e^{\hat{\iota}k\theta} \,\middle|\, \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^r|\widehat{u}_k|^2 < \infty \right\}.$$

Notamos que $H^0_{per}(0,2\pi)$ coincide con $L^2_{per}(0,2\pi)$ cuando $r=0$.

Teorema 1.2.11. *El espacio de Sobolev $H^r_{per}(0,2\pi)$ es un espacio de Hilbert con producto interno*

$$\langle u, v\rangle_{H^r_{per}} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k \overline{\widehat{v}}_k,$$

donde las funciones

$$u(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k e^{\hat{\imath}k\theta} \quad y \quad v(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{v}_k e^{\hat{\imath}k\theta}$$

son identificadas por su série de Fourier correspondiente.

La norma en $H^r_{per}(0,2\pi)$ es dada por

$$\|u\|_{H^r_{per}} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^r |\widehat{u}_k|^2\right)^{1/2}.$$

Demostración. Ver Kress [30].

Finalmente, de (1.21) notamos que $|u|_{L^2_{\text{per}}} = \sqrt{2\pi}\|u\|_{H^0_{\text{per}}}$, esto es las normas $|\cdot|_{L^2_{\text{per}}}$ y $\|\cdot\|_{H^0_{\text{per}}}$ son equivalentes en $L^2_{\text{per}}(0,2\pi)$.

Teorema 1.2.12. *Para todo $r > s$, el espacio de Sobolev $H^r_{per}(0,2\pi)$ es un subespacio denso de $H^s_{per}(0,2\pi)$. El operador inclusión definido en el espacio $H^r_{per}(0,2\pi)$ hacia $H^s_{per}(0,2\pi)$ es compacto.*

Demostración. Ver Kress [30].

1.3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes

En esta sección veremos resultados provenientes de las ecuaciones diferenciales ordinarias para problemas homogéneos de segundo orden. Estos serán utilizados en el próximo capítulo para expresar la solución en términos de series de Fourier.

Una ecuación diferencial de orden n es una ecuación

$$\frac{d^n y}{dt^n} = F\left(t; y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right), \tag{1.22}$$

donde F es una función diferenciable de clase C^r $(r \geq 1)$ definida en un dominio $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Frecuentemente t es llamada variable independiente e y es denominada variable dependiente.

Definición 1.3.1. *La solución de la ecuación* (1.22) *es un mapeo n veces diferenciable $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a valores reales tal que:*

1. *El punto $\left(\tau, \varphi(\tau), \ldots, \varphi^{(n-1)}(\tau)\right) \in U$ para todo $\tau \in I$.*
2. *Para cualquier $\tau \in I$*

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n}\Big|_{t=\tau} = F\left(\tau; \varphi(\tau), \ldots, \varphi^{(n-1)}(\tau)\right).$$

Definición 1.3.2. *La ecuación diferencial* (1.22) *es llamada ecuación diferencial lineal de orden n si*

$$F\left(t; y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right) = a_0(t) + a_1(t)y(t) + \cdots + a_{n-2}(t)\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}},$$

donde las funciones $a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ *son funciones continuas.*

Si $a_0 = 0$*, decimos que la ecuación diferencial lineal es homogénea.*

Si las funciones $a_0, \ldots, a_{n-1}$ *son constantes, decimos que la ecuación diferencial es autónoma.*

1.3.1. Solución general de la ecuación $ay'' + by' + c = 0$

En esta subsección estudiaremos las soluciones de ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a \neq 0. \tag{1.23}$$

Teorema 1.3.1. *La solución general de (1.23) está dada por*

$$y(\theta) = c_1 e^{m_1\theta} + c_2 e^{m_2\theta}, \quad \text{si } m_1 \neq m_2$$
$$y(\theta) = c_1 e^{m\theta} + c_2\theta e^{m\theta}, \quad \text{si } m_1 = m_2 = m$$

donde m_1*,* m_2 *son raíces del polinomio* $p(m) = am^2 + bm + c$*, denominado polinomio característico de la ecuación* (1.23)*.*

Demostración. Ver Helfgott *et. al* [24].

Observación 1.3.1. *Para el caso en que las raíces son complejas conjugadas, esto es,* $m_1 = \mu + \hat{\imath}\nu$*,* $m_2 = \mu - \hat{\imath}\nu$ *donde* $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ *e* $\hat{\imath}^2 = -1$*, tenemos que la solución general es compleja y dada por*

$$y(\theta) = c_1 e^{(\mu+\hat{\imath}\nu)\theta} + c_2 e^{(\mu-\hat{\imath}\nu)\theta}, \tag{1.24}$$

donde c_1, c_2 *son constantes. Como estamos trabajando con funciones a valores reales, utilizamos la fórmula de Euler.*

$$e^{\hat{\imath}\theta} = \cos(\theta) + \hat{\imath}\,\mathrm{sen}(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

De esta fórmula se sigue que

$$e^{\hat{\imath}\nu\theta} = \cos(\nu\theta) + \hat{\imath}\,\mathrm{sen}(\nu\theta)$$
$$e^{-\hat{\imath}\nu\theta} = \cos(\nu\theta) - \hat{\imath}\,\mathrm{sen}(\nu\theta),$$

de donde tenemos que

$$2\cos(\nu\theta) = e^{\hat{\imath}\nu\theta} + e^{-\hat{\imath}\nu\theta}, \qquad 2\hat{\imath}\,\mathrm{sen}(\nu\theta) = e^{\hat{\imath}\nu\theta} - e^{-\hat{\imath}\nu\theta}.$$

Desde que y dada en (1.24) *es solución de la ecuación* (1.23) *para cualquier par de constantes* c_1, c_2*, escogemos* $c_1 = c_2 = 1/2$ *y* $c_1 = 1/(2\hat{\imath}), c_2 = -1/(2\hat{\imath})$ *y tenemos el siguiente par de soluciones reales*

$$y_1(\theta) = e^{\mu\theta}\left(e^{\hat{\imath}\nu\theta} + e^{-\hat{\imath}\nu\theta}\right)/2 = e^{\mu\theta}\cos(\nu\theta).$$

$$y_2(\theta) = e^{\mu\theta}\left(e^{\hat{\imath}\nu\theta} - e^{-\hat{\imath}\nu\theta}\right)/(2\hat{\imath}) = e^{\mu\theta}\,\mathrm{sen}(\nu\theta).$$

Por lo tanto, tenemos que la solución general en el conjunto de los números reales es de la forma

$$y(\theta) = c_1 e^{\mu\theta}\cos(\nu\theta) + c_2 e^{\mu\theta}\,\mathrm{sen}(\nu\theta). \tag{1.25}$$

Definición 1.3.3. *El problema de valor inicial (PVI) asociado a la ecuación diferencial homogénea de segundo orden es*

$$\begin{aligned} &ay'' + by' + cy = 0,\ \theta \in I \\ &y(\theta_0) = y_0,\ y'(\theta_0) = y_1, \end{aligned} \tag{1.26}$$

donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $\theta_0 \in I$.

Teorema 1.3.2. *El problema de valor inicial* (1.26) *tiene una única solución.*

Demostración. Ver Helfgott *et. al* [24].

Definición 1.3.4. *Sean $f_1, f_2 : I \to \mathbb{C}$ funciones diferenciables. Definimos el Wronskiano de f_1, f_2 como*

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

Teorema 1.3.3. *Sean $f_1, f_2 : I \to \mathbb{C}$ funciones diferenciables. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. *Si existe $\theta_0 \in I$ tal que $W(\theta_0) \neq 0$, entonces f_1, f_2 son linealmente independientes.*
2. *Si f_1, f_2 son linealmente independientes, entonces $W(\theta) \neq 0$ para todo $\theta \in I$*

Demostración. Ver Helfgott *et. al* [24].

Corolário 1.3.1. *Sea $S = \{\phi \in \mathcal{C}^2(I);\ \phi$ es solución de* (1.23)$\}$. *Consideremos las raíces m_1, m_2 de su polinomio característico $p(m) = am^2 + bm + c$, entonces se verifican los siguientes resultados*

1. *Si $m_1 \neq m_2$ entonces $\{e^{m_1\theta}, e^{m_2\theta}\}$ es una base a valores reales de S.*
2. *Si $m_1 = m_2 = m$ entonces $\{e^{m\theta}, \theta e^{m\theta}\}$ es una base a valores reales de S.*
3. *Si $m_1 = \mu + \hat{\imath}\nu$, $m_2 = \mu - \hat{\imath}\nu$ son raíces complejas conjugadas, entonces el conjunto $\{e^{\mu\theta}\cos(\nu\theta), e^{\mu\theta}\,\mathrm{sen}(\nu\theta)\}$ es una base a valores reales de S.*

1.3.2. Ecuación de Cauchy-Euler

A continuación analizaremos la ecuación de Cauchy-Euler la cual es un caso especial de las ecuaciones con coeficientes variables. La ecuación diferencial de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \tag{1.28}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes, es conocida como ecuación de Cauchy-Euler.

Consideremos en particular, la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$x^2 y'' + axy' + by = 0, \quad x > 0, \tag{1.29}$$

que frecuentemente está relacionada a las ecuaciones de Legendre y Bessel.

Teorema 1.3.4. *Sean s_1, s_2 raíces del polinomio $q(s) = s(s-1) + as + b$. Entonces se verifican los siguientes resultados*

1. *Si las raíces s_1, s_2 son reales y distintas, la solución general de (1.29) es dada por*
$$y(x) = c_1 x^{s_1} + c_2 x^{s_2}, \quad x > 0.$$

2. *Si las raíces $s_1 = s_2 = s$ son iguales, entonces la solución general de (1.29) es*
$$y(x) = c_1 x^s + c_2 x^s \ln x, \quad x > 0.$$

3. *Si las raíces son complejas conjugadas, esto es $s_1 = \mu + \hat{\imath}\nu$, $s_2 = \mu + \hat{\imath}\nu$, entonces la solución general de (1.29) es*
$$y(x) = c_1 x^\mu \cos(\nu \ln x) + c_2 x^\mu \operatorname{sen}(\nu \ln x), \quad x > 0.$$

Demostración. Ver Helfgott *et. al* [24].

Teorema 1.3.5. *Sean ϕ_1, ϕ_2 soluciones de (1.29). Se verifican las siguientes afirmaciones*

1. *Si existe $x_0 \in I$ tal que $W(x_0) \neq 0$, entonces ϕ_1, ϕ_2 son linealmente independientes.*

2. *Si ϕ_1, ϕ_2 son linealmente independientes, entonces $W(x_0) \neq 0$ para todo $x_0 \in I$.*

Demostración. Ver Helfgott *et. al* [24].

Capítulo 2

Existencia y unicidad

En este capítulo, mostramos resultados de existencia y unicidad para el problema (1), (2), (3) en un dominio Ω el cual es una región anular, siendo descrito naturalmente en coordenadas polares $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $r \in (r_i, r_e)$ y $\theta \in [0, 2\pi)$.

Con este objetivo, expresamos la solución de la forma $T = V + W$, donde V resuelve un problema homogéneo y W es solución de un problema no homogéneo, respectivamente. Así, estudiamos dos subproblemas relacionados y utilizamos la formulación variacional junto con el Teorema de Lax-Milgram para mostrar la existencia de una única solución, para cada problema. También mostraremos que la función V puede ser expresada en términos de séries de Fourier y posee propiedades de regularidad que dependen de las propiedades de la función Q.

Utilizando estos resultados teóricos, estableceremos una relación entre el flujo Q y la temperatura externa a través de un operador lineal continuo compacto, positivo e inyectivo.

2.1. Cambio de coordenadas

En esta sección, introducimos los espacios funcionales apropiados en donde buscaremos la solución T. La solución está definida sobre una región anular, por lo que, *a priori*, observamos que la temperatura $T(r, \theta)$ como el coeficiente de transferencia de calor $Q(\theta)$ poseen propiedades de periodicidad. Con estas observaciones introducimos los siguientes espacios:

Denotamos por $\mathcal{V}$ el espacio de Hilbert que resulta del completamiento del subespacio

$$\mathcal{C}^{\infty}_{per}([0, 2\pi]) = \{u \in \mathcal{C}^{\infty}([0, 2\pi])|\ u(0) = u(2\pi)\}$$

en la norma $|\cdot|_{2,(0,2\pi)}$ esto es

$$\mathcal{V} := \overline{\mathcal{C}^{\infty}_{per}([0, 2\pi])}^{|\cdot|_{2,(0,2\pi)}}.$$

Este espacio es provisto con el producto interno usual

$$\langle u, v\rangle = \int_0^{2\pi} u(\theta)v(\theta)d\theta$$

y la norma asociada

$$|u|_{2,(0,2\pi)} = \left(\int_0^{2\pi} |u(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

También, definimos el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ como el completamiento del subespacio

$$\mathcal{C}_{per}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) |\ D^\alpha u(r,0) = D^\alpha u(r,2\pi),\ \forall r \in [r_e, r_i], |\alpha| \leq 1,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^2 \right\}$$

en la norma $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, es decir,

$$\mathcal{H} := \overline{\mathcal{C}_{per}(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}}.$$

Este espacio, en coordenadas cartesianas, es provisto del producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega (fg + \nabla f \cdot \nabla g)\, dxdy$$

donde $\nabla f = (f_x, f_y)$ es el gradiente de la función f.

Como el dominio $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ r_i < \sqrt{x^2+y^2} < r_e\}$ es una región anular, realizamos el cambio de variables en coordenadas polares

$$x = r\cos(\theta), \quad y = r\,\mathrm{sen}(\theta), \quad r_i < r < r_e, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Luego, por la regla de la cadena, obtenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= -\frac{\partial f}{\partial x} r\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos(\theta) \end{aligned}$$

entonces, tenemos que las derivadas parciales en coordenadas cartesianas son dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\cos(\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{sen}(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\cos(\theta). \end{aligned}$$

De estas identidades obtenemos el producto

$$\nabla f \cdot \nabla g = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \theta}$$

Por lo tanto, tenemos que el espacio $\mathcal{H}$ en coordenadas polares es provisto del producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} \left[fg + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial g}{\partial \theta} \right] r dr d\theta$$

y la norma asociada

$$\|f\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} \left[f^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 \right] r dr d\theta.$$

Donde el término r es el determinante de la matriz Jacobiana

$$\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = r.$$

Observación 2.1.1. *De la definición de los subespacios $\mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$ tenemos que son subespacios cerrados en espacios de Hilbert, respectivamente, y por lo tanto son espacios de Hilbert.*

2.2. La Formulación variacional

Definidos estos espacios de Hilbert $\mathcal{V}$ y $\mathcal{H}$, procedemos a estudiar la solución del problema (1), (2), (3) de la siguiente manera: Expresamos la solución buscada T como la suma de dos funciones, esto es

$$T = V + W, \tag{2.1}$$

en que V es solución del problema homogéneo con condiciones de frontera

$$\lambda_w \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \lambda_w \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad r_i < r < r_e,\ 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{2.2}$$

$$\lambda_w \frac{\partial V}{\partial r}(r_e,\theta) + \alpha V(r_e,\theta) = 0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{2.3}$$

$$-\lambda_w \frac{\partial V}{\partial r}(r_i,\theta) = Q(\theta). \quad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{2.4}$$

y W es solución del problema auxiliar no homogéneo

$$\lambda_w \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \lambda_w \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + q_g(r,\theta) = 0, \quad r_i < r < r_e,\ 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{2.5}$$

$$\lambda_w \frac{\partial W}{\partial r}(r_e,\theta) = \alpha\left(T_{env} - W(r_e,\theta)\right), \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \tag{2.6}$$

$$-\lambda_w \frac{\partial W}{\partial r}(r_i,\theta) = 0. \quad 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{2.7}$$

Observación 2.2.1. *Note que si V y W son soluciones de los problemas (2.2)-(2.4) y (2.5)-(2.7), respectivamente, entonces T definida por $T = V + W$ resuelve el problema inicial (1)-(3).*

2.2.1. Formulación variacional del problema de valor de frontera homogéneo

En esta primera parte procedemos a desarrollar los resultados correspondientes sobre la existencia y unicidad de la solución V del problema (2.2)-(2.4), utilizando el Teorema de Lax-Milgram.

Con este objetivo, utilizamos como hipótesis inicial que la solución del problema (2.2)-(2.4) $V \in \mathcal{C}_{per}(\overline{\Omega})$, esto es

$$V(r,0) = V(r,2\pi), \quad \frac{\partial V}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial V}{\partial \theta}(r,2\pi) \quad r_i < r < r_e. \tag{2.8}$$

Esta hipótesis surge naturalmente debido a que el problema estudiado está definido sobre un dominio anular.

Introducimos la formulación variacional asociada al problema (2.2)-(2.4), la cual permite reducir el orden de derivación requerida para la solución V, transformando una problema diferencial de segundo orden a un problema diferencial de primer orden cuya solución es denominada solución débil. Este procedimiento es desarrollado de la siguiente manera.

Multiplicamos la ecuación (2.2) por $w \in \mathcal{C}_{per}(\overline{\Omega})$ e integramos en Ω, entonces se tiene

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) w + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} w\right] dr d\theta = 0. \tag{2.9}$$

En cada integrando de (2.9) utilizamos integración por partes, junto con las condiciones de frontera (2.3)-(2.4). Así en el primer sumando se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) w dr d\theta = \int_0^{2\pi}\left[r\frac{\partial V}{\partial r} w\Big|_{r_i}^{r_e} - \int_{r_i}^{r_e} r\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r} dr\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[r_e\frac{\partial V}{\partial r}(r_e,\theta)w(r_e,\theta) - r_i\frac{\partial V}{\partial r}(r_i,\theta)w(r_i,\theta)\right] d\theta - \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} r\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r} dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-r_e\frac{\alpha}{\lambda_w}V(r_e,\theta)w(r_e,\theta) + \frac{r_i}{\lambda_w}Q(\theta)w(r_i,\theta)\right] d\theta - \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} r\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r} dr d\theta.
\end{aligned}$$

De manera análoga, utilizamos la condición de periodicidad (2.8) en el segundo integrando de (2.9) y se obtiene

$$\begin{aligned}
&\int_{r_i}^{r_e}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} w d\theta dr = \int_{r_i}^{r_e}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial \theta} w\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial \theta} d\theta\right] dr \\
&= \int_{r_i}^{r_e}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial \theta}(r,2\pi)w(r,2\pi) - \frac{\partial V}{\partial \theta}(r,0)w(r,0)\right] dr - \int_{r_i}^{r_e}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial \theta} d\theta dr \\
&= -\int_{r_i}^{r_e}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial \theta} d\theta dr.
\end{aligned}$$

De las dos identidades obtenidas y (2.9) tenemos que para todo $w \in \mathcal{C}_{per}(\overline{\Omega})$ se verifica la siguiente igualdad

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} r\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial \theta} dr d\theta + \frac{\alpha r_e}{\lambda_w}\int_0^{2\pi} V(r_e,\theta)w(r_e,\theta) d\theta = \frac{r_i}{\lambda_w}\int_0^{2\pi} Q(\theta)w(r_i,\theta) d\theta. \tag{2.10}$$

Así, a partir de (2.10) definimos la forma $a : \mathcal{C}_{per}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_{per}(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ como

$$a(V,w) = \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} r\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\partial w}{\partial \theta} dr d\theta + \frac{\alpha r_e}{\lambda_w}\int_0^{2\pi} V(r_e,\theta)w(r_e,\theta) d\theta \tag{2.11}$$

y el funcional $f : \mathcal{C}_{per}\left(\overline{\Omega}\right) \to \mathbb{R}$ dado por

$$f(w) = \frac{r_i}{\lambda_w} \int_0^{2\pi} Q(\theta) w(r_i, \theta) d\theta. \tag{2.12}$$

Como será demostrado en el siguiente teorema, la forma a definida en (2.11) es bilineal y contínua. Por el Teorema de extensión existe un operador acotado, denotado por a, definido sobre el espacio $\mathcal{H} \times \mathcal{H} = \overline{\mathcal{C}_{per}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{C}_{per}(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{1,\Omega} \times \|\cdot\|_{1,\Omega}}$ a valores reales, esto es

$$a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$$

De manera análoga, si $Q \in L^2(0, 2\pi)$ entonces f es un funcional lineal y contínuo. Por lo tanto, existe una extensión lineal acotada, denotada por f, definida sobre el espacio $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{C}_{per}(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_{1,\Omega}}$ a valores reales

$$f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}.$$

Se sigue que si V es solución (2.2)-(2.4), entonces es solución del problema variacional

$$a(V, w) = f(w), \quad \forall w \in \mathcal{H}. \tag{2.13}$$

En el siguiente teorema mostramos que la expresión (2.13) tiene solución única en el espacio $\mathcal{H}$, es decir el problema de encontrar $V \in \mathcal{H}$ tal que

$$a(V, w) = f(w), \quad \forall w \in \mathcal{H} \tag{2.14}$$

tiene una única solución.

Teorema 2.2.1. *Sea $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ el operador definido en (2.11) y $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ en (2.12), entonces*

(1) a es una forma bilineal contínua y coerciva.

(2) Si $Q \in \mathcal{V}$, entonces f es linear y continuo.

Demostración. Procedemos a demostrar estos resultados en los siguientes pasos.

(1a) Para todo $u, v, w \in \mathcal{H}$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$a(\alpha_1 u + \alpha_2 v, w) = \alpha_1 a(u, w) + \alpha_2 a(v, w)$$
$$a(u, \alpha_1 v + \alpha_2 w) = \alpha_1 a(u, v) + \alpha_2 a(u, w),$$

luego el operador a es bilineal.

Mostraremos que a es acotado. Sean $V, w \in \mathcal{V}$, en el primer integrando de (2.11) utilizamos las desigualdades de Hölder, Cauchy-Schwarz y obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r^{1/2} \frac{\partial V}{\partial r} r^{1/2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^{1/2}} \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{1}{r^{1/2}} \frac{\partial w}{\partial \theta} dr d\theta$$
$$\leq \left(\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 dr d\theta \right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} \int_{r_i}^{r_e} r \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 dr d\theta \right)^{1/2}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2 drd\theta\right)^{1/2}\left(\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2 drd\theta\right)^{1/2}\\
&\leq\left(\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)^2\right]rdrd\theta\right)^{1/2}\times\\
&\quad\left(\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)^2\right]rdrd\theta\right)^{1/2}\\
&\leq\|V\|_{\mathcal{H}}\|w\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Donde en la penúltima desigualdad hemos utilizado Cauchy-Schwarz para el par de vectores $a=(a_1,a_2),\ b=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$, esto es

$$a_1b_1+a_2b_2\leq\|a\|_2\|b\|_2=\left(a_1^2+a_2^2\right)^{1/2}\left(b_1^2+b_2^2\right)^{1/2}.$$

Para el segundo integrando de la forma a, consideramos el operador trazo $\Lambda:\mathcal{H}\to\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ definido por

$$\Lambda(w)=(w_{|\Gamma_i},w_{|\Gamma_e}).$$

Note que por el item 2 del Teorema del Trazo 1.2.6 se tiene la siguiente desigualdad

$$|w_{|\Gamma_e}|_{\mathcal{V}}\leq|\Lambda(w)|_{\mathcal{V}}\leq C_\Gamma\|w\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.15}$$

Así, en la segunda suma de (2.11), utilizando la desigualdad de Hölder se tiene

$$\int_0^{2\pi}r_e\frac{\alpha}{\lambda_w}V_{|\Gamma_e}w_{|\Gamma_e}d\theta\leq\frac{\alpha r_e}{\lambda_w}|V_{|\Gamma_e}|_{\mathcal{V}}|w_{|\Gamma_e}|_{\mathcal{V}}\leq\frac{\alpha r_eC_\Gamma^2}{\lambda_w}\|V\|_{\mathcal{H}}\|w\|_{\mathcal{H}}.$$

De las desigualdades obtenidas, concluimos que

$$a(V,w)\leq C\|V\|_{\mathcal{H}}\|w\|_{\mathcal{H}},\quad\forall V,w\in\mathcal{H}$$

donde $C=1+\alpha r_eC_\Gamma^2/\lambda_w$ es una constante positiva. Por lo tanto, a es acotado y consecuentemente continuo.

(1b) Ahora vamos a mostrar que a es coercivo, es decir existe una constante $\rho>0$ tal que

$$a(w,w)\geq\rho\|w\|_{\mathcal{H}}^2,\quad\forall w\in\mathcal{H}.$$

Procedemos por contradicción, supongamos que existe una secuencia $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$ tal que

$$\|v_n\|_{\mathcal{H}}=1,\quad\forall n\in\mathbb{N}\ \ y\ \ \lim_{n\to\infty}a(v_n,v_n)=0. \tag{2.16}$$

Como $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es limitada en el espacio reflexivo $\mathcal{H}$, entonces del Teorema 1.1.1 existe una subsucesión, que denotamos por $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $v\in\mathcal{H}$ tal que $v_n\rightharpoonup v$ en $\mathcal{H}$.

También, por el Teorema de Rellich-Kondrachov 1.2.10 item 2, para el caso en que $p=n=2$, tenemos la inclusión compacta $\mathcal{H}=H^1\left((r_i,r_e)\times[0,2\pi]\right)\hookrightarrow L^2((r_i,r_e)\times[0,2\pi])$. En consecuencia obtenemos la convergencia

$$v_n\to v\text{ en }L^2((r_i,r_e)\times[0,2\pi]). \tag{2.17}$$

Así, como $v_n \rightharpoonup v$ en $\mathcal{H}$, entonces de la definición de la convergencia débil y por el Teorema de Riez se tiene para todo $w \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\langle v_n - v, w\rangle_{\mathcal{H}} \to 0, \ \ cuando\ n \to \infty$$

o sea para todo $w \in \mathcal{H}$ se cumple

$$\int_\Omega (v_n - v) w r dr d\theta + \int_\Omega \nabla(v_n - v).\nabla w r dr d\theta \to 0, \ \ cuando\ n \to \infty \tag{2.18}$$

en particular, si en (2.18) tomamos $w = v$ y de la convergencia (2.17) tenemos

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 r dr d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla v.\nabla v_n r dr d\theta, \tag{2.19}$$

y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 r dr d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla v.\nabla v_n r dr d\theta \leq |\nabla v|_{2,\Omega} \lim_{n\to\infty} |\nabla v_n|_{2,\Omega}.$$

Así,

$$|\nabla v|_{2,\Omega} \leq \lim_{n\to\infty} |\nabla v_n|_{2,\Omega}. \tag{2.20}$$

También de la definición de a, para todo $w \in \mathcal{H}$, se verifican las desigualdades

$$|\nabla w|_{2,\Omega} \leq a(w,w)^{1/2}, \tag{2.21}$$

$$|w|_{2,\Gamma_e} \leq c_0^{-1/2} a(w,w)^{1/2}. \tag{2.22}$$

donde $c_0 = \alpha r_e/\lambda_w$.

Utilizando la desigualdades (2.20) y (2.22) junto con la hipótesis auxiliar (2.16) obtenemos

$$|\nabla v|_{2,\Omega} \leq \lim_{n\to\infty} |\nabla v_n|_{2,\Omega} \leq \lim_{n\to\infty} a(v_n, v_n)^{1/2} = 0 \tag{2.23}$$

entonces, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} |\nabla v_n|_{2,\Omega} = 0, \tag{2.24}$$

luego de (2.24) en (2.23), $\nabla v = 0$ entonces v es constante casi siempre en Ω.

Además, por la convergencia $v_n \to v$ en $L^2((r_i, r_e) \times [0, 2\pi])$ y la expresión (2.24), se tiene

$$|v|^2_{2,\Omega} = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2_{\mathcal{H}} = 1, \tag{2.25}$$

de donde deducimos que $v \neq 0$.

Por otro lado, utilizando el Teorema del Trazo, item (2), mostramos la convergencia $v_n \to v$ en $L^2(\Gamma_e)$. En efecto,

$$\begin{aligned} |v_n - v|^2_{2,\Gamma_e} &\leq C_\Gamma^2 \|v_n - v\|^2_{\mathcal{H}} = C_\Gamma^2 \left(|v_n - v|^2_{2,\Omega} + |\nabla.(v_n - v)|^2_{2,\Omega} \right) \\ &= C_\Gamma^2 \left(|v_n - v|^2_{2,\Omega} + |\nabla v_n|^2_{2,\Omega} \right), \end{aligned}$$

donde $C_\Gamma > 0$ es la constante utilizada (2.15). En el limite, por (2.17) y (2.24) obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} |v_n - v|^2_{2,\Gamma_e} = 0. \tag{2.26}$$

De (2.22) obtenemos

$$|v_n|_{2,\Gamma_e} \leq c_0^{-1/2} a(v_n, v_n)^{1/2}$$

y por la convergencia (2.26) en $L^2(\Gamma_e)$ al tomar límite se tiene que

$$|v|_{2,\Gamma_e} \leq c_0^{-1/2} \lim_{n\to\infty} a(v_n, v_n)^{1/2} = 0$$

luego $v = 0$ en Γ_e.

Finalmente, del Teorema 1.2.9 se tiene que existe $C > 0$ tal que

$$|v|_{2,\Omega} \leq C|\nabla v|_{2,\Omega} = 0,$$

luego $|v|_{2,\Omega} = 0$ y de (2.25) se tiene que $|v|_{2,\Omega} = 1$ lo cual es un absurdo. Por lo tanto, la forma bilinear a es coerciva.

(2) Ahora mostraremos que el funcional f definido en (2.12) es lineal y continuo. En efecto, de la definición se verifica que f es lineal.

Para mostrar que f es continua, tomamos $w \in \mathcal{H}$ y utilizando la desigualdad de Hölder y el Teorema del trazo, item (2), obtenemos

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{r_i}{\lambda_w} \int_0^{2\pi} Qw|_{\Gamma_i} d\theta \leq \frac{r_i}{\lambda_w} |Q|_{\mathcal{V}} |w|_{2,\Gamma_i} \\ &\leq c_1 |Q|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

donde $c_1 = \frac{r_i C_\Gamma}{\lambda_w}$. □

De los resultados obtenidos a partir del Teorema 2.2.1, sigue del Teorema de Lax-Milgram que el problema variacional (2.13) tiene única solución $V \in \mathcal{H}$ y, por la coercividad del operador a, satisface la estimativa *a priori*

$$\begin{aligned} \|V\|_{\mathcal{H}} &\leq \rho^{-1} \frac{a(V,V)}{\|V\|_{\mathcal{H}}} \leq \rho^{-1} \sup_{w\in\mathcal{H}} \frac{a(V,w)}{\|w\|_{\mathcal{H}}} = \rho^{-1} \sup_{w\in\mathcal{H}} \frac{f(w)}{\|w\|_{\mathcal{H}}} \\ &\leq \rho^{-1} c_1 |Q|_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

donde $\rho > 0$ es la constante de coercividad. Por lo tanto, obtenemos la desigualdad que relaciona la temperatura V y el flujo Q

$$\|V\|_{\mathcal{H}} \leq c_2 |Q|_{\mathcal{V}}, \tag{2.27}$$

donde $c_2 = \rho^{-1} c_1$.

Ya verificada la existencia de la función V, mostraremos que esta puede ser expresada explicitamente en términos de series de Fourier utilizando el método de separación de variables como sigue.

Supongamos que la solución del problema (2.2)-(2.4) puede ser escrita como $V(r,\theta) = X(r)Y(\theta)$. Sustituyendo este producto en (2.2), se obtiene

$$\frac{\lambda_w}{r}(rX''(r) + X'(r))\, Y(\theta) + \frac{\lambda_w}{r^2} X(r) Y''(\theta) = 0. \tag{2.28}$$

Despejando las funciones X e Y obtenemos la siguiente relación

$$\frac{r^2X''(r)+rX'(r)}{-X(r)}=\frac{Y''(\theta)}{Y(\theta)}=-\gamma^2,\quad r\in(r_i,r_e),\quad \theta\in[0,2\pi]. \tag{2.29}$$

siendo las funciones $X(r), Y(\theta)$ no nulas y γ constante. En la ecuación anterior consideramos el término $-\gamma^2$ para obtener soluciones no constantes y no nulas.

También de las condiciones de periodicidad (2.8), tenemos que

$$X(r)Y(0)=X(r)Y(2\pi),\quad X(r)Y'(0)=X(r)Y(2\pi),\quad r\in(r_i,r_e),$$

entonces

$$Y(0)=Y(2\pi),\quad Y'(0)=Y'(2\pi).$$

Por otro lado, sustituyendo $V(r,\theta)=X(r)Y(\theta)$ en la condición de frontera (2.3) obtenemos

$$\left(\lambda_w X'(r_e)+\alpha X(r_e)\right)Y(\theta)=0,\quad \theta\in[0,2\pi].$$

luego

$$\lambda_w X'(r_e)+\alpha X(r_e)=0.$$

Estas ecuaciones son descritas por las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias: el problema de Sturm-Liouville

$$Y''(\theta)+\gamma^2Y(\theta)=0,\quad 0\le\theta\le 2\pi \tag{2.30}$$
$$Y(0)=Y(2\pi),\ Y'(0)=Y'(2\pi) \tag{2.31}$$

y el problema de Cauchy

$$r^2X''(r)+rX'(r)-\gamma^2X(r)=0,\quad r_i<r<r_e \tag{2.32}$$
$$\lambda_w X'(r_e)+\alpha X(r_e)=0. \tag{2.33}$$

Utilizando el resultado en (1.25), tenemos que la solución general del problema (2.30) es de la forma

$$Y(\theta)=a\cos(\gamma\theta)+b\,\mathrm{sen}(\gamma\theta),$$

donde a, b son constantes no ambas nulas. Así, su derivada correspondiente es

$$Y'(\theta)=-\gamma a\,\mathrm{sen}(\gamma\theta)+\gamma b\cos(\gamma\theta).$$

Si $\gamma=0$ tenemos que la solución Y es constante. Supongamos que $\gamma\neq 0$ y utilizando la condición de frontera (2.31) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$a\cos(2\pi\gamma)+b\,\mathrm{sen}(2\pi\gamma)=a \tag{2.34}$$
$$-\gamma a\,\mathrm{sen}(2\pi\gamma)+\gamma b\cos(2\pi\gamma)=\gamma b \tag{2.35}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos

$$b\left(\cos(2\pi\gamma)-1\right)=0$$

la cual es analizada en los siguientes casos:

1. Si $b = 0$, entonces reemplazando este valor en la ecuación (2.34) se sigue que

$$a(\cos(2\pi\gamma) - 1) = 0,$$

donde $a \neq 0$. Luego, se tiene que γ satisface la ecuación $\cos(2\pi\gamma) = 1$ y consecuentemente

$$2\pi\gamma = 2\pi n, \quad n \in \{1, 2, \ldots\}.$$

2. Si $\cos(2\pi\gamma) - 1 = 0$ también se obtiene que $\gamma = n$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$

Por lo tanto, el problema (2.30)-(2.31) posee un sistema de autovalores y autovectores asociados que poseen las siguientes características.

El primer autovalor es $\gamma_0 = 0$ y su autoespacio asociado es $span\{1\}$. Los autovalores restantes son $\gamma_n = n$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, los cuales tienen dupla multiplicidad con su respectivo autoespacio asociado $span\{\cos(n\theta), \text{sen}(n\theta)\}$.

Se sigue que, la solución general que resuelve (2.30)-(2.31) es dada por

$$Y_n(\theta) = a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta),$$

en que

$$R_n(\theta) = \cos(n\theta), \ S_n(\theta) = \text{sen}(n\theta). \tag{2.36}$$

Por otro lado, sustituyendo los valores γ_n en el problema de Cauchy (2.32) obtenemos que para $\gamma_0 = 0$ el problema

$$\begin{aligned} &r^2 X_0''(r) + r X_0'(r) = 0, \quad r_i < r < r_e \\ &\lambda_w X_0'(r_e) + \alpha X_0(r_e) = 0. \end{aligned}$$

Utilizando los resultados asociados al problema de Cauchy, tenemos que polinomio asociado a la solución $X_0(r) = r^s$ es

$$(s(s-1) + s)\, r^s = 0,$$

entonces $s = 0$ es la raíz con dupla multiplicidad. Por lo tanto, la solución general correspondiente es

$$X_0(r) = c_1 + c_2 \ln(r)$$

De la condición de frontera (2.33), esta solución es obtenida explícitamente como

$$X_0(r) = \ln\left(\frac{r}{r_e}\right) - \frac{\lambda_w}{\alpha r_e}.$$

Para $\gamma_n = n$, el problema de Cauchy asociado es

$$\begin{aligned} &r^2 X_n''(r) + r X_n'(r) - n^2 X_n(r) = 0, \quad r_i < r < r_e \\ &\lambda_w X_n'(r_e) + \alpha X_n(r_e) = 0. \end{aligned}$$

Luego, tenemos que polinomio asociado a la solución $X_n(r) = r^s$ es

$$\left(s(s-1) + s - n^2\right) r^s = 0$$

de donde se obtienen las raíces distintas $s_1 = n$ y $s_2 = -n$. Por lo tanto, la solución general correspondiente es

$$X_n(r) = c_1 r^n + c_2 r^{-n}$$

y utilizando la condición de frontera (2.33), la solución X_n es de la forma

$$X_n(r) = \frac{1}{r^n} + \left(\frac{\lambda_w n r_e^{-n-1} - \alpha r_e^{-n}}{\lambda_w n r_e^{n-1} + \alpha r_e^n} \right) r^n, \quad n \in \{1, 2, \ldots\} \tag{2.37}$$

Por lo tanto, tenemos un conjunto de soluciones $V_n(r, \theta) = X_n(r) Y_n(\theta)$ para todo $n \in \{0, 1, \ldots\}$. Utilizando el principio de la superposición (la suma de soluciones de una ecuación lineal homogénea es también solución de dicha ecuación) se tiene que para todo $N \in \mathbb{N}$ la función V_N, dada por

$$V_N(r, \theta) = a_0 X_0(r) + \sum_{n=1}^{N} X_n(r) \left(a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta) \right),$$

es solución. En el siguiente teorema mostraremos que la serie

$$V(r, \theta) = a_0 X_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(r) \left(a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta) \right), \tag{2.38}$$

es convergente y V es solución débil del problema (2.2)-(2.4).

Teorema 2.2.2. *Sea $\mathcal{B} = \{1, R_n(\theta), S_n(\theta),\ n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto ortogonal en $\mathcal{V}$, donde las funciones R_n y S_n son definidas en* (2.36)*. Entonces la función V definida en (2.38) es convergente y es solución del problema variacional* (2.13) *con coeficientes*

$$a_0 = -\frac{\langle Q, R_0 \rangle}{2\pi \lambda_w X_0'(r_i)}, \quad a_n = -\frac{\langle Q, R_n \rangle}{\lambda_w \pi X_n'(r_i)}, \quad b_n = -\frac{\langle Q, S_n \rangle}{\lambda_w \pi X_n'(r_i)}. \tag{2.39}$$

Demostración. Primeramente, mostremos que los coeficientes a_n, b_n son verifican (2.39). En efecto, para cada $N \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, considere la suma parcial

$$\mathcal{Q}_N(\theta) = \frac{1}{2\pi} \langle Q, R_0 \rangle + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \langle Q, R_n \rangle R_n(\theta) + \langle Q, S_n \rangle S_n(\theta).$$

Como $\mathcal{B}$ es una base ortogonal en $\mathcal{V}$, por el Teorema 1.1.9 se cumple que $\mathcal{Q}_N$ converge a $Q \in \mathcal{V}$, esto es

$$\mathcal{Q}_N \to Q \text{ en } \mathcal{V}, \text{ cuando } N \to +\infty. \tag{2.40}$$

Si consideramos la función $\mathcal{Q}_N$ como condición de frontera en (2.4), se verifica, en estas condiciones, que la función

$$V_N(r, \theta) = a_0 X_0(r) + \sum_{n=1}^{N} X_n(r)(a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta)) \tag{2.41}$$

es solución del problema variacional (2.13).

Note que $V_N \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Así, de la condición de frontera $-\lambda_w \dfrac{\partial V_N}{\partial r}(r_i,\theta) = \mathcal{Q}_N(\theta)$ se tiene la relación

$$-\lambda_w \left(a_0 X_0'(r_i) + \sum_{n=1}^{N} X_n'(r_i)\left(a_n R_n + b_n S_n\right) \right) = \frac{1}{2\pi}\langle Q, R_0\rangle + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \langle Q, R_n\rangle R_n + \langle Q, S_n\rangle S_n. \tag{2.42}$$

Haciendo uso de la ortogonalidad de la base $\mathcal{B}$, multiplicamos (2.42) por las funciones R_m, S_m, respectivamente, para $m = 0, 1, \ldots, N$ y tomando producto interno en $(0, 2\pi)$ se obtiene

$$-\lambda_w a_0 X_0'(r_i) = \frac{1}{2\pi}\langle Q, R_0\rangle$$

y

$$-\lambda_w a_m X_m'(r_i) = \frac{1}{\pi}\langle Q, R_m\rangle, \quad -\lambda_w b_m X_m'(r_i) = \frac{1}{\pi}\langle Q, S_m\rangle, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Así se tiene el primer resultado.

El próximo paso es demostrar que V está bien definida. Sean V_{N_1}, V_{N_2} las funciones dadas por la expresión (2.41), donde $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$. Como el problema (2.2)-(2.4) es homogéneo, sigue que $V_{N_1} - V_{N_2}$ también es solución del problema variacional (2.13), con condición de frontera $\mathcal{Q}_{N_1} - \mathcal{Q}_{N_2}$. Así, de la estimativa *a priori* (2.27), obtenemos

$$\|V_{N_1} - V_{N_2}\|_{\mathcal{H}} \leq c_2 |\mathcal{Q}_{N_1} - \mathcal{Q}_{N_2}|_{\mathcal{V}}. \tag{2.43}$$

Luego, como $\{\mathcal{Q}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de Cauchy en $\mathcal{V}$, entonces $\{V_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ también es una secuencia de Cauchy en $\mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Por lo tanto, la secuencia $\{V_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es convergente y su limite

$$V(r,\theta) = a_0 X_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} X_n(r)(a_n R_n(\theta) + b_n S_n(\theta)) \tag{2.44}$$

está bien definido.

Por último, mostramos que V es solución débil del problema (2.2)-(2.4). En efecto, la función V_N es solución del problema variacional

$$a(V_N, w) = c\int_0^{2\pi} \mathcal{Q}_N(\theta) w(r_i,\theta) d\theta, \quad \forall w \in \mathcal{H} \tag{2.45}$$

con $c = r_i/\lambda_w$. Como las secuencias $\{V_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ y $\{\mathcal{Q}_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ convergen en los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente, el resultado se verifican tomando limite cuando N tiende al infinito.

En efecto, note que por la continuidad del operador a se tiene

$$|a(V_N, w) - a(V, w)| = |a(V_N - V, w)| \leq C\|V_N - V\|_{\mathcal{H}}\|w\|_{\mathcal{H}} \to 0 \text{ cuando } N \to \infty,$$

esto último debido a la convergencia de la secuencia $\{V_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$.

De manera similar, de la desigualdad de Hölder y el Teorema del trazo, item (2), se obtiene

$$\int_0^{2\pi} (\mathcal{Q}_N - Q)\, w|_{\Gamma_i} d\theta \leq C_\Gamma |\mathcal{Q}_N - Q|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{H}} \to 0, \text{ cuando } N \to \infty.$$

De estas convergencias el resultado se sigue tomando limite en (2.45) cuando $N \to \infty$, esto es

$$a(V, w) = c \int_0^{2\pi} Qw|_{\Gamma_i} d\theta, \quad \forall w \in \mathcal{H}.$$

Por lo tanto, V es solución débil del problema (2.2)-(2.4). □

Observación 2.2.2. *Por el Teorema anterior, si $Q \in \mathcal{V}$ entonces existe una única solución débil $V \in \mathcal{H}$ del problema (2.2)-(2.4) expresada en series por (2.44). Una pregunta natural es: ¿Sobre que condiciones esta función V es solución clásica[1] ? En el próximo Teorema, demostraremos un resultado de regularidad sobre la función V.*

Teorema 2.2.3. *Sea V la función definida en (2.38), entonces $V \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cup \Gamma_e)$.*

Demostración. Para demostrar este resultado, utilizaremos el criterio de comparación para construir una serie cuyos términos limitan al término general de las derivadas $X_n^{(k)}(r)Y_n^{(\ell)}(\theta)$ de (2.38). Finalmente, utilizamos el criterio de la razón para demostrar que esta última serie es convergente.

Primeramente calculamos la k-ésima derivada de $X_n(r)$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y obtenemos

$$X_n^{(k)}(r) = A_{n,k} r^{-n-k} + \frac{\lambda_w n r_e^{-n-1} - \alpha r_e^{-n}}{\lambda_w n r_e^{n-1} + \alpha r_e^n} B_{n,k} r^{n-k}, \quad n \geq k$$

donde $B_{n,k} = n!/(n-k)!$ y $A_{n,k} = (-1)^k (n+k-1)!/(n-1)!$

Entonces

$$\frac{X_n^{(k)}(r)}{X_n'(r_i)} = -\left(\frac{r_i}{r}\right)^n \frac{r_i}{r^k} \frac{\lambda_w n (A_{n,k} r_e^{2n} + B_{n,k} r^{2n}) + \alpha r_e (A_{n,k} r_e^{2n} - B_{n,k} r^{2n})}{\lambda_w n^2 (r_e^{2n} - r_i^{2n}) + \alpha n r_e (r_e^{2n} + r_i^{2n})}.$$

Procedemos a estimar el siguiente término. Para $k \geq 1$, $\ell \geq 0$ y $n \geq k$ se tiene

$$\begin{aligned} \left|a_n X_n^{(k)}(r) R_n^{(\ell)}(\theta)\right| &= \left|\frac{\langle Q, R_n\rangle}{\lambda_w \pi X_n'(r_i)} X_n^{(k)}(r)\right| \left|R_n^{(\ell)}(\theta)\right| \\ &\leq |Q|_{\mathcal{V}} |R_n|_{\mathcal{V}} \left|\frac{X_n^{(k)}(r)}{X_n'(r_i)}\right| \frac{n^\ell}{\lambda_w \pi} \\ &\leq \left(\frac{r_i}{r}\right)^n \frac{n^\ell r_i}{\lambda_w r^k} \frac{(\lambda_w + \alpha r_e)(|A_{n,k}| + B_{n,k}(r/r_e)^{2n})}{\lambda_w n^2 (1-\rho^{2n}) + \alpha n r_e (1+\rho^{2n})} |Q|_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

donde hemos utilizado (2.39) y $\rho = r_i/r_e$.

[1] Una solución clásica es una función $V \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que satisface (2.2)-(2.4) puntualmente sobre Ω.

Entonces, para cada $\epsilon \in]0, r_e - r_i[$ y $n \geq k$, notando que $0 < r/r_e \leq 1$,

$$\sup_{(r,\theta)\in[r_i+\epsilon,r_e]\times[0,2\pi]} \left|a_n X_n^{(k)}(r) R_n^{(\ell)}(\theta)\right| \leq \frac{r_i}{\alpha r_e \lambda_w r^k} |Q|_{\mathcal{V}} C_n(\ell, k, \epsilon), \tag{2.47}$$

donde

$$C_n(\ell, k, \epsilon) = n^{\ell-1} \left(\frac{r_i}{r_i + \epsilon}\right)^n (\lambda_w n + \alpha r_e)(|A_{n,k}| + B_{n,k}).$$

Una estimativa similar se cumple para $\left|b_n X_n^{(k)}(r) S_n^{(\ell)}(\theta)\right|$, esto es

$$\sup_{(r,\theta)\in[r_i+\epsilon,r_e]\times[0,2\pi]} \left|b_n X_n^{(k)}(r) S_n^{(\ell)}(\theta)\right| \leq \frac{r_i}{\alpha r_e \lambda_w r^k} |Q|_{\mathcal{V}} C_n(\ell, k, \epsilon). \tag{2.48}$$

Note que,

$$\frac{C_{n+1}(\ell, k, \epsilon)}{C_n(\ell, k, \epsilon)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\ell-1} \left(\frac{r_i}{r_i + \epsilon}\right) \left(\frac{\lambda_w(n+1) + \alpha r_e}{\lambda_w n + \alpha r_e}\right) \left(\frac{|A_{n+1,k}| + B_{n+1,k}}{|A_{n,k}| + B_{n,k}}\right). \tag{2.49}$$

También,

$$\frac{|A_{n+1,0}| + B_{n+1,0}}{|A_{n,0}| + B_{n,0}} = 1, \quad \frac{|A_{n+1,1}| + B_{n+1,1}}{|A_{n,1}| + B_{n,1}} = \frac{n+1}{n} \tag{2.50}$$

y, para cada $k \in \{2, 3, \ldots\}$,

$$\begin{aligned}
\frac{|A_{n+1,k}| + B_{n+1,k}}{|A_{n,k}| + B_{n,k}} &= \frac{1}{n(n-k+1)} \frac{(n+k)!(n-k+1)! + n!(n+1)!}{(n+k-1)!(n-k)! + n!(n-1)!} \\
&= \frac{1}{n(n-k+1)} \frac{(n+1)!(n-k+1)!}{n!(n-k)!} \times \\
&\quad \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n+2) + n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(n-1+k)(n-2+k)\cdots(n+1) + (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)} \\
&\leq \frac{n+1}{n} \frac{(n+k)^{k-1} + n^{k-1}}{(n+1)^{k-1} + (n-k+1)^{k-1}} \\
&\leq \frac{n+1}{n} \left(\frac{n+k}{n-k+1}\right)^{k-1}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Por lo tanto, de (2.50)-(2.51), tomando limite superior se tiene

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{|A_{n+1,k}| + B_{n+1,k}}{|A_{n,k}| + B_{n,k}} \leq 1$$

y por la identidad (2.49), obtenemos

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{C_{n+1}(\ell, k, \epsilon)}{C_n(\ell, k, \epsilon)} \leq \frac{r_i}{r_i + \epsilon} < 1.$$

Utilizando el criterio de la razón, concluimos que la serie, cuyo término general es limitado en (2.47) y (2.48) es convergente. Consecuentemente, $V \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \cup \Gamma_e)$ pues la diferenciación de la serie (2.38) término a término produce una serie uniformemente convergente en $[r_i + \epsilon, r_e] \times [0, 2\pi]$ para cada $\epsilon \in]0, r_e - r_i[$. □

Note que no podemos afirmar nada con respecto a la suavidad de la solución V en la frontera interna Γ_i sin contar con información *a priori* sobre Q. Para superar esta dificultad, asumiremos que el flujo Q satisface ciertas propiedades, siendo estas basadas en observaciones de datos obtenidos experimentalmente en [8]. El resultado principal es descrito en el siguiente Corolario.

Corolário 2.2.1. *Supongamos que $Q, Q', Q'' \in \mathcal{V}$ tal que Q y Q' son funciones 2π-periódicas. Entonces la función V, dada en (2.38), resuelve el problema (2.2)-(2.4) en el sentido clásico.*

Demostración. Desde que $Q, Q', Q'' \in \mathcal{V}$ con Q y Q' funciones 2π-periódicas, utilizando integración por partes obtenemos

$$\langle Q, R_n\rangle = -n^{-2}\langle Q'', R_n\rangle, \quad \langle Q, S_n\rangle = -n^{-2}\langle Q'', S_n\rangle.$$

Entonces, haciendo un procedimiento similar a (2.46), podemos deducir que

$$|X_n'(r)(a_nR_n(\theta) + b_nS_n(\theta))| \leq \frac{2}{\lambda_w n^2}\frac{\lambda_w n^2(1-(r/r_e)^{2n}) + \alpha r_e n(1+(r/r_e)^{2n})}{\lambda_w n^2(1-\rho^{2n}) + \alpha n r_e(1+\rho^{2n})}|Q''|_{\mathcal{V}}, \tag{2.52}$$

donde los componentes de esta última expresión

$$\frac{\lambda_w n^2(1-(r/r_e)^{2n})}{\lambda_w n^2(1-\rho^{2n}) + \alpha n r_e(1+\rho^{2n})} \leq \frac{\lambda_w n^2(1-\rho^{2n})}{\lambda_w n^2(1-\rho^{2n}) + \alpha n r_e(1+\rho^{2n})} \leq 1$$

y

$$\frac{\alpha r_e n(1+(r/r_e)^{2n})}{\lambda_w n^2(1-\rho^{2n}) + \alpha n r_e(1+\rho^{2n})} \leq \frac{2\alpha r_e n}{\lambda_w n^2(1-\rho^{2n}) + \alpha n r_e(1+\rho^{2n})} \leq 2$$

son limitadas.

Por lo tanto, de (2.52), sigue que

$$\sup_{(r,\theta)\in[r_i,r_e]\times[0,2\pi]} |X_n'(r)(a_nR_n(\theta) + b_nS_n(\theta))| \leq \frac{6}{\lambda_w n^2}|Q''|_{\mathcal{V}}. \tag{2.53}$$

La diferenciación término a término de la serie (2.38), con respecto a r junto con (2.53), muestra que la derivada de la serie converge uniformemente en $[r_i, r_e]\times[0, 2\pi]$. Entonces, (2.3)-(2.4) son satisfechas en el sentido clásico y consecuentemente V es una solución clásica. □

Con los resultados obtenidos, en el Teorema 2.2.3 sobre la regularidad de V, mostramos a continuación la relación que constituye la base del método para el estudio del problema inverso correspondiente.

Teorema 2.2.4. *Sea $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ definido por $A(Q) = V(r_e, \cdot)$, donde V es dada por el Teorema 2.2.3. Entonces, se verifican las siguientes propriedades:*

1. *El operador A es lineal, compacto, autoadjunto, positivo e inyectivo, tal que*

$$A(Q) = \mu_0 \langle Q, R_0\rangle R_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n(\langle Q, R_n\rangle R_n + \langle Q, S_n\rangle S_n) \tag{2.54}$$

donde

$$R_0(\theta) = 1/\sqrt{2\pi},\ R_n(\theta) = \cos(n\theta)/\sqrt{\pi},\ S_n(\theta) = \operatorname{sen}(n\theta)/\sqrt{\pi},\quad n \in \mathbb{N}$$

y los coeficientes

$$\mu_n = -\frac{X_n(r_e)}{\lambda_w X_n'(r_i)} = \frac{2r_i^{n+1}r_e^n}{\lambda_w n(r_e^{2n} - r_i^{2n}) + \alpha(r_e^{2n+1} + r_e r_i^{2n})} > 0. \tag{2.55}$$

para todo $n \geq 0$.

2. *La secuencia numérica $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ es decreciente y convergente con*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0.$$

3. *Los valores singulares de A son dados por (2.55), siendo μ_0 autovalor simple, asociado a la función singular R_0; y μ_n es un autovalor con dupla multiplicidad asociado a las funciones singulares $\{S_n, R_n\}$ para $n \geq 1$. Consecuentemente, la imagen de A es caracterizada por*

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ f \in \mathcal{H} |\ \frac{1}{\mu_0^2}\langle f, R_0\rangle^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n^2}\left(\langle f, S_n\rangle^2 + \langle f, R_n\rangle^2\right) < \infty \right\}. \tag{2.56}$$

Demostración. La expansión (2.54) con μ_n en (2.55) resulta del Teorema 2.2.3 y está bien definida debido a la suavidad de V en $\Omega \cup \Gamma_e$.

Para mostrar que A es lineal, compacto y autoadjunto, definimos para cada $N \in \mathbb{N}$ el operador $A_N : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ como

$$A_N(Q) = \mu_0 \langle Q, R_0\rangle R_0 + \sum_{n=1}^{N} \mu_n(\langle Q, R_n\rangle R_n + \langle Q, S_n\rangle S_n).$$

Mostraremos que este operador es lineal, acotado, compacto y autoadjunto.

En efecto, de la definición se verifica que A_N es lineal. Sea $Q \in \mathcal{V}$, como el conjunto $\{R_0, R_n, S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es ortonormal en el espacio $\mathcal{V}$ se tiene

$$\begin{aligned}
|A_N Q|_{\mathcal{V}}^2 &= \left| \mu_0 \langle Q, R_0\rangle R_0 + \sum_{n=1}^{N} \mu_n \left(\langle Q, R_n\rangle R_n + \langle Q, S_n\rangle S_n\right) \right|_{\mathcal{V}}^2 \\
&= \mu_0^2 |\langle Q, R_0\rangle|^2 + \sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 \left(\langle Q, R_n\rangle^2 + \langle Q, S_n\rangle^2\right) \\
&\leq \mu_0^2 |Q|_{\mathcal{V}}^2 |R_0|_{\mathcal{V}}^2 + \sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 \left(|Q|_{\mathcal{V}}^2 |R_n|_{\mathcal{V}}^2 + |Q|_{\mathcal{V}}^2 |S_n|_{\mathcal{V}}^2\right)
\end{aligned}$$

$$\leq |Q|_{\mathcal{V}}^2 \left(\mu_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 \right)$$

Por lo tanto

$$|A_N Q|_{\mathcal{V}} \leq C_N |Q|_{\mathcal{V}} \quad \forall Q \in \mathcal{V},$$

donde $C_N = \left(\mu_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{N} \mu_n^2 \right)^{1/2}$. Se sigue que A_N es acotado.

También, note que el subespacio $\mathcal{R}(A_N)$ es generado por el conjunto linealmente independiente $\{R_0, R_1, S_1, \ldots, R_N, S_N\}$ de $2N+1$ elementos. Así, $dim(\mathcal{R}(A_N)) = 2N+1 < \infty$ y por el Teorema 1.1.16 tenemos que A_N es compacto.

Por otro lado, mostramos que A_N es auto adjunto. Sean $Q_1, Q_2 \in \mathcal{V}$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned}
\langle A_N Q_1, Q_2 \rangle &= \left\langle \mu_0 \langle Q_1, R_0 \rangle R_0 + \sum_{n=1}^{N} \mu_n (\langle Q_1, R_n \rangle R_n + \langle Q_1, S_n \rangle S_n), Q_2 \right\rangle \\
&= \mu_0 \langle Q_1, R_0 \rangle \langle R_0, Q_2 \rangle + \sum_{n=1}^{N} \mu_n \left(\langle Q_1, R_n \rangle \langle R_n, Q_2 \rangle + \langle Q_1, S_n \rangle \langle S_n, Q_2 \rangle \right) \\
&= \mu_0 \langle Q_1, \langle R_0, Q_2 \rangle R_0 \rangle + \sum_{n=1}^{N} \mu_n \left(\langle Q_1, \langle R_n, Q_2 \rangle R_n \rangle + \langle Q_1, \langle S_n, Q_2 \rangle S_n \rangle \right) \\
&= \langle Q_1, \mu_0 \langle Q_2, R_0 \rangle R_0 \rangle + \sum_{n=1}^{N} \mu_n \langle Q_1, \langle Q_2, R_n \rangle R_n + \langle Q_2, S_n \rangle S_n \rangle \\
&= \langle Q_1, \mu_0 \langle Q_2, R_0 \rangle R_0 \rangle + \left\langle Q_1, \sum_{n=1}^{N} \mu_n \left(\langle Q_2, R_n \rangle R_n + \langle Q_2, S_n \rangle S_n \right) \right\rangle \\
&= \left\langle Q_1, \mu_0 \langle Q_2, R_0 \rangle R_0 + \sum_{n=1}^{N} \mu_n \left(\langle Q_2, R_n \rangle R_n + \langle Q_2, S_n \rangle S_n \right) \right\rangle \\
&= \langle Q_1, A_N Q_2 \rangle, \quad \forall Q_1, Q_2 \in \mathcal{V}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto A_N es un operador autoadjunto.

Finalmente, vamos a mostrar que $\|A_N - A\| \to 0$ cuando $N \to \infty$. Sea $Q \in \mathcal{V}$ tal que $|Q|_{\mathcal{V}} \leq 1$, nuevamente utilizando la ortonormalidad del conjunto $\{R_0, R_n, S_n,\ n, \in \mathbb{N}\}$ en $\mathcal{V}$ se tiene

$$\begin{aligned}
|AQ - A_N Q|_{\mathcal{V}}^2 &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \left(\langle Q, R_n \rangle R_n + \langle Q, S_n \rangle S_n \right) - \sum_{n=1}^{N} \mu_n \left(\langle Q, R_n \rangle R_n + \langle Q, S_n \rangle S_n \right) \right|_{\mathcal{V}}^2 \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n^2 \left(\langle Q, R_n \rangle^2 + \langle Q, S_n \rangle^2 \right) \\
&\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n^2 \left(|Q|_{\mathcal{V}}^2 |R_n|_{\mathcal{V}}^2 + |Q|_{\mathcal{V}}^2 |S_n|_{\mathcal{V}}^2 \right) \\
&= 2|Q|_{\mathcal{V}}^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n^2 \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n^2.
\end{aligned}$$

Entonces, tenemos que

$$\|A - A_N\| = \sup_{|Q|_{\mathcal{V}} \leq 1} |AQ - A_N Q|_{\mathcal{V}} \leq \left(2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu_n^2 \right)^{1/2} \to 0 \text{ cuando } N \to \infty.$$

Donde, como veremos en el item (2), la convergencia de la última serie es debido a la desigualdad $\mu_n \leq \dfrac{2r_i}{\lambda_w n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, A es límite de una secuencia de operadores compactos y por el Teorema 1.1.17 se sigue que A es compacto. También, por el Teorema 1.1.20 se tiene que A es lineal, acotado y autoadjunto.

Por otro lado, como $\mu_n \in \mathbb{R}$ para cada $Q \in \mathcal{V}$, sigue que

$$\langle A(Q), Q \rangle = \mu_0 \langle Q, R_0 \rangle^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n \left(|\langle Q, R_n \rangle|^2 + |\langle Q, S_n \rangle|^2 \right) \geq 0.$$

entonces A es positivo.

Para mostrar que A es inyectivo, sea $Q \in \mathcal{V}$ tal que

$$0 = A(Q) = \mu_0 \langle Q, R_0 \rangle R_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n (\langle Q, R_n \rangle R_n + \langle Q, S_j \rangle S_n)$$

usando la ortonormalidad de la base $\mathcal{B}$ se tiene que

$$\langle Q, R_0 \rangle = 0, \ \langle Q, R_n \rangle = \langle Q, S_n \rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por el Teorema 1.1.8 item 3 se sigue que $Q = 0$.

(2) Para demostrar el segundo item, note que

$$\mu_n = \frac{2r_i}{\lambda_w n(\rho^{-n} - \rho^n) + \alpha r_e(\rho^n + \rho^{-n})},$$

siendo $\rho = r_i/r_e$.

En efecto, como $\rho < 1$, se tiene que las sucesiones $\{\rho^{-n} - \rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{\rho^{-n} + \rho^n\}_{n=0}^{\infty}$ son crecientes. Esto implica que la secuencia μ_n es no creciente y converge a cero cuando $n \to \infty$.

(3) Para probar el último item, notamos que

$$A(R_0) = \mu_0 R_0, \quad A(S_n) = \mu_n S_n, \quad A(R_n) = \mu_n R_n, \ \ n \geq 1$$

que es un resultado inmediato de la definición en (2.54) y la ortonormalidad de la base $\mathcal{B}$. Entonces

$$A^*(A(Q)) = \mu_0^2 \langle Q, R_0 \rangle R_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^2 (\langle Q, R_n \rangle R_n + \langle Q, S_n \rangle S_n).$$

Esto muestra que $\{\mu_n^2\}_{n=0}^{\infty}$ son los autovalores de A^*A. Por lo tanto, tenemos que $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, son valores singulares de A.

Para mostrar la última parte del item (3), consideremos $f \in \mathcal{R}(A) \subset D(A^\dagger)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ f \in \mathcal{H} \middle| \frac{1}{\mu_0^2} \langle f, R_0 \rangle^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \left(\langle f, S_n \rangle^2 + \langle f, R_n \rangle^2 \right) < \infty \right\}.$$

se sigue del Teorema de Picard. □

Observación 2.2.3. *Basados en la definición de μ_n, se verificar que los valores singulares del operador tienen decaimiento exponencial. Problemas que envuelven operadores compactos con este tipo de valores singulares, son denominados en la literatura como problemas severamente mal colocados.*

De la definición del operador A, se sigue que existe una relación entre el flujo Q y la temperatura en el borde externo $V(r_e, \theta)$. Una consecuencia inmediata de las propriedades teóricas de A es que el flujo Q puede ser determinado como $Q = A^{-1}(V|_{\Gamma_e})$ y descrito, de manera explicita por el Teorema de Picard, en términos del sistema singular de A y datos de entrada exactos $V|_{\Gamma_e}$.

Finalmente, observamos que el conjunto de funciones para las cuales es garantizada la existencia del flujo Q, es determinado por el tercer item del Teorema 2.2.4. En efecto, si queremos resolver $AQ = f$, para que una solución cuadrado integrable Q exista, la serie descrita en (2.56) precisa ser convergente, lo que significa que los coeficientes de Fourier $\langle f, R_n \rangle$, $\langle f, S_n \rangle$ de f, deben decaer para cero mas rápido que los valores singulares μ_n. En términos de regularidad, esto implica que el subespacio $\mathcal{R}(A)$ es formado por funciones muy suaves.

2.2.2. Solución del problema no homogéneo

En esta última parte mostraremos resultados de existencia y unicidad del problema auxiliar (2.5)-(2.7). Comenzaremos analizando los siguientes casos:

Si la solución $W = W(r)$ depende de la variable radial r, podemos despreciar las derivadas de W con respecto a θ en (2.5), y buscamos la solución W como una función que depende solamente de r.

Procediendo de esta manera, el problema (2.5)-(2.7) se transforma en un problema unidimensional

$$\lambda_w \left(rW'(r) \right)' = -rq_g(r), \quad r \in (r_i, r_e) \tag{2.57}$$

$$W'(r_e) = \frac{\alpha}{\lambda_w} \left(T_{env} - W(r_e) \right) \tag{2.58}$$

$$W'(r_i) = 0. \tag{2.59}$$

Integrando la ecuación (2.57) en (r_i, s), con $r_i < s < r_e$ y por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo[2] obtenemos

$$rW'(r)\Big|_{r_i}^{s} = -\frac{1}{\lambda_w} \int_{r_i}^{s} tq_g(t)dt$$

[2]Si f es una función real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, si suponemos que la integral

entonces, utilizando la condición de frontera (2.59) se sigue que

$$W'(s) = -\frac{1}{\lambda_w s}\int_{r_i}^{s} t q_g(t)dt \tag{2.60}$$

en particular, de la condición de frontera (2.58) se tiene que

$$-\frac{1}{\lambda_w r_e}\int_{r_i}^{r_e} t q_g(t)dt = W'(r_e) = \frac{\alpha}{\lambda_w}\left(T_{env} - W(r_e)\right),$$

luego

$$W(r_e) = T_{env} + \frac{1}{\alpha r_e}\int_{r_i}^{r_e} t q_g(t)dt. \tag{2.61}$$

Por otro lado, integrando la ecuación (2.60) en (r, r_e) obtenemos

$$W(r_e) - W(r) = -\frac{1}{\lambda_w}\int_{r}^{r_e}\left(\frac{1}{s}\int_{r_i}^{s} t q_g(t)dt\right)ds.$$

Finalmente, utilizando (2.61) obtenemos la correspondiente solución

$$W(r) = T_{env} + \frac{1}{\lambda_w}\int_{r}^{r_e}\left(\frac{1}{s}\int_{r_i}^{s} t q_g(t)dt\right)ds + \frac{1}{\alpha r_e}\int_{r_i}^{r_e} t q_g(t)dt$$

En particular, cuando la función q_g es constante, la solución W es

$$W(r) = -\frac{q_g}{4\lambda_w}(r - r_e^2) + \frac{q_g}{2\lambda_w} r_i^2 \ln(\frac{r}{r_e}) + T_{env} + \frac{q_g}{2\alpha r_e}(r_e^2 - r_i^2). \tag{2.62}$$

Así, para el caso en que q_g es constante la función definida en (2.62) verifica que $W \in \mathcal{C}^{\infty}[r_e, r_i]$.

Observación 2.2.4. *Resaltamos que el caso q_g constante aparece frecuentemente en problemas inversos en transferencia de calor, en los cuales q_g es generado en laboratorio y representa una fuente de calor uniforme generado por el efecto Joule [17, 37].*

La existencia y unicidad de la solución débil del problema (2.5)-(2.7), para el caso donde el termino q_g depende de ambas variables, es determinada por el Teorema de Lax-Milgram a través de la formulación del siguiente problema variacional: Encuentre $W \in \mathcal{H}$ tal que

$$a(W, w) = g(w), \quad \forall w \in \mathcal{H}, \tag{2.63}$$

siendo a el operador bilineal definido en (2.11) y

$$g(w) = \frac{1}{\lambda_w}\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} r q_g(r,\theta) w(r,\theta) dr d\theta + \frac{\alpha r_e T_{env}}{\lambda_w}\int_0^{2\pi} w|_{\Gamma_e} d\theta. \tag{2.64}$$

$\int_a^b f'(t)dt$ existe y f' es continua en el intervalo abierto (a, b), entonces

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Teorema 2.2.5. *Sea a definido en (2.11) y g definido en* (2.64)*. Si $q_g \in L^2(\Omega)$, entonces el problema variacional* (2.63) *tiene una única solución.*

Demostración. Mostraremos que g es lineal y acotada. En efecto, de la definición se tiene que g es lineal. Para mostrar que es acotada utilizamos la desigualdad de Hölder y la del trazo, entonces

$$\begin{aligned}|g(w)| &\leq \frac{r_e}{\lambda_w}|q_g|_{2,\Omega}|w|_{2,\Omega} + \frac{\alpha r_e T_{env}}{\lambda_w}|w|_{2,\Gamma_e} \\ &\leq \frac{r_e}{\lambda_w}|q_g|_{2,\Omega}\|w\|_{\mathcal{H}} + \frac{\alpha r_e T_{env}}{\lambda_w}C_\Gamma\|w\|_{\mathcal{H}} \\ &= \left(\frac{r_e|q_g|_{2,\Omega} + \alpha r_e T_{env}C_\Gamma}{\lambda_w}\right)\|w\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento efectuado para el problema homogéneo, el resultado sigue del Teorema de Lax-Milgram [3] pues el operador a es continuo, coercivo y g es lineal y acotada.

□

Finalmente, utilizando la coercividad de a se tiene

$$\begin{aligned}\|W\|_{\mathcal{H}} &\leq \rho^{-1}\frac{a(W,W)}{\|W\|_{\mathcal{H}}} \leq \rho^{-1}\sup_{w\in\mathcal{H}}\frac{|a(W,w)|}{\|w\|_{\mathcal{H}}} \leq \rho^{-1}\sup_{w\in\mathcal{H}}\frac{|g(w)|}{\|w\|_{\mathcal{H}}} \\ &\leq \frac{r_e|q_g|_{2,\Omega} + \alpha r_e T_{env}C_\Gamma}{\lambda_w\rho}. \qquad (2.65)\end{aligned}$$

Observación 2.2.5. *De lo resultados de existencia y unicidad descritos anteriormente, podemos concluir que la función $T = V + W$ está bien definida y es solución débil del problema (1)-(3).*

También de las desigualdades (2.27) *y* (2.65) *se tiene que*

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathcal{H}} &\leq \|V\|_{\mathcal{H}} + \|W\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq c_2|Q|_{\mathcal{V}} + \frac{r_e|q_g|_{2,\Omega} + \alpha r_e T_{\text{env}}C_\Gamma}{\lambda_w\rho}.\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.2.4, podemos formular la relación entre el flujo Q y la temperatura T en la frontera Γ_e vía la ecuación

$$A(Q) = T|_{\Gamma_e} - W|_{\Gamma_e}. \qquad (2.66)$$

Esta relación será la base para estudiar el problema inverso correspondiente: Dado $f \in \mathcal{V}$, determine una función $Q \in \mathcal{V}$ tal que $A(Q) = f$.

Así, esta última ecuación puede ser utilizada en aplicaciones industriales para determinar el coeficiente Q a partir de las informaciones obtenidas $T|_{\Gamma_e}$, $W|_{\Gamma_e}$. Note que para el caso en que la función q_g es constante es posible determinar $W(r_e)$ de manera exacta.

Para el caso en que $q_g = q_g(r,\theta)$ los datos $W|_{\Gamma_e}$ pueden ser obtenidos utilizando algún método numérico de aproximación.

Capítulo 3

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de Poisson, con condiciones de frontera tipo Robin, en una región anular.

El estudio de este problema fue motivado principalmente por el trabajo experimental de Bozzoli [13] y por las diferentes aplicaciones de las ecuaciones elípticas, en procesos industriales tales como pasteurización de alimentos, corrosión de materiales, entre otros.

La estrategia utilizada en este trabajo ha sido dividir el problema principal en dos subproblemas, con soluciones V y W, respectivamente, tal que $T = V + W$. Utilizando los resultados de la teoría de espacios de Sobolev y el Teorema de Lax-Milgram hemos demostrado la existencia y unicidad de las soluciones correspondientes sobre ciertas hipótesis del flujo Q y la función q_g, respectivamente.

Entre los resultados obtenidos más importantes se encuentran la expresión explícita de la solución V, en términos de series de Fourier, junto con resultados de regularidad de la misma, las cuales dependen de las propiedades de la función Q. Por otro lado, también mostramos la existencia de la solución W cuya expresión puede ser obtenida explicitamente dependiendo de las características de q_g. En particular, cuando ésta función es constante obtenemos una expresión simple para esta solución.

Finalmente, también hemos establecido una relación entre el flujo de transferencia de calor Q y la temperatura externa $T(r_e, \cdot)$ a través de un operador lineal, limitado, compacto, autoadjunto, positivo e inyectivo. Este último resultado permite el estudio del problema inverso correspondiente: Dado $f \in \mathcal{V}$, determine una función $Q \in \mathcal{V}$ tal que $A(Q) = f$.

En la práctica, este tipo de problemas presentan algunas dificultades cuando las informaciones en los datos, denotada por f_δ, presentan inexactitudes con respecto a los datos exactos f, esto es, existe una estimativa de error

$$|f - f_\delta|_{\mathcal{V}} \leq \delta,$$

donde $\delta > 0$. Si denotamos por $Q_\delta := A^{-1} f_\delta$ la solución correspondiente, tenemos que la discontinuidad del operador A^{-1} implica que el error en la solución $|Q - Q_\delta|_{\mathcal{V}}$ diverge a medida que δ tiende a cero. Así, vemos que pequeñas perturbaciones en las informaciones de entrada pueden resultar en grandes alteraciones en la solución aproximada Q_δ.

En la literatura podemos encontrar diferentes estrategias para tratar tipo de problemas, llamados métodos de regularización, entre ellas mencionamos la Expansión

Truncada en Valores Singulares (TSVE) y Regularización de Tikhonov (RT).

Finalmente, el estudio de este problema inverso puede ser extendido al caso tridimensional a partir del modelo de la ecuación de Poisson en coordenadas cilíndricas.

Apéndice A

Sucesiones y series de funciones

La demostración de los siguientes teoremas pueden ser encontrados en Rudin [40].

Definición A.0.1. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones reales definidas sobre un subconjunto I de $\mathbb{R}$.*

1. *La secuencia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente en I a una función f si, para cada $x_0 \in I$ fijo, la secuencia numérica $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x_0)$. Esto equivale a decir que, dado $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in I$, existe un entero $N = N(\varepsilon, x_0)$ tal que para todo $n \geq N$*
$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

2. *La secuencia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformente en I a una función f si, dado $\varepsilon > 0$ existe un entero $N = N(\varepsilon)$ tal que para todo $n \geq N$*
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$
para todo $x \in I$.

Teorema A.0.6. *La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidas en I, converge uniformemente en I si y solo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que $m, n \geq N$ implica*
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon,$$
para todo $x \in I$.

Teorema A.0.7. *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia de funciones continuas en I, y si*
$$f_n \to f$$
uniformemente en I, entonces f es continua en I.

Teorema A.0.8. *Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones diferenciables en $[a, b]$ tal que $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, para algún punto $x_0 \in [a, b]$. Si $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[a, b]$, entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[a, b]$ hacia una función f, y*
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Definición A.0.2. *Sea una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas en I. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la secuencia definida por*

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$$

es la suma parcial cuyo término general es f_n.

Si $\{s_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, para todo $x \in I$, la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in I$$

es llamada serie de la serie s_n.

Teorema A.0.9. *Sea una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definidas en I, y supongamos que*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall n \in N,\ \forall x \in I.$$

En estas condiciones la secuencia de funciones asociada $\left\{\sum_{j=1}^{n} f_j\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente si la secuencia numérica $\left\{\sum_{j=1}^{n} M_j\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Apéndice B

Frontera

Definición B.0.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, decimos que Ω tiene frontera $\Gamma = \partial\Omega$ Lipschitz, si para cada $N \in \mathbb{N}$ existen subconjuntos abiertos $U_1, \ldots, U_n \subset \mathbb{R}^n$ tales que*

1. *$\partial\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} U_i$.*
2. *Para cada $i = 1, \ldots, N$ la intersección $\partial\Omega \cap U_i$ es descrito como el gráfico de una función Lipschitz continua,*

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y $k \in \mathbb{N}$. Existen diferentes maneras de definir la regularidad de la frontera de un conjunto abierto. Escogemos la definición dada en Evans [21].

Definición B.0.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado y $k \in \mathbb{N}$. Decimos que la frontera $\Gamma = \partial\Omega$ es de clase C^k, si para cada punto $x_0 \in \Gamma$, existe $r > 0$ y una función $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que*

$$\Omega \cap B(x_0, r) = \{x \in B(x_0, r);\ x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

1. *Decimos que la frontera Γ es de clase C^∞ si la función γ es de clase $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Decimos que Γ es analítica si el mapeo γ es analítico.*

Definición B.0.5.

1. *Si $\partial\Omega$ es de clase C^1, entonces a lo largo de $\partial\Omega$ es definido el campo vectorial normal unitário en la dirección externa $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$. El vector normal unitário en el punto $x_0 \in \partial\Omega$ es $\nu(x_0) = \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$.*
2. *Sea $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, definimos la derivada normal de u como*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := Du \cdot \nu$$

En los siguientes teoremas asumimos que Ω es un subconjunto abierto y limitado de R^n con frontera $\partial\Omega$ de clase C^1.

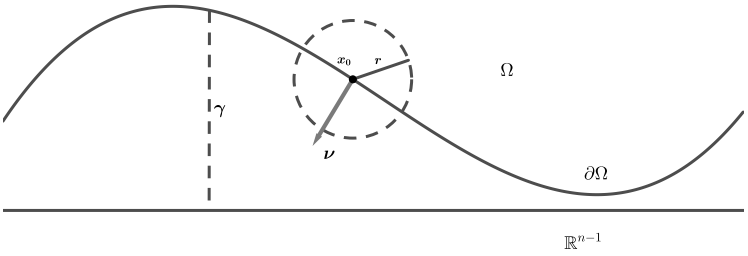

Figura B.1: Frontera

Teorema B.0.10 (**Teorema de Gauss-Green**). *Supongamos que* $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$*, entonces*

$$\int_\Omega u_{x_i} dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i dS, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Demostración. Ver [21].

Teorema B.0.11 (**Integración por partes**). *Supongamos que* $u, v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$*, entonces*

$$\int_\Omega u_{x_i} v dx = -\int_\Omega u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu_i dS, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Bibliografía

[1] Abdesslam Boulkhemair, Abdelkrim Chakib. *On the uniform Poincaré inequality*, Communications in Partial Differential Equations, Taylor Francis, 2007, 32 (7-9), pp.1439-1447.

[2] G. Alessandrini, L. Del Piero and L. Rondi, *Stable determination of corrosion by a single electrostatic boundary measurement*, Inverse Problems, vol 19, 973-984, 2003. 5

[3] S.S. Antman, J. E. Marsden, L. Sirovich, *Applied Mathematical Science*, Springer Sience+Business Media, vol 159, 2004.

[4] Bedin, Luciano and Bazán, F.S.V. and Quiroz, J.R., *Method for recovering boundary data in a two-dimensional Poisson equation on annular domain*, Journal of Computational and Applied Mathematics, doi 10.1016/j.cam.2018.03.016, vol. 342, 2018.

[5] F. S.V. Bazán, L. Bedin, F. Bozzoli, *Numerical estimation of convective heat transfer coefficient through linearization*, J. Heat Mass Transfer, 102, 1230-1244, 2016.

[6] J. V. Beck, B. Blackwell, Jr. Ch. R. Clair, *Inverse Heat Conduction - Ill-posed problems*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1985.

[7] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. [Functional Analysis: Theory and applications]*, Applied Mathematics Series for the Master's Degree. Masson, Paris, 1983.

[8] F. Bozzoli, L. Cattani, S. Rainieri, F. S. V. Bazán, L. S. Borges, *Estimation of the local heat-transfer coefficient in the laminar flow regime in coiled tubes by the Tikhonov regularisation method*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 72, pp. 352-361, 2014.

[9] B. G.M. Araújo, C. C. Dantas, A. E. Moura,S. B. Melo, R. F. Pires, E. A. de O. Lima, V. A. dos Santos, *A comparison of regularization operators for noisy gamma-ray tomographic reconstruction*, Progress in Nuclear Energy, Elsevier, 2015.

[10] H. Cao, S. V. Pereverzev and E. Sincich, *Natural linearization for corrosion identification*, Journal of Physics: Conference Series 135,012027, 2008.

[11] H. Cao and S. V. Pereverzev, *Natural linearization for the identification of a diffusion coefficient in a quasi-linear parabolic system from short-time observations*, Inverse Problems 22, 2311-2330, 2006.

[12] F. Bozzoli, L. Cattani, S. Rainieri, *Effect of wall corrugation on local convective heat transfer in coiled tubes*, Elsevier Science, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol 101, pag. 76-90, 2016.

[13] F. Bozzoli, L. Cattani, S. Rainieri, G. Pagliarini, *Estimation of local heat transfer coefficient in coiled tubes under inverse heat conduction problem approach*, Exp. Therm. Fluid Sci. 59, 246-251, 2014.

[14] Moreira Cavalcanti, M. Domingos Cavalcanti, V. N. *Iniciaçao á Teoria das Distribuiçoes e aos Espaços de Sobolev*, 2007.

[15] H. T. Chen and X. Y. Wu, *Estimation of heat transfer coefficient in two-dimensional inverse heat conduction problems*, Numerical Heat Transfer Part B 50, 375-394, 2006.

[16] H. T. Chen and X.Y. Wu, *Investigation of heat transfer coefficient in two-dimensional transient inverse heat conduction problems using the hybrid inverse scheme*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 73, 107-122, 2008.

[17] M. J. Colaço, C. J. Alves and F. Bozzoli, *The reciprocity function approach applied to the non-intrusive estimation of spatially varyng internal heat transfer coeffcients in ducts: numerical and experimental results*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 90, pp. 1221-1231, 2015.

[18] Dean W. R., *Note on the motion of fluid in a curved pipe*, Phil. Mag. 4 208, 1927.

[19] Dennis G. Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, Brooks Cole, isbn 0495108243,9780495108245, edition 9, 2008.

[20] H. W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, vol. 375 of Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996.

[21] L. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, isbn 9780821807729,0821807722, 1998.

[22] James F. Epperson, *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., 2002, New York.

[23] K. Futagami, A. Yoshiyuki, *Laminar heat transfer in a helically coiled tube*, Int J Heat Mass Transfer 31 (2) (1988) 387-396.

[24] M. Helfgott, E. Vera, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales*, Edición 1, AMARU editores, 1982.

[25] J.S. Jayakumar, S.M. Mahajani, J.C. Mandal, Knannan N. Iyer, P.K. Vijayan, *CFD analysis of single-phase flows inside helically coiled tubes*, Comput Chem Eng 34 (2010) 430-446.

[26] Bangti Jin,Yao Zheng, *Boundary knot method for the Cauchy problem associated with the inhomogeneous Helmholtz equation*, Elsevier, 2005.

[27] L. V. Kantorovich; G P Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon Pr, isbn 0080264867,9780080264868, 1982, edición 2.

[28] S. Kesavan, *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley & Sons Inc, 0470210508,9780470210505, 1989.

[29] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer-Verlag New York, Applied Mathematical Sciences 120, 2011.

[30] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer New York, isbn 3642971482, Applied Mathematical Sciences 82, Softcover reprint of the original 1st ed. 1989, 1999.

[31] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley, isbn 0471507318, 1978.

[32] Hervé Le Dret, Brigitte Lucquin , *Partial Differential Equations: Modeling, Analysis and Numerical Approximation*, Birkhäuser Basel, isbn 978-3-319-27065-4,978-3-319-27067-8, 2016, International Series of Numerical Mathematics 168, ed. 1,

[33] T. Lu, B. Liu, P. X. Jiang, *Inverse estimation of the inner wall temperature fluctuations in a pipe elbow*, Applied Thermal Engineering, 31 1976-1982 (2011).

[34] L. A. Medeiros and M. Milla Miranda, *Espaços de Sobolev (Iniciação ao problemas não homogêneos)*, Instituto de Matemática-UFRJ, http://www.dmm.im.ufrj.br/ medeiros/LinkedDocuments/livroespsobolev.pdf, 2000.

[35] P. Naphon and S. Wongwises, *A review of flow and heat transfer characteristics in curved tubes*, Renewable and Sustainable Energy Reviews 10, 463-490, 2006.

[36] M. F. Pakdaman, M.A. Akhavan-Behabadi and P. Razi, *An experimental investigation on thermo-physical properties and overall performance of MWCNT/heat transfer oil nanofluid flow inside vertical helically coiled tubes*, Experimental Thermal and Fluid Science 40, 103111, 2012.

[37] S. Rainieri, F. Bozzoli, L. Cattani, G. Pagliarini, *Experimental investigation on the convective heat transfer enhancement for highly viscous fluids in helical coiled corrugated tubes*, J. Phys.: Conf. Ser. 395, Paper No. 012032, 2012.

[38] S. Rainieri, F. Bozzoli, G. Pagliarini, *Experimental investigation on the convective heat transfer in straight and coiled corrugated tubes for highly viscous fluids: Preliminary results*, Int. J. Heat Mass Tranfer 55 (1-3), 498-504, 2012.

[39] S. Rainieri, F. Bozzoli, L. Cattani, G. Pagliarini, *Compound convective heat transfer enhancement in helically coiled wall corrugated tubes*, Int. J. Heat Mass Tranfer 59, 353-362, 2013.

[40] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, isbn 0-07-054235-X, 9780070542358, International Series in Pure and Applied Mathematics, edition 3rd, 1976.